Problemas de Fluxo Máximo

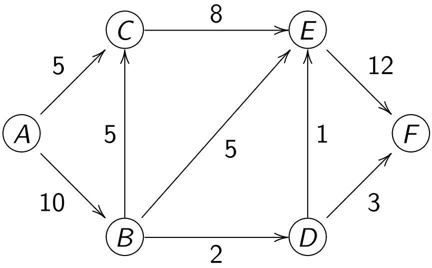
Ana Paula Tomás

Desenho e Análise de Algoritmos 2017/18

Dezembro 2017

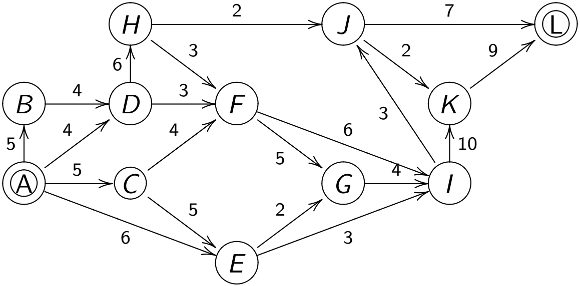
Exemplo 1 - Distribuição de água

Considere uma rede de distribuição de água com **origem em** A e com a configuração seguinte.



O valor em cada ramo representa a capacidade máxima do tubo correspondente. Os ramos indicam o sentido em que a água flui. Qual é a quantidade máxima de água que pode chegar de A a F? Como a encaminhar? Em cada nó interno, pode haver redistribuição da água que lá chegar, não ocorrendo perdas.

Exemplo 2 - Encaminhamento de chamadas



O grafo representa parte de uma rede de comunicações. Quando A recebe uma chamada, encaminha-a para L através de um conjunto de terminais de reencaminhamento. A capacidade de cada ligação está indicada na ligação. Enquanto estiver a decorrer, uma chamada ocupa uma unidade de cada uma das linhas usadas para a estabelecer. Não há corte das chamadas.

Quantas chamadas podem estar a decorrer no máximo num instante?

Fluxo máximo numa rede

- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.
  Supomos $c(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin A$.
- Fluxo: função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u, v \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo na rede denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem* s, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino* t:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

Fluxo máximo numa rede

- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.
  Supomos $c(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin A$.
- Fluxo: função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u, v \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo na rede denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem* s, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino* t:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

Fluxo máximo numa rede

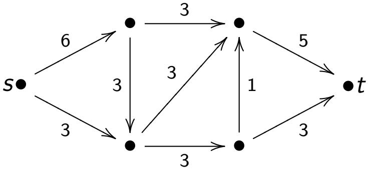
- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.
  Supomos $c(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin A$.
- Fluxo: função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u, v \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo na rede denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem* s, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino* t:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

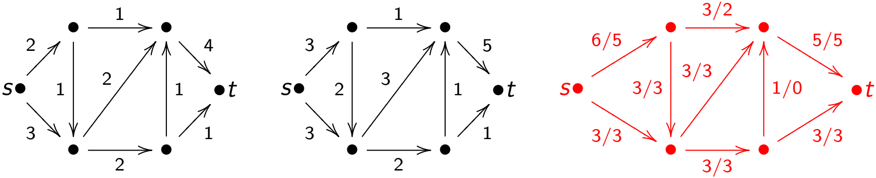
- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

Exemplo de rede e de fluxos na rede

Rede



Três exemplos de fluxos na rede



Não se representou $f(u,v)$, para $(u,v) \notin A$.
No exemplo à direita, colocou-se c/f nos ramos (pares capacidade/fluxo).

Definições

- Existe fluxo de u para v sse $f(u,v) > 0$
- Se $f(u,v) = c(u,v)$, o ramo (u,v) está saturado.
- Corte $\{S,T\}$ é qualquer partição $\{S,T\}$ de V tal que $s \in S$ e $t \in T$.
- Capacidade do corte $\{S,T\}$ é $c(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$
- Corte mínimo é qualquer corte $\{S,T\}$ de capacidade mínima.
- Fluxo através do corte $\{S,T\}$ é $f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v)$

Teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (1956)

O fluxo máximo numa rede é igual à capacidade do corte mínimo.

