Mathématiques

MAT1 - MAT

2020 - 2021

R. Absil
L. Beeckmans
J. Beleho
D. Boigelot
P. Hauweele
C. Leignel
N. Richard
M. Wahid

Haute École Bruxelles-Brabant

École supérieure d'informatique

License

Introduction

Les mathématiques sont une matière qui requiert à la fois rigueur et pratique. Ainsi, comprendre les concepts vus en cours ne suffit pas, dans la plupart des cas, pour appréhender finement la matière. Une bonne maîtrise du cours passe ainsi par la pratique de nombreux exercices, afin notamment d'acquérir de l'expérience dans la manipulation des objets mathématiques présentés.

Ainsi, ce document présente une liste d'exercices non résolus relatifs à chacun des chapitres vu lors du cours de mathématique à l'ESI. Ces exercices ne sont pas nécessairement triés par ordre de difficulté ou de longueur, aussi, l'étudiant ne doit pas se décourager s'il rencontre des difficultés à résoudre un exercice en début de chapitre.

Certains de ces exercices requièrent de passer par une brève étape de modélisation, alors que d'autres peuvent être résolus directement. Dans tous les cas, notez que l'argumentation qui a permis d'aboutir à une réponse a autant, voire plus de valeur, que la réponse elle-même. En effet, convaincre le lecteur de la justesse de votre réponse est le cœur même d'une résolution. Il est donc primordial de justifier vos réponses par des calculs complets, ou des explications en français, claires, précises, concises et complètes

Cette exigence de rigueur est également traduite du point de vue de l'évaluation du cours : fournir une bonne réponse sans justifier ne vaudra que peu de points, si elle en vaut. En revanche, un raisonnement pertinent menant à une réponse erronée (par exemple par le biais d'une faute d'inattention) sera généralement mis en valeur.

L'étudiant qui serait intéressé par des exemples de résolutions d'exercices justifiées rigoureusement peut en trouver dans le syllabus d'exercices résolus, si ses notes ne devaient pas suffire à l'aider dans la résolution d'un exercice nouveau.

Finalement, certains exercices sont flanqués du symbole 👍. L'ensemble de ces exercices couvre toute la matière, mais cela ne signifie pas que se contenter de les faire permettra de réussir l'examen, ou qu'une question d'examen ressemblera à l'un de ses exercices. D'autres exercices, flanqué du symbole ☠, sont soit plus difficile que la moyenne, ou sortent du cadre des compétences visées par le cours.

Première partie

Mathématiques discrètes

CHAPITRE 1

Algèbre booléenne

Exercice 1.1 (👍)**.** Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

1. $\big((1 \neq 1) \Rightarrow (2 = 3)\big) \vee (4 = 5)$
2. $\big((0 = 1) \,\underline{\vee}\, (5 = 5)\big) \wedge \big((1 = 2) \Leftrightarrow (2 = 1)\big)$
3. $(1 + 1 = 2) \vee$ « 1 989 791 est un nombre premier ».
4. Si une armoire n'est pas un meuble alors une pomme n'est pas un fruit.

Exercice 1.2. La formule logique suivante peut-elle être vraie ? Justifiez.

$$(\neg p \Leftrightarrow q) \,\underline{\vee}\, (\neg p \wedge q)$$

Exercice 1.3 (👍)**.** Soient les propositions :

1. p : « j'ai la grippe »,
2. q : « j'ai mal à la gorge »,
3. r : « j'ai de la température ».

Traduisez en langage courant les propositions :

1. $q \Rightarrow p$,
2. $q \,\underline{\vee}\, \neg r$,

3. $\neg p \Rightarrow (q \vee \neg r)$.

Exercice 1.4. Soient les propositions :
— p : « j'ai faim »,
— q : « je mange ».
Traduisez en langage courant les propositions :

1. $\neg p$,
2. $p \vee q$,
3. $p \Rightarrow q$,
4. $q \Rightarrow p$,
5. $p \wedge q$,
6. $p \Leftrightarrow q$,
7. $\neg p \Rightarrow \neg q$,
8. $\neg p \wedge \neg q$,
9. $\neg p \vee (p \wedge q)$.

Exercice 1.5 (👍). Soient les propositions :
1. p : « j'en ai marre »,
2. q : « je vais m'en aller ».

Écrivez sous forme symbolique :
1. j'en ai marre et je vais m'en aller ;
2. si je ne m'en vais pas, c'est que j'en ai marre ;
3. soit j'en ai marre, soit je ne m'en vais pas ;
4. Quand je m'en vais, j'en ai marre.

Exercice 1.6. Soient les propositions :
1. p : « le ciel est noir »,
2. q : « il va pleuvoir »,
3. r : « je me moque de la pluie »,
4. s : « je mets ma capuche ».

Écrivez sous forme symbolique :
1. le ciel est noir mais il ne va pas pleuvoir ;
2. s'il va pleuvoir, je mets ma capuche ;
3. s'il va pleuvoir, soit je mets ma capuche, soit je me moque de la pluie ;
4. s'il ne va pas pleuvoir, le ciel n'est pas noir ;
5. le ciel est noir et il va pleuvoir mais je ne mets pas ma capuche ;
6. si le ciel est noir, je mets ma capuche si et seulement si il va pleuvoir ;
7. quand je mets ma capuche, c'est que je me moque de la pluie ;
8. pour que je me moque de la pluie quand il va pleuvoir, il est nécessaire (mais pas suffisant) que je mette ma capuche.

Exercice 1.7. Construisez la table de vérité des propositions suivantes
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \Leftrightarrow q) \veebar (\neg p \Leftrightarrow \neg r)$
- $\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)\Big) \veebar (\neg p \vee \neg r)$

Exercice 1.8 (👍). Vérifiez si les propositions suivantes sont des tautologies :

1. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$,
2. $(p \veebar q) \Leftrightarrow \big((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)\big)$,
3. $\big((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((r \Leftrightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg q)\big)$.

Exercice 1.9 (👍). Construisez la table de vérité des propositions suivantes, et donnez une expression équivalente plus simple en fonctions des p, q et r.
- $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Leftrightarrow (p \vee q)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $(p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)$
- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$

Exercice 1.10. Niez les propositions :

1. la voiture est rouge et l'arbre est vert ;
2. si la terre est ronde, alors elle tourne ;
3. si c'est rare, c'est cher ;
4. le paysan sème du blé ou du maïs ;
5. le paysan sème soit du blé, soit du maïs.

Exercice 1.11 (👍). Niez les propositions :

1. on ne mets pas de crème dans une sauce carbonara ;
2. les citrons sont soit verts, soit jaunes ;
3. si le lait est aigre, il a tourné ;
4. la sauce est sucrée ou salée ;
5. un sabayon est préparé avec des œufs, du sucre et du vin blanc ;
6. quand la bolognaise brûle, on a mis le feu trop fort ;
7. il faut respecter la température notée si et seulement si le four est à chaleur tournante ;
8. le caramel est trop froid mais je vais le réchauffer ;
9. comme je suis allergique au céleri, je n'en mange pas ;

10. je suis très attaché aux oignons, donc je pleure quand je les coupe.

