Solutions des exercices

Chapitre 1 – Introduction au calcul des probabilités

1. a) Ω = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66} – # Ω = 36
   b) Ω = {{1,1}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,2}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,3}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,4}, {4,5}, {4,6}, {5,5}, {5,6}, {6,6}} – # Ω = 21
   c) Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} – # Ω = 11
   d) Ω = {oui, non} – # Ω = 2

2. P(somme = 7) = 6/36 = 1/6
   P(somme ≥ 10) = 1/6

3. P(point pair) = 5/8

4. P(le premier gagne) = 4/7 ; P(le deuxième gagne) = 2/7 ; P(le troisième gagne) = 1/7

5. a) P(A ∩ B) = P(obtenir un as rouge) = 2/52 = 1/26
   b) P(B ∩ C) = P(obtenir un coeur) = 13/52 = 1/4
   c) P(A U C) = P(obtenir un as ou un coeur) = 16/52 = 4/13
   d) P(B U C) = P(obtenir une carte rouge) = 26/52 = 1/2

6. a) P(aucun des numéros choisis au tirage) = C(36, 6)/C(42,6) = 0.3713…
   b) P(gagner au rang 5) = C(6,3)*C(36,3)/C(42,6) = 0.027…

7. a) surface cible/surface du carré = 400π / 2500 = 0.502…
   b) surface cercle au centre/surface du carré = 25π / 2500 = 0.0314…
   c) 0

8. P(A U B) = 0.6, P($\overline{A}$) = 0.7, P($\overline{B}$) = 0.5, P(A ∩ $\overline{B}$) = 0.1, P(B ∩ $\overline{A}$) = 0.3, P($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$) = 0.4, P($\overline{A}$ U $\overline{B}$) = 0.8.

9. 17/27 = 0.6296...

10. 0.35

11. a) 0.8 b) 0.04 c) 0.048

12. a) 25/72 = 0.3472...
    b) 1 – $(5/6)^3$ = 91/216 = 0.4213
    c) 20/36 = 0.5555….

13. a) 12/169 = 0.071 b) $36/13^3$ = 0.0164 c) 1/2704 = 0.0003698

14. $$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

15. P(A) = 0.26

P(A/B) = P(A ∩ B) / P(B) = 0.078/0.3 = 0.26 → A et B sont indépendants

16. a) 3/51 = 0.0588
 b) 4/52 * 3/51 = 0.0045
 c) 1 – 48/52 * 47/51 = 0.1493
17. 10/20 * 9/19 * 8/18 = 0.105…

18. P(A gagne) = 3/10 = 0.3
 P(B gagne) = 7/10 * 3/9 = 0.233…
 P(C gagne) = 7/10 * 6/9 * 3/8 = 0.175…
 P(D gagne) = 7/10 * 6/9 * 5/8 * 3/7 = 0.125…

19. P(A/B) = 3/4 P(B/A) = 1/2 P($\overline{A}$ / $\overline{B}$) = 5/8 P($\overline{B}$ / $\overline{A}$) = 5/6

20. P(A) = 1/2 P(B) = 1/2 P(A/B) = 2/3 P(B/A) = 2/3

21. a) 0.54 b) 0.08 c) 0.375 d) 0.0555…

22. a) 5/8 * 4/7 * 3/6 = 0.1786
 b) 3/8 * 6/10 * 2/7 = 0.06429
 c) 3/8 * 4/10 * 3/9 = 0.05
 d) 5/7 = 0.7143

23. a) $(5/8)^3$ = 0.2441
 b) $(3/8)^2$ * 6/10 = 0.08437
 c) 3/8 * $(4/10)^2$ = 0.06
 d) 5/8 = 0.625

24. a) 5/9 b) 4/9 c) 5/9

25. a) 0.42 b) 0.74

26. a) 0.89 b) 0.1 c) 0.855

27. a) 1/2 b) 2/9 c) 13/18 d) 5/18

28. 15/31 = 0.48387…

29. 0.05569…

30. P(faire 421 avec le dé A) = 2/216
 P(faire 421 avec le dé B) = 4/216
 P(faire 421 avec le dé C) = 8/216

 On en déduit : P(A/421) = 1/12
 P(B/421) = 1/4
 P(C/421) = 2/3

31. a) 0.05 b) 0.19… c) 0.0065…

32. a) 0.01666… b) 0.4

33. a) 0.3417 b) 0.2439

34. a) 0.1714 b) 0.5149 c) 0.1667 d) 0.0294

Chapitre 2 – Variables aléatoires et grandes distributions théoriques

1. a)

x_i	p_i
–6	1/6
–4	1/6
–2	1/6
1	1/6
3	1/6
5	1/6

E[X] = –0.5 ; σ = 3.8622…

b)

x_i	p_i
–15	13/20
20	7/20

E[X] = –2.75 € ; σ = 16.69 €

c)

x_i	p_i
–5	0.75
10	0.25

E[X] = –1.25 € ; σ = 6.50 €

d)

x_i	p_i
0	8/27
1	4/9
2	2/9
3	1/27

E[X] = 1 ; σ = 0.8164…

2.

