Lundi 1er février

STATISTIQUES

Statistiques : analyse chiffrée (souvent sous forme de pourcentage) de situations réelles et passées
Ex : 60% ont voté pour le candidat X aux élections
70% des étudiants ont réussi l'examen de INT

Probabilités : « pari » ou « pronostics » de situations qui ne se sont pas encore produites et pour lesquelles on tente des prévisions (événements futurs)
Ex : aux prochaines élections, les intentions de votes pour le candidat Y sont de 65%
La probabilité qu'une pièce de monnaie tombe sur « pile » est de ½ = 50%

Expérience aléatoire

C'est un processus dont le déroulement est précisé mais le résultat est inconnu et soumis au hasard

Ex. a) lancer une pièce de monnaie et observer le résultat
b) lancer un dé et observer le résultat
c) lancer 2 dés et calculer la somme des 2 points
d) lancer 2 dés et observer si les 2 points sont les mêmes

Catégorie d'épreuve = ensemble des possibilités

C'est l'ensemble des résultats possibles à l'issue de l'expérience aléatoire. Notation : Ω

a) $\Omega = \{pile, face\}$
b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
c) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
d) $\Omega = \{vrai, faux\}$

Evénement aléatoire

C'est une des issues possibles d'une expérience aléatoire

Ex. : a) la pièce tombe sur « pile »
b) le dé tombe sur 5
    le dé tombe sur un point pair (soit 2, 4 ou 6)
c) la somme des dés vaut 10
    la somme des dés vaut au moins 10 (soit 10, 11 ou 12)
d) les points des dés sont les mêmes

Mathématiquement, un événement aléatoire est un sous-ensemble de Ω.

Probabilité

La probabilité d'un événement aléatoire est la mesure de la chance que cet événement puisse se produire. C'est un nombre toujours compris entre 0 et 1 (nombre réel, fraction ou pourcentage)

Formule de base :

P(E) = nombre cas favorables / nombre de cas possibles

a) P(la pièce tombe sur « pile ») = P(pile) = ½ = 0,5 = 50%
b) P(le dé tombe sur 5) = P(5) = 1/6
    P(le dé tombe sur un point pair) = 3/6 = 1/2
c) P(la somme des dés vaut 10) = 1/11 → faux !!!!

Dans la formule, il faut en fait compter les cas équiprobables (qui ont la même probabilité de se produire)

Il faut considérer ici les 36 couples de valeurs possibles pour le couple de valeurs (dé1, dé2). Parmi ces 36 couples, il y en a trois qui donnent une somme égale à 10 : (4, 6), (5, 5) et (6, 4)

P(la somme des dés vaut 10) = 3/36 = 1/12

P(la somme des dés vaut au moins 10) = 6/36 = 1/6

d) P(les points des dés sont les mêmes) = 6/36 = 1/6

Evénement impossible

Un événement E est impossible ssi P(E) = 0

Ex. : le dé tombe sur 7
La somme des 2 dés est supérieure à 20

Evénement certain

Un événement E est certain ssi P(E) = 1

Ex. le dé tombe sur un point entre 1 et 6
Demain, il fera soit beau soit mauvais

Probabilité a priori : utilise des formules mathématiques (de combinatoire)
Probabilité a posteriori : se base sur les statistiques

Exercice 3

On va définir la **distribution de probabilité** de cette expérience : càd un tableau qui reprend les différentes probabilités élémentaires

Points	1	2	3	4	5	6
Proba.	x	x	x	x	x	3x

La somme de toutes les probabilités doit faire 1 et donc
x + x + x + x + x + 3x = 1
8x = 1
x = 1/8

Points	1	2	3	4	5	6
Proba.	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	3/8

P(point pair) = P(2 ou 4 ou 6) = P(2) + P(4) + P(6) = 5/8

Exercice 4

cheval	1	2	3
Proba.	4x	2x	x

La somme doit faire 1, donc 7x = 1 et x = 1/7

cheval	1	2	3
Proba.	4/7	2/7	1/7

« et » : opérateur booléen
∩ : opérateur ensembliste

Pour des événements aléatoires, on peut écrire aussi bien A et B que A ∩ B ; idem pour (A ou B) et (A U B) (ou inclusif)

Exercice 5

A et B : obtenir un as rouge P(A et B) = 2/52 = 1/26
B et C = C P(B et C) = P(C) = 13/52 = 1/4
A ou C = obtenir un as ou un coeur P(A ou C) = 16/52 = 4/13
B ou C = B P(B ou C) = P(B) = 26/52 = ½

Théorème d'addition des probabilités

Formule générale :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple : P(obtenir un as ou un cœur)
= P(as) + P(cœur) – P(as et cœur)
= 4/52 + 13/52 – 1/52 = 16/52

Cas particulier : **événements incompatibles** (événements qui ne peuvent pas se produire en même temps)

Alors $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (le ou devient exclusif)

Mardi 2 février

P(carte tirée est noire et cœur) = 0

Evénement complémentaire

L'événement complémentaire de A est noté Â, et correspond au complémentaire de l'ensemble qui définit A dans Ω.

Ex. A = le point du dé est au moins 5 P(A) = 2/6
Â = le point du dé est au plus 4 P(Â) = 4/6

$$P(\hat{A}) = 1 - P(A)$$

Evénements indépendants

A et B sont indépendants si la probabilité de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre

Si A et B sont indépendants, alors P(A et B) = P(A)*P(B)

Ex. P(2 dés tombent sur 6)
= P(1er dé tombe sur 6 et 2ème tombe sur 6)
= P(1er tombe sur 6) * P(2ème tombe sur 6)
= 1/6 * 1/6 = 1/36

On lance 2 fois un dé
P(le dé tombe 2 fois sur 6)
= P(le dé tombe la 1ère fois sur 6 et la 2ème aussi sur 6)
= P(le dé tombe sur 6) * P(le dé tombe sur 6)
= 1/6 * 1/6 = 1/36

On tire une carte d'un jeu de 52 cartes
26 cartes rouges et 26 cartes noires

4 familles de 13 cartes : trèfle, pique (noir),
cœur, carreau (rouge)
As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi

A : la carte tirée est rouge
B : la carte tirée est un carreau
C : la carte tirée est un pique
D : la carte est un as

A et B sont compatibles
A et C sont incompatibles
B et C sont incompatibles
D est compatible avec les 3 autres
P(A ou C) = P(A) + P(C) = 26/52 + 13/52 = 39/52 = ¾
P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A et B)
= 26/52 + 13/52 – 13/52 = 26/52 = ½

P(A et D) = P(as rouge) = 2/52 = 1/26
P(A)*P(D) = P(as)*P(rouge) = 4/52*26/52 = 1/13*1/2 = 1/26
→ A et D sont indépendants

P(A et B) = P(rouge et carreau) = P(carreau) = 13/52 = ¼
P(A)*P(B) = P(rouge)*P(carreau) = 26/52*13/52 = ½*1/4 = 1/8
Ici P(A et B) n'est pas égale à P(A)*P(B),
donc A et B sont dépendants

Exercice 9

	lunettes	Pas de lunettes	Total
Hommes	6	6	12
Femmes	5	10	15
Total	11	16	27

P(homme ou lunettes)
= P(homme) + P(lunettes) – P(homme à lunette)
= 12/27 + 11/27 – 6/27 = 17/27
Autre façon (par l'événement complémentaire)

P(homme ou lunettes) = 1 – P(femme et pas de lunettes)
= 1 – 10/27 = 17/27

Homme et avoir des lunettes est indépendant ?
P(homme et lunettes) = 6/27
P(homme)*P(lunettes) = 12/27*11/27 = 132/27²
→ pas la même réponse → pas indépendants

Exercice 10

	vélo	pas vélo	Total
natation	25%	15%	40%
pas natation	25%	35%	60%
Total	50%	50%	100%

P(pas de sport) = 1 – P(natation ou vélo) = 1 – 65% = 35%
P(natation ou vélo) = P(natation) + P(vélo) – P(2 sports)
= 40% + 50% – 25% = 65%

Exercice 11

a) P(vendre au moins 1 frigo)
= P(1 frigo ou 2 frigos ou au moins 3 frigo)
= 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8

P(vendre au moins 1 frigo) = 1 – P(pas de frigo) = 1 – 0.2 = 0.8

b) P(pas de frigo vendu sur 2 jours)
= P(0 frigo jour 1 et 0 frigo le jour 2)
= P(0 frigo jour 1)*P(0 frigo jour 2)
= 0.2 * 0.2 = 0.04 = 4%

c) P(1 frigo sur 3 jour)
= P(frigo lundi et pas mardi et pas mercredi
ou frigo mardi et pas lundi et pas mercredi
ou frigo mercredi et pas lundi et pas mardi)
= 0.4*0.2*0.2 + 0.2*0.4*0.2 + 0.2*0.2*0.4
= 3*0.4*0.2*0.2 = 0.048 = 4,8 %

Exercice 12

a) P(6 une seule fois parmi un des 3 lancers)
= P((6 et pas 6 et pas 6) ou (pas 6 et 6 et pas 6)
ou (pas 6 et pas 6 et 6))
= 1/6*5/6*5/6 + 5/6*1/6*5/6 + 5/6*5/6*1/6
= 1/6*5/6*5/6*3 = 3*25/216 = 25/72

b) P(au moins une fois 6) = 1 – P(jamais 6) = 1 – 5/6*5/6*5/6
= 1 – 125/216 = 91/216

c) P(3 points différents)
= P($2^{ème}$ différent du 1^{er} et $3^{ème}$ différent des 2 premiers lancers)
= [6/6 *] 5/6 * 4/6 = 20/36 = 5/9

Exercice 13

a) P(1^{er} carte n'importe quoi et $2^{ème}$ carte roi et $3^{ème}$ pas de roi)
= 1 * 4/52 * 48/52 = 1 * 1/13 * 12/13 = 12/169
b) P((R et R et pas R) ou (R et pas R et R) ou (pas R et R et R))
= 4/52 * 4/52 * 48/52 * 3
b) P($2^{ème}$ carte même que $1^{ère}$ et 3ème aussi)
= 1 * 1/52 * 1/52 = 1/52²

Lundi 8 février

Probabilités conditionnelles

P(A | B) = probabilité de A sachant que B s'est réalisé
= probabilité de A sachant B
= probabilité de A si B

Exercice 16

a) P($2^{ème}$ carte roi | $1^{ère}$ carte est un roi) = 3/51

b) P(2 rois) = P(1ère carte roi ET 2ème carte roi)
= P(1ère carte roi)*P(2ème carte roi | 1ère carte roi)
= 4/52*3/51
(avec remise, la réponse était 4/52*4/52)
c) P(au moins un roi) = 1 – P(aucun roi)
= 1 – 48/52*47/51

P(aucun roi) = P(1ère pas roi ET 2ème pas roi)
= P(1ère pas roi)*P(2ème pas roi | 1ère carte pas roi)
= 48/52*47/51

Formule générale :

P(A et B) = P(A)*P(B | A)

Si A et B sont dépendants, alors P(A | B) < > P(A)
et P(B | A) < > P(B)

Si A et B sont indépendants, alors P(A | B) = P(A)
et P(B | A) = P(B)

Ex. On lance un dé. A = le dé tombe sur 6
B = le point du dé est pair → 2, 4 ou 6
C = le point du dé est au moins 3 → 3,4,5,6

P(A) = 1/6 P(B) = 3/6 = ½ P(C) = 4/6 = 2/3

P(A | B) = 1/3 P(B | A) = 1

P(A | C) = 1/4 P(B | C) = 2/4 = 1/2 = P(B) = 3/6 = 1/2

P(C | A) = 1 P(C | B) = 2/3 = P(C)

À droite de la barre : c'est ce qui s'est réalisé
B et C sont indépendants

P(A et B) = P(B)*P(A | B)

Equivalent à : P(A | B) = P(A et B) / P(B)

Ex. P(A | B) = P(6 et pair) / P(pair) = (1/6) / (3/6) = 1/3

Exercice 17

P(trois billets impairs) = P(1^{er} impair et $2^{ème}$ impair et $3^{ème}$ impair)
= P(1^{er} impair)*P($2^{ème}$ impair | 1^{er} impair)
*P($3^{ème}$ impair | 1^{er} et $2^{ème}$ impairs)
= 10/20*9/19*8/18

Exercice 18

P(A gagne) = 3/10 = 0,3
P(B gagne) = P(A noire ET B blanche)
= P(A noire)*P(B blanche | A noire)
= 7/10*3/9 = 7/30 = 0,2333…
P(C gagne) = P(A noire ET B noire ET C blanche)
= 7/10*6/9*3/8 = 0,175…
P(D gagne) = 7/10*6/9*5/8*3/7 = 0,125

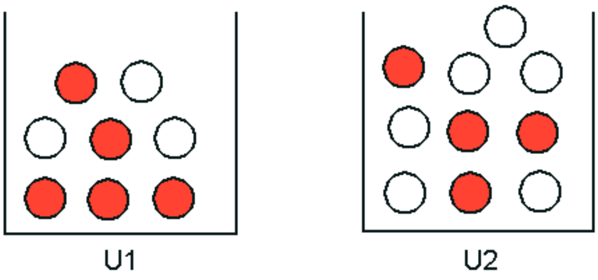
OU → +
ET → *

Exercice 21

	hommes	femmes	**Total**
emploi	51%	41%	**92%**
chômage	3%	5%	**8%**
Total	**54%**	**46%**	**100%**

a) P(homme) = 54%
b) P(chômeur) = 8%
c) P(homme | chômeur) = P(homme ET chomage)/P(chomage)
= 3/8 = 0,375 = 37,5%
c) P(chômeur | homme) = 3/54 = 0,0555… = 5,55 %