Exercice 1.12 (👍). Écrivez la contraposée des implications suivantes :

1. si le chien miaule, alors le chat aboie ;
2. quand le chat est parti, les souris dansent ;
3. je vais à la plage chaque fois qu'il y a du soleil.

Exercice 1.13 (👍). Écrivez la réciproque des implications suivantes :

1. quand il fait froid, je mets du chauffage ;
2. si je me coupe, je désinfecte ;
3. dès qu'il fait chaud, je mets mon maillot.

Exercice 1.14 (☠). Mohamed, Khalid et Tarik sont trois copains inséparables. Quel est leur état d'humeur, sachant que :

— si Mohamed est fâché, alors Tarik est content ;
— si Tarik est content, alors Khalid aussi ;
— si Khalid est fâché, alors Mohamed aussi ;
— Mohamed et Khalid ne sont jamais contents en même temps.

Exercice 1.15 (☠). Cédric, Casper et Titeuf sont en voyage. L'un à Paris, le second à Rome et le troisième à Berlin. Où est Cédric, sachant que

— si Cédric est à Berlin, alors Titeuf est à Rome ;
— si Casper est à Paris, alors Titeuf est à Berlin ;
— si Cédric n'est pas à Berlin, alors Casper est à Paris.

CHAPITRE 2

Éléments de théorie des ensembles

Exercice 2.1 (👍). Soient les deux intervalles réels

$$\begin{aligned} A &= [1,5[\\ B &=]2,7[\end{aligned}$$

Écrivez sous forme d'intervalles les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \triangle B$.

Exercice 2.2 (👍). Écrivez en extension les ensembles

$$\begin{aligned} A &= \left\{ 3n+2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 10 \right\}, \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \big((x \bmod 4 = 0) \vee (x \bmod 7 = 2)\big) \wedge (x < 30) \right\} \end{aligned}$$

Exercice 2.3 (👍). Écrivez en compréhension les ensembles

$$\begin{aligned} A &= \{ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 \}, \\ B &= \{ -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9 \} \end{aligned}$$

Exercice 2.4. Écrivez en extension les ensembles

$$\begin{aligned} A &= \text{ensemble des diviseurs de } 24 \\ B &= \text{ensemble des diviseurs de } 36 \end{aligned}$$

et trouvez leur cardinal. De plus, écrivez en extension les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \triangle B$.

Exercice 2.5. Pour chacune des paires d'ensembles suivants, déterminez si le second est un sous-ensemble du premier, si le premier est un sous-ensemble du second, ou aucune de ces propositions.

— L'ensemble des vols Londres - Singapour, et l'ensemble des vols directs Londres - Singapour.
— L'ensemble des personnes qui parlent français, et l'ensemble des personnes qui parlent anglais.
— L'ensemble des écureuils volants, et l'ensemble des animaux qui peuvent voler.
— L'ensemble des vaches volantes, et l'ensemble des animaux qui peuvent voler.

Exercice 2.6 (☠). Pour chacun des ensembles suivants, déterminez

— si 2 est un élément de cet ensemble,
— si $\{ 2 \}$ est un élément de cet ensemble,
— si $\{ 2 \}$ est un sous-ensemble de cet ensemble.

1. $\left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x > 1 \right\}$.
2. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est le carré d'un entier} \right\}$.
3. $\{ 2, \{ 2 \} \}$.
4. $\{ \{ 2 \}, \{ \{ 2 \} \} \}$.
5. $\{ \{ 2 \}, \{ 2, \{ 2 \} \} \}$.
6. $\{ \{ \{ 2 \} \} \}$

Exercice 2.7 (☠). Déterminez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

— $0 \in \varnothing$,
— $\{ 0 \} \subset \varnothing$,
— $\{ 0 \} \in \{ 0 \}$,
— $\{ \varnothing \} \subseteq \{ \varnothing \}$,
— $\varnothing \in \{ 0 \}$,
— $\varnothing \subset \{ 0 \}$,
— $\{ 0 \} \subset \{ 0 \}$,
— $\varnothing \in \{ \varnothing \}$,
— $\{ \varnothing \} \in \{ \varnothing \}$,
— $\{ \varnothing \} \subset \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$,
— $\{ \varnothing \} \in \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$,
— $\{ \varnothing \} \in \{ \{ \varnothing \} \}$,
— $\{ \varnothing \} \subset \{ \{ \varnothing \} \}$.

Exercice 2.8 (👍). Soient trois ensembles A, B et C. Dessinez les diagrammes de Venn de chacune des situations suivantes. Les ensembles complémentaires sont définis dans un ensemble S qui contient à la fois A, B et C.

— $A \cap (B \cap C)$.
— $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$.
— $\big((A \backslash B) \cup (A \backslash C)\big) \cup (B \backslash C)$.
— $A \cap (B \backslash C)$.
— $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
— $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$.

Exercice 2.9 (👍). Soient les ensembles suivants

Q : l'ensemble des quadrilatères,
P : l'ensemble des parallélogrammes,
L : l'ensemble des losanges,
R : l'ensemble des rectangles,
C : l'ensemble des carrés.

Énoncez en compréhension les ensembles suivants :

— $Q \cap L$;
— $L \cap R$;
— $R \cup C$;
— $L \triangle C$.

CHAPITRE 3

Logique des prédicats

Exercice 3.1 (👍). Décrivez les classes de vérité de :

$$\begin{aligned}&\neg p(x),\\&p(x) \wedge q(x),\\&p(x) \vee q(x),\\&p(x) \veebar q(x),\\&p(x) \Rightarrow q(x),\\&p(x) \Leftrightarrow q(x)\end{aligned}$$

dans les cas suivants :

1. $p(x)$: $x < 7$ et $q(x)$: $x \geqslant 9$, avec $x \in \mathbb{N}$,
2. $p(x)$: $12 \leqslant x < 39$ et $q(x)$: $5 < x \leqslant 20$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.2. Soient les prédicats

$$\begin{aligned}&p(x) : x \in [5, +\infty[,\\&q(x) : x \in]-\infty, 12],\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}$. Décrivez les classes de vérité de

1. $\neg p(x)$,
2. $p(x) \wedge q(x)$,
3. $p(x) \vee q(x)$,
4. $p(x) \veebar q(x)$,
5. $p(x) \Rightarrow q(x)$,
6. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$,
7. $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$,
8. $\neg(p(x) \Rightarrow q(x))$,
9. $\neg(p(x) \wedge q(x))$,
10. $\neg(p(x) \vee q(x))$,
11. $\neg(p(x) \veebar q(x))$,
12. $\neg(p(x) \Leftrightarrow q(x))$.

Exercice 3.3. Même énoncé que l'exercice 3.2, avec

$$p(x) : x \in]3, 9],$$
$$q(x) : x \in [7, 15[,$$

où $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.4 (). Trouvez la classe de vérité des fonctions propositionnelles $p(x)$ suivantes.

