STA2 - Lucky Summary

Sm!le42

6 juin 2021

Table des matières

1 Chapitre 1 – Introduction au calcul des probabilités

1.1 Théorie

1.1.1 Expérience aléatoire

Processus dont l'issue est aléatoire, c'est à dire soumis au hasard, de telle sorte que le résultat de l'expérience ne puisse pas être connu à l'avance.

(Ex : Lancement d'une pièce de monnaie)

1.1.2 Catégorie d'épreuve Ω

Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est noté Ω.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie, alors Ω = {Pile, Face})

1.1.3 Évènement aléatoire

Une des issues possibles d'une expérience aléatoire, ou plus techniquement un sous-ensemble de Ω.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie, alors "La pièce tombe sur Pile" est un évènement aléatoire)

1.1.4 Types de valeur

1. **Quantitatifs discrets**
   Nombres bien définis, sans possibilité d'utiliser une valeur entre.
   (Ex : Pour le jet d'un dé, {1, 2, 3, 4, 5, 6})
2. **Quantitatifs continus**
   Valeurs réelles dans un intervalle donné.
   (Ex : Pour la taille d'un humain, [1.2, 2.8])
3. **Qualitatifs**
   Valeurs personnalisées en fonction de l'expérience.
   (Ex : Pour le jet d'un dé, {pair, impair})
4. **Booléens**
   Vrai ou Faux.
   (Ex : Pour le jet d'un dé est-il pair ? {Vrai, Faux})

1.1.5 Probabilité P(A)

Nombre réel compris entre 0 et 1 inclus, donnant une mesure de la chance qu'a cet évènement à se réaliser. Si la probabilité vaut 1, on parle d'*évènement certain*, et lorsque la probabilité vaut 0, on parle d'*évènement impossible*. La probabilité de l'évènement aléatoire A est notées P(A). Si la probabilité est la même pour deux évènements distincts, alors ce sont des *évènements équiprobables*.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie non truquée, alors P(Pile) = ½)

1.1.6 Probabilité à priori

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas équiprobables possibles}}$$

1.1.7 Évènements incompatibles

Évènements ne pouvant pas se produire simultanément.

Ainsi, si A et B sont *incompatibles*, alors **P(A et B) = 0**, et donc, **P(A ou B) = P(A) + P(B)**.

(Ex : Si on lance un dé non truqué, alors P(2) et P(4) sont incompatibles)

1.1.8 Évènements indépendants

La réalisation d'un évènement n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre.

Ainsi, si A et B sont *indépendants*, alors **P(A | B) = P(A)**.

(Ex : Si on lance deux dés en même temps, alors les deux évènements sont indépendants)

1.1.9 Évènement complémentaire

P($\bar{A}$) = 1 – P(A)

(Ex : Si P(A) = ⅓, alors son évènement complémentaire P($\bar{A}$) = ⅔)

1.1.10 Addition P(A ou B)

P(A ou B) = P(A) ou P(B) – P(A et B)

= P(A) + P(B) – (P(A) * P(B | A))

Note : Si deux évènements sont *incompatibles* alors P(A et B) = 0, et la formule se simplifie en P(A) + P(B).

1.1.11 Multiplication P(A et B)

P(A et B) = P(A) * P(B | A)

Note : Si deux évènements sont *indépendants* alors P(B | A) = P(B), et la formule se simplifie en P(A) * P(B).

1.1.12 Probabilité conditionnelle P(A | B)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ et } B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)}$$

Note : Si deux évènements sont *indépendants* alors P(A et B) = P(A) * P(B), et la formule se simplifie en P(A).

1.1.13 Probabilités totales

Lorsque l'on considère un évènement aléatoire se réalisant avec des probabilités différentes suivant différents cas.

Ex : La probabilité qu'un bus arrive à l'heure est de 0.9 le week-end, de 0.8 du mardi au jeudi, et de 0.6 le lundi et vendredi. Quelle est la probabilité totale que le bus arrive à l'heure ?