Exercice 22

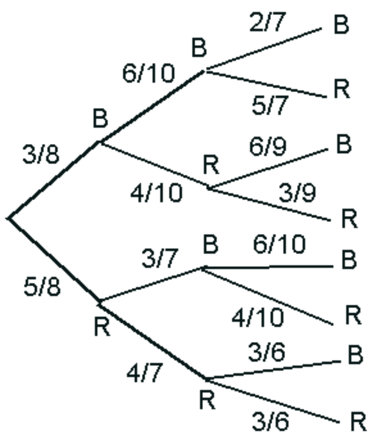


blanche → on change d'urne
rouge → on reste dans la même

a) P(3 rouges) = P(rouge dans U1 et rouge dans U1 et rouge dans U1) = 5/8*4/7*3/6
b) P(3 boules blanches) = P(blanche dans U1 et blanche dans U2 et blanche dans U1) = 3/8*6/10*2/7
c) P(blanche et 2 rouges) = P(blanche dans U1 et rouge dans U2 et rouge dans U2) = 3/8*4/10*3/9
d) P($3^{ème}$ rouge | 2 premières blanches) = P(tirer rouge dans U1 en $3^{ème}$ tirage) = 5/7

Arbre de probabilités

Graphe qui contient tous les scénarios possibles d'une expérience aléatoire



Mardi 9 février

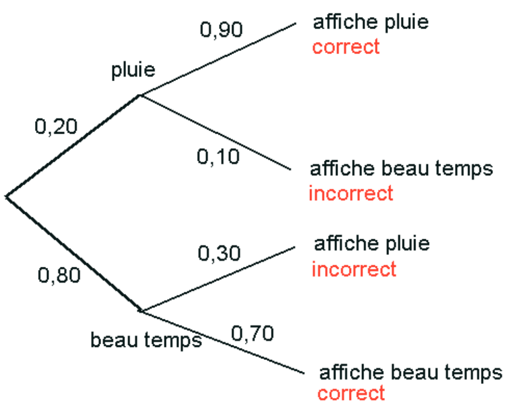
Probabilité totale

Ex. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au 3ème tirage ?

On va calculer la somme de toutes les probabilités qui mènent à une boule rouge au 3ème tirage :

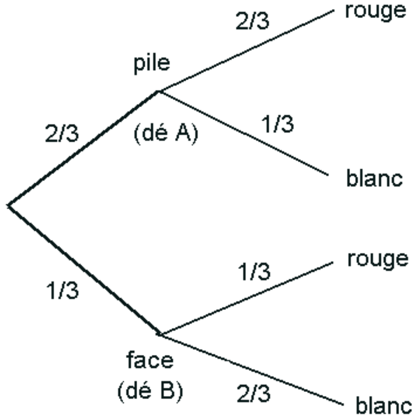
P(rouge au 3ème tirage) = P(BBR ou BRR ou RBR ou RRR)
= 3/8*6/10*5/7 + 3/8*4/10*3/9 + 5/8*3/7*4/10 + 5/8*4/7*3/6

Exercice 25



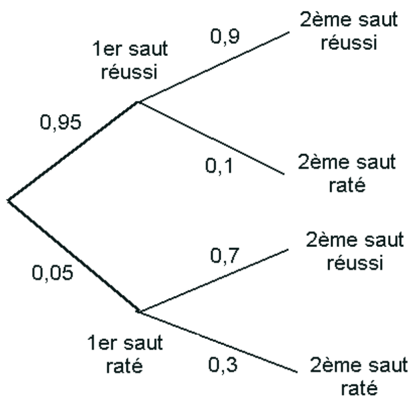
P(baromètre affiche « pluie ») = 0,2*0,9 + 0,8*0,3 = 0,18 + 0,24
= 0,42
P(indication correcte) = 0,2*0,9 + 0,8*0,7 = 0,18 + 0,56 = 0,74

Exercice 24



a) P(rouge) =2/3*2/3 + 1/3*1/3 = 5/9
b) P(blanche) = 2/3*1/3 + 1/3*2/3 = 4/9
autre calcul : P(blanche)
= 1 – P(rouge) = 1 – 5/9 = 4/9
c) P(3 fois rouges | rouge au 2 premiers lancers)
= P(rouge au 3ème lancer)
= P(rouge) = 5/9
Noter la différence avec : P(3 fois rouge) = 5/9*5/9*5/9 = 125/729

Exercice 26

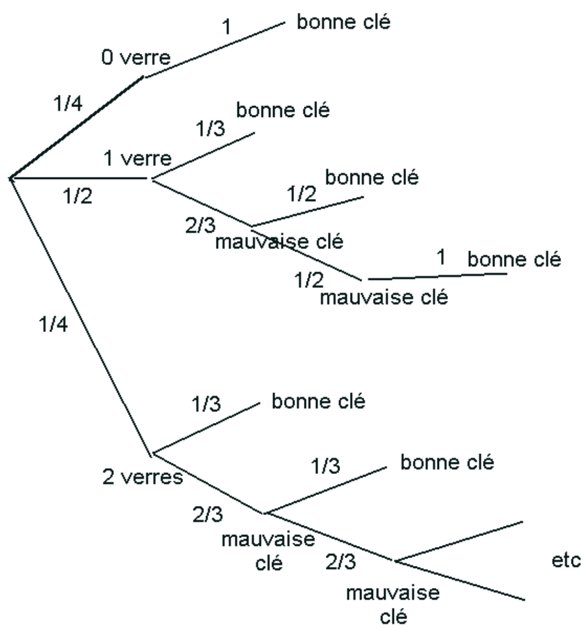


P($2^{ème}$ saut réussi) = 0,95*0,9 + 0,05*0,7 = 0,89

P($2^{ème}$ saut raté | 1^{er} saut réussi) = 0,1

P(réussir 2 sauts) = P(1^{er} saut réussi ET $2^{ème}$ saut réussi) =0,95*0,9 = 0,855

Exercice 27



P(bonne clé du 1^{er} coup) = ¼*1+1/2*1/3+1/4*1/3
= ¼ + 1/6 + 1/12 = 3/12+2/12+1/12
= 6/12 = ½

P(2 essais) = ½*2/3*1/2 + ¼*2/3*1/3 = 1/6 + 1/18 = 4/18 = 2/9

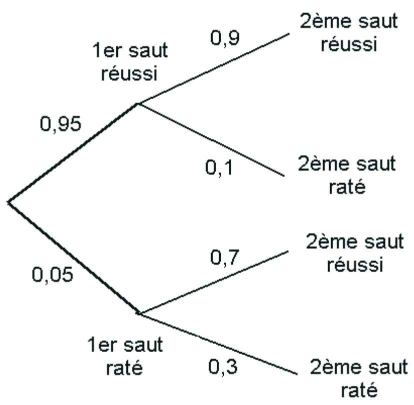
P(au plus 2 essais)
= P(un OU deux essais) = ½ + 2/9 = 9/18 + 4/18 = 13/18

P(au moins 3 essais) = 1 – P(au plus 2 essais) = 1 – 13/18 = 5/18

Formule de Bayes

On applique ce calcul quand on essaye de remonter dans l'arbre de la droite vers la gauche (on retourne en arrière du point de vue chronologique) : on se place à la fin de l'arbre et on veut connaître la probabilité d'être passé par un nœud antérieur

Exemple (arbre de l'exercice 26)



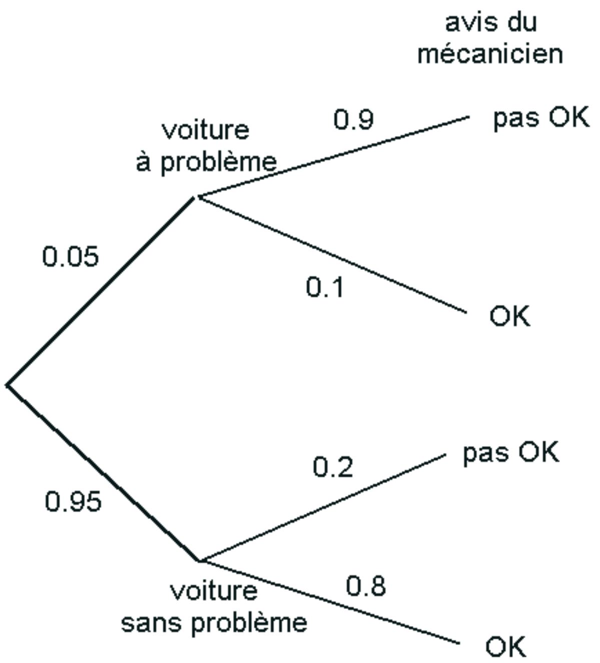
On sait que le 2ème saut est réussi, et on voudrait connaître que le 1er est réussi aussi (donc on veut connaître la probabilité de quelque chose qui s'est produit **avant** un autre événement)

P(1er saut réussi | 2ème saut réussi)

On va utiliser la formule : P(A | B) = P(A et B)/P(B)

P(1er saut réussi ET 2ème saut réussi)/P(2ème saut réussi)
= 0,95*0,9 / (0,95*0,9 + 0,05*0,7)
= 0,855 / 0,89 = 0,96

Lundi 15 février



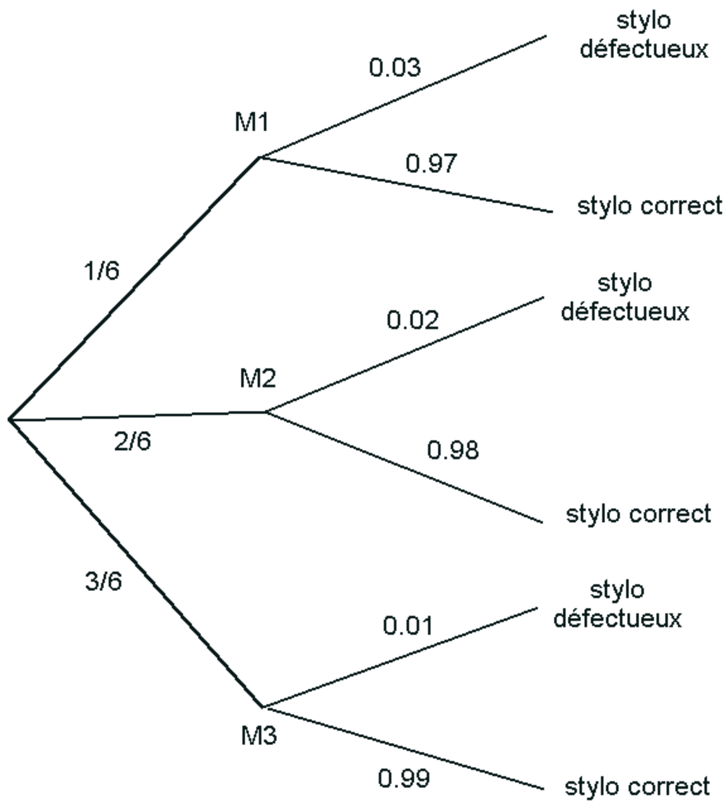
a) P(voiture a un problème) = 0.05

P(A | B) = P(A et B)/P(B)

b) P(voiture a un problème | avis du mécanicien « pas ok »)
= P(voiture a un problème ET mécanicien dit « pas ok »)/
P(avis du mécanicien défavorable)
= 0.05*0.9 / (0.05*0.9 + 0.95*0.2)
= 0.045 / 0.235 = 0.1914…

c) P(voiture a un problème | avis du mécanicien « ok »)
= P(voiture a un problème ET mécanicien dit « ok »)/
P(avis du mécanicien favorable)
= 0.05*0.1 / (0.05*0.1 + 0.95*0.8)
= 0.005 / 0.765 = 0.0065…

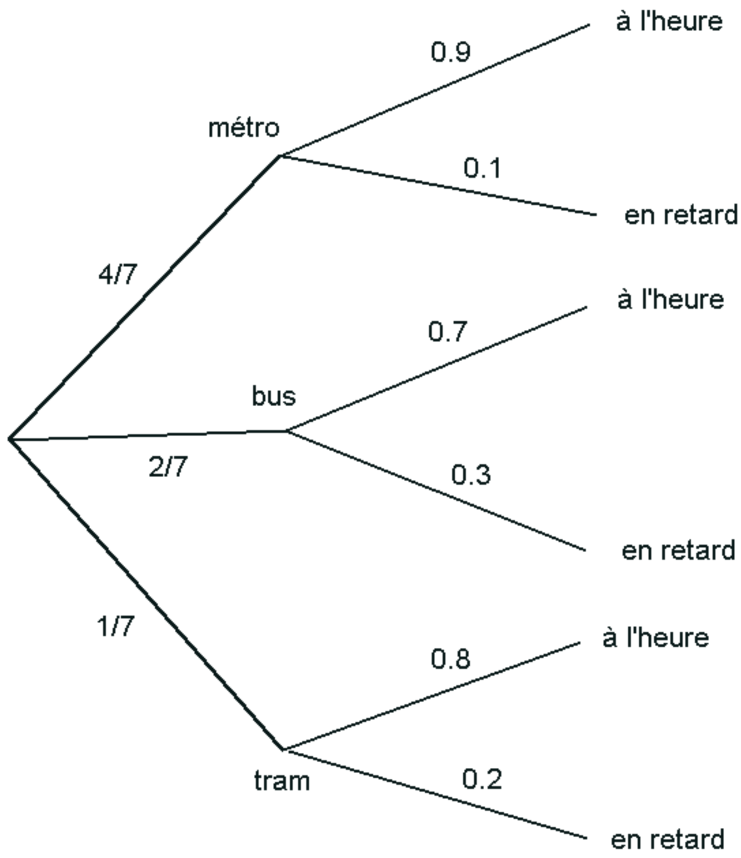
Exercice 32



a) P(stylo défectueux) = 1/6*0.03 + 2/6*0.02 + 3/6*0.01
= (0.03 + 0.04 + 0.03)/6
= 0.1 / 6 = 0.016666…

b) P(M2 | stylo défectueux)
= P(M2 ET stylo défectueux) / P(stylo défectueux)
= (2/6*0.02) / 0.016666… = 0,4 = 40%

