



Unidade 11 – Árvores



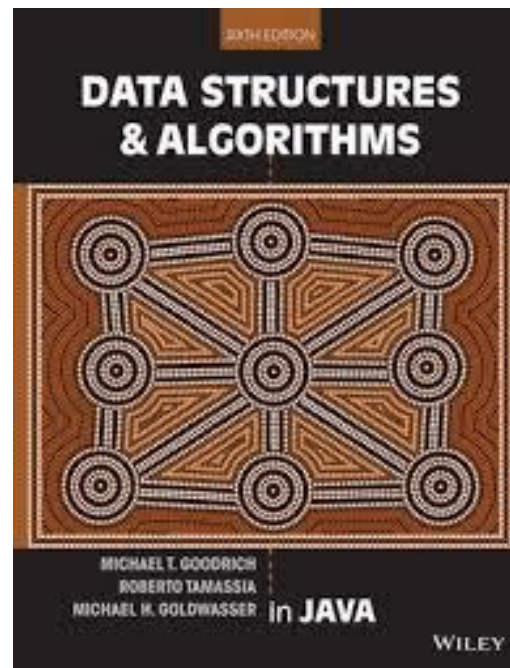
Bibliografia

- Data Structures and Algorithms in Java – Fourth Edition – Roberto Tamassia – Michael T. Goodrich – John Wiley & Sons, Inc
- Head First Java, 2nd Edition by Kathy Sierra and Bert Bates
- Estrutura de Dados e Algoritmos – Bruno R. Preiss, Editora Campus, 2001
- Estrutura de Dados e Algoritmos em Java – Robert Lafore, Editora Ciência Moderna, 2005
- Algoritmos e Estrutura de Dados – Niklaus Wirth – Editora Prentice Hall do Brasil, 1989
- Estrutura de Dados e Algoritmos em C++, Adam Drozdek – Thompson
- Introdução à Estrutura de Dados, Celes, Cerqueira, Rangel – Elsevier
- FREITAS, Aparecido V. de – 2022 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.
- CALVETTI, Robson - 2015 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.



Leitura Recomendada para a Unidade 4

- ⊕ Data Structures and Algorithms in Java (*), Roberto **Tamassia** and Michael T. **Goodrich**, Sixty Edition – **2014** , Seção **8.1**



(*) Em português, Estrutura de Dados e Algoritmos em Java



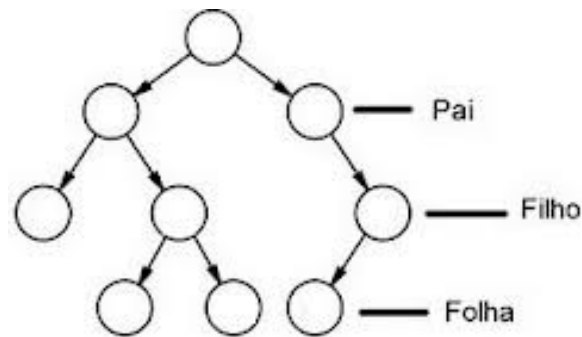
Árvores

- **Árvore** é uma estrutura de dados **não-linear**.
- Tem uma **importância** muito grande na Computação, pois disponibiliza algoritmos muito mais rápidos que os encontrados nas estruturas lineares.
- Têm **diversas aplicações**: sistemas de arquivos, interfaces gráficas, banco de dados, etc.
- Os relacionamentos encontrados em uma árvore são **hierárquicos**.
- Exemplo: Árvore Genealógica



Definição

- Árvore é um tipo abstrato de dados onde os dados são estruturados de forma hierárquica.
- Com exceção do topo, cada elemento da árvore tem um elemento pai e zero ou mais elementos filhos.
- Normalmente, o elemento topo é chamado **raiz** da árvore (**ROOT**).



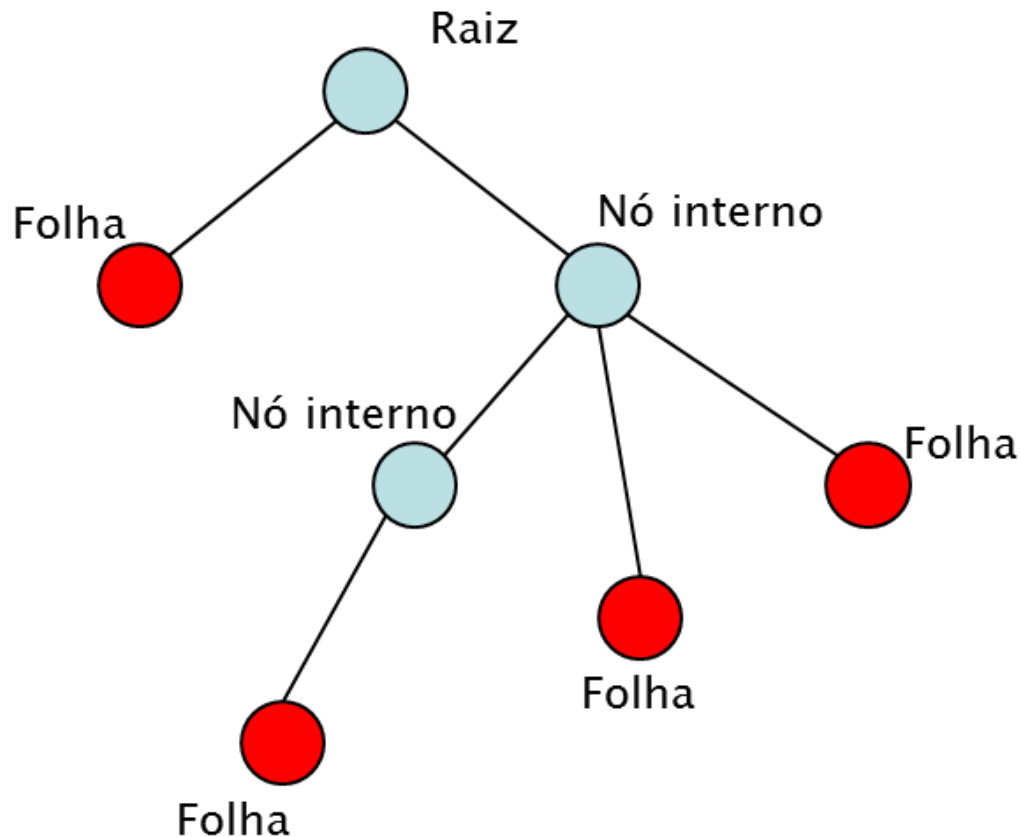
Definição Formal

- Uma árvore **T** é **um conjunto de nós** que armazenam elementos em relacionamentos **pai-filho** com as seguintes propriedades:
 - Se **T** não é vazia, ela tem **um nó especial** chamado **raiz** de **T**, que **não** tem **pai**.
 - Cada nó **v** de **T** diferente da raiz tem um único nó pai **w**;
- **Uma árvore pode não ter nós.** Quando isso ocorre, dizemos que a árvore **T** é **vazia**.
- Assim, uma árvore **T** ou é vazia ou consiste de um nó raiz **r** e um conjunto (possivelmente vazio) de árvores cujas raízes são **filhas** de **r**.



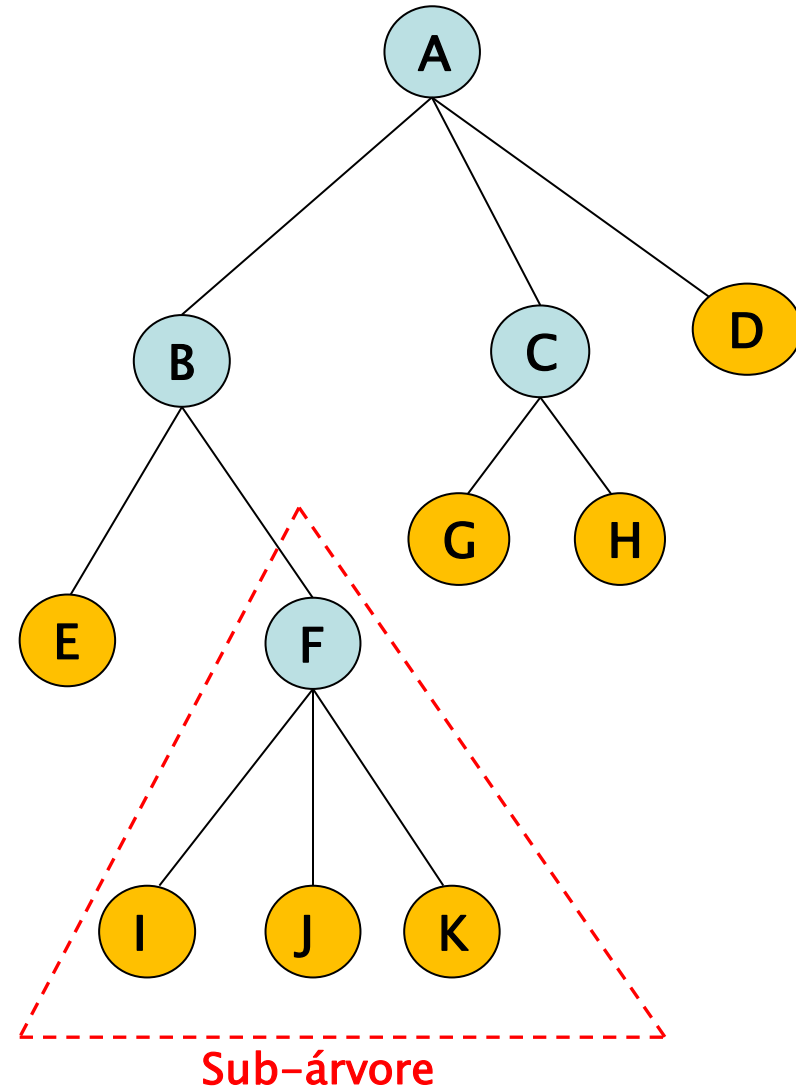
Outros relacionamentos

- Dois nós que são filhos do mesmo pai são **irmãos**.
- Um nó **v** é **externo** se não tem filhos.
- **Nós externos** também são conhecidos por **folhas**.
- Um nó **v** é **interno** se tem **um** ou mais **filhos**.



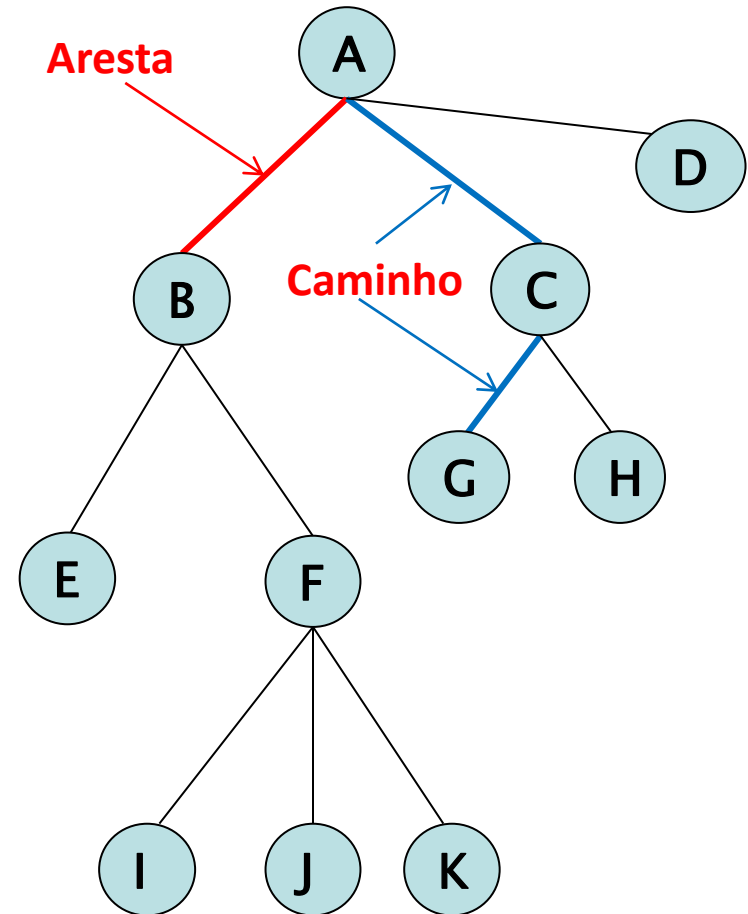
Definições

- ⊕ **Raiz** (root): Nó sem pai (A)
- ⊕ **Nó interno**: Nó com pelo menos um filho (A,B,C,F)
- ⊕ Nó externo ou nó **folha**: nó sem filhos (D,E,G,H,I,J,K)
- ⊕ **Ancestral** de um nó: pai, avô, bisavô, ...
- ⊕ **Descendente** de um nó: filho, neto, bisneto, ...
- ⊕ **Sub-Árvore**: árvore formada por um nó e seus descendentes.



