Rappel - Limites

R. Absil

3 octobre 2017

Ce document rappelle, voire introduit, aux étudiants la notion de *limite*, comment calculer la milite d'une fonction si elle existe, comment déterminer cette existence *a priori*, etc.

Notez que ce document est sensiblement plus verbeux qu'un rappel formel de concepts, dans la mesure où le public des étudiants à l'ESI est très hétérogène et que certains étudiants n'ont jamais abordé ce concept. Aussi, une partie significative de ce document est rédigée dans le but de faciliter la compréhension de ce concept important pour l'étudiant qui n'y serait pas familier.

Ainsi, la Section 1 introduit le concept de limite d'un point de vue intuitif, tant en termes de concept théorique que de définitions précises. Chacun des points introduits est adressé plus précisément dans les sections ultérieures. La Section 2 définit formellement la notion de limite ainsi que les concepts associés. Finalement, les Sections 3 et 4 se consacrent à la partie calculatoire des limites, plus technique.

Notez que ce document est largement inspiré du chapitre 4 du manuel du secondaire CQFD, par A. Van Eerdenbrugghe et M. Annoye et édité chez De Boeck [1].

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Notion de limite **4**

2.1 Limite à gauche et à droite 9

2.2 Limites des fonctions élémentaires 10

3 Somme, différence, produit et quotient **12**

4 Calcul de limites **14**

4.1 Limites de polynômes et quotients de polynômes 14

4.2 Limites de binômes 17

4.3 Règle de l'Hospital 18

4.4 Théorème du sandwich 19

5 Conclusion **20**

Références **20**

1 Introduction

Il n'est pas si difficile d'avoir une idée intuitive de ce que signifie le concept de limite, en particulier ce que veut dire « tendre vers une limite ». Le contenu d'un verre d'eau tend de plus en plus vers zéro lorsque l'on en boit itérativement chaque fois la moitié, la température d'un bol de soupe brûlant tend de plus en plus vers celle de la pièce au fil du temps, le périmètre d'un polygone inscrit à un cercle tend de plus en plus de la circonférence de ce dernier lorsque le nombre de ses côtés augmente, etc.

Ces concepts sont introduits pendant la période du XVII^{e} et XVIII^{e} siècle, par les mathématiciens Newton et Leibniz, notamment à l'aide du concept des « infinitésimaux », des quantités « infiniment petites », initialement présenté par Berkeley, un évêque irlandais du XVII^{e} siècle. Bien que peu formels du point de vue des mathématiques modernes, ces premiers travaux sont le témoin d'une intuition claire du concept de limite.

Ce n'est que dans le courant du XIX^{e} siècle que ce concept est raffiné à la fois par les mathématiciens Cauchy et Weierstrass, qui définissent rigoureusement la notion de limite. Le concept d'infinitésimaux est finalement abandonné.

Illustrons ce concept par un premier exemple.

Exemple 1. Supposons que trois moles d'azote sont contenues dans une bonbonne de $0.5m^3$ à une température de 27°C. La bonbonne est ensuite ouverte et le gaz se répand dans la pièce.

D'après la loi des gaz parfaits [1], on sait que la pression P d'un gaz peut être déterminée par

$$P = \frac{nRT}{V},$$

où n es le nombre de moles du gaz considéré, T la température en kelvins et R est la constante des gaz parfaits (égale à $8.315J \cdot \text{mol}^{-1} \cdot K^{-1}$).

1. Pour des raisons de simplification, on considère que cette loi est applicable ici.

Au vu de cela, comme 27°C = 300.15°K, la pression de l'azote dans la bouteille est de

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 \cdot 8.315 \cdot 300.15}{0.5} \\ &= 14974,4835 \end{aligned}$$

pascals.

Dans une pièce de dimensions arbitraire, cette pression peut être exprimée en fonction du volume V de la pièce, sous la forme

$$\begin{aligned} P(V) &= \frac{3 \cdot 8.315 \cdot 300.15}{V}, \\ &= \frac{7487.24175}{V}, \end{aligned}$$

dont le graphe est illustré à la Figure 1.

