Algèbre booléenne

Définition 1.2

Une tautologie *(resp.* antilogie *ou une* contradiction*) est une proposition toujours vraie (resp. fausse).*

Définition 1.3

La négation *d'une proposition p est notée $\neg p$, et se lit « non p ». Si p est vrai, $\neg p$ est faux, et inversement.*

Conjonction : P et Q $p \wedge q$

Disjonction : P ou Q $p \vee q$

Disjonction exclusive : Soit P, soit Q $p \veebar q$

Implication : Si P, alors Q $p \Rightarrow q$ *(VF-F)*

Équivalence : P si et seulement si Q

Définition 1.8 ▸ *Définition positive et négative de l'implication*

Soient p et q deux proposition, la proposition $p \Rightarrow q$ est équivalente à

$$\neg p \vee q$$

et à

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Définition 1.9

Soient p et q deux propositions, la contraposée *de $p \Rightarrow q$ est définie comme $\neg q \Rightarrow \neg p$. L'implication est équivalente à sa contraposée.*

Définition 1.10

Soient p et q deux propositions, la réciproque *de $p \Rightarrow q$ est définie comme $q \Rightarrow p$. L'implication* n'est pas équivalente *à sa réciproque.*

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Propriété 1.12 ▸ *Lois de De Morgan*

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

et

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Propriété 1.13

Soient p et q deux propositions, on a

$$(\neg(p \veebar q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Propriété 1.14

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Théorie des ensembles

Définition 2.1

Un ensemble *est une collection d'objets distincts. Chacun de ces objets est appelé* élément.

Notation 2.1. Soient S un ensemble et x un élément de S, on dit que x *appartient* à S, et on note cette relation $x \in S$.
Si x n'est pas un élément de S, on dit que x *n'appartient pas* à S, et on note cette relation $x \notin S$. Réciproquement, si x est un élément de S, on dit que S *comprend* x, noté $S \ni x$. Sinon, on dit que S ne comprend pas x, noté $S \not\ni x$.

Exemple 2.1. Soit M l'ensemble des mammifères. On a, entre autres, les propriétés suivantes :
- Humain $\in M$,
- $M \ni$ Chat,
- Canard $\notin M$.

Exemple 2.2. Soit *Saisons* l'ensemble des saisons en climat tempéré. On peut définir cet ensemble en extension comme

$$Saisons = \left\{ Printemps, \acute{E}t\acute{e}, Automne, Hiver \right\}.$$

De même, si l'on considère les saisons météorologiques [1] boréales [2], on a :

$$\begin{aligned} Printemps &= \{ Mars, Avril, Mai \}, \\ \acute{E}t\acute{e} &= \{ Juin, Juillet, Ao\hat{u}t \}, \\ Automne &= \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \\ Hiver &= \{ D\acute{e}cembre, Janvier, F\acute{e}vrier \}. \end{aligned}$$

Définition 2.2

Deux ensembles S_1 et S_2 sont dits égaux, *noté $S_1 = S_2$, s'ils comprennent les mêmes éléments.*

Inversement, si S_1 et S_2 ne comprennent pas les mêmes éléments, on dit que S_1 et S_2 sont *différents*, noté $S_1 \neq S_2$.

Exemple 2.3. Soient les ensembles suivants, et leurs définitions à l'exemple 2.2 :

$$\begin{aligned} Saisons &= \left\{ Printemps, \acute{E}t\acute{e}, Autonme, Hiver \right\}, \\ S_1 &= \left\{ \acute{E}t\acute{e}, Automne, Hiver, Printemps \right\}, \\ S_2 &= \left\{ Automne, \{ Mars, Avril, Mai \}, \acute{E}t\acute{e}, Hiver \right\}. \end{aligned}$$

On a $Saisons = S_1 = S_2$. Notez que dans S_2, $\{ Mars, Avril, Mai \} = Printemps$.

Sous-ensembles :

Définition 2.3

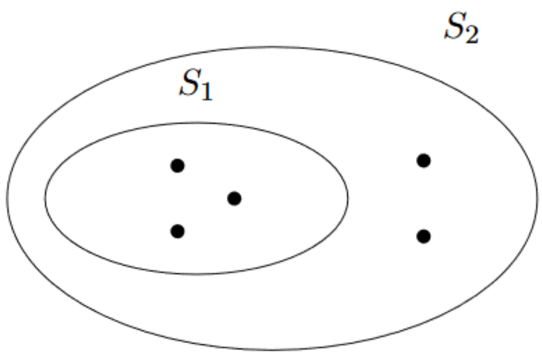
Soient S_1 et S_2 deux ensembles. On dit que S_1 est un sous-ensemble *de S_2, noté $S_1 \subseteq S_2$ si tous les éléments de S_1 appartiennent à S_2.*

Si $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *inclus* à S_2 ou que S_2 *contient* S_1. On peut aussi noter cette relation $S_2 \supseteq S_1$.

De plus, si $S_1 \neq S_2$ et $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *strictement inclus* à S_2, noté $S_1 \subset S_2$. Réciproquement, on dit que S_2 contient S_1 strictement (ou au sens strict), noté $S_2 \supset S_1$.

Exemple 2.5. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On a $A \subseteq B$: tous les élément de A sont des éléments de B. ◀

Ces concepts sont également illustrés avec un diagramme sur la figure 2.1, avec deux ensembles S_1 et S_2.



Propriété 2.4

Soient S_1 et S_2 deux ensembles. Si $S_1 \subseteq S_2$ et $S_2 \subseteq S_1$, alors $S_1 = S_2$.

$$
\begin{aligned}
Mars &\in Printemps,\\
Octobre &\notin Été,\\
Juin &\notin Saisons,\\
Printemps &\in Saisons,\\
\{\, Printemps \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Mars, Avril, Mai \,\} &\in Saisons,\\
\{\, \{\, Mars, Avril, Mai \,\} \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Novembre, Mars \,\} &\nsubseteq Printemps,\\
\{\, Hiver, Automne \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Hiver, Automne \,\} &\subset Saisons,\\
Saisons &\supset \Big\{ \{\, Septembre, Octobre, Novembre \,\},\\
&\qquad \{\, Mars, Avril, Mai \,\} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Cardinal :

Définition 2.5

Soit S un ensemble, le cardinal *de S, noté $|S|$, est le nombre d'éléments de S.*

Exemple 2.8. En reprenant les ensembles définis à l'exemple 2.2, on remarque que $|Saisons| = 4$ et $|Printemps| = |Été| = |Automne| = |Hiver| = 3$. ◀

Définition 2.6

*L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément.*

Cet ensemble est donc le seul ensemble de cardinal nul. En extension, on peut également le noter comme $\{\ \}$.

De plus, quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\varnothing \subseteq S$. Si S est non vide, on a $\varnothing \subset S$. L'ensemble vide est donc contenu au sens strict dans n'importe quel ensemble non vide.

Exemple 2.10. On peut définir les mammifères [4] en compréhension comme

$$\{\, x \mid x \text{ est un animal } \wedge x \text{ a des mamelles} \,\},$$

où le symbole « $\mid$ » se lit « tel que ». ◀

Exemple 2.11. Soit $S = \{\,1, 2, 3, 4, 5, 6\,\}$. On peut définir cet ensemble en compréhension comme $S = \{\, n \in \mathbb{N}_0 \mid n < 7 \,\}$. ◀

Similairement, on peut par exemple [5] définir l'ensemble vide en compréhension comme $\varnothing = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \neq x \,\}$ ou $\varnothing = \{\, x \mid x \text{ est une vache } \wedge x \text{ sait voler} \,\}$.

Parties d'un ensemble :

Définition 2.7

Soit S un ensemble, on définit les parties *de S, noté $\mathscr{P}(S)$, comme l'ensemble*

$$\mathscr{P}(S) = \{\, S' \mid S' \subseteq S \,\}.$$

En particulier, notez que quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\varnothing \in \mathscr{P}(S)$ et $S \in \mathscr{P}(S)$. De plus, on a $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\, \varnothing \,\}$. Pour rappel, $\varnothing \neq \{\, \varnothing \,\}$ (car $|\varnothing| = 0$ et $|\{\, \varnothing \,\}| = 1$).

Exemple 2.12. Soit $S = \{\, a, b, c \,\}$, on a

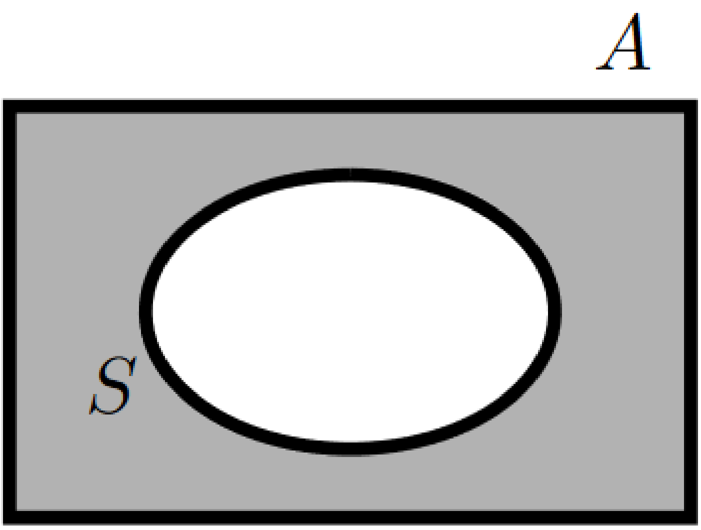
$$\mathscr{P}(S) = \{\, \varnothing, \{\, a \,\}, \{\, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, a, b \,\}, \{\, a, c \,\}, \{\, b, c \,\}, \{\, a, b, c \,\} \,\}.$$

Complémentaire :

Définition 2.8

Soient S et A deux ensembles, tels que $S \subseteq A$. On définit le complémentaire de S dans A, noté $\complement_A(S)$, comme

$$\complement_A(S) = \{\, x \in A \mid x \notin S \,\}.$$

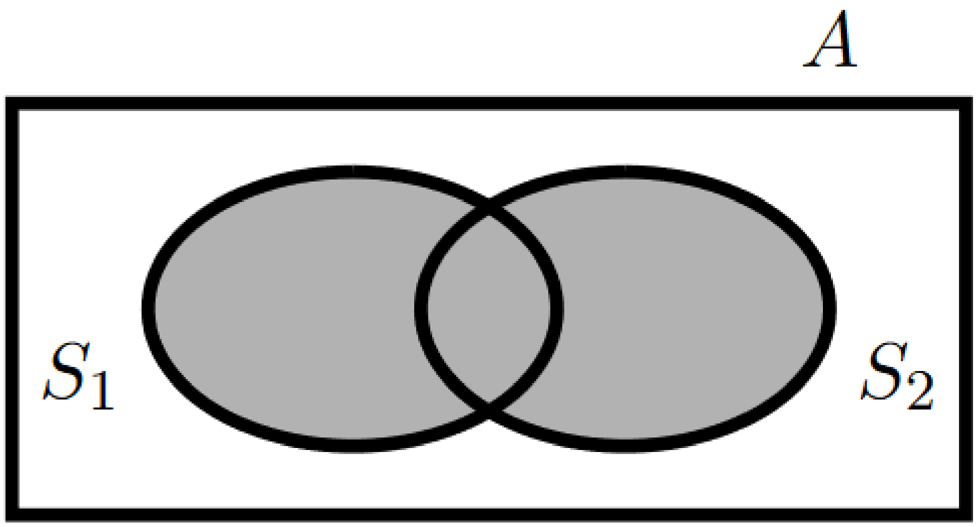


Union :

