Impédance

- généralisation de la notion de résistance (peut dépendre de la fréquence)
- nombre complexe $\mathbf{Z} = R + jX$
- la partie réelle $R = \mathfrak{Re}(\mathbf{Z})$ est appelée résistance. La partie résistive s'exprime en ohms (Ω).
- la partie imaginaire $X = \mathfrak{Im}(\mathbf{Z})$ est appelée réactance. La partie réactive dépend de la fréquence et s'exprime en ohms (Ω).
- le module de $\mathbf{Z}$: $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$

Exemples :

- Pour une résistance $\mathbf{Z} = R$, élément purement résistif.
- Pour un condensateur $\mathbf{Z} = \dfrac{-j}{\omega C}$, élément purement réactif.
- Pour une bobine (inductance) $\mathbf{Z} = j\omega L$, élément purement réactif.

Loi d'Ohm généralisée

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

Attention $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{I}$ sont des nombres complexes !

En module, nous avons : $|U| = |Z| \cdot |I|$

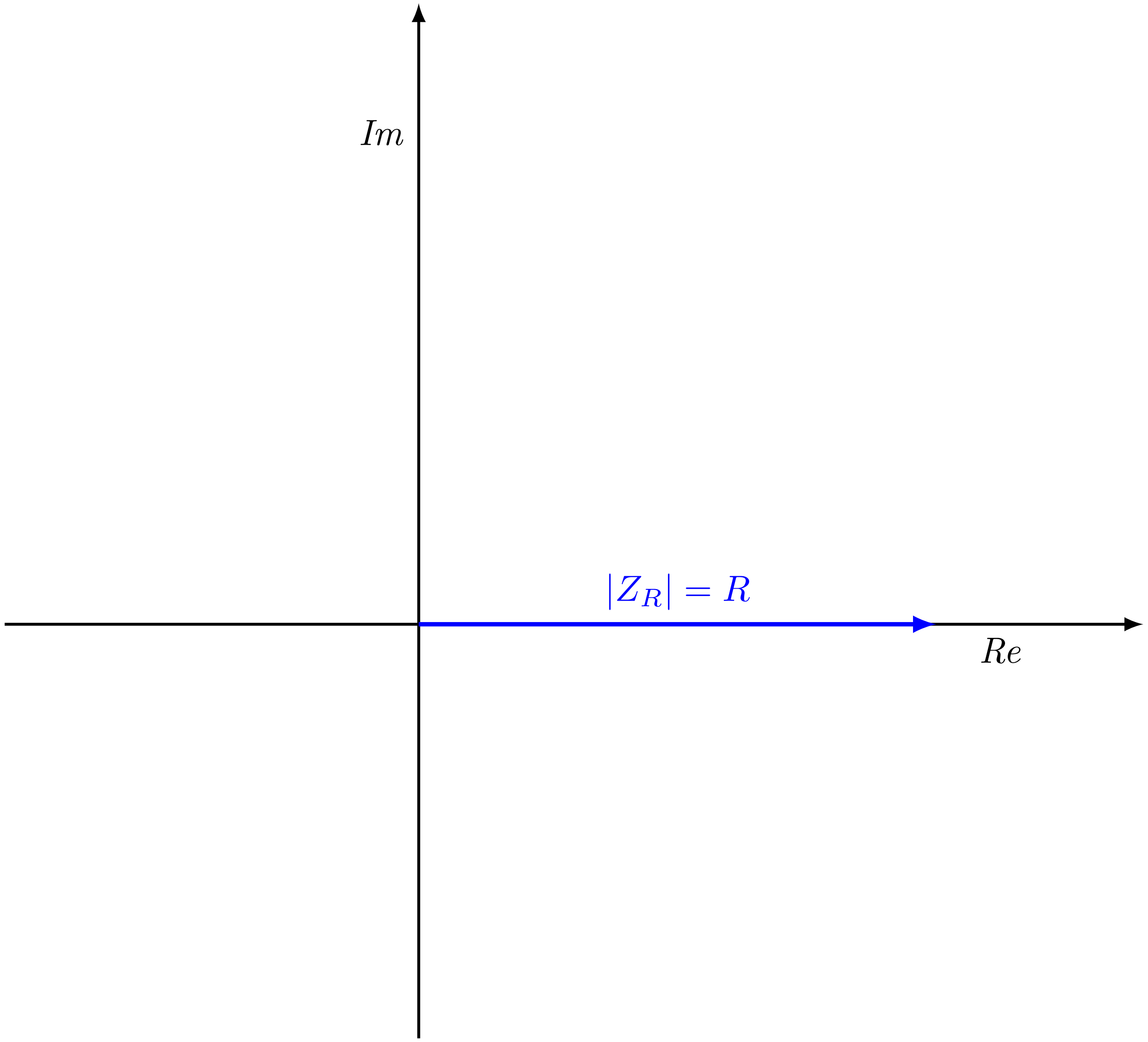
ou $\dfrac{|U|}{|I|} = |Z|$

Exemples :

- Pour une résistance $\dfrac{|U|}{|I|} = R$
- Pour un condensateur $\dfrac{|U|}{|I|} = \dfrac{1}{\omega C}$
- Pour une bobine (inductance) $\dfrac{|U|}{|I|} = \omega L$

Impédance de R

- $\mathbf{Z_R} = R$ (nombre réel)