1. $p(x) : (x > 1) \Rightarrow (x > 2)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
2. $q(x) : (x^2 = 4) \Rightarrow (x \leqslant 2)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
3. $r(x) : (x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2)$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.5 (). Soient les prédicats suivants, définis sur l'ensemble des triangles :

$$i(x) : x \text{ est isocèle},$$
$$e(x) : x \text{ est équilatéral},$$
$$r(x) : x \text{ est rectangle}.$$

Déterminez les classes de vérité des prédicats suivants :
— $(i(x) \vee e(x)) \wedge r(x)$;
— $(i(x) \wedge e(x)) \vee r(x)$;
— $i(x) \Rightarrow e(x)$;
— $e(x) \Rightarrow i(x)$;
— $e(x) \Rightarrow r(x)$.

CHAPITRE 4

Éléments de la théorie des graphes

Exercice 4.1 (👍). Dessinez un graphe à 5 sommets ayant les caractéristiques suivantes :

— il est connexe ;
— c'est un arbre ;
— son diamètre est égal à 3.

Exercice 4.2 (👍). Dessinez les graphes suivants :

— un graphe à 6 sommets de taille 7 et de diamètre 3 ;
— un graphe d'ordre 8, de taille 6 et de nombre chromatique 2 ;
— un graphe connexe d'ordre 6 et de taille 4.

Exercice 4.3 (👍). Soit le graphe de la figure 4.1.

— Quel est son ordre ?
— Quel est son diamètre ?
— Quel est son nombre chromatique ?
— Possède-t-il un cycle eulérien ?
— Possède-t-il un cycle hamiltonien ?
— Établissez sa matrice d'adjacence.

Exercice 4.4 (👍). Soit le graphe de la figure 4.2. Déterminez

1. son ordre ;

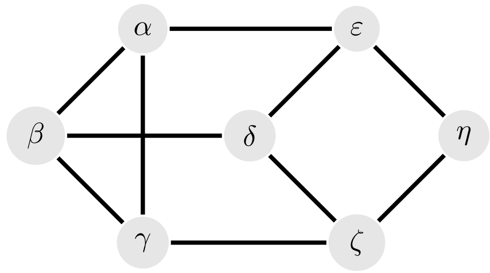

FIGURE 4.1 – Un exemple de graphe

2. le sommet de plus grand degré ;
3. la distance entre les sommets d et e ;
4. son diamètre ;
5. un cycle eulérien ;
6. un cycle hamiltonien ;
7. son nombre chromatique.

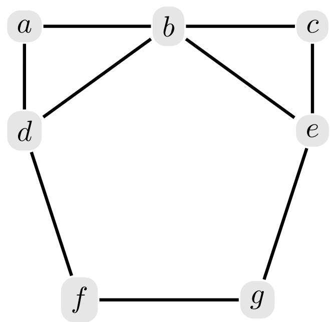

FIGURE 4.2 – Un exemple de graphe connexe

Exercice 4.5. Une ligue de football compte 5 équipes. Il est décidé lors d'un week-end que chaque équipe joue 4 matches et que 2 équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois.

1. Représentez une issue possible du tournoi à l'aide d'un graphe.
2. Donnez son type : simple ou multigraphe, dirigé ou non.
3. Donnez son ordre.
4. Donnez le degré de chacun des sommets de ce graphe.

5. Le graphe possède-t-il un cycle eulérien ? Si oui, donnez-en un.

Exercice 4.6. Dessinez un graphe non orienté dont le nombre de sommets de degré impair est impair.

Exercice 4.7 (). Soit G le graphe de matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

1. Sans dessiner G (les justifications seront donc basées sur la matrice d'adjacence) :
   — Quel est l'ordre et la taille du graphe G ?
   — Quel est le degré de chacun des sommets de ce graphe ?
   — G est-il un graphe eulérien ?

2. Dessinez le graphe G.

3. G est-il un graphe hamiltonien ?

4. Quel est le diamètre du graphe G ?

5. Quel est le nombre chromatique de G ?

Exercice 4.8. Soit G le graphe de matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Répondez *dans l'ordre* aux questions suivantes :

1. Sans dessiner G :

(a) G est-il un graphe ou un multigraphe ?
(b) G est-il orienté ?
(c) Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G ?
2. Dessinez G.
3. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans G ?
4. Fournissez la matrice d'adjacence M' associée au graphe G' obtenu en inversant le sens de tous les arcs de G.

Exercice 4.9 (☠). Soit B_n l'ensemble des chaînes de caractères binaires [1] de longueur n, et $G_n = (V, E)$ tel que $V = B_n$ et $(u, v) \in E$ si et seulement si u et v ne diffèrent que sur une unique position.

1. Dessinez G_1, G_2, G_3.
2. Déterminez l'ordre et la taille de G_n.
3. Déterminez le diamètre de G_n.
4. Déterminez si G_n est eulérien.

Exercice 4.10 (👍). Un constructeur téléphonique décide de disposer des antennes dans une vallée en suivant le schéma illustré à la figure 4.3. Chaque antenne est représentée par un point, et sa portée par un cercle en pointillés. Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe en précisant très clairement le rôle des sommets et des arêtes, et déterminez combien de fréquences différentes faut-il allouer au minimum pour que des utilisateurs puissent se parler sans interférence ?

Exercice 4.11. On veut transporter six produits chimiques par rail. Toutefois, certains de ces produits sont incompatibles et ne peuvent être transportés dans le même wagon. Les incompatibilités sont les suivantes :
— P_1 est incompatible avec P_2 et P_4,
— P_3 est incompatible avec P_2, P_4 et P_5,
— P_5 est incompatible avec P_2, P_3 et P_6.
Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe en précisant très clairement le rôle des sommets et des arêtes, et, sachant que le prix d'un wagon est de 2 500€, déterminez le coût minimum du transport de ces six produits.

1. Une chaîne de caractère est binaire si elle n'est composée uniquement des caractères « 0 » et « 1 »

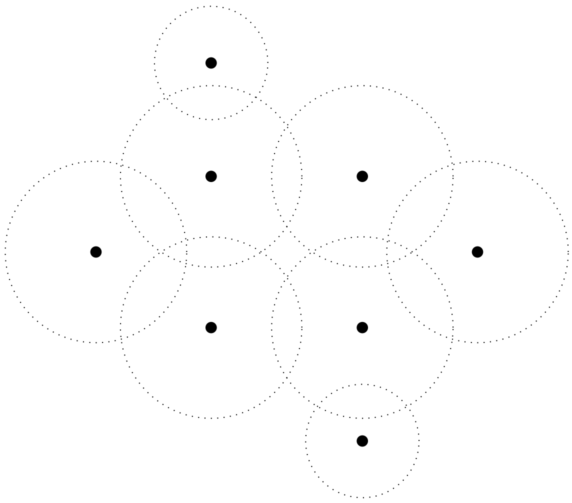

FIGURE 4.3 – Illustration d'une configuration d'antennes

CHAPITRE 5

Dénombrement

Exercice 5.1 (👍). Combien de bulletins doit-on remplir pour être certain de gagner le tiercé[1] dans l'ordre pour une course où participent 20 chevaux ?

