Rappel - Fonctions
Caractéristiques de base des fonctions

R. Absil

Année académique 2019 - 2020

Les fonctions sont des objets mathématiques simples et puissants permettant de mettre en relation chaque élément d'un ensemble avec au plus un élément d'un autre ensemble [1]. Elles ont de nombreuses applications directes en informatique, telles que dans l'étude de l'efficacité d'algorithmes, l'optimisation combinatoire, etc.

Ce document présente une brève description de leur définition et caractéristiques de base.

Définition 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, le graphe *de f est défini comme l'ensemble des couples $(x, f(x))$, tel que x est un élément du domaine de f.*

Exemple 1. Considérez l'illustration de la figure 1. Sur cette figure, on a représenté en bleu le graphe d'une fonction f. Les quelques points noirs sont un échantillon des éléments de ce graphe. Chacun de ces points P est écrit sous la forme $P = (x, f(x))$, où x est un point du domaine de f, et $f(x)$ est l'image de ce point par f.

L'abscisse x de P correspond à la longueur du segment partant de l'origine du repère à la projection de P sur l'axe ox. Similairement, l'ordonnée $f(x)$ de P correspond à la longueur du segment partant de l'origine du repère à la projection de P sur l'axe oy.

Bien que dans de nombreux cas traités au sein de ce chapitre, le domaine voire l'image des fonctions considérées sera souvent $\mathbb{R}$, on peut délibérément choisir de ne pas représenter une fonction « complètement » en restreignant son domaine. Sur la figure 1, on a par exemple restreint le domaine de la fonction à « grossièrement » l'intervalle $[1, 6]$.

Par ailleurs, comme par définition le domaine est l'ensemble des points sur lesquels une fonction est définie, on ne considère pas (entre autres) les fractions au dénominateur nul, les racines carrées et les logarithmes à l'argument négatif.

1. Dans ce document, on restreindra ces ensembles eux réels seuls.

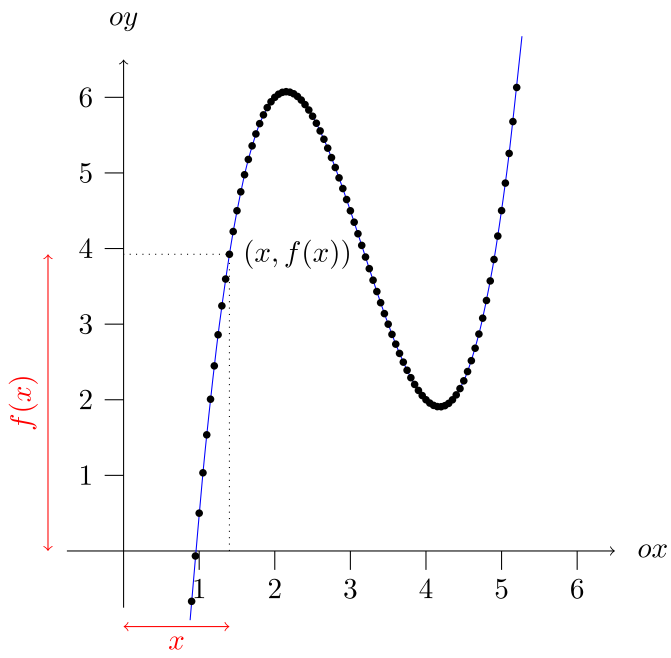

FIGURE 1 – Illustration du graphe d'une fonction

Exemple 2. Soient les fonctions
- $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$,
- $g(x) = \sqrt{x-1}$,
- $h(x) = \log(x+1)$.

On a
- $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$,
- $\text{Dom}\,(g) = [1, +\infty[$ car $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$,
- $\text{Dom}\,(h) =]-1, +\infty[$ car $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Un des points importants dans la caractérisation d'une fonction est la détermination de ses *racines*.

Définition 2

Soit f une fonction, on dit que r est une racine *de f si*

$$f(r) = 0.$$

Intuitivement, les racines d'une fonction sont les abscisses sur lesquelles cette fonction s'annule. Graphiquement parlant, ce sont les points où le graphe de f intersecte l'axe des x.

