基礎數學增能課程 (三): 指數與對數

葉敏宏

宜蘭大學電子工程系

October 4, 2022

課程內容

指數之定義

指數的定義

- a 為實數，n 為正整數。對於

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n}$$

  - n 稱為**指數**; a 稱為**底數**

例:

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

- 3 為底數, 5 為指數

例:

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

- -2 為底數, 4 為指數

指數函數

指數函數

指數函數:

$$f(x) = a^x$$

底數部分$a > 0$
指數部分 x 不一定為整數，可以為實數或負數

例:

$$f_1(x) = (1.1)^x \quad f_2(x) = (0.9)^x$$

注意:

$$g(x) = (-1.1)^x$$

不是指數函數

指數之規定

- 零指數: 規定 a 為實數，$a \neq 0$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

- 負整數指數: 規定 a 為實數，$a \neq 0$, n 為正整數

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

- 分數指數:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

指數律：

指數律：

假設 $a > 0$, $b > 0$, m, n 為整數

1. $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

例：$m = 3$, $n = 2$

$$a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

2. $\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$

例：$m = 2$, $n = 3$

$$\begin{aligned}(a^2)^3 &= (a^2) \times (a^2) \times (a^2)\\ &= (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a)\\ &= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6\end{aligned}$$

指數律 (續)

指數律

3. $\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$

例：$n = 3$

$$\begin{aligned}(ab)(ab)(ab) &= ab \times ab \times ab \\ &= a \times a \times a \times b \times b \times b = a^3 b^3\end{aligned}$$

4. $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

例：$n = 3$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$$

指數律 (續)

指數律

5. $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

例：$m = 5, n = 3$

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^2$$

例：$m = 3,\ n = 5$

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

6. $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

指數函數

指數函數

指數函數: $f(x) = a^x,\ a > 0$

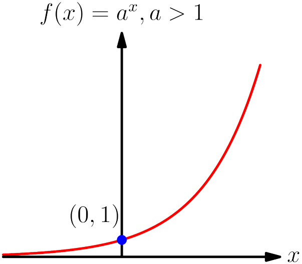
- 由於 $a > 0$, 對於任意實數 x, $f(x)$ 將恆為正數
- 對於 $a < 0$, $f(x)$ 在定義上會產生問題，因此不考慮
  - 例: $(-4)^{\frac{1}{2}} = \pm 2i$ 為一個複數
- $f(x)$ 為一個連續函數
- 利用指數律 $a^m a^n = a^{m+n}$，可推得 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$
-
  - 當 $a > 1$，$f(x)$ 為單調遞增函數
  - 當 $0 < a < 1$, $f(x)$ 為單調遞減函數

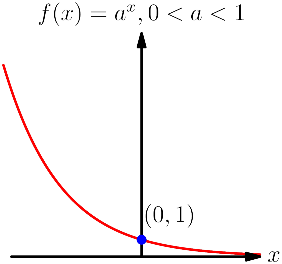
指數函數繪圖

指數函數

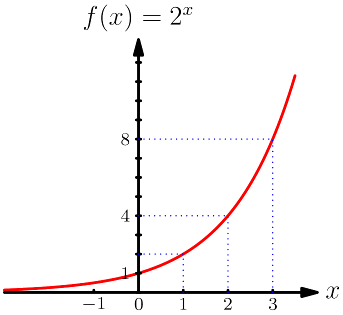
$f(x) = a^x, a > 0$

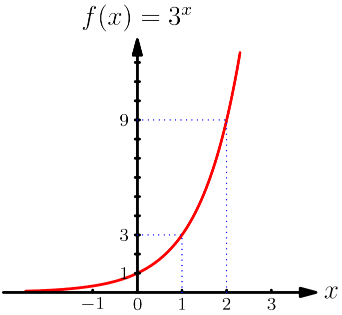
- 由於指數函數恆為正數，函數圖形必在 x 軸上方
- $y = a^x$，恆與 y 軸相交於點 $(0,1)$
- 圖形可分為兩類
  - $\boxed{a > 1}$: 單調遞增函數
  - $\boxed{0 < a < 1}$: 單調遞減函數