Définition 2.9

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on définit l'union de S_1 et S_2, notée $S_1 \cup S_2$, comme

$$S_1 \cup S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \}.$$

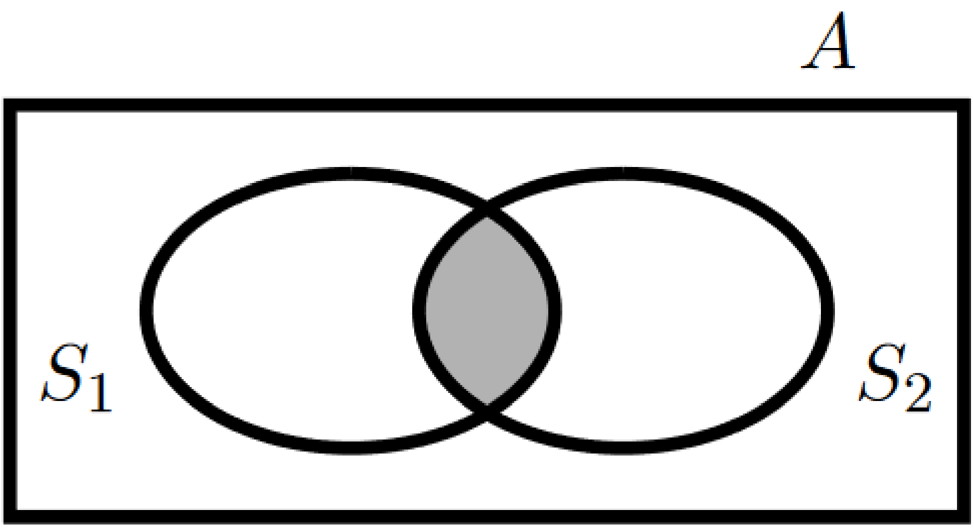


Intersection :

Définition 2.10

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, l'intersection de S_1 et S_2, notée $S_1 \cap S_2$, est définie comme

$$S_1 \cap S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \in S_2 \}.$$

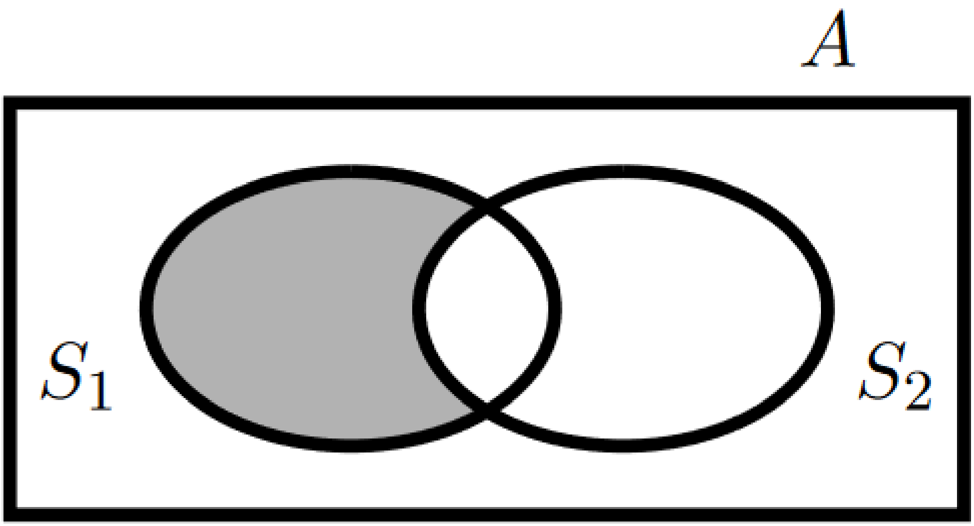


Différence :

Définition 2.11

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence entre S_1 et S_2, notée $S_1 \backslash S_2$, est définie comme

$$S_1 \backslash S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \notin S_2 \}.$$

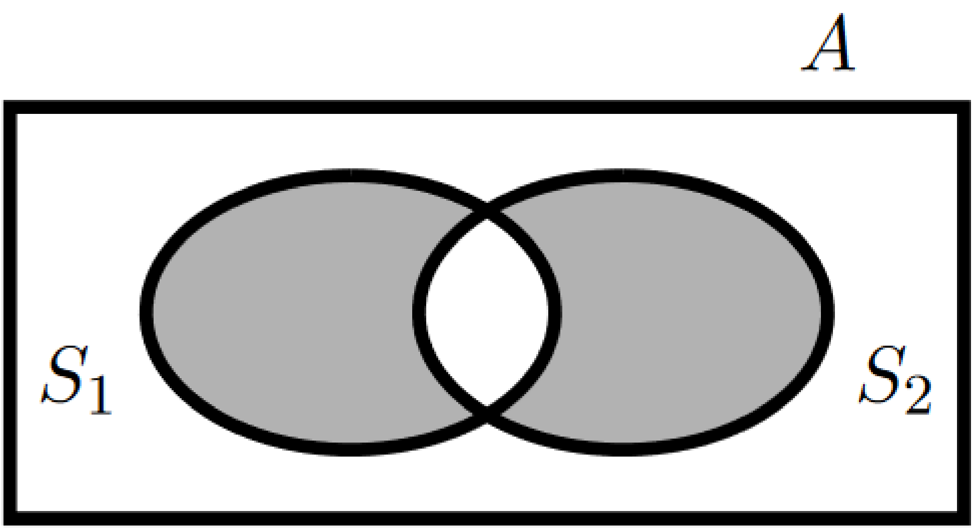


Différence symétrique :

Définition 2.12

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence symétrique entre S_1 et S_2, notée $S_1 \triangle S_2$ et lue « S_1 delta S_2 », est définie comme

$$\begin{aligned} S_1 \Delta S_2 &= \{ x \mid x \in S_1 \veebar x \in S_2 \} \\ &= (S_1 \cup S_2) \backslash (S_1 \cap S_2) \\ &= (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1) \end{aligned}$$



Couple et paire :

Définition 2.13

Un couple *est une séquence ordonnée de deux éléments. Une* paire *est un ensemble (non ordonné) de cardinal* 2.

Produit cartésien :

Définition 2.14

Soient S_1 *et* S_2 *deux ensembles, on définit le* produit cartésien *de* S_1 *et* S_2*, noté* $S_1 \times S_2$*, comme*

$$S_1 \times S_2 = \{ (x, y) \mid x \in S_1 \wedge y \in S_2 \} .$$

Exemple 2.15. Soient $S_1 = \{ a, b, c \}$ et $S_2 = \{ a, b \}$. On a

$$S_1 \times S_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b) \} .$$

Remarque 2.17. Remarquez que l'opérateur $\times$ n'est pas *commutatif*, c'est à dire que

$$S_1 \neq S_2 \Rightarrow (S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1),$$

Logique de prédicats

Définition 3.1

Un prédicat, *une* fonction propositionnelle *ou une* condition *est une expression dont la valeur de vérité (vraie ou fausse) dépend d'une ou plusieurs variables.*

Domaine de définition :

Définition 3.2

Soit P un prédicat, le domaine de définition *de P, noté* $\text{Dom}(P)$, *est l'ensemble sur lequel le prédicat peut être défini.*

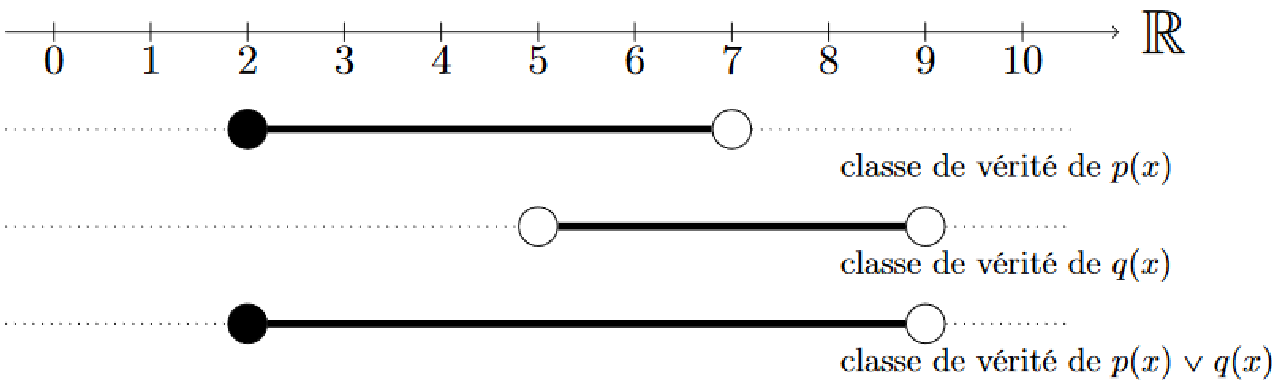
Classe de vérité :

Définition 3.3

Soit P un prédicat, la classe de vérité de P, notée $\mathscr{C}_V(P)$, est l'ensemble des éléments du domaine de définition qui vérifient P.

Exemple 3.3. Soient $p(x)$ et $q(x)$ deux prédicats définis comme

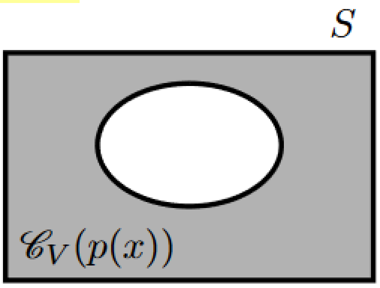
$$p(x) : 2 \leqslant x < 7,$$
$$q(x) : 5 < x < 9.$$



x	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \vee q(x)$
$]-\infty, 2[$	F	F	F
$[2, 5]$	V	F	V
$]5, 7[$	V	V	V
$[7, 9[$	F	V	V
$[9, +\infty[$	F	F	F

Complémentaire = Négation :

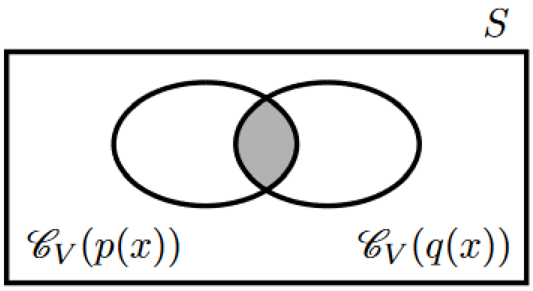
$$\mathscr{C}_V(\neg p(x)) = \complement_S\Big(\mathscr{C}_V(p(x))\Big)$$



En d'autres termes, la classe de vérité de la négation d'un prédicat p est égale au complémentaire de la classe de vérité de p.

Conjonction = Intersection :

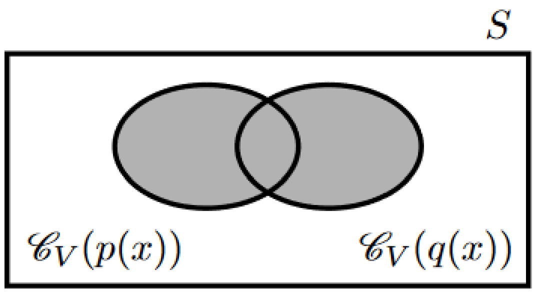
$$\mathscr{C}_V(p(x) \wedge q(x)) = \mathscr{C}_V(p(x)) \cap \mathscr{C}_V(q(x))$$



Autrement dit, la classe de vérité de la conjonction de deux prédicats est égale à l'intersection des classes de vérité de ces prédicats.

Disjonction = Union :

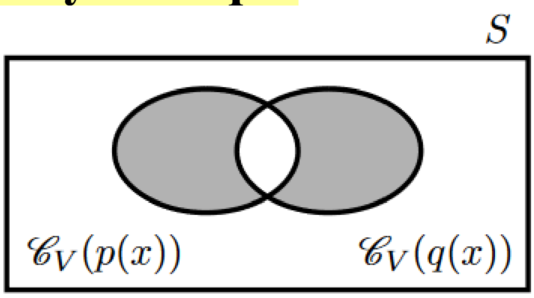
$$\mathscr{C}_V(p(x) \vee q(x)) = \mathscr{C}_V(p(x)) \cup \mathscr{C}_V(q(x))$$



Ceci signifie que la classe de vérité de la disjonction de deux prédicats est égale à l'union des classes de vérité de ces prédicats.

