Desenho e Análise de Algoritmos (CC211) 2012/13

Exame (29.01.2013) *duração: 3h + 30 minutos*

Cotação: 5.5, 3, 5.5, 2.5, 3.5, 3 (a questão 6. é alternativa a 3b))

N.º ______ Nome ______

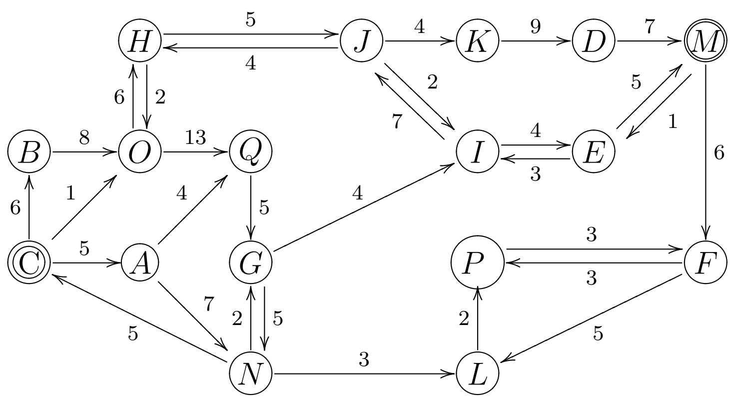
1. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, p, \{s, t\})$ uma rede, em que s e t são os nós origem e destino, $s \neq t$, e $p : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}^+$ define os valores nos arcos. Para cada percurso γ_{uv} em $\mathcal{G}$, com origem u e fim v, designe-se por $\mathcal{P}(\gamma_{uv})$ o valor *máximo* nos arcos que o constituem, i.e., $\mathcal{P}(\gamma_{uv}) = \max\{p(x, y) \mid (x, y) \text{ é arco de } \gamma_{uv}\}$. Dizemos que γ_{uv} **é *ótimo* sse $\mathcal{P}(\gamma_{uv})$ for *mínimo* quando considerados todos os percursos alternativos de u para v.** Pretendemos encontrar um percurso ótimo $\gamma^\star_{st}$ de s para t.

a) Averigue a veracidade de cada uma das afirmações seguintes sobre $\gamma^\star_{st}$, justificando a resposta:

1. Se $\gamma^\star_{st}$ contiver ciclos, existe um percurso ϕ_{st} sem ciclos tal que $\mathcal{P}(\gamma^\star_{st}) = \mathcal{P}(\phi_{st})$, ou seja, se existe um percurso ótimo de s para t então existe um caminho ótimo de s para t.
2. Se $\gamma^\star_{st}$ for um caminho com dois ou mais arcos e que passa num vértice v (fixo), então existem *caminhos* ótimos γ_{sv} e γ_{vt} tais que o percurso $\gamma_{sv}\gamma_{vt}$ de s para t é ótimo (i.e., $\mathcal{P}(\gamma^\star_{st}) = \mathcal{P}(\gamma_{sv}\gamma_{vt})$).
3. Se $\gamma^\star_{st}$ for um caminho com dois ou mais arcos que passa num vértice v (fixo), pelo menos um dos dois subcaminhos $\gamma^\star_{sv}$ e $\gamma^\star_{vt}$ que constituem $\gamma^\star_{st}$ é ótimo, mas o outro pode ser ótimo ou não.

b) Escreva um algoritmo para determinar um caminho ótimo $\gamma^\star_{st}$ de s para t, baseado numa adaptação do algoritmo de Dijkstra. Enuncie uma propriedade que justifique a correção desse algoritmo, relacionando-a com **1a)**.

c) Aplique o algoritmo que apresentou para obter um caminho ótimo $\gamma^\star_{CM}$ de C para M na rede desenhada abaixo. Acrescente informação à rede que permita verificar os passos principais (valores intermédios) e indique a ordem pela qual os nós foram explorados.



2. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ um grafo dirigido. Pretende-se determinar, para cada vértice $v \in \mathcal{V}$, o conjunto dos vértices $w \in \mathcal{V}$ tais que v é acessível de w e w é acessível de v em $\mathcal{G}$.

a) Apresente (em pseudocódigo) um algoritmo para resolver o problema com complexidade temporal $O(|\mathcal{V}| + |\mathcal{A}|)$, sendo $\mathcal{G}$ representado por listas de adjacências. Explique sucintamente a correção do algoritmo e apresente a complexidade dos passos principais e as estruturas de dados usadas.

b) Por aplicação do algoritmo, determine esses conjuntos para o grafo dado em **1c)**, ignorando os valores nos arcos. Para estabelecer a relação com o algoritmo, na resposta deve indicar o contéudo das estruturas de dados em passos cruciais do mesmo.

Deve resolver apenas uma das duas questões 3b) e 6.
Se não resolver 3b), deverá ter em conta a informação que contém.

3. Suponha que v é um vetor de n inteiros e que os elementos de v são indexados de 1 a n. Considere a função $\textsc{Func}(v, n)$ apresentada abaixo, ao centro, em pseudocódigo.

Linha	Algoritmo	Tempo
	Func(v, n):	
1	$k \leftarrow 1$;	a_1
2	Enquanto $(k < n)$ fazer	a_2
3	$r \leftarrow k$;	a_3
4	$j \leftarrow k + 1$;	a_4
5	Enquanto $(j \leq n)$ fazer	a_2
6	Se $v[j] \leq v[r]$ então	a_5
7	$r \leftarrow j$;	a_3
8	$j \leftarrow j + 1$;	a_4
10	Se $r \neq k$ então	a_6
11	$aux \leftarrow v[k]$;	a_7
12	$v[k] \leftarrow v[r]$;	a_8
13	$v[r] \leftarrow aux$;	a_9
14	$k \leftarrow k + 1$;	a_4

a) Justifique sucintamente, mas com rigor, que $\textsc{Func}(v, n)$ ordena o vetor v por ordem crescente. Comece por descrever, com rigor, o estado das variáveis r, j e v na iteração k, imediatamente antes da execução da instrução que está na linha 10.

b) (alternativa a 6.) À direita, em cada linha, a_i é uma constante positiva e representa o tempo de execução da instrução que está nessa linha, com excepção das linhas 2, 5, 6 e 10, em que esse tempo engloba a execução do teste da condição e a transferência de controlo. Seja $t_v(n)$ o tempo de execução do algoritmo para a instância (v, n).

1. Deduza a expressão de $t_v(n)$ quando: ***(i)*** todos os elementos de v são iguais, e ***(ii)*** todos são distintos e v está ordenado por ordem crescente.

2. Apresente a definição formal de "$t_v(n) \in \Theta(n^2)$" e, seguindo essa definição e a resposta à questão anterior, prove que, qualquer que seja (v, n), se tem $t_v(n) \in \Theta(n^2)$.

c) Sendo a complexidade do algoritmo dada pelo máximo de $t_v(n)$ para (v, n) qualquer, diga para que valores de $p \in \mathbb{N}$, a complexidade se pode caracterizar como $\Theta(n^p)$, $\Omega(n^p)$ ou $O(n^p)$. Explique.

d) Designe por $\textsc{Func\_Nova}(v, n)$ a função que se obtém quando se substitui, na linha 6, a condição $v[j] \leq v[r]$ por $v[j] < v[r]$. O que contém r na iteração k na linha 10? Conclua que $\textsc{Func\_Nova}(v, n)$ também ordena v por ordem crescente e diga, justificando, que relação existe entre a complexidade temporal assintótica de $\textsc{Func\_Nova}(v, n)$ e de $\textsc{Func}(v, n)$.

4. Considere o problema de formar uma certa quantia Q usando moedas de valores $v[1], v[2], \ldots, v[m]$, sendo $v[1] > v[2] > \ldots > v[m]$, tendo disponíveis $c[i]$ moedas de valor $v[i]$ em caixa, sendo $c[i] \in \mathbb{Z}_0^+$, para $1 \leq i \leq m$, só podendo usar essas moedas.

a) Escreva uma recorrência que defina o número de alternativas para a formação da quantia Q nessas condições (só distinguindo quantas moedas de cada tipo são usadas). Explique de que modo se pode usar programação dinâmica com memoização para calcular esse número, dados Q, v, c e m.

b) Imagine que se pretende formar a quantia Q com o número **mínimo** de moedas possível e que *se usa sempre a moeda mais alta que se puder (aplicando-se a mesma abordagem à quantia restante).* Explique em que sentido tal estratégia é *greedy* e indique se é correta. Justifique.