指數函數繪圖，$a > 1$

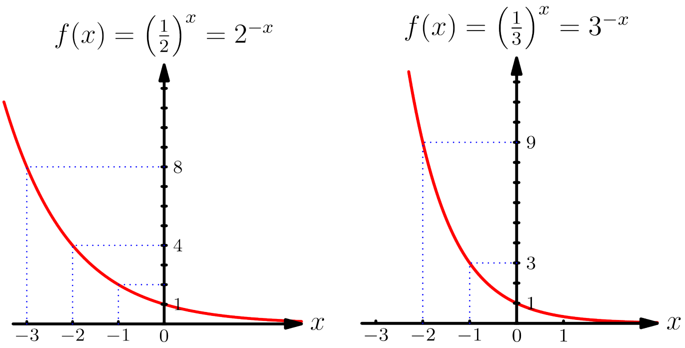




$f(x) = a^x$, $a > 1$

- a 越大，函數變化越快
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

指數函數繪圖，$0 < a < 1$



$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

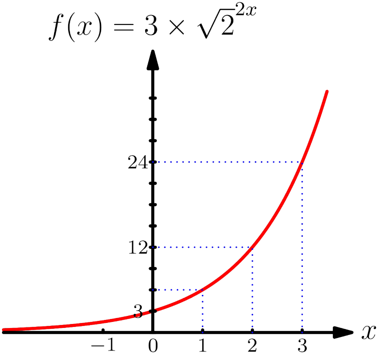
- a 越近 0，函數變化越快
- $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$
- a^x 與 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸

指數函數繪圖範例 1

畫出底下函數之圖形

$$f(x) = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^{2x}$$

上式可化簡為 $f(x) = 3 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 3 \times 2^x$。其函數圖形為 2^x 的 3 倍



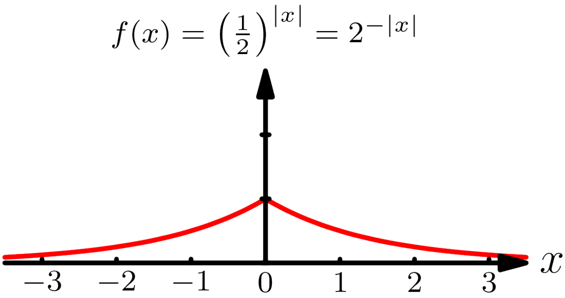
指數函數繪圖範例 2

畫出底下函數之圖形

$$f(x) = 2^{-|x|}$$

分成 $x \geq 0$ 與 $x < 0$ 討論

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \geq 0 \\ 2^{x} & x < 0 \end{cases}$$



尤拉數 (Euler Number)

- 工程上常用的的無理數 $\boxed{e \approx 2.718281828}$，它稱為尤拉數 (Euler Number), ，又稱為自然指數 (natural exponential).
- 可由兩種方式近似求得
  - 方式 1: 取大於或等於之整數階層之倒數和

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

  - 方式 2:

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

將趨近於 1 的數字自乘無限多次得到的結果為 e

$$(\approx 1)^{\infty} = e$$

工程型計算機中的尤拉數 e

在工程計算機中均可看到與 e 相關的計算

微軟視窗軟體 (小算盤) 之尤拉數使用

開啟小算盤並勾選工程型

點選 inv 按鍵紐

出現 e^x 函數

輸入數字 1,
代表將計算 e^1

點選 e^x 按鈕，
計算得到 e^1 值

同樣方式輸入數字 2,
計算 e^2 值

尤拉數為底的指數函數 I

$$\boxed{f(x) = Ke^{ax}}$$

- 微分仍是以 e 為底的函數，積分結果仍是以 e 為底的函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= K \times a \times e^{ax} \\ \int f(x)dx &= K \times \frac{1}{a} \times e^{ax} + C \end{aligned}$$

- 任何以其他數字為底的指數都可以化成以尤拉數為底

$$a^x = e^{x \ln a}$$

- 生活中許多現象均為指數問題
  - 複利計算

尤拉數為底的指數函數 II

- 放射性物質半衰期
- 電容、電感充放電

- 機率統計中的常態分佈

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- μ: 期望值 (平均值)
- σ: 標準差。σ^2: 變異數

課程內容

對數之定義

對數的定義

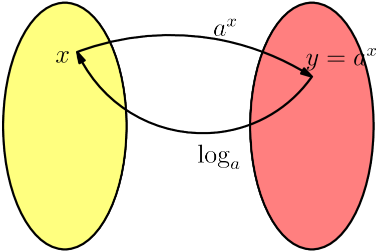
- a 為正數，$a \neq 1$，對於 x 函數$y = f(x) = \log_a x$
  - 滿足 $a^y = x$
  - a 為底數, $a > 0$, $a \neq 1$
  - x 必定大於 0

- 由於 $a \neq 0$, $a^0 = 1$, 所以 $\log_a 1 = 0$

注意!