Disjonction exclusive = Différence symétrique :

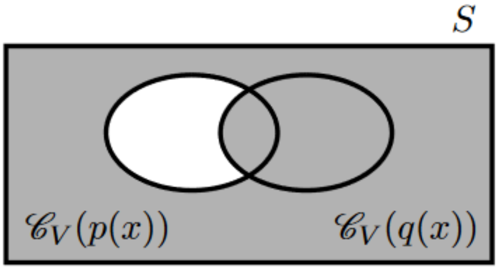
$$\mathscr{C}_V(p(x) \veebar q(x)) = \mathscr{C}_V(p(x)) \bigtriangleup \mathscr{C}_V(q(x))$$



En d'autres termes, la classe de vérité de la disjonction exclusive de deux prédicats est la différence symétrique entre les classes de vérité de ces prédicats.

Implication = Compl(Cv) Union Cv :

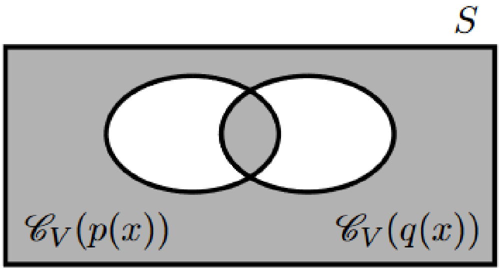
$$\mathscr{C}_V(p(x) \Rightarrow q(x)) = \complement_S\Big(\mathscr{C}_V(p(x))\Big) \cup \mathscr{C}_V(q(x))$$



Ceci signifie que la classe de vérité de l'implication d'un prédicat q par un prédicat p est égale à l'union entre le complémentaire de la classe de vérité de p et la classe de vérité de q. Ceci peut-être facilement déduit des relations précédentes via la définition positive de l'implication implication.

Équivalence = Compl(Différence symétrique) :

$$\mathscr{C}_V(p(x) \Leftrightarrow q(x)) = \complement_S\Big(\mathscr{C}_V(p(x)) \triangle \mathscr{C}_V(q(x))\Big)$$



Enfin, la classe de vérité de deux prédicats équivalents peut être construite comme le complémentaire de la différence symétrique entre les classes de vérité des deux prédicats. Ceci est normal, étant donné que deux prédicats sont équivalents s'ils ont la même valeur de vérité, et que la différence symétrique définit les éléments qui sont soit dans un ensemble, soit dans un autre.

Éléments de la théorie des graphes

Définition 4.1

Un graphe G non orienté *est un couple* (V, E) *tel que*

- V *est un ensemble fini non vide d'éléments appelés* sommets,
- E *est un ensemble fini de paires*[a] *de sommets de* V *appelées* arêtes.

a. Une paire est un ensemble de taille 2.

Définition 4.2

Soit $G = (V, E)$ *un graphe, on dit que*

- $|V|$ *est* l'ordre *de* G,
- $|E|$ *est* la taille *de* G.

Ordre = Nombre de sommets

Taille = Nombre d'arêtes

Adjacence = Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête

Voisinage = Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets adjacents à ce sommet

Degré = Taille du voisinage d'un sommet

Exemple 4.1. Sur la figure 4.1, on a $G = (V, E)$ avec

— $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
— $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

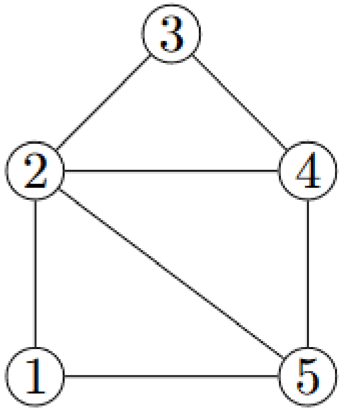


FIGURE 4.1 – Un graphe G non orienté

Sommet	Degré	Voisinage
1	2	$\{2, 5\}$
2	4	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	2	$\{2, 4\}$
4	3	$\{2, 3, 5\}$
5	3	$\{1, 2, 4\}$

TABLE 4.1 – Voisinages et degrés de la figure 4.1

Propriété 4.4

Soit $G = (V, E)$ un graphe de taille m, on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

(Propriété 4.4 = La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois la taille de ce graphe)
Car on compte 2 sommets par arête !

Matrice d'adjacence :

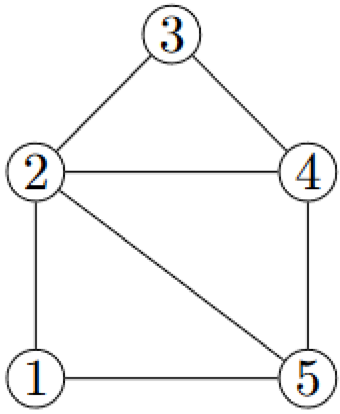
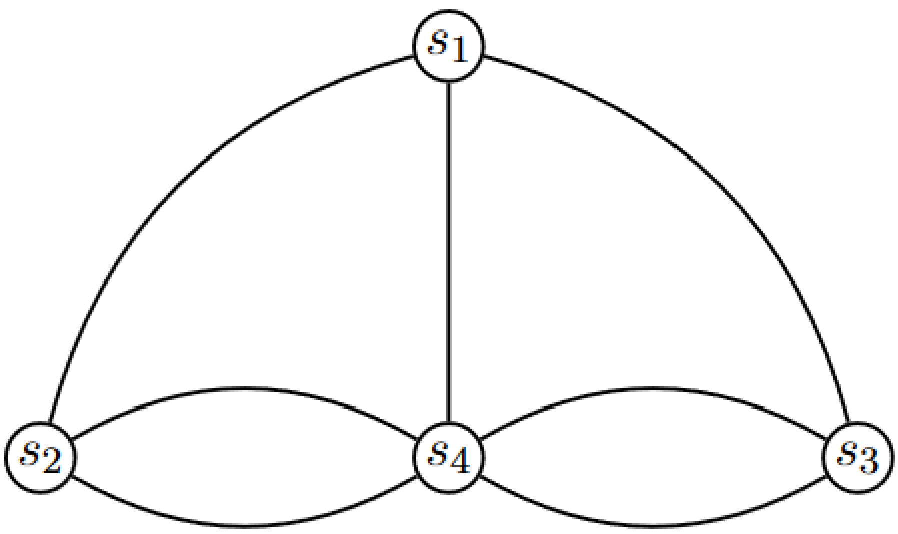


FIGURE 4.1 – Un graphe G non orienté

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Multigraphe :

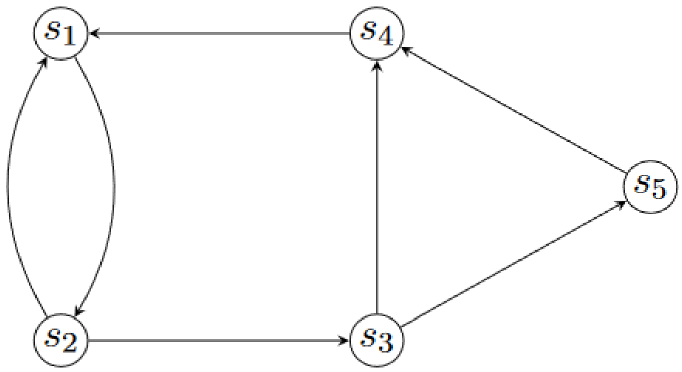
Un *multigraphe* est un graphe pouvant contenir des *boucles* et dans lequel deux sommets distincts peuvent être rejoints par *plusieurs arêtes*. Lorsque deux arêtes joignent la même paire de sommets, on les qualifie d'arêtes *parallèles*.



Graphe G

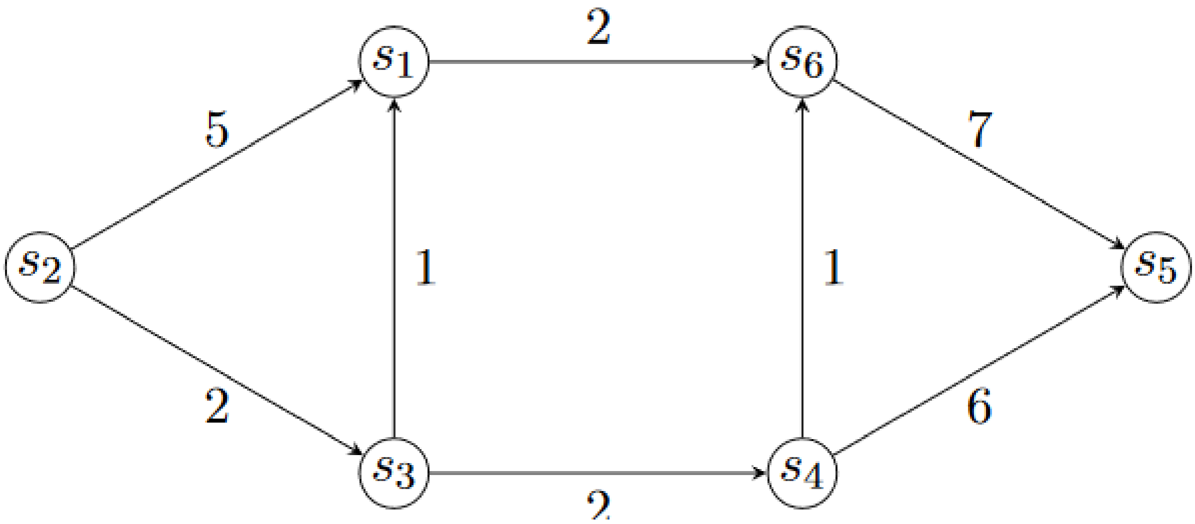
Graphe dirigé :

Les arêtes peuvent avoir une direction
La matrice d'adjacence n'est pas symétrique



Graphe étiqueté :

Les arêtes possèdent une valeur



Chemin :

Séquences de sommets joints deux à deux par des arêtes

Cycle :

Chemin où le premier et le dernier sommet est le même

Chemin (ou cycle) élémentaire :

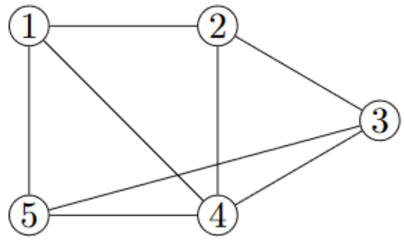
Tous les sommets du chemin (ou du cycle) sont différents

Graphe connexe :

Un graphe est connexe si on peut relier tous ses sommets par un chemin

Exemple 4.9. Sur le graphe de la figure 4.5, on remarque, entre autres, que

- $1-2-3-4$ est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1-2-4-1-2-4-1$ est un cycle non élémentaire de longueur 6,
- $4-5-1-4-2$ est un chemin non élémentaire de longueur 4,
- $1-2-4-5$ est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1-2-4-5-1$ est un cycle élémentaire de longueur 4,
- le graphe est connexe : il est possible de relier toute paire de sommets par un chemin (le chemin $1-2-3-4-5$ relie tous les sommets, par exemple).