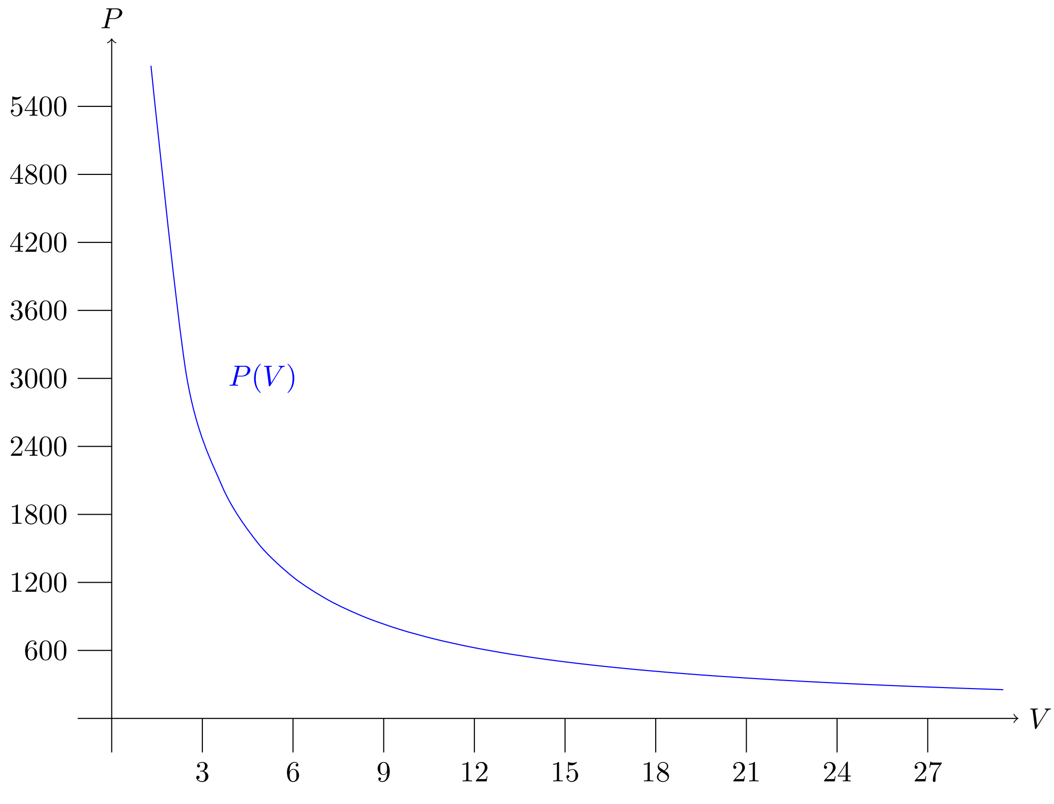


FIGURE 1 – Illustration de la pression d'un gaz en fonction du volume

On remarque que dans un volume plus grand, la pression sera plus faible (car on divise par un nombre plus grand). Ceci correspond à notre intuition physique, si le gaz possède plus de place pour s'étendre, il « pousse moins » sur les parois de la pièce. On voit également que la pression du gaz « tend vers zéro », tout en restant positive, ce qui signifie, en plus de l'observation précédente, qu'il ne sera jamais possible d'obtenir une pression nulle.

Ainsi, on dit que l'image de P « tend vers » zéro quand V tend vers $+\infty$.

Pour se rendre compte de manière systématique que l'image de P tend vers zéro quand V tend vers $+\infty$, on peut également extraire de P une suite de nombres de plus en plus grands (par ex., 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, etc.), et se rendre compte que l'image des éléments de cette suite tend vers $+\infty$. Dans ce cas, de tels tableaux de valeurs vont directement amener à la conclusion précédente. Évidemment, la pertinence de cette conclusion n'est garantie que si le résultat est valide *quelle que soit* la suite considérée.

Néanmoins, cette idée « d'extraction » ne fonctionne pas dans tous las cas, comme illustré dans le cas suivant, où certaines suites ne vont pas mener à la conclusion précédente.

Exemple 2. Soit $f(x) = x + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Examinons l'image de f quand x prend des valeurs de plus en plus proche de zéro. Pour cela, construisons un tableau de valeurs, en donnant à x des valeurs se rapprochant de zéro, côté négatif ou positif, comme illustré à la Table 1.

$x > 0$		$x < 0$	
x	$x + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$	x	$x + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
1	1.998 497	-1	0.001 502
0.1	0.953 405	-0.1	0.753 405
0.01	0.706 655	-0.01	0.686 655
0.001	$-0.145\,209$	-0.001	$-0.147\,209$
0.000 1	$-0.103\,153$	$-0.000\,1$	$-0.103\,353$
0.000, 01	$-0.511\,052$	$-0.000, 01$	$-0.511, 072$
0.000 001	$-0.606\,631$	$-0.000\,001$	$-0.606\,633$
...		...	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0^+	?	0^-	?

TABLE 1 – Tableau de valeurs de f quand x « tend » vers zéro

Au vu de ces valeurs, il semblerait que l'on ne puisse pas conclure en affirmant que f tende vers une valeur particulière quand x tend vers zéro. Cette observation est confirmée par le graphe de cette fonction, illustré [2] à la Figure 2.

2 Notion de limite

Comme l'on a vu dans la section précédente, bien que je concept de limite soit relativement intuitif à comprendre, il est nécessaire de le définir formellement afin d'éviter des comportements étranges lors de leur caractérisation, ainsi que des raisonnements erronés.

2. Notez que ce graphe est entaché d'erreurs numériques (les images sont tronquées et peu précises), conséquence de ce « problème » en zéro et de la manière dont une fonction est tracée sur un ordinateur. À ce titre, la fonction n'a pas pu être tracée sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