(CONTINUA)

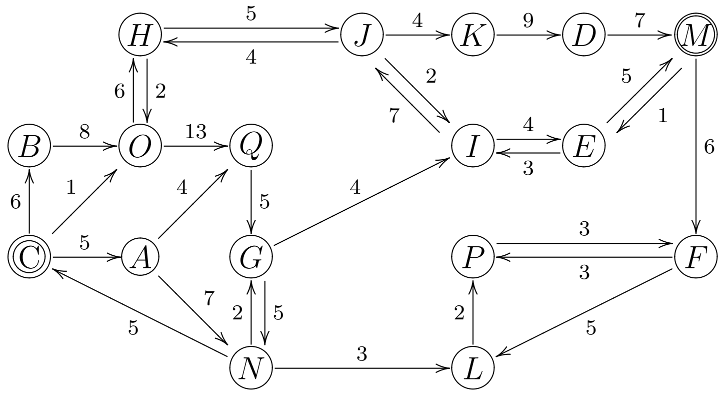
Departamento de Ciência de Computadores FCUP

Desenho e Análise de Algoritmos (CC211) 2012/13

Exame (29.01.2013) (continuação)

N.º [ ] Nome [ ]

5. Suponha que a rede representada em **1b)** é uma rede de fluxo, com $s = C$ e $t = M$, e que $p(x, y)$ indica a capacidade do arco (x, y), para cada $(x, y) \in \mathcal{A}$.



a) Indique um fluxo f de C para M tal que $f(G, I) = 2$, $f(H, J) = 5$, $f(C, B) = 6$ e $f(J, I) = 2$.

b) Determine a capacidade residual associada a f para cada par $(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, com $x \neq y$. Apresente os cálculos que efetuar, omitindo os casos em que $f(x, y) = 0$.

c) **Partindo de** f, aplique o algoritmo de Edmonds-Karp para obter um fluxo máximo $f^\star$. Descreva sucintamente os passos efetuados pelo algoritmo.

6. (alternativa a 3b) Seja $G_A = (V, A)$ um grafo dirigido <u>acíclico</u> e $G_E = (V, E)$ o grafo não dirigido que resulta de G_A por substituição de cada arco $(u, v) \in A$ por um ramo não dirigido $\{u, v\}$. Seja Γ um conjunto finito de caminhos em G_A, sendo cada caminho $\gamma \in \Gamma$ dado pela sequência de vértices que o define. Pretende-se verificar se é possível reconstruir G_A a partir de G_E e de Γ. Seja $G_\Gamma = (V, A_\Gamma)$ o grafo dirigido formado por V e pelos arcos que constituem os caminhos de Γ.

a) Sabemos que nada se pode concluir sobre a orientação de um ramo $\{u, v\}$ de E no grafo G_A se nem v for acessível de u em G_Γ nem u for acessível de v em G_Γ. Justifique agora que:

1. O grafo G_Γ é acíclico (i.e., um DAG).
2. Qualquer que seja o ramo $\{u, v\} \in E$, se v é acessível de u em G_Γ então $(u, v) \in A$ (se for u acessível de v então $(v, u) \in A$).

b) Assuma que os vértices estão numerados de 1 a $|V|$, que $|V|$ é conhecido, que Γ é lido da entrada padrão e que G_E se encontra dado por uma matriz de adjacências simétrica M tal que $M[i, j] = M[j, i] = 1$ se $\{i, j\} \in E$, e $M[i, j] = M[j, i] = 0$ se $\{i, j\} \notin E$.

Baseando-se em **6a)**, escreva um algoritmo para resolver o problema da reconstrução de G_A em tempo $O(|\Gamma||V| + |V|^3)$. O algoritmo deve produzir informação sobre a parte de G_A que se consegue reconstruir e sobre os ramos sobrantes, se existirem. Use matrizes de adjacências para representar os grafos G_T e G_A. Comece por apresentar as ideias principais do algoritmo que delineou e por justificar a sua correção e complexidade.

(FIM)