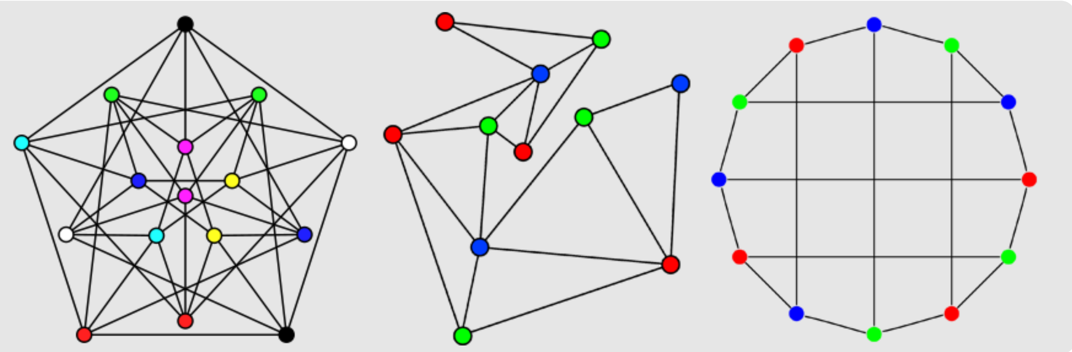


Coloração de Grafos

Algoritmos, Aplicações e Implementações em R

Lucas Emanuel F. Ramos

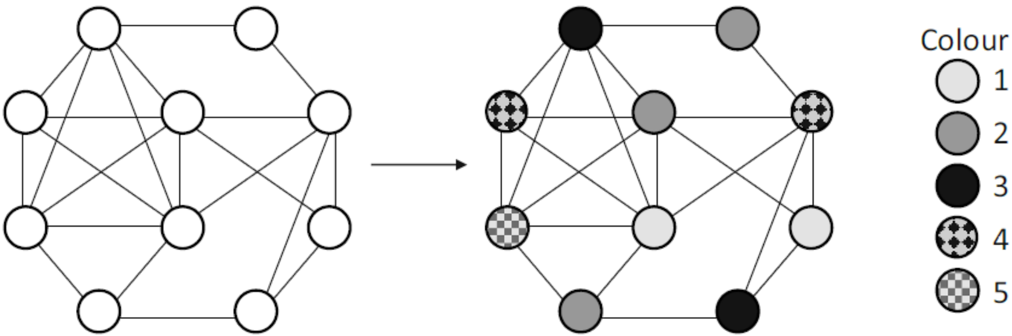
Introdução

Descrição do Problema

Seja um grafo $G = (V, E)$ com n vértices $\in V$ e m arestas $\in E$. O problema de coloração de grafos consiste em atribuir a cada vértice $v \in V$ um inteiro $c(v) \in \{1, 2, .., k\}$ em que:

- $c(v) \neq c(u) \, \forall \, \{v, u\} \in E$.
- k é mínimo.

Um exemplo:



Observações:

- Supõe-se que o grafo G é **conexo**.
- G é **simples**.
- Serão apresentados problemas relacionados à **coloração dos vértices**.

É importante tratar o problema de coloração de grafos como um tipo de **problema de partição dos vértices** ,a partir de restrições (presença de aresta), no qual uma solução S é representada por k grupos: $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$

Aplicações:

- Colorir mapas;
- Resolver jogos *Sudoku*;
- Construção de Horários (para aulas, eventos, etc);
- Construção de escalas (para taxis, ônibus, etc);
- Alocação de assentos em eventos;
- Verificar se um grafo é bipartido;
- Entre outros problemas que podem ser abordados como problemas de coloração de grafos.

Definições

- Uma coloração é **possível** se, e somente se, todos os vértices v estão associados a uma cor e vértices adjacentes não tenham a mesma cor.
- O **número cromático** de um grafo é $\chi(G) = k$ mínimo. Uma coloração **possível** de G usando exatamente $\chi(G)$ cores é considerada **ótima**.
- Uma **classe de cor** é um conjunto $\{v \in V : c(v) = i\}$.
- Um **conjunto independente** é um subconjunto de vértices $I \subseteq V$ tal que $\forall\, u, v \in I, \{u, v\} \notin E$.
- Um **clique** é um subconjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que $\forall\, u, v \in C, \{u, v\} \in E$.
- A **vizinhança** de um vértice v é dada por $\Gamma(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$.
- O **grau** de um vértice v é $deg(v) = ||\Gamma(v)||$

Complexidade do Problema

Em geral, encontrar uma coloração ótima para um grafo G é um problema NP-difícil.

$\Rightarrow$ **Solução:** Algoritmos Construtivos, Heurísticos ou Meta-Heurísticos.

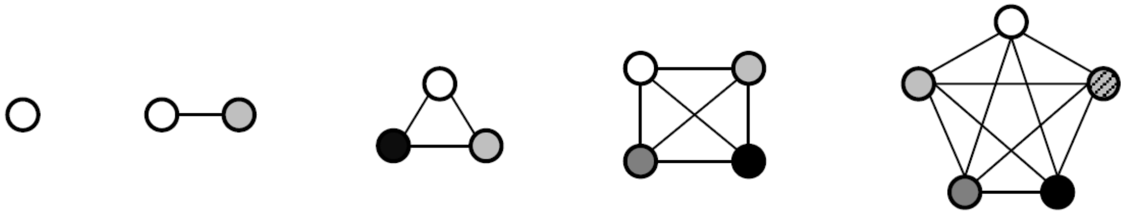
- Esses algoritmos encontrarão **soluções subótimas**.
- Dependendo do grafo G e do algoritmo escolhido a solução pode ser boa ou ruim.
- Ainda assim, para determinados tipos de grafos, é fácil encontrar uma solução ótima.