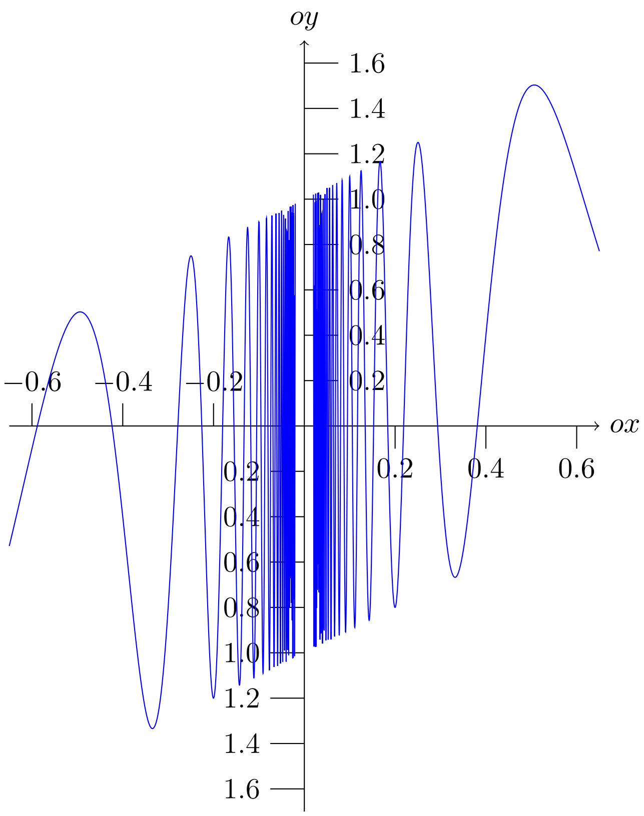


FIGURE 2 – Graphe de f entre $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

Considérons, par exemple, la fonction $f(x) = 3 + 2(x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$, non définie en 1.

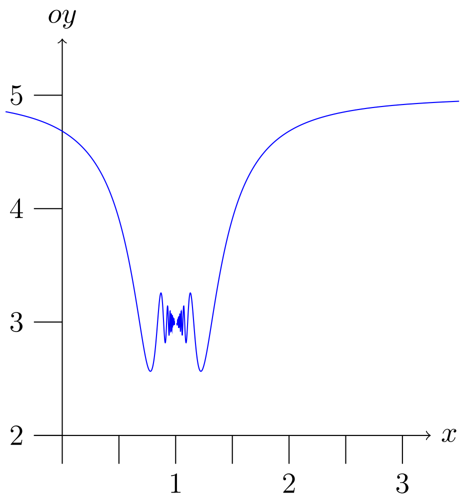


FIGURE 3 – Graphe de $3 + 2(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$

L'intuition que l'on a du concept de limite, appuyé par le graphe de cette fonction, nous pousse à dire que l'image de f tend vers 3 quand x tend vers un. Une autre manière, plus formelle que ce qui est décrit dans l'introduction, de formuler cette intuition est de dire « si je suis suffisamment proche de un, la distance entre 3 et $f(x)$ est contrôlée (et petite) ».

On peut par exemple se poser la question concrète suivante : « Si l'on veut que la distance entre $f(x)$ et 3 soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$, quelle doit être la distance entre x et 1 ? ».

Répondre à cette question demande de trouver une quantité δ telle que si $|x-1| < \delta$ (x est suffisamment proche de 1), alors $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$ (la distance entre $f(x)$ et 3 est contrôlée).

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= \left|2(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \\ &= 2 \cdot |x-1| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \\ &< 2|x-1|. \end{aligned}$$

On remarque $2|x-1| < \frac{1}{100}$ si $|x-1| < \frac{1}{200}$. Dès lors, en prenant $\delta = \frac{1}{200}$, on a

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < 2|x-1| < \frac{1}{100}.$$

À l'évidence, afin d'avoir un concept pertinent, on voudrait que le concept de limite soit indépendant de la distance entre $f(x)$ et la valeur qui nous intéresse. En l'occurrence, on souhaite que quel que soit l'éloignement entre $f(x)$ et la valeur considérée, on puisse choisir un δ qui place $f(x)$ en deçà de cet éloignement.

On peut dès lors définir formellement le concept de limite comme suit.

Définition 1. *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ et a un point adhérent au domaine de f, on dit que f* tend vers *L* quand *x* tend vers *a quand*

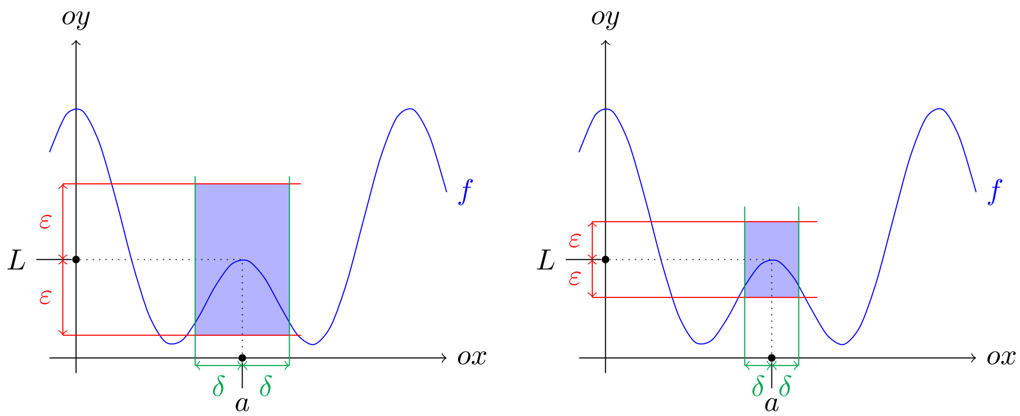
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom(f), |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si tel est le cas, on note cela

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Par « adhérent », on entend le fait qu'entre le domaine de f et a, il n'y a « pas de trous ». En effet, si tel était le cas, on ne pourrait pas s'approcher de a depuis le domaine de f.