x_i	p_i
0	0.072
1	0.104
2	0.176
3	0.648

E[X] = 2.4 ; σ = 0.938...
P[X ≥ 2] = 0.176 + 0.648 = 0.824

3.

x_i	p_i
2	1/9
2.3	7/18
2.5	7/18
2.7	1/9

E[X] = 2.39 € ; σ = 0.17 €

4. a)

x_i	p_i
0	0.512
1	0.384
2	0.096
3	0.008

c) E[X] = 0.6 ; σ = 0.6928…
d) Frais de réparation : c'est une autre variable aléatoire Y de valeurs {0, 60, 95, 130} (probabilités identiques à X)
E[Y] = 33.20 €

5. a)

x_i	p_i
–1	25/36
2	10/36
5	1/36

b) E[X] = 0 € ; σ = 1.58 €
Le jeu est équitable. En jouant 20 fois de suite, l'espérance de gain est toujours 0 €

c) P[6 avec dé truqué] = 3/8, P[i avec dé truqué] = 1/8 pour i = 1, 2, 3, 4, 5

x_i	p_i
–1	25/48
2	5/12
5	1/16

Dans ce cas, E[X] = 0.625 € → il doit jouer 80 fois pour espérer gagner 50 €.

6. a) Pour avoir une aire de 1, le sommet est à hauteur 0.1
b) f(t) = 0.01t si $0 \le t \le 10$
–0.01t + 0.2 si $10 \le t \le 20$

c) $\mu = 10$ et $\sigma = 4.082$

7. a) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{2}[-\cos x]_0^{\pi} = 1$

b) F(x) = ½ - ½ cos x

c) par symétrie, E[X] = $\frac{\pi}{2}$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$, d'où σ = 0.6836… = 39.17…°

d) 1/2

8. a) $\int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 1$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{4} x e^{-x/4} dx = 4$

c) $P[X \geq 2] = \int_2^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 0.6065...$

d) $P[X \leq 6] = \int_0^6 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 0.7768...$

e) $P[X \geq 4 \mid X \geq 2] = \frac{P[X \geq 4]}{P[X \geq 2]} = 0.6065...$

9. $1 - (0.48)^5 = 0.9745…$

10. a) $(0.6)^5 = 0.07776$ b) $5*0.4*(0.6)^4 = 0.2592$ c) $1 - (0.6)^5 = 0.92224$

11. a) 0.1156 b) 0.1368

12. 0.9884…

13. $1 - (5/6)^n > 0.1$ → $n \geq 13$

14. a) 9/37 = 0.2432 b) $10*(9/37)*(28/37)^9 = 0.198$

c) 0.74 d) $1 - (28/37)^n > 0.9$ → n = 9

15. a) $(1/32)^{10}$ b) $1 - (31/32)^n > 0.6$ → $n \geq 29$ c) 1/32

16. $0.5^{20} *(C_{20}^9 + C_{20}^{10} + C_{20}^{11}) = 0.4966$

17. a) X ≡ nombre de « faces » ~ B(100, 0.5) ; E[X] = 50 ; σ = 5
b) X ≡ nombre d'as ~ B(30, 1/6) ; E[X] = 5 ; σ = 2.041…
c) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(50, 1/2) ; E[X] = 25 ; σ = 3.535…

18. X ≡ nombre de puits trouvés ~ B(12, 0.2)
P[de ne pas être en faillite] = P[X ≥ 3] = 1 – P[X=0] – P[X=1] – P[X=2] = 0.44165…

19. a) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(10, 0.2)

$$P[X \geq 7] = \sum_{k=7}^{10} C_{10}^{k} 0.2^{k} 0.8^{10-k} = 0.001577$$

b) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(10, 0.5)

$$P[X \geq 7] = \sum_{k=7}^{10} C_{10}^{k} 0.5^{k} 0.5^{10-k} = 0.333$$

20. X ≡ nombre de tirs atteignant la cible ~ B(10, 0.2)

P[couler la cible] = P[X ≥ 4] = 1 – P[X=0] – P[X=1] – P[X=2] – P[X=3] = 0.12

21. a) Population grande → X ~ B(5, 0.6)
b) μ = 3 ; σ = 1.095…
c) P[X = 3] = 0.3456
d) P[X ≥ 3]= 0.6826

22. X ≡ nombre de garçons dans une famille de 4 enfants ~ B(4, 0.5)

a) Nombre espéré de familles ayant au moins un garçon : 500 * P[X ≥ 1] ≅ 469
b) Nombre espéré de familles ayant 1 ou 2 filles : 500 * P[2 ≤ X ≤ 3] ≅ 313

23. X ≡ nombre de pièces en bon état ~ B(20, 0.95)

$$P[X > 17] = \sum_{k=18}^{20} C_{20}^{k} 0.95^{k} 0.05^{20-k} = 0.9246...$$

E[X] = 19 ; σ = 0.9746...