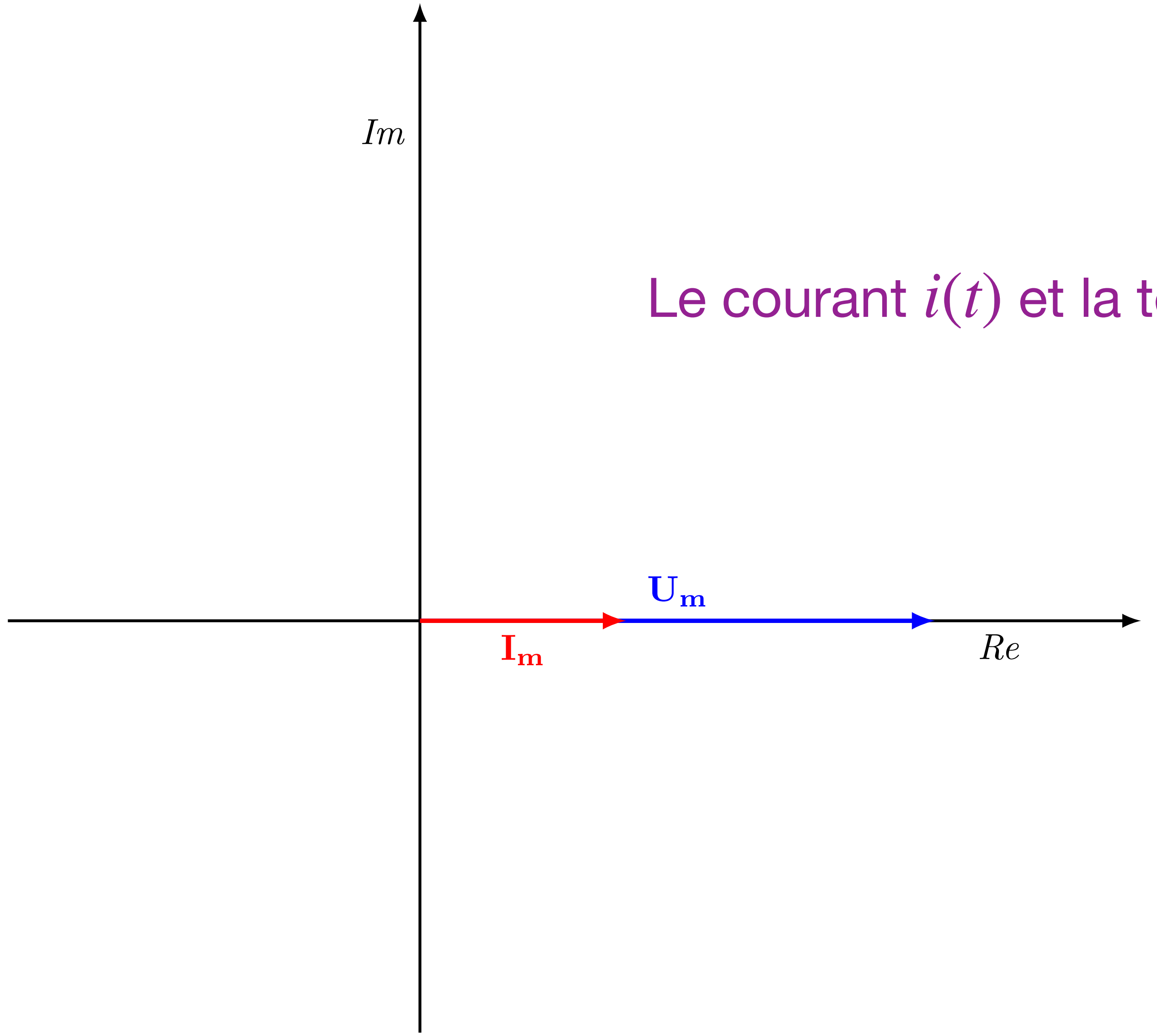


Impédance de R

- $\mathbf{Z_R} = R$ (nombre réel)
- $\mathbf{U} = R \cdot \mathbf{I}$,

où $\mathbf{U} = U_m e^{j\phi}$ et $\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$ sont les amplitudes complexes

- $U_m = RI_m$



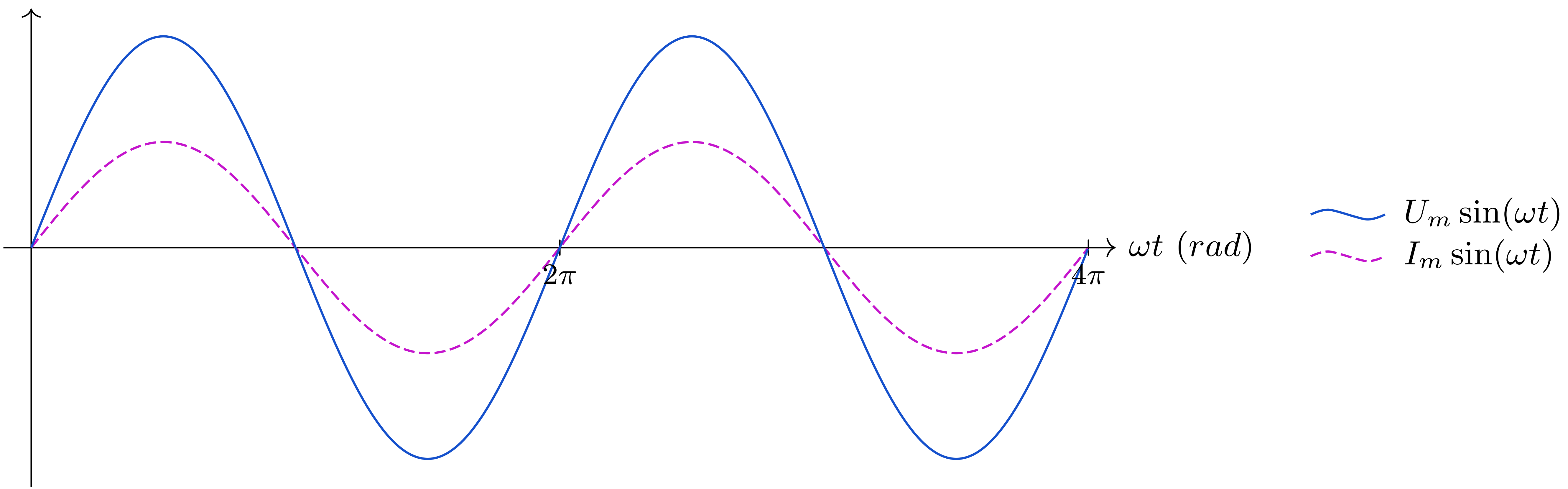
Le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont en phase.