Cette définition[3] correspond à l'approche ci-dessus. Notons qu'au vu de l'ordre des quantificateurs au sein de cette formule, il est probable que δ dépende de la valeur de ε, comme illustré à la Figure 4.



(a) ε « assez grand » (b) ε « assez petit »

FIGURE 4 – Illustration de la Définition 1.

Sur cette figure, $|f(x) - L|$ est caractérisé par l'espace entre les deux lignes horizontales rouges déterminées par ε, et $|x - a|$ par l'espace entre les deux lignes vertes relatives à δ.

On constate que si l'on prend ε « assez grand », il est possible de prendre un δ plus grand. En effet, si l'on dispose d'un plus grand espace sur les coordonnées du graphe de f, on peut s'éloigner plus fortement de a sur les abscisses. *A contrario*, si ε est plus petit, l'éloignement δ sur l'axe des x est plus restreint.

Il reste deux cas possibles dans le calcul de limite : celui où la limite en a est infinie, et celui où on cherche à calculer la limite d'une fonction « à l'infini », similairement au cas de convergence des suites et des séries.

3. Il est très probable que la compréhension profonde de cette définition, voire simplement sa manipulation, ne fasse pas partie de votre cours. Elle est donnée ici à titre d'exemple. Cette remarque est également valable pour les définitions quantifiées ultérieures de cette section.

On peut déduire la définition de limite infinie en un point de la Définition 1 de la manière suivante.

Définition 2. *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et a un point adhérent au domaine de f, on dit que f* tend vers $+\infty$ quand x tend vers a *quand*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom(f), |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Si tel est le cas, on note cela

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

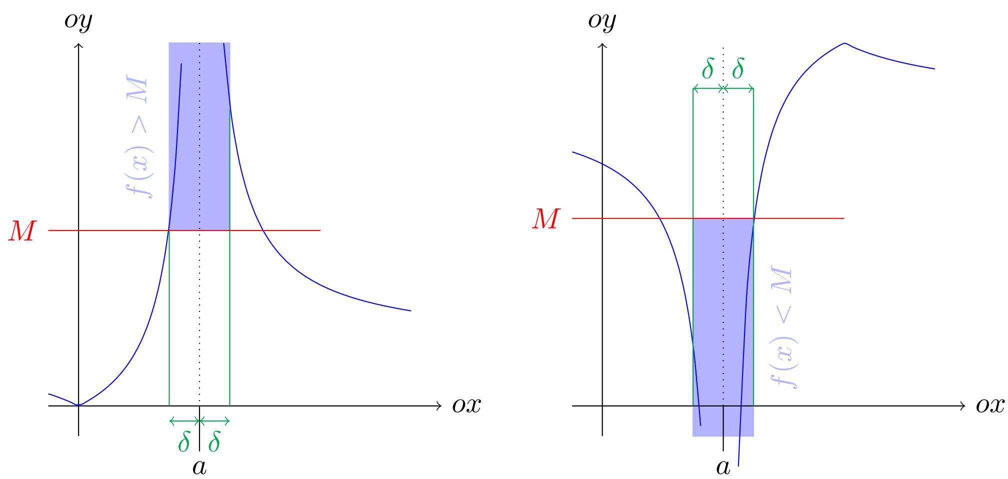
Définition 3. *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et a un point adhérent au domaine de f, on dit que f* tend vers $-\infty$ quand x tend vers a *quand*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom(f), |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Si tel est le cas, on note cela

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Ces situations sont illustrées à la Figure 5.



(a) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

FIGURE 5 – Limite infinie d'une fonction en un point

Sur la Figure 5(a), étant donné M fixé, on a choisi un δ de tel manière que dans un intervalle de δ autour de a, on a bien $f(x) > M$. Cette observation peut être aisément adaptée sur la figure de droite.

Similairement, on peut déduire la définition de limite en l'infini de la Définition 1 de la manière suivante.

Définition 4. *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $dom(f)$ n'est pas majoré et $L \in \mathbb{R}$, on dit que f* tend vers L quand x tend vers $+\infty$ *quand*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall x \in dom(f), x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si tel est le cas, on note cela

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Définition 5. *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que dom(f) n'est pas majoré et $L \in \mathbb{R}$, on dit que f* tend vers L quand x tend vers $+\infty$ *quand*

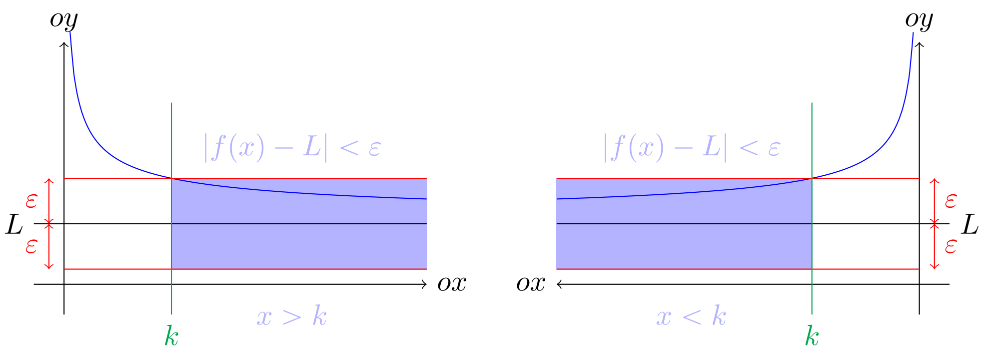
$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall x \in dom(f), x < k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si tel est le cas, on note cela