◀

FIGURE 4.5 – Un exemple de graphe connexe

Chemin (ou cycle) eulérien :
Chemin (ou cycle) passant une unique fois par chaque arête du graphe
Un graphe contient un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2

Graphe eulérien :
Graphe qui contient un cycle eulérien
Un graphe est eulérien si et seulement si il est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair

Chemin (ou cycle) hamiltonien :
Chemin (ou cycle) élémentaire passant une unique fois par chaque arête du graphe

Graphe hamiltonien :
Graphe qui contient un cycle hamiltonien

Exemple 4.10. Soient les graphes G et H illustrés à la figure 4.6. On remarque que :

- G est hamiltonien, il contient un cycle (et donc un chemin) hamiltonien, par exemple $v_1 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$;
- G n'est pas eulérien : tous les sommets ne sont pas de degré pair (v_1 et v_4, par exemple) ;
- G contient un chemin eulérien : $v_1 - v_4 - v_2 - v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_3 - v_4$, on remarque aussi que le nombre de sommets de degré impair est 2 (v_1 et v_4) ;
- H est eulérien, il contient donc un cycle (et un chemin) eulérien, par exemple $v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_4 - v_3 - v_1$, on note également que ce graphe est connexe et que le degré de tous les sommets est pair ;
- H n'est pas hamiltonien : en effet, pour passer de la partie droite à la partie gauche du graphe et y revenir, il est nécessaire de passer deux fois par v_4, ce qui n'est pas permis.

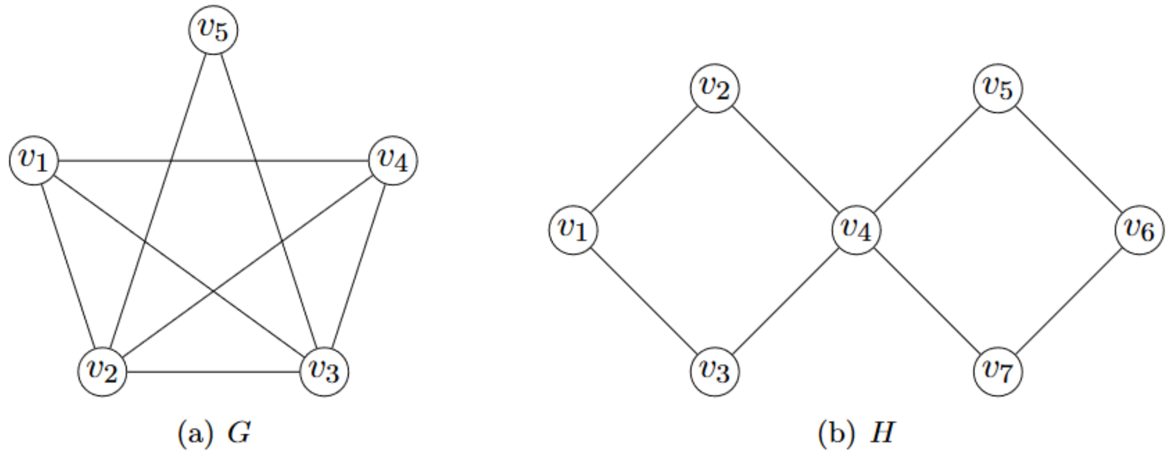


FIGURE 4.6 – Deux exemples de graphes G et H

Arbre :

Définition 4.12 ▸ [7]

Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geqslant 2$, on dit que G est un arbre *si l'une des propositions suivantes équivalentes est vérifiée :*

- *G est connexe et acyclique,*
- *G est connexe et a $n-1$ arêtes,*
- *G est acyclique et a $n-1$ arêtes,*
- *G est acyclique et ajouter une arête crée exactement un cycle,*
- *G est connexe et supprimer une arête brise la connexité de G,*
- *chaque paire de sommets de G est reliée par exactement un chemin.*

Exemple 4.11. La figure 4.7 illustre un arbre de racine r. On remarque que chacune des propositions de la définition 4.12 est vérifiée. ◀

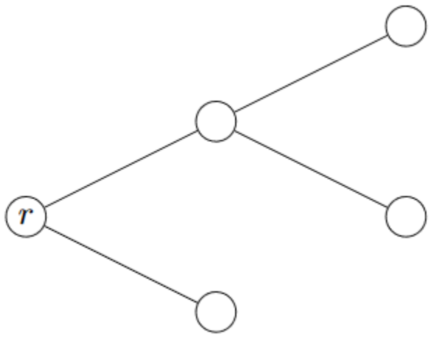


FIGURE 4.7 – Un exemple d'arbre de racine r

Distance :

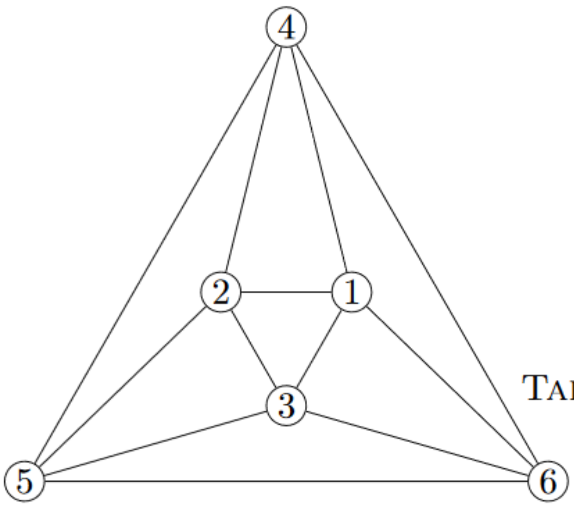
La distance entre deux sommets est la longueur du chemin le plus court entre ces deux sommets

Diamètre :

Distance la plus longue au sein d'un graphe

Exemple 4.12. Sur le graphe G de la figure 4.8, on remarque, entre autres, que

- G est connexe,
- $|1,1| = 0$,
- $|1,3| = 1$,
- $|1,5| = 2$, et il y a quatre plus courts chemins joignant les sommets 1 à 5 : $1-2-5$, $1-3-5$, $1-6-5$ et $1-4-5$.
- diamètre $D(G) = 2$



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	2	1
2	1	0	1	1	1	2
3	1	1	0	2	1	1
4	1	1	2	0	1	1
5	2	1	1	1	0	1
6	1	2	1	1	1	0

TABLE 4.4 – Matrice des distances de G

FIGURE 4.8 – Illustration du concept de distance

Coloration de graphe :

Définition 4.15

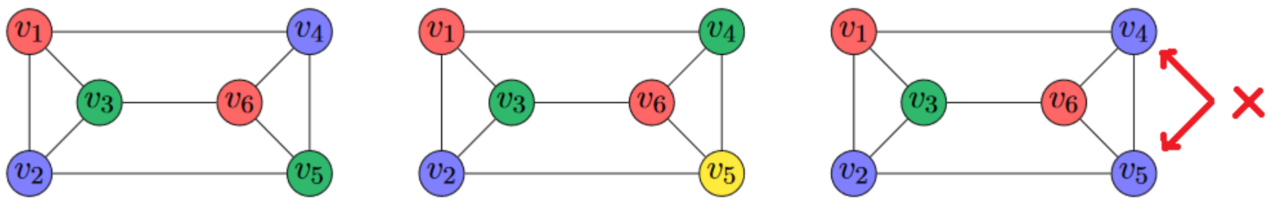
Une coloration de graphe est une assignation de couleurs à chacun de ses sommets telle que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur.

Nombre chromatique :

Définition 4.16

Le nombre chromatique *d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs utilisées au sein d'une coloration de G.*

Exemple



(a) Un graphe G colorié avec 3 couleurs

$\chi(G) = 3$

(b) Un graphe G colorié avec 4 couleurs

$\chi(G) = 4$

(c) Une assignation de couleurs qui n'est pas une coloration

Dénombrement

Règle du produit :

Théorème 5.1 ▸ *Règle du produit*

Supposez qu'une procédure soit constituée d'une séquence de deux tâches. Si il y a n_1 façons de réaliser la première tâche et n_2 façons de réaliser la deuxième, alors il y a $n_1 n_2$ façons de réaliser la procédure originale.

Exemple 5.2. Les chaises d'un auditoire sont étiquetées par une lettre majuscule de l'alphabet et un naturel compris entre 1 et 100. Quel est le plus grand nombre de chaises qui peuvent être étiquetées différemment de cette façon ?

Solution. La procédure d'étiquetage des chaises peut être séparée en deux tâches :

1. assigner une lettre majuscule de l'alphabet parmi les 26 lettres disponibles,
2. assigner l'un des 100 naturels disponibles.

La règle du produit affirme qu'il y a donc $26 \cdot 100$ façons d'étiqueter une chaise.

Exemple 5.3. Combien de plaques de voitures peuvent être conçues si chaque plaque est constituée d'une séquence de trois lettres majuscules, suivie d'un tiret et d'une séquence de trois chiffres décimaux ?

$$\underbrace{\_\;\;\_\;\;\_}_{\text{26 choix possibles pour chaque lettre}} \qquad \underbrace{\_\;\;\_\;\;\_}_{\text{10 choix possibles pour chaque chiffre}}$$

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$$

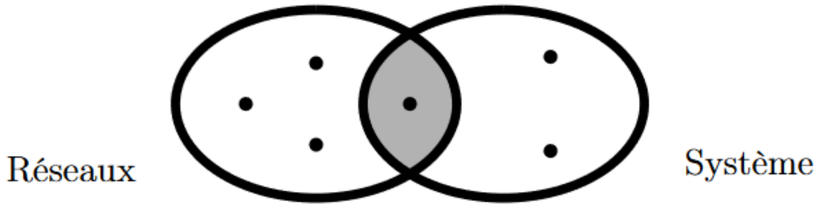
Principe d'inclusion-exclusion :

Théorème 5.2 ▸ *Principe d'inclusion-exclusion*

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on a

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Similairement au cas du produit, partons d'un problème simple : pour reformer la grille des sections « informatique : réseaux » et « informatique : systèmes », on réunit les professeurs donnant des cours dans ces deux sections. Combien de place faut-il prévoir ?



Sur cette figure, on remarque que bien qu'il y ait 4 professeurs de réseaux et 3 de systèmes, il ne faut pas prévoir $4+3$ places. En effet, il y a un des professeurs qui donne cours à la fois en réseaux et en systèmes. En conséquence, lorsque l'on fait $4+3$, on compte ce professeur deux fois[2]. La réponse est donnée par $4+3-1$, où 1 est le nombre de professeurs qui donnent cours à la fois en réseaux et en système.

Exemple 5.5. Chaque utilisateur d'un système possède un mot de passe, qui comporte de 6 à 8 caractères, où chaque caractère est soit une lettre majuscule, soit un chiffre. De plus, chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de mots de passe possible existe-t-il ?

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 = 2\,612\,282\,842\,880.$$

Px = (Lettres et Chiffres) - (Lettres sans chiffres)

Dès lors, on en conclut que $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360$.

Exemple 5.6. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 ?

Solution. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 100 qui sont divisibles par 4 ou par 6. On remarque que le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 est égal à $100 - |\mathcal{I}|$.

Notons $\mathcal{I}_4$ l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 4, et $\mathcal{I}_6$ l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 6. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que

Nombres divisibles par 4 et par 6 = (div par 4) + (div par 6) - (div par 4 et div par 6)

$$|\mathcal{I}| = |\mathcal{I}_4| + |\mathcal{I}_6| - |\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6|.$$

On remarque qu'il y a exactement 100 div $4 = 25$ nombres entiers inférieurs à 100 divisibles par 4, et 100 div $6 = 16$ nombres entiers divisibles par 6. Ces nombres caractérisent les cardinalités de respectivement $\mathcal{I}_4$ et $\mathcal{I}_6$.

On remarque que $\mathcal{I}_4$ et $\mathcal{I}_6$ ne sont pas disjoints : les nombres entiers qui sont à la fois dans $\mathcal{I}_4$ et dans $\mathcal{I}_6$ sont des entiers à la fois divisibles par 4 et par 6, c'est à dire des entiers divisibles par $PPCM\,(4,6) = 12$. Dès lors, on a $|\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6| = 100$ div $12 = 8$.