3 cas possibles :
- P(Bus à l'heure et Week-end) (ou)
- P(Bus à l'heure et Mardi, Mercredi ou Jeudi) (ou)
- P(Bus à l'heure et Lundi ou Vendredi)

Donc :
- P(week-end) * P(Bus à l'heure | Week-end) (ou)
- P(Mardi, Mercredi ou Jeudi) * P(Bus à l'heure | Mardi, Mercredi ou Jeudi) (ou)
- P(Lundi ou Vendredi) * P(Bus à l'heure | Lundi ou Vendredi)

Ainsi, P(Bus à l'heure) = (²⁄₇ * 0.9) + (³⁄₇ * 0.8) + (²⁄₇ * 0.6)

= ²⁷⁄₃₅

1.1.14 Arbre de probabilités

Caractéristiques :
- Les sommets de l'arbre représentent des évènements aléatoires (sauf le premier appelé *racine*)
- À chaque arête est associée une probabilité
- Deux évènements issus d'un même sommet sont toujours incompatibles
- L'ensemble des évènements issus d'un même sommet couvre toutes les possibilités relatives à l'expérience concernée
- La somme des probabilités associées aux arêtes issues d'un même sommet vaut toujours 1

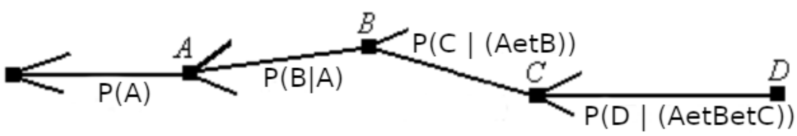

FIGURE 1 – Exemple de relations dans un arbre de probabilité

1.1.15 Système exhaustif d'évènements aléatoires

Un système d'évènements aléatoires est exhaustif si :
- Aucun évènement n'est impossible
- Les évènements sont incompatibles deux à deux
- La somme des probabilités de tous ses évènements est égale à 1

Ex :
- {{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}} pour le jet d'un dé à 6 faces
- {{Pairs}, {Impairs}} pour le jet d'un dé
- {{Week-end}, {Mardi, Mercredi, Jeudi}, {Lundi, Vendredi}} pour le choix d'un jour de la semaine

1.1.16 Théorème de Bayes

En probabilité conditionnelle nous avons vu que $\mathrm{P(A \mid B)} = \dfrac{\mathrm{P(A\ et\ B)}}{\mathrm{P(B)}}$

Le théorème de Bayes nous permet de faire le chemin inverse. Ainsi :

$$\mathrm{P(B \mid A)} = \frac{P(B) * P(A|B)}{P(A)}$$

1.2 Exercice 3

Un dé est truqué de sorte qu'en le lançant, la probabilité d'obtenir 6 vaut le triple de celle d'obtenir toute autre valeur. Avec ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un point pair ?

1.2.1 Solution (5/8)

$$\mathrm{P(1)} = 1/8 \quad \mathrm{P(2)} = 1/8 \quad \mathrm{P(3)} = 1/8 \quad \mathrm{P(4)} = 1/8 \quad \mathrm{P(5)} = 1/8 \quad \mathbf{P(6) = 3/8}$$

$$\mathbf{P(Pair)} = \mathrm{P(2)+P(4)+P(6)}$$

$$= 1/8 + 1/8 + 3/8$$

$$= \mathbf{5/8}$$

1.3 Exercice 4

Trois chevaux sont en course. Le premier à 2 fois plus de chances de gagner que le deuxième, celui-ci a aussi 2 fois plus de chances de gagner que le troisième. Quelles sont les probabilités de gagner de chacun des trois chevaux ?

1.3.1 Solution (4/7;2/7;1/7)

Cheval	1	2	3
Proba	4*x	2*x	x

$$x = \frac{1}{4+2+1} = 1/7$$

Cheval	1	2	3
Proba	**4/7**	**2/7**	**1/7**

1.4 Exercice 5

Soit un jeu de 52 cartes dont on tire une carte au hasard. On définit les évènements aléatoires suivants :
- A : obtenir un as
- B : obtenir une carte rouge
- C : obtenir un cœur.

Définissez les évènements suivants et calculez-en la probabilité :

1. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
2. $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$
3. $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$
4. $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$