Alguns lemas úteis para a prova

- Qualquer que seja o fluxo f, o fluxo através de qualquer corte $\{S, T\}$ é igual ao fluxo na rede, isto é $|f| = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v)$.
- $|f| \leq c(U, T)$, para todo o fluxo f e corte $\{S, T\}$.
- Se as capacidades são inteiras, existe um fluxo máximo inteiro, ou seja, se $c(u, v) \in \mathbb{Z}_0^+$, existe um fluxo máximo f com $f(u, v) \in \mathbb{Z}$, para todo (u, v).

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a capacidade residual c_f é definida $V \times V \to$ em $\mathbb{R}$, por

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s, t\})$ com $A_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$ designa-se por rede residual induzida pelo fluxo f em G.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t no grafo G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Rede residual associada a um fluxo

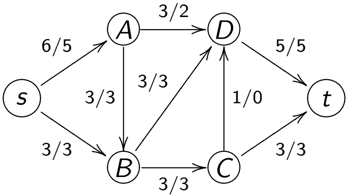
Lema (fluxos na rede e na rede residual)

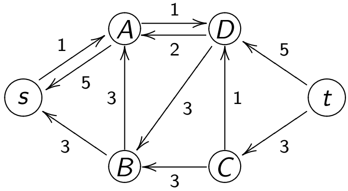
Seja $G = (V, E, c, \{s, t\})$ uma rede com origem s e destino t. Seja f um fluxo em G e sejam G_f o grafo residual induzido por esse fluxo em G e f' um fluxo em G_f.

1. f' é um fluxo em G_f se e só se $f + f'$ é um fluxo em G.
2. O valor do fluxo $f + f'$ em G é $|f| + |f'|$ quaisquer que sejam $x, y \in V$ (por definição, $(f + f')(x, y) = f(x, y) + f'(x, y)$).
3. f' é um fluxo máximo em G_f se e só se $f + f'$ é um fluxo máximo em G.

Exemplo: fluxo e rede residual associada

À direita, temos a rede residual associado ao fluxo f representado à esquerda.





Na rede residual, $c_f(s, A) = 1$ e $c_f(A, s) = 5$ pois:

$$c_f(A, s) = c(A, s) - f(A, s) = 0 - (-f(s, A)) = 5$$

e $c_f(s, A) = c(s, A) - f(s, A) = 6 - 5 = 1.$

O fluxo f é máximo porque não há caminho de s para t na rede residual G_f.

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

O teorema de Ford-Fulkerson resulta da prova de que **as três condições seguintes são equivalentes**:

1. f é um fluxo máximo em G.
2. Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.
3. $f = c(S, T)$, para algum corte (S, T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.

Prova :

f é fluxo máximo

$|f| = c(S, T)$
para algum corte $\{S, T\}$

não existe caminho
para aumento de f

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se existisse caminho de s para t em G_f, então um fluxo f' ao longo desse caminho aumentaria $|f|$ de $|f'|$.

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sejam $S = \{$nós acessíveis de s em $G_f\}$ e $T = V \setminus S$ (notar que $t \in T$). Os ramos que existiam de S para T na rede inicial, não existem em G_f. Isso quer dizer que f os saturou. Logo, $c(S, T) = |f|$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Como $|f| = c(S, T)$, então $|f|$ é máximo pois nenhum fluxo excede a capacidade de um corte $\{S, T\}$ da rede, qualquer que seja o corte $\{S, T\}$. Assim, se $|f| = c(S, T)$, então $\{S, T\}$ tem capacidade mínima. Logo, $|f|$ é máximo.

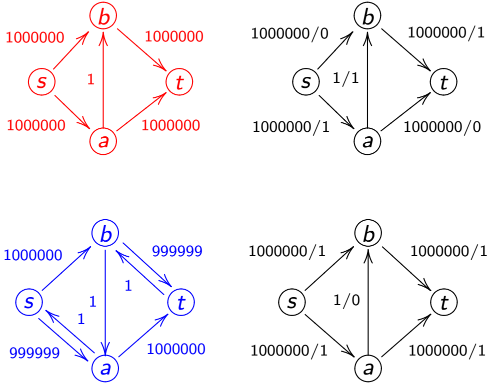
Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

METODO_FORD-FULKERSON(G)
Para cada $(u, v) \in G.A$ fazer $f(u, v) \leftarrow 0$; $f(v, u) \leftarrow 0$;
Determinar a rede residual G_f; /* neste caso $G_f = G$ pois f é nulo */
Enquanto existir um caminho γ de s para t em G_f fazer:
    $c_\gamma \leftarrow \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in \gamma\}$;
    Para cada $(u, v) \in \gamma$ fazer
        $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_\gamma$;
        $f(v, u) \leftarrow -f(u, v)$;
    Actualizar G_f; /* afeta apenas os ramos de γ e simétricos */

NB: pode **partir de um fluxo f já conhecido**, calcular G_f, e prosseguir...