Exemple 3. Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 2x$. Cette fonction s'annule quand

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x(x^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x(x-1)(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Dès lors, les racines de f sont 0, 1 et -1. Le graphe de f est illustré à la figure 2. Les racines sont mises en évidence sur cette figure.

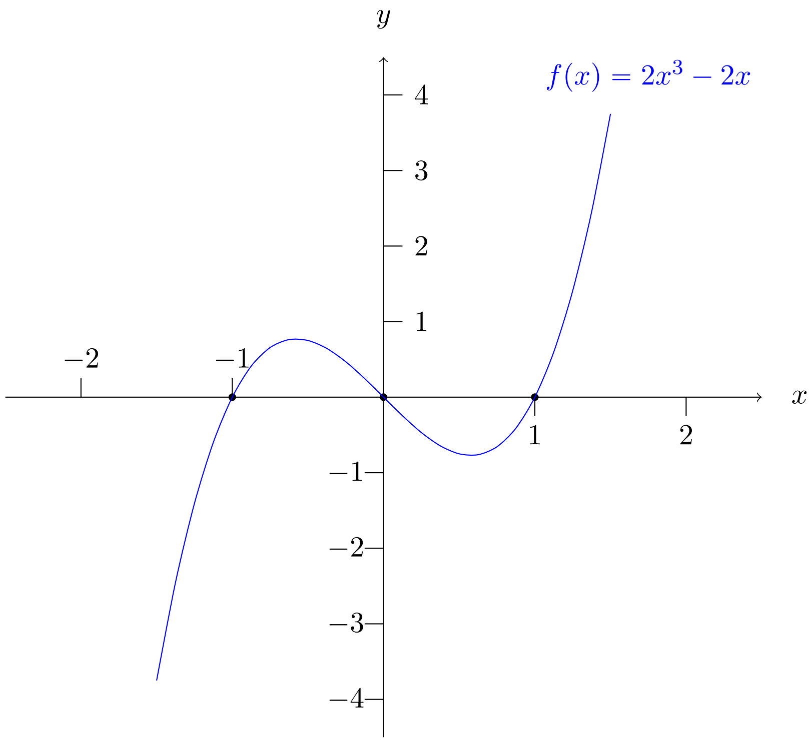

FIGURE 2 – Graphe de la fonction $2x^3 - 2x$

1 Caractéristiques des fonctions

Habituellement, on peut esquisser le graphique d'une fonction à l'aide d'une simple description de la forme de son graphe. Ainsi, on peut par exemple informellement dire que le graphe « monte », qu'il présente une symétrie par rapport à un axe ou à un point, qu'il se répète indéfiniment, etc.

Ces caractéristiques sont concrètement détaillées dans les sections ci-dessous.

1.1 Croissance

La croissance d'une fonction décrit intuitivement la même chose que dans le cas des suites : un élément ultérieur a une image plus élevée qu'un élément antérieur.

Néanmoins, la densité des réels ne permet pas une définition en termes « d'élément suivant », comme dans le cas de la définition pour les suites. Ainsi, on caractérise la croissance d'une fonction de la manière suivante.

Définition 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est
- croissante *sur un intervalle I si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,*
- décroissante *sur un intervalle I si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*

Lorsque ces inégalités sont serrées, on parle de fonction strictement *croissante ou décroissante.*

De plus, on dit qu'une fonction est *croissante* (resp. *décroissante*) si elle est croissante (resp. décroissante) sur l'intégralité de son domaine. De plus, si une fonction est soit croissante sur son domaine, soit décroissante sur son domaine, on dit qu'elle est *monotone*.

Exemple 4. Soit $f(x) = x^2$. Cette fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ comme illustré par le graphe de la figure 3 avec les points $(x_1, f(x_1))$ et $(y_1, f(y_1))$ dans le cas décroissant, et $(x_2, f(x_2))$ et $(y_2, f(y_2))$ dans le cas croissant.

Cette fonction n'est pas monotone, car elle alterne entre croissance et décroissance.

Notez qu'il est également possible de caractériser la croissance de fonctions particulières à l'aide du mécanisme de dérivation.

1.2 Parité

La parité d'une fonction décrit intuitivement les symétries du graphe de la fonction avec soit l'axe des y, soit le centre du repère. On distingue deux cas : les fonctions *paires* et *impaires*.