Impédance de R

- $\mathbf{Z_R} = R$ (nombre réel)
- $\mathbf{U} = R \cdot \mathbf{I}$,

où $\mathbf{U} = U_m e^{j\phi}$ et $\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$ sont les amplitudes complexes

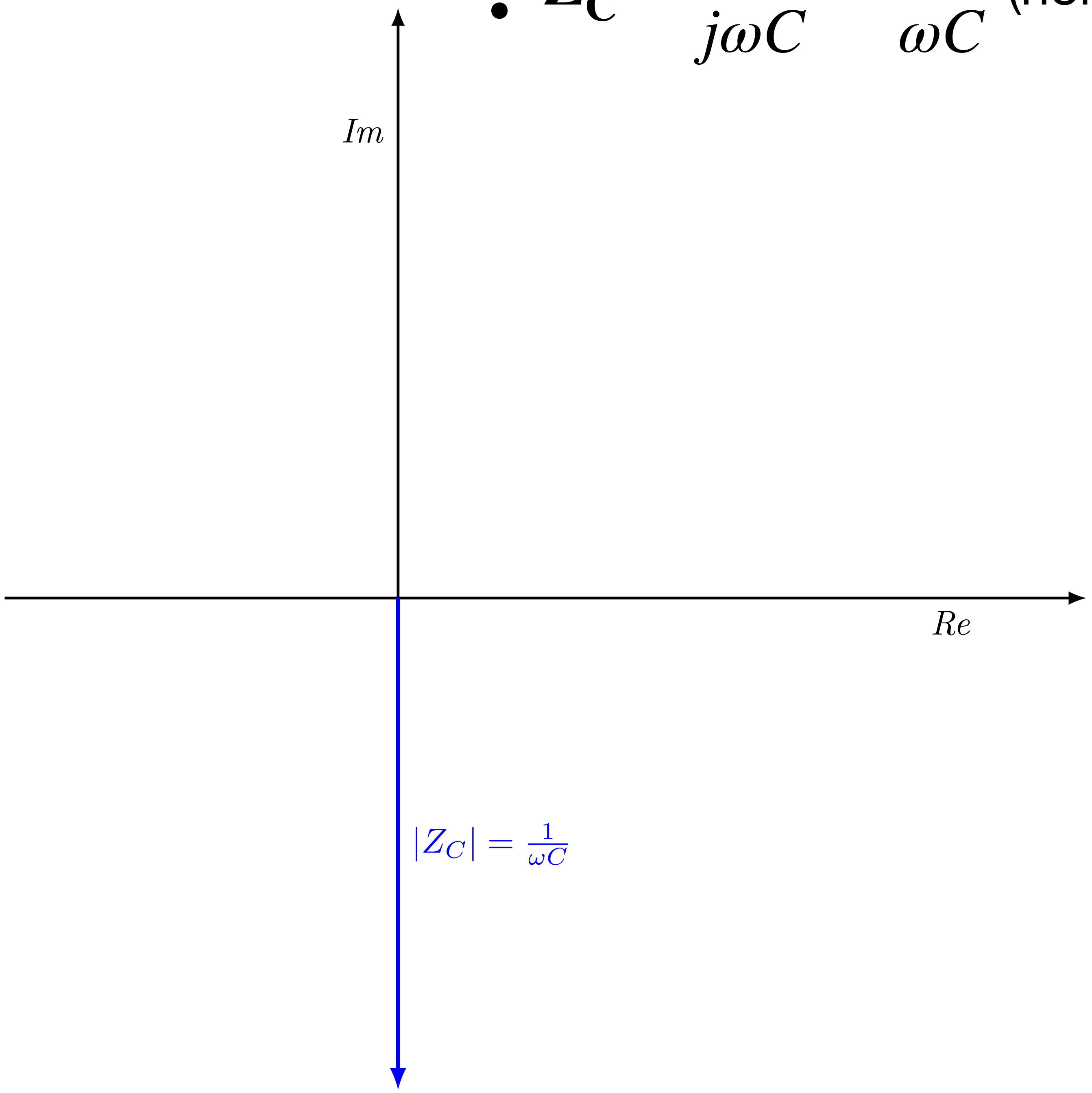
- $U_m = RI_m$



Le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont en phase.

Impédance de C

- $\mathbf{Z_C} = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{-j}{\omega C}$ (nombre imaginaire pur)



Impédance de C

- $\mathbf{Z_C} = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{-j}{\omega C}$ (nombre imaginaire pur)