Grafos Completos

Dado um grafo completo com n vértices, K_n:

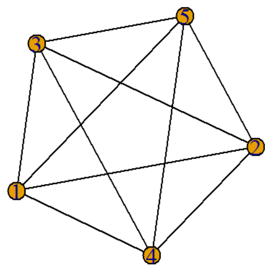
- $\forall\ u, v \in V(K_n), \{u, v\} \in E(K_n)$.
- É fácil ver que $\chi(K_n) = n$

Coloração ótima dos grafos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5 respectivamente:



R: igraph package - Grafos Completos $\Rightarrow \chi(K_n) = n$

```
g <- make_full_graph(5)
```




```
length(max_cliques(g)[[1]]) == length(V(g)) #O grafo é completo?
```

```
## [1] TRUE
```

```
length(V(g)) #Nº cromático
```

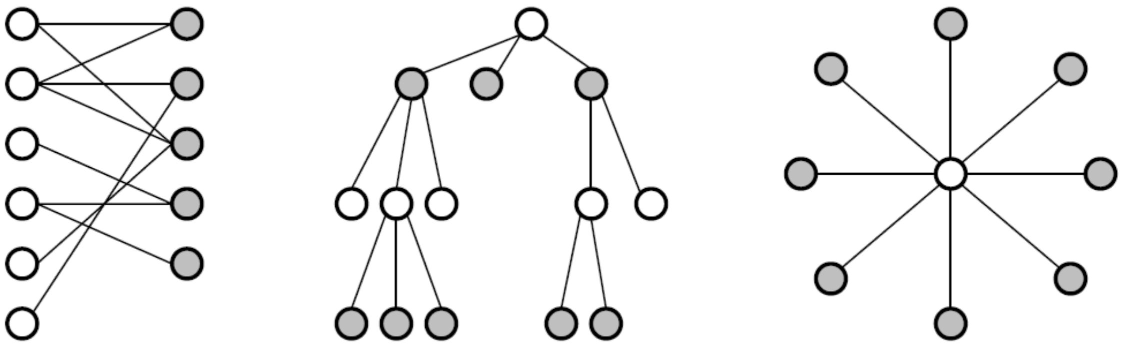
```
## [1] 5
```

Grafos Bipartidos

Dado um grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$:

- Se $u, v \in V_i \ \forall \ i = 1, 2$; então $\{u, v\} \notin E$
- É fácil ver que $\chi(G) = 2$

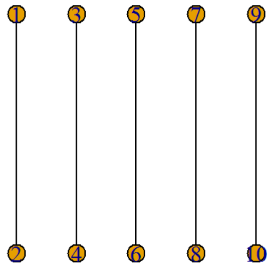
Coloração ótima para alguns exemplos de grafos bipartidos:



$\Rightarrow$ Se $\chi(G) = 2$, o grafo G é Bipartido.

R: igraph package - Grafos Bipartidos $\Rightarrow \chi(G) = 2$

```
g <- make_bipartite_graph( rep(0:1,length=10), c(1:10))
```




```
bipartite.mapping(g)$res #Grafo é bipartido?
```

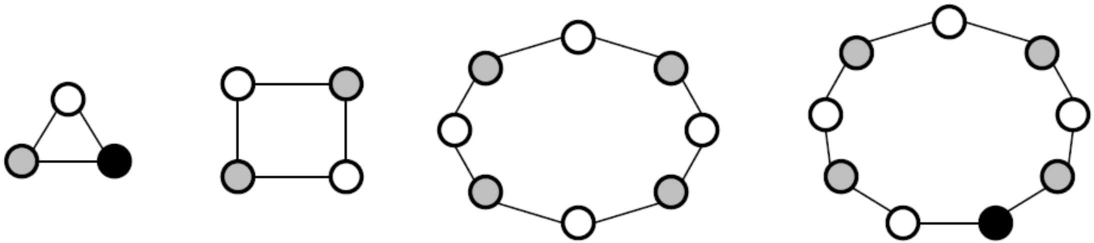
```
## [1] TRUE
```

Grafos Cíclicos

Dado um grafo cíclico com $n \geq 3$ vértices, C_n:

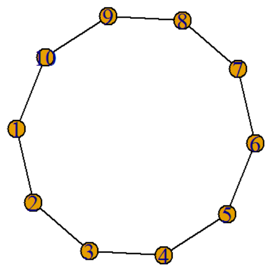
- $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(C_n) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$
- É fácil ver que se n é par: $\chi(C_n) = 2$; se n é ímpar: $\chi(C_n) = 3$

Coloração ótima para os grafos C_3, C_4, C_8 e C_9 respectivamente:



R: igraph package - Grafos Cíclicos $\Rightarrow \chi(C_{par}) = 2\,;\chi(C_{impar}) = 3$

```
g <- graph.ring(10)
```




```
girth(g)$girth == length(V(g)) #Grafo é cíclico?
```

```
## [1] TRUE
```

