

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



UANL



FCFM

TESINA

**MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DEL ÍNDICE DE
PRECIOS Y COTIZACIONES (IPC) DE MÉXICO**

Presentado por:
Jorge Lucio Estupiñán Reyna

Para optar por el grado de:
LICENCIADO EN FÍSICA

Bajo la supervisión de:
Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez

Noviembre 2025

Índice general

Resumen	3
I. Contexto, Planteamiento y Objetivos del Estudio	4
I.. Introducción	4
II.. Antecedente	5
III.. Justificación	6
IV.. Objetivo General	7
IV..1. Objetivos Específicos	7
II. Preparación de Datos, Pruebas Estadísticas y Desarrollo Analítico	8
I.. Planteamiento del Problema	8
II.. Hipótesis	9
III.. Método	9
III..1. Obtención y depuración de los datos	9
III..2. Cálculo de los retornos logarítmicos	9
III..3. Análisis descriptivo	10
III..4. Pruebas estadísticas y diagnóstico	10
III..5. Implementación del modelo GARCH(1,1)	11
III..6. Evaluación del modelo	11
III..7. Comparación con el modelo GJR-GARCH(1,1)	11
III..8. Análisis final	12
IV.. Marco Conceptual	12
IV..1. Mercados financieros, riesgo y volatilidad	12

IV..2.	El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)	12
IV..3.	Retornos logarítmicos	13
IV..4.	El segundo momento de los retornos	13
IV..5.	Análisis de los retornos	14
IV..6.	Pruebas estadísticas y diagnóstico	15
IV..7.	Modelo GARCH(1,1)	16
IV..8.	Modelo GJR-GARCH	17
IV..9.	Métricas teóricas de evaluación de los modelos de volatilidad	19
III	Modelos Estocásticos Aplicados al IPC: Estimación y Resultados	21
I..	Propuesta de solución	21
II..	Resultados	22
II..1.	Comportamiento de los retornos logarítmicos	22
II..2.	Comportamiento de los retornos logarítmicos al cuadrado	23
II..3.	Ánálsis gráfico exploratorio de los retornos logarítmicos	24
II..4.	Pruebas estadísticas aplicadas a los retornos logarítmicos	26
II..5.	Modelo GARCH(1,1) con distribución t-Student	27
II..6.	Modelo GJR-GARCH(1,1) con distribución t-Student	29
III..	Discusión	31
IV..	Conclusiones	32
V..	Bibliografía	34
	Cronograma de actividades	36

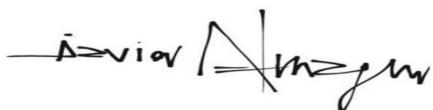
Resumen

Este trabajo analiza el comportamiento estadístico del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México mediante la construcción y evaluación de modelos estocásticos que permiten describir la variabilidad de su serie temporal. Para ello, se utilizaron datos diarios del índice y se calcularon retornos logarítmicos como base para el análisis cuantitativo. Posteriormente, se aplicaron pruebas estadísticas para evaluar estacionariedad, independencia y presencia de heterocedasticidad, confirmando la pertinencia de utilizar modelos de volatilidad condicional.

La metodología incluyó la estimación de dos modelos: GARCH(1,1) y su extensión asimétrica GJR-GARCH(1,1), ambos con innovaciones t-Student. Se obtuvieron sus parámetros, la trayectoria de volatilidad estimada y diferentes métricas de desempeño, incluyendo criterios de información (AIC y BIC) y medidas de error entre la varianza estimada y la varianza de los retornos.

Los resultados muestran que ambos modelos representan adecuadamente la dinámica del IPC, con estimaciones consistentes y parámetros dentro de los rangos esperados en series financieras. El modelo GARCH(1,1) presenta un ajuste ligeramente más parsimonioso, mientras que el modelo GJR-GARCH(1,1) incorpora asimetría sin mejorar de manera significativa las métricas de evaluación. En conjunto, el estudio proporciona una descripción estocástica sólida del IPC y sienta bases para trabajos posteriores en análisis financiero.

Bajo la supervisión de:



Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas – UANL

Capítulo I

Contexto, Planteamiento y Objetivos del Estudio

I. INTRODUCCIÓN

El estudio cuantitativo de los mercados financieros se ha consolidado como una herramienta fundamental para comprender el comportamiento de los principales indicadores económicos. Entre ellos, el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) constituye el principal referente bursátil de México, al sintetizar de manera agregada el desempeño de las empresas más representativas del mercado nacional. Su evolución diaria refleja tanto la dinámica económica del país como la respuesta del mercado a factores nacionales e internacionales, lo que convierte su análisis en un elemento clave para el entendimiento de la actividad financiera contemporánea.

A lo largo de las últimas décadas, el análisis estocástico de series financieras ha permitido identificar patrones característicos en índices accionarios, como cambios abruptos, períodos de estabilidad relativa y episodios de alta variabilidad. Estos rasgos, ampliamente documentados en la literatura, motivan el uso de herramientas estadísticas que permitan describir con mayor precisión su comportamiento temporal. En este marco, el estudio formal del IPC mediante modelos estocásticos contribuye no solo a su caracterización matemática, sino también a la comprensión de su estructura dinámica y de los factores que influyen en sus fluctuaciones.

A pesar de que los modelos estocásticos han sido aplicados extensamente en el análisis de índices internacionales, su uso para describir el comportamiento del IPC ha recibido menor atención sistemática. Abordar esta brecha es relevante para fortalecer el estudio cuantitativo del mercado mexicano y generar una base metodológica que permita analizar sus propiedades estadísticas con mayor detalle.

En este contexto, el objetivo general de este trabajo es modelar estocásticamente el comportamiento del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, con el propósito de describir su dinámica temporal y analizar cómo sus fluctuaciones pueden representarse mediante modelos estocásticos de volatilidad.

II. ANTECEDENTE

El estudio de los mercados financieros ha cambiado significativamente en las últimas décadas, la necesidad de comprender y predecir el comportamiento de los precios de los activos se ha visto impulsado cada vez más por la volatilidad e incertidumbre de este mismo. En México el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) se ha consolidado como uno de los principales indicadores del desempeño del mercado bursátil, ya que refleja la evolución del valor de las distintas empresas más representativas e importantes de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). El análisis de esta índice resulta altamente fundamental para la evaluación de riesgos, así como la toma de decisiones de inversiones y la formulación de políticas económicas, ya que esta permite medir la respuesta del mercado ante choques internos y externos, como crisis financieras, cambios en la política monetaria o eventos globales de alta incertidumbre.

Desde un punto de vista teórico, el comportamiento de los precios y retornos financieros fue abordado mediante el uso de modelos estocásticos los cuales asumen la presencia de componentes aleatorias en su dinámica. Louis Bachelier fue quien sentó los primeros antecedentes, pues él propuso que los precios de los activos siguen un proceso aleatorio similar al movimiento browniano. Esta idea fue retomada y formalizada en las finanzas modernas por Black y Scholes (1973), quienes modelaron los precios de los activos mediante procesos de difusión continua para valorar opciones financieras. Estas aportaciones dieron origen a la noción del Movimiento Browniano Geométrico (GBM) como modelo base para describir la evolución de precios en tiempo continuo.

Con el paso del tiempo los mercados se volvieron más complejos y los datos financieros fueron más accesibles, esto llevó a la necesidad de representar con mayor precisión la dependencia temporal y la volatilidad observada en los retornos. De esta manera los enfoques que están basados en series temporales adquirieron una mayor relevancia. Gracias a los modelos ARIMA y ARMA, que fueron propuestos por Box y Jenkins (1976), se logró modelar la media condicional de una serie, considerando la dependencia autorregresiva como el efecto de los choques pasados. Sin embargo, estos modelos asumían una varianza constante, lo que resultó inadecuado para series financieras, donde la volatilidad suele cambiar en el tiempo.

El avance en la modelación de la volatilidad se dio con la introducción del modelo ARCH

(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) por Engle (1982), quien incorporó la heterocedasticidad — es decir, la dependencia de la varianza respecto a las fluctuaciones previas. Más adelante Bollerslev (1986) generalizó esta formulación mediante el modelo GARCH (Generalized ARCH), permitiendo una estructura más flexible. Esto llevó a que los modelos tipo GARCH se convirtieran en herramientas fundamentales para el análisis de volatilidad y riesgo financiero.

Con el incremento y desarrollo de nuevas tecnologías además del acceso a bases de datos de alta frecuencia, los modelos estocásticos aplicados a las finanzas han seguido evolucionando. Se han propuesto extensiones como EGARCH, GJR-GARCH, y modelos con innovaciones no normales (t-Student, GED), los cuales permiten capturar características empíricas como asimetrías, leptocurtosis y efectos de apalancamiento.