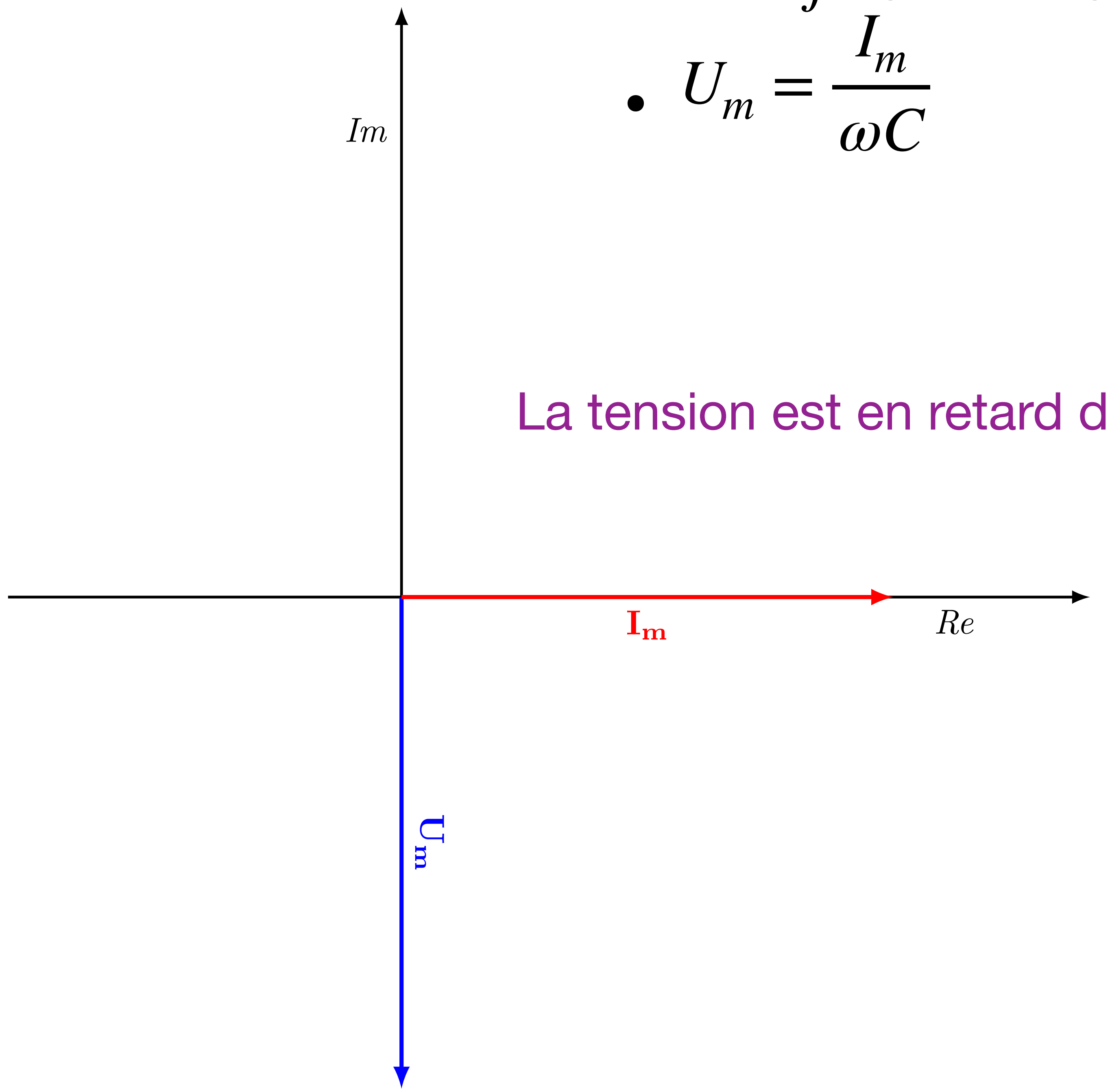
- $|\mathbf{Z_C}| = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C}$

- Lorsque $\lim_{\omega \to 0} |\mathbf{Z_C}| = +\infty$, à basse fréquence, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert (un interrupteur ouvert).

- Lorsque $\lim_{\omega \to +\infty} |\mathbf{Z_C}| = 0$, à haute fréquence, le condensateur se comporte comme un court-circuit (un interrupteur fermé).

Impédance de C

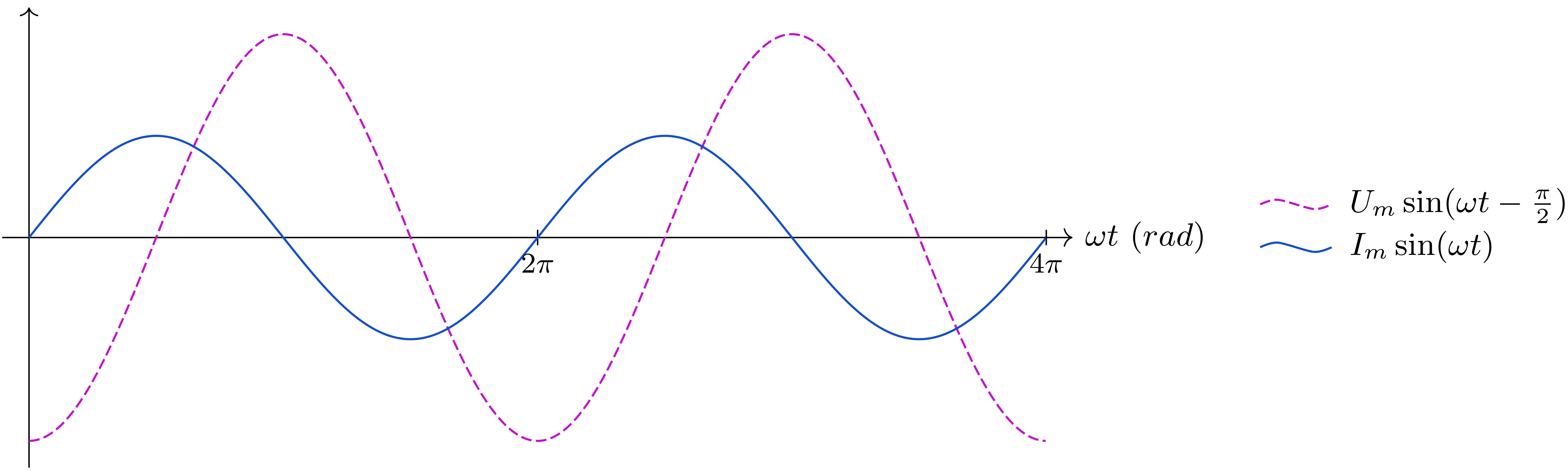
- $\mathbf{Z_C} = \dfrac{1}{j\omega C}$ (nombre imaginaire pur)
- $\mathbf{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I} = \dfrac{1}{\omega C}\mathbf{I} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $U_m = \dfrac{I_m}{\omega C}$



La tension est en retard de phase de $\dfrac{\pi}{2}$ sur le courant.

