Universidad de San Andrés
Práctica 2: Aplicaciones de la derivada

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si satisfacen las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo, hallar todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema. En caso negativo, explicar que hipótesis no se cumple.

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $[1, 3]$.
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x}$ en $[0, 1]$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 9}{x - 3}$ en $[-3, 4]$.
   (d) $f(x) = x^3 - x + 2$ en $[-1, 1]$.

2. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 7$. Verificar que $f(1) = f(-1)$, pero f' no se anula en $(-1, 1)$. Este hecho, ¿contradice el teorema de Rolle?

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Argumente utilizando el teorema de Rolle:

   (a) Suponga que f posee dos raíces reales distintas. ¿Qué se puede afirmar sobre la cantidad de raíces de f'?
   (b) Suponga que f posee tres raíces reales distintas. ¿Qué se puede afirmar sobre la cantidad de raíces de f'? ¿Y sobre la cantidad de raíces de f''?

4. Probar que la función $f(x) = x^3 + e^x$ posee una única raíz real.

5. Probar que la ecuación $e^x - x = 2$ posee exactamente dos soluciones reales.

6. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si satisfacen las hipótesis del teorema del Valor Medio en el intervalo dado.

   - En caso afirmativo, hallar todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema. Grafique en GeoGebra o Desmos la función, la recta secante a través de los extremos y la recta tangente en el punto $(c, f(c))$.
   - En caso negativo, explicar qué hipótesis no se cumplen.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$ en $[2, 6]$.
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[0, 1]$.
   (c) $f(x) = \ln(x)$ en $[1, e]$.

7. El equipo de marketing digital de una startup modeló la adquisición de clientes durante los primeros 30 días de lanzamiento con

$$C(t) = 500 \ln(t + 1), t \in [0, 30]$$

donde $C(t)$ es el número total de clientes en el día t. **Observación:** Un modelo logarítmico es razonable porque la adquisición de clientes es rápida al inicio(efecto de campañas iniciales) y luego se estabiliza (saturación del mercado objetivo).

(a) Calcule la tasa promedio de adquisición diaria de clientes entre el día 0 y el 30.

(b) Aplique el Teorema del Valor Medio:

- Verifique que $C(t)$ cumple las hipótesis requeridas.
- Demuestre que existe al menos un dia $c \in (0, 30)$ donde la tasa instantánea $C'(t)$ coincide con la tasa promedio calculada.

(c) Antes de ese día, ¿la campaña es más o menos efectiva que el promedio? Compare $C'(t)$ con la tasa promedio.

(d) ¿En qué día del mes recomendaría lanzar un descuento para evitar que la adquisición de clientes descienda por debajo del promedio?

8. Calcular los siguientes límites usando la Regla de L'Hôpital cuando sea posible.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^{3x}-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{e^{x+2}-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin(x)-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{\ln(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(5x)}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\sin(3x)}{5x^4+x^3}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2x}{\ln(5x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}+4x}{e^{2x}+x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)+x}{x\ln(1+x)}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{x-\sin(x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x}$

9. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

(a) Intente resolverlo utilizando la regla de L'Hôpital. ¿Qué observa?

(b) Calcule el límite utilizando otro método.

10. Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^4}.$$

(a) ¿Qué patrón observa? ¿Qué sucede con este límite a medida que el exponente del denominador crece?

(b) ¿Cree que puede aplicar el mismo razonamiento para cualquier $n \in \mathbb{N}$? Justifique brevemente su respuesta.

11. Calcular los siguientes límites usando la Regla de L'Hôpital cuando sea posible.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ y $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}e^{-3x}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^{3/2}\ln(x^4+x^2)$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)}$

(e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - \ln(x)$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x$

(g) $\lim_{x\to +\infty} 2x - \sqrt{4x^2+1}$

(h) $\lim_{x\to 0+} x^x$

(i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin 5x}$

(j) $\lim_{x\to 0}(2x+e^x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(k) $\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{2x})^{\sqrt{x}}$

12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sin(x)+2x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Hallar $f'(0)$. Hallar $f'(x)$ para todo $x \neq 0$.

(b) Determinar si la derivada $f'(x)$ es continua en $x = 0$.