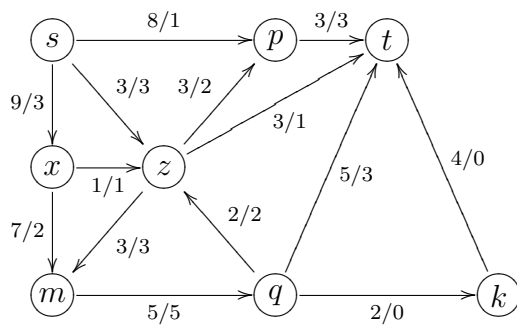


N.º Nome

1. Considere a rede de fluxo seguinte, onde c/f são pares capacidade/fluxo, e s e t são a origem e destino.



a) [0.7] Indique os valores de:

$|f|$ $c(q, t)$ $c(t, q)$

$f(q, z)$ $f(z, q)$ $f(t, k)$

$c_f(p, s)$ $c_f(s, z)$ $c_f(k, t)$

$c_f(q, k)$ $c_f(m, q)$ $c_f(z, t)$

b) [1.5] Partindo do fluxo f , aplique o algoritmo de Edmonds-Karp para obter um fluxo máximo (desenhe a rede residual em cada iteração, represente o fluxo final na rede, e explique sucintamente os passos).

c) [0.6] Complete as frases: A capacidade do corte $(\{s, x, t\}, \{p, q, z, m, k\})$ é .

é um corte $\{S, T\}$ com capacidade mínima, a qual é .

d) [1.2] Escreva em pseudocódigo uma **função** que determine **um caminho para aumento** numa dada rede residual G_f e o **incremento** de $|f|$. Assuma que $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$. Qual é a sua complexidade?

2. [1.0] Considere o problema de formar uma certa quantia q com um número **mínimo** de moedas de valores 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, e 200, estando q e esses valores na mesma unidade monetária. Indique a **estratégia greedy** que obtém a solução ótima se se dispuser de um número ilimitado de moedas de cada tipo e prove que é incorreta se **for limitado**. Indique **todos** os erros possíveis e instâncias nessas condições.

3. [2.0] Usando a definição matemática das ordens de grandeza e das classes indicadas, justifique a verdade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes.

a) $35 + 100n + 3n \log_2 n \notin \Theta(n \log_2 n)$

N.º Nome b) $4n^2 + 150 \in \Omega(12n^2 + 5)$.

4. Considere o algoritmo de Dijkstra, suportado por uma *heap binária de mínimo* Q , para determinação de caminhos mínimos com origem num nó s num grafo dirigido $G = (V, E, d)$, com $d(e) \in \mathbb{Z}^+$, para $e \in E$.

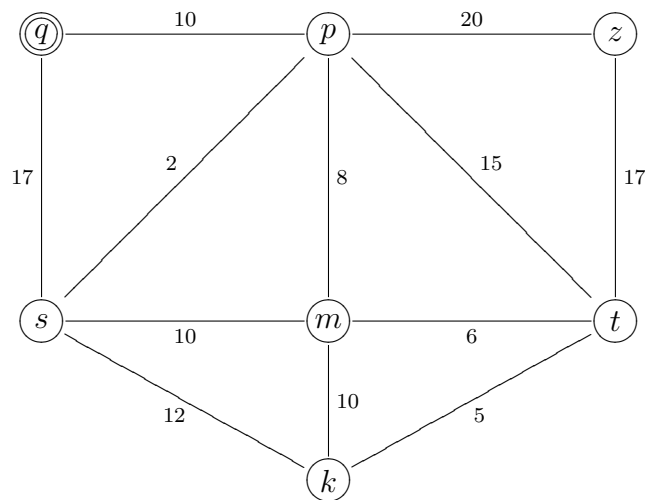
a) [0.3+0.7] O que retorna a operação $\text{EXTRACTMIN}(Q)$? Como é efetuada e de que modo afeta Q na implementação de Q apresentada nas aulas (recorde que se mantém dois *arrays* $Q.a$ e $Q.pos_a$).

b) [1.0] Indique a complexidade de $\text{EXTRACTMIN}(Q)$, $\text{DECREASEKEY}(Q, v, \text{dist}[v])$, e do algoritmo de Dijkstra .

5. [0.4] Explique de que modo a correção do algoritmo de Kruskal, para cálculo de uma árvore de suporte de peso **máximo** (ou **mínimo**) de um grafo $G = (V, E, d)$, se deduz da correção da estratégia *greedy* que determina um conjunto máximo independente num matróide pesado (S, \mathcal{F}) . A que corresponde S e \mathcal{F} ?

/* Em alternativa, resolva questão 10. */

6. [2.0] Aplique o algoritmo de Prim para obter uma árvore geradora \mathcal{T} de peso **mínimo** do grafo indicado, com raiz q . Anote os nós com pares $(dist, pai)$, como se definiu nas aulas, de modo a poder reconstruir os passos **intermédios** dessa aplicação. Na caixa à direita, indique os nós em \mathcal{T} após cada iteração.



7. Considere o algoritmo de Kosaraju-Sharir para determinação das componentes fortemente conexas de um grafo dirigido $G = (V, E)$. Pretendemos obter uma lista de listas de nós que definem cada componente.

a) [1.5] Descreva os passos principais, as suas complexidades temporais e as estruturas de dados que usam.

b) [0.4] Que propriedades da pesquisa e do grafo de componentes são determinantes para a correção?