En Latinoamérica, se han realizado diversos estudios que emplean la modelación estocástica al análisis de índices bursátiles y series macroeconómicas. Por ejemplo, Mushtaq y Ali (2025) y Olowofeso y Afolabi (2024) emplean modelos ARMA-GARCH para estudiar la volatilidad en mercados emergentes, demostrando que las estructuras de volatilidad son esenciales para capturar los patrones dinámicos de los precios. En México, la aplicación de este tipo de modelos al IPC permite no solo identificar períodos de alta y baja volatilidad, sino también evaluar el impacto de factores externos, como crisis globales o fluctuaciones, sobre el comportamiento del mercado nacional.

La modelación estocástica ha pasado de ser una representación teórica del movimiento aleatorio de los precios a convertirse en una herramienta práctica de análisis financiero. Los modelos modernos integran elementos deterministas y aleatorios, proporcionando una visión más completa del comportamiento de las series financieras.

III. JUSTIFICACIÓN

El análisis estocástico del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México responde a la necesidad de contar con herramientas cuantitativas que describan con rigor el comportamiento dinámico de este indicador financiero. El IPC es una referencia central del mercado bursátil mexicano y su evolución sintetiza, en gran medida, las condiciones económicas del país. No obstante, su estudio mediante modelos estocásticos formales ha recibido menor atención en comparación con el trabajo desarrollado para índices de mercados internacionales, lo que revela un espacio de oportunidad para profundizar en su análisis.

El desarrollo de un modelo estocástico para el IPC permite identificar patrones, fluctuaciones y propiedades esenciales de su comportamiento temporal, aportando un marco metodológico sólido para su evaluación cuantitativa. Este tipo de aproximaciones favorece una comprensión más completa del funcionamiento del mercado mexicano, facilita compa-

raciones con otros contextos financieros y sienta bases para estudios posteriores orientados a la estimación del riesgo, la elaboración de escenarios prospectivos o la construcción de modelos más complejos.

La viabilidad del proyecto se sustenta en la disponibilidad de series históricas accesibles, así como en el uso de técnicas estadísticas contemporáneas que permiten analizar procesos financieros con un alto nivel de detalle. De esta manera, el trabajo contribuye a fortalecer el análisis cuantitativo del IPC mediante la implementación de modelos estocásticos que describen de manera sistemática su comportamiento a lo largo del tiempo.

IV. OBJETIVO GENERAL

Modelar estocásticamente los retornos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, con la finalidad de caracterizar su comportamiento dinámico y evaluar la capacidad de distintos modelos, para representar y capturar su volatilidad en el tiempo.

IV..1 Objetivos Específicos

1. Describir estadísticamente la serie de retornos del IPC, identificando sus propiedades empíricas, como la estacionariedad, la distribución y la presencia de heterocedastidad.
2. Implementar y estimar modelos de volatilidad estocástica, comparando su desempeño con base en criterios de información y métricas de error.
3. Evaluar la robustez y capacidad de los modelos seleccionados, analizando la relación entre la varianza estimada y la varianza de los retornos, a fin de determinar cuál ofrece un mejor ajuste.

Capítulo II

Preparación de Datos, Pruebas Estadísticas y Desarrollo Analítico

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los mercados financieros de hoy en día, la volatilidad desempeña un papel muy importante en la evaluación del riesgo y en la formación de precios de los activos. Sin embargo, esta volatilidad no es constante a lo largo del tiempo, sino que presenta períodos de estabilidad y de inestabilidad repentina que responden tanto a factores económicos internos como a eventos globales. Esta característica, conocida como *heterocedasticidad*, ha sido ampliamente documentada en diversos campos de la economía, pero su comportamiento específico en el mercado bursátil mexicano, representado por el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), aún presenta áreas de análisis no del todo exploradas.

A pesar de los avances teóricos en la modelación estocástica y en el desarrollo de modelos de volatilidad, como los propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986), persisten desafíos al momento de capturar adecuadamente los patrones observados en los retornos del IPC. Estudios previos sobre mercados emergentes (Mushtaq & Ali, 2025; Olowofeso & Afolabi, 2024) han demostrado que las fluctuaciones en la varianza de los retornos tienden a seguir procesos no lineales, caracterizados por colas pesadas y efectos asimétricos ante fluctuaciones positivas o negativas, lo que dificulta el uso de modelos lineales tradicionales. Sin embargo, existe escasa evidencia actualizada sobre qué modelo ofrece una mejor representación del comportamiento del IPC mexicano, especialmente tras episodios de crisis o alta incertidumbre financiera.

En la práctica, muchos análisis aplicados al mercado mexicano han utilizado medidas de volatilidad simples, siendo pocos los que consideran la estructura temporal o las propiedades estadísticas de los retornos. Esta limitante puede conducir a interpretaciones erróneas de los riesgos financieros y de las fluctuaciones del mercado frente a perturbaciones ex-

ternas. Por tanto, esto abre la puerta a la necesidad de aplicar y contrastar modelos estocásticos de volatilidad, que permitan cuantificar de forma más precisa la dinámica de los retornos.

Así, el problema central que aborda esta investigación es la falta de evidencia sobre la modelación de la volatilidad del IPC mexicano mediante modelos estocásticos, capaces de capturar adecuadamente las fluctuaciones y la persistencia de la varianza.

II. HIPÓTESIS

La volatilidad de los retornos de los precios de cierre del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México puede representarse adecuadamente mediante un proceso estocástico de la familia GARCH, el cual permite capturar la persistencia temporal y la heterocedasticidad característica de los retornos financieros.

Se espera que un modelo de este tipo logre capturar la dinámica de la varianza del IPC y mantenga una relación significativa con la varianza observada.

III. MÉTODO

III..1 Obtención y depuración de los datos

Se obtendrán los datos históricos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, correspondientes al periodo comprendido entre el 21 de agosto de 2020 y el 21 de agosto de 2025, a través de la base de datos disponible en *Investing.com*.

El archivo descargado en formato CSV contendrá, entre otras variables, la fecha de cotización, el precio de apertura, el precio máximo, el precio mínimo, el precio de cierre y el volumen de transacciones. Una vez cargado el archivo en el software RStudio, se identificará y seleccionará la variable correspondiente al precio de cierre diario.

Posteriormente, se realizará un proceso de depuración en el que se eliminarán registros duplicados, valores faltantes y observaciones que no correspondan a días hábiles de operación bursátil. Los datos se ordenarán cronológicamente para garantizar la coherencia temporal de la serie. Este procedimiento dará como resultado una base limpia y estructurada, conformada únicamente por la secuencia de precios de cierre diarios.

III..2 Cálculo de los retornos logarítmicos

A partir de la base depurada, se calcularán los retornos logarítmicos con el objetivo de transformar la serie original de precios en una serie que represente adecuadamente las

variaciones porcentuales del índice a lo largo del tiempo. El retorno logarítmico se define como:

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad (\text{II.1})$$

donde P_t es el precio de cierre del día t y P_{t-1} es el precio de cierre del día anterior.

Esta transformación facilita el análisis econométrico, ya que tiende a estabilizar la varianza y convierte la serie de precios en una serie estacionaria en media. Una vez obtenidos los valores de r_t , se verificará la ausencia de valores faltantes o atípicos derivados del cálculo.

Finalmente, se generará la gráfica temporal de los retornos con el propósito de visualizar su comportamiento general.

III..3 Análisis descriptivo

Con el objetivo de comprender las propiedades estadísticas de la serie de retornos del IPC, se elaborarán las siguientes representaciones:

- Histograma de los retornos, para observar la forma de la distribución y la posible presencia de colas pesadas.
- Función de distribución acumulada empírica (ECDF), para analizar las probabilidades acumuladas y el comportamiento de las colas.
- Función de autocorrelación (ACF) y función de autocorrelación parcial (PACF), para identificar dependencias temporales en la serie.

El análisis descriptivo permitirá detectar patrones relevantes que serán utilizados en la selección del modelo estocástico.

III..4 Pruebas estadísticas y diagnóstico

Se aplicarán las siguientes pruebas:

- Prueba ADF para verificar la estacionariedad de la serie.
- Prueba de Ljung–Box para evaluar autocorrelación en los retornos.
- Prueba ARCH-LM para detectar heterocedasticidad en la varianza.
- Prueba de Jarque–Bera para contrastar la hipótesis de normalidad en los retornos.

La evidencia de heterocedasticidad justificará el uso de modelos de volatilidad.