Dès lors, on sait que $|\mathcal{I}| = 25 + 16 - 8 = 33$. Dans la question originale, on demande les entiers qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6, c'est-à-dire les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont pas dans $|\mathcal{I}|$. On a $100 - 33 = 67$ tels entiers.

Exemple 5.7. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 » ?

$$\underline{1}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^7=128\text{ chaînes}} \qquad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^6=64\text{ chaînes}}\ \underline{0}\ \underline{0}$$

$$\underline{1}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^5=32\text{ chaînes}}\ \underline{0}\ \underline{0}$$

$$128+64-32 = 160$$

Règle de la division :

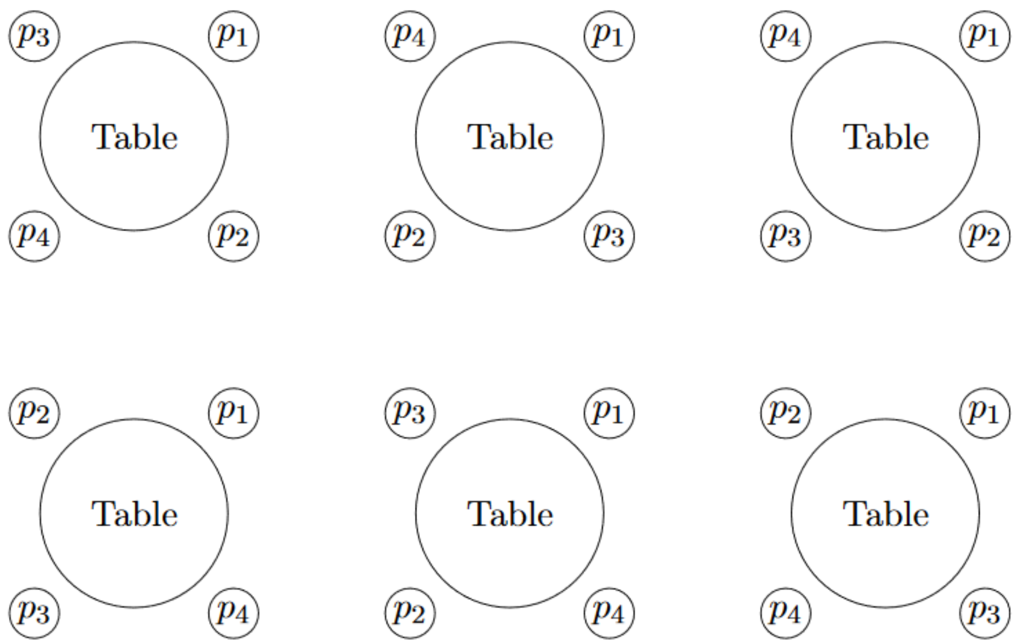
Théorème 5.3 ▸ *Règle de la division*

Si une tâche peut être effectuée de n façons, mais pour chaque façon w, exactement d de ces n façons sont équivalentes à w, alors il y a $\frac{n}{d}$ façons de réaliser la tâche originale.

Exemple 5.8. Combien de façons y a-t-il d'asseoir quatre personnes autour d'une table circulaire, où deux configurations sont considérées équivalentes quand chaque personne a le même voisin de droite et le même voisin de gauche ?

Par la règle du produit, il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons d'ordonner les quatre personnes autour de la table.

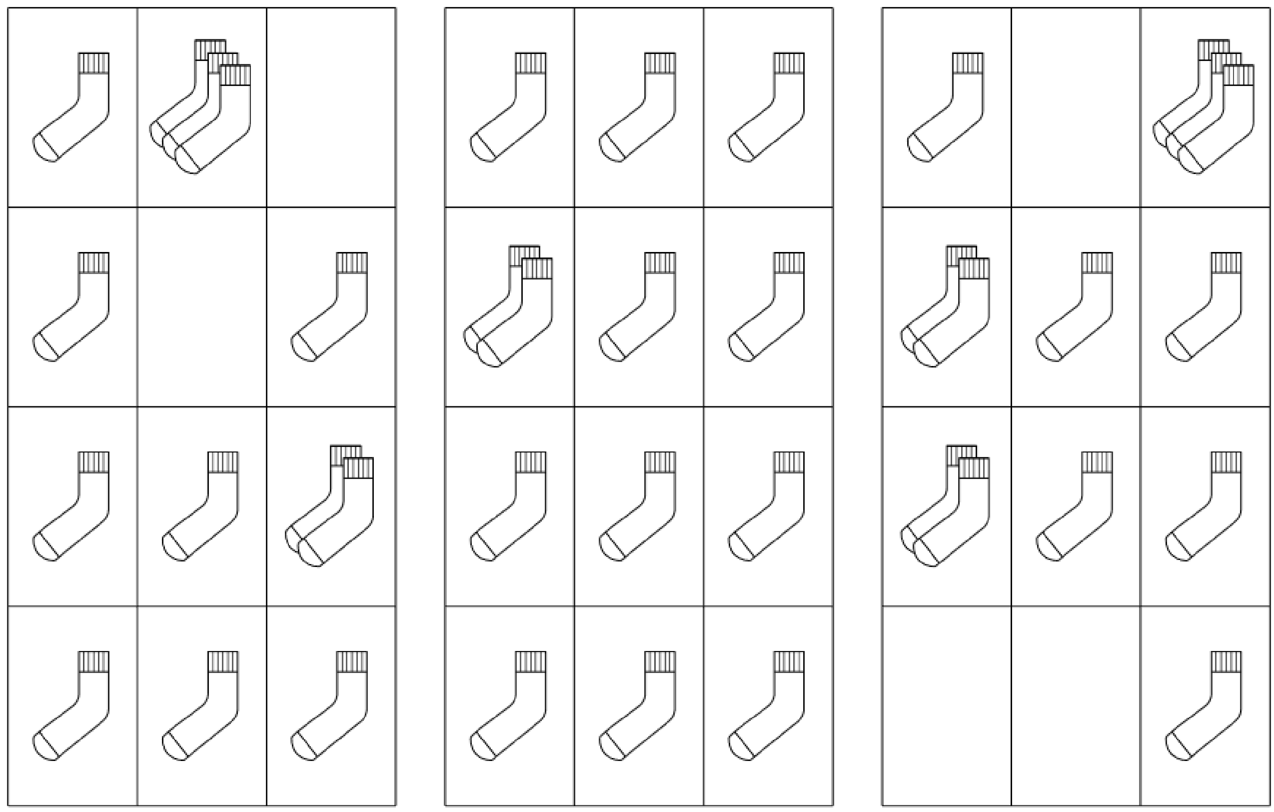
Comme il y a quatre choix d'étiquettes pour le siège « 1 », on a $\frac{24}{4} = 6$ différentes configurations possibles d'asseoir les quatre personnes autour de la table.



Principe des tiroirs :

Théorème 5.4 ▸ *Principe des tiroirs*

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m > n$, si m objets sont placés dans n boîtes, alors au moins une boîte contient deux objets.



Exemple 5.9. Combien de personnes doit-on placer dans une pièce afin qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire ?

Solution. Dans la mesure où il y a 366 dates d'anniversaire possibles (incluant le 29 février), par le principe des tiroirs, la pièce doit contenir au moins 367 personnes afin que deux d'entre elles aient le même anniversaire.

Exemple 5.10. Combien de cartes doivent être piochées dans un jeu de 52 cartes afin que trois cartes de la même couleur soient sélectionnées ?

Le plus petit entier tel que $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \geqslant 3$ est $2 \cdot 4 + 1 = 9$. Ainsi, piocher 9 cartes suffit pour en piocher trois de la même couleur.

Permutation :

Définition 5.11

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de permutations *des n éléments de S est noté P_n et est défini comme*

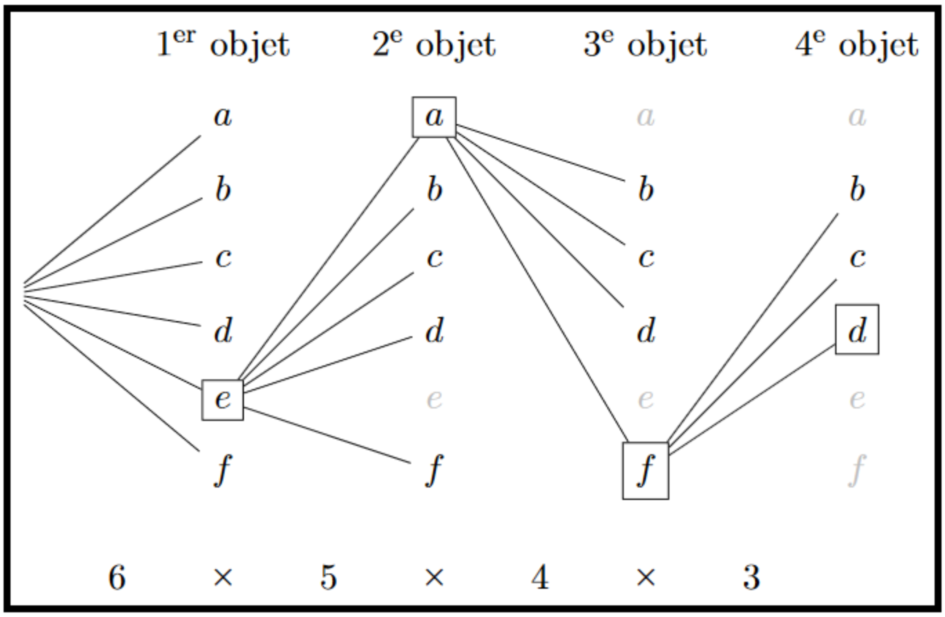
$$P_n = n!$$

Exemple 5.16. Il y a 8 coureurs au départ d'une course d'athlétisme. Combien de classements possibles des coureurs (sans *ex-æquo*) y a-t-il à l'issue de cette course ?

Solution. Le nombre de classements de coureurs possibles est le nombre de permutations de 8 éléments. On a donc $8! = 40\,320$ tels classements possibles.

Arrangement sans répétition :

Exemple 5.13. Soit $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$.



Définition 5.9

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements sans répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté A_n^k et est défini comme*

$$\begin{aligned} A_n^k &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

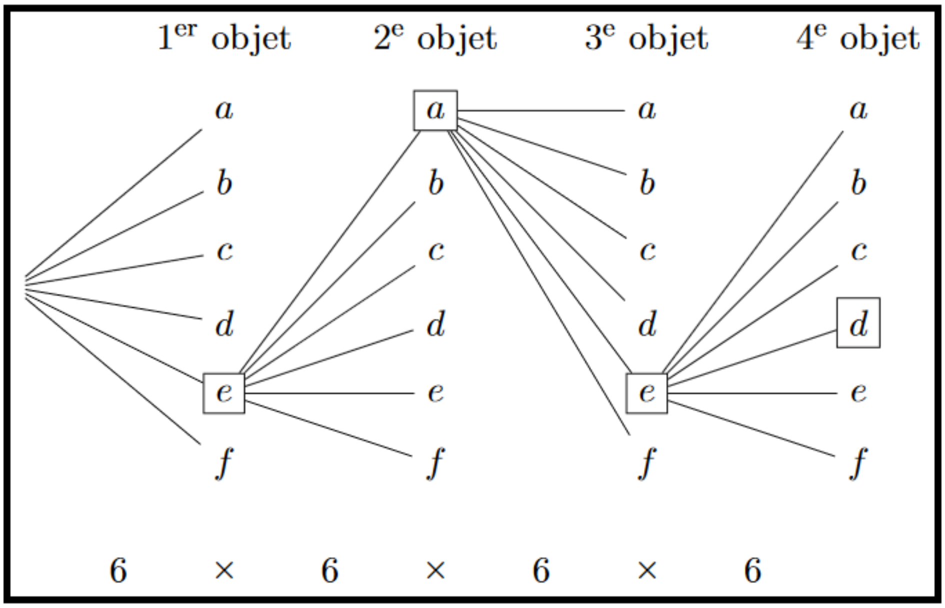
avec $k \leqslant n$.