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

On remarque que ces définitions sont très similaires à celles liées à la convergence de suites. En réalité, la seule différence entre cette définition et celle de la convergence de suite est que l'ensemble de départ dans le cas présent est $\mathbb{R}$, alors que, dans le cas des suites, on travaille avec les naturels.

Ces définitions sont illustrées à la Figure 6.



(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

FIGURE 6 – Limite en l'infini d'une fonction

Sur la Figure 6(a), étant donne ε fixé, on a choisi un k tel que quel que soit $x > k$, $|f(x) - L| < \varepsilon$ (la fonction est contenue dans le rectangle bleuté). On peut adapter cette observation sur la figure de droite.

2.1 Limite à gauche et à droite

On remarque que, parfois, le domaine des fonctions n'est pas l'entièreté de $\mathbb{R}$. Dès lors, dans ce cas, il n'est pas possible de « s'approcher » d'un point a par des valeurs plus grandes *et* plus petites.

En conséquence, s'il n'est possible de s'approcher de a que par un seul côté (soit des valeurs plus grandes, soit des valeurs plus petites), on caractérise la limite comme « la limite à gauche » de f en a (on s'approche par des valeurs plus petites que a), ou la « la limite à gauche » de f en a (on s'approche par des valeurs plus grandes que a).

On se permet donc de poser la notation suivante.

Définition 6. *Soit* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *et* a *un point adhérant au domaine de* f*, on dit que* f tend vers L quand x tend vers a *quand*

$$\begin{aligned}
&\textit{soit } \lim_{x \to a^+} f(x) = L && (\textit{limite à droite}),\\
&\textit{soit } \lim_{x \to a^-} f(x) = L && (\textit{limite à gauche}),\\
&\textit{soit } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.
\end{aligned}$$

Si une seule des propositions ci-dessus est fausse, la limite de f *en* a n'existe pas.

Sur base de cette définition, on constate que la limite en un point d'une fonction est *unique*, et qu'en particulier, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

Notons que dans le cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, on note simplement $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemple 3. Soient les calculs de limites suivants.

— $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin(x) = 0$,

— $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$,

— $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}\cdot$

Remarque 1. Au vu des notations ci-dessus, on ne peut à l'évidence calculer la limite qu'en un *unique point* à la fois. Néanmoins, par abus de langage, on notera $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ pour indiquer que l'on cherche la limite en l'infini de f. Il faut alors distinguer le cas $+\infty$ du cas $-\infty$. Ainsi, si l'on note $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, cela signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. *A contrario*, si l'on note $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, cela signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$.

Cette remarque est également valable dans le cas de limites d'une fonction en un point a, où lorsque l'on indique $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b^{\pm}$, on signifie que lorsque l'on s'approche de a par des valeurs plus grandes (resp. plus petites) que a, on s'approche de b par des valeurs plus grandes que b (resp. plus petites).

2.2 Limites des fonctions élémentaires

Sur base des Définitions 1 à 5, on peut calculer relativement facilement les limites des fonctions élémentaires. Dans les calculs suivants, a est un réel quelconque, sauf mention explicite.

x : On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} x &= a,\\
\lim_{x \to \pm\infty} x &= \pm\infty.
\end{aligned}$$

x^2 : On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} x^2 &= a^2, \\ \lim_{x\to\pm\infty} x^2 &= +\infty. \end{aligned}$$

x^3 : On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} x^3 &= a^3, \\ \lim_{x\to\pm\infty} x^3 &= \pm\infty. \end{aligned}$$

$|x|$: On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} |x| &= |a|, \\ \lim_{x\to\pm\infty} |x| &= +\infty. \end{aligned}$$

$\sqrt{x}$: On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \sqrt{x} &= \sqrt{a}, && \text{avec } a \neq 0, \\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} &= 0^+, \\ \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x} &= \pm\infty. \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{x}$: On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{a}, \\ \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x} &= \pm\infty. \end{aligned}$$

$\frac{1}{x}$: On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{1}{x} &= \frac{1}{a}, && \text{avec } a \neq 0, \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty, \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty, \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} &= \pm\infty. \end{aligned}$$

$\sin(x)$: On a

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a), && , \\ &\lim_{x \to \pm\infty} \sin(x) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

$\cos(x)$: On a

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a), && , \\ &\lim_{x \to \pm\infty} \cos(x) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

$\tan(x)$: On a

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \tan(x) = \tan(a), && \text{avec } a \neq k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \\ &\lim_{x \to k\pi^+} \tan(x) = -\infty, && \text{avec } k \in \mathbb{Z}_0, \\ &\lim_{x \to k\pi^-} \tan(x) = +\infty, && \text{avec } k \in \mathbb{Z}_0, \\ &\lim_{x \to \pm\infty} \tan(x), \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

3 Somme, différence, produit et quotient

Souvent, les fonctions rencontrées lors d'un calcul de limite ne sont pas élémentaires, et le calcul de la limite en un point n'est pas immédiat. Ainsi, il est souvent nécessaire de décomposer une fonction complexe en fonctions plus élémentaires, pour lesquelles la valeur de la limite en un point est connu, ou facile à calculer.