Exercice 5.2 (👍). De combien de manières peut-on classer 30 fiches ?

Exercice 5.3 (👍). De combien de manières peut-on remplir une grille d'un bulletin de lotto belge[2], sachant qu'il faut cocher 6 cases parmi 42 ?

Exercice 5.4. Soit un ensemble de 11 points dans le plan tels que trois points quelconques de ceux-ci ne soient pas alignés. Combien y a-t-il de droites joignant ces points deux à deux ?

Exercice 5.5. De combien de manières peut-on distribuer 5 chapeaux distincts à 5 personnes de telle manière que chacune ait un chapeau ?

Exercice 5.6. Combien d'équipes de 6 personnes peut-on former si l'on dispose de 10 personnes ?

Exercice 5.7 (👍). Combien peut-on former de codes de 8 chiffres décimaux différents ?

1. Le tiercé est une jeu dont le but est de trouver les trois premiers chevaux qui franchiront la ligne d'arrivée.
2. Le but d'un lotto belge est de trouver l'ensemble des six numéros qui seront trouvés.

— Combien parmi eux se terminent par 3 ?
— Combien parmi eux commencent par 12 ?
— Combien parmi eux se terminent par 3 ou par 6 ?
— Combien parmi eux ne se terminent ni par 3, ni par 6 ?
— Combien parmi eux commencent par 3 et finissent par 6 ?
— Combien parmi eux commencent par 3 ou finissent par 6 ?

Exercice 5.8 (👍). Même question que l'exercice 5.7 lorsque les chiffres ne sont pas nécessairement différents.

Exercice 5.9 (👍). Si on définit le mot comme un assemblage de lettres, combien de mots différents peut-on former avec toutes les lettres des mots :

1. PARIS ?
2. HURLUBERLU ?
3. HURLUBERLU contenant deux « R » consécutifs ?
4. HURLUBERLU ne contenant pas deux « R » consécutifs ?

Exercice 5.10. Une réunion met en présence 50 personnes. Combien de poignées de mains sont échangées, si tout le monde se salue et que deux personnes ne se saluent pas plusieurs fois ?

Exercice 5.11. Les 9 gagnants d'un concours peuvent choisir entre 4 lots différents, chaque lot existant en 9 exemplaires. Combien de choix distincts sont possibles ?

Exercice 5.12 (👍). Parmi 50 professeurs et 600 élèves on doit choisir des délégués pour former une commission comprenant 4 professeurs et 3 élèves. Déterminez le nombre de possibilités de commissions.

Exercice 5.13 (👍). Combien peut-on former de plaques d'immatriculation du type 1 chiffre - 3 lettres - 3 chiffres ?

Exercice 5.14. Combien peut-on former de codes de 5 chiffres différents :

1. qui comprennent le « 5 » ?
2. qui comprennent le « 3 », mais pas le « 7 » ?

Exercice 5.15. Même question que l'exercice 5.14 mais les chiffres peuvent se répéter.

Exercice 5.16 (👍). Pour ranger 20 nouveaux ouvrages dans une bibliothèque, il reste 7 places dans un premier rayon, 5 places dans un second rayon et 8 dans un troisième. De combien de manières peut-on répartir ces 20 volumes dans ces trois rayons, l'ordre dans un rayon étant sans importance ?

Exercice 5.17. Parmi les codes de 5 chiffres, combien comprennent une fois le chiffre 3, deux fois, trois fois, quatre fois, cinq fois ?

Exercice 5.18. De combien de manières peut-on distribuer 4 chapeaux identiques, 2 casquettes identiques et un béret à 7 personnes, chaque personne devant recevoir un couvre-chef ?

Exercice 5.19. Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot « TOULOUSE » en respectant la place des consonnes ?

Exercice 5.20. Un train comprend 3 wagons de première classe, 8 wagons de seconde classe, 2 wagons couchettes, 1 wagon-lit et un fourgon postal. De combien de manières peut-on disposer ces wagons en considérant que les wagons d'une même catégorie ne doivent pas être distingués ?

Exercice 5.21. Combien de nombres entiers de 4 chiffres différents supérieurs à 3000 et se terminant par 2 ou 6 peut-on former ?

Exercice 5.22. Un examen comprend 30 questions à choix multiples. Pour chaque question, on propose 5 réponses.

1. De combien de manières différentes peut-on répondre à cet examen ?
2. Si pour chaque question une seule réponse est exacte, de combien de manières peut-on répondre correctement à exactement 15 des 30 questions ?

Exercice 5.23. On jette trois dés : un bleu, un vert et un rouge. Combien de nombres de trois chiffres peut-on obtenir si le dé bleu donne le chiffre des centaines, le vert celui des dizaines et le rouge celui des unités ?

Exercice 5.24. Combien peut-on former de codes de 5 chiffres différents :

1. qui comprennent le 7 et le 9 ?
2. qui comprennent le 7 ou le 9 ?
3. formés de 3 chiffres pairs et 2 chiffres impairs ?

Exercice 5.25. Calculez les coefficients en x^6 et en x^2 dans le développement des binômes suivants :

1. $(2x+3)^7$
2. $\left(3x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$

Exercice 5.26. Sept joueurs de tennis se rencontrent sur un court. Ils désirent disputer des matchs doubles (2 contre 2). De combien de manières cela est-il possible ?

Exercice 5.27. On définit un système d'immatriculation du type 2 lettres - 3 chiffres, les lettres et les chiffres pouvant être mélangés. Combien d'immatriculations peut-on effectuer ainsi ?

Exercice 5.28 (👍). Lara a reçu de son frère un sac de 500 bonbons rouges, verts, jaunes, bleus et noirs, tous présents en même quantité dans le sac. Lara est gourmande, mais difficile : elle préfère les bonbons rouges. Combien de bonbons doit-elle prélever au minimum (au hasard) dans le sac pour être certain d'en avoir quatre rouges ?

Exercice 5.29 (👍). Trois couples mixtes vont dîner ensemble au restaurant. Ils prennent place autour d'une table rectangulaire dont les chaises sont agencées selon le schéma illustré à la figure 5.1.

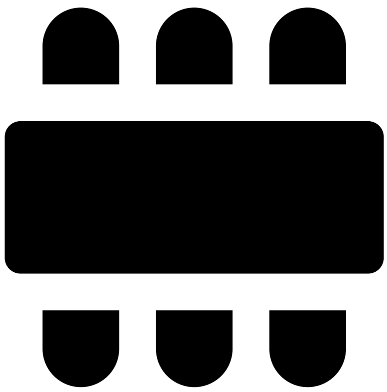

FIGURE 5.1 – Illustraton d'une table de 6 personnes

De combien de façons peuvent-ils prendre place autour de cette table
- s'ils sont assis dans un ordre quelconque ?
- si les trois femmes sont assises d'un côté, et les homme de l'autre ?
- si chaque homme est assis en face de sa femme ?
- en respectant l'alternance homme / femme (c'est-à-dire que 2 hommes ou 2 femmes ne sont jamais assis côte à côte) ?