N.º Nome

8. Considere a função $\text{ANALISAROTA}(s, t, n, C)$ para verificar se uma rota a dar por um utilizador passa em s e t e tem lugares suficientes entre s e t para um grupo de n elementos, sendo C uma matriz e $C[i, j]$ o número de lugares disponíveis no troço (i, j) (que será -1 se não existir esse troço). A rota é dada pela sequência de nós por onde passa, os quais são todos distintos. O utilizador começa por dar o número de nós da rota e a seguir indicará os nós. Assuma que $s \neq t$ e $n \geq 1$.

a) [1.2] Qual é a complexidade no pior caso?

E, no melhor caso? Identifique-os e explique.

$\text{ANALISAROTA}(s, t, n, C)$

```
1.   $p \leftarrow n$ ;
2.  ler( $m$ ); ler( $i$ );  $d \leftarrow 1$ ;
3.  Se ( $i = s$ ) então  $ok \leftarrow \text{true}$ ;
4.  senão  $ok \leftarrow \text{false}$ ;
5.  Enquanto ( $i \neq t \wedge p = n \wedge d < m$ ) fazer
6.    ler( $j$ );  $d \leftarrow d + 1$ ;
7.    Se ( $j = s$ ) então  $ok \leftarrow \text{true}$ ;
8.    senão
9.      se ( $ok = \text{true} \wedge p > C[i, j]$ ) então
10.         $p \leftarrow C[i, j]$ ;
11.     $i \leftarrow j$ ;
12.  Se ( $i = t \wedge ok = \text{true} \wedge p = n$ ) então
13.    retorna  $\text{true}$ ;
14.  retorna  $\text{false}$ ;
```

b) [0.7] Assuma que não é necessário ler a rota até ao fim. Indique um **invariante de ciclo** que permita demonstrar a correção da função.

c) [1.1] Usando **indução matemática** (sobre o número de vezes que testa a condição de ciclo), **demonstre o invariante** que indicou e, **aplicando-o**, apresente a dedução de que a função retorna o valor correto.

d) [0.3] Assuma que é necessário ler a rota até ao fim. Corrija o programa.

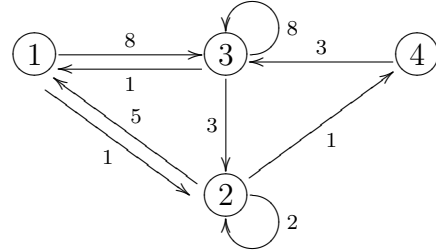
N.º Nome

9. Seja $G = (V, E, d)$ um grafo dirigido finito, com $V = \{1, 2, \dots, n\}$, e em que $d(e) \in \mathbb{Z}^+$ define o peso do ramo e , para todo $e \in E$. O peso de um percurso é a soma dos pesos nos ramos do percurso. Considere percursos $\gamma_{ij}^{(k,r)}$ de i para j com no máximo r ramos e que passam num nó k pré-definido (basta que k ocorra, não tem de ser um nó intermédio). Seja $K_{ij}^{(k,r)}$ o **peso mínimo** que um tal percurso pode ter, para k e r fixos. Um percurso tem pelo menos um ramo. Se o percurso não existir, defina $K_{ij}^{(k,r)}$ como ∞ .

a) [0.6] Para a instância representada, indique os valores de:

$K_{3,3}^{(3,2)}$ $K_{1,4}^{(3,2)}$ $K_{1,4}^{(3,9)}$

$K_{1,1}^{(3,6)}$ $K_{4,4}^{(3,2)}$ $K_{2,2}^{(3,4)}$



b) [0.5] No caso geral, prove que nenhum percurso $\gamma_{ij}^{(k,r)}$ com peso $K_{ij}^{(k,r)}$ contém um ciclo de k para k , a menos que $i = j = k$.

c) [1.0] Defina $K_{ij}^{(k,r)}$ por uma recorrência, para todo $(i, j) \in V \times V$ e $r \geq 1$, com $k \geq 1$ fixo, bem como o nó $N_{ij}^{(k,r)}$ que segue o nó i num percurso $\gamma_{ij}^{(k,r)}$ encontrado com peso $K_{ij}^{(k,r)}$. **Explique sucintamente.** (Sugestão: como exprimir a matriz $K^{(k,r+1)}$ a partir da matriz $K^{(k,r)}$ e de d ?)

d) [0.2] Indique um valor r_0 , dependente de n , tal que $K_{ij}^{(k,r)} = K_{ij}^{(k,r_0)}$, para todo (i, j) e $r \geq r_0$.

e) [1.1] Escreva (em pseudocódigo) uma função $\text{RESOLVE}(D, n, k, K)$, com **complexidade** $O(n^3)$, para obter a matriz K , sendo K_{ij} o peso mínimo de um percurso de i para j que passe por k , com $k \geq 1$ fixo, para todos os pares (i, j) . Deve ser baseada na recorrência definida anteriormente e usar **programação dinâmica**. São dados n, k e a matriz D , sendo $D_{ij} = d(i, j)$ se $(i, j) \in E$ (caso contrário, $D_{ij} = \infty$).

10. [0.4] Uma árvore de pesquisa *red-black* não é uma árvore equilibrada. Que propriedade garante que a operação de procura de um dado valor seja realizada em $O(\log_2 n)$, sendo n o número de valores na árvore?

/* Em alternativa, resolva questão 5. */