Exemple 5.14. Dix voitures sont au départ d'un rallie. Combien de podiums de trois pilotes est-il possible d'obtenir une fois la course finie, sachant que les *ex-æquo* sont départagés via les tours d'essai.

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \text{ podiums possibles.}$$

Arrangement avec répétition :

Exemple 5.17. Soit $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$.



Définition 5.13

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements avec répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté α_n^k et est défini comme*

$$\alpha_n^k = n^k$$

Combien de code de vélos à quatre chiffres décimaux existe-t-il ?

$$\alpha_{10}^{4} = 10^4 = 10\,000$$

Combinaison sans répétition :

Définition 5.16

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de combinaisons sans répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté C_n^k et est défini comme*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Combien de mains de poker à 5 cartes au sein d'un jeu de 52 existe-t-il ?

Procédons par étapes : supposons que l'ordre importe, il y a donc A_{52}^5 telles pioches possibles. Toutefois, comme l'ordre importe bel et bien, on a compté certaines pioches plusieurs fois. En l'occurrence, pour chaque pioche p de 5 cartes, exactement 5! pioches sont équivalentes à p : toutes les permutations de cartes au sein de la main sont équivalentes.

Par exemple, les mains des figures 5.12(a) et 5.12(b) sont équivalentes, on peut obtenir l'une en permutant certaines cartes de l'autre (le dix de trèfle et le trois de carreau).

Dès lors, avec la règle de la division, on a exactement

$$\frac{A_{52}^5}{P_5} = \frac{52!}{(52-5)!\,5!} = 2\,598\,960$$

Exemple 5.18. Combien de délégations différentes de 4 personnes sélectionnées parmi un groupe 50 peut-on constituer ?

On calcule donc le nombre de délégations de 4 personnes sélectionnées parmi 50 comme le nombre de combinaisons sans répétitions $C_{50}^4 = 230\,300$.

Résumé :

Type	Répétitions autorisées ?	Ordre importe ?	Formule
Arrangement	Oui	Oui	n^k
Arrangement	Non	Oui	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Combinaison	Non	Non	$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Binôme de Newton et triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \searrow^{+}\swarrow & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \searrow^{+}\swarrow & & \searrow^{+}\swarrow & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}
$$

FIGURE 5.16 – Triangle de Pascal

Théorème 5.18 ▸ *Binôme de Newton*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}_0$, *on a*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, a^i \, b^{n-i}, \\
&= b^n + nab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^3 a^3 b^{n-3} + \dots \\
&+ C_n^{n-3} a^{n-3} b^3 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + na^{n-1} b + a^n
\end{aligned}
$$

exemples :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= b^2 + 2\,ab^{2-1} + a^2 \\
&= b^2 + 2\,ab + a^2, \\
(a+b)^3 &= b^3 + 3\,ab^{3-1} + 3\,a^{3-1}b + a^3 \\
&= b^3 + 3\,ab^2 + 3\,a^2 b + a^3
\end{aligned}
$$

Vecteurs

Définition 6.1

Un vecteur $\vec{v}$ à n composantes est un n-uple $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

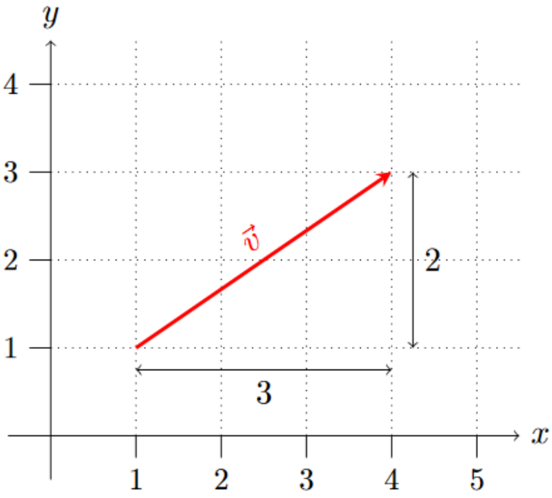


FIGURE 6.1 – Illustration de $v = (3, 2)$

Soient $A = (a_x, a_y)$ et $B = (b_x, b_y)$, le vecteur

$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$ est le vecteur joignant A à B.

Exemple 6.2. Soient $A = (1, 2)$ et $B = (3, 5)$, on a $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 5 - 2) = (2, 3)$.

Égalité :

Propriété 6.2

Soient $\vec{u} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, *noté $\vec{u} = \vec{v}$, si et seulement si $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.*

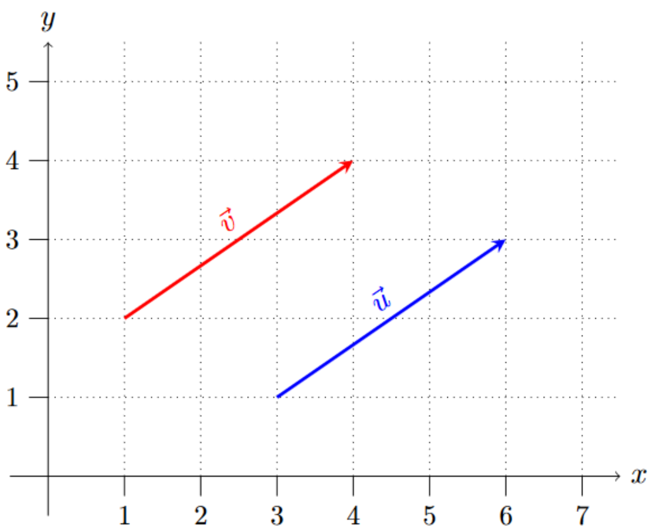


FIGURE 6.2 – Deux vecteurs égaux

Norme :

Définition 6.3

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, on définit la* norme *de* $\vec{v}$*, notée* $||\vec{v}||$*, comme*

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Exemple 6.3. Sur la figure 6.1, on a $\vec{v} = (2, 3)$ et, en conséquence, $||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Multiplication par un scalaire :

Définition 6.4

Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Exemple 6.4. Soit $\vec{v} = (2, 1)$, on a $3\vec{v} = (2 \cdot 3, 1 \cdot 3) = (6, 3)$. Cette situation est illustrée à la figure 6.3. Similairement, $-\vec{v} = (-2, -1)$.

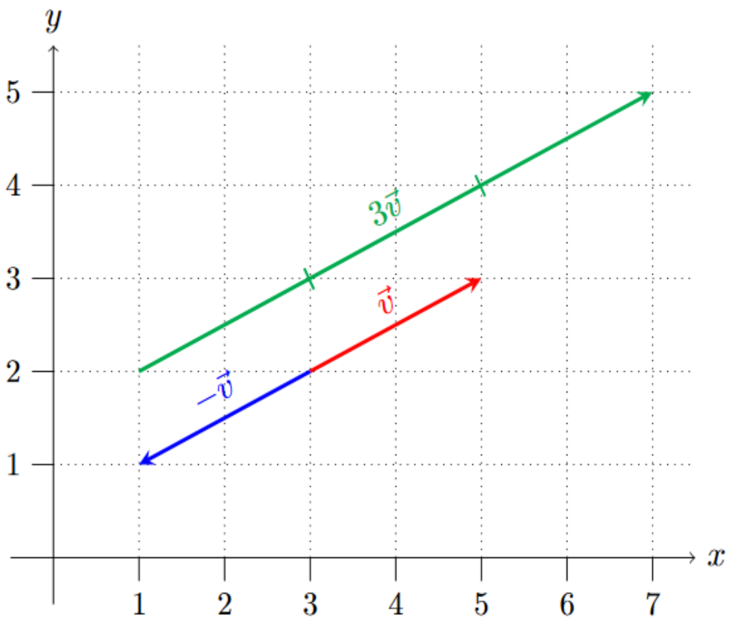


FIGURE 6.3 – Multiplication par un scalaire

Addition et soustraction :

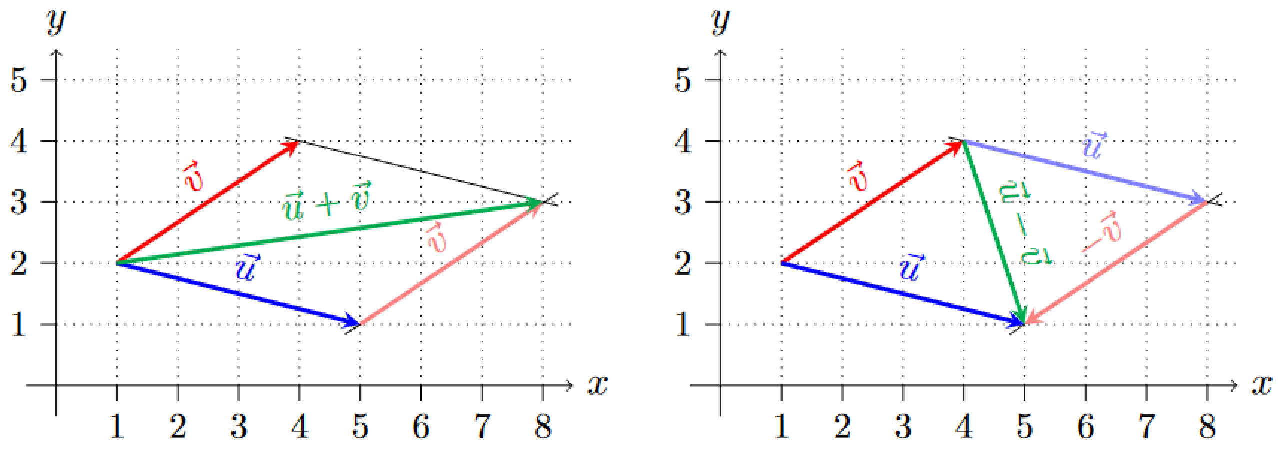
Définition 6.6

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, on définit*

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2),\\ \vec{u} - \vec{v} &= (u_1 - v_1, u_2 - v_2).\end{aligned}$$

Exemple 6.5. Soient $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 3)$. On a

— $\vec{u} + \vec{v} = (1 - 1, 2 + 3) = (0, 5)$,
— $\vec{u} - \vec{v} = (1 + 1, 2 - 3) = (2, -1)$.



(a) $\vec{u} + \vec{v}$ (b) $\vec{u} - \vec{v}$

FIGURE 6.4 – Addition et soustraction de vecteurs

Produit scalaire :

Définition 6.8

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* θ *l'angle formé entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, le* produit scalaire *entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, noté* $\vec{u} \cdot \vec{v}$*, est défini comme*

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\theta)\\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2\end{aligned}$$

Notez ici que l'opérateur « $\cdot$ » entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, à gauche, n'est pas le même opérateur que le « $\cdot$ » entre $||u||$, $||v||$ et $\cos(\theta)$, à droite. Le premier est un opérateur entre vecteurs, le second entre réels.

Exemple 6.6. Soient $\vec{u} = (0, 3)$ et $\vec{v} = (4, 4)$, illustrés la figure 6.6. On remarque avant tout que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de $45° = \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{32} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 12.\end{aligned}$$

Similairement, on peut calculer ce produit scalaire comme

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

Vecteurs orthogonaux :

Propriété 6.9

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ orthogonaux, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

En effet, par définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, l'angle formé par ces deux vecteurs est égal à $\frac{\pi}{2}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Matrices

Définition 7.1

Une matrice *de* taille $m \times n$ *est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{ii} sont appelés la *diagonale* de la matrice.