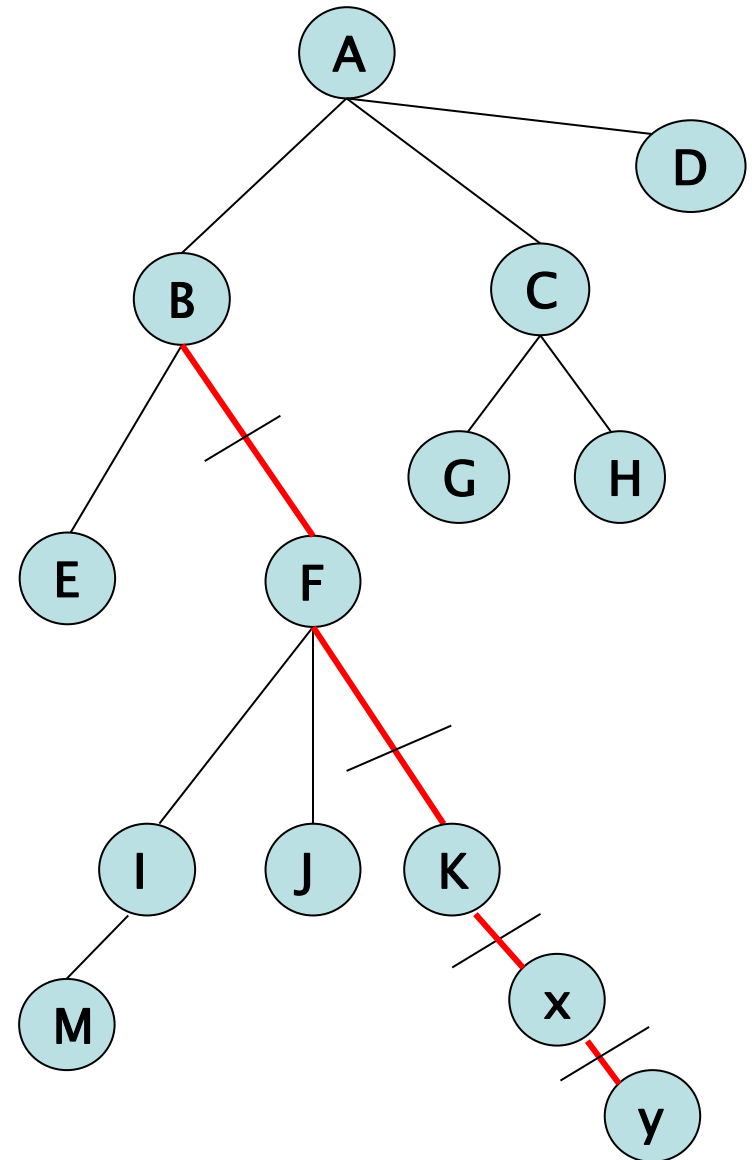
Definições

- ⊕ **Aresta:** é um par de nós (u,v) tal que u é pai de v . (A,B)
- ⊕ **Caminho:** é uma sequência de nós tais que quaisquer dois nós consecutivos da sequência sejam arestas. $((A,C),(C,G))$
- ⊕ **Tamanho de um caminho:** # de arestas em um caminho. (Tamanho do caminho $((A,C),(C,G)) = 2$).



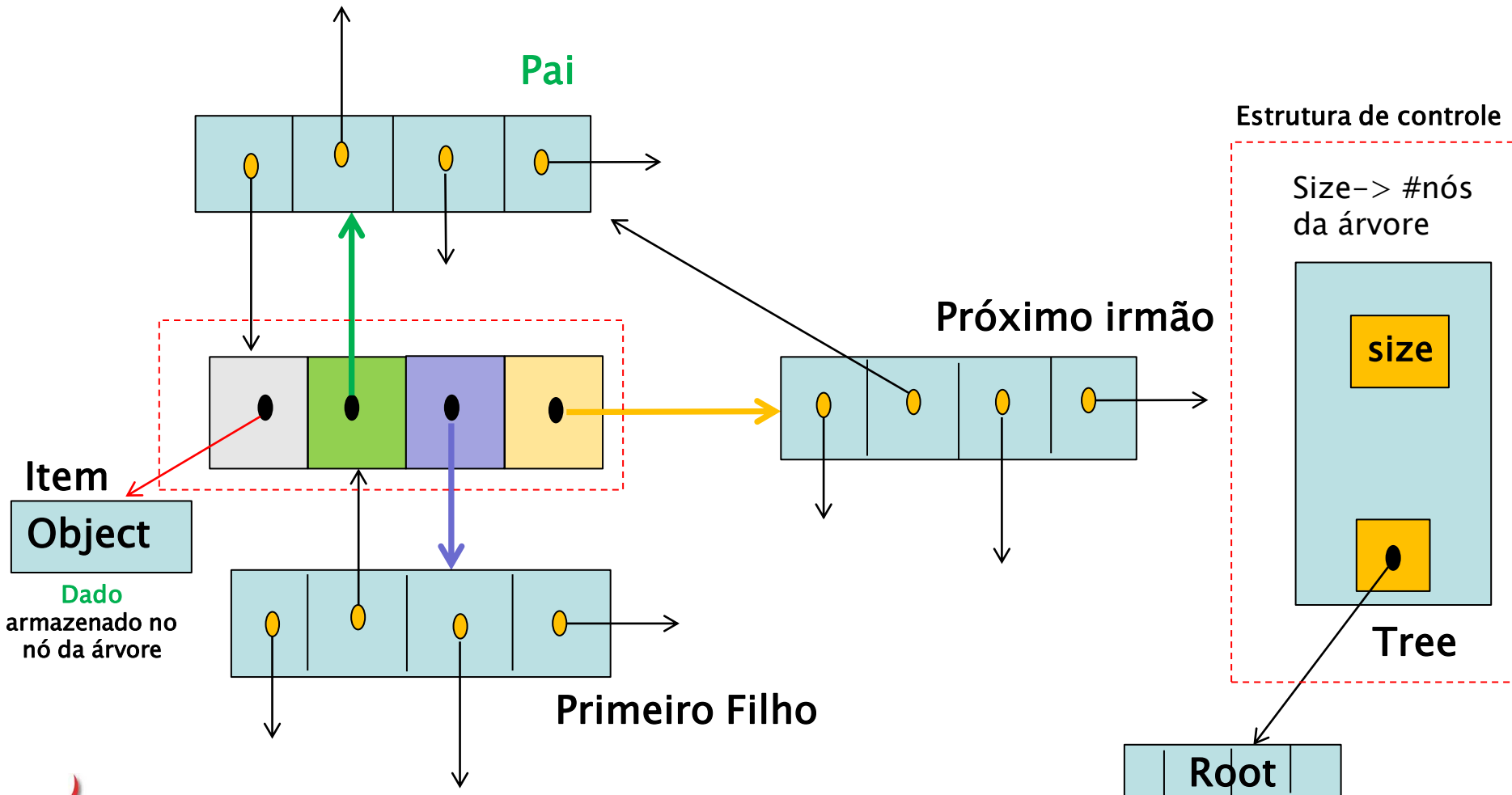
Definições

- ⊕ **Profundidade de um nó n :** é Tamanho do caminho da raiz até o nó n .
(Dept (K) = 3)
- ⊕ **Profundidade da raiz:** ZERO
- ⊕ **Altura de um nó:** Tamanho do caminho de n até o nó de nível mais baixo. (**Altura(B) = 4**) .
- ⊕ **Altura de qualquer folha:** ZERO
- ⊕ **Altura da Árvore = Altura da Raiz**



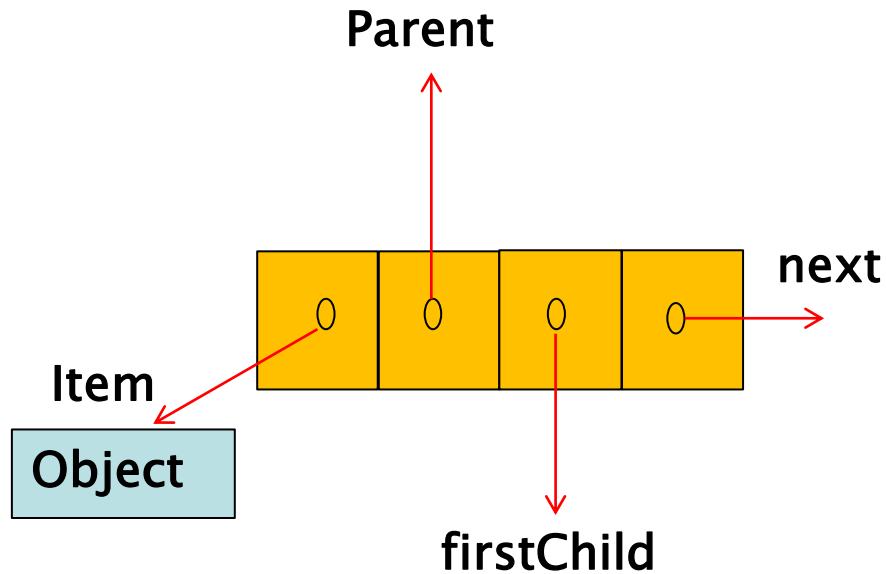
Representando Nó de Árvores

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



Representando Nó de Árvores

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



```
Class Node_Tree {  
  
    Object item;  
    Node_Tree parent;  
    Node_Tree firstChild;  
    Node_Tree next;  
  
    .  
    .  
    .  
  
}
```

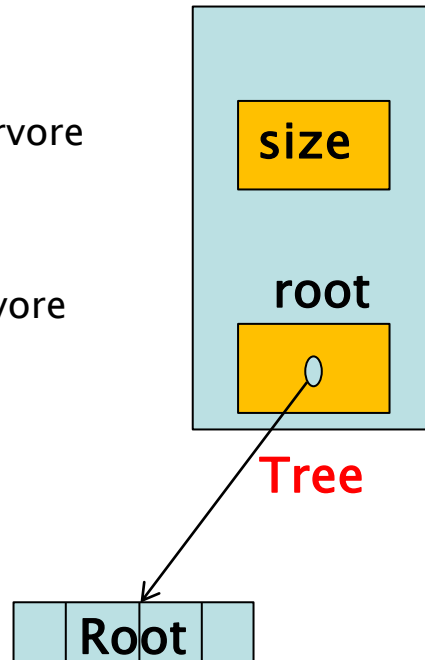


Representando Árvores

- O nó de **controle** possui a referência para o **root** e o total de nós na árvore (**size**).

size -> #nós da árvore

root -> raiz da árvore



```
Class Tree {
```

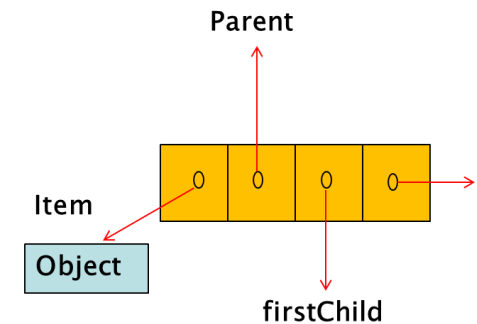
```
    Node_Tree root;  
    int size;
```

```
    .  
    .  
    .
```

```
}
```