III..5 Implementación del modelo GARCH(1,1)

Confirmada la presencia de heterocedasticidad, se estimará un modelo GARCH(1,1). La especificación del modelo es:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad (\text{II.2})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (\text{II.3})$$

La estimación se realizará en RStudio utilizando el paquete `rugarch`, empleando la distribución t-Student para capturar colas pesadas.

III..6 Evaluación del modelo

Se evaluará el desempeño del modelo mediante:

- Error Cuadrático Medio (MSE)
- Error Absoluto Medio (MAE)
- Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)
- Función de pérdida QLIKE
- MSE en log-varianza
- Coeficiente de correlación entre varianza empírica y estimada

III..7 Comparación con el modelo GJR-GARCH(1,1)

Con el fin de capturar posibles efectos asimétricos, se estimará adicionalmente un modelo GJR-GARCH(1,1), cuya especificación es:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 I_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (\text{II.4})$$

donde $I_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ y 0 en caso contrario.

Ambos modelos se compararán mediante las mismas métricas de desempeño y los criterios de información AIC y BIC.

III..8 Análisis final

Se seleccionará el modelo que ofrezca el mejor ajuste y mayor capacidad para reproducir la dinámica de la volatilidad observada en el IPC.

IV. MARCO CONCEPTUAL

IV..1 Mercados financieros, riesgo y volatilidad

El funcionamiento de los mercados financieros está caracterizado por la continua fluctuación en los precios de los activos, resultado de la interacción entre factores económicos, políticos y sociales que afectan las decisiones de los inversionistas. Estas variaciones reflejan niveles de riesgo, los cuales se entienden como la posibilidad de que los rendimientos difieran de los valores esperados.

En este contexto, la volatilidad representa la magnitud de tales fluctuaciones en los rendimientos a lo largo del tiempo y constituye una medida fundamental para cuantificar el riesgo financiero (Hamilton, 1994; Tsay, 2010).

La volatilidad se asocia con la varianza de los rendimientos, la cual se encarga de medir la dispersión de los datos respecto a su media. En series financieras, esta volatilidad no permanece constante, sino que tiende a variar en función de la información disponible y de los impactos recientes del mercado. Este comportamiento, se le conoce como heterocedasticidad, implica que la varianza puede depender de los errores pasados, fenómeno que se manifiesta a través del agrupamiento de volatilidad: períodos de alta variabilidad tienden a concentrarse seguidos por intervalos de estabilidad relativa (Engle, 1982; Bollerslev, 1986).

IV..2 El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador del mercado accionario mexicano y refleja el comportamiento general de las emisoras más representativas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Este índice se construye a partir de una muestra ponderada por capitalización bursátil y liquidez, lo que permite captar las variaciones de los precios de las acciones que componen el mercado. Su función es servir como una referencia del desempeño del mercado de valores y como medida agregada del entorno financiero nacional.

El valor del IPC es la respuesta del mercado ante la evolución de variables económicas, financieras y políticas que inciden en las expectativas de los inversionistas. En términos cuantitativos, su análisis permite examinar la estabilidad del sistema bursátil y medir los

niveles de riesgo en los movimientos de precios. Dado que su comportamiento incorpora la reacción agregada de los agentes ante la información, constituye una variable adecuada para el estudio de la volatilidad, el cual es el concepto central en la modelación estocástica de los rendimientos es decir los retornos.

En esta investigación, el IPC se emplea como serie base para la estimación de la volatilidad, utilizando los precios de cierre diarios P_t correspondientes al periodo entre el 21 de agosto de 2020 y el 21 de agosto de 2025.

IV..3 Retornos logarítmicos

En el análisis financiero, el interés no reside en los precios absolutos de los activos, sino en las variaciones relativas que estos presentan a lo largo del tiempo. Dichas variaciones se denominan retornos y son el punto de partida para el estudio del riesgo y la volatilidad. Los retornos logarítmicos se utilizan ampliamente debido a sus propiedades matemáticas favorables y a su interpretación como tasas de crecimiento continuas.

Los retornos logarítmicos r_t se definen formalmente como:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

donde P_t representa el precio de cierre del activo o índice en el periodo t , y $\ln(\cdot)$ denota el logaritmo natural. Esto presenta varias ventajas: (i) convierte las variaciones porcentuales en una medida aditiva, de modo que el rendimiento acumulado en varios periodos es la suma de los rendimientos individuales; (ii) tiende a estabilizar la varianza, reduciendo la influencia de valores extremos; y (iii) permite interpretar los rendimientos como tasas de crecimiento en tiempo continuo (Tsay, 2010).

Los retornos logarítmicos facilitan la aplicación de modelos lineales y estocásticos, ya que transforman procesos multiplicativos de precios en procesos aditivos de rendimientos. En series financieras, los rendimientos tienden a presentar media cercana a cero y varianza no constante, lo que justifica su análisis mediante modelos de volatilidad(Hamilton, 1994).

IV..4 El segundo momento de los retornos

El segundo momento de los retornos logarítmicos, se expresa como r_t^2 , representa la varianza cuando la media es cero, es decir:

$$E(r_t^2) = Var(r_t).$$

En la modelación estocástica, r_t^2 refleja la magnitud de las fluctuaciones en los retornos y por tanto, la intensidad de la volatilidad en cada periodo. Su análisis permite identificar la presencia de agrupamientos de alta o baja variabilidad y comparar los patrones de la varianza observada con los estimados por los modelos de volatilidad.

En otras palabras, el estudio del comportamiento de r_t^2 proporciona información sobre la estructura temporal de la volatilidad y sobre la capacidad del modelo para representar de manera adecuada las variaciones del riesgo financiero (Tsay, 2010; Patton, 2011).

IV..5 Análisis de los retornos

El análisis de los retornos constituye una etapa fundamental para comprender las características estadísticas de la serie y anticipar los supuestos que orientan la modelación de la volatilidad.

El histograma de los retornos proporciona una representación de la distribución empírica de los datos.

En las series financieras, suele observarse una mayor concentración de valores alrededor de la media y colas más pesadas que las de una distribución normal, lo que refleja la presencia de leptocurtosis y un mayor riesgo de eventos extremos. Este comportamiento, característico de los mercados bursátiles, sugiere que los rendimientos no siguen una distribución normal, sino una con mayor probabilidad de valores extremos (Tsay, 2010).

La función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF) permiten analizar la dependencia temporal de los retornos.

La autocorrelación mide la relación lineal entre los valores actuales y los pasados de una serie, mientras que la PACF controla los efectos intermedios para identificar dependencias directas. En general, los retornos r_t presentan autocorrelaciones débiles en la media, sin embargo, cuando se analiza la autocorrelación de los rendimientos al cuadrado (r_t^2), suele encontrarse una dependencia significativa. Este patrón indica que la varianza de los rendimientos depende del tiempo, fenómeno conocido como heterocedasticidad, y constituye el fundamento teórico para emplear modelos tipo GARCH (Engle, 1982; Bollerslev, 1986).

La función de distribución empírica acumulada (ECDF) se utiliza para comparar la distribución observada de los rendimientos con una distribución teórica.

Las desviaciones entre ambas curvas, especialmente en las colas, confirman la presencia de colas pesadas o asimetrías. Este tipo de evidencia empírica motiva el uso de distribuciones con mayor curtosis, como la t-Student, en la especificación de los modelos de volatilidad (Hamilton, 1994; Tsay, 2010).

IV..6 Pruebas estadísticas y diagnóstico

Las pruebas estadísticas constituyen el fundamento teórico para verificar las propiedades de las series de tiempo y validar los supuestos bajo los cuales se estiman los modelos de volatilidad.

Antes de la estimación de un modelo de volatilidad, es esencial verificar que la serie de rendimientos sea estacionaria, es decir, que su media y varianza permanezcan constantes a lo largo del tiempo. La prueba de Dickey–Fuller aumentada (ADF) contrasta la presencia de una raíz unitaria mediante el modelo:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

donde y_t representa la variable en estudio, Δy_t su primera diferencia, α un término constante, βt una tendencia determinista y p el número de rezagos que corrigen la autocorrelación serial. La hipótesis nula $H_0: \rho = 0$ implica la existencia de una raíz unitaria y, por tanto, la no estacionariedad de la serie (Dickey & Fuller, 1979).

Su rechazo indica que los retornos fluctúan alrededor de una media constante, condición necesaria para el uso de modelos ARCH y GARCH.

La prueba de Ljung–Box evalúa la independencia serial de los residuos o de los retornos. Su estadístico se define como:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k},$$

donde n es el tamaño de la muestra, m el número de rezagos considerados y $\hat{\rho}_k$ el coeficiente de autocorrelación en el rezago k . Este estadístico sigue una distribución χ^2 con m grados de libertad bajo la hipótesis de independencia. Si el modelo se especifica correctamente, los residuos no deben mostrar correlación serial significativa (Ljung & Box, 1978).