對數的底不可為 1

指數與對數互為反函數



反函數關係

$$
\begin{aligned}
a^{(\log_a x)} &= x \quad \text{先對數再指數} \\
\log_a(a^x) &= x \quad \text{先指數再對數}
\end{aligned}
$$

對數函數之範例

Examples

1. $\log_2 4 = ?$
2. $\log_3 \frac{1}{9} = ?$
3. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = ?$
4. $\log_{16} 4 = ?$
5. $\log_{10}(0.1) = ?$
6. $\log_a a^2 = ?$

以 10 為底的對數

以 10 為底的對數常會將底數 10 省略

- $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, …, $\log 10^n = n$
- $\log 0.1 = -1$,
- $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$

以 e 為底的對數

以 e 為底的對數，通常記為ln，$\boxed{\log_e x = \ln x}$

對數的基本性質

對數基本性質

1. $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$
2. $a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$
3. 相乘變相加

$$\boxed{\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N}$$

$$x = \log_a M,\ y = \log_a N \Rightarrow M = a^x,\ N = a^y$$

對數基本性質 (續)

對數基本性質

4. 相除變相減

$$\boxed{\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N}$$

5. 次方可提出

$$\boxed{\log_a M^r = r\log_a M}$$

6. 換底公式

$$\boxed{\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}}$$

7. 倒數加負號

$$\boxed{\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M}$$

對數基本性質 (續)

對數基本性質

9. 底的次方可提出作為分母。

$$\boxed{\log_{a^r} M = \frac{1}{r}\log_a M}$$

10. 先對數再指數:

$$\boxed{a^{\log_a M} = M}$$

11. 先指數再對數

$$\boxed{\log_a a^M = M}$$

對數基本性質的練習

Example

$a = \log 2,\ b = \log 3.$

利用 a 與 b 表示 $\log 4,\ \log 5,\ \log 6,\ \log 8,\ \log 9,\ \log 12,\ \log 15,\ \log_2 3$

1. $\log 4 = \log 2^2 = 2 \times \log 2 = 2a$
2. $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$
3. $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$
4. $\log 8 = \log 2^3 = 3 \times \log 2 = 3a$
5. $\log 9 = \log 3^2 = 2 \times \log 3 = 2b$
6. $\log 12 = \log\left(2^2 \times 3\right) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \times \log 2 + \log 3 = 2a + b$
7. $\log 15 = \log(3 \times 5) = \log 3 + \log 5 = b + 1 - a = b - a + 1$
8. $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$
9. $\log_{100} 2 = \log_{10^2} 2 = \frac{1}{2}\log_{10} 2 = \frac{1}{2}a$

指數與對數的底數變換

任何指數與對數均可變換至所要用的底數

指數與對數換底所用之公式

1. $a^x = b^{x \log_b a}$
2. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

指數換底

將函數 $f(x) = 3^x$ 改成使用尤拉數 e 為底數

將函數 $f(x) = 3^x$ 先進行對數再進行指數而回到自己

$$3^x = e^{ln 3^x} = e^{x \ln 3}$$

指數與對數換底範例

指數換底

將函數 $f(x) = e^x$ 改成使用數字 10 為底數

將函數 $f(x) = e^x$ 先進行對數再進行指數而回到自己

$$e^x = 10^{\log_{10} e^x} = 10^{x \log_{10} e} \approx 10^{0.4343x}$$

對數換底

將函數 $f(x) = \log_{10} x$ 改成使用尤拉數 e 為底數

利用換底公式$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

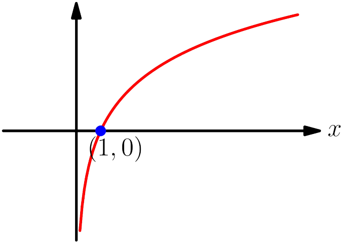
對數函數圖形

對數函數

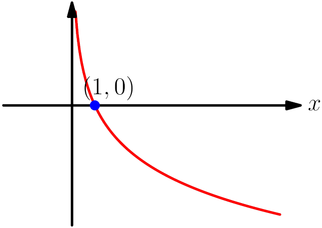
$$f(x) = \log_a x,\ a > 0$$

- 只在 x 軸的右方存在定義
- $y = \log_a x$，恆與 x 軸相交於點 $(1, 0)$
- 圖形可分為兩類
  - $a > 1$: 單調遞增函數
  - $0 < a < 1$: 單調遞減函數