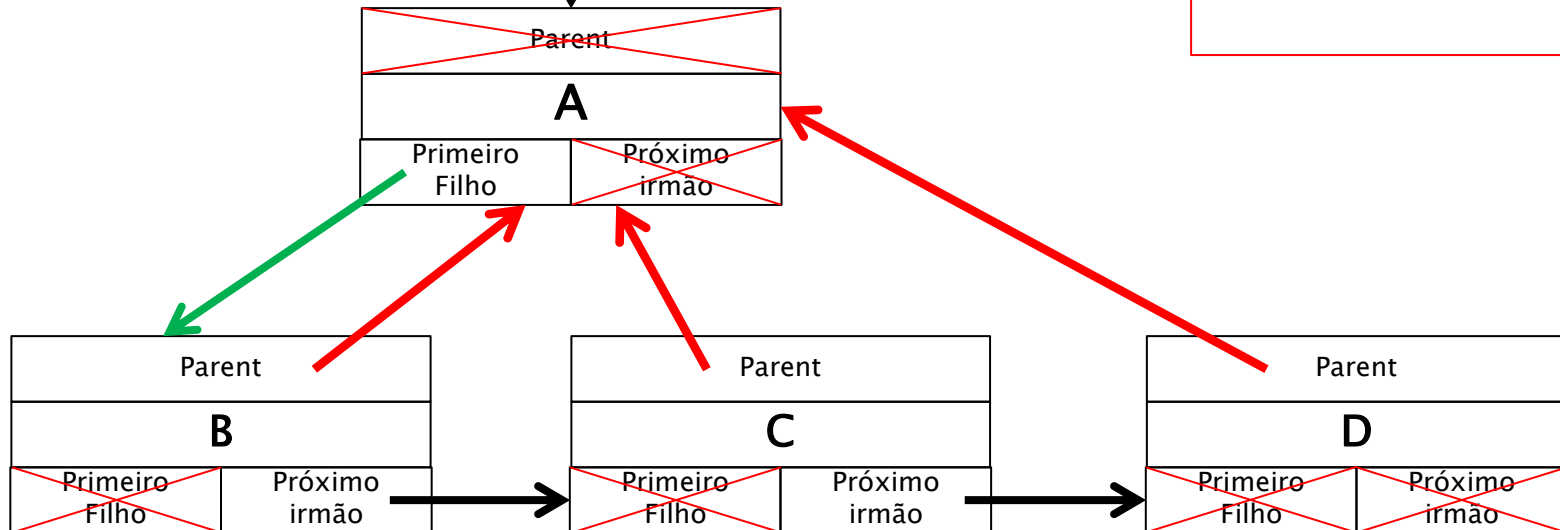
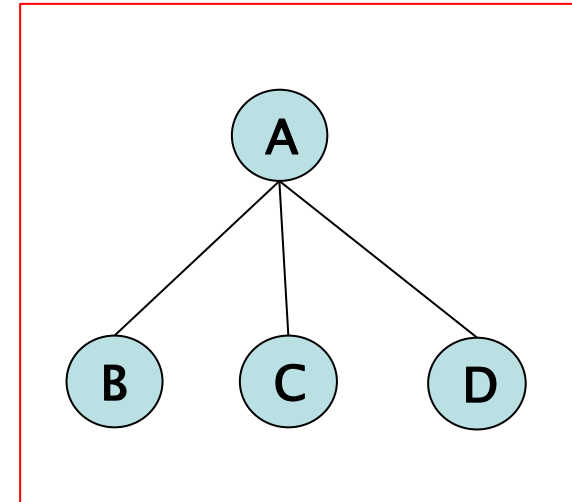
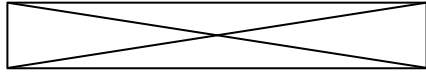


Representando Nó da árvore

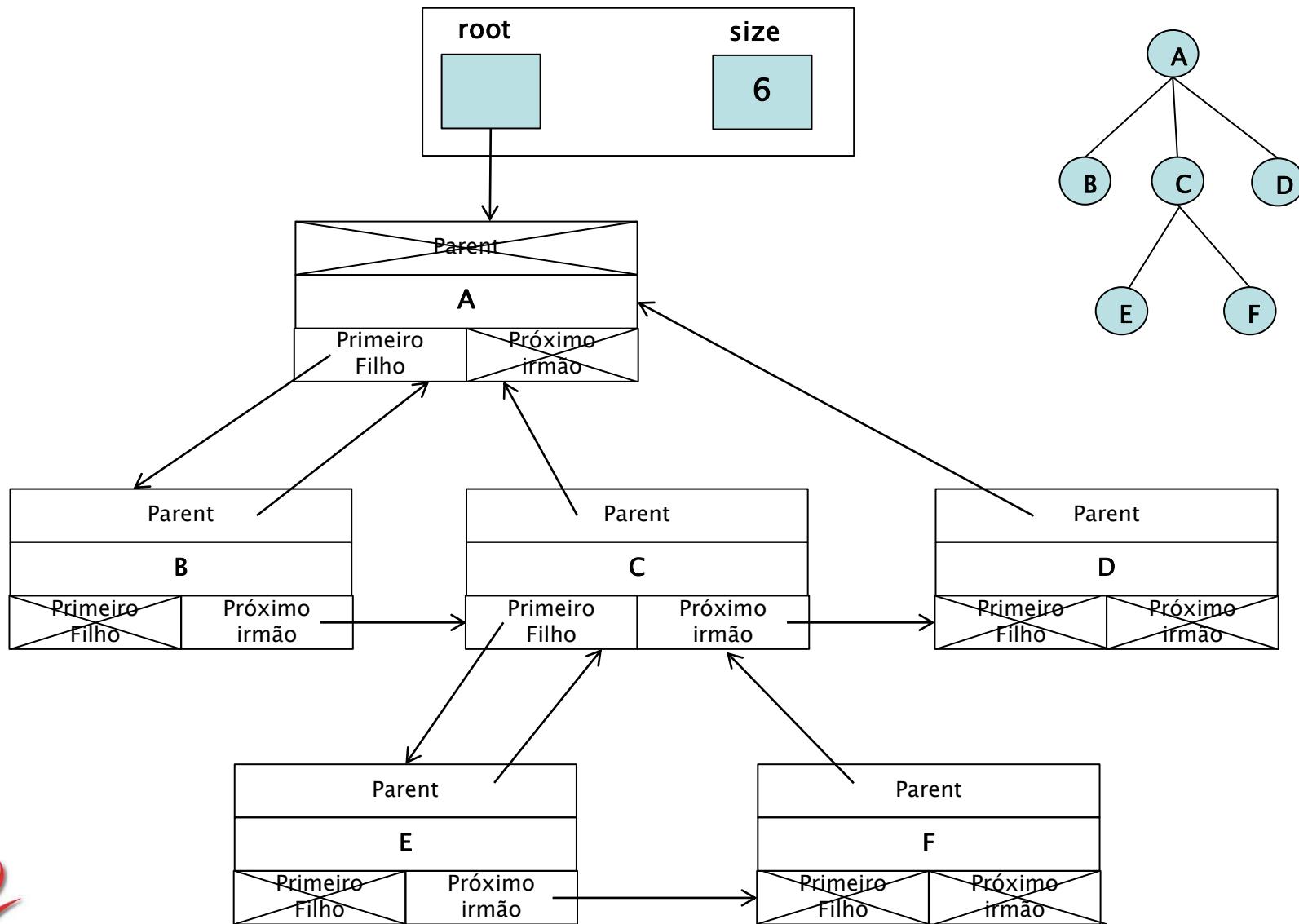


Exemplo

null



Exemplo



Os tipos abstratos de dados

Tree e Node_Tree

ret_Root(): retorna o node root da árvore
parent(): retorna o pai do nó
imprime_Parent(): **imprime** o dado armazenado no pai
children(): retorna **lista** com os filhos do nó
imprime_Filhos(): Imprime dados dos filhos do nó
isInternal(): testa se nó é node interno
isExternal(): testa se nó é node externo
size(): retorna o número de nodes na árvore
isEmpty(): testa se a árvore é vazia
dept(): retorna o número de ancestrais do node
height(): retorna a altura do node
preorder(): retorna nodes em ordem preorder
postorder(): retorna nodes em ordem postorder
listNodes(): retorna uma coleção dos nodes da árvore
replace(v,e): altera o dado em um determinado node



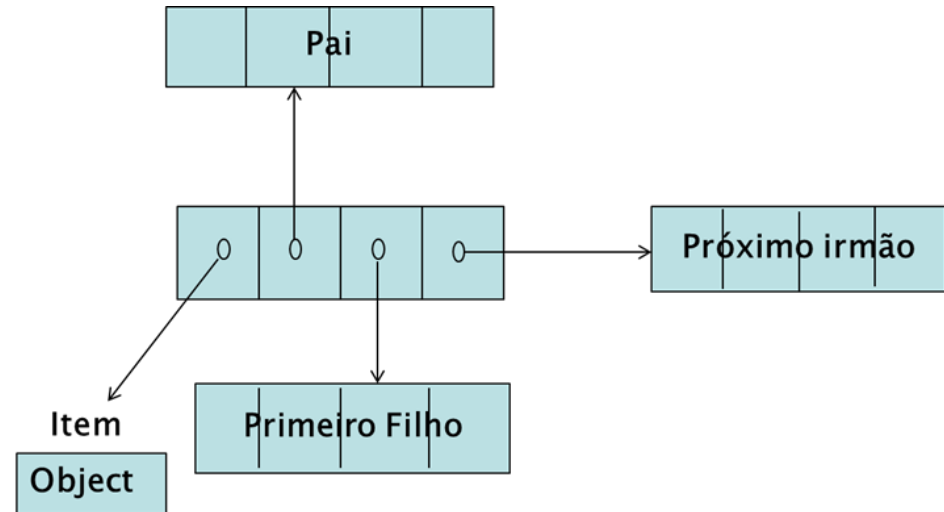
Classe **Node_Tree**

```
package uscs;
```

```
public class Node_Tree {
```

```
    Integer item;  
    Node_Tree parent;  
    Node_Tree firstChild;  
    Node_Tree next;
```

```
    public Node_Tree(Integer item) {  
        this.item = item;  
        this.parent = null;  
        this.firstChild = null;  
        this.next = null;  
    }
```



parent(v): retorna o pai de v

imprime_Parent(): imprime o dado armazenado no pai

```
public Node_Tree parent() {  
  
    if (this.parent == null)  
        return null;  
  
    else return (this.parent );  
  
}  
  
public void imprime_Parent() {  
    if (this.parent != null)  
        System.out.println("Pai:  " + this.parent.item );  
  
    else  
        System.out.println("Este nó é root, não tem pai...");  
  
}
```



imprime_Filhos(): Imprime dados dos filhos do nó

```
public void imprimeFilhos() {  
  
    if (this.firstChild == null)  
        System.out.println("Node nao tem filhos....");  
    else {  
  
        Node_Tree trab = this.firstChild;  
  
        while (trab != null ) {  
  
            System.out.println(trab.item);  
            trab = trab.next;  
        }  
    }  
}
```



isInternal(): testa se nó é node interno

```
public boolean isInternal() {  
    if (this.firstChild != null)  
        return true;  
    else return false;  
}
```



dept(): retorna o número de ancestrais do nó

```
public int dept() {  
    if (this.parent == null)  
        return 0;  
    else return ( 1 + this.parent.dept() );  
}
```



height(): retorna a altura do nó

```
public int height() {

    if (this.firstChild == null )
        return 0;

    int h=0;

    Node_Tree trab = this.firstChild;

    while (trab.next != null ) {
        h = Math.max(h , trab.next.height());
        trab = trab.next;
    }

    return 1 + h;

}
```



Classe Tree

```
package uscs;
```

```
public class Tree {
```

```
    Node_Tree root;
```

```
    int size;
```

```
    public Tree() {
```

```
        this.root = null;
```

```
        this.size = 0;
```

```
    }
```

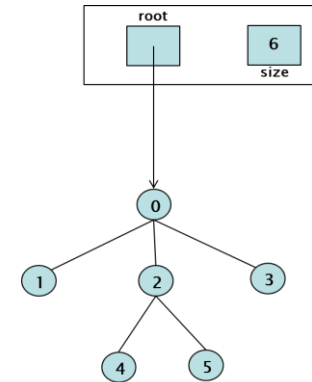
```
    public void insert_root(Integer valor) {
```

```
        Node_Tree node = new Node_Tree(valor);
```

```
        this.root = node;
```

```
        this.size = 1;
```

```
    }
```



`ret_Root()`: retorna o node root da árvore.

```
public Node_Tree ret_Root() {  
  
    return (this.root);  
  
}
```



size(): retorna o número de nós da árvore

```
public int size() {  
    return this.size;  
}
```



isEmpty(): testa se a árvore é vazia

```
public boolean isEmpty() {  
    if (this.size == 0 )  
        return true;  
    else return false;  
}
```



Travessia de Árvores

- Os métodos vistos até agora permitem que se crie a árvores, seus nós e os relacionamentos (pai/filho) entre os nós criados.
- Travessia de uma árvore significa percorrer todos os nós da mesma.



Atravessando Árvores

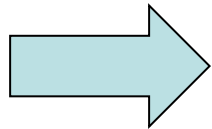
- Atravessar a árvore significa visitar uma única vez cada nó da árvore.
- Existem basicamente dois algoritmos de travessia: **preorder** e **postorder**.