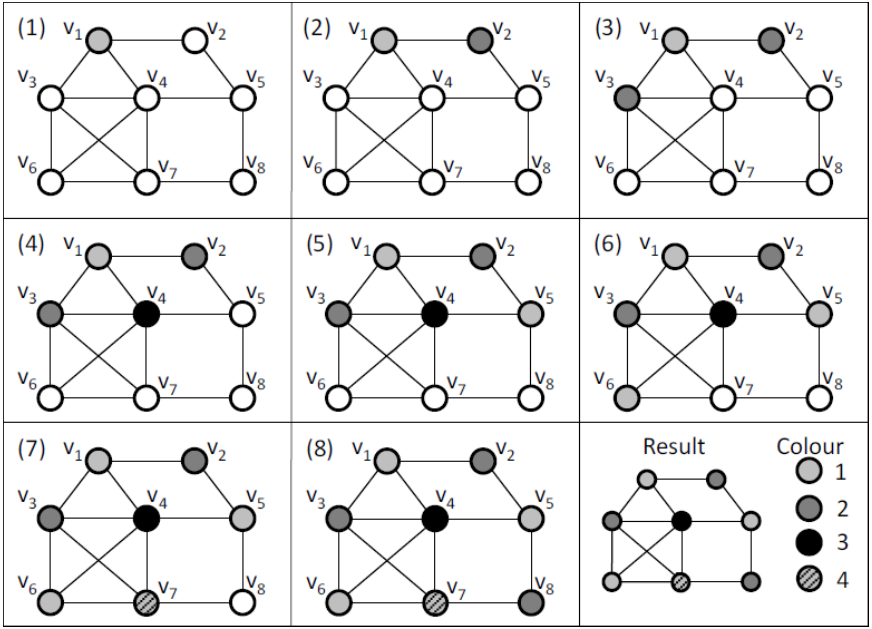
```
length(V(g)) #Se par: Nº cromático = 2, Se ímpar: Nº cromático = 3
```

```
## [1] 10
```

Algoritmos Construtivos

Algoritmo GREEDY

Toma-se um vértice por vez a partir de uma sequência e atribui-se a primeira *cor* disponível a ele.
Passo a passo com sequência = $v_1, v_2, \ldots, v_8$:



R: igraph package - Algoritmo GREEDY

```
library(igraph)

vertex.color.greedy <- function(g, seq=V(g)){
    grps <- list()
    for(i in seq){
      if(length(grps)==0){grps[[1]]<-i}else{
        for(j in 1:length(grps)){
          if(sum(grps[[j]]%in%neighbors(g,i))==0){grps[[j]]<- c(grps[[j]],i);break}
        }
        if(sum(i%in%unlist(grps))==0){grps[[(length(grps)+1)]] <- i}
      }
    }
  grps2 <- list(no._de_grupos=length(grps),grupos=grps)
  return(grps2)
}
```

- O Algoritmo *GREEDY* produz sempre e rapidamente uma solução **possível**. No entanto pode ser pobre quanto ao número de grupos formados em relação a $\chi(G)$.

Teorema:

Seja S uma solução **possível** para G. Se cada classe de cor $S_i \in S$ é considerada por vez no algoritmo *GREEDY*, a solução resultante S' será tal que $|S'| \leq |S|$.

Exemplo:

- Sequência: $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = \{\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_2, v_3, v_8\}, \{v_4\}, \{v_7\}\}$.

No pior dos casos:
$S'_1 = \{v_1, v_5, v_6\}$
$S'_2 = \{v_2, v_3, v_8\}$
$S'_3 = \{v_4\}$
$S'_4 = \{v_7\}$
$|S'| = |S|$

$\Rightarrow$ GREEDY pode obter solução ótima.

R: igraph package - Algoritmo GREEDY [Versão Alternativa]

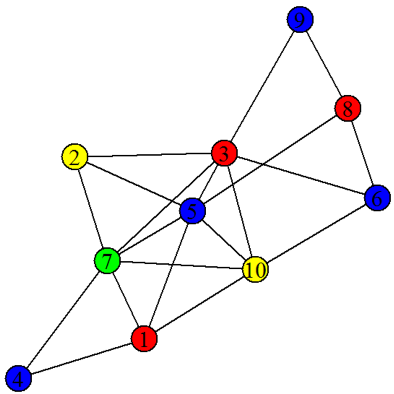
```
vertex.color.greedy.2 <- function(g, seq=V(g),times=1){
  n=0
  while(n<times){
    grps <- list()
    for(i in seq){
      if(length(grps)==0){grps[[1]]<-i}else{
        for(j in 1:length(grps)){
          if(sum(grps[[j]]%in%neighbors(g,i))==0){grps[[j]]<- c(grps[[j]],i);break}
        }
        if(sum(i%in%unlist(grps))==0){grps[[(length(grps)+1)]] <- i}
      }
    }
    for(i in 1:length(grps)){
      if(length(grps[[i]])>1){grps[[i]] <- sample(grps[[i]])}
    }
    seq <- unlist(sample(grps),use.names = F)
    n=n+1
  }

  grps2 <- list(no._de_grupos=length(grps),grupos=grps)
  return(grps2)
}
```

Pacote 'tmaptools': GREEDY

```
g <- erdos.renyi.game(10, 20, "gnm")
g1 <- as_adj_list(g)
library(tmaptools)
tmap.col <- map_coloring(g1, algorithm = "greedy", minimize=TRUE) ; tmap.col
```

```
##  [1] 1 4 1 2 2 2 3 1 2 4
```



Pacote 'RBGL': GREEDY

```
g <- erdos.renyi.game(15, 30, "gnm")
class(g)
```

```
## [1] "igraph"
```

```
library("BiocManager")
BiocManager::install("RBGL", version = "3.8")
```

```
g1 <- graph::graphAM(get.adjacency(g, type="both", sparse = F),edgemode = "undirected")
class(g1)
```

```
## [1] "graphAM"
## attr(,"package")
## [1] "graph"
```

Pacote 'RBGL': GREEDY

```
RBGL::sequential.vertex.coloring(g1)
```

```
## $`no. of colors needed`
## [1] 4
##
## $`colors of nodes`
##  n1  n2  n3  n4  n5  n6  n7  n8  n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15
##   0   1   0   1   2   0   1   1   2   3   0   0   0   1   3
```