1.4.1 Solution *($^1/_{26}$;$^1/_4$;$^4/_{13}$;$^1/_2$)*

— P(A) = $^4/_{52}$ = $^1/_{13}$
— P(B) = $^{26}/_{52}$ = $^1/_2$
— P(C) = $^{13}/_{52}$ = $^1/_4$

1. **A** ∩ **B** –> *As et Rouge*
   = P(A **et** B) = $^1/_{13}$ * $^1/_2$ = $\mathbf{^1/_{26}}$
2. **B** ∩ **C** –> *Rouge et Coeur*
   = P(B **et** C) = P(C) = $\mathbf{^1/_4}$ –> *Car un coeur est toujours rouge*
3. **A** ∪ **C** –> *As ou Coeur*
   = P(A **ou** C) = P(A)+P(C)–P(A **et** C) –> *On retire les As Rouges comptés en double*
   = $^4/_{52}$ + $^{13}/_{52}$ – ($^4/_{52}$ * $^1/_4$)
   = $\mathbf{^4/_{13}}$
4. **B** ∪ **C** –> Rouge ou Coeur
   = P(B **ou** C) = P(B) –> *Car un coeur est toujours rouge*
   = $\mathbf{^1/_2}$

1.5 Exercice 9

Soit un groupe composé de 12 hommes dont la moitié a des lunettes et de 15 femmes dont le tiers a des lunettes. Si on choisit une personne au hasard dans ce groupe, quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ou porte des lunettes ?

1.5.1 Solution *($^{17}/_{27}$)*

	Lunettes	!Lunettes	Total
Hommes	**6**	6	**12**
Femmes	5	10	15
Total	**11**	16	**27**

–> P(Hommes **ou** Lunettes)

= P(Homme) + P(Lunettes) – P(Homme **et** Lunettes)

= $^{12}/_{27}$ + $^{11}/_{27}$ – $^6/_{27}$

= $\mathbf{^{17}/_{27}}$

Même résultat avec la Loi *complémentaire* de Morgan :
P(Homme ou Lunettes) = 1 – P(Femmes et !Lunettes)
= 1 – $^{10}/_{27}$ = $\mathbf{^{17}/_{27}}$

1.6 Exercice 10

Lors de vacances scolaires, deux activités sportives sont proposées : natation et vélo. On sait que 40% des participants se sont inscrits à la natation, 50% aux randonnées vélo et 25% se sont inscrits au deux. Quelle est la probabilité qu'un participant choisi au hasard ne fasse pas de sport ?

1.6.1 Solution *(35%)*

	Vélo	!Vélo	Total
Natation	25%	15%	40%
!Natation	25%	35%	60%
Total	50%	50%	100%

P(!Sport) = P(!Vélo **et** !Natation) = **35%**

Alternative :
P(!Sport) = 1 – P(Natation **ou** Vélo)
= 1 – P(Natation) + P(Vélo) – P(Natation **et** Vélo)
= 100% – 40% + 50% – 25% = **35%**

1.7 Exercice 11

Un marchand d'électro-ménager a réalisé des statistiques sur les ventes de frigos tout au long du mois de décembre dernier. Les probabilités du nombre de frigos vendus par jour sont données dans le tableau suivant :

Nombre de frigos vendus par jour	Probabilité
0	0.2
1	0.4
2	0.3
Au moins 3	0.1

1. Quelle est la probabilité qu'il vende au moins un frigo ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ne vende pas de frigos sur 2 jours consécutifs ?
3. Quelle est la probabilité qu'il vende un et un seul frigo sur 3 jours consécutifs ?

1.7.1 Solution (80% ;4% ;4.8%)

1. **P(Vendre au moins 1 frigo)**
   = P(1 frigo **ou** 2 frigos **ou** au moins 3 frigos)
   = P(1) + P(2) + P(Au moins 3)
   = 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8 = **80%**
2. **P(Pas de frigo vendu en 2 jours)**
   = P(0 frigo le jour 1 **et** 0 frigo le jour 2)
   = P(0 frigo jour1 ***** 0 frigo jour2)
   = 0.2 * 0.2 = 0.04 = **4%**
3. **P(1 frigo en 3 jours)**
   3 cas possibles :
   - P(**1 frigo jour1 et** 0 frigo jour2 **et** 0 frigo jour3) (ou)
   - P(0 frigo jour1 **et 1 frigo jour2 et** 0 frigo jour3) (ou)
   - P(0 frigo jour1 **et** 0 frigo jour2 **et 1 frigo jour3**)

   = (0.4 * 0.2 * 0.2) + (0.2 * 0.4 * 0.2) + (0.2 * 0.2 * 0.4)
   = 3 * (0.4 * 0.2 * 0.2)
   = 3 * 0.016
   = 0.048 = **4.8%**

1.8 Exercice 12

On jette 3 fois un dé "normal". Calculez :