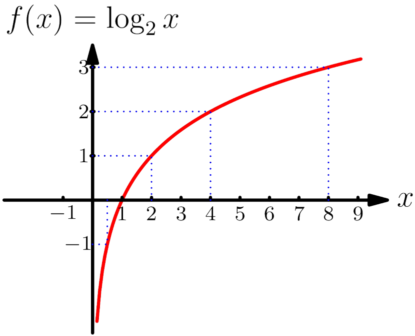
$f(x) = \log_a x, a > 1$

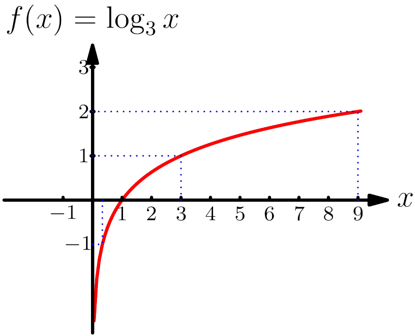


$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$



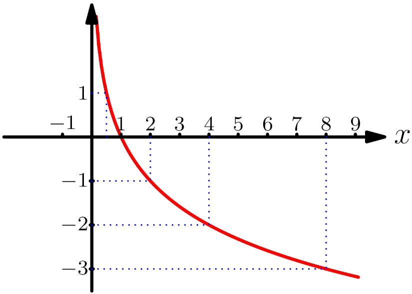
對數函數圖形, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$



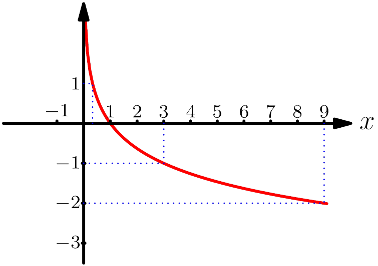


對數函數圖形, $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



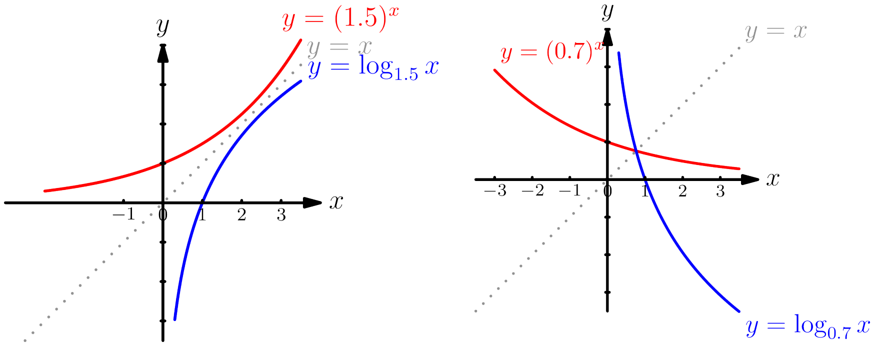
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



- $\log_a x$ 與 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸

指數函數與對數函數之圖形對稱

指數與對數互為反函數，同樣底數 a 的指數與對數會對稱於 $y = x$ 軸



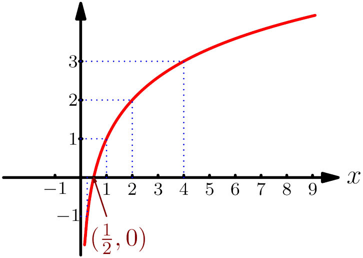
對數函數圖形之範例 1

畫出底下函數圖形

$$y = \log_2(2x)$$

$$\begin{aligned} y = \log_2(2x) &= \log_2 2 + \log_2 x \\ &= 1 + \log_2 x \end{aligned}$$