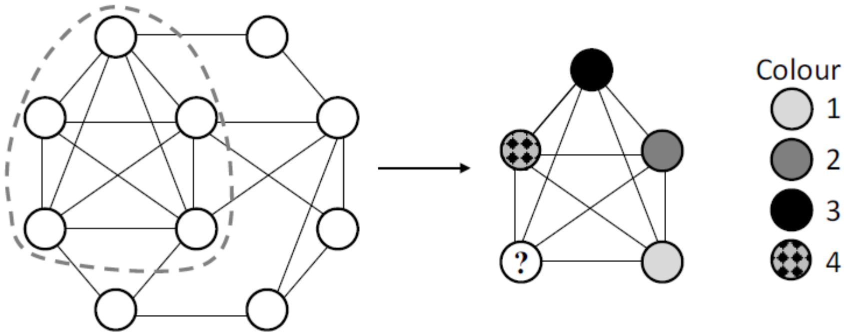
```
vertex.color.greedy(g)$grupos
```

```
## [[1]]
## [1]  1  3  6 11 12 13
##
## [[2]]
## [1]  2  4  7  8 14
##
## [[3]]
## [1] 5 9
##
## [[4]]
## [1] 10 15
```

Limites para $\chi(G)$

Limite Inferior

- Se o grafo G possui subgrafo completo *(clique)* K_h, logo $\chi(G) \geq h$.



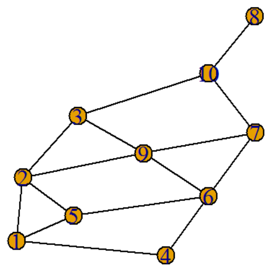
Limite Superior

- Se o grafo G tem grau máximo $\Delta(G)$, isto é, $\Delta(G) = max\{deg(v) : v \in V\}$. Então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Prova: *GREEDY*
Considere o i-ésimo vértice na sequência v_i. No pior dos casos, esse vértice tem $\Delta(G)$ vizinhos e cada um deles já está em um grupo de cor diferente, ou seja, já se tem $\Delta(G)$ classes de cor formadas. Então cria-se mais uma classe de cor para v_i. Tem-se então $\Delta(G) + 1$ classes de cor.

R: igraph package - Limites para $\chi(G) \Rightarrow 3 \leq \chi(G) \leq 5$

```
g <- sample_gnm(10,15,directed = F,loops = F)
```




```
max(sapply(cliques(g),length)) #chomatic number >= 3
```

```
## [1] 3
```

```
max(degree(g)) + 1 #chomatic number <= 5
```

```
## [1] 5
```

Algoritmo DSatur

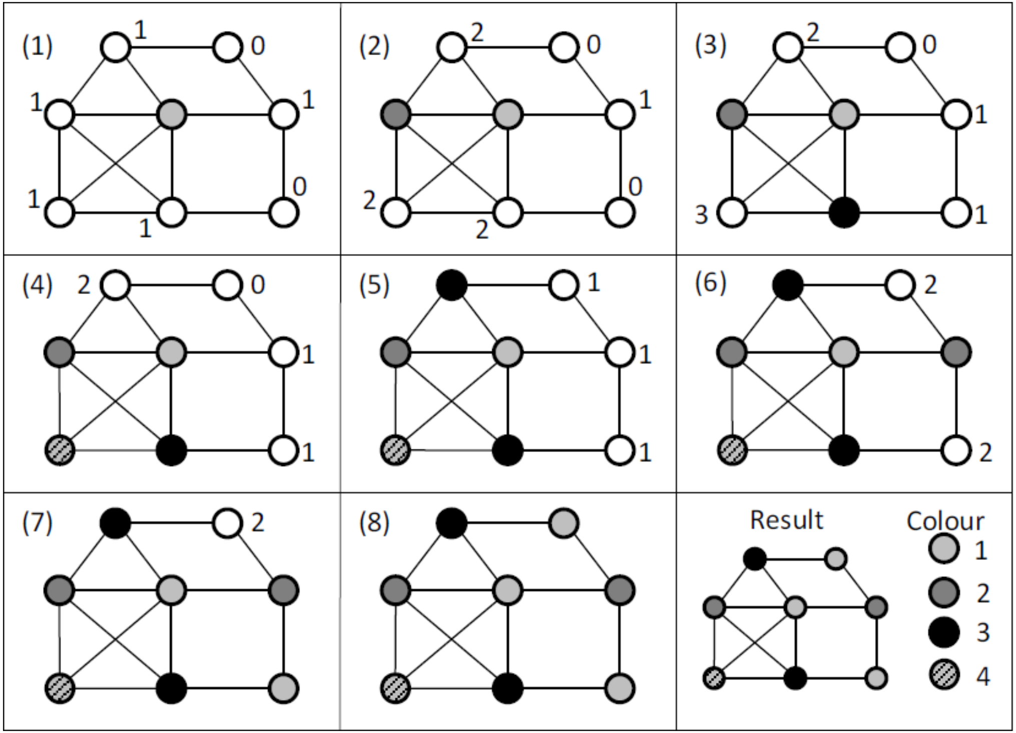
Algortimo similar ao *GREEDY*.
Diferença: Geração da ordem dos vértices prioriza vértices com menor número de opções de cores disponíveis.

- O **grau de saturação** de um vértice $v \in V$ tal que $c(v) = NULL$ é dado por: $sat(v) = ||c(u) : u \in \Gamma(v) \wedge c(u) \neq NULL||$.

Em cada iteração do algoritmo escolhe-se o vértice, não colorido, com maior grau de saturação. Em caso de igualdade, escolhe-se o de maior grau. Em caso de novo empate, sorteia-se aleatoriamente.

Inicialmente, todos os vértices tem $sat = 0$, então começa-se com o vértice de maior grau.