1. La probabilité d'obtenir le point 6 en exactement 1 fois
2. La probabilité d'obtenir le point 6 au moins une fois
3. La probabilité d'obtenir 3 points différents

1.8.1 Solution ($^{25}/_{72}$;$^{91}/_{216}$;$^{5}/_{9}$)

1. **P(Une fois 6 en 3 coups)**
   3 cas possibles :
   - P(**6 coup1 et** !6 coup2 **et** !6 coup3) (ou)
   - P(!6 coup1 **et 6 coup2 et** !6 coup3) (ou)
   - P(!6 coup1 **et** !6 coup2 **et 6 coup3**)

   = 3 * ($\frac{1}{6}$ * $\frac{5}{6}$ * $\frac{5}{6}$)
   = 3 * $\frac{25}{216}$ = **$^{25}/_{72}$**
2. **P(6 au moins une fois)**
   = 1 – P(Jamais 6)
   = 1 – ($\frac{5}{6}$ * $\frac{5}{6}$ * $\frac{5}{6}$)
   = 1 – $\frac{125}{216}$
   = **$^{91}/_{216}$**
3. **P(3 différents)**
   = P(1er = 1er **et** 2ème != 1er **et** 3ème != deux premiers)
   = $\frac{6}{6}$ * $\frac{5}{6}$ * $\frac{4}{6}$
   = 1 * $\frac{20}{36}$ = **$^{5}/_{9}$**

1.9 Exercice 13

On tire trois cartes avec remise intermédiaire dans un jeu de 52 cartes. Calculez :

1. La probabilité que la deuxième soit un Roi et la troisième différente d'un Roi
2. La probabilité qu'exactement deux des cartes soient un Roi
3. La probabilité de tirer 3 fois la même carte

1.9.1 Solution ($^{12}/_{169}$; $^{36}/_{2197}$; $^{1}/_{2704}$)

1. **P(carte2 = Roi et carte3 != Roi)**
   = P(1ère = peu importe **et** 2ème = Roi **et** 3ème != Roi)
   = $^{52}/_{52}$ * $^{4}/_{52}$ * $^{48}/_{52}$
   = 1 * $^{1}/_{13}$ * $^{12}/_{13}$ $= \mathbf{^{12}/_{169}}$
2. **P(Deux des cartes sont un Roi)**
   3 cas possibles :
   — P(Roi carte1 **et** Roi carte2 **et !Roi carte3**) (ou)
   — P(Roi carte1 **et !Roi carte2 et** Roi carte3) (ou)
   — P(**!Roi carte1 et** Roi carte2 **et** Roi carte3)
   = 3 * ($^{4}/_{52}$ * $^{4}/_{52}$ * $^{48}/_{52}$)
   = 3 * ($^{1}/_{13}$ * $^{1}/_{13}$ * $^{12}/_{13}$)
   = 3 * $^{12}/_{2197}$ $= \mathbf{^{36}/_{2197}}$
3. **P(3 fois la même carte)**
   = P(carte1 = carte2 = carte3)
   = P(1ère = peu importe **et** 2ème = 1ère **et** 3ème = 1ère)
   = $^{52}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$
   = 1 * $^{1}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$
   = $(^{1}/_{52})^2$ $= \mathbf{^{1}/_{2704}}$

1.10 Exercice 16

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes sans remise intermédiaire :

1. La première carte est un Roi. Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit encore un Roi ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux Rois ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 Roi ?

1.10.1 Solution ($^{3}/_{51}$; $^{1}/_{221}$; $^{33}/_{221}$)

1. **P(2ème carte est un Roi sachant que la 1ère est un Roi)**
   On tire un Roi donc il reste 3 Rois sur 51 cartes restantes.
   $= \mathbf{^{3}/_{51}}$
2. **P(Deux Rois)**
   = P(Roi carte1 **et** Roi carte2)
   = $^{4}/_{52}$ * $^{3}/_{51}$
   = $^{1}/_{13}$ * $^{1}/_{17}$ $= \mathbf{^{1}/_{221}}$
3. **P(Au moins 1 Roi)**
   P(Aucun Roi)
   = P(1ère pas Roi) * P(2ème pas Roi **sachant que** 1ère pas Roi)
   = P(1ère !Roi) * P(2ème !Roi | 1ère !Roi)
   = $^{48}/_{52}$ * $^{47}/_{51}$
   1 – P(Aucun Roi)
   = 1 – $^{48}/_{52}$ * $^{47}/_{51}$ $= \mathbf{^{33}/_{221}}$

1.11 Exercice 17

Trois personnes tirent sans remise un billet au hasard dans un ensemble de billets numérotés de 1 à 20. Quelle est la probabilité que les trois billets soient impairs ?