Deuxième partie

Algèbre linéaire

CHAPITRE 6

Calcul vectoriel

Exercice 6.1 (👍)**.** Soient les points du plan $A = (1, 1)$, $B = (-2, 1)$, $C = (3, 1)$, $D = (-2, -3)$ et $E = (3, -1)$. Calculez et représentez dans le plan les vecteurs

— $\overrightarrow{AB}$,
— $\overrightarrow{BC}$,
— $\overrightarrow{BD}$,
— $\overrightarrow{BE}$,
— $\overrightarrow{EB}$,
— $\overrightarrow{CD}$,
— $\overrightarrow{CE}$,
— $\overrightarrow{DA}$,
— $\overrightarrow{EC}$.

Exercice 6.2. Donner les composantes puis représenter le vecteur joignant A à B dans chacun des cas suivants :

— $A = (1, 2)$, $B = (7, 7)$
— $A = (-1, 2)$, $B = (3, 2)$
— $A = (1, 2)$, $B = (4, 4)$
— $A = (0, -1)$, $B = (-3, 3)$
— $A = (0, 0)$, $B = (3, 2)$

Parmi ces vecteurs,

1. quels sont les vecteurs égaux ?
2. quels sont les vecteurs colinéaires ?

Exercice 6.3. Un homme fait quatre pas vers le nord et deux vers l'ouest. Il avance ensuite de 10 pas vers le sud et encore un pas vers l'ouest. Sachant que chacun de ses pas fait précisément 70 centimètres :

1. Quelle est la distance totale parcourue ?
2. À quelle distance se trouve-t-il de son point de départ ?

Exercice 6.4 (👍). Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ illustrés à la figure 6.1. Calculez et représentez dans le plan

— $\vec{u} + \vec{v}$,
— $2(\vec{u} + \vec{v})$,
— $\vec{u} - \vec{v}$,
— $\vec{v} - \vec{u}$,
— $2\vec{w}$,
— $-\vec{v}$,
— $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$,
— $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$,
— $\vec{w} - 2\vec{u} + \vec{v}$.

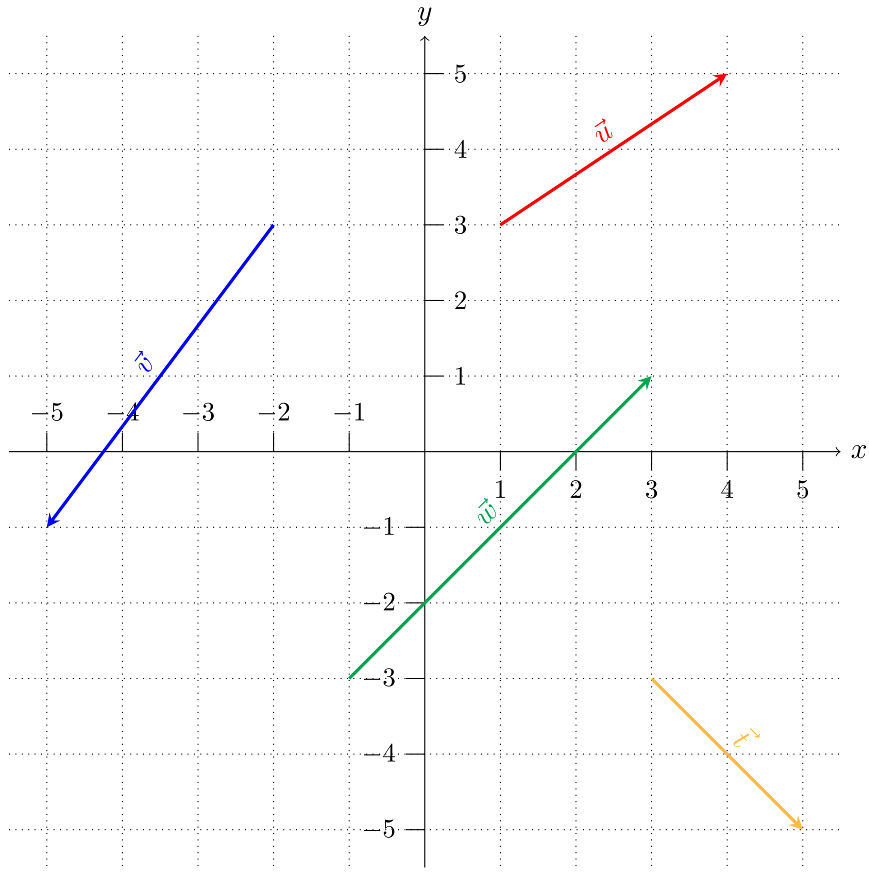

FIGURE 6.1 – Illustration de vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Exercice 6.5 (👍). Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{t}$ illustrés à la figure 6.1. Calculez

— $||u||$,
— $||v||$,
— $||w||$,
— $\vec{u} \cdot \vec{v}$,
— $\vec{u} \cdot 2\vec{u}$,
— $\vec{v} \cdot (-\vec{w})$,
— $\vec{w} \cdot \vec{t}$,
— $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Exercice 6.6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} ||u|| \cdot ||v||$. Quelle est la valeur de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 6.7 (👍). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$. Que vaut l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 6.8 (👍). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||u|| = ||v|| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$. Que vaut $||\vec{u} + \vec{v}||^2$?

Exercice 6.9. Soient $A = (1, 1)$ et $B = (3, 2)$. Quelle est la norme du vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB}$?

Exercice 6.10. Soient $A = (2, 0)$, et un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Quelles sont les coordonnées des points B satisfaisant $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = 2$?

Exercice 6.11 (👍). Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux, et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{u} - 2\vec{v}, \\ \vec{b} &= \vec{v} + \lambda\vec{u}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de λ les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 6.12. Soient $A = (2, 6)$, $B = (0, 10)$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ orthogonaux avec $\vec{u} = (-3, 2)$ et $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$. Que vaut $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$?

Exercice 6.13. Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même norme tels que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$\vec{b} = \lambda\vec{v} + \vec{u}$$

— Quelle est la valeur de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
— Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils orthogonaux ?

CHAPITRE 7

Matrices

Exercice 7.1 (). Soit les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $A + B$.
2. Donner la transposée de A, et la transposée de B.
3. Les expressions suivantes ont elles un sens ? Si oui, calculer leur valeur.
   (a) AB
   (b) $A^T B$
   (c) BA
   (d) AB^T
   (e) $B^T A$
   (f) $(AB)^T$
   (g) BA^T

Exercice 7.2 (). Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices réelles. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + B^2$.

Exercice 7.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice réelle ; trouver toutes les matrices X telles que $AX = A$.