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

- Não refere como obter γ. Termina para capacidades inteiras (ou racionais) mas **pode não terminar** se forem irracionais. Não é um *algoritmo*.
- O número de iterações pode ser **exponencial no tamanho da instância**.



Se escolher alternadamente os caminhos (s, a, b, t) e (s, b, a, t) são necessárias 2000000 iterações. Mas, **bastam duas se for** (s, a, t) **e** (s, b, t).

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

- Complexidade de cada iteração é $O(m)$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\, C)$, onde $m = |A|$ e C é capacidade máxima dos ramos. $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \leq mC$. De facto, $|f^*| \leq nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.
- $\boxed{\textbf{Algoritmo de Edmonds \& Karp}}$: escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos (aplica BFS). O número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial. Tem complexidade $O(m^2 n)$;

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

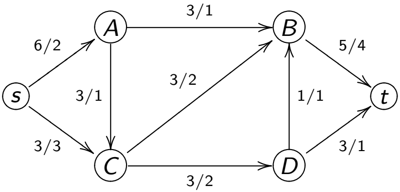
- Complexidade de cada iteração é $O(m)$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\, C)$, onde $m = |A|$ e C é capacidade máxima dos ramos. $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \leq mC$. De facto, $|f^*| \leq nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.
- **Algoritmo de Edmonds & Karp**: escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos (aplica BFS). O número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial. Tem complexidade $O(m^2 n)$;

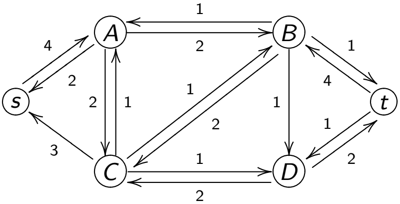
Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

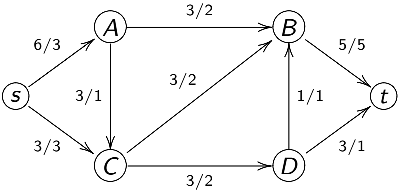
- Complexidade de cada iteração é $O(m)$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\,C)$, onde $m = |A|$ e C é capacidade máxima dos ramos. $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \leq mC$. De facto, $|f^*| \leq nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.
- **Algoritmo de Edmonds & Karp**: escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos (aplica BFS). O número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial. Tem complexidade $O(m^2 n)$;

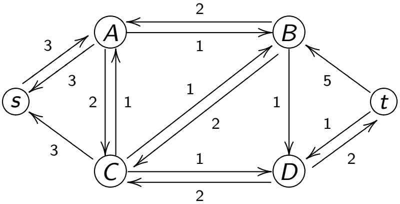
Exemplo: partindo de um fluxo na rede





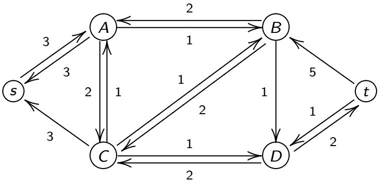
Existe caminho de s para t em G_f: (s, A, B, t), com capacidade 1, permite aumentar o fluxo de 1 unidade.





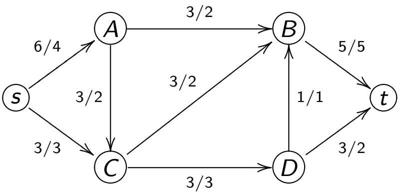
O fluxo ainda não é máximo.

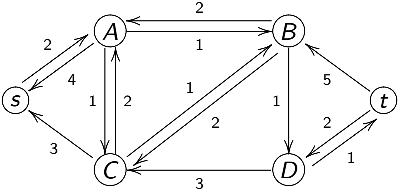
Exemplo: partindo de um fluxo na rede (cont.)