Exercice 34



P(en retard) = 4/7*0.1 + 2/7*0.3 + 1/7*0.2
= (0.4 + 0.6 + 0.2)/7 = 1.2/7 = 0.1714…

P(métro ET à l'heure) = 4/7*0.9 = 0,514…

P(tram | en retard) = P(tram ET en retard)/P(en retard)
= 1/7*0.2 / 0.1714… = 0,1666…

P(en retard 2 jours de suite)
= P(retard 1^{er} jour ET retard $2^{ème}$ jour)
= P(retard)*P(retard) = $(0.1714…)^2$ = 0,029…

Chapitre 2

Variables aléatoires : concerne le quantitatif

Quantitatif : l'issue de l'expérience est numérique (ex. : lancer un dé, deviner un nombre entre 1 et 20, résultat d'une interro…)
On peut avoir du quantitatif discret (valeurs distinctes) ou continu (intervalle réel de valeurs, comme par exemple une mesure de taille, de poids, de vitesse…)

Qualitatif : l'issue de l'expérience est une observation non numérique (objet défectueux ou non, arriver en retard ou à l'heure)

X : variable aléatoire, cad une grandeur numérique qui prend des valeurs x_i avec une certaine probabilité p_i.

a) X = point obtenu en lançant un dé

On va établir la **distribution de probabilité** de X, c'est-à-dire un tableau qui reprends les différentes valeurs possibles et leur probabilité :

x_i	p_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
total	1

$p_i = P[X = x_i]$

b) X = gain du jeu (en €)
valeurs possibles : -2, 0 ou 3

x_i	p_i
-2	2/6
0	3/6
3	1/6
total	1

c) X = nombre de 6 obtenus en lançant 3 fois un dé

x_i	p_i
0	125/216
1	75/216
2	15/216
3	1/216
total	1

P[X = 0] = P(aucun 6 sur 3 lancers) = 5/6*5/6*5/6 = 125/216
P[X = 1] = P(une fois 6 sur 3 lancers)
= P(6** ou *6* ou **6) = 3*1/6*5/6*5/6 = 75/216
P[X = 2] = P(2 fois 6 sur 3 lancers)
= P(66* ou 6*6 ou *66) = 3*1/6*1/6*5/6 = 15/216
P[X = 3] = P(obtenir chaque fois 6) = 1/6*1/6*1/6 = 1/216

d) X = nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir 6
Valeurs possibles : {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …}

x_i	p_i
1	1/6 = 0.1666…
2	$5/6^2$ = 0.1388…
3	$5^2/6^3$ = 0.1157…
4	$5^3/6^4$ = 0.09644…
…	…
n	$(5/6)^{n-1}$*1/6
total	1

$P[X = 1] = P(\text{obtenir 6 dès le } 1^{er} \text{ lancer}) = 1/6$
$P[X = 2] = P(\text{obtenir 6 la } 2^{ème} \text{ fois}) = 5/6*1/6$
$P[X = 3] = P(\text{obtenir 6 la } 3^{ème} \text{ fois}) = 5/6*5/6*1/6$
$P[X = 4] = 5/6*5/6*5/6*1/6$
$P[X = 20] = (5/6)^{19}*1/6 = 0.00521…$
Au plus x_i est grand, au plus p_i est proche de 0

Mardi 16 février

Fonction de répartition

Définition : $F(x) = P[X \leq x]$

Utile quand on a des grands ensembles de valeurs pour X (on travaillera avec des intervalles)

X : variable aléatoire x : réel quelconque

Exemple b) gain du jeu

x_i	p_i	$F(x_i)$
-2	2/6	2/6
0	3/6	5/6
3	1/6	1
total	1	

$F(1) = P[X \leq 1] = P(\text{gain du jeu soit inférieur à 1}) = 5/6$
$F(3) = P[X \leq 3] = 100\% = 1$
$F(10) = P[X \leq 10] = 100\% = 1$
$F(0) = P[X \leq 0] = 5/6$
$F(-1) = P[X \leq -1] = 2/6$
$F(-5) = P[X \leq -5] = 0$

Exemple a) (point du dé)

x_i	p_i	$F(x_i)$
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6 = 1

F(4,3) = P[point du dé ≤ 4,3] = P[point du dé ≤ 4] = 4/6

Espérance mathématique (correspond à la moyenne en statistique)

Notation : E[X] ou µ

On reprend l'exemple b)
X = gain du jeu (en €)

x_i	p_i
-2	2/6
0	3/6
3	1/6
total	1

E[X] = 2/6*(-2) + 3/6*0 + 1/6*3 = -4/6 + 0 +3/6 = -1/6 = -0,17 €

Exemple c) X = nombre de 6 obtenus en lançant 3 fois un dé

x_i	p_i
0	125/216
1	75/216
2	15/216
3	1/216
total	1

E[X] = 125/216*0 + 75/216*1 + 15/216*2 + 3/216
= (75 + 30 + 3)/216 = 108/216 = ½

Ecart-type : paramètre qui mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire

Exemples : cotes d'interro dans 4 classes

Classe A : 5 12 18 4 14 0 9 17 20 13 → cotes très dispersées
Classe B : 9 12 11 13 10 9 12 12 11 10 → cotes moins dispersées
Classe C : 12 12 12 12 12 12 12 12 12 → dispersion nulle
Classe D : 0 12 12 12 12 12 12 12 20 → dispersion faible (à part 2 cas extrêmes)

L'écart-type va tenir compte de toutes les données (et pas seulement les plus extrêmes)

Paramètre intermédiaire : variance σ^2

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,2} - \mu^2}$$

L'écart-type σ est la racine carrée de la variance

On reprend l'exemple b)
X = gain du jeu (en €)

x_i	p_i
-2	2/6
0	3/6
3	1/6
total	1

σ^2 = 2/6*(-2)² + 3/6*0² + 1/6*3² – (–1/6)²
= 2/6*4 + 0 + 1/6*9 – 1/36 = 8/6 + 9/6 – 1/36
= 17/6 – 1/36 = 102/36 – 1/36 = 101/36 = 2,80555…

σ = 1,67 €

Signification de l'écart-type

Quand on connaît μ et σ, on peut ensuite connaître les proportions de probabilité dans n'importe quel intervalle de données

Ex. En général, l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ contient **environ** 68% des valeurs observées pour la variable aléatoire

Dans l'exemple $\mu = -0{,}17$ € et $\sigma = 1{,}67$ €

L'intervalle serait : [-1,84 €, 1,50 €]

Environ 68% des valeurs se trouvent à un écart-type de distance maximum de l'espérance (ou de la moyenne)

Exemple : dans la classe A pour une interro, $\mu = 12$ et $\sigma = 2$

→ on peut en déduire que 68% ont eu une cote entre 10 et 14

Dans la classe B on a $\mu = 12$ et $\sigma = 5$

→ on peut en déduire que 68% ont eu une cote entre 7 et 17

Exercice 1 a)   X = gain du jeu de dé

valeurs de X : 1, 3, 5, -2, -4, -6

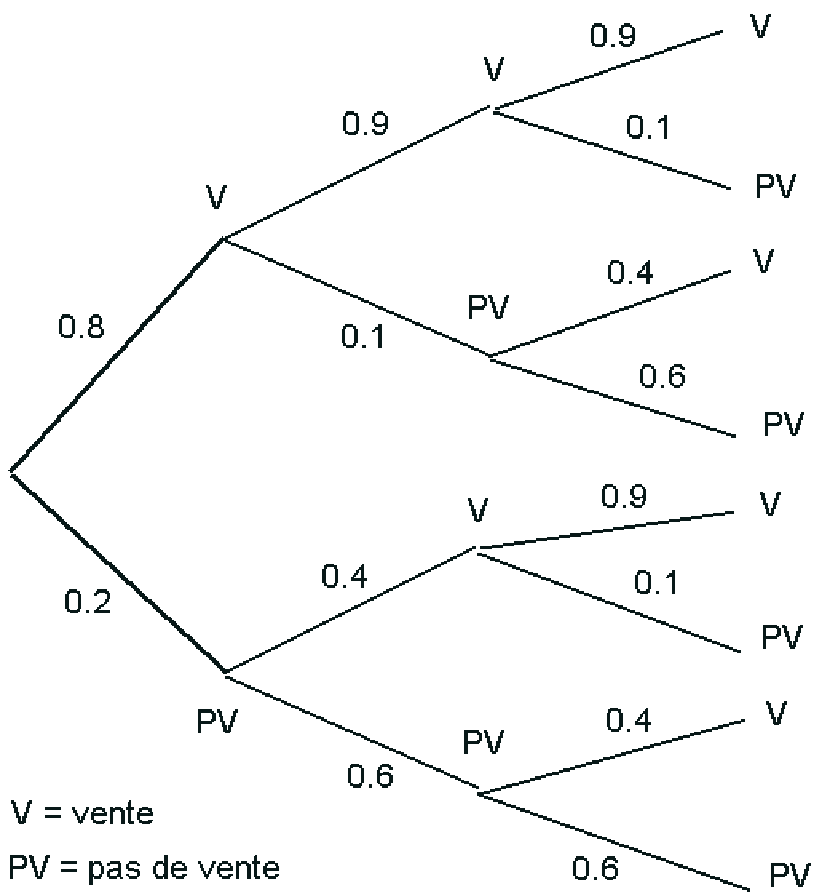
x_i	p_i	$F(x_i)$
-6	1/6	1/6
-4	1/6	2/6
-2	1/6	3/6
1	1/6	4/6
3	1/6	5/6
5	1/6	6/6 = 1

$E[X] = \mu = 1/6*(-6 - 4 - 2 + 1 + 3 + 5) = -1/2 = -0{,}50$ €

$\sigma^2 = 1/6*((-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2) – (-0.5)^2$
$= 1/6\ (36 + 16 + 4 + 1 + 9 + 25) – 0.25 = 14{,}916666\ldots$

$\sigma = 3{,}86$ €

Exercice 2



X = nombre de ventes par an

$P[X = 0] = 0.2*0.6*0.6 = 0.072$
$P[X = 1] = 0.8*0.1*0.6 + 0.2*0.4*0.1 + 0.2*0.6*0.4$
$= 0.048 + 0.008 + 0.048 = 0.104$

$P[X = 2] = 0.8*0.9*0.1 + 0.8*0.1*0.4 + 0.2*0.4*0.9$
$= 0.072 + 0.032 + 0.072 = 0.176$
$P[X = 3] = 0.8*0.9*0.9 = 0.648$

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	0.072	0.072
1	0.104	0.176
2	0.176	0.352
3	0.648	1

$E[X] = \mu = 0.072*0 + 0.104*1 + 0.176*2 + 0.648*3 = 2.4$

σ^2 = variance = $0.072*0^2 + 0.104*1^2 + 0.176*2^2 + 0.648*3^2 - 2.4^2$
$= 0.88$

σ = écart-type = 0.938…

Lundi 22 février

Exercice 4

a) b) X = nombre de frigos défectueux

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ valeurs possible de X

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	0.512	0.512
1	0.384	0.896
2	0.096	0.992
3	0.008	1

$P[X = 0]$ = P(0 frigos défectueux) = $0.8*0.8*0.8 = 0.512$
$P[X = 1]$ = P(1 frigos défectueux) = $3*0.2*0.8*0.8 = 0.384$
$P[X = 2]$ = P(2 frigos défectueux) = $3*0.2*0.2*0.8 = 0.096$
$P[X = 3]$ = P(3 frigos défectueux) = $0.2*0.2*0.2 = 0.008$

c) $E[X] = \mu = 0.384*1 + 0.096*2 + 0.008*3 = 0.6$

$\sigma^2 = 0.384*1^2 + 0.096*2^2 + 0.008*3^2 - 0.6^2 = 0.48$

$\sigma = 0.692\ldots$

d) Y = frais de réparation des frigos défectueux

x_i	y_i	p_i	$F(x_i)$
0	0	0.512	0.512
1	60	0.384	0.896
2	95	0.096	0.992
3	130	0.008	1

$E[Y] = 0.384*60 + 0.096*95 + 0.008*130 = 33.20$ €

Exercice 5

a) X = gain d'un jeu de dés

$\Omega = \{-1, 2, 5\}$

x_i	p_i	$F(x_i)$
-1	25/36	25/36
2	10/36	35/36
5	1/36	1

$P[X = -1]$ = P(pas de 6) = 5/6*5/6 = 25/36
$P[X = 2]$ = P(un seul dé tombe sur 6) = 1/6*5/6 + 5/6*1/6 = 10/36
$P[X = 5]$ = P(2 dés tombent sur 6) = 1/6*1/6 = 1/36

b) $E[X] = \mu = 25/36*(-1) + 10/36*2 + 5*1/36$
$= (-25 + 20 + 5)/36 = 0$ €

→ jeu équitable
Si on joue 20 fois, l'espérance de gain est 20*0 = 0 €

c) 2ème est truqué (voir ex. 3 début du cours)

La probabilité que le dé truqué tombe sur 6 est de 3/8 (et 1/8 pour les autres points)

x_i	p_i	$F(x_i)$
-1	25/48	25/48
2	20/48	45/48
5	3/48 = 1/16	48/48 = 1

P[X = -1] = P(pas de 6) = 5/6*5/8 = 25/48
P[X = 2] = P(un seul dé tombe sur 6) = 1/6*5/8 + 5/6*3/8 = 20/48
P[X = 5] = P(2 dés tombent sur 6) = 1/6*3/8 = 3/48

E[X] = 3/48*5 + 20/48*2 + 25/48*(-1) = (15 + 40 - 25)/48 = 30/48 = 5/8 = 0.625 €

On cherche n tel que n*0.625 = 50 → n = 50/0.625 = 80 fois

Distribution binomiale

On utilise ce modèle de distribution quand on répète un certain nombre de fois la même expérience dans les mêmes conditions (cad les expériences sont toutes indépendantes) et on s'intéresse au nombre de fois que cette expérience « réussit ».