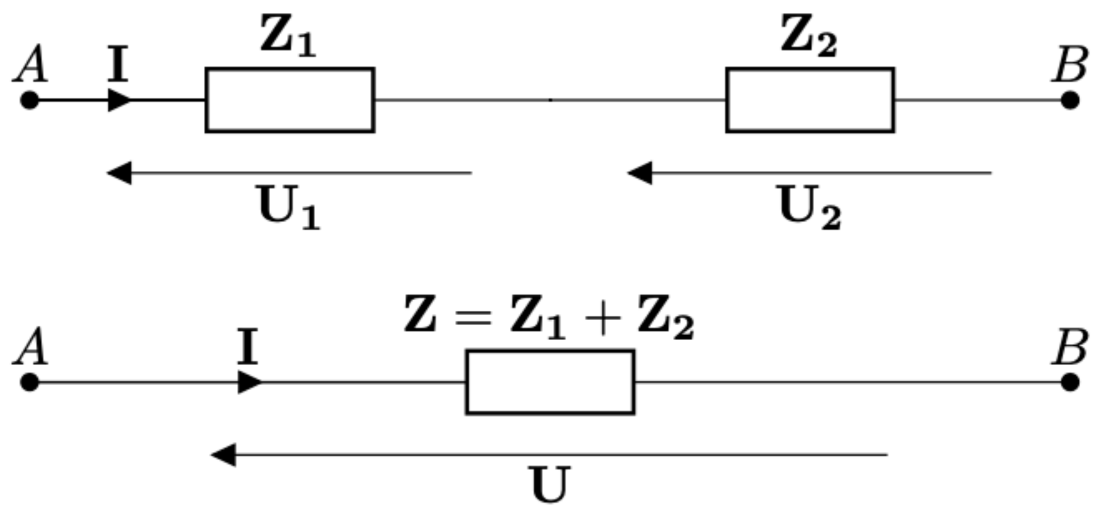
Impédance de C

- $\mathbf{Z_C} = \dfrac{1}{j\omega C}$ (nombre imaginaire pur)
- $\mathbf{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I} = \dfrac{1}{\omega C}\mathbf{I} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $U_m = \dfrac{I_m}{\omega C}$



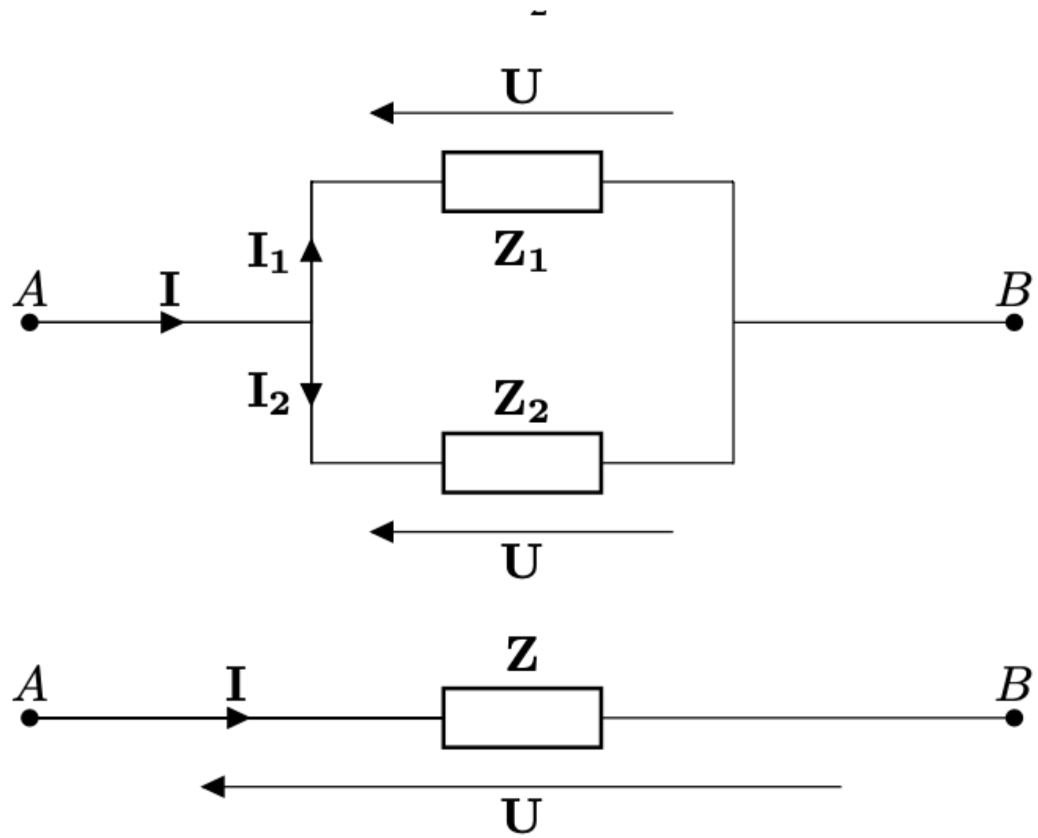
La tension est en retard de phase de $\dfrac{\pi}{2}$ sur le courant.

Loi d'association en série



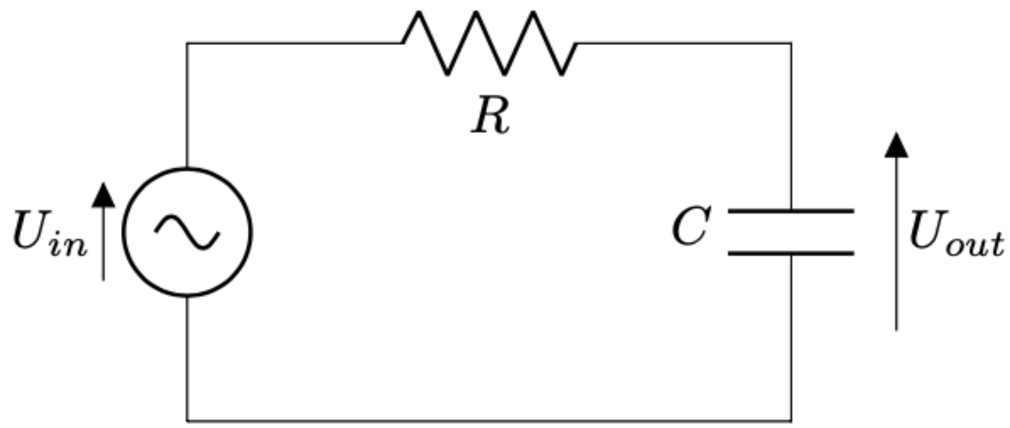
- $\mathbf{Z = Z_1 + Z_2}$
- $\mathbf{U = U_1 + U_2}$