Existe caminho de s para t na rede residual. Exemplo: (s, A, C, D, t), que tem capacidade 1, permite aumentar o fluxo de 1 unidade.

Após essa iteração (como vemos abaixo à direita), o fluxo não é ainda máximo pois (s, A, C, B, D, t) é um caminho para aumento (seria necessário aumentar novamente o fluxo para finalmente obter o fluxo máximo $|f^{\star}| = 8$).



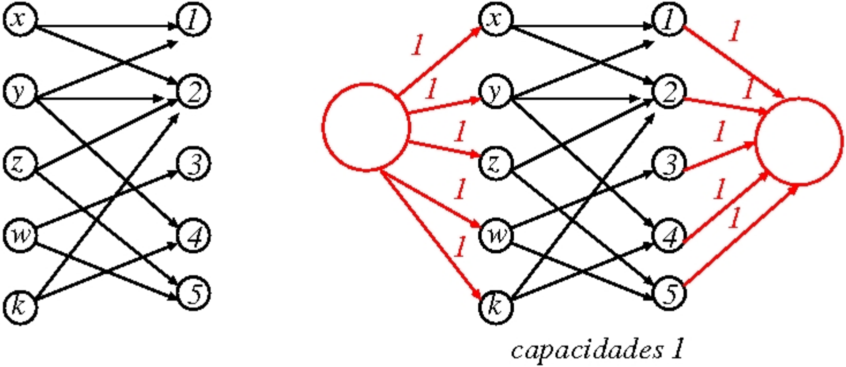


Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

- Um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é bipartido sse $u \in V_1$ e $v \in V_2$, qualquer que seja o ramo $\langle u, v\rangle \in E$.
- Um emparelhamento num grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M de E tal que quaisquer ramos em M são incidentes em vértices distintos de V (ou seja, não há dois ramos em M que partilhem algum extremo).
- **Problema** (*Maximal Bipartite Matching Problem*): Dado um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ determinar um emparelhamento de cardinal máximo em G.
- Exemplos de aplicação:
  - **Atribuição de tarefas a pessoas**. Cada pessoa só desempenha no máximo uma tarefa e cada tarefa é atribuída no máximo a uma pessoa. As pessoas tem habilitações distintas. Maximizar o número de tarefas realizadas.
  - **Propagação de restrições** em sistemas de programação por restrições (*constraint programming*): sendo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis com $x_i \in D_i$, e D_i finito, para $1 \leq i \leq n$, existirá uma atribuição de valores às variáveis que satisfaça $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, para todo i, j?

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

Redução ao problema de determinação de um fluxo máximo: orientar os ramos, inserir origem, destino e capacidades unitárias (como no exemplo).



Um fluxo máximo corresponde a um emparelhamento de cardinal máximo.

Outros exemplos de aplicações

Problemas que se resolvem por redução ao problema de fluxo máximo:

- Qual é o **número máximo de caminhos que não partilham ramos** num grafo dirigido G de um nó s para um nó t, sendo G, s e t dados?
- **Atribuição de tarefas a pessoas**, assumindo que cada pessoa tem competências para algumas tarefas e uma capacidade máxima. Maximizar o número de tarefas atribuídas. Cada tarefa só será desempenhada por uma pessoa no máximo.
- **Colocações de pessoas em postos de trabalho** (**sem preferências**): maximizar o número de pessoas colocadas, dado o número de vagas existente em cada posto e as habilitações de cada pessoa (ou seja, os postos que pode ocupar).

Como são as redes de fluxo? Origem e destino? Capacidades dos ramos?

A seguir, introduzimos um problema clássico de **afetação com preferências mútuas**.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.
  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

Algoritmo de Gale-Shapley para StableMarriage

Gale e Shapley (1962) provaram que qualquer instância de StableMarriage admite um emparelhamento estável.

Algoritmo de Gale-Shapley

Considerar inicialmente que todas as pessoas estão livres.
Enquanto houver algum homem h livre fazer:
    seja m a primeira mulher na lista de h a quem este ainda não se propôs;
    se m estiver livre então
        emparelhar h e m (ficam noivos)
    senão
        se m preferir h ao seu noivo atual h' então
            emparelhar h e m (ficam noivos), voltando h' a estar livre
        senão
            m rejeita h e assim h continua livre.