Percurso – Preorder

- Na travessia **preorder** de uma árvore T, a **raiz** de T é visitada em primeiro lugar e em seguida as sub-árvores são visitadas recursivamente.

```
public void preorder() {
```



```
    System.out.println(this.item );
```

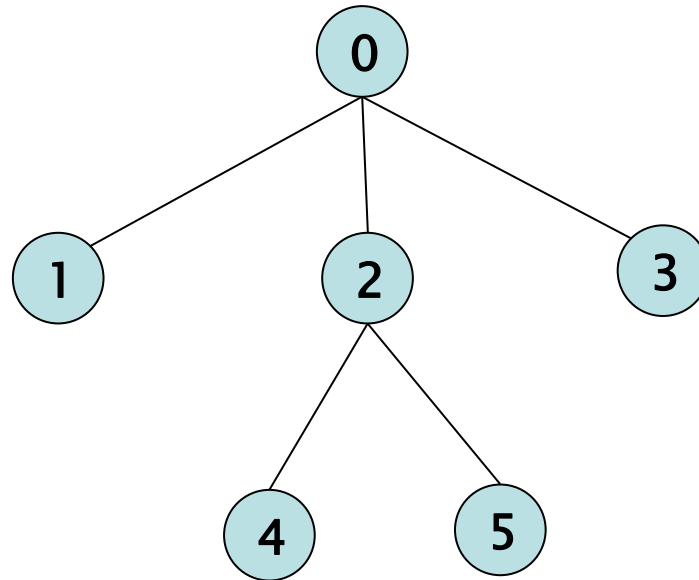
```
    Node_Tree trab = this.firstChild;
```

```
    while (trab != null ) {
        trab.preorder();
        trab = trab.next;
    }
```

```
}
```



Exercício

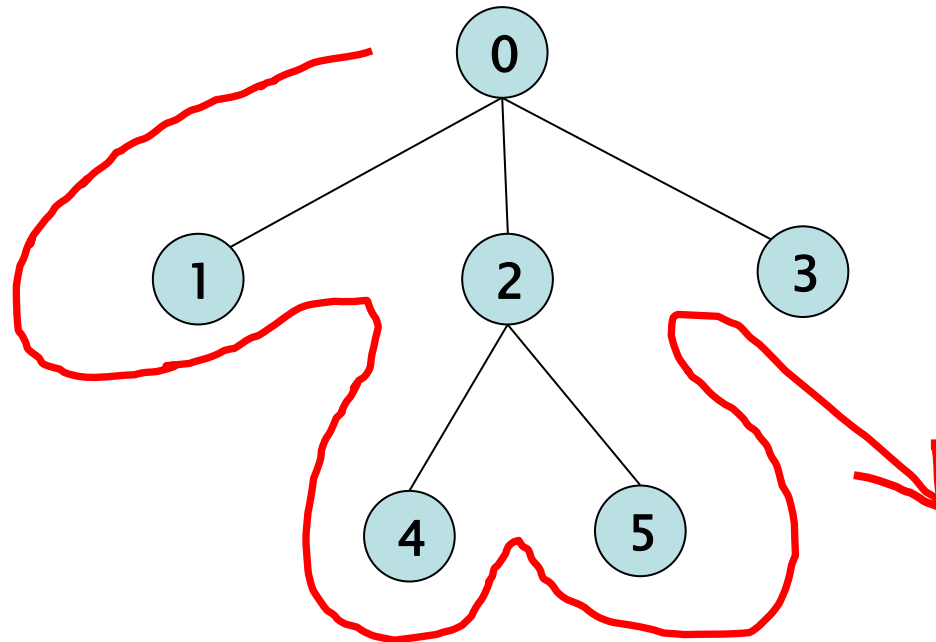


- Imprimir os nós da árvore com o uso da travessia preorder.

0, 1, 2, 4, 5, 3



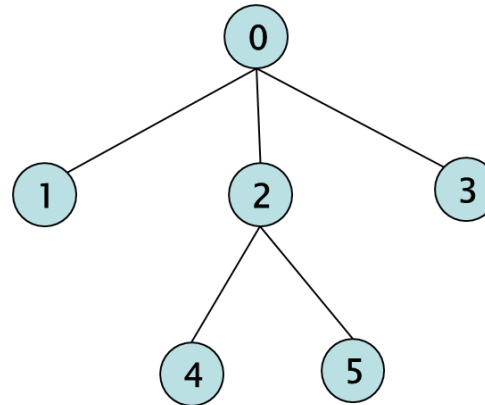
Percurso – Preorder



- Nós são visitados nesta ordem: 0 1 2 4 5 3
- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo **$O(n)$** , onde n é o total de nós da árvore.



Solução



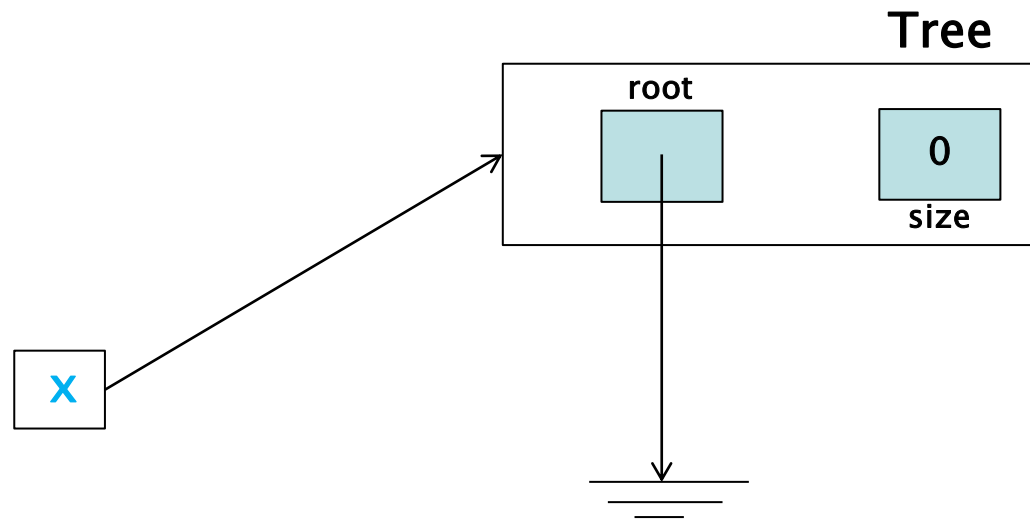
1. Construir a estrutura de dados que corresponde à árvore (estrutura de controle)
2. Criar o nó root e vinculá-lo à árvore
3. Construir os nós que compõem a árvore
4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós
5. Aplicar o algoritmo de preorder na raiz da árvore.



1. Construir a estrutura de dados que corresponde à árvore (estrutura de controle)

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
    public static void main(String[] args ) {
```

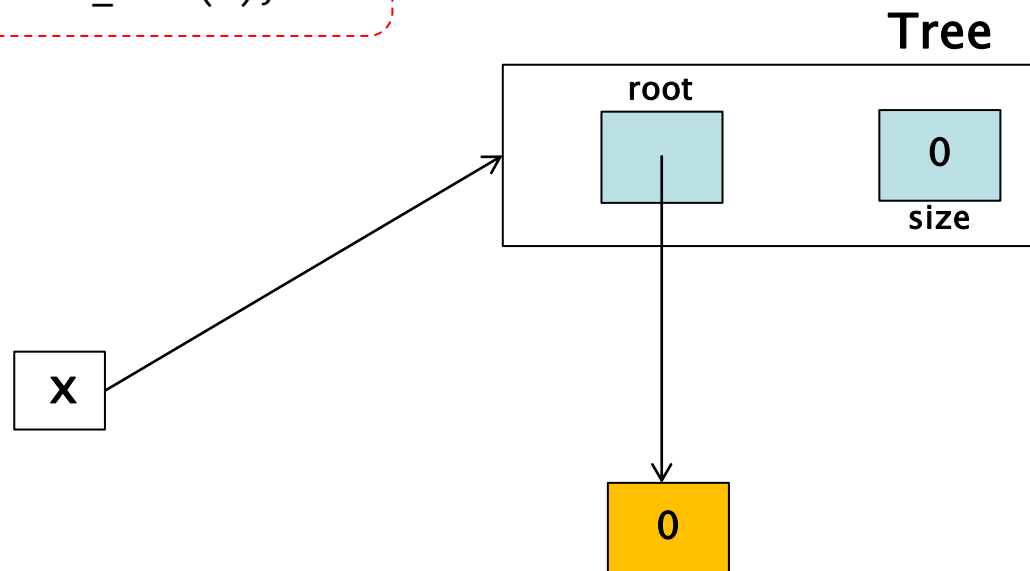
```
        Tree x = new Tree();
```



2. Criar o nó root e vinculá-lo à árvore

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
    public static void main(String[] args ) {
```

```
        Tree x = new Tree();
        x.insert_root(0);
```

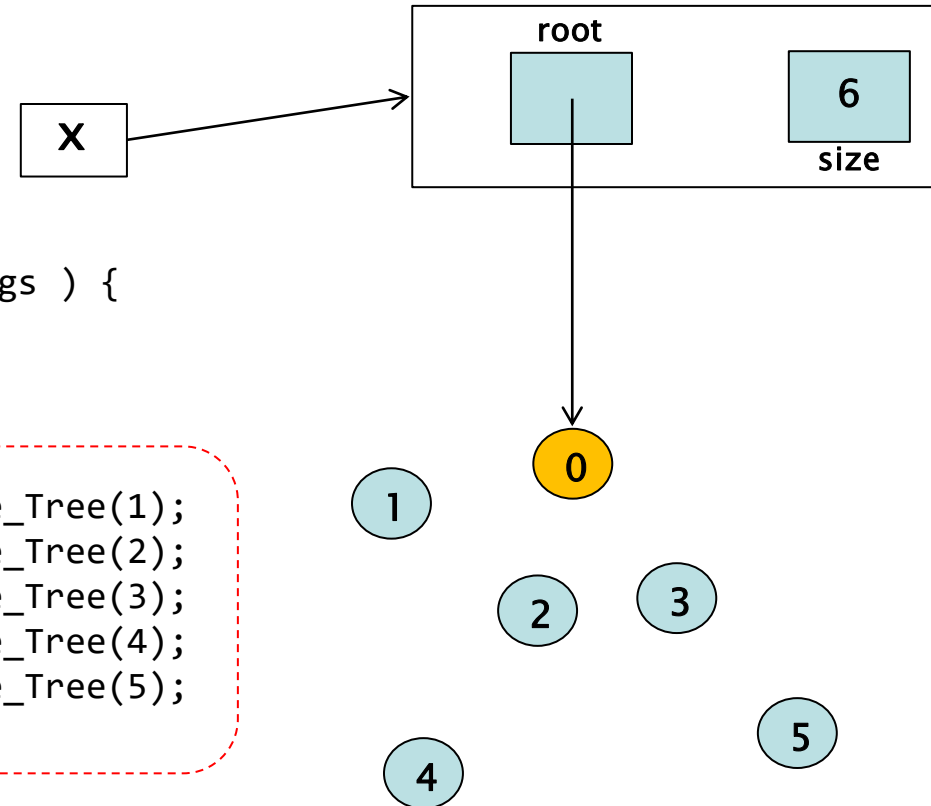


3. Construir os nós que compõem a árvore

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
    public static void main(String[] args ) {
```

```
        Tree x = new Tree();
        x.insert_root(0);
```

```
        Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
        Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
        Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
        Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
        Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
```



4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
    public static void main(String[] args ) {
```

```
        Tree x = new Tree();
        x.insert_root(0);
```

```
        Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
        Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
        Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
        Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
        Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
```

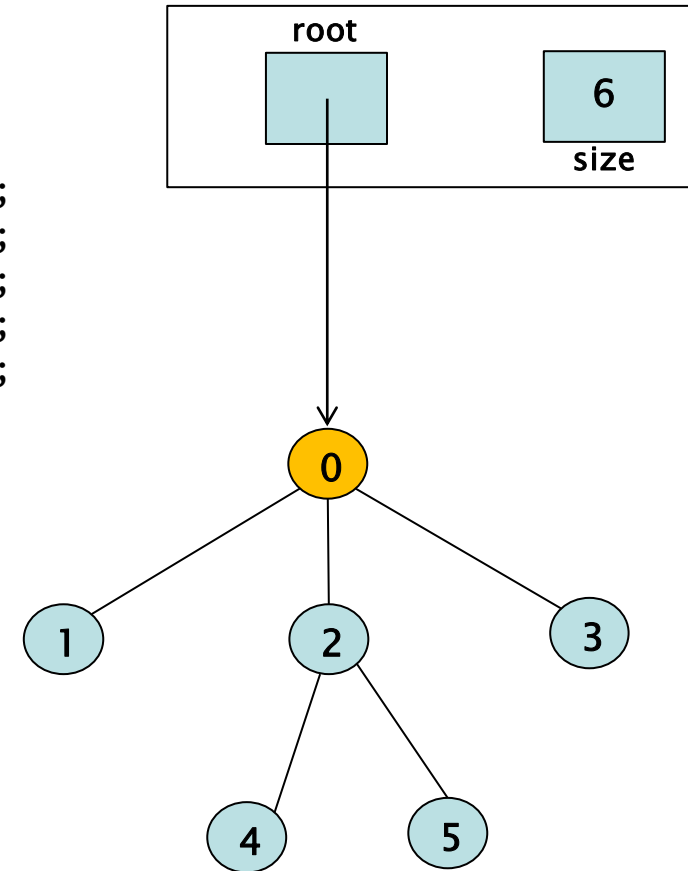
```
        x.root.firstChild = no_1;
        no_1.parent = x.root;
        no_1.next = no_2;
```

```
        no_2.parent = x.root;
        no_2.next = no_3;
```

```
        no_3.parent = x.root;
```

```
        no_2.firstChild = no_4;
        no_4.parent = no_2;
```

```
        no_4.next = no_5;
        no_5.parent = no_2;
```



