Universidad de San Andrés

Práctica D: Polinomio de Taylor

1. Hallar el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

   (a) $f(x) = (1+x)^3$, orden 4, $x = 0$.

   (b) $f(x) = \ln(x)$, orden 5, $x = 1$.

   (c) $f(x) = \sin(2x)$, ordenes 4 y 5, $x = 0$.

   (d) $f(x) = \cos(5x+5)$, orden 4, $x = -1$.

   (e) $f(x) = \sqrt{2x}$, orden 3, $x = 2$.

   (f) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, orden 3, $x = 0$.

   (g) $f(x) = xe^x$, orden 3, $x = 0$.

2. En cada caso, aproximar mediante el polinomio de Taylor el valor pedido usando la f más conveniente del Ejercicio 1. Elegir un $\tilde{x}$ adecuado para evaluar. (Por ejemplo, para el ítem (i) considerar $f(x) = (1+x)^3$ y su polinomio de Taylor desarrollado en $x = 0$, y luego evaluarlo en $\tilde{x} = 0.02$.)

   (i) $(1.02)^3$

   (ii) $\ln(1.1)$

   (iii) $\sin(0.5)$

   (iv) $\sqrt{4.2}$

   (v) $\sqrt[3]{0.5}$

3. (a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Hallar el polinomio de Taylor de f de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.

   (b) Sea $g(x) = xe^x$. Hallar el polinomio de Taylor de g de orden 3 centrado en $x_0 = 0$. (Ver ejercicio 1, ítem (g)).

   (c) Sea $h(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{1}{1-x} + xe^x$. Hallar el polinomio de Taylor de h de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.

   (d) Comparar los resultados de los ítems anteriores y explicar qué relación se observa entre los tres polinomios obtenidos.

   (e) Usando los ejemplos anteriores como motivación, demostrar que si $p_3(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f centrado en x_0 y q_3 es el polinomio de Taylor de orden 3 de una función g centrado en x_0, entonces $p_3 + q_3$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f + g$ centrado en x_0.

   (f) ¿El resultado anterior solo vale para polinomios de Taylor de grado 3? ¿Puede demostrarlo para cualquier grado $n \in \mathbb{N}$?

4. Sea $f(x) = \ln(x+1)$.

   (a) Calcular el polinomio de Taylor de f de orden 4 centrado en $x_0 = 0$.

   (b) Sea g la función derivada de f, es decir, $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Calcular el polinomio de Taylor de g de orden 3 centrado en $x_0 = 0$.

   (c) Comparar los resultados de los ítems anteriores y explicar qué relación se observa entre ambos polinomios.

   (d) Usando los ejemplos anteriores como motivación, demostrar que si $p_4(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de una función f centrado en x_0, entonces su derivada $p_4'(x)$ coincide con el polinomio de Taylor de orden 3 de f' centrado en x_0.

(e) ¿El resultado anterior solo vale para polinomios de Taylor de grado 4? ¿Puede demostrarlo para cualquier grado $n \in \mathbb{N}$?

5. Escribir los siguientes polinomios en potencias de $(x - x_0)$ para los x_0 indicados.

   (a) $p(x) = -3x^4 + x^2 + x$; para $x_0 = 1$ y $x_0 = -2$.

   (b) $p(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$; para $x_0 = -1$ y $x_0 = 0$.

6. (a) Reconstruir el polinomio $p(x)$ de grado 3 del que se sabe que $p(0) = 2$, $p'(0) = 3$, $p''(0) = 6$ y $p'''(0) = -4$.

   (b) Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $q(2) = -1$, $q'(2) = 3$ y $q''(2) = 4$. Expresar dicho polinomio en potencias de $(x - 2)$.

   (c) Expresar el polinomio $q(x)$ del ítem anterior como suma de potencias de x.

7. Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f alrededor de $x_0 = 2$.

   (a) Calcular $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ y $f'''(2)$.

   (b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $g(x) = e^{f(x)+2}$ alrededor de $x_0 = 2$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 2$ es $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x + 3$.

   (a) Calcular $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.

   (b) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 f(x^4 + 1)$. Calcular $h(-1)$, $h'(-1)$ y $h''(-1)$.

   (c) Dar el polinomio de Taylor de orden 2 de h en $x = -1$.

9. Sean f y g dos funciones 3 veces derivables tales que el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $x = 2$ es
$$p(x) = -x^2 + 6x - 7$$
y el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$ es
$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}.$$
Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x) = (g \circ f)(x)$ alrededor de $x_0 = 2$.

10. Sea $p(x) = x^2 - 3x + 3$, el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f alrededor de $x_0 = 2$. Sea g una función dos veces derivable tal que $(g \circ f)(x) = -x^2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$.

11. Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = (1 + bx)e^{ax}$ en $x = 0$ sea $p(x) = 1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2$.

12. Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$ desarrollado en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

13. Hallar a y b para que los polinomios de Taylor de orden 2, centrados en $x = 0$, de las funciones $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + \dfrac{x}{2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + b} + \dfrac{2}{b}$ sean iguales.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 3 veces derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x = 1$ es $p(x) = 2 - 9(x - 1)^2$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$$

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 3 veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $x = 0$ es $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2 f(x)}$$

16. Sea $f(x) = \cos(x)$. Hallar el polinomio de Taylor de f de orden 4 centrado en $x_0 = 0$. Escribir la expresión del resto $R_4\left(\frac{1}{2}\right)$ y probar que

$$\left| R_4\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{5! \cdot 2^5} < 0,001.$$

Concluir que $p_4(1/2)$ aproxima a $\cos(1/2)$ con al menos dos decimales exactos.

17. Sea $f(x) = x \ln(x)$.

    (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de f centrado en $x_0 = 1$. Escribir la expresión del resto.

    (b) Estimar, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ por medio de $p_3(1,5)$.