Passo a Passo:



R: igraph package - Algoritmo DSatur

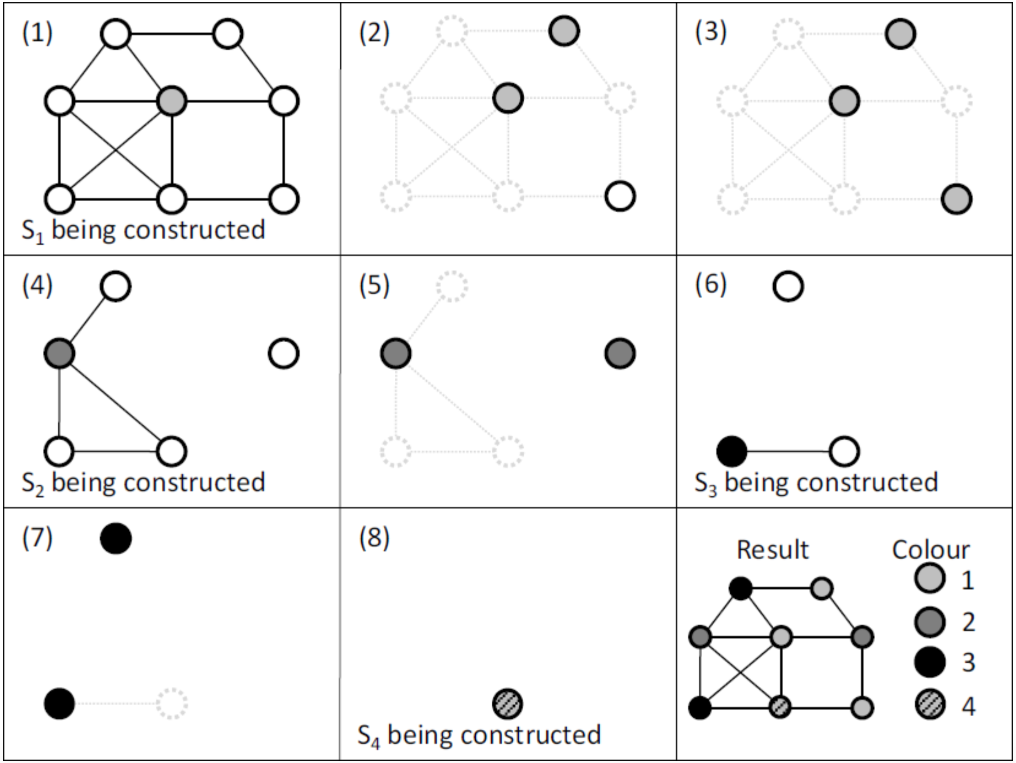
```
vertex.color.dsatur <- function(g){
  grps <- list()
  verts <- V(g)
  d.satur <- rep(0,times=length(verts))
  while(length(verts)!=0){
    d <- data.frame(as.vector(verts),d.satur,deg=degree(g,verts))
    seq <- d[order(d$d.satur,d$deg,decreasing=T),1]
    for(i in seq){
      if(length(grps)==0){grps[[1]]<-i;verts<-verts[verts!=i]}else{
        for(j in 1:length(grps)){
          if(sum(grps[[j]]%in%neighbors(g,i))==0){grps[[j]]<- c(grps[[j]],i);verts<-verts[verts!=i];break}
        }
        if(sum(i%in%unlist(grps))==0){grps[[(length(grps)+1)]] <- i;verts<-verts[verts!=i]}
      }
    }
    d.satur <- c()
    for(i in verts){
      s <- 0
      for(j in grps){
        if(sum(j%in%neighbors(g,i))>0){s <- s+1}}
      d.satur <- c(d.satur,s)}}
  grps2 <- list(no._de_grupos=length(grps),grupos=grps)
  return(grps2)}
```

Algoritmo RLF

Estratégia Diferente: Forma-se uma classe de cor por vez.
No i-ésimo passo a classe de cor S_i é construída: inicialmente um vértice v é selecionado e adicionado à classe de cor. Então, dentre os vértices restantes que podem ser adicionado à classe, escolhe-se o próximo vértice. O algoritmo prossegue até não se ter mais opções de vértices. No próximo passo a classe S_{i+1} é construída.

- A escolha dos vértices quando se tem mais de uma opção disponível é feita aleatoriamente.

Passo a Passo:



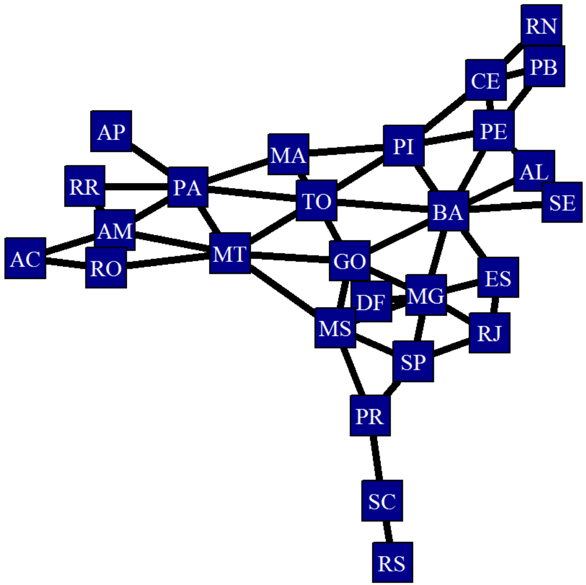
R: igraph package - Algoritmo RLF

```
vertex.color.RLF <- function(g){
  grps <- list()
  while(sum(V(g)%in%unlist(grps))!=length(V(g))){
    X <- V(g)[!V(g)%in%unlist(grps)]
    grp.new <- c()
    while(length(X)>0){
      if(length(X)==1){v<-X}else{v <- sample(X,1,replace=F)}
      grp.new <- c(grp.new,v)
      X <- X[X!=v]
      X <- X[!X%in%neighbors(g,v)]
    }
    grps[[length(grps)+1]] <- grp.new
  }
  grps2 <- list(no._de_grupos=length(grps),grupos=grps)
  return(grps2)
}
```