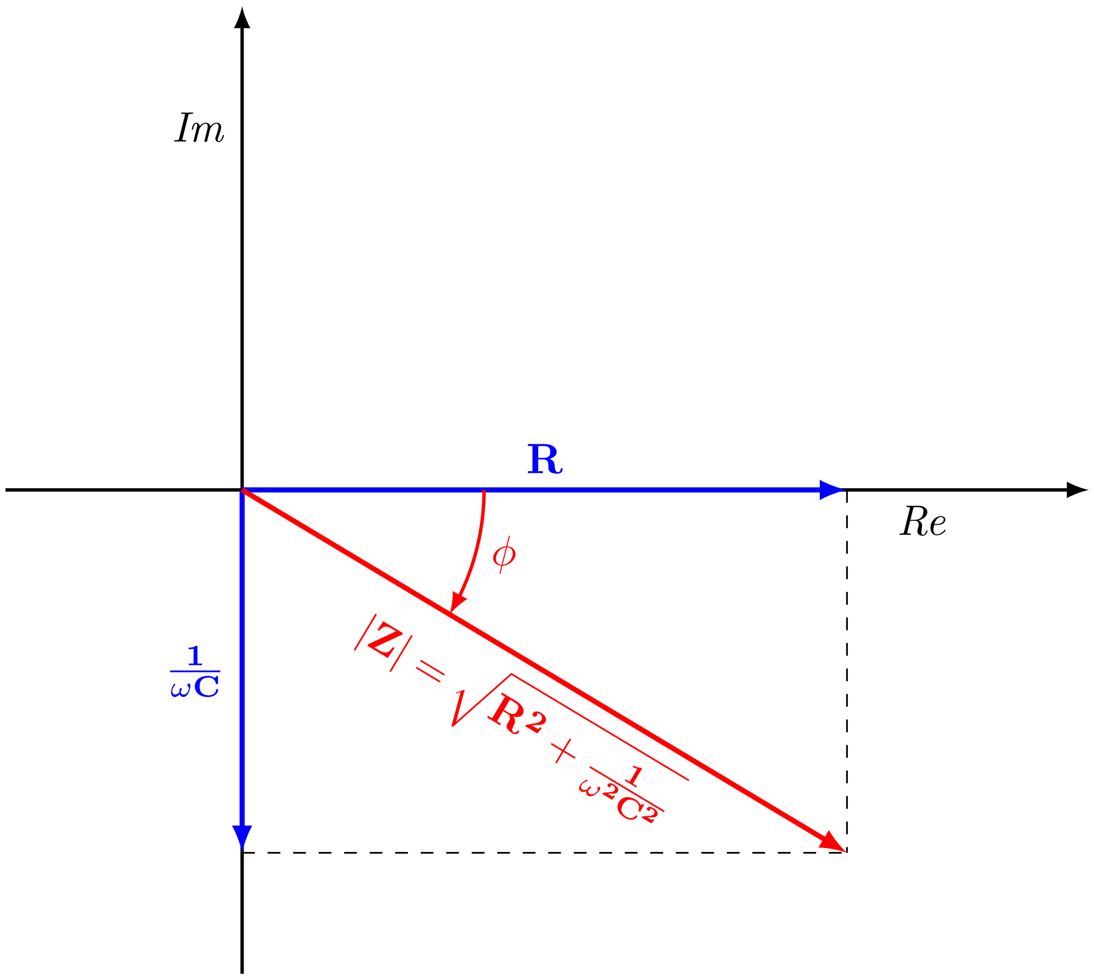
Loi d’association en parallèle



- $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Leftrightarrow Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$
- $I = I_1 + I_2$