Ex. on lance un dé 3 fois et on veut connaître la probabilité que le dé tombe (exactement) 2 fois sur 6

P(dé tombe 2 fois sur 6 en 3 lancers)
= 3*1/6*1/6*5/6 = 15/216 = 5/72

66* ou 6*6 ou *66 → 3 possibilités

Idem avec 4 lancers

P(dé tombe 2 fois sur 6 en 4 lancers) = 6*1/6*1/6*5/6*5/6
66** ou *66* ou **66 ou 6*6* ou *6*6 ou 6**6 → 6 possibilités

D'où vient le 6 ? c'est le nombre de possibilités de placer les 2dés qui tombent sur 6 parmi les 4 lancers, c'est C_4^2

Idem avec 5 lancers

P(dé tombe 2 fois sur 6 en 5 lancers) = C_5^2*1/6*1/6*5/6*5/6*5/6
= 10*$(1/6)^2$*$(5/6)^3$

Formule générale

Le nombre de fois qu'on répète l'expérience est n
La probabilité de succès d'une expérience est p
La probabilité d'échec d'une expérience est q (avec p + q = 1)
(l'échec est toujours l'événement complémentaire du succès)

X = nombre de succès sur les n expériences
Valeurs possibles de X sont 0, 1, 2, …, n (entiers de 0 à n)

Distribution de X est donnée par la formule suivante :

$$P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Notation : pour dire que X admet une distribution binomiale de paramètres n et p, on écrit : X ~ B(n, p)

Ex. un étudiant se rend à l'école et la probabilité d'arriver en retard est de 15%.

Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard 2 jours sur une semaine (de 5 jours) ?

On a bien une binomiale : n = 5, p = 0.15 et q = 0.85

X = nombre de fois que l'étudiant arrive en retard ~ B(5, 0.15)
(le « succès » est ici « arriver en retard » !)

P(2 fois en retard) = P[X = 2] = C_5^2 *(0.15)²*(0.85)³

P(5 fois en retard) = P[X = 5] = C_5^5 *$(0.15)^5$*$(0.85)^0$ = $(0.15)^5$

Exercice 11

n = 6
succès : obtenir 9 p = 4/36 = 1/9
échec : obtenir autre chose que 9 q = 8/9
X = nombre de 9 obtenus en 6 lancers de 2 dés ~ B(6, 1/9)

P[X = 2] = C_6^2 *$(1/9)^2(8/9)^4$ = 15*$(1/9)^2(8/9)^4$

Mardi 23 février

Espérance de la distribution binomiale

$$E[X] = \mu = np$$

Pour l'exemple de l'exercice 4 (frigos), on avait n = 3 et p = 0.2
et E[X] = µ = np = 0.6

Variance et l'écart-type de la distribution binomiale

$$\sigma^2 = npq \text{ et } \sigma = \sqrt{npq}$$

Même exemple : σ^2 = 3*0.2*0.8 = 0.48

Exercice 9

X : nombre de garçons sur 5 naissances
n = 5 p = 0.52 q = 0.48

$P[X \geq 1] = P[X=1] + P[X=2] + \ldots + P[X=5]$ (5 termes à calculer !)

$= 1 - P[X = 0] = 1 - C_5^0 (0.52)^0 (0.48)^5 = 1 - (0.48)^5 = 0.9745\ldots$

Probabilité d'avoir exactement 2 garçons ?

$P[X = 2] = C_5^2 (0.52)^2 (0.48)^3 = 10 * 0.52^2 * 0.48^3 = 0.299\ldots$

Exercice 18

n = 12 p = 0.2 q = 0.8

X = nombre de puits de pétrole

P(ne pas être en faillite) = $P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2]$
$= 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2]$
$= 1 - (0.8)^{12} - C_{12}^1 (0.2)^1 (0.8)^{11} - C_{12}^2 (0.2)^2 (0.8)^{10}$
$= 1 - (0.8)^{12} - 12(0.2)^1 (0.8)^{11} - 66(0.2)^2 (0.8)^{10}$
= 0.4416…

$$C_n^1 = n$$
$$C_{12}^2 = \frac{12.11}{2!} = 66$$

Exercice 17

a) binomiale n = 100 p = 0.5 q = 0.5
X = nombre de face ~ B(100, 0.5)

$E[X] = \mu = np = 100 * 0.5 = 50$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.5 * 0.5} = \sqrt{25} = 5$$

Signification : $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ contient environ 68% des valeurs de X
→ en moyenne, dans 68% des cas environ, le nombre de face sera entre 45 et 55

b) n = 30 p = 1/6 q = 5/6
X = nombre d'as ~ B(30, 1/6)
E[X] = µ = np = 30*1/6 = 5

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30*1/6*5/6} = \sqrt{150/36} = 2{,}04...$$

c) n = 50 p = ½ q = ½

E[X] = 50*0.5 = 25

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50*0.5*0.5} = \sqrt{12{,}5} = 3{,}53...$$

Exercice 13

C'est une binomiale mais dont le n est inconnu

X = nombre de 6 p = 1/6 q = 5/6

P(au moins un 6) = P[X ≥ 1] ≥ 0.9

On va calculer la probabilité complémentaire :

1 – P[X = 0] ≥ 0.9
– P[X = 0] ≥ 0.9 – 1
– P[X = 0] ≥ -0.1
P[X = 0] ≤ 0.1 (probabilité de n'avoir que des échecs)
$(5/6)^n \leq 0.1$

On prend le logarithme dans les 2 membres

$\log(5/6)^n \leq \log(0.1)$

n log(5/6) ≤ log(0.1)

n ≥ log(0.1)/log(5/6) (le signe change car log(5/6) est négatif)

n ≥ 12.62… → n ≥ 13 → il faut lancer le dé au moins 13 fois

Distribution normale (ou distribution de Gauss)

S'applique à une variable aléatoire **continue**

Ex. poids d'un individu : l'ensemble Ω n'est plus fini, mais contient ici une infinité de valeurs possibles qui sont contenues dans un intervalle, par exemple [0, 200kg]
Toutes les valeurs dans l'intervalle sont possibles, par 73,488 kg

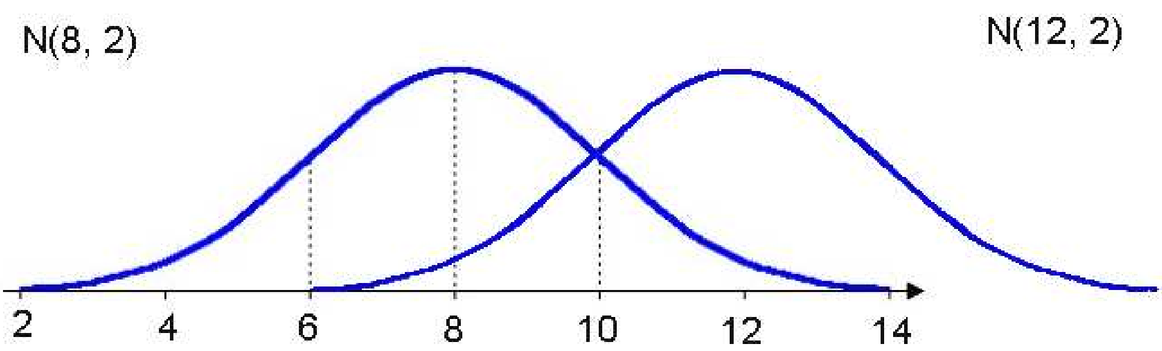
Lorsque une variable aléatoire X obéit à la loi de la distribution normale, on note $X \sim N(\mu, \sigma)$ où μ et σ sont les 2 paramètres de la distribution (soit l'espérance et l'écart-type)

En continu, on travaille toujours avec des intervalles

Exemple : X = poids d'un groupe de personne
$P[X = 72] = 0 \rightarrow$ les probabilités ponctuelles sont toujours nulles
Une personne n'a aucune chance de peser exactement 72 kg…

On va plutôt calculer la probabilité d'être dans un intervalle donné, comme par exemple $P[70 < X < 75] = F(75) - F(70)$

Ex. 25. $X \sim N(10, 2)$ $\mu = 10$ et $\sigma = 2$



Distribution normale réduite

C'est la distribution normale de paramètre $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

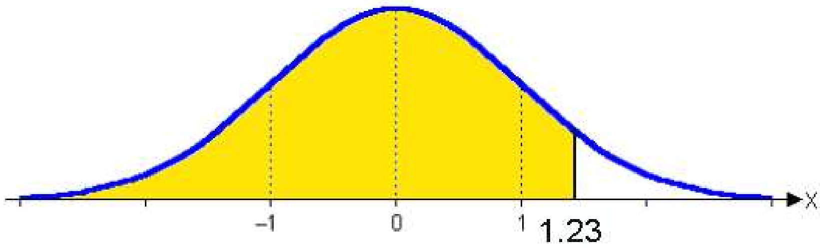
On la note $Z \sim N(0, 1)$

C'est la distribution normale dont les paramètres sont les plus simples, et pour laquelle on utilise un tableau qui donne les valeurs de sa fonction de répartition

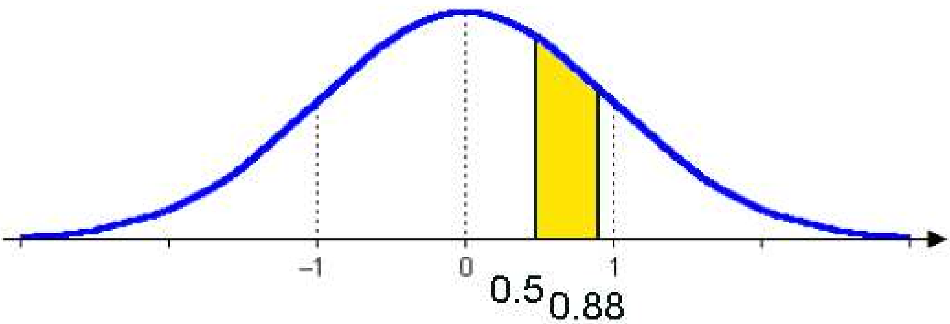
Le tableau donne les valeurs de F(x) pour les x positifs entre 0 et 3

Rappel : $F(x) = P[Z < x]$

Ex. $P[Z < 1.23] = F(1.23) = 0.8907$



$$
\begin{aligned}
P[0.5 < Z < 0.88] &= F(0.88) - F(0.5) \\
&= 0.8106 - 0.6915 \\
&= 0.1191
\end{aligned}
$$

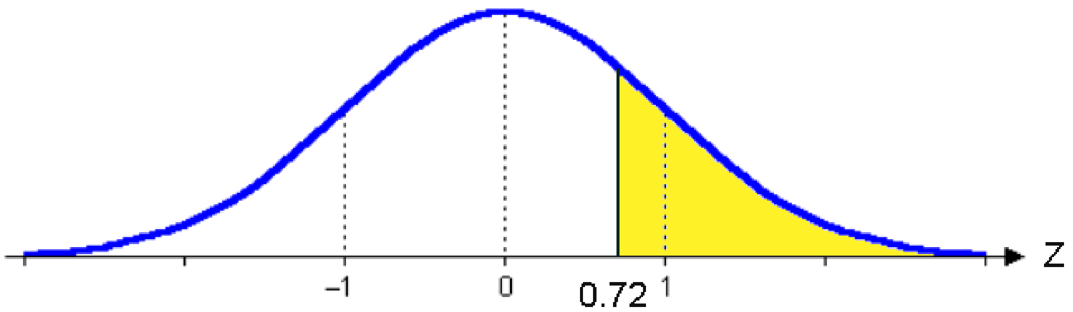


N.B. : l'aire totale sous la courbe est de 1

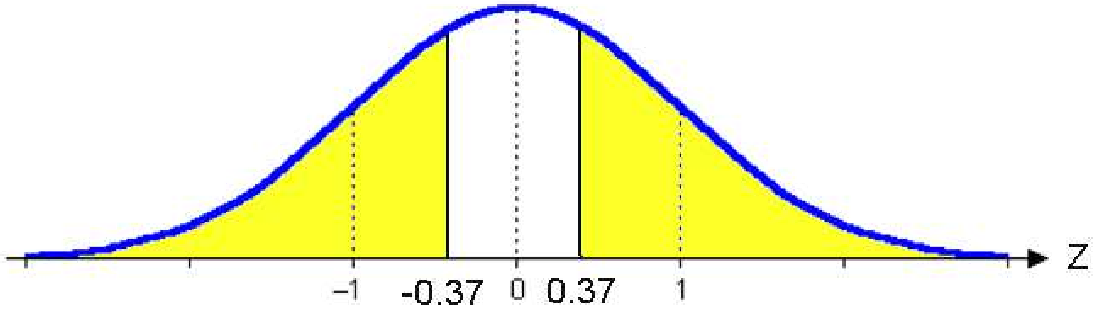
Lundi 1er mars

P[Z > 0.72] = 1 – P[Z ≤ 0.72] = 1 – P[Z < 0.72]
= 1 – F(0.72) = 1 – 0.7642 = 0.2358

Rappel : en continu : P[Z ≤ a] = P[Z < a] + P[Z = a]
= P[Z < a] (car P[Z = a] = 0)



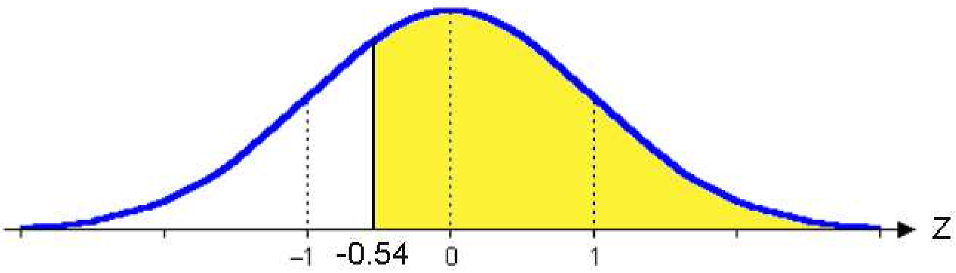
P[Z < -0.37] = ?