Exemplo

Colorindo o Brasil

Grafo do Brasil



Limites para $\chi(G)$

```
c(lower=max(sapply(cliques(brasil_map),length)), upper=max(degree(brasil_map)) + 1)
```

```
## lower upper
##     3     9
```

$$3 \leq \chi(G) \leq 9$$

GREEDY

```
brasil.greedy <- vertex.color.greedy(brasil_map, sample(V(brasil_map)))
brasil.greedy
```

```
## $no._de_grupos
## [1] 5
##
## $grupos
## $grupos[[1]]
##  [1]  8 15 22 20 24  2  3 27  7 13
##
## $grupos[[2]]
## [1] 10  5  4 11 25 21 26 23
##
## $grupos[[3]]
## [1] 14  6 17 18  9
##
## $grupos[[4]]
## [1] 12  1 16
##
## $grupos[[5]]
## [1] 19
```

DSatur

```
brasil.dsatur <- vertex.color.dsatur(brasil_map)
brasil.dsatur
```

```
## $no._de_grupos
## [1] 4
##
## $grupos
## $grupos[[1]]
## [1] 12  5 15 18  4 25 13 26
##
## $grupos[[2]]
##  [1] 14  6 11 17 21 22  2  3  7 27
##
## $grupos[[3]]
## [1]  8  1 19 16 24 20 23
##
## $grupos[[4]]
## [1] 10  9
```

RLF

```
brasil.rlf <- vertex.color.RLF(brasil_map)
brasil.rlf
```

```
## $no._de_grupos
## [1] 4
##
## $grupos
## $grupos[[1]]
## MA AP CE AC SP DF SC BA MT RR
##  9  7 18  2 16 13 26 12  6  3
##
## $grupos[[2]]
## PA PB RJ PI MS RS SE RO
##  5 21 25 11 15 27 23  4
##
## $grupos[[3]]
## TO PR PE RN MG AM
##  8 17 19 20 14  1
##
## $grupos[[4]]
## ES AL GO
## 24 22 10
```

GREEDY Alternativo

```r
brasil.greedy2 <- vertex.color.greedy.2(brasil_map, sample(V(brasil_map)), times=10)
brasil.greedy2
```

```
## $no._de_grupos
## [1] 4
##
## $grupos
## $grupos[[1]]
## [1]  9 16  1 13 12 26  7 18
##
## $grupos[[2]]
## [1] 10 11 25  2 27 17  5 22 21
##
## $grupos[[3]]
## [1] 23 20 19 14  3  6
##
## $grupos[[4]]
## [1]  4 24  8 15
```

Pacote 'tmaptools' - GREEDY

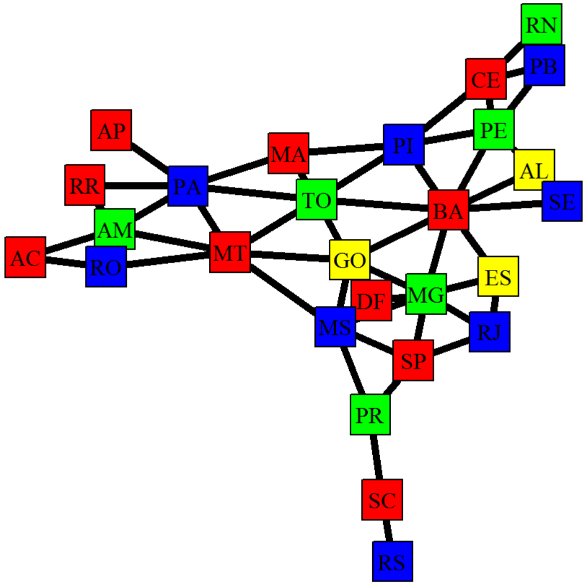
```
brasil_map2 <- as_adj_list(brasil_map)
brasil.tmap <- map_coloring(brasil_map2, algorithm = "greedy", minimize = TRUE)
brasil.tmap
```

```
##  [1] 3 2 2 1 1 2 2 3 4 4 2 1 1 2 1 3 2 1 3 3 2 2 3 3 1 1 2
```

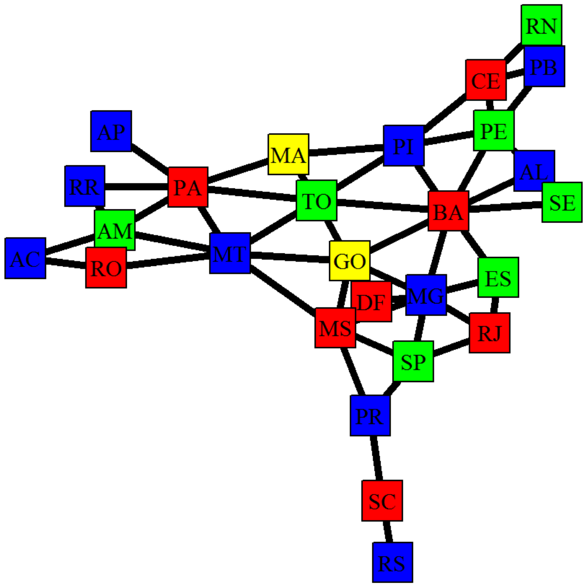
```
max(brasil.tmap)
```

```
## [1] 4
```

Coloração RLF



Coloração 'tmaptools'



Comparação dos Algoritmos

Comparação Empírica dos Algoritmos em C++

Gerou-se aleatoriamente grafos variando o número de vértices e a densidade. Observou-se a performance dos algortimos tanto em custo computacional quanto no número de cores da solução.