Exemple : circuit RC série



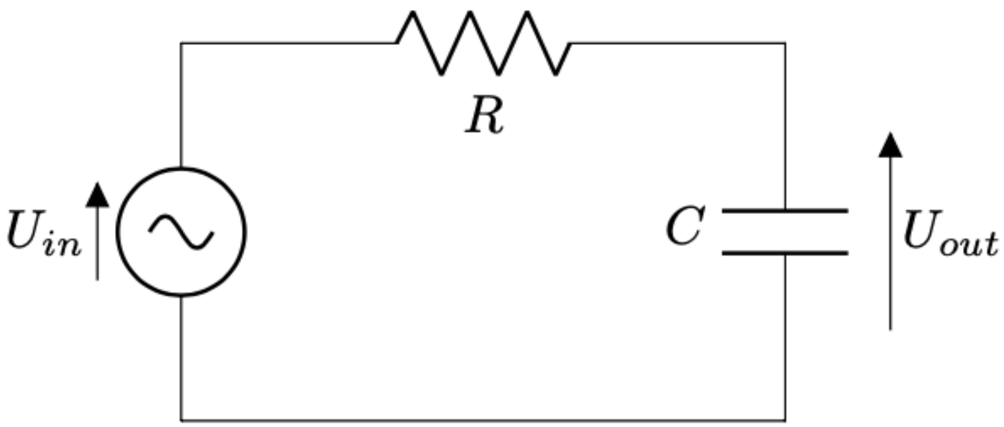


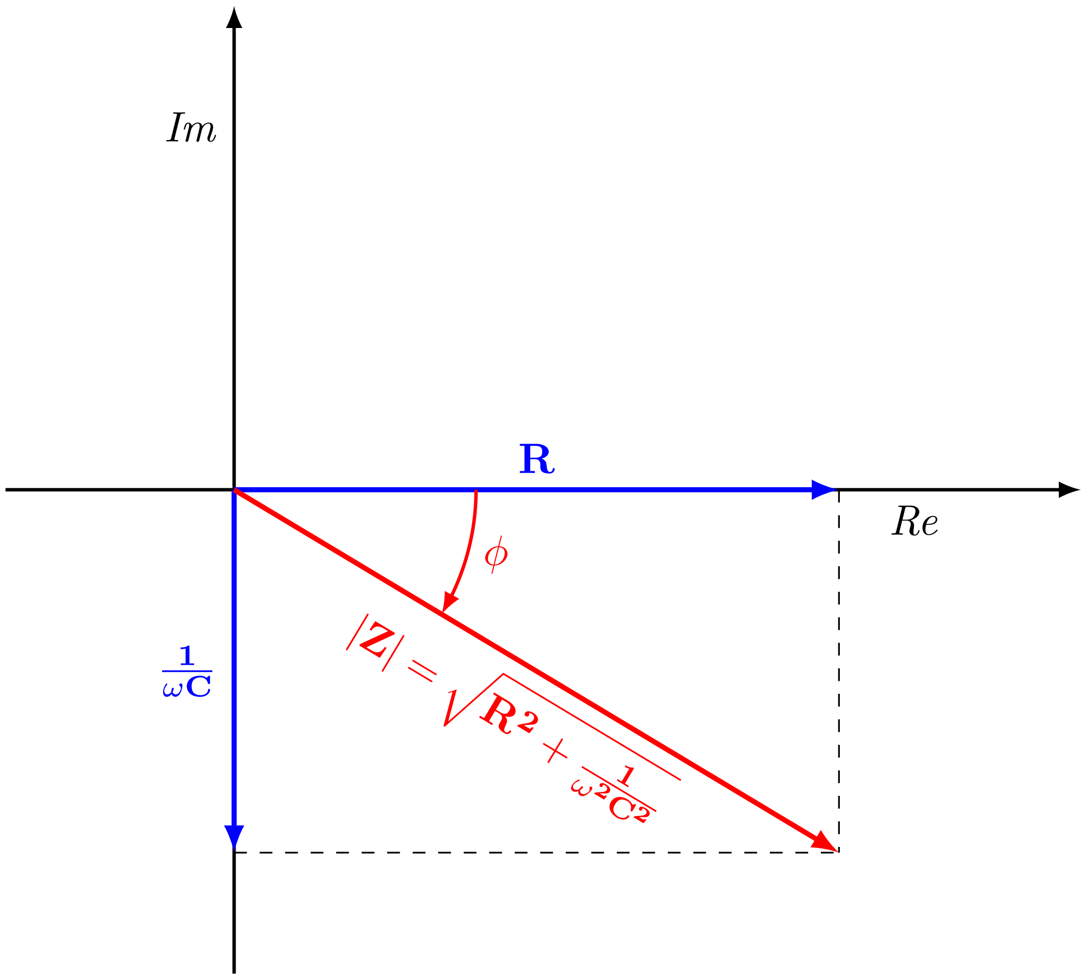
- $\mathbf{Z = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C}}$
- $|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{R^2} + \frac{\mathbf{1}}{\omega^2\mathbf{C^2}}}$
- $\tan(\phi) = \frac{\mathbf{-1}}{\omega\mathbf{RC}}$

R=1kOhms, C=10 nF et $f = 100 \text{ Hz}$

$$|Z| = \sqrt{(10^3)^2 + \frac{1}{(2\pi \cdot 100)^2 \cdot (10^{-8})^2}}$$

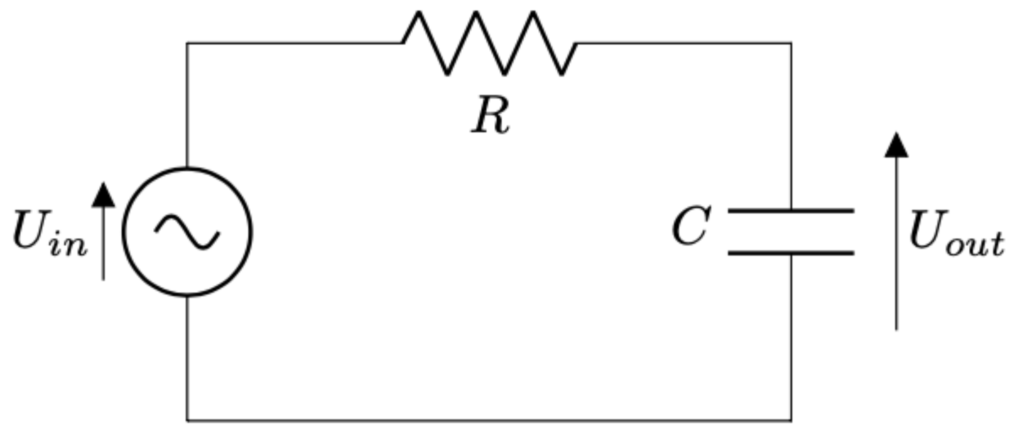
Exemple : diviseur de tension





- $\mathbf{U_{out}} = \dfrac{\mathbf{Z_C}}{\mathbf{Z_C} + \mathbf{Z_R}}\mathbf{U_{in}}$
- $|\mathbf{U_{out}}| = \dfrac{|\mathbf{Z_C}|}{|\mathbf{Z_C} + \mathbf{Z_R}|}|\mathbf{U_{in}}| = \dfrac{\mathbf{1}/\omega\mathbf{C}}{\sqrt{\mathbf{R^2} + \frac{\mathbf{1}}{\omega^2\mathbf{C^2}}}}|\mathbf{U_{in}}| = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \omega^2\mathbf{R^2C^2}}}|\mathbf{U_{in}}|$
- $|\mathbf{U_{out}}| = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \omega^2\mathbf{R^2C^2}}}|\mathbf{U_{in}}|$

Exemple : diviseur de tension



- $|\mathbf{U_{out}}| = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \omega^2\mathbf{R^2C^2}}}|\mathbf{U_{in}}|$
- $\lim\limits_{\omega \to 0} |\mathbf{U_{out}}| = |\mathbf{U_{in}}|$
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |\mathbf{U_{out}}| = 0$

Gain $G = \dfrac{|\mathbf{U_{out}}|}{|\mathbf{U_{in}}|} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \omega^2\mathbf{R^2C^2}}}$

$$\lim_{\omega \to 0} G = 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} G = 0$$

Exercice (facultatif) :

Calculer, sous la forme $a + jb$, l'impédance équivalente complexe à une fréquence de 100 Hz des groupements d'impédances suivants :

(a) $R = 330\ \Omega$ en parallèle avec $C = 2,20\ \mu F$.