1.11.1 Solution ($2/19$)

P(Billet1 impair **et** Billet2 impair **et** Billet3 impair)

3 conditions à respecter :
- P(Billet 1 impair) (et)
- P(Billet 2 impair **sachant que** Billet 1 impair) (et)
- P(Billet 3 impair **sachant que** Billet 1 impair **et** Billet 2 impair)

= P(Billet1 impair) * P(Billet2 impair | Billet1 impair) * P(Billet3 impair | Billet1 impair * Billet2 impair)

= $10/20$ * $9/19$ * $8/18$

= $1/2$ * $9/19$ * $4/9$ = $\mathbf{2/19}$

1.12 Exercice 18

Un sac contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quatre personnes A, B, C et D tirent dans cet ordre une boule sans la remettre dans le sac. La première personne qui tire une boule blanche gagne le jeu. Calculez la probabilité de gagner le jeu pour chacune des personnes.

1.12.1 Solution ($3/10$; $7/30$; $21/120$; $1/8$)

1. **P(A gagne)**
   = $\mathbf{3/10}$ (3 boules blanches sur (3+7) boules)
2. **P(B gagne)**
   = P(A noire **et** B blanche)
   = P(A noire) * P(B blanche | A noire)
   = $7/10$ * $3/9$
   = $7/10$ * $1/3$ = $\mathbf{7/30}$
3. **P(C gagne)**
   = P(A noire **et** B noire **et** C blanche)
   = P(A noire) * P(B noire | A noire) * P(C blanche | A noire **et** B noire)
   = $7/10$ * $6/9$ * $3/8$
   = $7/10$ * $1/3$ * $3/4$ = $\mathbf{21/120}$
4. **P(D gagne)**
   = P(A noire **et** B noire **et** C noire **et** C blanche)
   = P(A noire) * P(B noire | A noire) * P(C noire | A noire **et** B noire) * P(D blanche | A noire **et** B noire **et** C noire)
   = $7/10$ * $6/9$ * $5/8$ * $3/7$ = $\mathbf{1/8}$

1.13 Exercice 21

Dans un certain pays, la population en âge de travail est répartie de la manière suivante :
- 51% sont des hommes possédant un emploi
- 3% sont des hommes au chômage
- 41% sont des femmes possédant un emploi
- 5% sont des femmes au chômage

Calculez la probabilité :

1. Qu'une personne choisie au hasard soit un homme
2. Qu'une personne choisie au hasard soit un chômeur
3. Qu'un chômeur choisi au hasard soit un homme
4. Qu'un homme choisi au hasard soit un chômeur

1.13.1 Solution (54% ; 8% ; $3/8$; $1/18$)

	Homme	Femme	Total
Emploi	51%	41%	92%
Chômage	3%	5%	8%
Total	54%	46%	100%

1. **P(Homme)**
   = 51% + 3% = **54%**

2. **P(Chômeur)**
   = 3% + 5% $= \mathbf{8\%}$
3. **P(Homme | Chômeur)**
   = $\frac{\text{P(Homme et Chômeur)}}{\text{P(Chômeur)}}$
   = $\frac{3\%}{8\%} = \mathbf{{}^{3}/_{8}}$
4. **P(Chômeur | Homme)**
   = $\frac{\text{P(Chômeur et Homme)}}{\text{P(Homme)}}$
   = $\frac{3\%}{54\%}$
   = $^{3}/_{54} = \mathbf{{}^{1}/_{18}}$

1.14 Exercice 22

On dispose de 2 urnes **U1** *(5 boules rouges et 3 boules blanches)* et **U2** *(4 boules rouges et 6 boules blanches)*. Des tirages sont effectués suivant les règles suivantes :

Si une boule rouge a été tirée alors le tirage suivant se fait dans la même urne, mais si une boule blanche a été tirée, alors le tirage suivant se fera dans l'autre urne. Le premier tirage se fait dans U1.