24. a) valeurs possibles : tout entier positif ou nul → distribution de Poisson

b) m = 9 d'où $P[X < 5] = \sum_{k=0}^{4} e^{-9} \frac{9^k}{k!}$ = 0.0549… ; σ = 3

c) le nombre X de mauvaises journées sur une semaine est une B(5, 0.0549)

$$P[X \geq 3] = \sum_{k=3}^{5} C_{5}^{k} 0.0549^{k} 0.945^{5-k} = 0.001526...$$

25. Elles se croisent au point d'abscisse 10 (point d'inflexion)

26. Oui car la N(5,1) étant plus resserrée, son sommet est plus haut que celui de la N(5, 2) au profil plus étalé

27. a) P[Z < 1.34] = 0.9099
b) P[0.57 < Z < 1.63] = 0.2327
c) P[–0.68 < Z < 1.04] = 0.6026

d) $P[Z > -0.5] = 0.6915$

28. a) $P[56 < X < 83] = P[-0.56 < Z < 0.52] = 0.4108$
b) $P[X > 89] = P[Z > 0.76] = 0.2236$
c) $P[40 < X < 67] = P[-1.2 < Z < -0.12] = 0.3371$
d) $P[X = 82] = 0$
29. $P[X \leq 50000] = 0.1587$

30. a) $P[X > 110] = P[Z > 1.25] = 0.1056$
b) $P[70 < X < 102] = P[-1.25 < Z < 0.75] = 0.6678$
c) on cherche z tel que $F(z) = 2/3 \rightarrow z = 0.43$
Les valeurs délimitant les intervalles sont $90 \pm z*16$, c'est-à-dire 83.12 km/h et 96.88 km/h

31. $P[X \leq 120] = 0.9772 \rightarrow 97.72\%$
$P[X \leq d] = 0.9$ d'où d = 109.2min. Donc, la durée de l'épreuve devrait être de l'ordre de 109 minutes pour que 90% des étudiants puissent la terminer.

32. Mise en équation : $P[X \leq 1.75] = 0.58$ et $P[X \leq 1.8] = 0.96$
$\rightarrow \mu = 1.743$m et $\sigma = 0.032$m

33. a) $X \sim N(1233, 50)$ b) 1220.5

34. a) $X \sim N(9.44, 2)$ b) 0.0113

35. $X \sim B(400, 0.5)$. On approxime avec une $N(200, 10)$

$P[180 \leq X_B \leq 220] = P[179.5 \leq X_N \leq 220.5] = P[-2.05 \leq Z \leq 2.05] = 0.9596$

36. $X \sim B(20000, 1/3)$. On approxime avec une $N(6666.66\ldots, 66.66\ldots)$

a) $P[6600 \leq X \leq 6800] \sim P[6599.5 \leq X_N \leq 6800.5] = P[-1.01 \leq Z \leq 2.01] = 0.8216$
b) $P[X > 6750] \sim P[X_N \geq 6750,5] = P[Z \geq 1.26] = 0.1038$

37. $X \sim B(100, 18/37)$.
a) $\mu = 48.648\ldots$ et $\sigma = 4.998\ldots$
b) On approxime avec une $N(48.65, 4.998)$. $P[49.5 \leq X \leq 60.5] = P[0.17 \leq Z \leq 2.37] = 0.4236$

38. a) $X \sim B(400, 0.1)$
b) $\mu = 40$ et $\sigma = 6$
c) On approxime avec une $N(40, 6)$. $P[X_B > 30] = P[X_N \geq 30.5] = P[Z \geq -1.58] = 0.9429$

39. a) $X \sim B(1000, 0.004)$; $\mu = 4$ et $\sigma = 1.995\ldots$
b) $P[X_B > 5] = P[X_N > 5.5] = P[Z > 0.75] = 0.2266$

Chapitre 3 – Distributions à deux dimensions

1.