(b) $R = 330\ \Omega$ en série avec $C = 2,20\ \mu F$.

Exercice (facultatif) :

Calculer, sous la forme $a + jb$, l'impédance équivalente complexe à une fréquence de 100 Hz des groupements d'impédances suivants :

(a) $R = 330\ \Omega$ en parallèle avec $C = 2,20\ \mu F$.

(b) $R = 330\ \Omega$ en série avec $C = 2,20\ \mu F$.

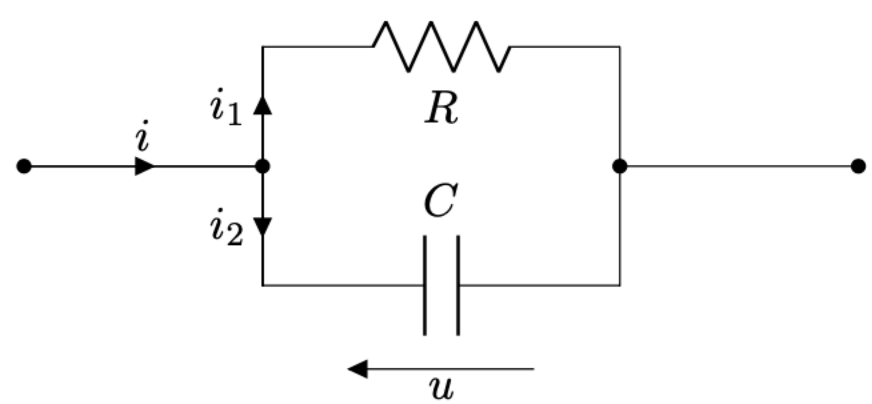
Exercice (facultatif) :

Le circuit ci-dessous est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 24\ V$ et de fréquence $f = 1,0\ kHz$. Il comprend une résistance $R = 3,3\ k\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 33\ nF$ associés en parallèle.

(a) Calculer les intensités efficaces I_1 et I_2.

(b) Tracer le diagramme vectoriel des intensités.

(c) Déterminer graphiquement l'intensité efficace I du courant traversant le circuit ainsi que le déphasage ϕ du courant par rapport à la tension.



Exercice (facultatif) :

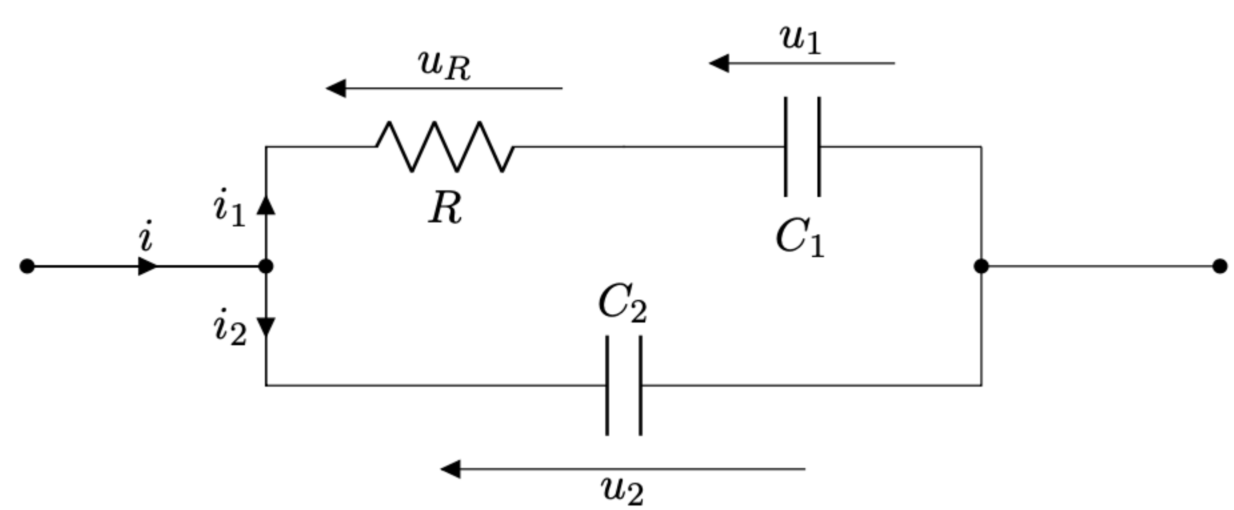
Le circuit ci-dessous est alimenté par une source sinusoïdale de fréquence $f = 50\ kHz$. Il comprend une résistance $R = 100\ \Omega$ et deux condensateurs de capacité $C_1 = 47\ \mu F$ et $C_2 = 22\ \mu F$.

(a) Calculer les tensions efficaces U_1 et U_2.

(b) Tracer le diagramme vectoriel des tensions. Déterminer graphiquement la tension efficace U aux bornes du circuit.

(c) Calculer l'intensité efficace I_2 du courant traversant le condensateur C_2. Compléter le diagramme vectoriel des tensions par le diagramme vectoriel des intensités.

(d) Déterminer graphiquement la valeur efficace I de l'intensité du courant traversant le circuit.



Exercice (facultatif) :

Un circuit de bornes A et B est alimenté par une tension alternative sinusoïdale :

$$u(t) = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)$$

(a) Calculer la fréquence f de la tension d'alimentation.

(b) On monte en série entre A et B, une résistance $R_1 = 100\ \Omega$ et un condensateur de capacité $C_1 = 33{,}0\ \mu F$.
Calculer la valeur efficace I du courant dans le dipôle.
Calculer le déphasage ϕ de l'intensité $i(t)$ par rapport à la tension d'alimentation $u(t)$.