La normalidad de los residuos, la prueba de Jarque–Bera evalúa simultáneamente la asimetría (S) y la curtosis (K) muestrales mediante:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right),$$

donde n representa el tamaño de la muestra. Bajo la hipótesis de normalidad, JB sigue una distribución χ^2 con dos grados de libertad. Valores altos del estadístico indican desviaciones respecto a la distribución normal, generalmente asociadas con colas pesadas o sesgos, rasgos característicos de las series financieras (Jarque & Bera, 1980; Tsay, 2010).

Finalmente, la prueba ARCH-LM permite detectar la presencia de heterocedasticidad, es decir si la varianza de los errores depende de sus rezagos. Se estima una regresión del tipo:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t,$$

y se contrasta la hipótesis nula $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$. El estadístico nR^2 , donde R^2 es el coeficiente de determinación, sigue una distribución χ^2 con q grados de libertad (Engle, 1982). El rechazo de H_0 indica que la varianza no es constante, confirmando la necesidad de un modelo de volatilidad.

IV..7 Modelo GARCH(1,1)

El comportamiento de la volatilidad en los retornos financieros puede representarse mediante modelos de heterocedasticidad, en los cuales la varianza no se considera constante, sino dependiente de la información pasada. Dentro de estos modelos, el modelo GARCH(1,1) se ha consolidado como una de las especificaciones más utilizadas y estables para describir la dinámica de la varianza en series financieras, gracias a su capacidad para capturar la persistencia temporal de la volatilidad con una estructura matemática sencilla (Bollerslev, 1986; Tsay, 2010).

De forma general, el rendimiento puede expresarse como:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t,$$

donde:

r_t representa el retorno logarítmico del índice en el periodo t ;

μ_t es la media , que refleja el componente predecible del rendimiento;

ε_t es el error o innovación, correspondiente a la parte no explicada;

$\sigma_t^2 = Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})$ es la varianza, dependiente de la información disponible hasta el periodo anterior; y

z_t es un término aleatorio con media cero y varianza unitaria, que puede asumir una distribución normal o t-Student, esta última más apropiada para datos financieros con colas pesadas (Hamilton, 1994; Tsay, 2010).

El modelo GARCH(1,1) describe la evolución de la varianza mediante la ecuación:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde:

$\alpha_0 > 0$ garantiza la positividad de la varianza;

$\alpha_1 \geq 0$ mide el efecto inmediato de los choques pasados (ε_{t-1}^2) sobre la volatilidad actual;
y

$\beta_1 \geq 0$ representa la persistencia o inercia de la volatilidad, es decir, el grado en que la varianza pasada influye en la presente.

La suma ($\alpha_1 + \beta_1$) determina la persistencia total de la volatilidad. Valores cercanos a uno indican una memoria prolongada, donde los efectos de los choques se disipan lentamente, fenómeno común en los rendimientos financieros. Para garantizar la estacionariedad en varianza, se requiere que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ (Engle, 2001; Tsay, 2010).

Desde una perspectiva teórica, el modelo GARCH(1,1) combina parsimonia y flexibilidad: con solo tres parámetros, logra reproducir la principal característica de las series financieras —el agrupamiento de volatilidad—, manteniendo propiedades estadísticas estables. Además, al estar formulado en términos condicionales, integra la nueva información disponible en cada periodo, adaptando la varianza esperada al comportamiento reciente de la serie (Hamilton, 1994).

Económicamente, la varianza σ_t^2 representa el riesgo esperado en el periodo t . El parámetro α_1 refleja la sensibilidad de la volatilidad a los choques recientes, mientras que β_1 captura la persistencia del riesgo en el tiempo. De este modo, el modelo GARCH(1,1) describe la transmisión intertemporal de la incertidumbre, donde los choques pasados afectan gradualmente la percepción de riesgo actual. Su estructura simple pero efectiva lo convierte en un modelo suficientemente robusto para el análisis de volatilidad en mercados financieros, tanto desarrollados como emergentes (Engle, 2001; Tsay, 2010).

IV..8 Modelo GJR-GARCH

El modelo GARCH(1,1) captura de manera efectiva la persistencia temporal de la volatilidad, su estructura es simétrica: supone que los choques positivos y negativos en los rendimientos tienen el mismo efecto sobre la varianza.

Sin embargo, la evidencia muestra que los mercados financieros reaccionan de forma asímética ante las noticias: los choques negativos tienden a incrementar la volatilidad en mayor medida que los positivos de igual magnitud. Este comportamiento se conoce como efecto apalancamiento (*leverage effect*) y refleja la relación negativa entre los rendimientos

y la volatilidad futura (Black, 1976; Tsay, 2010).

El modelo GJR-GARCH(1,1) introduce un término adicional que permite representar esta asimetría en la ecuación de la varianza. Su formulación es la siguiente:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 I_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde:

$\alpha_0 > 0$ garantiza la positividad de la varianza;

$\alpha_1 \geq 0$ mide el efecto general de los choques pasados sobre la volatilidad;

$\gamma_1 \geq 0$ cuantifica el efecto asimétrico, determinando el impacto adicional de los choques negativos;

$\beta_1 \geq 0$ representa la persistencia o inercia de la volatilidad; y

I_{t-1} es una variable indicadora, tal que $I_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ y $I_{t-1} = 0$ en caso contrario.

Cuando $\gamma_1 > 0$, los choques negativos ($\varepsilon_{t-1} < 0$) incrementan la varianza más que los positivos, reproduciendo el efecto apalancamiento (Glosten, Jagannathan, & Runkle, 1993).

En términos probabilísticos, el modelo conserva la positividad y la estacionariedad siempre que se cumpla la condición:

$$\alpha_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 + \beta_1 < 1,$$

que asegura la convergencia de la varianza a un valor finito y estable (Brooks, 2019).

El modelo GJR-GARCH(1,1) amplía la representación del proceso de varianza para incluir no linealidades y respuestas diferenciadas ante perturbaciones. El término $\gamma_1 I_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$ introduce una componente dependiente del signo de la innovación, lo que permite capturar la sensibilidad asimétrica del riesgo frente a la dirección de los movimientos del mercado.

Este efecto se interpreta como una retroalimentación negativa entre rendimientos y volatilidad: cuando los precios caen, el valor de mercado de las empresas disminuye, aumenta su nivel de apalancamiento y, en consecuencia, se eleva la volatilidad esperada (Black, 1976; Hamilton, 1994).

Económicamente, el parámetro γ_1 describe la magnitud de la reacción diferencial del mercado ante pérdidas y ganancias. Valores altos de γ_1 implican un mercado más sensible a la información negativa, lo que refleja un comportamiento de riesgo asimétrico. Esta propiedad resulta fundamental para el estudio de índices bursátiles, como el IPC, donde la reacción a noticias adversas suele ser más intensa que ante noticias favorables.

El modelo GJR-GARCH(1,1) proporciona así una formulación teórica más completa de la volatilidad, al integrar la persistencia, la respuesta a choques recientes y la asimetría informativa. Su aplicación en el contexto financiero permite describir con mayor precisión la dinámica del riesgo y el comportamiento estocástico de los rendimientos en presencia de variaciones negativas significativas.

IV..9 Métricas teóricas de evaluación de los modelos de volatilidad

La evaluación teórica de un modelo de volatilidad se basa en medir la diferencia entre la varianza estimada $\hat{\sigma}_t^2$ y la varianza observada a través del cuadrado de los retornos r_t^2 . Esta comparación permite analizar el grado de precisión con el que el modelo reproduce la magnitud y la variabilidad temporal de la volatilidad.

Las métricas comúnmente empleadas se derivan de funciones de pérdida que cuantifican la discrepancia entre ambas magnitudes, proporcionando una medida del error de estimación (Hamilton, 1994; Tsay, 2010).

El Error Cuadrático Medio (MSE) se define como:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2,$$

donde r_t^2 representa el segundo momento de los retornos logarítmicos y $\hat{\sigma}_t^2$ la varianza estimada.

El MSE mide el promedio de los errores al cuadrado y penaliza en mayor medida las discrepancias grandes entre la varianza observada y la estimada. Matemáticamente, minimizar el MSE equivale a obtener el estimador de mínima varianza, garantizando eficiencia bajo los supuestos de linealidad y homocedasticidad (Hamilton, 1994).