4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós

```
x.root.firstChild = no_1;
```

```
no_1.parent = x.root;
```

```
no_1.next = no_2;
```

```
no_2.parent = x.root;
```

```
no_2.next = no_3;
```

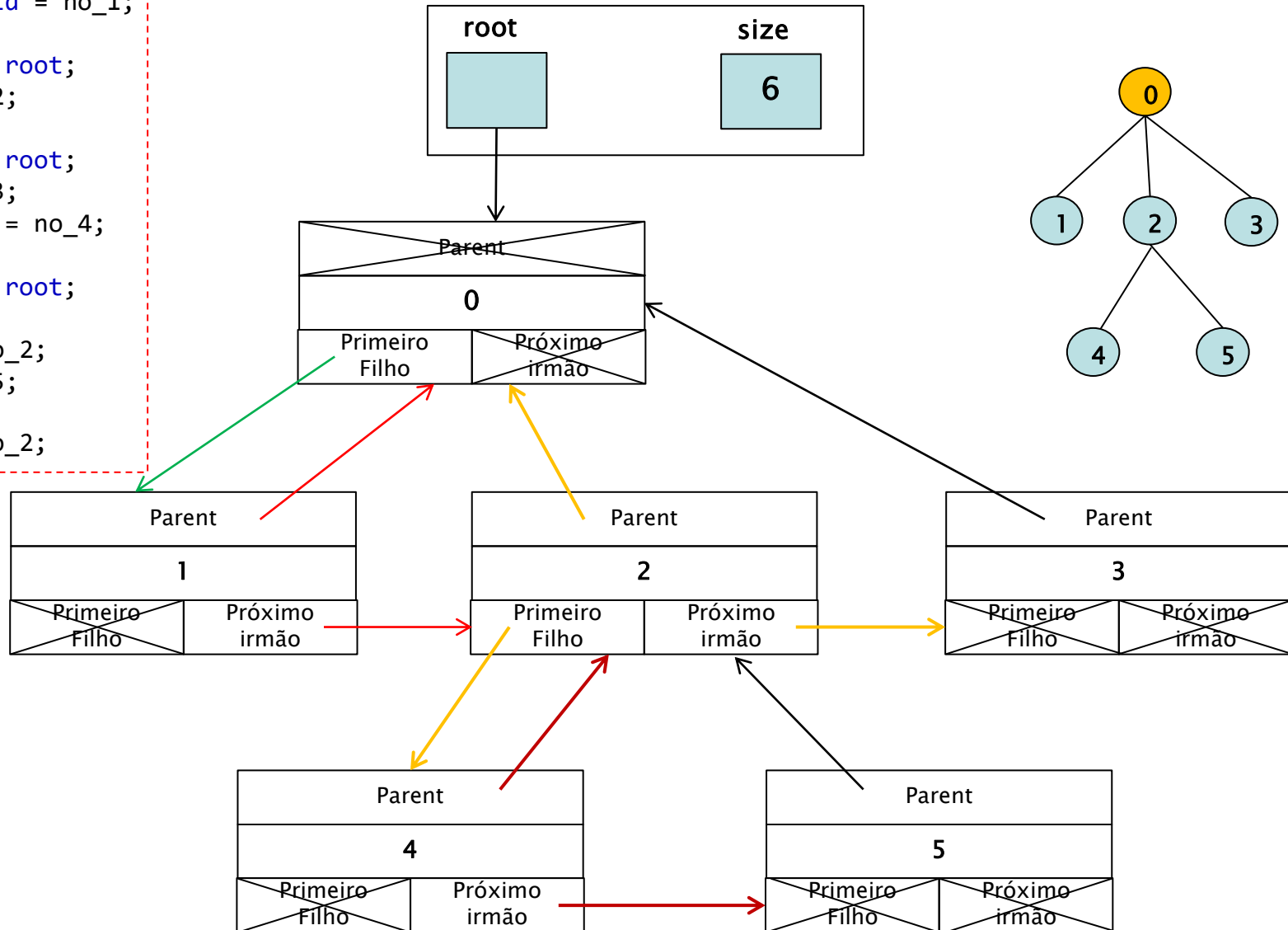
```
no_2.firstChild = no_4;
```

```
no_3.parent = x.root;
```

```
no_4.parent = no_2;
```

```
no_4.next = no_5;
```

```
no_5.parent = no_2;
```



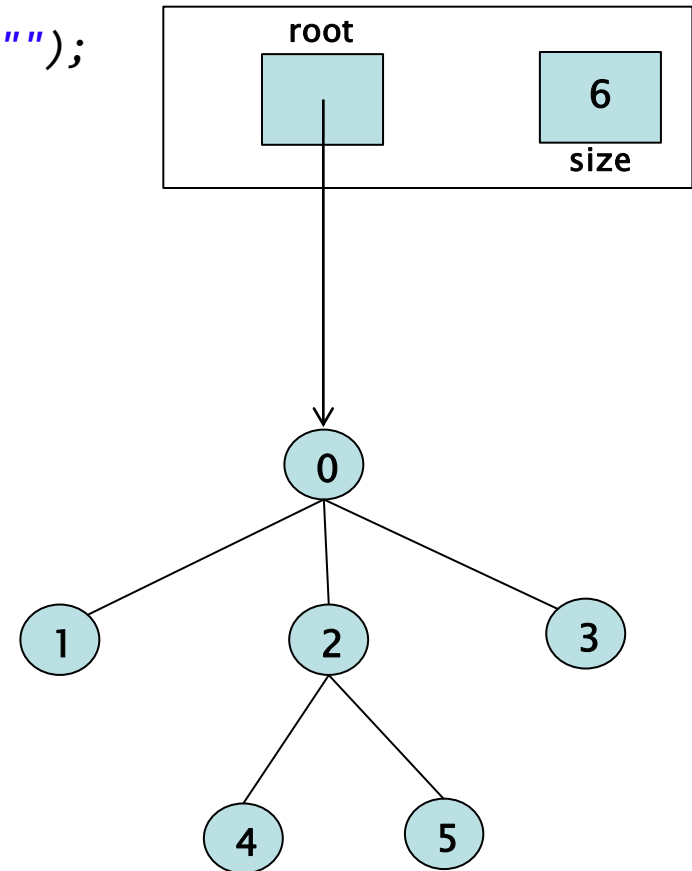
5. Aplicar o algoritmo de preorder na raiz da árvore.

```
x.root.preorder();  
System.out.println ("");
```

```
}
```

```
}
```

Resposta do programa:



```
package uscs;
```

```
public class Teste_Tree {
```

```
    public static void main(String[] args ) {
```

```
        Tree x = new Tree();
```

```
        x.insert_root(0);
```

```
        Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
```

```
        Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
```

```
        Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
```

```
        Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
```

```
        Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
```

```
        x.root.firstChild = no_1;
```

```
        no_1.parent = x.root;
```

```
        no_1.next = no_2;
```

```
        no_2.parent = x.root;
```

```
        no_2.next = no_3;
```

```
        no_3.parent = x.root;
```

```
        no_2.firstChild = no_4;
```

```
        no_4.parent = no_2;
```

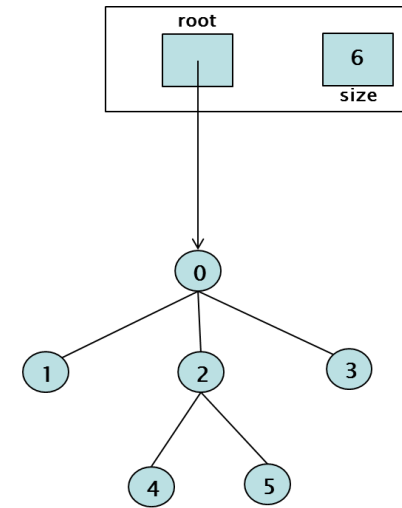
```
        no_4.next = no_5;
```

```
        no_5.parent = no_2;
```

```
        x.root.preorder();
```

```
        System.out.println ("");
```

```
    }
```



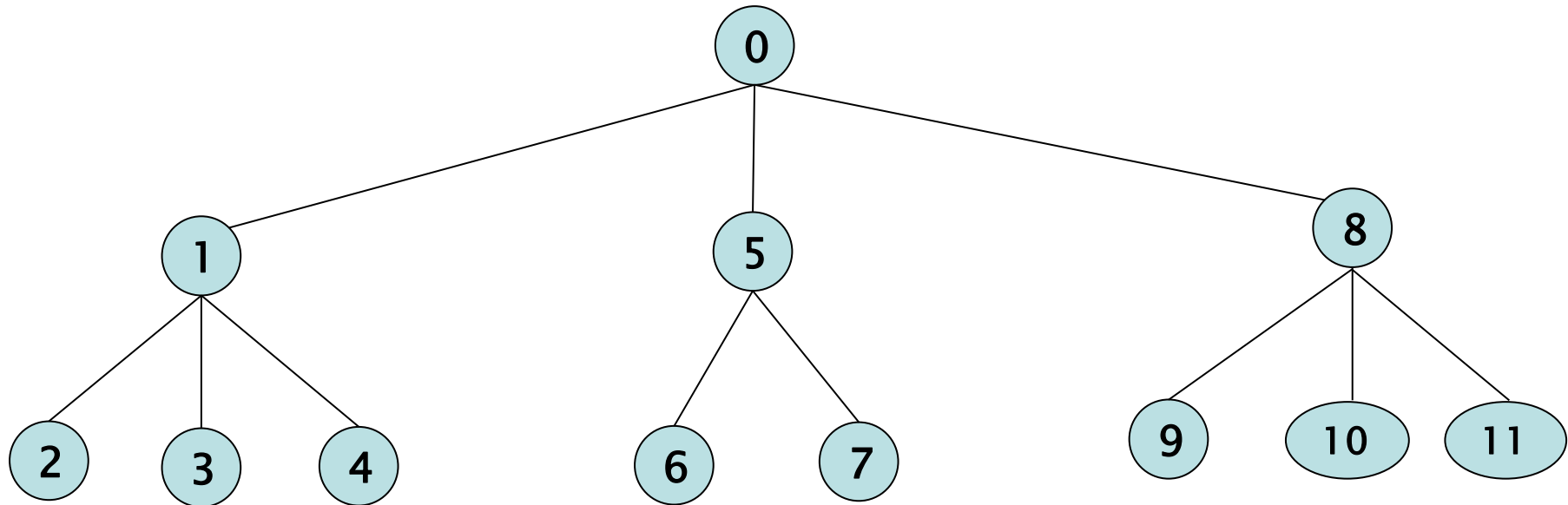
Resposta do programa:



0
1
2
4
5
3



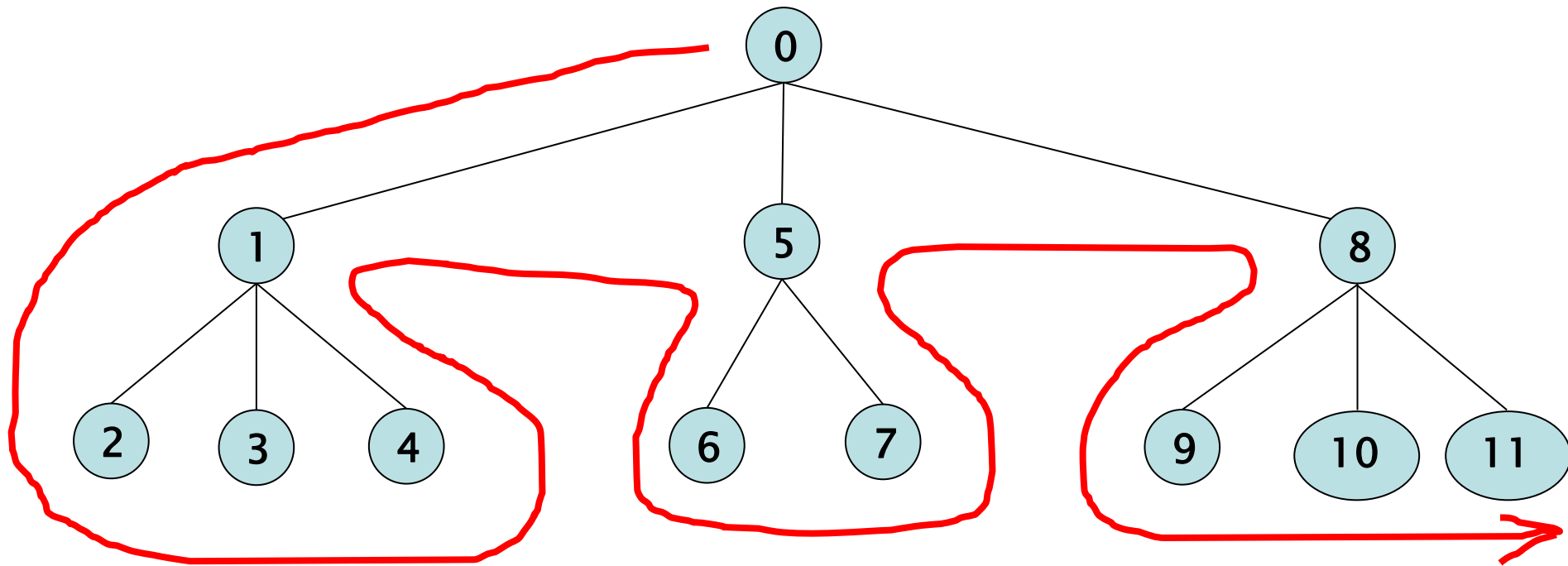
Outro exemplo

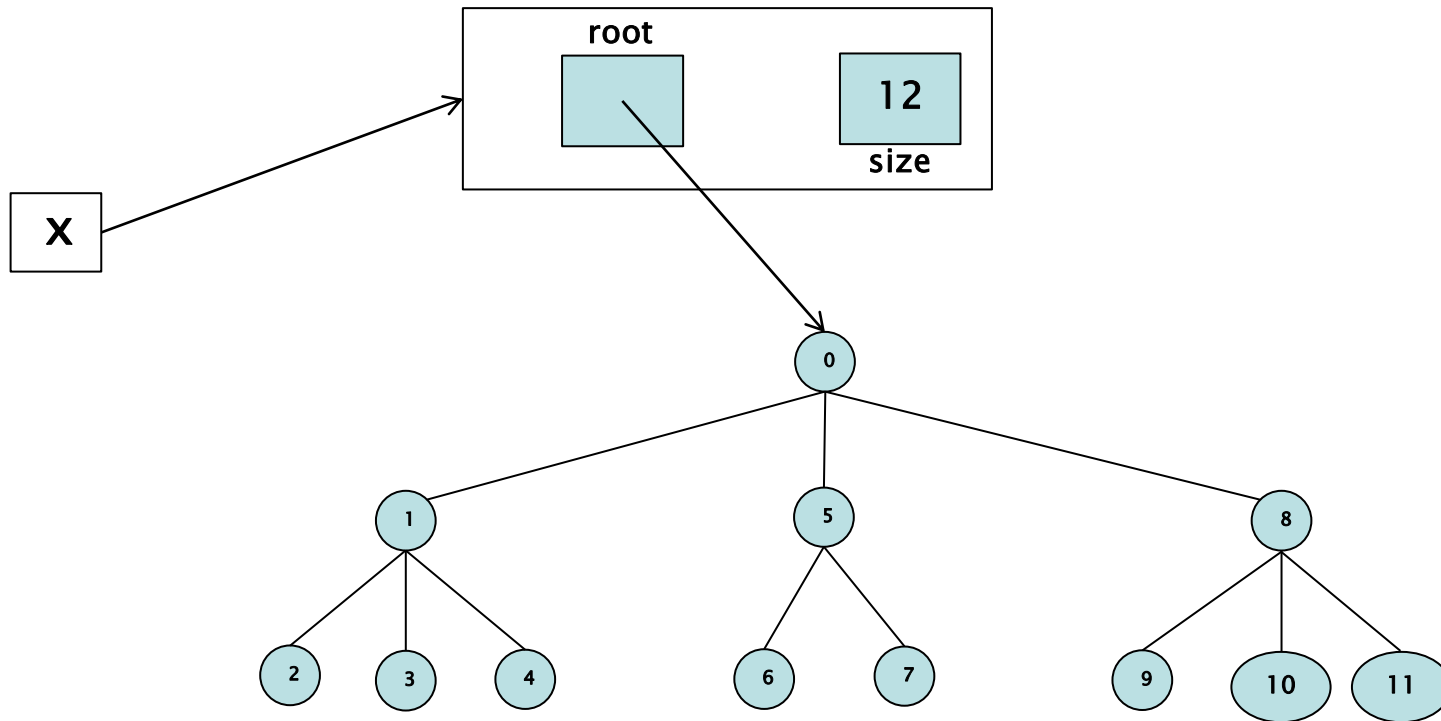


Qual o percurso preordem desta árvore ?



Preorder





Qual o percurso preordem desta árvore ?



```
package uscs;
    public class Teste_Tree {
        public static void main(String[] args ) {

            Tree x = new Tree();
            x.insert_root(0);

            Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
            Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
            Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
            Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
            Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
            Node_Tree no_6 = new Node_Tree(6);
            Node_Tree no_7 = new Node_Tree(7);
            Node_Tree no_8 = new Node_Tree(8);
            Node_Tree no_9 = new Node_Tree(9);
            Node_Tree no_10 = new Node_Tree(10);
            Node_Tree no_11 = new Node_Tree(11);

            x.root.firstChild = no_1;
```



```
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_5;
no_5.next = no_8;
no_5.parent = x.root;
no_8.parent = x.root;
```

```
no_1.firstChild = no_2;
no_2.next = no_3;
no_3.next = no_4;
no_2.parent = no_1;
no_3.parent = no_1;
no_4.parent = no_1;
```

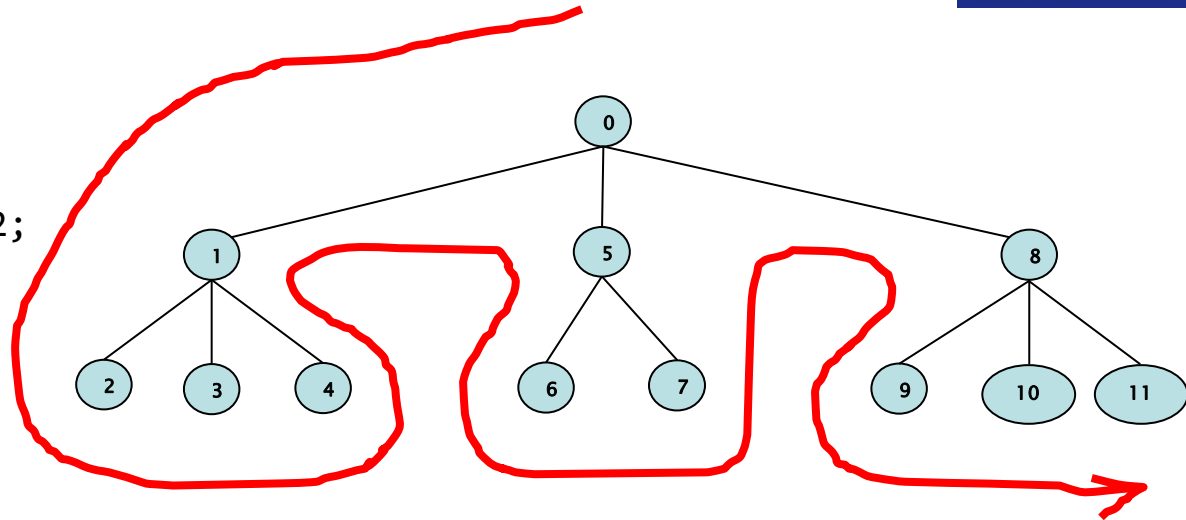
```
no_5.firstChild = no_6;
no_6.next = no_7;
no_6.parent = no_5;
no_7.parent = no_5;
```

```
no_8.firstChild = no_9;
no_9.next = no_10;
no_10.next = no_11;
no_9.parent = no_8;
no_10.parent = no_8;
no_11.parent = no_8;
```

```
x.root.preorder();
```

```
}
```

```
}
```



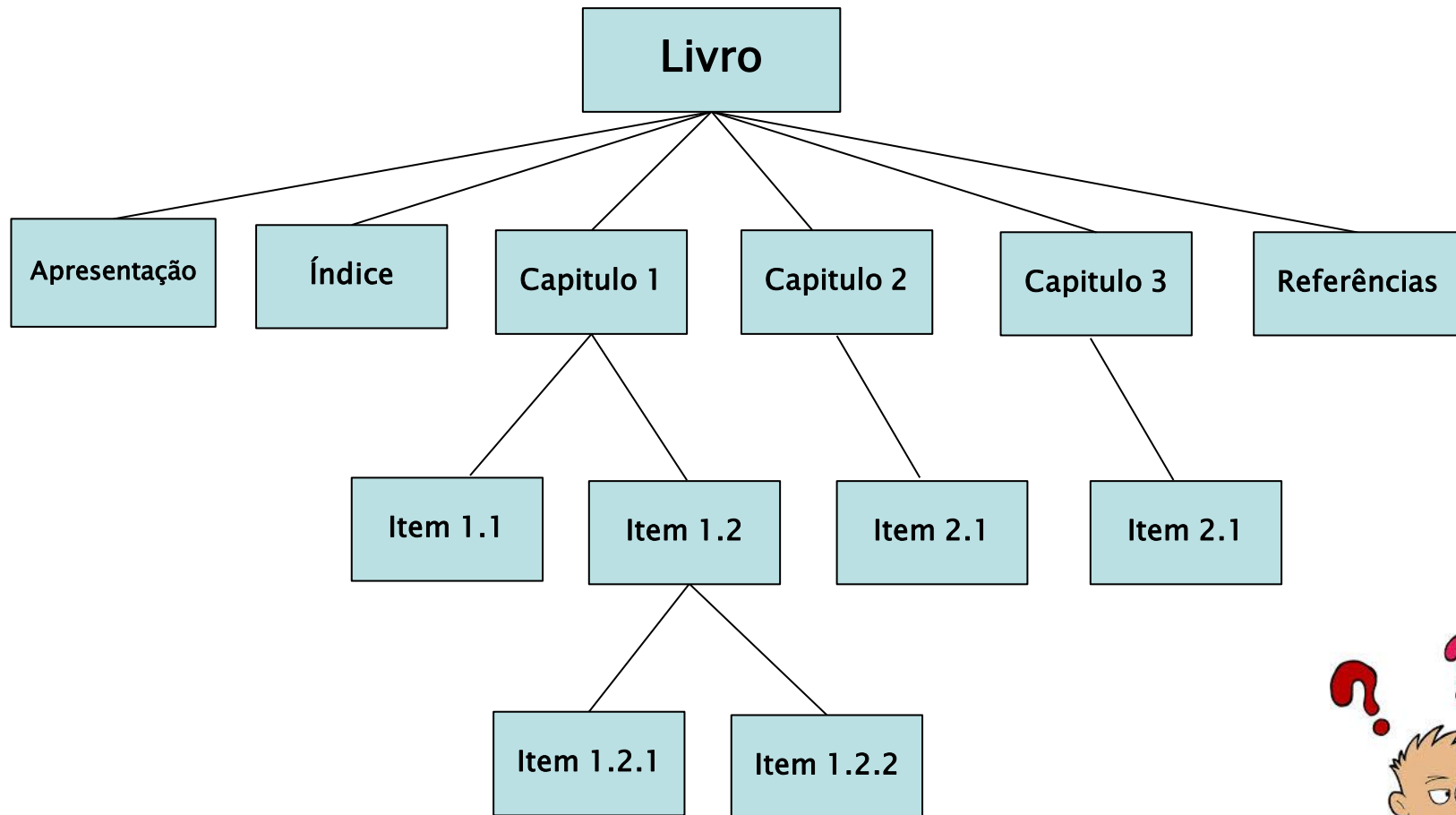
Resposta: Preorder →



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11



Exercício



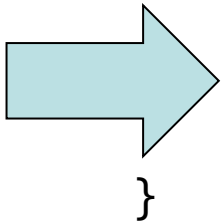
Qual o percurso preordem desta árvore ?