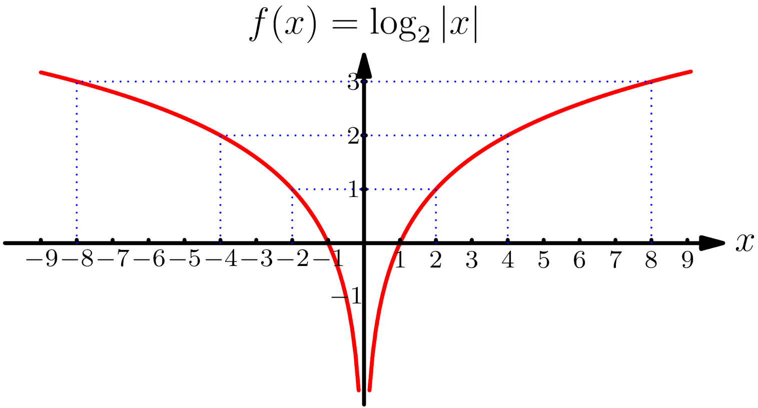
$f(x) = \log_2(2x)$



對數函數圖形之範例 2

畫出底下函數圖形

$$y = \log_2 |x|$$



課程內容

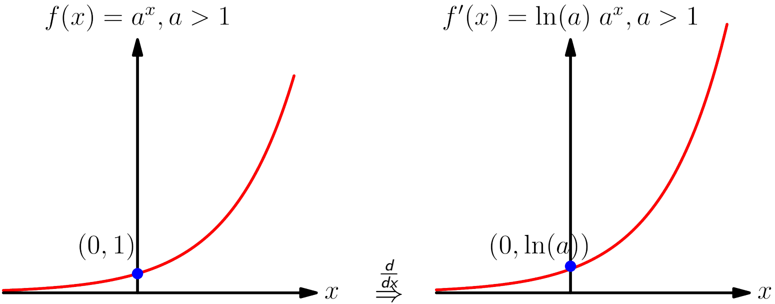
指數函數的微分 I

微分: 求切線斜率 (瞬間斜率)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

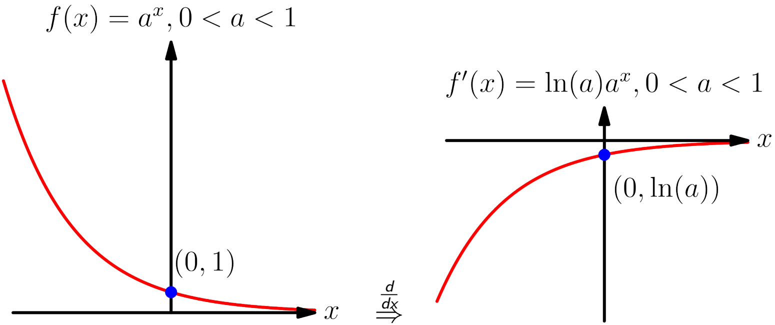
- 以尤拉數 e 為底的指數微分

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x}$$



- 一般指數函數的微分

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = (\ln a)\, a^x}$$



指數函數的微分之證明 I

- $\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

當 Δx 很小時，$\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = e$, 即 $(1 + \Delta x) \approx e^{\Delta x}$，可得到 $e^{\Delta x} - 1 \approx \Delta x$

$$f'(x) = \frac{e^x \Delta x}{\Delta x} = e^x$$

指數函數的微分之證明 II

- $\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = (\ln a)\, a^x$

函數 a^x 先用對數再指數表示而進行微分

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[a^x\right] &= \frac{d}{dx}\left[e^{\ln a^x}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[e^{x\ln a}\right] \\
&= e^{x\ln a} \times \frac{d}{dx}\left[x\ln a\right] \quad \text{chain rule} \\
&= a^x \times \ln a
\end{aligned}
$$

指數函數微分範例

求底下函數的微分

1. $f(x) = x^2 e^{2x}$
2. $h(t) = \frac{1}{2}\left[e^t + e^{-t}\right]$

1. 利用乘法性質、鏈原則與指數函數規則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^2\right] e^{2x} + x^2 \frac{d}{dx}\left[e^{2x}\right] \\ &= 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} \frac{d}{dx}\left[2x\right] \\ &= \left(2x + 2x^2\right) e^{2x} \end{aligned}$$

2. 利用指數規則與鏈原則

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[e^t\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \end{aligned}$$

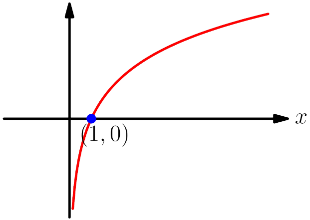
對數函數的微分 I

微分: 求切線斜率 (瞬間斜率)