A partir del MSE, se deriva la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}},$$

la cual conserva la misma interpretación pero en las mismas unidades que la varianza. Un valor menor de RMSE indica un ajuste más preciso de la varianza estimada a los movimientos de la varianza empírica (Tsay, 2010).

Función de pérdida cuasi-verosímil (QLIKE).

La métrica QLIKE (Quasi-Likelihood Loss Function) se fundamenta en la teoría de la máxima verosimilitud bajo normalidad y se define como:

$$\text{QLIKE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\frac{r_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} - \ln\left(\frac{r_t^2}{\hat{\sigma}_t^2}\right) - 1 \right].$$

El QLIKE penaliza las diferencias relativas entre la varianza empírica y la estimada, ponderando las desviaciones de forma asimétrica: los errores de subestimación reciben mayor peso que los de sobreestimación.

Esta métrica proviene de la función de log-verosimilitud de un modelo GARCH y mantiene consistencia estadística incluso cuando la distribución de los errores no es normal (Patton, 2011).

Una de las principales ventajas del QLIKE es que su valor esperado se minimiza cuando $\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_t^2$, es decir, cuando la varianza estimada coincide con la verdadera, lo que le confiere la propiedad de función de pérdida propia (Laurent, Rombouts, & Violante, 2016).

Error cuadrático medio logarítmico (log-MSE).

El log-MSE se define como:

$$\text{log-MSE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\ln(r_t^2) - \ln(\hat{\sigma}_t^2) \right]^2.$$

Esta métrica evalúa la discrepancia entre la varianza observada y la estimada en escala logarítmica. Su principal propiedad es la invarianza ante transformaciones de escala, lo que la hace robusta frente a la presencia de valores atípicos o a diferencias de magnitud entre observaciones.

El log-MSE mide la proximidad de los logaritmos de las varianzas, lo que equivale a comparar la volatilidad en términos relativos, en lugar de absolutos (Patton, 2011; Laurent et al., 2016).

Así, la evaluación de un modelo de volatilidad consiste en encontrar el conjunto de parámetros que minimiza el error esperado bajo una función de pérdida determinada. En este sentido, las métricas como MSE, RMSE, QLIKE y log-MSE constituyen formalmente criterios de riesgo esperado, cuya minimización refleja la precisión y estabilidad del modelo en la estimación de la varianza (Tsay, 2010; Hamilton, 1994).

Capítulo III

Modelos Estocásticos Aplicados al IPC: Estimación y Resultados

I. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

La presente investigación propone un enfoque de análisis basado en la modelación estocástica de la volatilidad del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, con el propósito de caracterizar la dinámica temporal del riesgo financiero. Este enfoque permite representar la evolución de la varianza mediante modelos de la familia GARCH, que incorporan los efectos de los choques pasados y la persistencia de la volatilidad a lo largo del tiempo.

El plan de trabajo contempla la estimación de un modelo GARCH(1,1) como punto de partida, dada su capacidad para capturar de manera parsimoniosa la dependencia temporal de la varianza. Se incorporará la extensión GJR-GARCH(1,1) con el fin de analizar la posible presencia de asimetrías o efectos apalancamiento.

A partir de las varianzas estimadas, se evaluará el modelo mediante criterios estadísticos y métricas teóricas, tales como el Error Cuadrático Medio (MSE), la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE), el Quasi-Likelihood Loss Function (QLIKE) y el log-MSE. Estas medidas permitirán analizar la precisión teórica del modelo en la estimación de la volatilidad.

Con este procedimiento se espera obtener una representación teórica del comportamiento estocástico de la varianza del IPC, que refleje la persistencia del riesgo y la posible existencia de asimetrías en la respuesta de la volatilidad ante variaciones negativas del mercado.

II. RESULTADOS

II..1 Comportamiento de los retornos logarítmicos

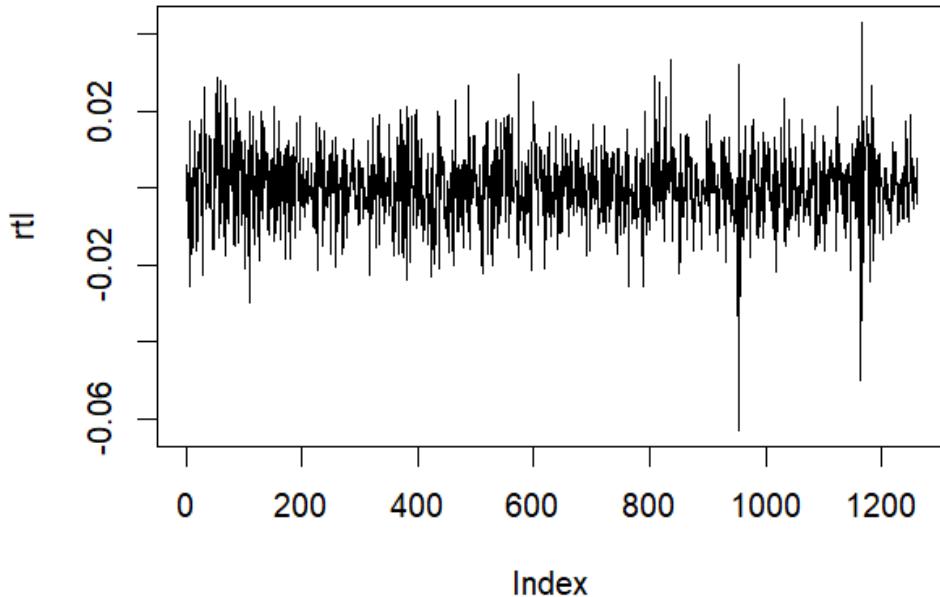


Figura III.1: Retornos logarítmicos diarios (r_t) del IPC de México. Serie temporal de los retornos logarítmicos calculados a partir de los precios de cierre diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC).

II..2 Comportamiento de los retornos logarítmicos al cuadrado

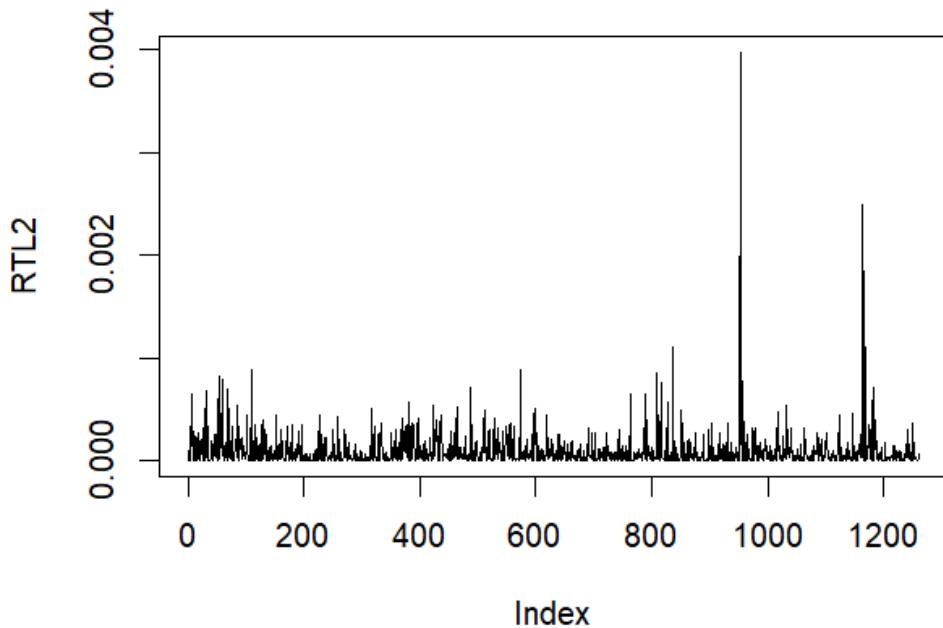


Figura III.2: Retornos logarítmicos al cuadrado (r_t^2) del IPC de México. Serie temporal de los retornos logarítmicos elevados al cuadrado, correspondientes al segundo momento de la serie original.

II..3 Análisis gráfico exploratorio de los retornos logarítmicos

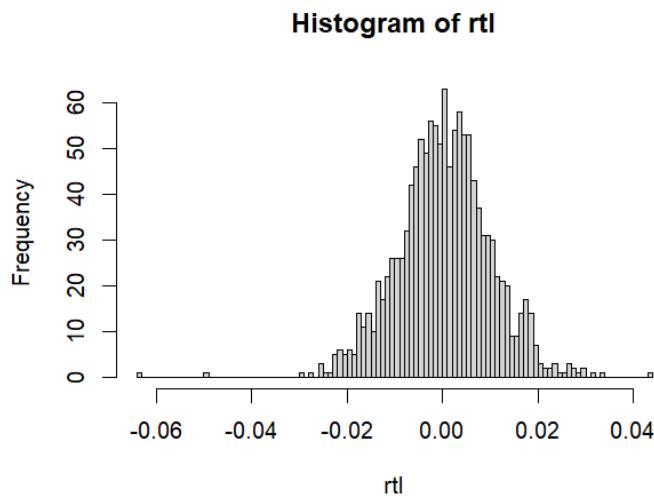


Figura III.3: Histograma de los retornos logarítmicos (r_t). Distribución de frecuencias de los retornos logarítmicos del IPC durante el periodo analizado.