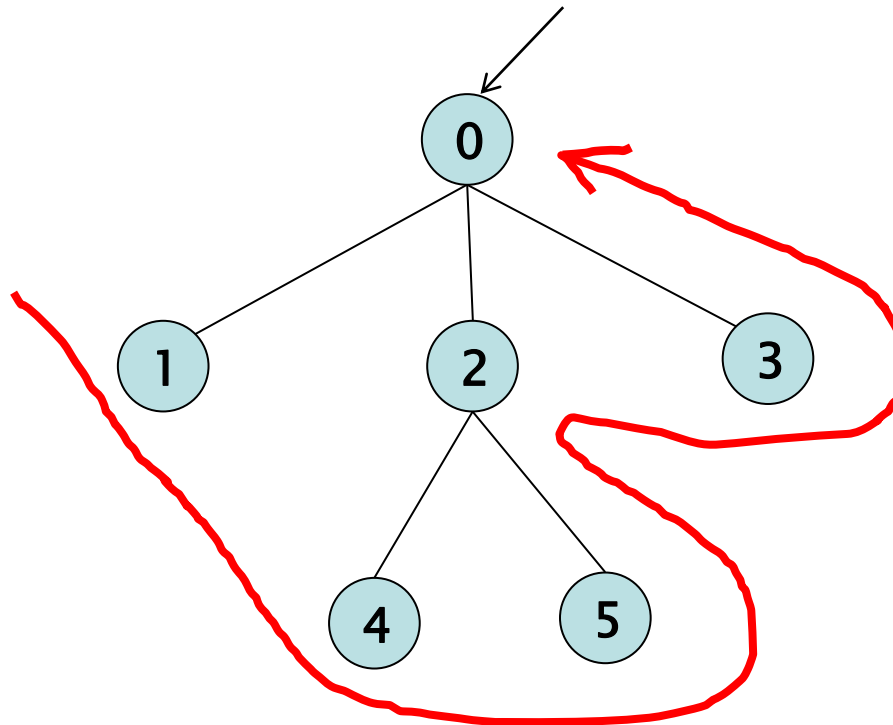
Percurso – Posorder

- Este algoritmo pode ser visto como o oposto do percurso preorder, pois as sub-árvores dos **filhos** são recursivamente atravessadas e em seguida o root é visitado.

```
public void posorder() {  
  
    Node_Tree trab = this.firstChild;  
  
    while (trab != null ) {  
        trab.postorder();  
        trab = trab.next;  
    }  
  
    System.out.println(this.item );  
}
```



Percurso – Posorder



- Nós são visitados nesta ordem: **1 4 5 2 3 0**
- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo **$O(n)$** , onde n é o total de nós da árvore.




```
package uscs;
public class Teste_Tree {
public static void main(String[] args ) {
```

```
Tree x = new Tree();
x.insert_root(0);
```

```
Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
```

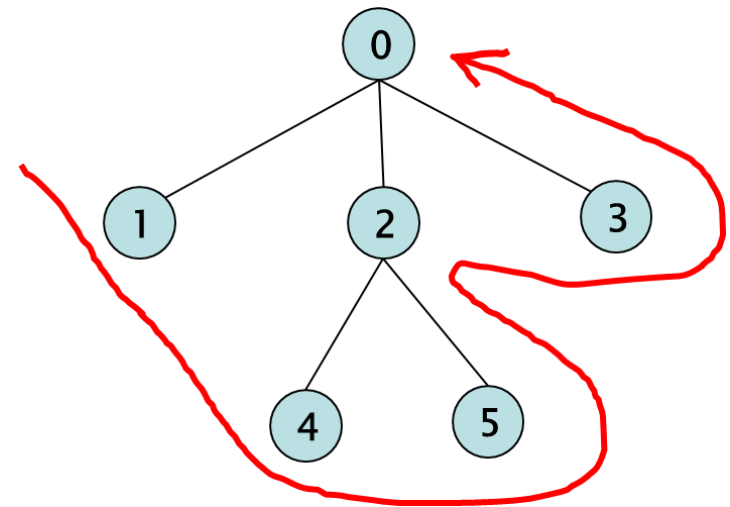
```
x.root.firstChild = no_1;
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_2;
```

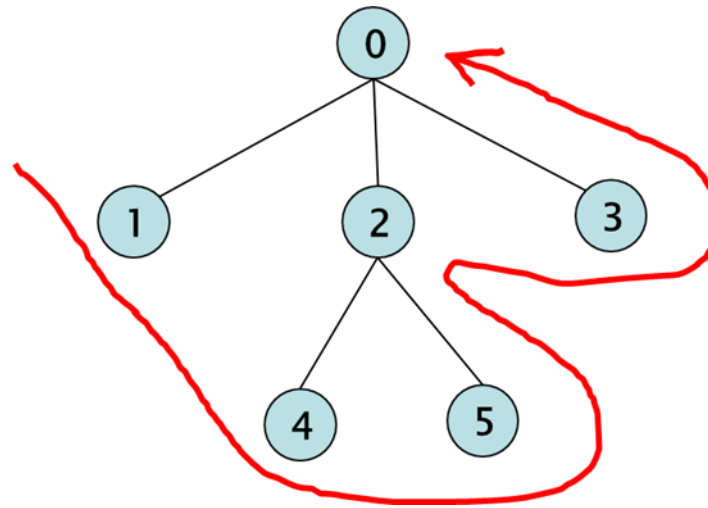
```
no_2.parent = x.root;
no_2.next = no_3;
```

```
no_3.parent = x.root;
```

```
no_2.firstChild = no_4;
no_4.parent = no_2;
```

```
no_4.next = no_5;
no_5.parent = no_2;
```



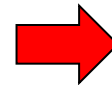


```
x.root.postorder();  
System.out.println ("");
```

```
}
```

```
}
```

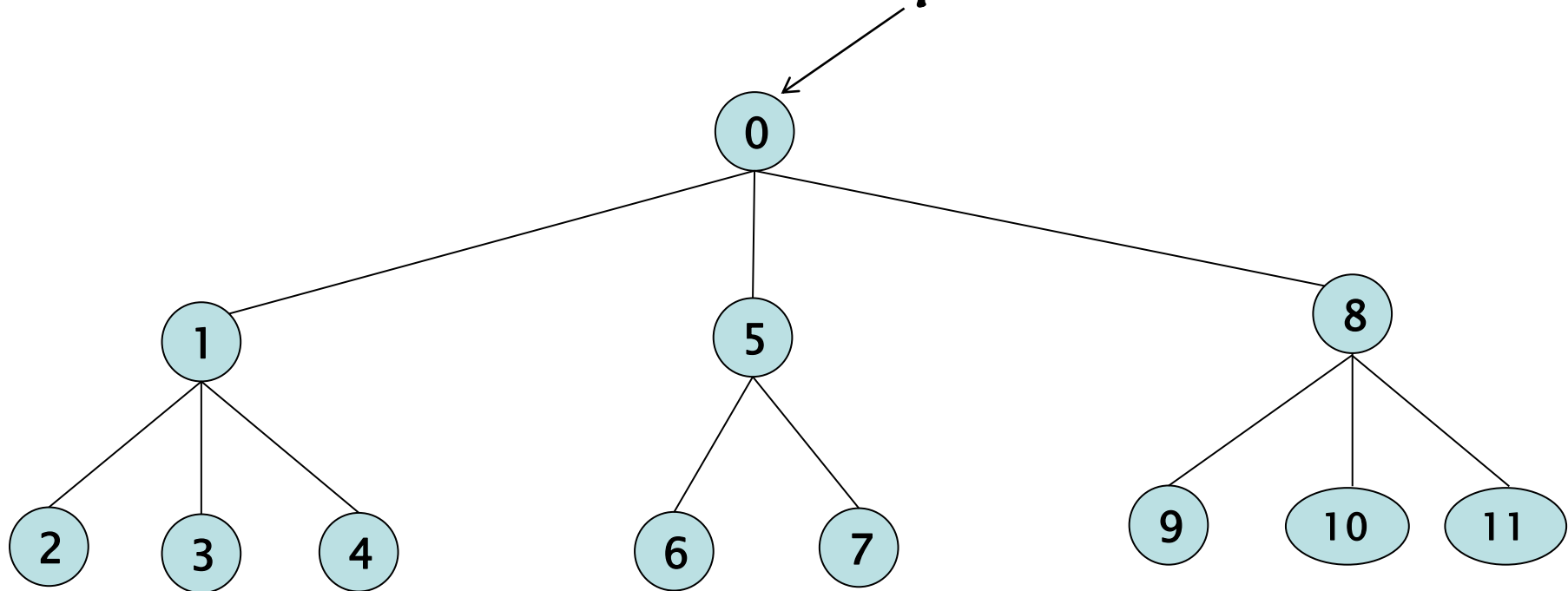
Resposta: Posorder



1
4
5
2
3
0

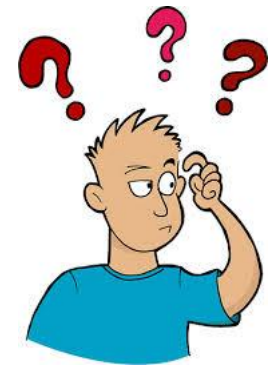


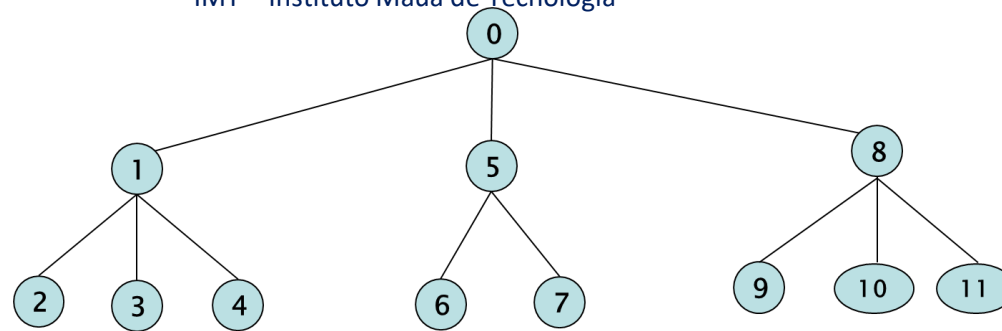
Outro exemplo



Qual o percurso posordem desta árvore ?

2, 3, 4 , 1 ,6 , 7, 5, 9, 10, 11, 8,0





```

package uscs;
public class Teste_Tree {
    public static void main(String[] args ) {

```

```

        Tree x = new Tree();
        x.insert_root(0);

```

```

Node_Tree no_1 = new Node_Tree(1);
Node_Tree no_2 = new Node_Tree(2);
Node_Tree no_3 = new Node_Tree(3);
Node_Tree no_4 = new Node_Tree(4);
Node_Tree no_5 = new Node_Tree(5);
Node_Tree no_6 = new Node_Tree(6);
Node_Tree no_7 = new Node_Tree(7);
Node_Tree no_8 = new Node_Tree(8);
Node_Tree no_9 = new Node_Tree(9);
Node_Tree no_10 = new Node_Tree(10);
Node_Tree no_11 = new Node_Tree(11);

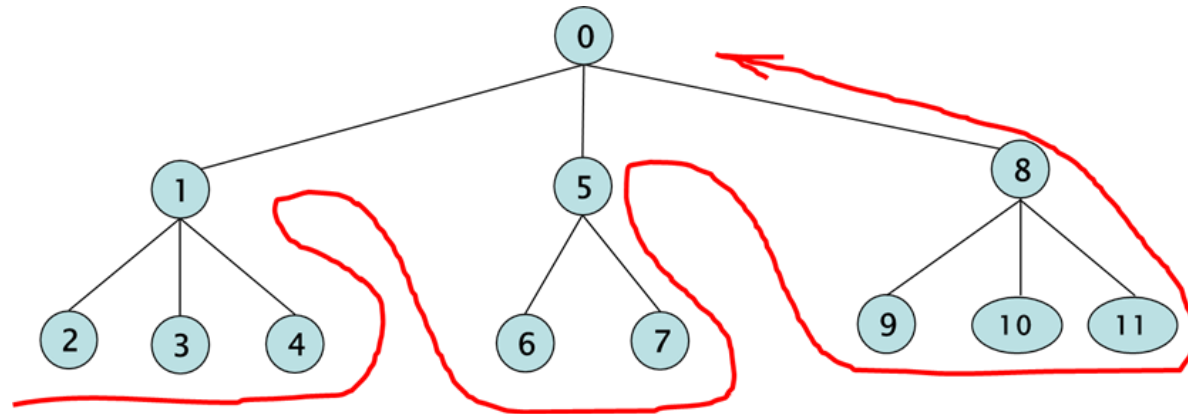
```



```
x.root.firstChild = no_1;
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_5;
no_5.next = no_8;
no_5.parent = x.root;
no_8.parent = x.root;
```

```
no_1.firstChild = no_2;
no_2.next = no_3;
no_3.next = no_4;
no_2.parent = no_1;
no_3.parent = no_1;
no_4.parent = no_1;
```

```
no_5.firstChild=no_6;
no_6.next = no_7;
no_6.parent = no_5;
no_7.parent = no_5;
```