X Y	100	150	200	$p_{i.}$
20	0.09	0.3	0.36	0.75
30	0.03	0.1	0.12	0.25
$p_{.j}$	0.12	0.4	0.48	1

E[X] = 168, E[Y] = 22.5
$P[X = 20 \text{ et } Y \geq 150] = 0.36$

2. $E[X] = 10.8$, $E[Y] = 11.7$, $\sigma_X = 4.2261$, $\sigma_Y = 4.4057$, $\sigma_{XY} = 14.39$, $r = 0.77$
   Equation de la droite de régression : $y = 0.8x + 3$
   11 en math : cote la plus probable en physique 11.8

3. a) Distribution de X : $P[X = -5] = 1/3$, $P[X = 0] = 1/3$, $P[X = 3] = 1/3$
   Distribution de Y : $P[Y = -5] = 1/3$, $P[Y = 0] = 2/9$, $P[Y = 1] = 1/9$, $P[Y = 3] = 2/9$, $P[Y = 5] = 1/9$
   b) $E[X] = -2/3$, $E[Y] = -1/3$
   c) $\sigma_X = 3.3$, $\sigma_Y = 3.62$
   d)

X \ Y	–5	0	1	3	5
–5	1/9	1/9	0	1/9	0
0	1/9	0	1/9	1/9	0
3	1/9	1/9	0	0	1/9

   e) $\sigma_{XY} = 8/9$, $r = 0.0744$

Chapitre 4 – Inférence statistique

1. a) $\overline{X} \sim N(236, 8)$ b) $P[\overline{X} \leq 220] = 0.0228$ c) $P[X \leq 220] = 0.3707$

2. $\overline{X} \sim N(72, 1.6)$ $P[\overline{X} > 74] = 0.1056$

3. a) $\mu_{\bar{x}} = 144$ € ; $\sigma_{\bar{x}} = 7.23$ € ($\sigma = 17.72$ €)
   b) $P[\overline{X} > 160] = 0.0136$

4. $\overline{X} \sim N(3600, 75)$
   $P[3500 < \overline{X} < 3700] = 0.8164$

5. Si n = 36, $\overline{X} \sim N(200, 2.5)$. On cherche z tel que $P[200 - z*2.5, 200 + z*2.5] = 0.9544$; z = 2 d'où l'intervalle cherché est [195, 205]
   Pour n = 49, on trouve [195.71, 204.29]
   Pour n = 64, on trouve [196.25, 203.75]
6. a) estimation de $\mu = \bar{x} = 36.25$
   b) s = 3.57
   c) la distribution de $\overline{X}$ est une Student à 23 d.l., avec $\mu_{\bar{x}} = 36.25$ et $\sigma_{\bar{x}} = 0.744$
   t = 2.807 ; IC = [34.16, 38.33]

7. a) estimation du QI moyen = $\bar{x} = 126.09$
   b) s = 7.543
   c) $\overline{X} \sim N(126.09, 1.35)$; IC = [123.435, 128.745]

8. n = 10 $\bar{x} = 6.24$ € s' = 1.20 € $\sigma_{\bar{x}} = 0.38$ € t = 1.833

   IC = [5.54, 6.94]

9. n = 50 $\bar{x} = 326$ s' = 48 $\sigma_{\bar{x}} = 6.79$ z = 1.64

   IC = [314.8, 337.2]

10. n = 20 $\bar{x} = 1.65$m s = 0.2m $\sigma_{\bar{x}} = 0.0459$m t = 2.093

   IC = [1.554m, 1.746m]

11. a) z * 120/ $\sqrt{n}$ = 40 avec z = 2.58 → n = 60
    b) z * 120/ $\sqrt{n}$ = 60 avec z = 1.96 → n = 16

12. H_0 : μ = 8500 € (test bilatéral)

    n = 36 $\bar{x}$ = 9315 € σ = 2600 € $\sigma_{\bar{x}}$ = 433.33 € z = 1.96

    IC = [8465, 10164] → l'hypothèse est acceptée

13. H_0 : μ = 14 mm (test bilatéral)

    n = 6 $\bar{x}$ = 14.13 mm σ = 0.15 mm $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.061237 mm z = 2.58

    IC = [13.97, 14.29] → l'hypothèse est acceptée

14. H_0 : μ < 17 l (test unilatéral)

    n = 36 $\bar{x}$ = 15 l s' = 4.0567 l $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.676 l z = 1.28

    IC =] – ∞, 15.865] → l'hypothèse est acceptée (ou autrement dit, l'hypothèse de départ, à savoir que μ = 17 l, est rejetée)

15. H_0 : μ < 2000 kg (test unilatéral)

    n = 25 $\bar{x}$ = 1980 kg s' = 112.27 kg $\sigma_{\bar{x}}$ = 22.45 kg t = 1.711

    IC =] – ∞, 2018.41] → l'hypothèse est rejetée (autrement dit, il est possible que la vraie moyenne μ soit égale à 2000 kg)

17. H_0 : μ < 75 cl (test unilatéral)

    n = 10 $\bar{x}$ = 74.2 cl s' = 0.84 cl $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.26 cl t = 1.833

    IC =] – ∞, 74.67] → l'hypothèse est rejetée (il est donc possible que la vraie moyenne μ soit égale à 75 cl)