O algoritmo de Gale-Shapley obtém um emparelhamento estável em tempo $O(n^2)$.
Foi provado que tal emparelhamento é **o melhor emparelhamento estável segundo os homens** e, se não for o único emparelhamento estável, é **o pior segundo as mulheres**.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:

$$\begin{array}{llllllllllll} h_1: & m_4, & m_2, & m_3, & m_1 & \qquad & m_1: & h_4, & h_2, & h_1, & h_3 \\ h_2: & m_2, & m_3, & m_4, & m_1 & & m_2: & h_3, & h_1, & h_4, & h_2 \\ h_3: & m_2, & m_3, & m_1, & m_4 & & m_3: & h_2, & h_3, & h_1, & h_4 \\ h_4: & m_1, & m_3, & m_2, & m_4 & & m_4: & h_3, & h_4, & h_2, & h_1 \end{array}$$

$M = \{(h_1, m_4), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_1)\}$ é o emparelhamento estável que se obtém por aplicação do algoritmo de Gale-Shapley a esta instância.

Não existe nenhum outro emparelhamento estável para esta instância.

Justificação: De acordo com a teoria sobre o problema StableMarriage, o emparelhamento que o algoritmo de Gale-Shapley produz é ótimo segundo os homens e péssimo segundo as mulheres. Se se **trocar o papel dos homens e das mulheres no algoritmo de Gale-Shapley**, obtém-se o emparelhamento ótimo segundo as mulheres e péssimo segundo os homens. Para esta instância esses dois emparelhamentos são iguais, o que quer dizer que M é o único emparelhamento estável que esta instância admite.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:

$$\begin{array}{lllll} h_1: & m_4, & m_2, & m_3, & m_1 \\ h_2: & m_2, & m_3, & m_4, & m_1 \\ h_3: & m_2, & m_3, & m_1, & m_4 \\ h_4: & m_1, & m_3, & m_2, & m_4 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} m_1: & h_4, & h_2, & h_1, & h_3 \\ m_2: & h_3, & h_1, & h_4, & h_2 \\ m_3: & h_2, & h_3, & h_1, & h_4 \\ m_4: & h_3, & h_4, & h_2, & h_1 \end{array}$$

$M = \{(h_1, m_4), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_1)\}$ é o emparelhamento estável que se obtém por aplicação do algoritmo de Gale-Shapley a esta instância.

Não existe nenhum outro emparelhamento estável para esta instância.

Justificação: De acordo com a teoria sobre o problema StableMarriage, o emparelhamento que o algoritmo de Gale-Shapley produz é ótimo segundo os homens e péssimo segundo as mulheres. Se se **trocar o papel dos homens e das mulheres no algoritmo de Gale-Shapley**, obtém-se o emparelhamento ótimo segundo as mulheres e péssimo segundo os homens. Para esta instância esses dois emparelhamentos são iguais, o que quer dizer que M é o único emparelhamento estável que esta instância admite.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:
Colocar os candidatos c_1, c_2, c_3, e c_4 em quatro postos de trabalho p_1, p_2, p_3, p_4 numa empresa, dadas as preferências dos candidatos e da empresa (ambas por ordem decrescente). Cada posto é atribuído exatamente a um candidato.

$$\begin{array}{llllll} c_1: & p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ c_2: & p_2, & p_3, & p_1, & p_4 \\ c_3: & p_3, & p_4, & p_2, & p_1 \\ c_4: & p_4, & p_1, & p_2, & p_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} p_1: & c_2, & c_3, & c_4, & c_1 \\ p_2: & c_3, & c_4, & c_1, & c_2 \\ p_3: & c_1, & c_4, & c_2, & c_3 \\ p_4: & c_2, & c_1, & c_3, & c_4 \end{array}$$

Qual é a melhor solução estável segundo os candidatos?

$$M^C = \{(c_1, p_1), (c_2, p_2), (c_3, p_3), (c_4, p_4)\}$$

Mas, segundo a empresa, isto é, segundo os postos de trabalho, seria:

$$M^E = \{(c_1, p_3), (c_2, p_1), (c_3, p_4), (c_4, p_2)\}$$

Conclusão: M^C é o pior emparelhamento estável para a empresa e M^E é o pior emparelhamento estável para os candidatos.

Qual preferir? Existirá um mais "igualitário"?