Ainsi, on essaie régulièrement de décomposer une fonction sur des opérations de somme, de différence, de produit et de quotient.

Dans la propriétés suivante, f et g sont deux fonctions réelles telles que $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ et $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ existent, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = \pm\infty$.

Cette propriété et tables suivantes décrivent comment calculer la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient. Dans ces tableaux, « CI » indique un *cas d'indétermination*,c'est-à-dire un cas où l'on ne peut pas décider en l'état de la valeur de la limite ou de sa simple existence. Ces cas seront traités plus tard.

Propriété 7. *On a*

$$\lim_{x\to\alpha}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x),$$
$$\lim_{x\to\alpha}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x),$$
$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}.$$

$\lim\limits_{x\to\alpha}\Big(f(x)+g(x)\Big)$		$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$		
		$-\infty$	L_1	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	CI
	L_2	$-\infty$	L_1+L_2	$+\infty$
	$+\infty$	CI	$+\infty$	$+\infty$

Table 2 – Limite d'une somme

Sur la Table 2, on remarque que les seuls cas d'indétermination dans le cas du calcul de la limite d'une somme sont de type $(+\infty)+(-\infty)$ ou $(-\infty)+(+\infty)$. La limite d'une différence se traite de la même manière et peut être déduite de cette même table.

$\lim\limits_{x\to\alpha}\Big(f(x)+g(x)\Big)$		$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$				
		$-\infty$	$L_1<0$	0	$L_1>0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	CI	$-\infty$	$-\infty$
	$L_2<0$	$+\infty$	$L_1\cdot L_2$	0	$L_1\cdot L_2$	$+\infty$
	0	CI	0	0	0	CI
	$L_2>0$	$-\infty$	$L_1\cdot L_2$	0	$L_1\cdot L_2$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	CI	$+\infty$	$+\infty$

Table 3 – Limite d'un produit

Sur la Table 3, on remarque que les cas d'indéterminations sont de type $\pm\infty\cdot 0$ ou $0\cdot\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$		$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$				
		$-\infty$	$L_1<0$	0	$L_1>0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$-\infty$	CI	0	0	0	CI
	$L_2<0$	$+\infty$	$\frac{L_1}{L_2}$	0	$\frac{L_1}{L_2}$	$+\infty$
	0	$\pm\infty$ ou /	$\pm\infty$ ou /	CI	$\pm\infty$ ou /	$\pm\infty$ ou /
	$L_2>0$	$-\infty$	$\frac{L_1}{L_2}$	0	$\frac{L_1}{L_2}$	$+\infty$
	$+\infty$	CI	0	0	0	CI

Table 4 – Limite d'un produit

Sur la Table 4, les cinq cas d'indétermination sont de type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\cdot$ Par ailleurs, dans les cas où une cellule mentionne $\pm\infty$ ou /, la limite est égale à $+\infty$ ou $-\infty$, *si* elle existe.

Quel que soit le cas dans chacune de ces tables où un cas d'indétermination est annoncé, ou qu'on ne puisse pas décider de la valeur ou de l'existence de la limite, des calculs supplémentaires sont nécessaires. Souvent, utiliser des artifices de calcul arithmétique (tels que multiplier et diviser par un même nombre), est suffisant, bien que parfois l'usage de théorèmes spécifiques soit nécessaire.

La section suivante est consacrée à la résolution de ces cas.

4 Calcul de limites

Cette section est dédiée aux calculs de limites de fonctions plus complexes que les fonctions élémentaires. Elle traite également à de nombreux endroits de diverses manières de lever les cas d'indéterminations pointés par les tables du calcul de limites de sommes, de produits et de quotients.

On note que dans le cas de fonctions continues, calculer la limite en un point a du domaine de la fonction revient à substituer la variable x par a et retourner le résultat obtenu. Par exemple,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 &= 3\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 1\\ &= 24 - 16 + 4 - 1\\ &= 11.\end{aligned}$$

À l'évidence, étant donné les cas d'indéterminations liés aux infinis et aux divisions et multiplications par zéro, on ne peut pas systématiquement procéder de la sorte, dans le cas de fonctions discontinues ou de calcul de limites à l'infini.

4.1 Limites de polynômes et quotients de polynômes

Les polynômes sont des fonctions très utilisées en mathématiques, notamment à cause de leur simplicité. En effet, leur domaine est l'entièreté de l'ensemble $\mathbb{R}$, elles sont continues et dérivables partout, faciles à intégrer, etc.

Au vu du début de cette section, calculer la limite d'un polynôme en un point est donc immédiat, par simple substitution. En revanche, calculer la limite d'un polynôme en l'infini l'est un peu moins. Ce calcul est détaillé par la propriété suivante.