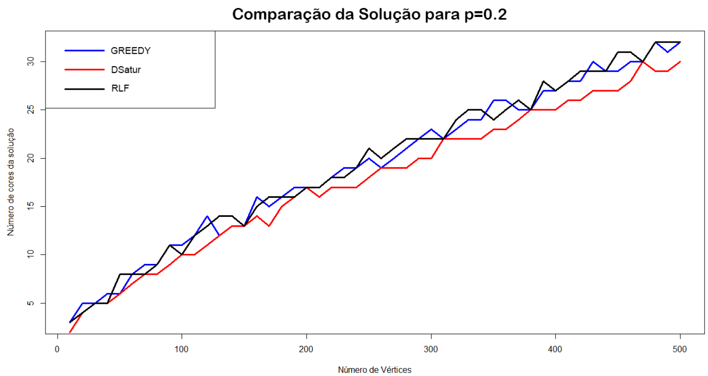
- Em geral, para grafos com grande número de vértices, o algoritmo *RLF* produz resultados com menor número de cores. Contudo, é o mais custoso computacionalmente.
- O algoritmo *DSatur* produz, em geral, melhores soluções do que o *GREEDY*, e o custo computacional de ambos foi equivalente.

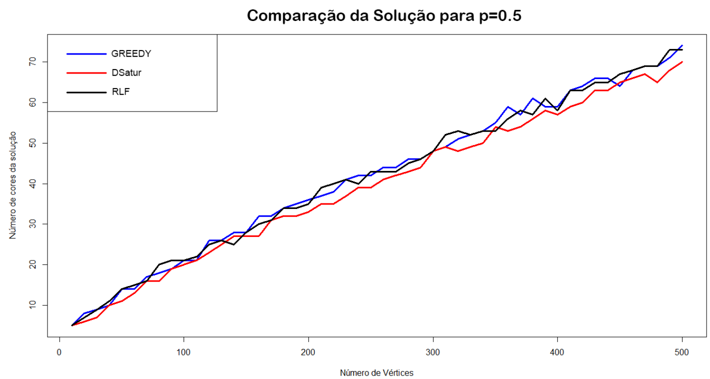
		Algorithm[a]			
n	LB[b]	GREEDY	DSATUR	RLF	UB[c]
100	9	21.14 ± 0.95	18.48 ± 0.81	17.44 ± 0.61	62.22
500	10	72.54 ± 1.33	65.18 ± 1.06	61.04 ± 0.78	284.06
1000	10	126.64 ± 1.21	115.44 ± 1.23	108.74 ± 0.90	550.76
1500	10	176.20 ± 1.58	162.46 ± 1.42	153.44 ± 0.86	841.92
2000	10	224.18 ± 1.90	208.18 ± 1.02	196.88 ± 1.10	1076.26

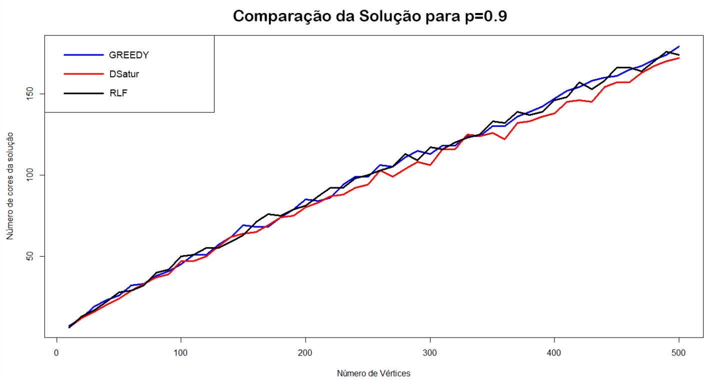
[a] Mean plus/minus standard deviation in number of colours, taken from runs across 50 graphs.

Sumário dos resultados produzidos pelos 3 algoritmos ao se gerar 50 grafos para diferentes tamanhos e densidade de 0.5.