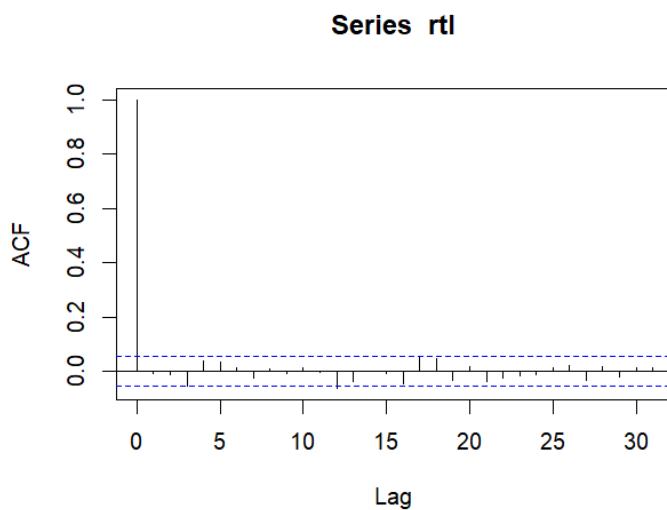


Figura III.4: Función de autocorrelación (ACF) de los retornos logarítmicos (r_t). Gráfico de autocorrelación de los retornos logarítmicos para diferentes rezagos.

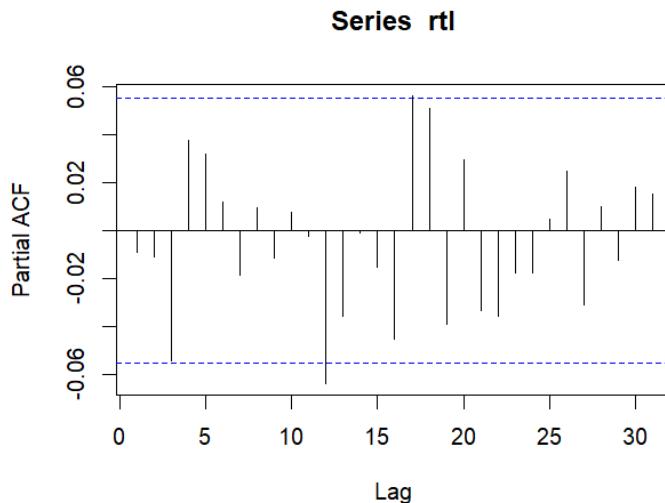


Figura III.5: Función de autocorrelación parcial (PACF) de los retornos logarítmicos (r_t). Gráfico de autocorrelación parcial que muestra la relación directa entre los retornos y sus rezagos.

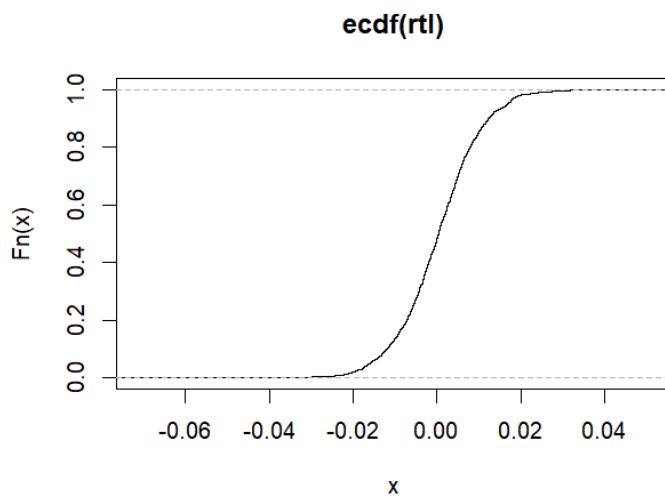


Figura III.6: Función de distribución empírica acumulada (ECDF) de los retornos logarítmicos (r_t). Curva empírica que representa la proporción acumulada de observaciones de los retornos logarítmicos.

II..4 Pruebas estadísticas aplicadas a los retornos logarítmicos

Cuadro III.1: Prueba de raíz unitaria ADF (Augmented Dickey-Fuller). Resumen de los resultados obtenidos mediante la prueba ADF aplicada a los retornos logarítmicos del IPC.

Estadístico	Valor	p-valor	Rezagos	Hipótesis alternativa
Dickey-Fuller	-10.623	0.01	10	Estacionaria
τ (tau2)	-25.451	—	—	—
Valores críticos (1 %, 5 %, 10 %)	-3.43, -2.86, -2.57	—	—	—

Cuadro III.2: Prueba Ljung–Box para autocorrelación. Resultados de la prueba Ljung–Box aplicada a los retornos logarítmicos para evaluar la autocorrelación a 10 rezagos.

Estadístico χ^2	Grados de libertad	p-valor
8.5358	10	0.5767

Cuadro III.3: Prueba ARCH–LM para heterocedasticidad condicional. Resultados del test ARCH–LM sobre los retornos logarítmicos con 10 rezagos.

Estadístico χ^2	Grados de libertad	p-valor	Hipótesis nula
33.697	10	0.0002078	No efectos ARCH

Cuadro III.4: Prueba de normalidad de Jarque–Bera. Resultados de la prueba de Jarque–Bera aplicada a los retornos logarítmicos.

Estadístico χ^2	Grados de libertad	p-valor
224.93	2	< 2.2e–16

II..5 Modelo GARCH(1,1) con distribución t-Student

Cuadro III.5: Estimación del modelo GARCH(1,1) con distribución t-Student. Parámetros estimados y errores estándar obtenidos mediante el ajuste del modelo GARCH(1,1) sobre los retornos logarítmicos del IPC.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t	p-valor
μ	0.000266	0.000259	1.0259	0.304961
ω	0.000004	0.000000	15.9173	0.000000
α_1	0.039200	0.003547	11.0509	0.000000
β_1	0.913398	0.008598	106.2339	0.000000
shape	10.157471	2.280716	4.4536	0.000008

Cuadro III.6: Criterios de información del modelo GARCH(1,1). Valores de los criterios de información obtenidos a partir del ajuste del modelo.

Criterio	Valor
Akaike (AIC)	-6.4533
Bayesiano (BIC)	-6.4329
Shibata	-6.4533
Hannan–Quinn	-6.4456

Cuadro III.7: Pruebas de diagnóstico sobre residuos estandarizados del modelo GARCH(1,1). Resultados de las pruebas de independencia y heterocedasticidad condicional aplicadas a los residuos estandarizados.

Prueba	Estadístico	gl	p-valor	Hipótesis nula
Ljung–Box (10 rezagos)	6.9583	10	0.7294	No autocorrelación
ARCH–LM (10 rezagos)	4.5399	10	0.9197	No efectos ARCH
Jarque–Bera	489.42	2	< 2.2e–16	Normalidad de los residuos

Cuadro III.8: Métricas teóricas de evaluación del modelo GARCH(1,1). Valores obtenidos para las principales medidas de error y ajuste teórico del modelo GARCH(1,1) aplicado a los retornos logarítmicos del IPC.