Exemple 7.1. La matrice A illustrée ci-dessous est un exemple de matrice de $\mathbb{R}^{4\times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 13 & 15 \\ 2 & 11 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- une *matrice carrée* est une matrice à n lignes et n colonnes,
- une *matrice ligne* est une matrice à une ligne et n colonnes,
- une *matrice colonne* est une matrice à n lignes et une colonne.

Matrice identité :

Définition 7.2

La matrice identité, *notée $\mathbb{1}_n$, est la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & sinon \end{cases} .$$

Cette matrice est définie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Quand le contexte est clair, on la nomme simplement $\mathbb{1}$.

Exemple 7.3. La matrice ci-dessous est la matrice identité de taille 3×3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition :

Définition 7.3

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la transposée de A, *note A^T, est la matrice $(t_{ij}) \in \mathbb{R}$ telle que $t_{ij} = a_{ji}$.*

Exemple 7.4. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriété 7.4

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, on a $\left(A^T\right)^T = A$.

En effet, échanger deux fois de suite les lignes et colonnes d'une matrice revient à restituer la matrice originale.

Addition, soustraction et multiplication scalaire :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 8 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+2 & -2+1 & 5-2 \\ -2-2 & 2+1 & 1-4 & -4+8 \\ -6+7 & 7+3 & 9+0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 0-2 & -2-1 & 5+2 \\ -2+2 & 2-1 & 1+4 & -4-8 \\ -6-7 & 7-3 & 9-0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -12 \\ -13 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot -4 \\ 2\cdot(-6) & 2\cdot 7 & 2\cdot 9 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 10 \\ -4 & 4 & 2 & -8 \\ -12 & 14 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Produit matriciel :

Définition 7.6

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, le produit matriciel AB est une matrice $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ telle que

$$p_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} \cdot b_{qj}.$$

Exemple 7.6. Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ et $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a $AB \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ telle que

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ -7 & -15 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}$$

car :

AB[11] = (1*5)+(0*-2)+(-2*7)+(5*0) = -9
AB[12] = (1*2)+(0*1)+(-2*3)+(5*4) = 16
AB[21] = (-2*5)+(2*-2)+(1*7)+(-4*0) = -7
AB[22] = (-2*2)+(2*1)+(1*3)+(-4*4) = -15
AB[31] = (-6*5)+(7*-2)+(9*7)+(3*0) = 19
AB[32] = (-6*2)+(7*1)+(9*3)+(3*4) = 34

Déterminant :

Le *déterminant* d'une matrice carrée est une valeur réelle qui peut être calculée à partir de ses éléments. Les déterminants ont de nombreuses applications en algèbre linéaire, notamment en matière de résolution de systèmes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ on note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

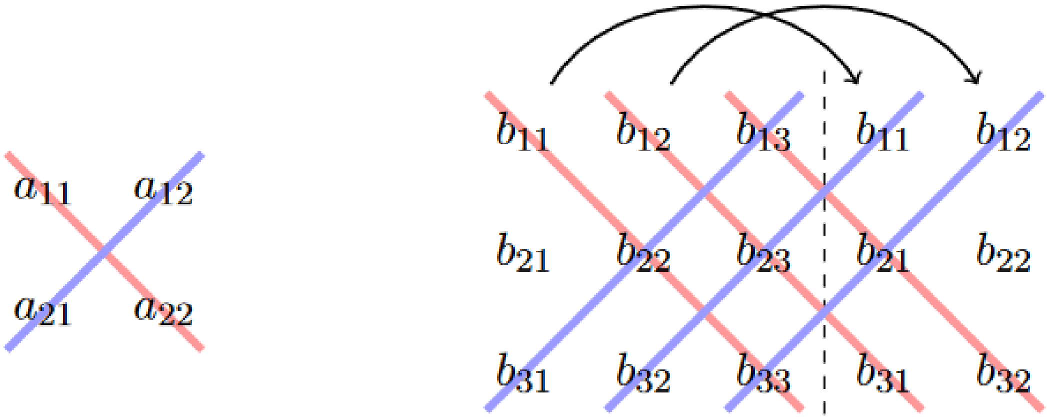
Règle de Sarrus :

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ \det(B) &= \ b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} \\ &\quad - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$



Propriété 7.8

Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T), \\ \det(AB) &= \det(A)\cdot\det(B), \\ \det(\lambda A) &= \lambda^n \det(A), \\ \det(A) &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ si } A \text{ est triangulaire} \end{aligned}$$

Élimination de Gauss-Jordan :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_3 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{vmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + 25L_3$$

$$= 2 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 29 \qquad \text{car matrice triangulaire}$$

$$= -116$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot (-1) \qquad \text{car matrice triangulaire}$$

$$= -6$$

Inverse de matrice :

Définition 7.10

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, l'inverse de A, noté A^{-1}, est l'unique matrice telle que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$$

Seules les matrices A telles que $\det A \neq 0$ possèdent un inverse.

Exemple 7.10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

on calcule A^{-1} de la manière suivante.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 7-2\cdot 3 & 0-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1-3\cdot 0 & 3-3\cdot 1 & 1-3\cdot(-2) & 0-3\cdot 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

On remarque que, comme attendu, cette méthode ne fonctionne pas avec une matrice non inversible (dont le déterminant est nul), comme illustré ci-dessous.

Exemple 7.11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\det A = 6 - 6 = 0$, donc A n'est pas inversible.

Résolution de systèmes :

Exemple 8.1. Dans une petite fête de village, le tarif d'inscription pour un enfant est de 1,5€, et de 4€ pour un adulte. Sur une journée, 2 200 personnes sont entrées et 5 050€ ont été récoltés. Combien d'adultes et d'enfants sont venus ?

Posons a comme le nombre d'adultes venus à la fête, et e le nombre d'enfants. On sait que comme 2 200 personnes sont venues, on a

$$a + e = 2\,200. \tag{8.1}$$

De plus, chaque adulte rapporte 4€ et chaque enfant 1,5€, comme 5 050€ ont été récoltés, on a

$$4a + \frac{3}{2}e = 5\,050. \tag{8.2}$$

En mettant les informations modélisées dans les équations (8.1) et (8.2), on obtient le système

$$\begin{cases} a + e = 2\,200 \\ 4a + \frac{3}{2}e = 5\,050 \end{cases}$$

Considérons le système

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

On peut écrire les coefficients des variables x et y de ce système sous la forme de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, et ainsi écrire la partie gauche de ce système comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En effet, calculer ce produit résulte en la matrice $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$, et l'égaler à la matrice des termes indépendants $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ correspond exactement au système original.

Dans le cas du système formé des équations (8.1) et (8.2), on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\,200 \\ 5\,500 \end{pmatrix}}_{B}$$

Pour procéder par élimination de Gauss-Jordan, augmentons la matrice A du vecteur colonne B, pour obtenir $[A|B]$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 4 & \frac{3}{2} & 5\,050 \end{array}\right)$$

Le but ici est d'obtenir par Gauss-Jordan une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. On a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -3750 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & 1 & 1\,500 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\frac{2}{5}L_2$$

La dernière ligne de cette matrice donne $e = 1\,500$. En substituant e par sa valeur dans la première ligne, on a $a = 2\,200 - e = 700$. Ces solutions correspondent exactement à la substitution effectuée « à la main » en début de cette section.

Dérivation et intégration

Dérivée :

(à quelle vitesse des quantités évoluent?)

Définition 9.1

La dérivée *d'une fonction en un point est égale à la* pente de la droite tangente *en ce point au graphe de la fonction.*

Notation 9.1. La dérivée d'une fonction f en un point a est notée $f'(a)$.

$f(x)$	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
a (constante réelle)	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \neq 0)$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad n > 0 \\ \mathbb{R}_0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$	$n\,x^{n-1}$
$\sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$ (polynôme)	$\mathbb{R}$	$\sum_{i=0}^{n-1} i\,a_i\,x^{i-1}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{\,\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\,\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
a^x	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$

— Dérivée d'une somme de fonctions :

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) \tag{9.2}$$

— Dérivée du multiple d'une fonction :

$$\big(a\, f(x)\big)' = a\, f'(x) \tag{9.3}$$

— Dérivée d'un produit de fonctions :

$$\big(f(x)\, g(x)\big)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \tag{9.4}$$

— Dérivée d'un quotient de fonctions :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \tag{9.5}$$

— Dérivée des fonctions composées :

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big)\, f'(x) \tag{9.6}$$

exemples :

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + 3x + 4\right)' &= \left(x^2\right)' + (3x)' + (4)' \\
&= 2x + 3 \cdot (x)' + 0 \\
&= 2x + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \\
&= \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x^2 \cos(3x)\right)' &= (x^2)' \cos(3x) + x^2 (\cos(3x))' \\
&= 2x\cos(3x) + x^2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot (3x)' \\
&= 2x\cos(3x) - 3x^2 \sin(3x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x+1}{x-2}\right)' &= \frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} \\
&= \frac{1(x-2)-(x+1)1}{(x-2)^2} \\
&= \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} \\
&= -\frac{3}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\right)' &= (e^{\frac{x}{2}})'\sin(3x)+e^{\frac{x}{2}}(\sin(3x))' \\
&= e^{\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'\sin(3x)+e^{\frac{x}{2}}\cos(3x)\cdot(3x)' \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)+3e^{\frac{x}{2}}\cos(3x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{\cos(x^2+1)}\right)' &= -\frac{2x\,\sin(x^2+1)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^2+1)}} \\
&= \left(\cos^{\frac{1}{3}}(x^2+1)\right) \\
&= \frac{1}{3}\cos^{\frac{1}{3}-1}(x^2+1)\cdot(\cos(x^2+1))' \\
&= \frac{-\sin(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{3\cos^{\frac{3}{2}}(x^2+1)} \\
&= -\frac{2x\sin(x^2+1)}{3\cos^{\frac{3}{2}}(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\ln(\sin(x^3)))' &= \frac{1}{\sin(x^3)}\cdot(\sin(x^3))' \\
&= \frac{\cos(x^3)\cdot(x^3)'}{\sin(x^3)} \\
&= \frac{x^2\cos(x^3)}{\sin(x^3)}
\end{aligned}
$$

Dérivée première :

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

— si, quel que soit $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I ;

— si, quel que soit $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I ;

— si $f'(a) = 0$ et que $f'(x)$ change de signe au voisinage de a, alors a est un extremum de f.

Dérivée seconde :

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

— si, quel que soit $x \in I$, $f''(x) > 0$, alors le graphe de f tourne sa concavité vers le haut ;

— si, quel que soit $x \in I$, $f''(x) < 0$, alors le graphe de f tourne sa concavité vers le bas ;

— si $f''(a) = 0$ et $f''(x)$ change de signe au voisinage de a, alors f a un point d'inflexion en a.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	minimum en $(a, f(a))$	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	maximum en $(a, f(a))$	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	point d'inflexion en $(a, f(a))$	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	point d'inflexion en $(a, f(a))$	$\nearrow$

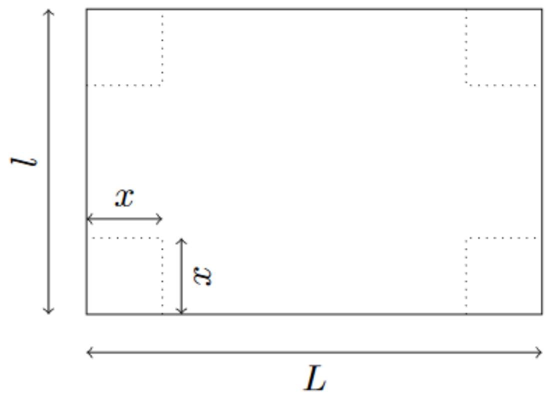
x		a	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	point d'inflexion en $(a, f(a))$	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	point d'inflexion en $(a, f(a))$	$\searrow$

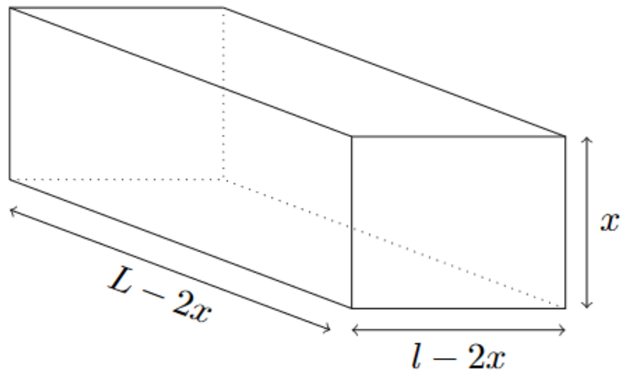
TABLE 9.2 – Différents cas de tableaux de variations

Exemple 9.5. Un paysagiste dispose d'une bâche rectangulaire de largeur l et de longueur L, et souhaite l'utiliser pour étanchéifier le fond d'un étang parallélépipédique. Pour cela, il décide de découper quatre carrés isométriques aux coins de sa bâche, et de former le fond par pliage. Quelle longueur de côté doit-il choisir pour les carrés afin de maximiser le volume de l'étang ?