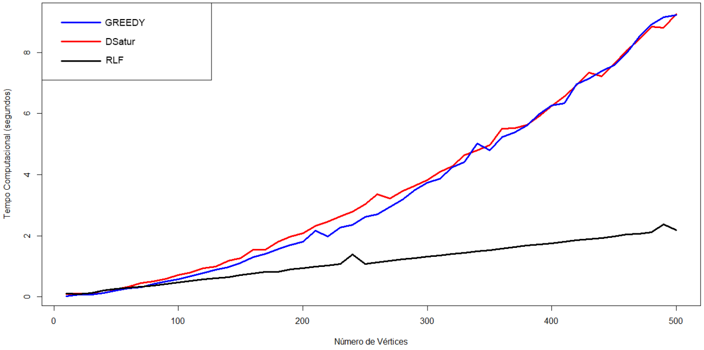
Compração Empírica dos Algoritmos em R



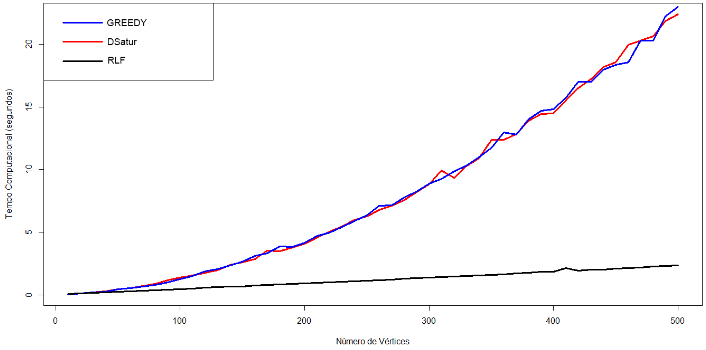




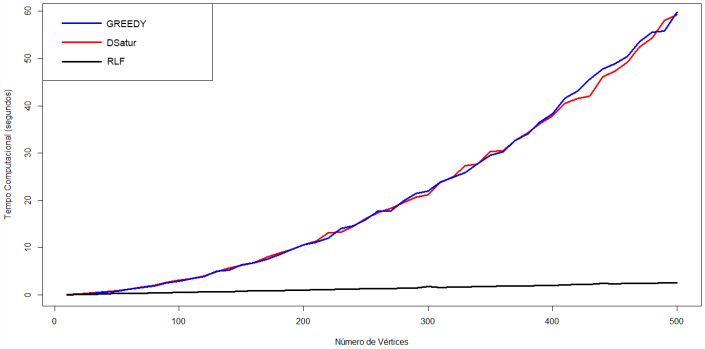
Comparação do Tempo Computacional para p=0.2

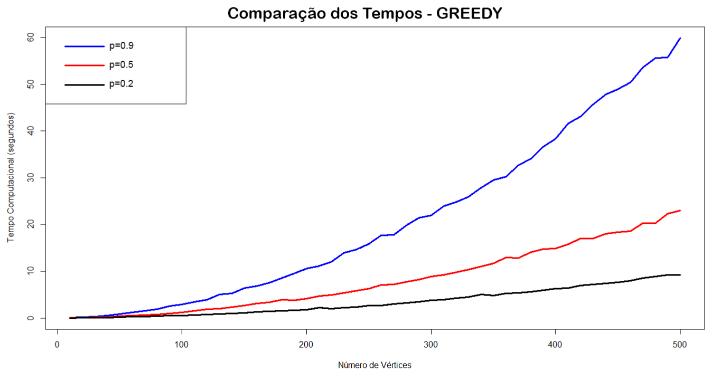


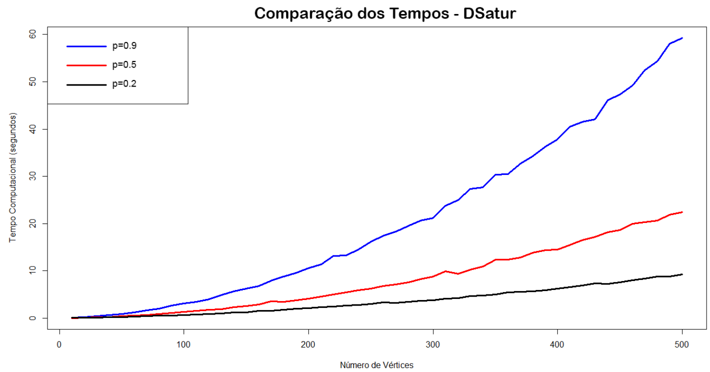
Comparação do Tempo Computacional para p=0.5

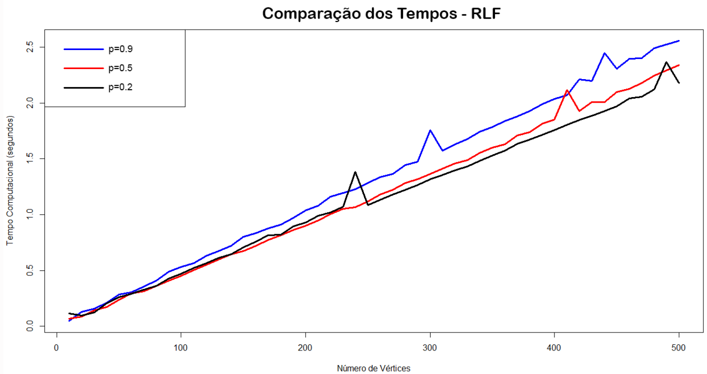


Comparação do Tempo Computacional para p=0.9




Comparação dos Tempos - GREEDY
p=0.9
p=0.5
p=0.2
Tempo Computacional (segundos)
Número de Vértices
0
100
200
300
400
500
0
10
20
30
40
50
60


Comparação dos Tempos - DSatur
p=0.9
p=0.5
p=0.2
Tempo Computacional (segundos)
Número de Vértices
0
100
200
300
400
500
0
10
20
30
40
50
60


Comparação dos Tempos - RLF
p=0.9
p=0.5
p=0.2
Tempo Computacional (segundos)
Número de Vértices
0
100
200
300
400
500
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

Outros Algoritmos

Algoritmos mais Avançados

Algoritmos Exatos:

Sempre obtêm solução ótima (sem tempo limite de execução ou outro critério de parada).

Algoritmos heurísticos e meta-heurísticos:

- São adaptáveis a diferentes problemas.
- Frequentemente apresentam bons resultados para grafos com grande número de vértices.

$\Rightarrow$ São apresentados diversos algoritmos mais complexos que adotam diferentes estratégias para a resolução de problemas de coloração dos grafos.

$\Rightarrow$ São discutidas aplicações e extensões do problema. Além de problemas práticos do mundo real.

Referências:

- LEWIS, R.M.R. **A Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications**. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- CRAN. **Igraph**: Network Analysis and Visualization
- CRAN. **tmaptools**: Thematic Map Tools
- CRAN. **BiocManager**: Access the Bioconductor Project Package Repository
- Bioconductor. **RBGL**: An interface to the BOOST graph library
- Bioconductor. **Graph**: A package to handle graph data structures