Métrica	Valor
MSE	3.661473×10^{-8}
RMSE	1.913498×10^{-4}
MAE	9.803903×10^{-5}
CORR	0.1157083
QLIKE	-8.263849
MSE_{log}	9.120447

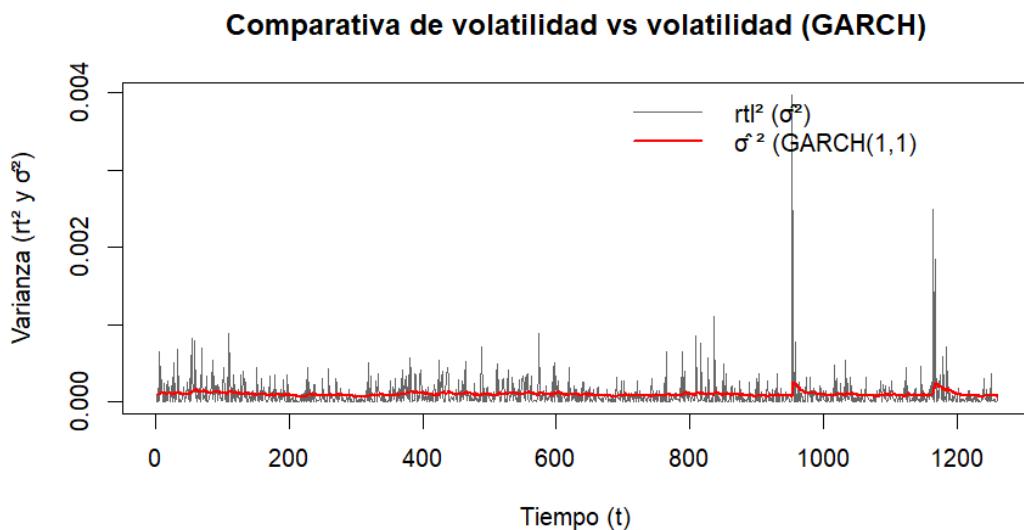


Figura III.7: Comparativa entre la varianza y la varianza estimada (r_t^2 y $\hat{\sigma}_t^2$) bajo el modelo GARCH(1,1). Gráfico de la evolución temporal de la varianza de los retornos logarítmicos (línea negra) y la varianza estimada por el modelo GARCH(1,1) (línea roja).

II..6 Modelo GJR-GARCH(1,1) con distribución t-Student

Cuadro III.9: Estimación del modelo GJR-GARCH(1,1) con distribución t-Student. Parámetros estimados y errores estándar obtenidos mediante el ajuste del modelo GJR-GARCH(1,1) sobre los retornos logarítmicos del IPC.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t	p-valor
μ	0.000204	0.000263	0.7786	0.4362
ω	0.000004	0.000000	11.1474	0.0000
α_1	0.020221	0.010386	1.9470	0.0515
β_1	0.918924	0.008644	106.3047	0.0000
γ_1	0.037509	0.022204	1.6893	0.0912
shape	10.239686	2.300838	4.4504	0.0000

Cuadro III.10: Criterios de información del modelo GJR-GARCH(1,1). Valores de los criterios de información obtenidos tras el ajuste del modelo.

Criterio	Valor
Akaike (AIC)	-6.4540
Bayesiano (BIC)	-6.4295
Shibata	-6.4540
Hannan–Quinn	-6.4448

Cuadro III.11: Pruebas de diagnóstico sobre residuos estandarizados del modelo GJR-GARCH(1,1). Resultados de las pruebas aplicadas a los residuos estandarizados para verificar independencia, homocedasticidad y normalidad.

Prueba	Estadístico	gl	p-valor	Hipótesis nula
Ljung–Box (10 rezagos)	6.5514	10	0.767	No autocorrelación
ARCH–LM (10 rezagos)	3.8608	10	0.9534	No efectos ARCH
Jarque–Bera	447.86	2	< 2.2e–16	Normalidad de los residuos

Cuadro III.12: Métricas teóricas de evaluación del modelo GJR-GARCH(1,1). Valores obtenidos para las principales medidas de error y ajuste teórico del modelo GJR-GARCH(1,1) aplicado a los retornos logarítmicos del IPC.

Métrica	Valor
MSE	3.648632×10^{-8}
RMSE	1.910139×10^{-4}
MAE	9.788182×10^{-5}
CORR	0.1300734
QLIKE	-8.267025
MSE_{log}	9.096358

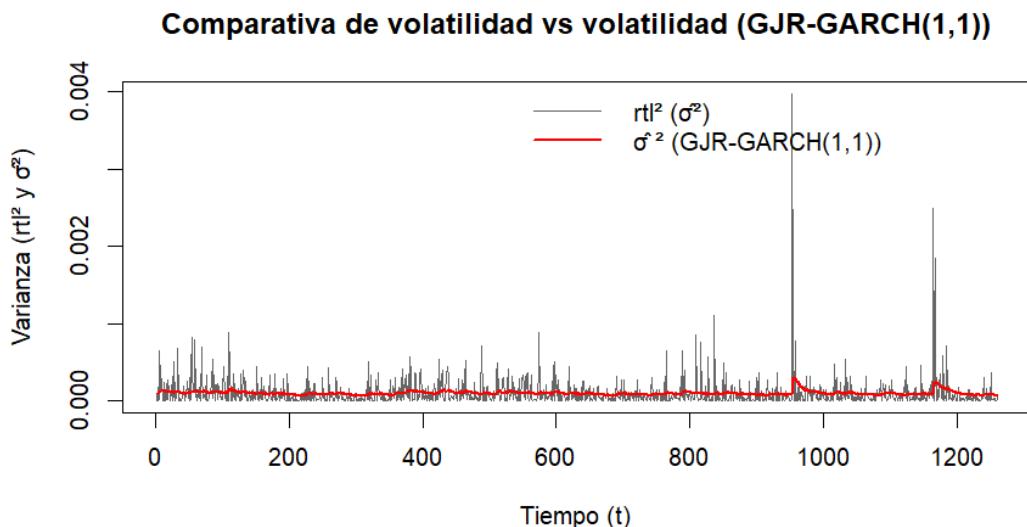


Figura III.8: Comparativa entre la varianza y la varianza estimada (r_t^2 y $\hat{\sigma}_t^2$) bajo el modelo GJR-GARCH(1,1). Gráfico de la evolución temporal de la varianza de los retornos logarítmicos (línea negra) y la varianza estimada por el modelo GJR-GARCH(1,1) (línea roja).

III. DISCUSIÓN

La serie de retornos logarítmicos del IPC de México presentó fluctuaciones dentro del rango aproximado de -0.06 a 0.04 , con episodios aislados de variaciones abruptas. El histograma evidenció una distribución leptocúrtica, lo cual fue confirmado por la prueba de Jarque–Bera ($JB = 224.93, p < 2.2 \times 10^{-16}$). De acuerdo con Tsay (2010), este comportamiento es característico en series financieras debido a la presencia frecuente de valores extremos, lo que sugiere que una distribución normal no es adecuada para modelar los retornos.

Los coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial de los retornos se mantuvieron dentro de los intervalos de confianza, indicando ausencia de dependencia lineal. Este resultado fue corroborado mediante la prueba de Ljung–Box ($Q = 8.5358, p = 0.5767$), consistente con lo señalado por Hamilton (1994) respecto al comportamiento de los retornos como ruido blanco en términos lineales. No obstante, la prueba ARCH–LM aplicada a los retornos ($\text{Chi-cuadrada} = 33.697, p = 0.0002078$) mostró evidencia de heterocedasticidad, lo que justifica el uso de modelos GARCH para capturar la dinámica temporal de la varianza, en concordancia con Engle (1982) y Bollerslev (1986).

La prueba ADF ($DF = -10.623, p = 0.01$) confirmó que los retornos son estacionarios, lo cual permitió proceder a la estimación del modelo GARCH(1,1) con distribución t-Student. Los parámetros de interés fueron $\alpha_1 = 0.039200$ y $\beta_1 = 0.913398$, cuya suma es 0.9526 , indicando una alta persistencia de la volatilidad. Este comportamiento es congruente con Engle (2001) y Tsay (2010), quienes señalan que índices bursátiles suelen mostrar efectos prolongados después de choques de volatilidad. Las pruebas de diagnóstico sobre los residuos estandarizados mostraron que el modelo está bien especificado: Ljung–Box ($Q = 6.9583, p = 0.7294$) y ARCH–LM ($\text{Chi-cuadrada} = 4.5399, p = 0.9197$). La prueba de normalidad ($JB = 489.42$) rechazó normalidad, un resultado esperable bajo una distribución t-Student y consistente con la leptocurtosis observada.

El modelo GJR-GARCH(1,1) permitió examinar posibles asimetrías en la respuesta de la volatilidad. Los parámetros relevantes fueron $\alpha_1 = 0.020221$, $\beta_1 = 0.918924$ y el coeficiente asimétrico $\gamma_1 = 0.037509$. El valor positivo de γ_1 indica un efecto de apalancamiento moderado, donde choques negativos generan incrementos ligeramente mayores en volatilidad que choques positivos de igual magnitud. Brooks y Persand (2005) documentan efectos similares en mercados emergentes. Los residuos del modelo superaron adecuadamente las pruebas diagnósticas: Ljung–Box en residuos ($Q = 6.5514, p = 0.767$) y ARCH–LM ($\text{Chi-cuadrada} = 3.8608, p = 0.9534$). La prueba de normalidad ($JB = 447.86$) nuevamente confirmó colas pesadas bajo una distribución t-Student.