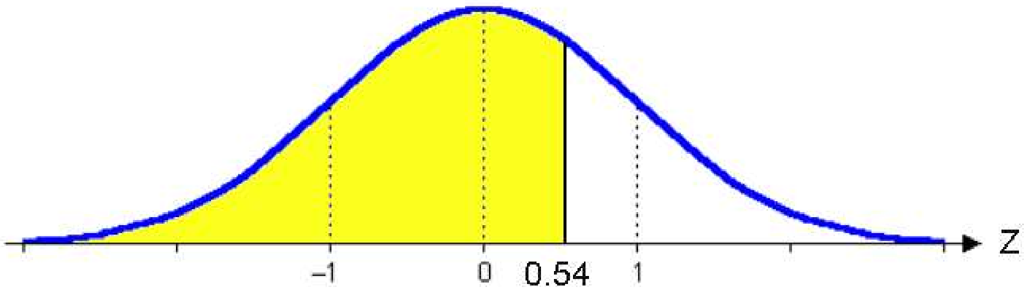
Par symétrie, P[Z < -0.37] = F(-0.37) = P[Z > 0.37] = 1 – P[Z < 0.37]
= 1 – F(0.37) = 1 – 0.6443 = 0.3557

Donc : F(-x) = 1 – F(x)

Comment calculer P[Z > -0.54] ?



Par symétrie, l'aire hachurée est la même que pour le dessin suivant :



Donc : P[Z > -0.54] = P[Z < 0.54] = F(0.54) = 0.7054

Ex. 27

a) P[Z < 1.34] = F(1.34) = 0.9099
b) P[0.57 < Z < 1.63] = F(1,63) – F(0.57) = 0.9484 – 0.7157 = 0.2327
c) P[-0.68 < Z < 1.04] = F(1.04) – F(-0.68) = F(1.04) – (1 – F(0.68))
= F(1.04) – 1 + F(0.68)
= 0.8508 – 1 + 0.7518
= 0.6026
d) P[Z > -0.5] = 1 – P[Z < -0.5] = 1 – F(-0.5) = 1 – (1 – F(0.5))
= 1 – 1 + F(0.5) = F(0.5)
raccourci : = P[Z < 0.5] = F(0.5) = 0.6915

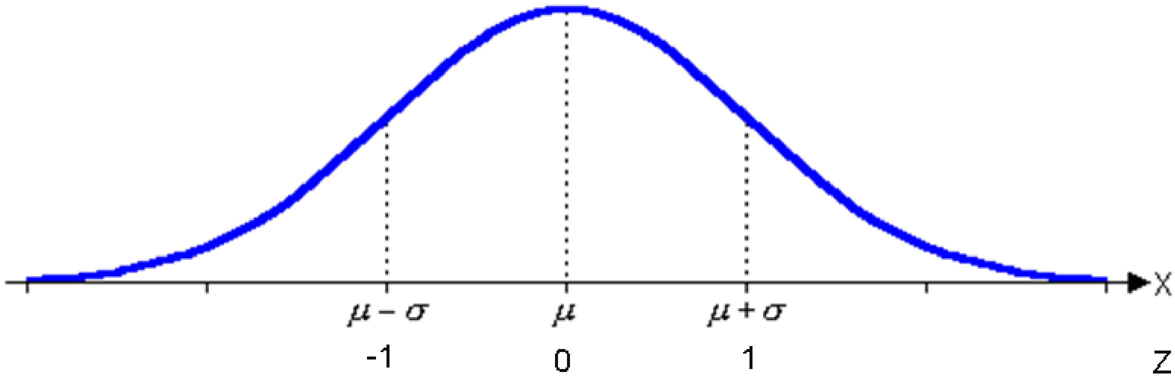
La normale réduite Z est un outil de calcul pour les autres distributions normales X

Calculs de probabilité pour une normale quelconque X ~ N(µ, σ)

Pour passer de X à la normale réduite Z, on utilise la formule suivante :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Exemple : si X = µ alors Z = 0
si X = µ + σ alors Z = 1
si X = µ - σ alors Z = -1



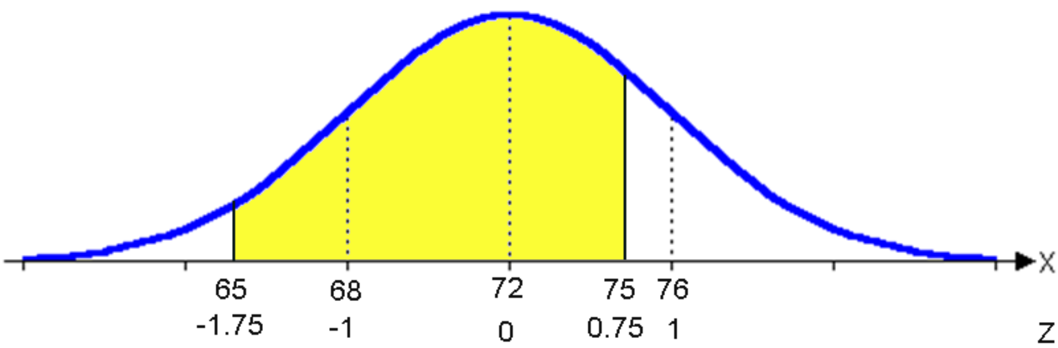
L’échelle Z correspond donc l’échelle X mesurée en écarts-types de distance par rapport à la moyenne

Exemple de calcul. Soit une population pour laquelle le poids moyen est de 72 kg et l’écart-type est de 4 kg. X ~ N(72, 4)

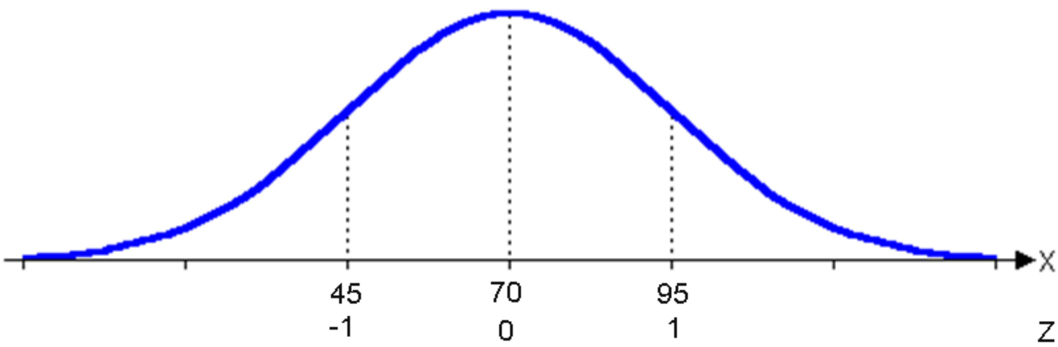
Quelle est la probabilité qu’une personne pèse entre 65 et 75 kg ?

$$P[65 < X < 75] = P[\frac{65-72}{4} < \frac{X-72}{4} < \frac{75-72}{4}] = P[-1.75 < Z < 0.75]$$

$$= F(0.75) – F(-1.75) = F(0.75) – 1 + F(1.75)$$
$$= 0.7734 – 1 + 0.9599$$
$$= 0.7333$$



Ex. 28 – $X \sim N(70, 25)$



$P[56 < X < 83] = P[(56-70)/25 < Z < (83-70)/25]$
$= P[-14/25 < Z < 13/25]$
$= P[-0.56 < Z < 0.52]$
$= F(0.52) – F(-0.56)$
$= F(0.52) – 1 + F(0.56)$
$= 0.6985 – 1 + 0.7123 = 0.4108$

$P[X > 89] = P[Z > (89-70)/25]$
$= P[Z > 0.76] = 1 – P[Z < 0.76]$
$= 1 – F(0.76) = 1 – 0.7764 = 0.2236$

$P[40 < X < 67] = P[(40-70)/25 < Z < (67-70)/25]$
$= P[-30/25 < Z < -3/25]$
$= P[-1.2 < Z < -0.12]$
$= F(-0.12) – F(-1.2)$
$= 1 – F(0.12) – (1 – F(1.2))$
$= 1 – F(0.12) – 1 + F(1.2)$
$= –F(0.12) + F(1.2)$
$= –0.5478 + 0.8849 = 0.3371$

$P[X = 82] = 0$ → en continu, les probabilités ponctuelles sont toujours nulles

Exercice 29. X = distance parcourue avec un pneu
~ N(60000, 10000)

P(pneu usé avant 50000) = P[X < 50000]
= P[Z < (50000 – 60000)/10000]
= P[Z < -1]
= F(-1) = 1 – F(1)
= 1 – 0.8413 = 0.1587

Mardi 2 mars

Résumé des formules importantes

$X \sim N(\mu, \sigma)$ $\quad\quad$ $Z \sim N(0, 1)$

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ équivalent à $X = \mu + Z\sigma$

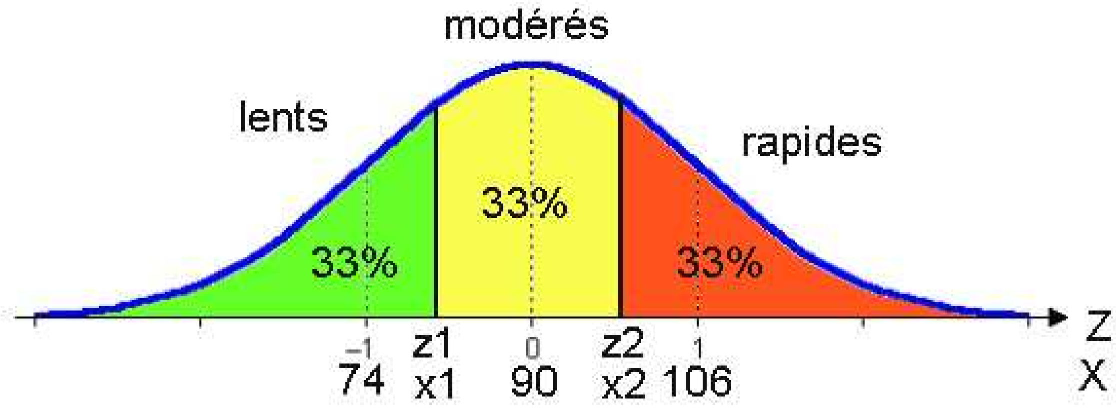
P[a < Z < b] = F(b) – F(a)
P[Z < a] = F(a)
P[Z > a] = 1 – F(a)
F(-x) = 1 – F(x)
F(0) = 0.5

Exercice 30 : X = vitesse de véhicules ~ N(90, 16)

a) P[X > 110] = P[Z > (110 – 90)/16] = P[Z > 1.25] = 1 – F(1.25)
= 1 – 0.8944 = 0.1056
Donc 10,56% des véhicules roulent à plus de 110 km/h

b) P[70 < X < 102] = P[(70 – 90)/16 < Z < (102 – 90)/16]
= P[-1.25 < Z < 0.75]
= F(0.75) – F(-1.25)
= F(0.75) – 1 + F(1.25)
= 0.7734 – 1 + 0.8944
= 0.6678
Donc 66,78% des véhicules roulent entre 70 km/h et 102 km/h

c) trois catégories d'effectif égal → 1/3 dans chaque groupe càd 33.33…%



On va chercher la valeur de z_2 qui est telle que il y a une probabilité 0.666… d'être à gauche de cette valeur
→ $P[Z < z_2] = F(z_2) = 2/3 = 66{,}66\% = 0.6666$

La valeur la plus proche est $z_2 = 0.43$ (et donc par symétrie, $z_1 = -0.43$)

En utilisant la formule $X = \mu + Z\sigma$:

$x_1 = 90 + 16*(-0.43) = 83.12$ km/h
$x_2 = 90 + 16*0.43 = 96.88$ km/h

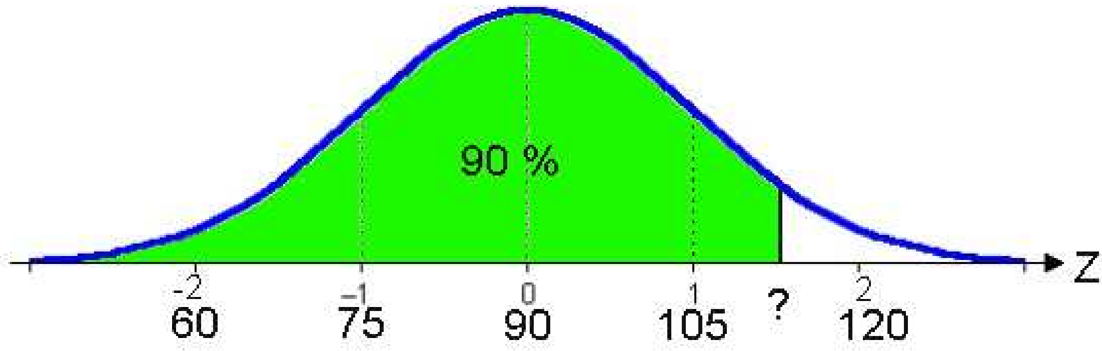
Lents : ceux qui roulent à moins de 83.12 km/h
Modérés : ceux qui roulent entre 83.12 km/h et 96.88 km/h
Rapides : ceux qui roulent plus vite que 96.88 km/h

Exercice 31

X : temps pour terminer une interrogation ~ N(90, 15)

a) $P[X < 120] = P[Z < (120 - 90)/15] = P[Z < 2]$
$= F(2) = 0.9772 = 97.72\%$

b)

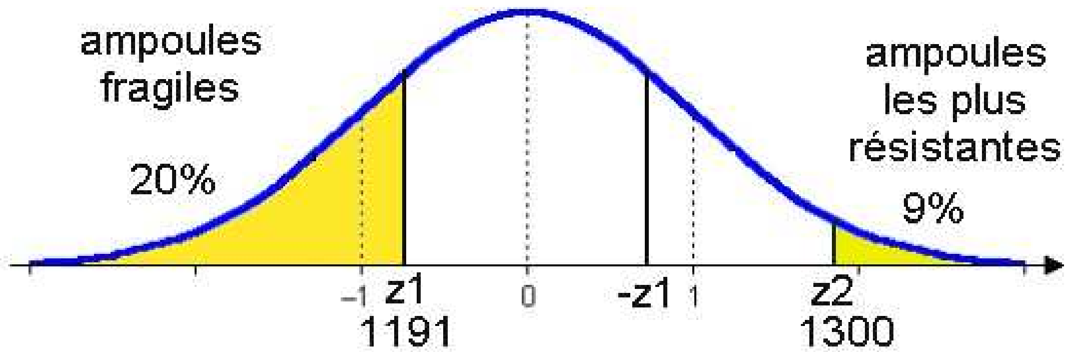


On cherche la valeur qui correspond à une aire de 0.9 à sa gauche

Soit z tel que F(z) = 0.9. Le z le plus proche est 1.28

On en déduit : x = 90 + 1.28*15 = 109.2
= 109 min 12 sec = 1h 49 min 12 sec

Exercice 33



Pour z_2 : $P[Z > z_2] = 0.09$ donc $P[Z < z_2] = 0.91$
→ $z_2 = 1.34$

On voit que z_1 est négatif et que $P[Z < z_1] = 0.2$, donc par symétrie
$P[Z < -z_1] = 0.8$ → la valeur la plus proche dans le tableau est 0.7995
et donc $-z_1 = 0.84$ et donc $z_1 = -0.84$

Il reste à trouver les valeurs de μ et de σ. On va utiliser la formule
$X = \mu + Z\sigma$:

Pour z_1 :	$1191 = \mu - 0.84*\sigma$	(1)
Pour z_2 :	$1300 = \mu + 1.34*\sigma$	(2)

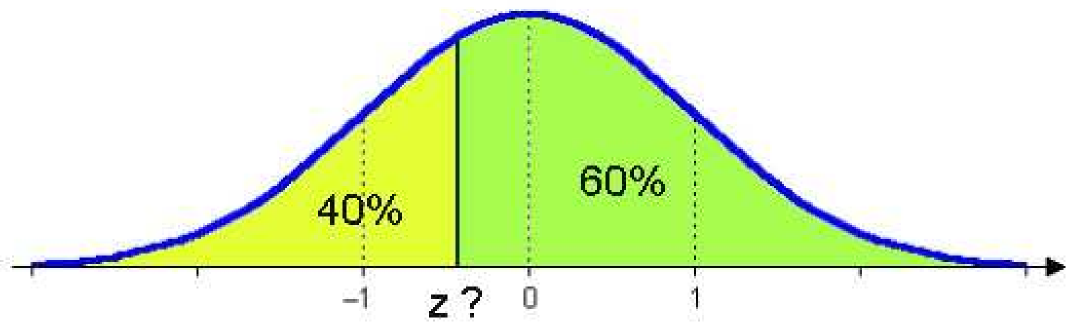
On a un système de 2 équations à 2 inconnues. On soustrait (2) – (1) :

$1300 - 1191 = 1.34*\sigma + 0.84*\sigma$
$109 = 2.18*\sigma$
$\sigma = 50$

On remplace dans (1) : $1191 = \mu - 0.84*50$
$1191 = \mu - 42$
$\mu = 1191 + 42 = 1233$

Donc la durée de vie des ampoules $X \sim N(1233, 50)$

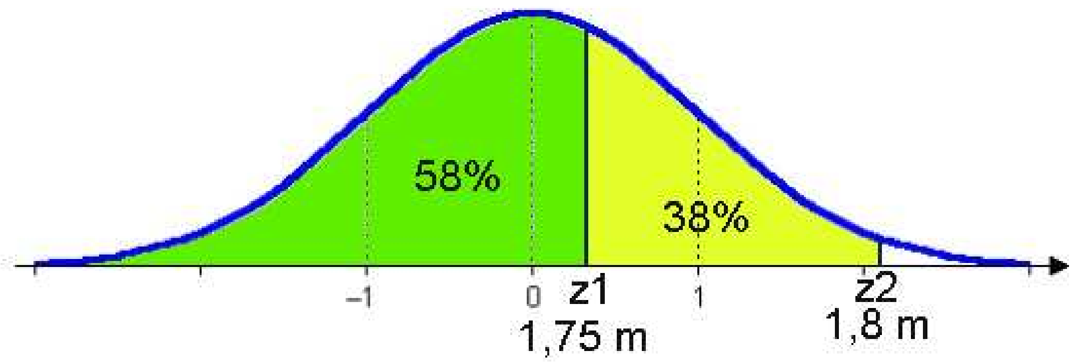
b)



On cherche z tel que il y a une probabilité de 0.4 à sa gauche. On voit que z est négatif : $P[Z < z] = 0.4 \rightarrow P[Z < -z] = 0.6$
En prenant la valeur la plus proche, on trouve $-z = 0.25$
et donc $z = -0.25$

$x = \mu + z\sigma = 1233 - 0.25*50 = 1220,5$ h

Exercice 32 : X : taille d'individus ~ N(µ, σ) (paramètres inconnus)



P[Z < z_1] = 0.58 → z_1 = 0.2
P[Z < z_2] = 0.96 → z_2 = 1.75

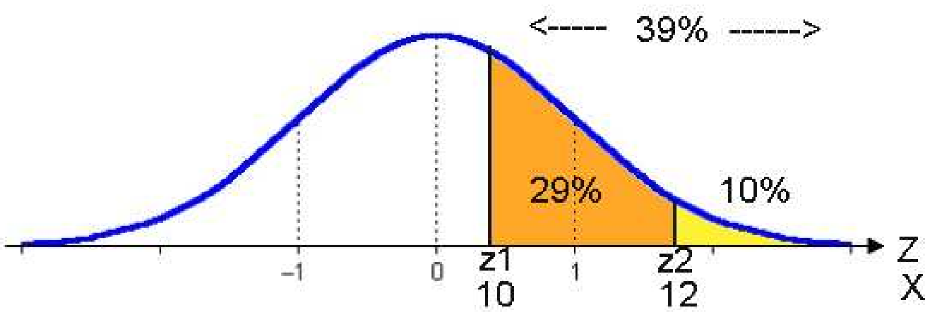
Pour z_1 : $1.75 = \mu + 0.2*\sigma$ (1)
Pour z_2 : $1.8 = \mu + 1.75*\sigma$ (2)

On soustrait : $0.05 = 1.55*\sigma$
→ $\sigma = 0.05/1.55 = 0.0322$ m = 3.22 cm

On remplace dans (1) : $\mu = 1.75 - 0.2*\sigma$
$= 1.75 - 0.2*0.0322 = 1.7435$ m

Lundi 8 mars

Ex. 34. X = hauteur des cactus (en mètres)



a) P[Z < z_1] = 0.61 → z_1 = 0.28
P[Z < z_2] = 0.90 → z_2 = 1.28

Pour z_1 : $10 = \mu + 0.28*\sigma$ (1)
Pour z_2 : $12 = \mu + 1.28*\sigma$ (2)

On soustrait les équations : $\sigma = 2$ m et donc $10 = \mu + 0.28*2$
→ $\mu = 9.44$ m

$X \sim N(9.44, 2)$

b) $P[X > 14] = P[Z > (14 - 9.44)/2] = P[Z > 2.28] = 1 - F(2.28)$
$= 1 - 0.9887 = 0.0113$
Donc 1.13% des cactus dépassent 14 m.

Exercice 35.

X = nombre de « pile » → distribution binomiale

On a ici une binomiale B(400, 0.5)

$P[180 \leq X \leq 220] = P[X = 180] + P[X = 181] + \ldots + P[X = 220]$
$= C_{400}^{180} 0.5^{180} 0.5^{220} + \ldots$

Il y a 41 termes à calculer ! → calcul pratiquement impossible à faire à la main ou à la machine à calculer

Rappel : pour B(n, p), $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$

Approximation de la binomiale par la normale

Binomiale : distribution discrète
Normale : distribution continue

On va remplacer la binomiale par la normale qui a les mêmes paramètres μ et σ, en utilisant la formule :

$$P[a \leq X_B \leq b] \approx P[a - ½ \leq X_N \leq b + ½]$$

On agrandit l'intervalle de ½ de chaque coté (correction de continuité)

Exemple. Exercice 18

n = 12 *p = 0.2* *q = 0.8*

X = nombre de puits de pétrole

$P(\text{ne pas être en faillite}) = P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2]$
$= 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2]$
$= 1 - (0.8)^{12} - C_{12}^{1}(0.2)^{1}(0.8)^{11} - C_{12}^{2}(0.2)^{2}(0.8)^{10}$
$= 1 - (0.8)^{12} - 12(0.2)^{1}(0.8)^{11} - 66(0.2)^{2}(0.8)^{10}$
$= 0.4416\ldots$

On va refaire l'exercice en utilisant l'approximation par la loi normale.

On calcule d'abord les paramètres :
$\mu = 12*0.2 = 2.4$ et $\sigma = \sqrt{12*0.2*0.8} = 1.3856...$

La binomiale B(12, 0.2) est remplacée par N(2.4, 1.3856…)

$P[X_B \geq 3] = P[3 \leq X_B] \approx P[3 - ½ \leq X_N] = P[2.5 \leq X_N]$
$= P[X_N \geq 2.5]$
$= P[Z \geq (2.5 - 2.4)/1.3856]$
$= P[Z \geq 0.07]$
$= 1 - F(0.07)$
$= 1 - 0.5279$
$= 0.4721$
→ différence de 0.03 avec la vraie réponse

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$

On revient à l'exercice 35 :

$X_B \sim B(400, 0.5)$ $\mu = 400*0.5 = 200$
et $\sigma = \sqrt{400*0.5*0.5} = 10$

On va remplacer par $X_N \sim N(200, 10)$

$$
\begin{aligned}
P[180 \le X_B \le 220] &\approx P[179.5 \le X_N \le 220.5] \\
&= P[(179.5 - 200)/10 \le Z \le (220.5 - 200)/10] \\
&= P[-2.05 \le Z \le 2.05] \\
&= F(2.05) - F(-2.05) \\
&= F(2.05) - 1 + F(2.05) \\
&= 0.9798 - 1 + 0.9798 \\
&= 0.9596
\end{aligned}
$$

Exercice 38.

a) X = nombre de tests positifs $\sim B(400, 0.1)$
b) $\mu = 400*0.1 = 40$ et $\sigma = \sqrt{400*0.1*0.9} = 6$
c) On va remplacer la binomiale par $N(40, 6)$

$$
\begin{aligned}
P[X_B > 30] = P[X_B \ge 31] &\approx P[X_N \ge 30.5] \\
&= P[Z \ge (30.5 - 40)/6] \\
&= P[Z \ge -1.58] \\
&= 1 - P[Z \le -1.58] \\
&= 1 - F(-1.58) \\
&= 1 - (1 - F(1.58)) \\
&= F(1.58) \\
&= 0.9429
\end{aligned}
$$

Exercice 39

a) X = nombre de piratages réussis $\sim B(1000, 0.004)$

$\mu = 1000*0.004 = 4$ et $\sigma = \sqrt{1000*0.004*0.996} = 1.99599...$

b)
$$
\begin{aligned}
P[X_B > 5] = P[X_B \ge 6] &\approx P[X_N \ge 5.5] \\
&= P[Z \ge (5.5 - 4)/1.99599] \\
&= P[Z \ge 0.75] \\
&= 1 - F(0.75) \\
&= 1 - 0.7734 \\
&= 0.2266
\end{aligned}
$$

Mardi 9 mars

Chapitre 3 – Distributions à 2 dimensions

On étudie un couple de variables aléatoires (X, Y)

Ex. X = cote de l'interro de math
Y = cote de l'interro de stat
(2 variables discrètes)
→ on observe des couples de valeurs :
(8, 12), (10, 15), (3, 14), (15, 17), (2, 4),…

En général, on étudie un couple de variables aléatoires dans le but de savoir si il y a une **corrélation** entre les 2 variables

La corrélation permet de dire s'il y a une dépendance plus ou moins forte entre les 2 variables.