Exercice 7.4. Démontrer que si les matrices réelles A et B sont telles que $AB = A$ et $BA = B$, alors $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Exercice 7.5. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.6. Déterminer, s'ils existent, les inverses des matrices réelles suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 7.7. Déterminer, s'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.8. Soit $n \in \mathbb{N}_0$, calculez le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \binom{n+2}{3} \\ 1 & \binom{n+3}{1} & \binom{n+3}{2} & \binom{n+3}{3} \end{vmatrix}$$

CHAPITRE 8

Diagonalisation

Exercice 8.1 (👍). Résoudre les systèmes réels suivants, et exprimez en compréhension ou en extension l'ensemble des solutions.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 1x + 1y = 3 \\ 4x + 4y = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases}$

Exercice 8.2. Résoudre les systèmes réels suivants, et exprimez en compréhension ou en extension l'ensemble des solutions.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 4y + z = 12 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y - 3z - t = 1 \\ x - 4y + 3z + 4t = -4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y - 11z = 18 \end{cases}$

Exercice 8.3. Un problème italien de Tartaglia (XVI$^{\text{e}}$ s.)
« Trois joyeux compagnons qui avoient deniers en bourse, s'entrefirent quelques questions, et dist le premier aux deux autres, si vous me donnez la moytié de voz ducas, j'auray ensemble avec ceux que je peux avoir de présent 20 ducas : le second dist aux deux autres, si vous me donner le tiers de voz ducaz, j'auray ensemble, avec ceux que je peux avoir 20 ducas ; mais dist le troisième aux deux autres, donnez moy le quart de ceux que vous avez, et avec ceux que j'ay, j'auray 20 ducas aussi bien que vous : combien avait de ducas un chacun d'iceux ? ».

Exercice 8.4. Un problème de Bachet (XVII$^{\text{e}}$ s.)
« Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus. Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun ; en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun ; finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun : cela fait, chacun se trouve 8 écus. On demande combien chacun en avait du commencement » (extrait des « Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres », publié en 1612).

Exercice 8.5. Un problème stupide (XX$^{\text{e}}$ s.)
Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 7 ans, il aura 5 fois l'âge de son fils. Que fait le père ?

Exercice 8.6. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ x + \lambda y + z = 2\lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Exercice 8.7. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = 1 \\ x + 2y = \lambda - 1 \end{cases}$$

Exercice 8.8. Soit $S = \left\{ \left(\alpha, \dfrac{2\alpha - 7}{5} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R}\right) \right\}$ l'ensemble des solutions d'un système à deux équations linéaires et deux inconnues.

— Les couples $(-11, -3)$ et $(-5, 2)$ sont-ils solutions du système ?
— Représentez S dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$.
— Soit $A = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (s,t) \cdot (2,-5) \geqslant 0 \right\}$. Montrez que $S \subseteq A$ et $A \nsubseteq S$.

Exercice 8.9 (👍). Parmi les applications suivantes, indiquez lesquelles sont linéaires. Le cas échéant, modélisez sous forme matricielle, et calculez l'image du vecteur $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

— $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 0, x + z)$,
— $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (2x + 4, 3z - x, y - 2z)$,
— $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3, 2y - z, x + z)$,
— $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x + 3y, 2yz, x^2 + y)$.

Exercice 8.10 (👍). Soit $\vec{v} = (2, 1, 3)_\varepsilon$, exprimez ce vecteur dans la base $\phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 \}$ telle que

— $\phi_1 = \{ 1, 1, 1 \}$,
— $\phi_2 = \{ 1, 3, 2 \}$,
— $\phi_3 = \{ 1, 2, 1 \}$.

Exercice 8.11. Soit $\vec{v} = (-1, 3, 6)_\varepsilon$, exprimez ce vecteur dans la base $\phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 \}$ telle que

— $\phi_1 = \{ 2, 3, 2 \}$,
— $\phi_2 = \{ 1, 2, 1 \}$,
— $\phi_3 = \{ 1, 1, 2 \}$.

Exercice 8.12 (👍). Trouver les vecteurs et valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.13. Trouver les vecteurs et valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.14 (👍). Trouvez une matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ admettant

— $(1,1)$ comme vecteur propre, de valeur propre 5,

— $(1,2)$ comme vecteur propre, de valeur propre 4.

Exercice 8.15. Trouvez une matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ admettant

— $(-1,-6,13)$ comme vecteur propre, de valeur propre 0,

— $(-2,-3,2)$ comme vecteur propre, de valeur propre 3,

— $(-1,2,1)$ comme vecteur propre, de valeur propre -4.

Troisième partie

Mathématiques continues

CHAPITRE 9

Fonctions réelles, dérivation et intégration

Exercices sur les dérivées et tangentes • Application des dérivées, problèmes d'optimisation • Primitives et intégrales

Les exercices de ce chapitre sont répartis en diverses sections, dépendant de leur thématique.

9.1 Exercices sur les dérivées et tangentes

Exercice 9.1 (👍). Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

— $f_1(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$,
— $f_2(x) = (-x + 7)^4$,
— $f_3(x) = \sqrt{1 - x^3}$,
— $f_4(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$,
— $f_5(x) = 3\sin\left(\dfrac{3}{2}x^2 + 2\right)$,
— $f_6(x) = \log_3\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)$,
— $f_7(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2\sin(x^2)}{-3x + e^5}}$,
— $f_8(x) = \dfrac{e^{\sin(2x^3+3x^2)}}{(x+2)^4}$.

Exercice 9.2. Calculez la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 20$
2. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
3. $x^2 \cos(x)$
4. $\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$
5. $\sqrt{3x + 2}$
6. $\ln(5x^2 + 1)$
7. e^{x^2+1}
8. $\dfrac{2e^x - x}{2e^x + x}$

Exercice 9.3 (). Calculez la dérivée seconde des fonctions :

$$f_1(x) = 2x^2 - \frac{4}{x^2}$$
$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2 - 1}.$$

Exercice 9.4 (). Considérez le graphe de la fonction continue et dérivable $f(x)$ illustré à la figure 9.1. Parmi les graphes de la figure 9.2, lequel représente la fonction $f'(x)$?

Exercice 9.5 (). Considérez à la figure 9.3 le graphe d'une fonction et de sa tangente au point 1. Que vaut la dérivée au point d'abscisse 1 ?

Exercice 9.6. À partir du graphe de la fonction illustré à la figure 9.4, esquissez le graphe de sa fonction dérivée.

Exercice 9.7 (). Trouvez l'équation des tangentes aux graphes des fonctions suivantes au point indiqué.