Définition 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est
- paire *si $\forall x, f(-x) = f(x)$,*
- impaire *si $\forall x, f(-x) = -f(x)$.*

Intuitivement, une fonction paire possède un graphe qui est symétrique par rapport à l'axe *oy* (symétrie orthogonale). D'autre part, une fonction impaire possède un graphe qui est symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie centrale).

Exemple 5. Soient $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ et $g(x) = x^3 - 5x$. On a que

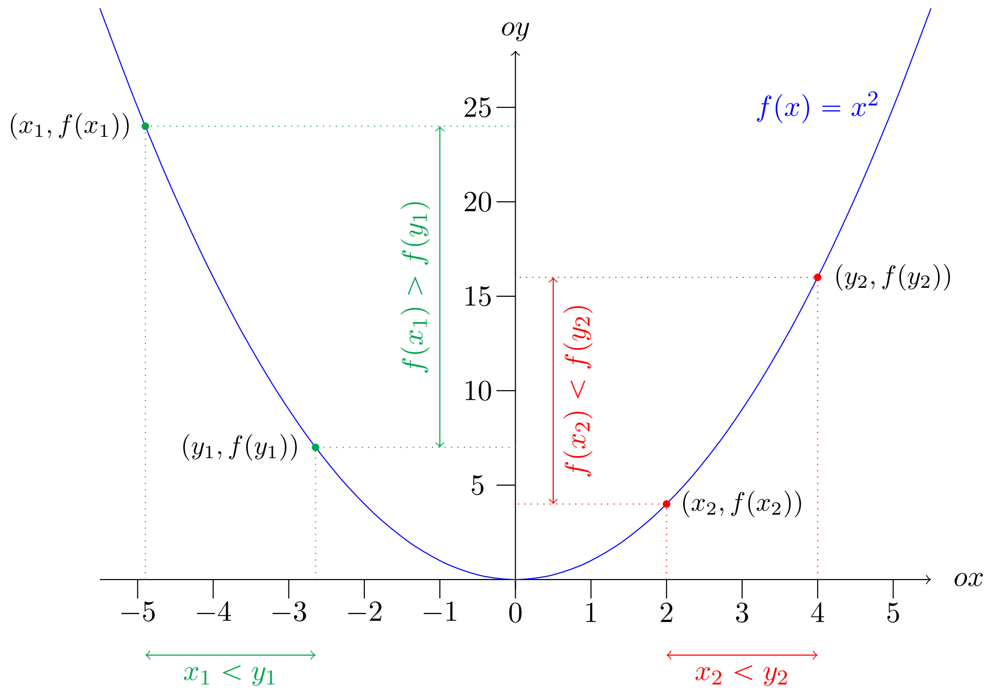

FIGURE 3 – La fonction x^2 est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

— $f(x)$ est paire, car

$$\begin{aligned}\forall x, f(-x) &= (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^2 + 2\\ &= x^4 - 5x^2 + 2\\ &= f(x)\end{aligned}$$

— $g(x)$ est impaire, car

$$\begin{aligned}\forall x, g(-x) &= (-x)^3 - 5 \cdot (-x)\\ &= -x^3 + 5x\\ &= -g(x)\end{aligned}$$

Ces fonctions sont illustrées à la figure 4, ainsi que les propriétés de parité. Remarquez la symétrie orthogonale d'axe oy du graphe de f (en vert), ainsi que la symétrie centrale de centre $(0, 0)$ du graphe de g (en vert également).

1.3 Périodicité

Intuitivement, la périodicité du graphe d'une fonction décrit si ce graphe comporte une structure répétitive.

Les fonctions périodiques apparaissent naturellement en physique et en mécanique dans l'étude des signaux et des phénomènes périodiques. Les fonctions périodiques les plus connues sont les fonctions trigonométriques.