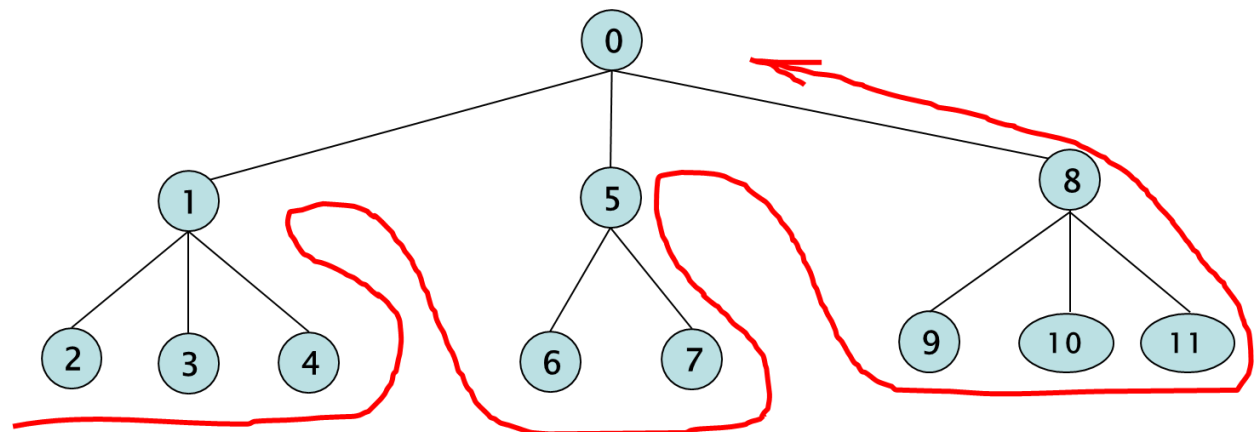


```
no_8.firstChild = no_9;
no_9.next = no_10;
no_10.next = no_11;
no_9.parent = no_8;
no_10.parent = no_8;
no_11.parent = no_8;
```

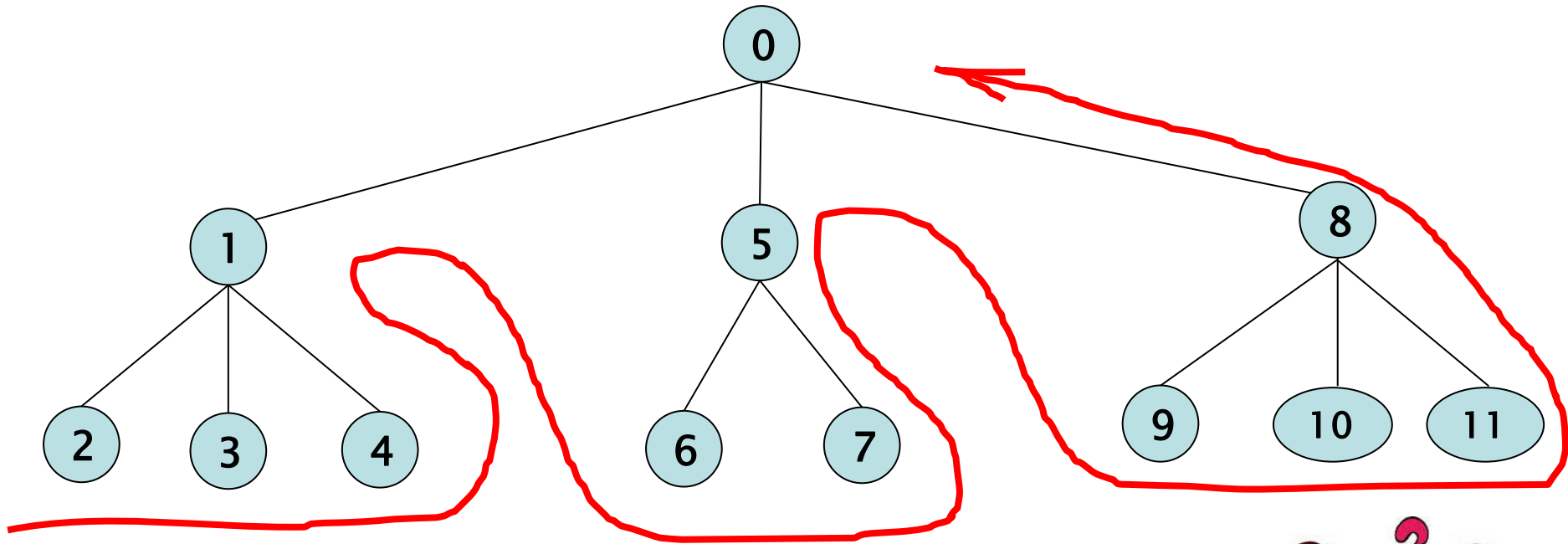
```
x.root.postorder();
System.out.println ("");
```

```
}
```

```
}
```



Outro exemplo



Qual o percurso **postordem** desta árvore ?

2 3 4 1 6 7 5 9 10 11 8 0

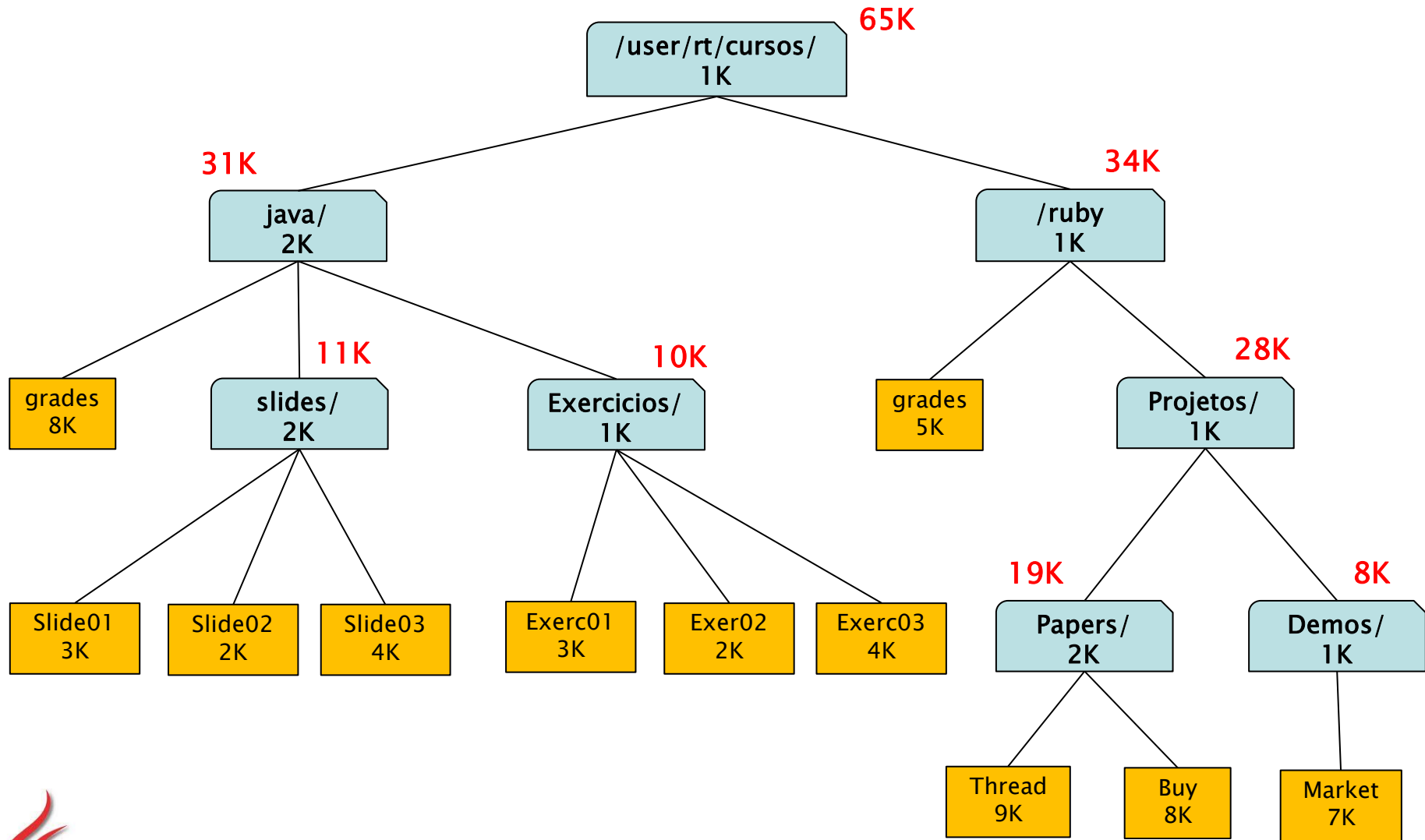


Aplicação travessia postorder

- O método **postorder** é útil para resolver problemas onde desejamos computar alguma propriedade para cada nó **v** da árvore, mas esta computação requer que a mesma computação tenha sido feita previamente para os filhos do nó **v**.
- Para exemplificar o método, considere um sistema de arquivos em árvore, onde nós externos representam arquivos e nós internos diretórios. O problema consiste em computar o espaço em disco usado por um diretório, o qual é recursivamente calculado por:
 - o tamanho do próprio diretório
 - o tamanho dos arquivos no diretório
 - o espaço usado pelos diretórios filhos

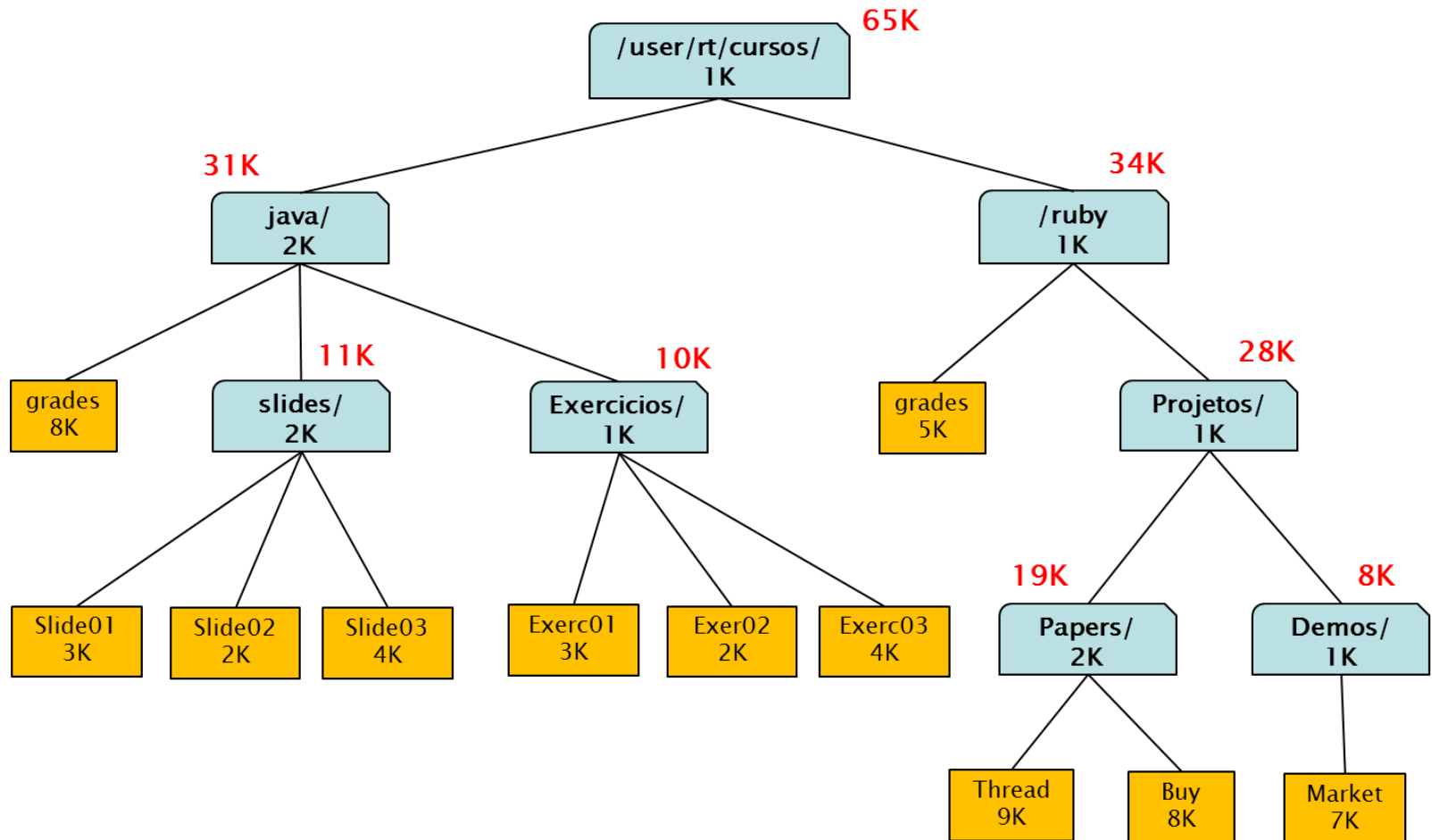


Aplicação travessia postorder



Exercício

- Escrever um código Java para retornar o espaço total de bytes armazenados por um sistema de arquivos.



FIM