1. en -1 :
   $$f(x) = 2x^3 - 1$$
2. en 2 :
   $$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$
3. en 1 :
   $$f(x) = \frac{1}{x + 2}$$
4. en $1/2$:
   $$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$
5. en 3 :
   $$f(x) = \frac{3x + 7}{x - 4}$$
6. en $\pi/2$:
   $$f(x) = \cos(x)$$

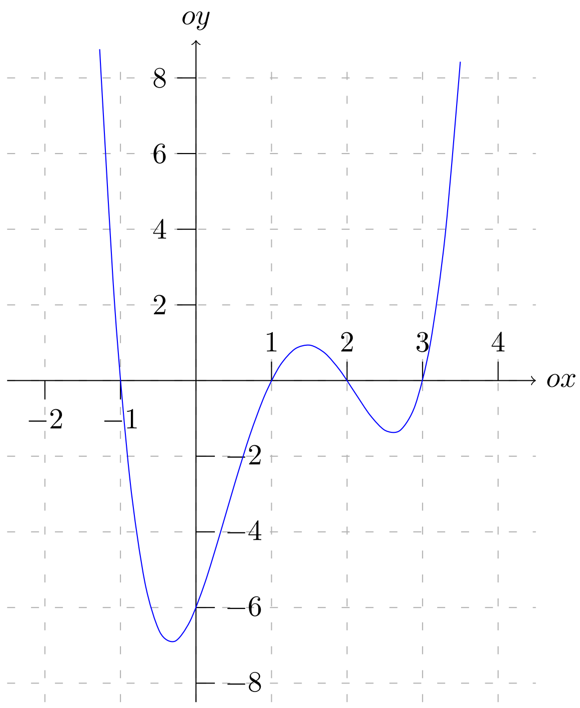

Figure 9.1 – Exemple de graphe de fonction dérivable

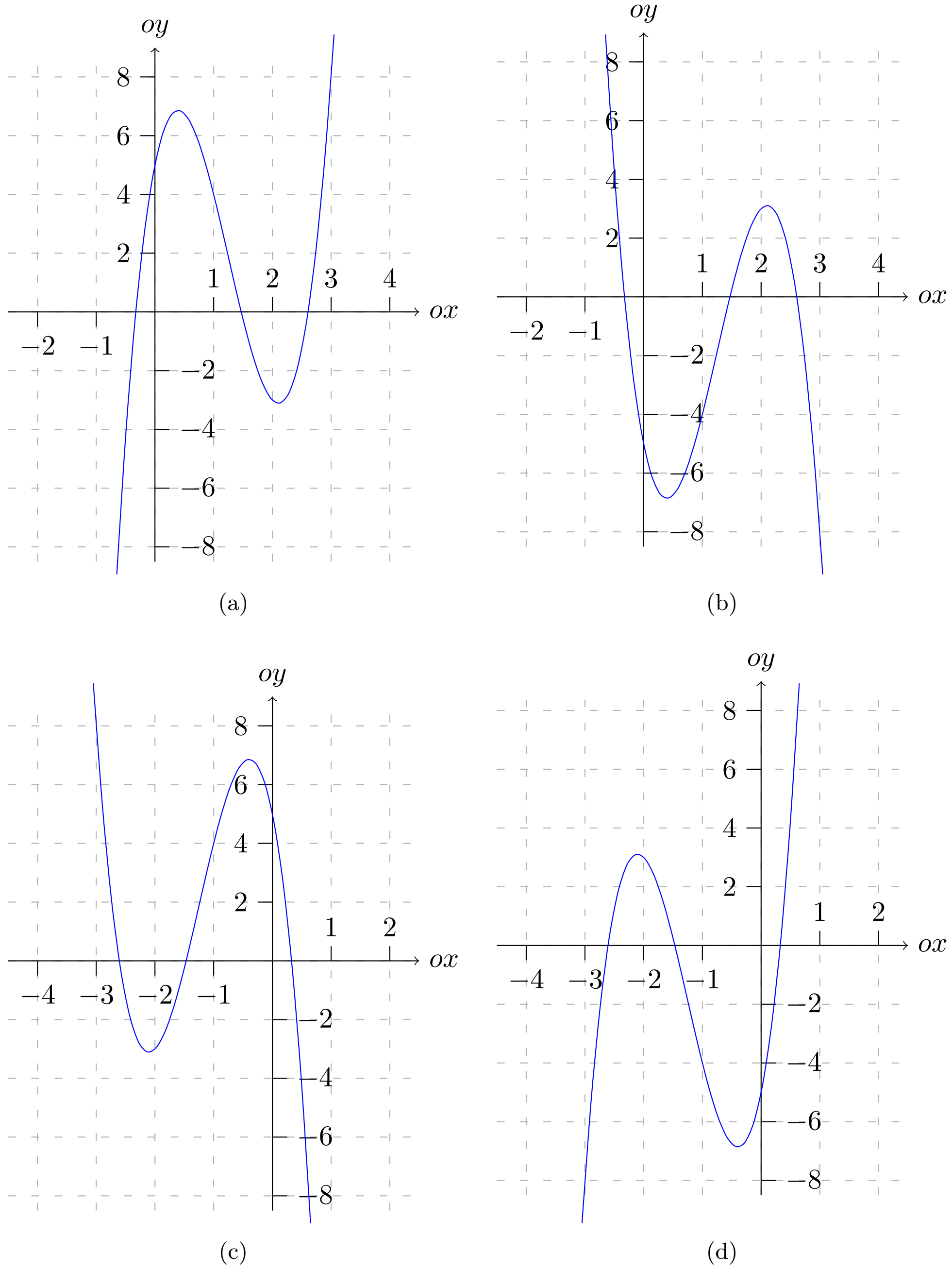

FIGURE 9.2 – Propositions de dérivées

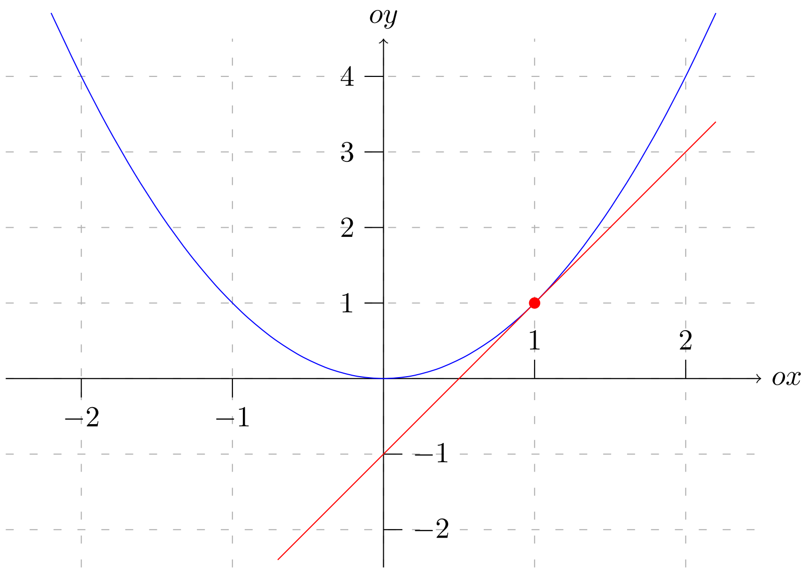

FIGURE 9.3 – Une fonction et sa tangente

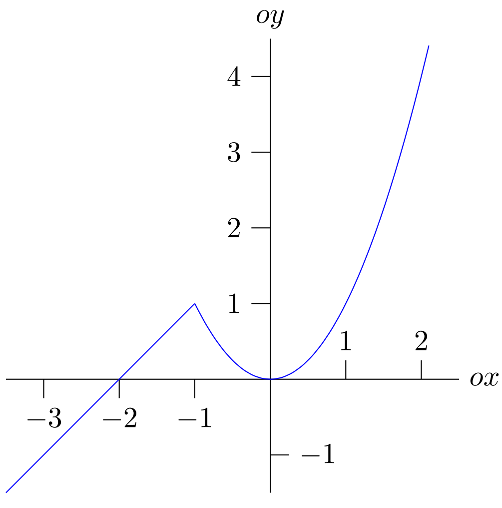

FIGURE 9.4 – Exemple de graphe de fonction

Exercice 9.8 (👍). Considérez le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + px + q$. Déterminez p et q pour que ce graphe soit tangent à la droite d'équation $y = x-1$ au point de coordonnées $(3, 2)$.

Exercice 9.9. Soit la fonction $f(x) = x^4/4 - x^3 - 2x^2 + 1$. Recherchez ses extrema et ses points d'inflexion. Étudiez sa croissance et sa concavité. Esquissez son graphe.

Exercice 9.10 (👍). Pour quelles valeurs de a et b la fonction $f(x) = ax + b/x$ possède-t-elle un extremum en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$? Préciser la nature de cet extremum, et donner l'équation de la tangente au graphe de $f(x)$ en $x = -2$.

Exercice 9.11. Pour quelles valeurs de a et b la fonction $f(x) = x^3 - 4ax + b$ possède-t-elle un minimum en 2, et passe-t-elle par le point $(1, -5)$? Donnez l'équation de la tangente au graphe de $f(x)$ lorsque $x = 1$.

Exercice 9.12 (👍). Soit la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminez a, b, c et d afin que

- f admette une racine en $\frac{1}{4}$,
- f admette un minimum en 1,
- la tangente au graphe de f en $x = -1$ soit parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 12$,
- la tangente au graphe de f en $x = \frac{3}{2}$ soit perpendiculaire à la droite d'équation $y = -\frac{2}{13}x + 12$.

9.2 Application des dérivées, problèmes d'optimisation

Exercice 9.13 (👍). Aux quatre coins d'un carré de côté a, on découpe quatre carrés isométriques. Par pliage, on obtient une boîte (sans couvercle). Déterminez la longueur x des côtés des carrés découpés pour que le volume de la boîte soit maximum.

Exercice 9.14. Un fermier possède 240 mètres de clôture pour encadrer un terrain rectangulaire dont un côté est le mur de sa ferme. Quelles doivent être les dimensions du terrain clôturé pour que sa surface soit la plus grande possible ?

Exercice 9.15. Quelles sont les dimensions de la boîte de conserve cylindrique pouvant contenir 1 litre, et dont la surface est la plus petite possible ?

Exercice 9.16. Une gouttière a une section trapézoïdale. La base de ce trapèze est de même longueur que les côtés latéraux. De quel angle ces côtés doivent-t-ils être inclinés afin que la gouttière permette un écoulement maximal ?

Exercice 9.17 (👍). Pour quelle droite D de pente négative et passant par $P = (3, 2)$, l'aire du triangle délimité par les axes ox, oy et D est-elle minimale ?