Solution. Avant tout, représentons la situations à l'aide d'un dessin, comme illustré à la figure 9.5.



(a) Bâche



(b) Étang

FIGURE 9.5 – Illustration de la construction de l'étang

On remarque que le volume V de cet étang est défini comme

$$\begin{aligned} V &= x(l-2x)(L-2x) \\ &= (xl-2x^2)(L-2x) \\ &= xlL - 2x^2l - 2x^2L + 4x^3 \\ &= 4x^3 - (2l+2L)x^2 + (lL)x \end{aligned}$$

La dérivée $V'(x)$ de $V(x)$ est définie comme

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 2(2l+2L)x + lL \\ &= 12x^2 - (4l+4L)x + lL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (4l+4L)^2 - 4\cdot 12\cdot lL\\ &= 16l^2+16L^2+32lL-48lL\\ &= 16l^2+16L^2-16lL\\ &= 16(l^2+L^2-lL)\end{aligned}$$

On remarque que comme $\Delta > 0$, $V'(x)$ admet systématiquement deux racines. Ces racines sont décrites comme

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{4l+4L+4\sqrt{l^2+L^2-lL}}{24}\\ x_2 &= \frac{4l+4L-4\sqrt{l^2+L^2-lL}}{24}\end{aligned}$$

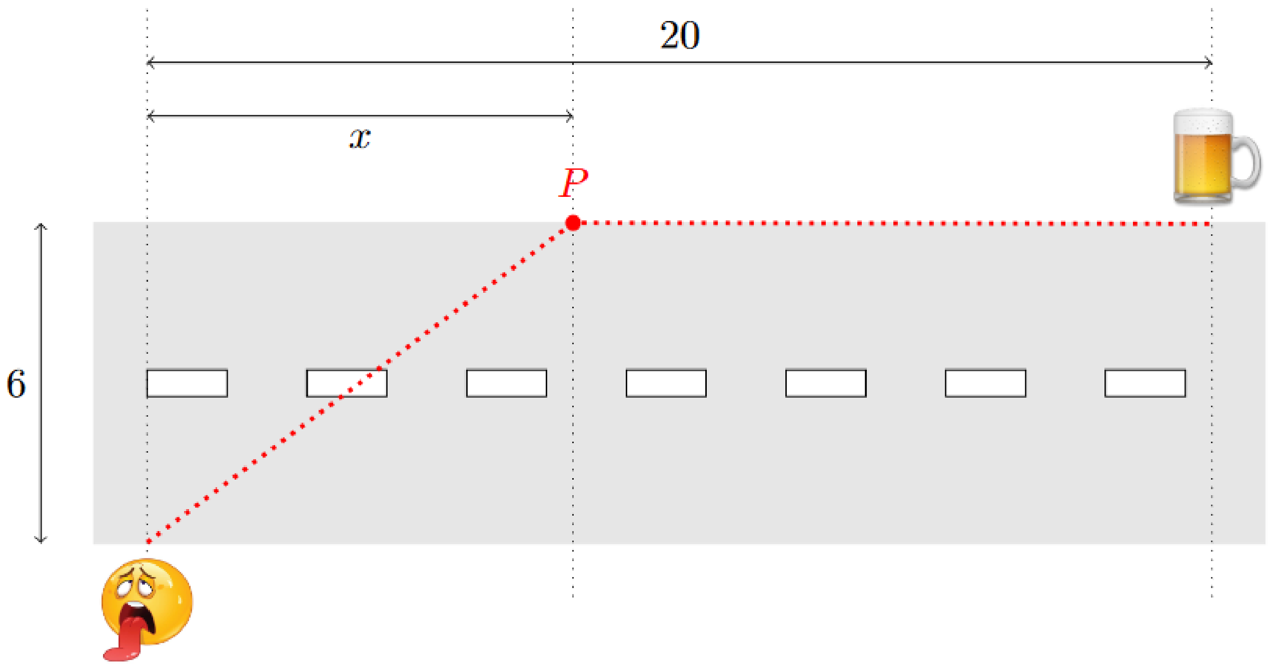
Ce sont ces valeurs de x qui permettent de maximiser le volume de l'étang. Comme $x_1 > x_2 > 0$, on peut établir le tableau de variation illustré à la table 9.4 sur base de $V'(x)$.

x		x_2		x_1	
$V'(x)$	+	0	-	0	+
$V(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

En considérant ce tableau de variation, on remarque qu'on doit poser

$$x = x_2 = \frac{4l+4L-4\sqrt{l^2+L^2-lL}}{24}.$$

Exemple 9.6. Un étudiant assoiffé mais prudent aperçoit un bar à 20 mètres de l'autre côté de la route large de $6m$ sur laquelle il se situe. Sachant qu'il traverse la route à une vitesse de 0.2 Dm/s et qu'il court sur le trottoir à une vitesse de 0.25 Dm/s, à quel endroit doit-il rejoindre l'autre bord de la route pour pouvoir obtenir une bière bien fraîche au plus vite, et combien de temps cela lui prend-il ?



Ce temps est égal au temps nécessaire pour rejoindre P, l'endroit où il a atteint l'autre bord de la route, plus le temps nécessaire pour rejoindre le bar depuis P. Comme les vitesses de traversée de la route v_T et de course sur le trottoir v_R sont constantes, on sait que le temps t mis pour parcourir une distance d à une vitesse v est égal à $\frac{d}{v}$.

Il faut donc caractériser la distance $|PS|$ entre l'étudiant et P, ainsi que la distance $|PB|$ entre P et le bar afin de pouvoir définir le temps mis par l'étudiant pour atteindre le bar. Clairement, la distance entre P et le bar est égale à $20 - x$. Par ailleurs, par application du théorème de Pythagore, la distance entre l'étudiant et P est égale à $\sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2}$.

Dès lors, le temps $t(x)$ nécessaire pour atteindre le bar pour l'étudiant est égal à

vt = 0,2 Dm/s = 1/5
vr = 0,25 Dm/s = 1/4

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{|PS|}{v_T} + \frac{|PB|}{v_R} \\ &= 5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x) \end{aligned}$$

Il faut donc trouver à présent quelle valeur donner à x afin de minimiser $t(x)$. Utilisons la dérivée de $t(x)$ pour cela, et tentons de l'annuler. Ainsi, on aura une caractérisation des points pour lesquels $t(x)$ admet un extremum.

On a

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{5}{2}(36 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 \\ &= \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4 \end{aligned}$$

Cette fonction admet un extremum potentiel quand elle s'annule, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned} t'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36 + x^2} \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 16(36 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 576 + 16x^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 = 576 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

On ne doit pas considérer la racine $x = -8$ car x est une grandeur positive.

En construisant le tableau de variation de $t(x)$ comme illustré à la table 9.5, on remarque que le temps est bel et bien minimum quand l'étudiant traverse en diagonale à huit mètres en face de la route, en direction du bar.

x		8	
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Par ailleurs, il met exactement

$$t(8) = 5\sqrt{36+64} + 4 \cdot 12 = 50 + 48 = 98$$

dixièmes de secondes pour atteindre le bar.

Primitive :

Définition 9.3

Soient f et F deux fonctions, on dit que F est une primitive *de f si $F'(x) = f(x)$.*

Exemple 9.7. Soit $f(x) = x^2$. Alors, $\dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x)$ car $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Intégrale indéfinie :

Définition 9.4

Soit $f(x)$ une fonction, on appelle intégrale indéfinie *de $f(x)$ l'ensemble*

$$\{\, F(x) \mid F(x) \text{ est une primitive de } f(x) \,\}.$$

On note cet ensemble comme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

où $\int$ est le signe d'intégration, *$f(x)$ est* l'intégrande *(c'est-à-dire la fonction dont on recherche une primitive) et $\mathrm{d}x$ est l'*élément différentiel *(qui indique entre autres la variable par rapport à laquelle on intègre).*

Exemple 9.8. Les lignes suivantes sont des exemples d'intégrales simples :

— $\displaystyle\int 6x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = 2x^3 + x + C$;

— $\displaystyle\int \cos(3x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$;

— $\displaystyle\int e^{2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Intégrale définie :

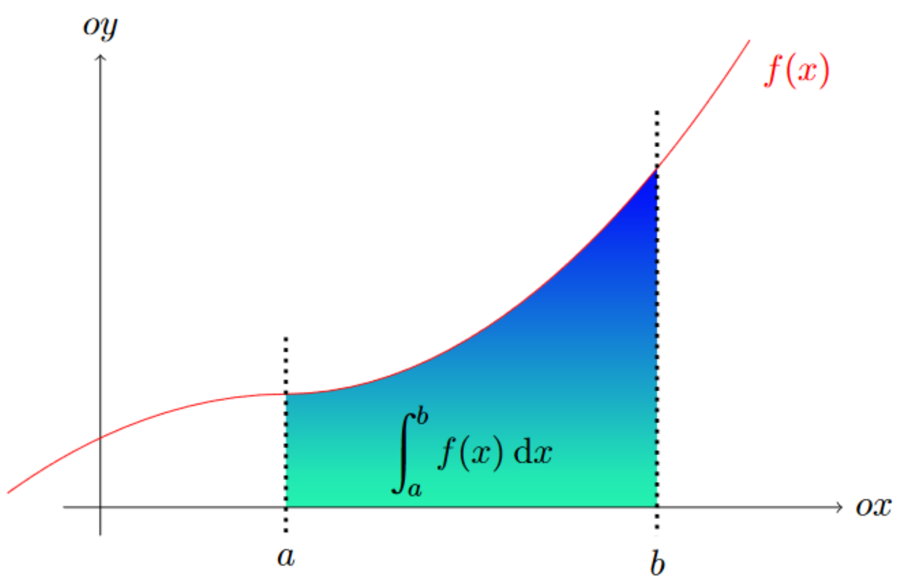
Définition 9.5

Soient $f(x)$ une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'intégrale définie de f entre a et b *est notée et définie comme*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

De plus, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ décrit précisément l'aire de la surface comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe ox et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, comme illustré à la figure 9.8.



$f(x)$	$F(x)$
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big) + C$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax) + C$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax) + C$
$\tan(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\ln\big(\cos(ax)\big) + C$
e^{ax}	$\dfrac{1}{a}e^{ax} + C$
$a^x \ (a > 0)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$

Table 9.6 – Liste des primitives élémentaires

$$\int a\, f(x)\, \mathrm{d}x = a \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, \mathrm{d}x$$