- 以尤拉數 e 為底的對數微分

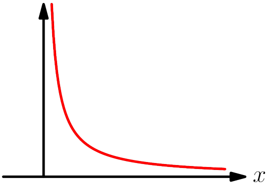
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

$f(x) = \log_a x, a > 1$



$\overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a}, a > 1$

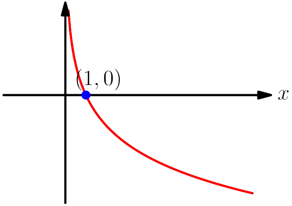


- 一般的對數微分: 利用換底公式 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 可輕易證得

對數函數的微分 II

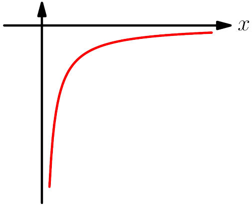
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a}}$$

$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$



$\overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a}, 0 < a < 1$



指數與對數的積分

- 積分為微分之反運算
- $\boxed{\frac{d}{dx}[e^x] = e^x} \Rightarrow \boxed{\int e^x dx = e^x + C}$
- $\boxed{\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}} \Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C}$ (與書本上公式差一個絕對值, 這裡限制 $x > 0$)
- $\int \ln x \, dx = ?$ 必須利用分部積分法 (integration by parts) 求得
- 書本上的公式

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$$

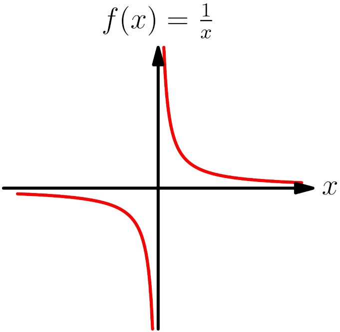
要記得加絕對值

積分公式: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

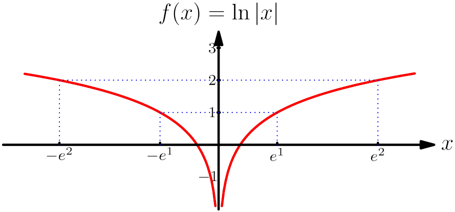
- 對於積分式 $\int \frac{1}{x}dx$，其定積分不可跨過 y 軸($x = 0$ 為不連續):

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx \qquad ab > 0$$

  - 上式中 a 與 b 必須同為正數，或同為負數



$\Leftrightarrow$



定積分 $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ 範例 I

積分結果為對數

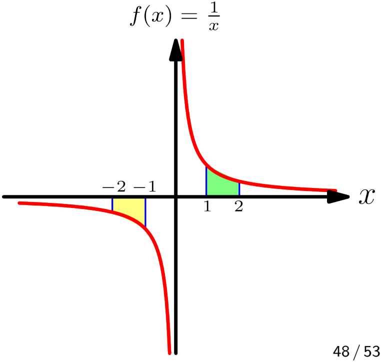
計算底下積分式結果

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = ?$$

方法 1: 利用公式

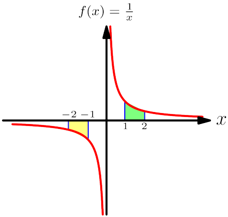
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1}$$
$$= \ln|-1| - \ln|-2|$$
$$= 0 - \ln 2$$
$$= -\ln 2$$



定積分 $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ 範例 II

方法 2: 利用 $\frac{1}{x}$ 為奇函數之對稱性



$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx &= -\int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx \\
&= -\left[\ln|x|\right]_1^2 \\
&= -(\ln 2 - \ln 1) \\
&= -\ln 2
\end{aligned}
$$

微積分公式整理

指數的微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^x] &= e^x \\ \frac{d}{dx}[a^x] &= a^x \times \ln a \end{aligned}$$

對數的微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln x] &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}[\log_a x] &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a} \end{aligned}$$

指數的積分

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \end{aligned}$$

對數的積分

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

積分結果為對數

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

對數積分 I

對數積分

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

利用

- 微分乘積律 (product rule):

$$(uv)' = u'v + v'u$$

- 分部積分 (integration by parts):

$$\int u \, dv = uv - \int v du$$

對數積分 II

令 $u = \ln x$, $dv = dx$, 則 $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \left(\frac{1}{x} dx\right) = x \ln x - \int 1 \; dx = x \ln x - x + C$$

The End