Ex. X = taille en cm
Y = poids en kg
(deux variables continues)
→ (170, 76), (162, 71), (190, 80), (190, 70),…

A une dimension, la distribution est donnée par un tableau qui reprend les valeurs (x_i) et les probabilités (p_i)

A 2 dimensions, la distribution est donnée par un tableau à 2 dimensions qui donne les probabilités p_{ij} :

$$p_{ij} = P[X = x_i \text{ ET } Y = y_j]$$

Coefficient de corrélation

Etapes de calcul :

- $E[X] = \mu_x$: espérance ou moyenne de X
- $E[Y] = \mu_y$: espérance ou moyenne de Y

- σ_x = écart-type de X
- σ_y = écart-type de Y
- covariance : paramètre qui fait intervenir tous les couples de valeurs (X, Y)

$$\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$$

- coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Le coefficient de corrélation r est toujours compris entre -1 et 1.
Si r = 1 ou -1, alors on a une dépendance linéaire exacte entre X et Y ; si r = 0, alors les variables X et Y sont indépendantes

En continu, on calcule avec les valeurs au milieu des intervalles

Exemple : on va calculer r pour le tableau du syllabus p. 28

$E[X] = \mu_x = 0.2*150 + 0.3*165 + 0.33*175 + 0.17*190$
$= 169.55$ cm

$E[Y] = \mu_y = 0.1*57.5 + 0.35*70 + 0.4*80 + 0.15*92.5$
$= 76.125$ kg

$(\sigma_x)^2 = 0.2*150^2 + 0.3*165^2 + 0.33*175^2 + 0.17*190^2 - 169.55^2$
$= 163.5475$
$\sigma_x = 12.79$ cm

$(\sigma_y)^2 = 0.1*57.5^2 + 0.35*70^2 + 0.4*80^2 + 0.15*92.5^2 - 76.125^2$
$= 94.04…$

$\sigma_y = 9.7$ kg

Covariance $\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$

$= 0.05*150*57.5 + 0.1*150*70 + 0.05*150*80 + 0$
$+ 0.05*165*57.5 + 0.12*165*70 + … - 169.55*76.125$

= 12952.25 – 12906.99375 = 45.25…

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ = 45.25 / (12.79 * 9,7) = 0.3647…

Droite de régression : droite qui approxime le mieux l'ensemble des points d'une distribution à 2 dimensions

Son équation est y = ax + b avec

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x)^2} \qquad b = \mu_y - a\mu_x$$

Dans l'exemple : a = 45.25/ (12.79)² = 0.28 et b = 29.22

La droite de régression a comme équation y = 0.28x + 28.651

Par exemple, si on prend x = 160 cm, on trouve y = 73.45 kg
→ ceci veut dire que une personne de 160cm a de forte chance d'avoir un poids voisin de 73.45kg

Exercice 2 (p. 13)

Données discrètes

→ dans la formule, on va prendre 1/20 pour chaque probabilité

$E[X] = \mu_x = (5 + 8 + 14 + \dots)/20 = 10.8$

$E[Y] = \mu_y = (7 + 12 + 13 + \dots)/20 = 11.7$

$(\sigma_x)^2 = (5^2 + 8^2 + 14^2 + \dots)/20 - (\mu_x)^2 = 2690/20 - 10.8^2 = 17.86$

$\sigma_x = 4.2261\dots$

$(\sigma_y)^2 = (7^2 + 12^2 + 13^2 + \dots)/20 - (\mu_y)^2 = 3124/20 - 11.7^2 = 19.31$

$\sigma_y = 4.3943\ldots$

$\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$ = (5*7 + 8*12 + 14*13 + …)/20 - $\mu_x\ \mu_y$
= 2815/20 – 10.8*11.7 = 14.39

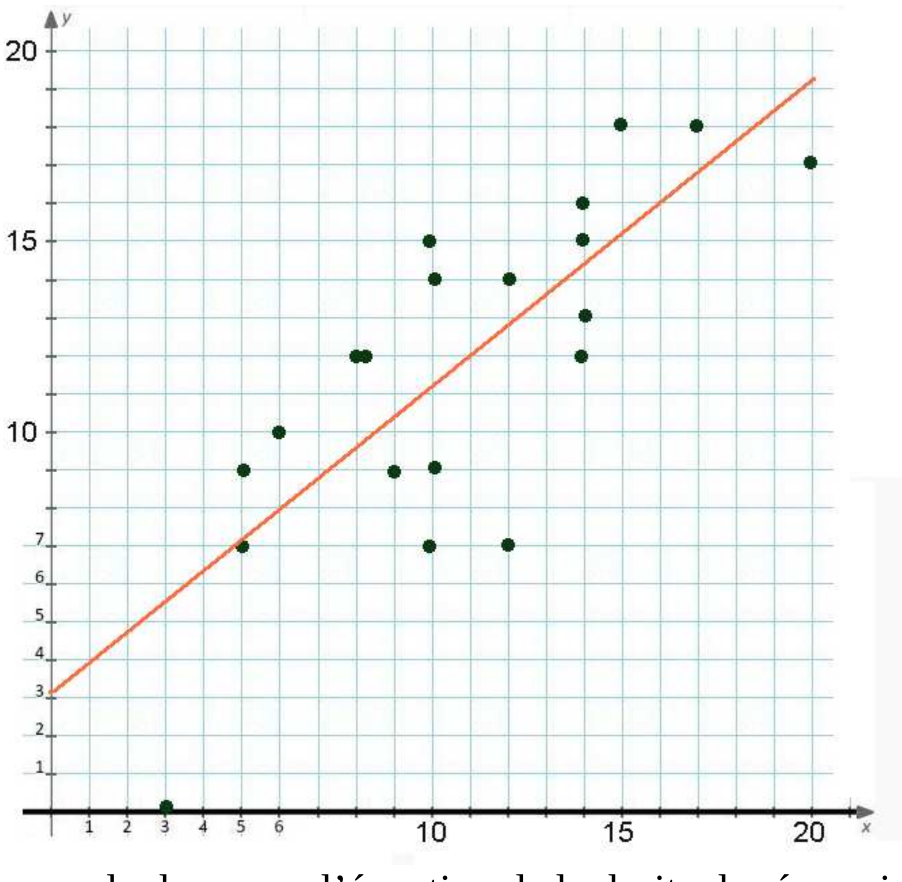
$r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ = 14.39 / (4.2261 * 4.3943) = 0.7748…

$a = \dfrac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x)^2}$ = 14.39 / $(4.2261)^2$ = 0.8…

$b = \mu_y - a\mu_x$ = 11.7 – 0.8*10.8 = 3.06

Équation de la droite de régression : y = 0.8x + 3.06

Pour dessiner la droite, on prend 2 points :
si x = 0, y = 3.06 et si x = 20, y = 19.06



Si x = 11, on calcule y avec l'équation de la droite de régression :

$y = 0.8*11 + 3.06 = 11.86 \approx 12$ → la cote la plus probable est 12

Lundi 15 mars

Cas particulier des variables indépendantes

Rappel $p_{ij} = P[X = x_i \text{ ET } Y = y_j]$

Si X et Y sont indépendantes :

$$p_{ij} = P[X = x_i] * P[Y = y_j] = p_{i.} * p_{.j}$$

→ dans ce cas, les probabilités au centre du tableau sont égales au produit des probabilités marginales

Exemple :

X Y	1	2	3	$p_{i.}$
1	0.08	0.2	0.12	0.4
2	0.12	0.3	0.18	0.6
$p_{.j}$	0.2	0.5	0.3	1

Toutes les lignes et les colonnes du tableau sont proportionnelles

Exercice : calculer la covariance pour ce couple de variables aléatoires

$E[X] = \mu_x = 0.4*1 + 0.6*2 = 1.6$

$E[Y] = \mu_y = 0.2*1 + 0.5*2 + 0.3*3 = 2.1$

$\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$
$= 0.08*1 + 0.2*2 + 0.12*3 + 0.12*2 + 0.3*4 + 0.18*6 - 1.6*2.1$
$= 0.08 + 0.4 + 0.36 + 0.24 + 1.2 + 1.08 - 3.36 = 0$

Propriété : la covariance de 2 variables indépendantes est toujours nulle, de même pour le coefficient de corrélation

Exercice 1

X Y	100	150	200	$p_{i.}$
20	0.09	0.3	0.36	0.75
30	0.03	0.1	0.12	0.25
$p_{.j}$	0.12	0.4	0.48	1

E[X] = 0.75*20 + 0.25*30 = 22.5
E[Y] = 0.12*100 + 0.4*150 + 0.48*200 = 168
Covariance : $\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$ = 0 car X et Y sont indépendantes

P[X = 20 ET Y $\geq$ 150] = 0.3 + 0.36 = 0.66

Exercice 1bis (pas dans le syllabus d'exercice)

Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs d'une distribution à deux dimensions d'un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y).

X Y	50	100	$p_{i.}$
10	0.1	0.3	0.4
20	0.4	0.2	0.6
$p_{.j}$	0.5	0.5	1

Complétez ce tableau et précisez si X et Y sont indépendantes ou non. Calculez ensuite les espérances mathématiques et écart-types de X et de Y, leur covariance, leur coefficient de corrélation et l'équation de la droite de régression.

Pour l'indépendance, on vérifie la 1ère case : 0.1 $\neq$ 0.4*0.5 = 0.2 → donc X et Y ne sont pas indépendants. On voit aussi que les lignes ou les colonnes ne sont pas proportionnelles !

E[X] = μ_x = 0.5*50 + 0.5*100 = 75

E[Y] = μ_y = 0.4*10 + 0.6*20 = 16

$(\sigma_x)^2 = 0.5*50^2 + 0.5*100^2 - 75^2 = 625$

$\sigma_x = 25$

$(\sigma_y)^2 = 0.4*10^2 + 0.6*20^2 - 16^2 = 24$

$\sigma_y = 4.8989\ldots$

$\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$

$= 0.1*50*10 + 0.3*100*10 + 0.4*50*20 + 0.2*100*20 – 75*16$
$= 50 + 300 + 400 + 400 – 1200 = -50$

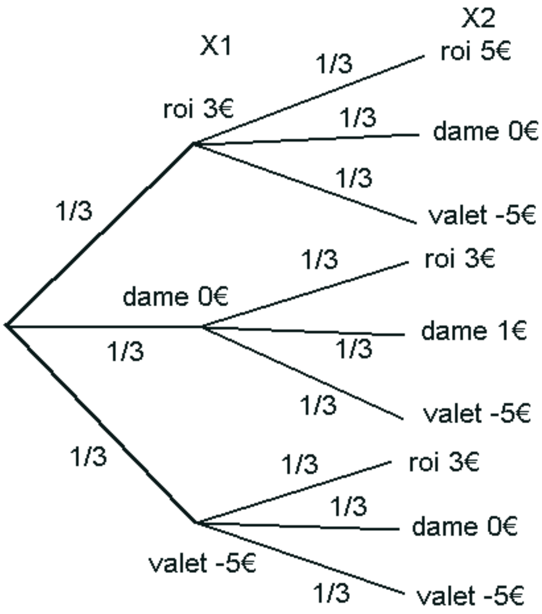
$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -50/(25*4.8989) = -0.408\ldots$

$a = \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_x)^2} = -50/625 = -0.08$

$b = \mu_y - a\mu_x = 16 – (-0.08)*75 = 22$

Équation de la droite de régression : y = -0.08x + 22

Exercice 3



a) distribution de X_1

$(X_1)_i$	p_i
-5	1/3
0	1/3
3	1/3

distribution de X_2

$(X_2)_i$	p_i
-5	3/9
0	2/9
1	1/9
3	2/9
5	1/9

b) $E[X_1] = -5*1/3 + 3*1/3 = -2/3 = -0.67$ €

$E[X_2] = -15/9 + 1/9 + 6/9 + 5/9 = -3/9 = -1/3 = -0.33$ €

c) $(\sigma_{x1})^2 = 25*1/3 + 9*1/3 – 4/9 = 34/3 – 4/9 = 10.88…$

$\sigma_{x1} = 3.30$ €

$(\sigma_{x2})^2 = 25*3/9 + 1/9 + 9*2/9 + 25*1/9 – 1/9$
$= (75 + 1 + 18 + 25 – 1)/9 = 118/9 = 13.11…$

$\sigma_{x2} = 3.62$ €

d) distribution à deux dimensions de (X_1, X_2)

X1 X2	-5	0	1	3	5	
-5	1/9	1/9	0	1/9	0	1/3
0	1/9	0	1/9	1/9	0	1/3
3	1/9	1/9	0	0	1/9	1/3
	3/9	2/9	1/9	2/9	1/9	1

e) $\sigma_{xy} = \sum\sum p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$ = 1/9*(25 – 15 – 15 + 15) - (-2/3)*(-1/3)
= 10/9 – 2/9 = 8/9

$r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ = (8/9) / (3.30*3.62) = 0.0744… → corrélation faible

Lundi 22 mars

Chapitre 4 – Inférence statistique

On étudie l'interaction des paramètres statistiques observés au niveau d'une **population** et d'un **échantillon**.