Propriété 8. *Soit* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *un polynôme de degré* n*, on a*

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair et } a_n > 0, \\ -\infty & \text{si } n \text{ est pair et } a_n < 0, \\ \pm\infty & \text{si } n \text{ est impair et } a_n > 0, \\ \mp\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

À titre exceptionnel, la preuve de ce résultat est fourni ci-dessous, car les arguments qui y sont utilisés peuvent l'être dans d'autres cas similaires.

Démonstration. On a

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^n} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{x^{n-2}}{x^n} + \cdots + \frac{a_2}{a_n} \cdot \frac{x^2}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{x^1}{x^n} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right),$$

en mettant en évidence $a_n x^n$ dans l'expression de $P(x)$.

Dans le membre de droite de cette équation, on remarque que chacun des termes de la somme tend vers zéro quand x tend vers $\pm\infty$. En effet, chacun des facteurs $\frac{x^i}{x^n}$ peut être simplifiée par x^i, et le quotient $\frac{1}{x^{n-i}}$ tend vers zéro quand x tend vers $\pm\infty$.

Ainsi, le contenu de cette parenthèse tend vers $(1 + 0 + 0 + \cdots + 0)$ quand x tend vers $\pm\infty$, c'est-à-dire vers 1, et donc on en conclut que

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Ici, deux cas se présentent :

1. si n est pair, élever $\pm\infty$ à la puissance n résultera en $+\infty$ et le résultat prend donc directement le signe de a_n ;
2. si n est impair, le résultat de $\pm\infty$ à la puissance n aura le même signe que a_n. Ainsi, si $a_n > 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty$. Dans le cas où $a_n < 0$, on a $\lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \mp\infty$.

$\square$

Cette argumentation de « mise en évidence » est régulièrement utilisé en calcul de limites, elle a donc été présentée ici à titre d'exemple. Parfois, on l'appelle la « règle du plus haut degré », car c'est ce coefficient qui prévaut dans le calcul de la limite en l'infini du polynôme considéré.

Exemple 4. On a

— $\lim_{x \to \pm\infty} 7x^3 - 5x + 2 = \lim_{x \to \pm\infty} 7x^3 = 7 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$,

— $\lim_{x \to \pm\infty} -2x^5 + 3x^2 + 4 = \lim_{x \to \pm\infty} -2x^5 = -2 \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$,

— $\lim_{x \to \pm\infty} -5x^4 - 7x + 2x = \lim_{x \to \pm\infty} -5x^4 = -5 \cdot (+\infty) = -\infty$,

— $\lim_{x \to \pm\infty} 3x^2 + 2x + 1 = \lim_{x \to \pm\infty} 3x^2 = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Cette règle permet également de calculer très facilement la limite en l'infini d'un quotient de polynômes.

Propriété 9. *Soient* $P_1(x) = \sum_{x=0}^{n} a_i x^i$ *et* $P_2(x) = \sum_{x=0}^{m} b_i x^i$ *deux polynômes, on a*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} & \text{si } m < n, \\ 0^{\pm} & \text{si } m > n \text{ et } \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ 0^{\mp} & \text{si } m > n \text{ et } \frac{a_n}{b_m} < 0, \\ \frac{a_n}{b_m} \text{ si } n = m. \end{cases}$$

Exemple 5. On a

— $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+2x+1}{3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{-x} = \lim_{x\to\infty} -x = \mp\infty$,

— $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{-x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{x} = 0^{\mp}$,

— $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\pm}$.

À l'évidence, on ne peut utiliser de tels arguments dans le cas du calcul de la limite d'un quotient de polynômes en un point a. Ainsi, trois cas se présentent :

1. le dénominateur est non nul en a ;
2. le numérateur est non nul en a et le dénominateur est en a ;
3. le numérateur et le dénominateur sont nuls en a.

Si le dénominateur est non nul en a, comme les polynômes sont continus, il suffit de remplacer x par a dans l'expression du quotient pour trouver la valeur de la limite.

Exemple 6. On a

— $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-3} = \frac{4+4}{2-3} = -8$,

— $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{4x^2-2x-1} = \frac{3+3}{36-6-1} = \frac{9}{29}$.

Si le numérateur est non nul en a alors que le dénominateur l'est, le quotient n'est pas défini. Néanmoins, on peut déduire que la valeur de la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, si elle existe. Il faut alors déterminer le signe de l'infini en étudiant le signe du dénominateur avec des valeurs proches de a.

Exemple 7. Calculons $\lim_{x\to -3} \frac{2x-3}{x+3}$ et $\lim_{x\to -3} \frac{2x-5}{(x+3)^2}$. Dans les deux cas, en substituant x par -3, on obtient « $\frac{-11}{0}$ ».

Dans le cas $x-3$, le dénominateur est négatif à gauche de -3 et positif à droite. On a donc

$$\left.\begin{array}{lll} \lim_{x\to -3^+} \frac{2x-5}{x+3} & = \lim_{x\to -3^+} \frac{-11}{0^-} & = +\infty \\ \lim_{x\to -3^-} \frac{2x-5}{x+3} & = \lim_{x\to -3^-} \frac{-11}{0^+} & = -\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to -3^{\pm}} \frac{2x-5}{x+3} = \pm\infty.$$

Comme la valeur de la limite n'est pas la même dépendant du côté duquel on s'approche de -3, on en conclut que $\lim_{x\to -3} \frac{2x-5}{x+3}$ n'existe pas.