9.3 Primitives et intégrales

Exercice 9.18 (👍). Calculez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int 7\,dx$
2. $\displaystyle\int (4x^5 + 3x^2)\,dx$
3. $\displaystyle\int (3x + 4)^2\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{4}{x^4}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int (3x + 4)^7\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

Exercice 9.19. Calculez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}\,dx$
2. $\displaystyle\int (1 - x)\sqrt{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$
4. $\displaystyle\int xe^x\,dx$
5. $\displaystyle\int x^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$
6. $\displaystyle\int e^{5x}\sin(3x)\,dx$

Exercice 9.20. Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1 + 2x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{5} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 63x^6\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{5}{7\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 9.21 (👍). Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,dx$ où $n \in \mathbb{N}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(nx)\,dx$ où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9.22 (👍). Dessinez le graphique de la fonction $f(x) = e^{-x}$ et calculez la surface située entre la courbe et les deux axes ox et oy.

Exercice 9.23. Calculez l'aire comprise entre la courbe d'équation $f(x) = x^2 + 3x - 10$ et l'axe des x.

CHAPITRE 10

Nombres complexes

Exercice 10.1 ( ). Représenter les complexes suivants dans le plan de Gauss :

1. 0,
2. 2,
3. πi,
4. $-i$,
5. $2 + 3i$,
6. $2 - 3i$,
7. $\sqrt{2} - i$.

Exercice 10.2 ( ). Effectuer :

1. $(1 + i) - (31 - 3i)$,
2. $(1 - i)(1 + i)$,
3. $(3 + i)(\sqrt{3} + 3i)$,
4. $8i + (3 - 7i)(1 + \pi i)$,
5. $(5 - 2i)^2$,
6. $1 + i^3 + i^6$.

Exercice 10.3 ( ). Ramener sous la forme $a + bi$ les complexes suivants :

1. $(1 + i)^3$,
2. $\dfrac{1}{i}$,
3. $\dfrac{1}{1 + i}$,
4. $\dfrac{5}{3 + 2i}$,
5. $\dfrac{5 + i}{1 - i}$,
6. i^4,
7. i^5,
8. i^{120},

Exercice 10.4 (👍). Calculer le module et l'argument des complexes suivants. Ensuite, les écrire sous forme trigonométrique.

1. 51,
2. i,
3. $-i$,
4. $-1-i$,
5. $3+3i$,
6. $1-\sqrt{3}i$
7. $-3+3i$,
8. $3+4i$.

Exercice 10.5 (👍). En se servant de la forme trigonométrique, calculer :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{34}$$

Exercice 10.6. Calculer

1. $(1+i)^{20}$,
2. $(1-i)^{8}$,
3. $(2\sqrt{3}+2i)^{5}$,
4. $(1-\sqrt{3}i)^{5}$

Exercice 10.7. Calculer les complexes z tels que $z^2 = c$, avec c égal à

1. -41,
2. $5i$,
3. $2-3i$,
4. $1+i$.

Exercice 10.8 (👍). Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^8 = 1$,
2. $z^3 = i$,
3. $z^5 = 32$,
4. $z^3 = 1+i$.

Représenter également les solutions.

Exercice 10.9 (👍). Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $x^2+1=0$,
2. $4x^2+9=0$,
3. $x^2-8x+17=0$,
4. $(1+i)x+(3-i)=0$,
5. $x^4+x^2+1=0$,
6. $x^5+3x^3-x=0$,
7. $x^2-(1+3i)x-4$,
8. $x^4-(1+3i)x^2-4$.