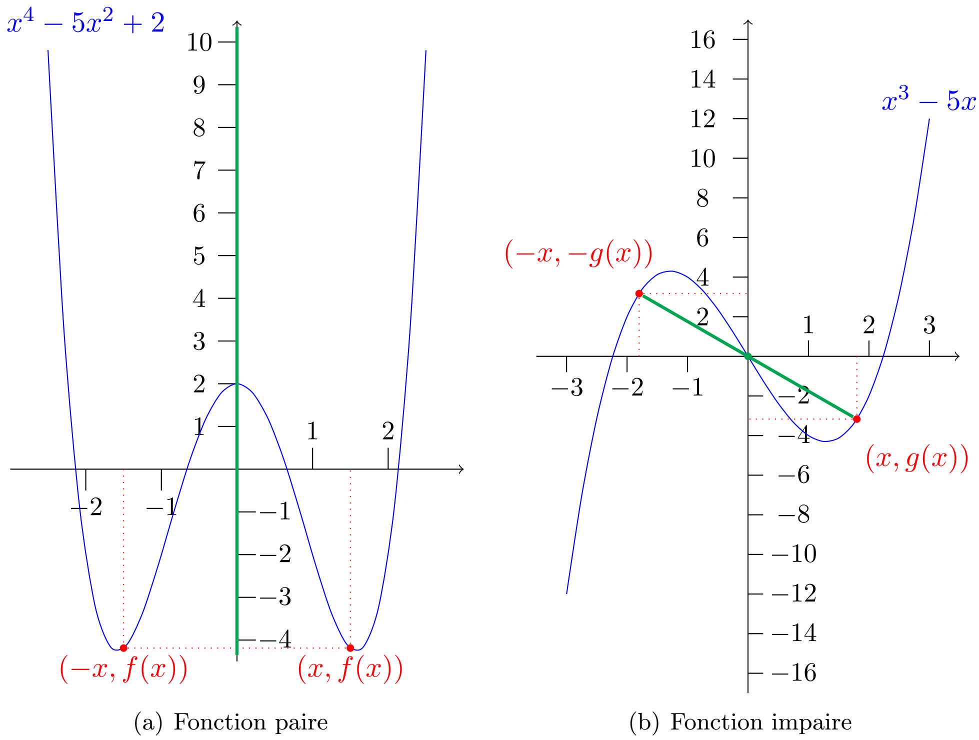

FIGURE 4 – Illustration de la parité de fonctions

Intuitivement, on la définit de la façon suivante.

Définition 5

Une fonction f est dite périodique *si*

$$\exists T > 0, \forall x \in \mathrm{Dom}(f), x + T \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f(x+T) = f(x).$$

La période *de f est le plus petit réel T pour lequel cette propriété est vérifiée.*

Exemple 6. Considérez la fonction f dont le graphe est illustré à la figure 5. Cette fonction est périodique de période T (illustré en rouge). Notez que le morceau de graphe illustré en bleu gras se répète le long de l'axe des x. De plus, on remarque que quel que soit x, $f(x+T) = f(x)$ (illustré en vert).

Notez également qu'un multiple de T aurait également pu convenir pour la définition de fonction périodique. Néanmoins, la définition de période impose que T soit le plus petit possible, ce qui explique pourquoi on a pris cette valeur et non un de ses multiples.

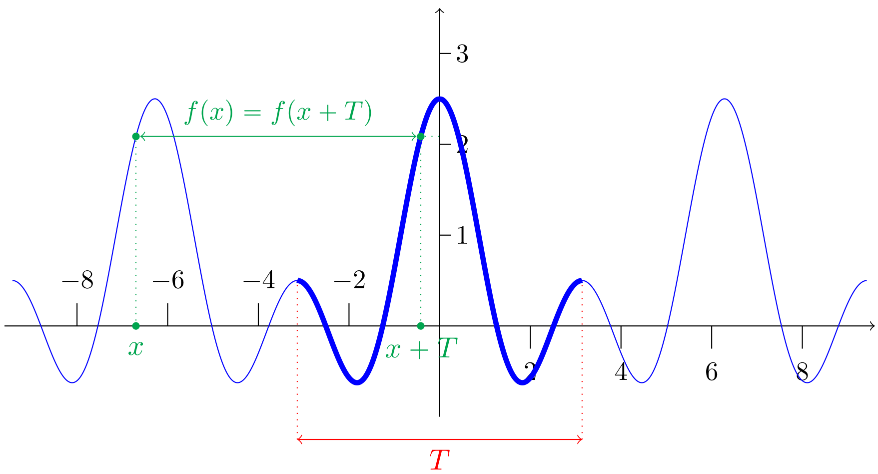

FIGURE 5 – Un exemple de fonction périodique