Dans le cas $(x-3)^2$, par contre, le dénominateur est positif à gauche comme à droite de -3. Par un raisonnement similaire à ci-dessus, on en conclut donc que $\lim_{x\to -3} \frac{2x-5}{x+3} = \frac{-11}{0^+} = -\infty$.

Enfin, dans le cas où à la fois le numérateur et le dénominateur sont nuls en a, on obtient une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ », qu'il faut lever. Une solution consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ (ce qui fonctionne, car ils s'annulent tous deux en a) et simplifier l'expression résultante par $(x-a)$. On obtient ainsi une nouvelle expression, elle-même un quotient de polynômes, sur laquelle on peut répéter le processus de calcul de limite comme précédemment.

Exemple 8. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} &= \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \\
&= \lim_{x\to -3} x-3 \\
&= -6
\end{aligned}$$

Ceci conclut la section dédiée au calcul de limites de polynômes et de quotients de polynômes.

4.2 Limites de binômes

Dans le cas de fonctions présentant des racines, il est souvent utile d'utiliser des artifices de calculs par l'intermédiaire des formules des produits remarquables de binômes conjugués. Ainsi, dans le cas de racines carrées, utiliser la formule

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

permet parfois de lever des indéterminations du type « $\infty - \infty$ ».

Exemple 9. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{2x^2+5x}\right) &= \text{« } (+\infty)-(+\infty) \text{ »}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{2x^2+5x}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{2x^2+5x}\right)}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{2x^2+5x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2-3x)-(2x^2+5x)}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{2x^2+5x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-8x}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{2x^2+5x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-8x}{x\left(\sqrt{2-\frac{3}{x}}+\sqrt{2+\frac{5}{x}}\right)}\\
&= \frac{-8}{2\sqrt{2}}\\
&= -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On remarque que mettre en évidence par x dès le départ dans le calcul de cette limite n'aurait pas permis de lever l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{2x^2+5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(\sqrt{2-\frac{3}{x}}-\sqrt{2-\frac{5}{x}}\right)\right)=\text{« } (+\infty)\cdot 0 \text{ »}.$$

4.3 Règle de l'Hospital

Certains cas d'indétermination de quotients ne peuvent être résolus par les astuces présentées précédemment. Si tel est le cas, la règle de l'Hospital [4] permet parfois de lever ces cas d'indétermination dans le cas où le numérateur et dénominateur des fonctions considérées sont dérivables aux points où l'on cherche à calculer la limite.

Elle s'énonce comme suit.

Propriété 10 (Règle de l'Hospital)**.** *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\text{« }\frac{0}{0}\text{ » } \textit{ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\text{« }\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{ »}$$

avec $g'(x)\neq 0$ autour de a, on a

$$\textit{si } \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \textit{ existe, alors } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Intuitivement, cette règle nous permet de « remplacer » des fonctions par leurs dérivées dans certains cas de quotients afin de lever des cas d'indétermination « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ».

4. Parfois, cette règle est appelée la règle de l'Hôpital, nommée d'après le mathématicien français Guillaume de l'Hôpital du XVII[e].

Exemple 10. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} && \text{par l'Hospital}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{1-\cos(x)} && \text{par l'Hospital}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)+4\sin(2x)}{\sin(x)} && \text{par l'Hospital}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+8\cos(2x)}{\cos(x)} && \text{par l'Hospital}\\
&= \frac{-2+8}{1}\\
&= 6
\end{aligned}$$

4.4 Théorème du sandwich

Le *théorème du sandwich*, parfois appelé *critère de comparaison* ou *théorème des gendarmes* permet, dans certains cas, de calculer la limite d'une fonction par encadrement de deux fonctions aux limites connues.

Le principal avantage de ce théorème est qu'il ne formule aucune hypothèse sur la fonction dont on cherche à calculer la limite, elles ne doivent pas avoir une écriture particulière (polynômes, quotients), ne doivent pas nécessairement être dérivables, etc.

Il est formulé comme suit.

Théorème 11 (Théorème du sandwich)**.** *Soient f, g, et h trois fonctions réelles telles que*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

aux alentours d'un « point[5] » α avec $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Exemple 11. Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.

On remarque que comme $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. De plus, on a $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$.

Dès lors, posons $g(x) = -\frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$, et appliquons le théorème du sandwich et concluons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

5. Ici, α peut être une valeur réelle ou $\pm\infty$.

5 Conclusion

Ce document a donc introduit le concept de milites, par des exemples er des définitions formelles. On y a notamment énuméré les limites de fonctions élémentaires, ainsi que diverses manières de calculer les limites de fonctions plus complètes, telles que les limites de polynômes, de quotients de polynômes, à l'aide d' binômes conjugués, de la règle de l'Hospital, du théorème du sandwich, etc.

Références

[1] A. V. Eerdenbrugghe and M. Annoye. *Cqfd Maths 5^{e} Manuel - 6 périodes semaine.* De Boeck Education, 2013.