Population : ensemble dans lequel on étudie une variable statistique

Echantillon : sous-ensemble de la population pour lequel on va étudier les paramètres de la même variable à un niveau d'effectif réduit

Paramètres pour la population :

- N : effectif total (parfois inconnu)
- µ : moyenne de la variable étudiée
- σ : écart-type de la variable étudiée

Paramètres pour l'échantillon :

- n : taille de l'échantillon (toujours connu !)
- $\bar{x}$: moyenne de l'échantillon
- s : écart-type de l'échantillon

Echantillonnage : on étudie comment varient les paramètres de l'échantillon à partir de ceux de la population

Estimation : on estime les paramètres de la population à partir de ceux de l'échantillon

Théorie de l'échantillonnage

$\bar{X}$: distribution échantillonnée de la moyenne

Dans une population donnée, on va prendre des échantillons (de même taille *n*), et pour chaque échantillon, on calcule la moyenne $\bar{x}$.

$\bar{X}$: variable aléatoire qui prend toutes les valeurs possibles des moyennes d'échantillons d'une taille donnée

Cette variable aléatoire possède sa propre distribution, il y a C_N^n possibilités de valeurs, et elle possède aussi une moyenne (notée $\mu_{\bar{x}}$) et un écart-type (noté $\sigma_{\bar{x}}$)

On peut démontrer les formules suivantes :

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \text{ et } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (échantillons avec remise)}$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \text{ et } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ (échantillons sans remise)}$$

Les 2 formules pour $\sigma_{\bar{x}}$ sont très proches, elles ne diffèrent que par le 2ème facteur $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ qui peut être négligé :

- quand N est inconnu
- quand N est très grand par rapport à n

Exemple : N = 11000000 et n = 1000, ce facteur vaut :

$\sqrt{\frac{10999000}{10999999}} = 0.999954...$ soit un nombre très proche de 1

Pour l'exemple du syllabus : $\mu_{\bar{x}}$ = 69.6 kg

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{8.6}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-3}{5-1}} = \frac{8.6}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{8.6}{\sqrt{6}}$ = 3.51 kg

Remarque : [$\mu_{\bar{x}}$ - $\sigma_{\bar{x}}$, $\mu_{\bar{x}} + \sigma_{\bar{x}}$] = [69.6 – 3.5, 69.6 + 3.5] = [66.1, 73.1]

→ on constate que cet intervalle contient 7/10 des moyennes échantillons

Propriété : lorsque n ≥ 30, on considère que la distribution de $\bar{x}$ est normale.

Exercice 1

X = dépenses d'un client dans le magasin de meubles
N inconnu
µ = 236 €
σ = 48 €
(24 mois → donnée « parasite »)

a) $\bar{x}$ = moyenne des dépenses pour un échantillon de 36 personnes
On calcule les paramètres de $\bar{x}$:
$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 236 € et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{48}{\sqrt{36}}$ = 8 €
$\bar{x}$ ~ N(236, 8)

b) P[$\bar{x}$ < 220] = P[($\bar{x}$ - 236)/8 < (220 – 236)/8]
= P[Z < –2] = F(-2) = 1 – F(2) = 1 – 0.9772 = 0.0228

c) P[X < 220] = P[Z < (220 – 236)/48] = P[Z < –16/48]
= P[Z < -0.33] = F(-0.33) = 1 – F(0.33) = 1 – 0.6293
= 0.3707

X ~ N(236, 48)

Exercice 2

X = points d'un test d'aptitude ; µ = 72 et σ = 16
N inconnu
$\bar{x}$ = moyenne du test pour un échantillon de 100 étudiants
$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 72 et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{100}}$ = 1,6

$\bar{x}$ ~ N(72, 1.6)

P[$\bar{x}$ > 74] = P[Z > (74 – 72)/1.6] = P[Z > 1.25] = 1 – F(1.25)
= 1 – 0.8944 = 0.1056

Lundi 29 mars

Exercice 4

X : montant de commandes ~ N(3600, 750)

N est inconnu

Échantillons de taille n = 100

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 3600 et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{750}{\sqrt{100}} = 75$ → $\bar{x}$ ~ N(3600, 75)

P[3500 < $\bar{x}$ < 3700] = P[(3500 – 3600)/75 < Z < (3700 – 3600)/75]
= P[-1.33 < Z < 1.33]
= F(1.33) – F(-1.33)
= F(1.33) – 1 + F(1.33)
= 2*F(1.33) – 1
= 2*0.9082 – 1
= 0.8164

Exercice 3

« population » : 5 camions de la firme (N = 5)
X : frais de réparation d'un camion
µ = (150 + 125 + 130 + 175 + 140)/5 = 144 €
$\sigma^2 = (150^2 + 125^2 + 130^2 + 175^2 + 140^2)/5 - 144^2 = 314$
σ = 17.72 €

$\bar{x}$: moyenne des frais de réparation pour un échantillon de 3 camions

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 144 € et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{17.72}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{4}}$ = 7.23 €

$\bar{X} \sim N(144, 7.23)$

P[total des frais > 480] = P[moyenne des frais > 160]

= P[$\bar{X}$ > 160]

= P[Z > (160 – 144)/7.23]

= P[Z > 2.21]

= 1 – F(2.21)

= 1 – 0.9864 = 0.0136 = 1.36 %

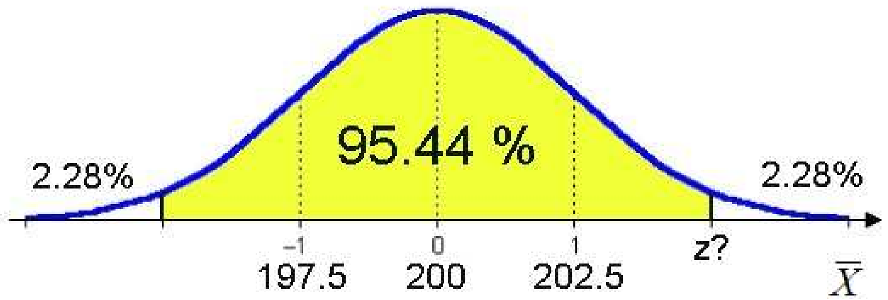
Exercice 5. N inconnu, μ = 200 et σ = 15 → X ~ N(200, 15)

échantillon de taille n = 36

dans quel intervalle centré sur la moyenne (μ), la moyenne d’un échantillon ($\bar{x}$) de taille 36 à 95.44 % de chances de se trouver ?

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 200 et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5$

$\bar{X} \sim N(200, 2.5)$



On cherche le z correspondant à l’aire indiquée sur le dessin.
Il reste de chaque coté une aire de (100 – 95.44)/2 = 2.28
L’aire totale à gauche de z est donc 97.72 % = 0.9772
→ on trouve dans la table de la normale z = 2

L’intervalle cherché est donc :

[200 – 2*2.5, 200 + 2*2.5] = [195, 205]

Idem pour échantillon de taille 49

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 200 et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{49}} = \frac{15}{7} = 2.14$

Intervalle : [200 – 2*2.14, 200 + 2*2.14] = [195.72, 204.28]

Idem pour échantillon de taille 64

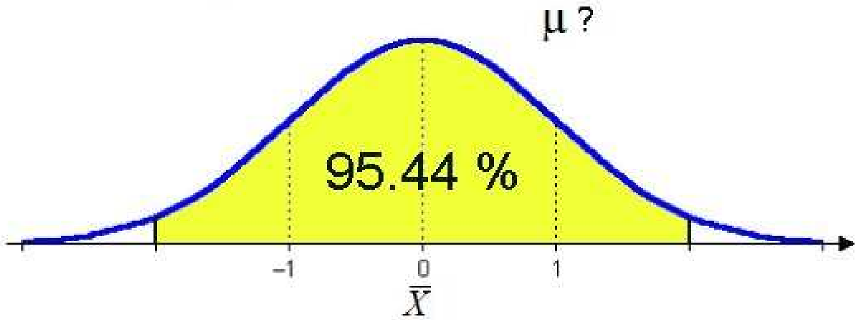
$\mu_{\bar{x}} = \mu$ = 200 et $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{64}} = \frac{15}{8} = 1.875$

Intervalle : [200 – 2*1.875, 200 + 2*1.875] = [196.25, 203.75]

Théorie de l'estimation

But : fournir à partir des données d'un échantillon, un **intervalle de confiance** pour la moyenne μ de la population, càd un intervalle dans lequel μ à une certaine probabilité de se trouver.

Cette probabilité s'appelle le **niveau de confiance** de l'intervalle, les valeurs les plus courantes sont 90%, 95% ou 99%. La probabilité complémentaire est appelée **taux d'erreur** ou **seuil de confiance** (10%, 5% ou 1%).



On échange le rôle de $\bar{x}$ et de μ. On va construire les intervalles de confiance avec la distribution de la moyenne échantillonée centrée sur $\bar{x}$ (moyenne de l'échantillon).

3 alternatives :

1) σ connu

On calcule $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et l'intervalle de confiance sera de la forme suivante :

$$[\,\bar{x} - z\ \sigma_{\bar{x}}\,,\, \bar{x} + z\ \sigma_{\bar{x}}\,]$$

avec z qui correspond au niveau de confiance voulu.

Pour 90% de confiance : z = 1.65
Pour 95% de confiance : z = 1.96
Pour 99% de confiance : z = 2.58

(les valeurs de z sont issues de la table de la loi normale)

2) σ inconnu – n ≥ 30 (grands échantillons)

Comme σ est inconnu, on va le remplacer par s' calculé à partir de l'écart-type s de l'échantillon :

$$s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s$$

(s' est aussi appellé écart-type corrigé ou non biaisé, sa valeur est assez proche de s – attention ! le s n'est pas dans la racine carrée)

Et ensuite on calcule

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}}$$

Les intervalles de confiance se calculent de la même façon :

$$[\,\bar{x} - z\ \sigma_{\bar{x}}\,,\, \bar{x} + z\ \sigma_{\bar{x}}\,]$$

3) σ inconnu – n < 30 (petits échantillons)

Idem pour le calcul de s' et de $\sigma_{\bar{x}}$. Par contre, on n'utilise plus la loi normale pour les intervalles, mais la loi de Student (distribution qui donne des intervalles plus larges) :

$$[\bar{x} - t\ \sigma_{\bar{x}}\ , \bar{x} + t\ \sigma_{\bar{x}}\ ]$$

La valeur de t se trouve dans la table de la distribution de Student à la ligne « d. l. » égale à n – 1 et dans la colonne correspondant au taux d'erreur divisé par 2.

Lundi 19 avril

Exercice 10

n = 20 $\bar{x}$ = 1.65 m s = 20 cm = 0.2 m

IC (N inconnu) risque d'erreur de 5%
→ taux de confiance de 95%

$$s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{20}{19}}0.2 = 0.20519$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}} = \frac{0.20519}{\sqrt{20}} = 0.04588...$$

On prend le t qui correspond à 2.5% (risque d'erreur divisé par 2) ou 0.025 et d.l. = n – 1 = 19, soit t = 2.093

IC : $[\bar{x} - t\ \sigma_{\bar{x}}\ , \bar{x} + t\ \sigma_{\bar{x}}\ ]$ = [1.65 – 2.093*0.04588, 1.65 + 2.093*0.04588]
= [1.5539, 1.746]

La véritable taille moyenne µ à 95% de chance de se trouver dans cet intervalle

Exercice 9

n = 50 (N inconnu) $\bar{x}$ = 326 s' = 48

a) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}} = \frac{48}{\sqrt{50}} = 6.78822...$

b) IC à 90% on est dans le cas σ inconnu – n ≥ 30

[326 – 1.65*6.78822, 326 + 1.65*6.78822]
= [314.79, 337.2]

→ il y a 90% de chance que la moyenne du nombre d'appels reçus par jour se trouve dans cet intervalle

Exercice 8

X = dépenses par jour

n = 10 (N = 30) $\bar{x}$ = 6.24 s' = 1.2

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1.2}{\sqrt{10}} = 0.37947\ldots$

Pour t : d.l. = 9 et colonne 5% = 0.05 → t = 1.833

IC à 90% : [$\bar{x}$ - t $\sigma_{\bar{x}}$, $\bar{x}$ + t $\sigma_{\bar{x}}$]
= [6.24 – 1.833*0.37947, 6.24 + 1.833*0.37947]
= [5.54, 6.94]

→ il y a 90% de chance que la moyenne des dépenses se trouve dans cet intervalle

Exercice 6

a) calculer $\bar{x}$ = 870/24 = 36.25

b) calculer s² (variance) = $\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$ = 31844/24 – 36.25²

= 12.77…

et ensuite s = $\sqrt{12.77...}$ = 3.5736…

c) IC à 99%

$$s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{24}{23}}3.5736... = 3.65046...$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}} = \frac{3.65046}{\sqrt{24}} = 0.7451...$$

t = 2.807 (d.l. = 23 et colonne 0.005)

IC à 99% : [36.25 – 2.807*0.7451, 36.25 + 2.807*0.7451]
= [34.15, 38.34]

Exercice 7