Las métricas de evaluación mostraron desempeños similares entre ambos modelos. Para el

GARCH(1,1), se obtuvo $MSE = 3.66 \times 10^{-8}$, $RMSE = 1.91 \times 10^{-4}$, $MAE = 9.80 \times 10^{-5}$, $CORR = 0.1157$, $QLIKE = -8.2638$ y $MSE_{\log} = 9.1204$. Para el GJR-GARCH(1,1), los resultados fueron $MSE = 3.6486 \times 10^{-8}$, $RMSE = 1.91 \times 10^{-4}$, $MAE = 9.78 \times 10^{-5}$, $CORR = 0.1300$, $QLIKE = -8.2670$ y $MSE_{\log} = 9.0963$. Las diferencias son mínimas y no sugieren una mejora sustancial al incorporar el término asimétrico. Esto coincide con los criterios de información, donde $AIC(\text{GARCH}) = -6.4533$ frente a $AIC(\text{GJR}) = -6.4540$, y $BIC(\text{GARCH}) = -6.4329$ frente a $BIC(\text{GJR}) = -6.4295$. Según Tsay (2010) y Engle (2001), diferencias de esta magnitud no justifican aumentar la complejidad del modelo.

La similitud en métricas y criterios indica que el término asimétrico del GJR-GARCH captura un efecto de apalancamiento moderado, pero que dicho efecto no modifica de forma significativa la estructura general de la volatilidad. Esto sugiere que las fluctuaciones negativas del IPC generan incrementos de volatilidad ligeramente superiores a las fluctuaciones positivas, aunque la magnitud del impacto no es dominante dentro de la dinámica total. De acuerdo con Engle (2001), esta situación es común en series donde los ciclos de volatilidad están mayormente determinados por choques agregados de mercado y no por respuestas fuertemente diferenciadas a pérdidas. En este sentido, el modelo GARCH(1,1) constituye una representación robusta y parsimoniosa de la varianza condicional, mientras que el modelo GJR-GARCH(1,1) ofrece información complementaria sobre asimetrías que resulta útil para un análisis más fino de la respuesta ante choques negativos, pero sin cambiar de forma sustancial el comportamiento general de la serie.

IV. CONCLUSIONES

El análisis realizado permitió caracterizar el comportamiento estocástico de los retornos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y evaluar la capacidad de distintos modelos GARCH para representar su dinámica de volatilidad. Se confirmó que la serie de retornos es estacionaria, no presenta autocorrelación significativa y muestra heterocedasticidad condicional, lo que justificó el uso de modelos de volatilidad estocástica.

Con base en el segundo objetivo, se estimaron dos modelos. El primero fue el modelo $GARCH(1,1)$, cuya varianza condicional estimada se expresa formalmente como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (\text{III.1})$$

y que, con los valores obtenidos, queda como:

$$\sigma_t^2 = 0.000004 + 0.039200 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.913398 \sigma_{t-1}^2. \quad (\text{III.2})$$

Este modelo asume efectos simétricos de los choques sobre la volatilidad. El segundo

modelo considerado fue el *GJR-GARCH(1,1)*, que incorpora un término adicional para capturar asimetrías ante choques negativos. Su forma general es:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (\text{III.3})$$

y con los valores estimados se obtuvo:

$$\sigma_t^2 = 0.000004 + 0.020221 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.037509 \varepsilon_{t-1}^2 I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} + 0.918924 \sigma_{t-1}^2. \quad (\text{III.4})$$

La incorporación del término asimétrico en el GJR-GARCH(1,1) no produjo mejoras significativas en las métricas de error ni en los criterios de información, lo cual sugiere que los efectos de asimetría en la volatilidad del IPC son débiles o no lo suficientemente pronunciados como para justificar un modelo más complejo. En consecuencia, el modelo *GARCH(1,1)* mostró un desempeño consistente y parsimonioso.

Finalmente, la comparación entre la varianza y la varianza estimada indicó que ambos modelos capturan de manera razonable las fluctuaciones de la volatilidad en el periodo estudiado, sin diferencias sustanciales entre ellos. En conjunto, los resultados muestran que el IPC presenta un comportamiento coherente con los supuestos fundamentales de la modelación GARCH y que el modelo *GARCH(1,1)* constituye una herramienta adecuada para describir y analizar su volatilidad.

V. BIBLIOGRAFÍA

- Abounoori, E. and Elmi, Z. M. (2024). Modeling volatility using arma-garch models during the covid-19 pandemic. *Journal of Risk and Financial Management*, 17(3):126.
- Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain “goodness of fit” criteria based on stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(2):193–212.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, volume 81.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327.
- Brooks, C. and Persand, G. (2005). Risk, volatility and the cross-correlation of asset returns. *Journal of Empirical Finance*, 12(3):493–509.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366):427–431.
- Dobrow, R. P. (2016). *Introduction to Stochastic Processes with R*. Wiley, 2 edition.
- Documentation, R. (2023a). *nortest package*.
- Documentation, R. (2023b). *tseries and FinTS packages*.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007.
- Engle, R. F. (2001). Garch 101: The use of arch/garch models in applied econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4):157–168.
- Ghalanos, A. (2023a). *Introduction to the rugarch package*. Version 1.4-8.
- Ghalanos, A. (2023b). *The rugarch package vignette: Univariate GARCH models*.
- Guidolin, M. and Timmermann, A. (2006). An econometric model of nonlinear dynamics in the joint distribution of stock and bond returns. *Journal of Financial Econometrics*, 4(3):537–571.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hansen, B. E. (1997). Inference in tar models. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 2(1):1–14.

- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3):255–259.
- Kim, S. I. (2022). Arma–garch model with fractional generalized hyperbolic innovations. *Financial Innovation*, 8(48).
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2):297–303.
- MacKinnon, J. G. (1994). Critical values for cointegration tests. *Econometric Theory*, 10(3):571–583.
- Mushtaq, R. and Ali, A. (2025). Modeling and forecasting stock return volatility using arma–garch approach: Evidence from asian markets. *Journal of Risk and Financial Management*, 18(9):494.
- Mörters, P. and Peres, Y. (2010). *Brownian Motion*. Cambridge University Press.
- Nwogugu, M. C. I. (2006). Further critique of garch/arma/var/stochastic-volatility models and related approaches. *Applied Mathematics & Computation*, 182(1):1735–1748.
- Olowofeso, E. O. and Afolabi, B. (2024). Modelling stock market volatility using arma–garch family models: Evidence from nigeria. *Modern Economy*, 15(9):1832–1853.
- R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing.
- Said, S. E. and Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71(3):599–607.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, 3 edition.
- Zivot, E. (2011). Unit root tests and structural breaks. Working paper.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES



Figura III.9: *
(cronograma de actividades)

A continuación, se presenta el listado de actividades desarrolladas durante el proceso de elaboración del proyecto:

1. Instalación y configuración de R y RStudio, junto con la revisión introductoria de procesos estocásticos y modelos de volatilidad.
2. Descarga, limpieza y organización de la base de datos del IPC (21/08/2020–21/08/2025) desde *Investing.com*.

3. Construcción de la serie de retornos logarítmicos del IPC y verificación preliminar de consistencia de los datos.
4. Elaboración de gráficas exploratorias: serie temporal, histograma, ECDF, ACF y PACF de los retornos.
5. Aplicación de pruebas ADF, Ljung–Box, ARCH–LM y Jarque–Bera para evaluar estacionariedad, autocorrelación, heterocedasticidad y normalidad.
6. Revisión y consolidación del marco conceptual sobre IPC, volatilidad, heterocedasticidad y modelos GARCH/GJR-GARCH basados en la bibliografía utilizada.
7. Especificación y estimación en R del modelo GARCH(1,1) con innovaciones t-Student.
8. Obtención de la volatilidad condicional del modelo GARCH(1,1) y cálculo de sus criterios de información.
9. Especificación y estimación del modelo GJR-GARCH(1,1) con innovaciones t-Student, junto con la obtención de sus criterios de información.
10. Cálculo de métricas de desempeño (MSE, RMSE, MAE, CORR, QLIKE y MSE_{log}) para comparar la varianza empírica y la varianza estimada en ambos modelos.
11. Aplicación de pruebas de diagnóstico sobre los residuos estandarizados de los modelos GARCH(1,1) y GJR-GARCH(1,1).
12. Generación de tablas y gráficas finales para ambos modelos, incluyendo comparaciones entre r_t^2 y $\hat{\sigma}_t^2$.
13. Revisión y ajuste del documento completo (portada, objetivos, planteamiento, marco conceptual, metodología y resultados), garantizando coherencia metodológica y claridad expositiva.