Departamento de Ciência de Computadores — FCUP

Desenho e Análise de Algoritmos (CC211) — 2013/14

Exame (Dirigente Associativo) (10.07.2014) — *duração: 3h*

Cotação: 2, 6, 12

N.º | | Nome | |

1. Usando a definição das classes $\Theta(n^3)$, $O(n^2 \log_2 n)$ e $\Omega(\log_2 n^4)$, demonstre a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes.

a) $7n^2 - 6n \in \Omega(\log_2 n^4)$

b) $\Theta(n^3) \cap O(n^2 \log_2 n) \neq \{\,\}$

2. Um grupo de pessoas pretende reservar uma viagem para se deslocar de um certo local s para outro t. A empresa de transportes efetua diariamente várias rotas alternativas, algumas com passagem em s e t (e outras não). O grupo tem g elementos e nem todas as rotas têm já g lugares disponíveis nos troços relevantes. Existem problemas em alguns troços da rede, os quais podem atrasar a viagem do grupo se ocorrerem entre a origem da rota e o local t. Por isso, o grupo gostaria de evitar tais troços, mas poderá não ser possível. Suponha que a descrição dos problemas é dada por uma matriz M, com $M[i,j] = 1$ se existir algum problema no troço (i,j) e, caso contrário, $M[i,j] = 0$, sendo $i, j \in V$ e $V = \{1, 2 \ldots, n\}$ o conjunto de nós da rede. Não poderá combinar fragmentos de várias rotas para definir a viagem.

a) Pretende-se uma função Analisa(g, s, t, n, M) para verificar se uma rota é adequada para transporte do grupo. Se for, a função retorna o número de troços com problemas que podem afetar a viagem e, se não for, retorna -1. Os parâmetros são: o número de elementos do grupo, a origem e destino do grupo, o número de nós da rede, e a matriz M. A informação sobre a rota será lida da entrada padrão (na totalidade), sendo uma sequência de $2k$ inteiros

$$k \;\; v_1 \;\; n_1 \;\; v_2 \;\; n_2 \;\; v_3 \;\; n_3 \;\; \ldots v_{k-1} \;\; n_{k-1} \;\; v_k$$

onde $k \geq 2$ é o número de nós que a constituem, cada v_i designa um local da rede, cada troço (v_i, v_{i+1}) corresponde também a um troço (i.e., ramo) da rede, e o valor n_i é o número de lugares disponíveis nesse troço da rota. As rotas são unidirecionais. Nenhuma rota passa duas vezes pelo mesmo local.

- Apresente a função Analisa(g, s, t, n, M) em pseudocódigo.
- Justifique que a função que escreveu está correta, enunciando os invariantes que permitem mostrar a correção. Justifique.
- Caraterize a sua complexidade computacional. Justifique.

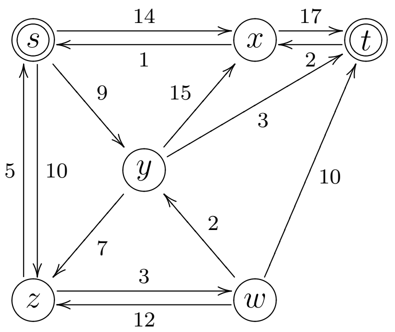
b) Para efetuar a reserva, são analisadas várias rotas e é selecionada a primeira que permita o transporte do grupo e que tenha um número de problemas mínimo. Admita que o número de rotas a processar é r, sendo esse o primeiro valor lido da entrada padrão. O resultado é o número de ordem correspondente à rota escolhida (ou -1 se não for possível efetuar a viagem).

- Apresente em pseudocódigo a função para escolha da rota. Deve usar a função Analisa() definida acima. Não será necessário processar todas as rotas se for encontrada uma sem problemas.
- Indique a complexidade do algoritmo (contabilizando toda a análise efetuada). Justifique.

(Continua, v.p.f.)

Resolva apenas quatro dos problemas 3–7

3. Seja $G = (V, E, c, \{s, t\})$ a rede representada, com origem s e destino t, sendo a capacidade $c(e)$ o valor indicado no ramo e, para todo $e \in E$. Considere o fluxo f em G tal que $f(u, v) > 0$ apenas para os pares $(u, v) \in V \times V$ apresentados à direita e tem os valores indicados para esses pares.



$$\begin{array}{lcr@{\qquad}lcr} f(s,x) & = & 10 & f(y,x) & = & 7 \\ f(s,y) & = & 9 & f(y,t) & = & 1 \\ f(s,z) & = & 1 & f(y,z) & = & 2 \\ f(w,t) & = & 2 & f(z,w) & = & 3 \\ f(w,y) & = & 1 & f(x,t) & = & 17 \end{array}$$

a) Apresente as definições relevantes para o cálculo da rede residual G_f associada a f e represente-a.

b) Justifique que $|f|$ não é o valor do fluxo máximo e, **partindo do fluxo** f, determine um fluxo máximo em G por aplicação do algoritmo de Edmonds-Karp. Explique, indicando os passos principais do algoritmo, de forma clara e sucinta, e apresentando o valor do fluxo após cada iteração, nos pares $(u, v) \in V \times V$ alterados.

c) Diga como é que a partir desse fluxo máximo se pode determinar um corte $\{S, T\}$ de capacidade mínima e determine-o.

4. Considere o problema da determinação de uma árvore geradora máxima de um grafo $G = (V, E, d)$ não dirigido, conexo e com valores (inteiros) nos ramos.

a) Apresente uma versão adaptada do algoritmo de Prim para resolução do problema.

b) Enuncie a propriedade das árvores geradoras máximas que garante a correção da estratégia ávida (*greedy*) seguida nesse algoritmo. Explique como essa propriedade é usada na prova de correção.

5. Seja $G = (V, E, t)$ um grafo dirigido finito, com $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, que serve de modelo a uma rede de transportes, e em que $t(e) \in \mathbb{R}^+$ define a temperatura no ramo e, para todo $e \in E$. Seja $T(\gamma) = \text{maximo}\{t(e) \mid e \in \gamma\}$, para cada percurso γ. Para todos os pares $(i, j) \in V \times V$ tais que $j \neq i$, para i fixo, pretendemos encontrar **um percurso** γ_{ij} **tal que** $T(\gamma_{ij})$ **seja mínimo** quando considerados todos os percursos possíveis de i para j.

a) Apresente em pseudocódigo um algoritmo para resolver o problema.

b) Ilustre a sua aplicação na resolução do problema para a rede representada no exercício 3, supondo que os valores nos ramos designam as temperaturas e que i é o vértice denotado por z (e que os vértices são numerados por ordem alfabética).

c) Justifique sucintamente a correção do algoritmo.

6. Apresente em pseudocódigo uma função para obter uma ordenação topológica de um DAG (grafo dirigido acíclico). Deverá produzir uma pilha que permita escrever os vértices nessa ordem mas, no topo da pilha, deve ficar o identificador do vértice que teria o número de ordem maior. Justifique sucintamente a correção do algoritmo.

7. Apresente as propriedades das componentes fortemente conexas que garantem a correção do algoritmo de Kosaraju-Sharir. (FIM)