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:
Colocar os candidatos c_1, c_2, c_3, e c_4 em quatro postos de trabalho p_1, p_2, p_3, p_4 numa empresa, dadas as preferências dos candidatos e da empresa (ambas por ordem decrescente). Cada posto é atribuído exatamente a um candidato.

$$\begin{array}{lllll} c_1: & p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ c_2: & p_2, & p_3, & p_1, & p_4 \\ c_3: & p_3, & p_4, & p_2, & p_1 \\ c_4: & p_4, & p_1, & p_2, & p_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} p_1: & c_2, & c_3, & c_4, & c_1 \\ p_2: & c_3, & c_4, & c_1, & c_2 \\ p_3: & c_1, & c_4, & c_2, & c_3 \\ p_4: & c_2, & c_1, & c_3, & c_4 \end{array}$$

Qual é a melhor solução estável segundo os candidatos?

$$M^C = \{(c_1, p_1), (c_2, p_2), (c_3, p_3), (c_4, p_4)\}$$

Mas, segundo a empresa, isto é, segundo os postos de trabalho, seria:

$$M^E = \{(c_1, p_3), (c_2, p_1), (c_3, p_4), (c_4, p_2)\}$$

Conclusão: M^C é o pior emparelhamento estável para a empresa e M^E é o pior emparelhamento estável para os candidatos.

Qual preferir? Existirá um mais "igualitário"?

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse) sobre o significado de:
"o emparelhamento que o ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY *produz é óptimo para os homens* e *péssimo para as mulheres*".

- Isto quer dizer que, quando considerados todos os emparelhamentos estáveis, qualquer homem fica com a melhor companheira que poderia obter e qualquer mulher fica com o pior companheiro que poderia obter.

- Formalmente, o **conjunto** $\mathbb{M}$ **de todos os emparelhamentos estáveis** de uma instância de STABLEMARRIAGE constitui um **reticulado distributivo** se for ordenado por $\preceq$ assim: $M \preceq M'$, lendo-se M **domina** M' **(segundo os homens)**, sse todo homem tem ou a mesma companheira em M e M' ou uma companheira em M que prefere à que tem em M'.
- Prova-se que: M domina M' segundo os homens sse M' domina M segundo as mulheres.

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse):
Porque é que $(\mathbb{M}, \preceq)$ é um reticulado distributivo?

- Sendo M e M' emparelhamentos estáveis, tem-se:
  - é estável o emparelhamento $M \wedge M'$, em que cada homem h ficará com a mulher que **prefere** entre $M(h)$ e $M'(h)$;
  - é estável o emparelhamento $M \vee M'$, em que cada homem h ficará com a mulher de que **gosta menos** entre $M(h)$ e $M'(h)$.
- $(\mathbb{M}, \preceq)$ é um reticulado: $M \wedge M'$ é o **ínfimo** entre M e M'; $M \vee M'$ é o **supremo** entre M e M'.

  Distributivo porque $M_1 \vee (M_2 \wedge M_3) = (M_1 \vee M_2) \wedge (M_1 \vee M_3)$ e $M_1 \wedge (M_2 \vee M_3) = (M_1 \wedge M_2) \vee (M_1 \wedge M_3)$, para $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{M}$.
- O mínimo de $\mathbb{M}$ é o emparelhamento estável ótimo segundo os homens.
- O máximo de $\mathbb{M}$, se for distinto do mínimo, é o pior emparelhamento estável segundo os homens (mas o melhor para as mulheres).

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse):
A estrutura de reticulado permite obter alguns algoritmos eficientes.

Por exemplo, em D. Gusfield, Three Fast Algorithms for four Problems in Stable Marriage, *SIAM J. Computing*, 16(1):111-128, 1987. é explorada para:

- determinar de todos os **pares** estáveis em $O(n^2)$;
- enumerar com complexidade ótima (espaço-temporal) todos os emparelhamentos estáveis. Tempo $O(n^2 + n|\mathbb{M}|)$ e espaço $O(n^2)$;
  - Notar que $|\mathbb{M}|$ pode ser exponencial em n.
    R. Irving, P. Leather, The Complexity of Counting Stable Marriages, *SIAM J. Computing*, 15:655-667, 1986.
- construir em $O(n^2)$ o emparelhamento estável que **minimiza o nível de descontentamento máximo**, quando se considera simultaneamente todos os homens e mulheres.