Si les tirages se font sans remise, quelles sont les probabilités d'obtenir :

1. Trois boules rouges en 3 tirages
2. Trois boules blanches en 3 tirages
3. Une boule blanche suivie de 2 boules rouges en 3 tirages
4. Une boule rouge en 3ème sachant que les 2 premières sont blanches

1.14.1 Solution ($^{5}/_{28}$; $^{9}/_{140}$; $^{1}/_{20}$; $^{5}/_{7}$)

`(Voir Figure 2)`

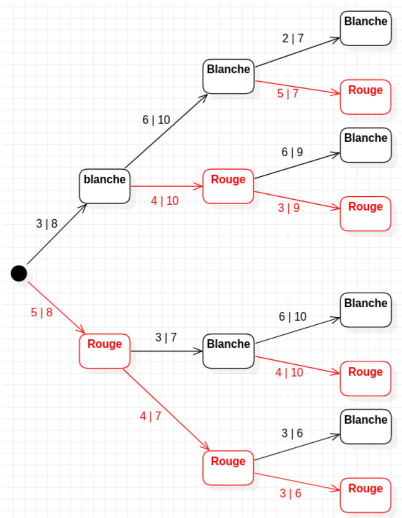

FIGURE 2 – Chapitre 1 Exercice 22 Schéma

1. **P(Trois boules rouges en 3 tirages)**
   = P(Boule1 rouge U1 **et** Boule2 rouge U1 **et** Boule3 rouge U1)
   = P(Boule1 rouge U1) * P(Boule2 rouge U1 | Boule1 rouge U1) * P(Boule3 rouge U1 | Boule1 rouge U1 **et** Boule2 rouge U1)
   = $^{5}/_{8}$ * $^{4}/_{7}$ * $^{3}/_{6}$ $= \mathbf{{}^{5}/_{28}}$
2. **P(Trois boules blanches en 3 tirages)**
   = P(Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche en U2 **et** Boule3 blanche en U1)
   = P(Boule1 blanche U1) * P(Boule2 blanche U2 | Boule1 blanche U1) * P(Boule3 blanche U1 | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche U2)
   = $^{3}/_{8}$ * $^{6}/_{10}$ * $^{2}/_{7}$ $= \mathbf{{}^{9}/_{140}}$

3. **P(Une boule blanche suivie de 2 boules rouges en 3 tirages)**
   = P(Boule1 blanche U1 **et** Boule2 rouge U2 **et** Boule3 rouge U2)
   = P(Boule1 blanche U1) * P(Boule2 rouge U2 | Boule1 blanche U1) * P(Boule3 rouge U2 | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 rouge U2)
   = $3/8$ * $4/10$ * $3/9$ $=$ **$1/20$**
4. **P(Une boule rouge en 3ème sachant que les 2 premières sont blanches)**
   = P(Boule3 rouge | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche U2)
   $=$ **$5/7$** (On connaît les valeurs de Boule1 et Boule2)

1.15 Exercice 24

Soient deux dés **A** et **B** ayant respectivement 4 faces rouges et 2 blanches, 4 faces blanches et 2 rouges.

On choisit un des deux dés avec une pièce tombant deux fois plus souvent sur pile que sur face : pile donne le dé **A** et face donne le dé **B**. Ensuite on jette le dé choisi et on regarde la couleur obtenue.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?
3. On répète tout le processus 3 fois de suite ? Quelle est la probabilité d'obtenir rouge aux 3 lancés si on a obtenu rouge aux 2 premiers lancers ?

1.15.1 Solution ($5/9$;$4/9$;$5/9$)

`(Voir Figure 3)`

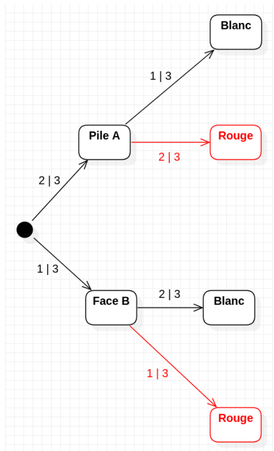

FIGURE 3 – Chapitre 1 Exercice 24 Schéma

1. **P(Rouge)**
   = ($2/3$ * $2/3$) + ($1/3$ * $1/3$) $=$ **$5/9$**
2. **P(Blanche)**
   = ($2/3$ * $1/3$) + ($1/3$ * $2/3$) $=$ **$4/9$**
   Alternative : P(Blanche) = 1 – P(Rouge) (On peut utiliser P(Rouge) calculé à l'exercice 1)
   = 1 – $5/9$ $=$ **$4/9$**
3. **P(Rouge au 3ème lancer sachant que Rouge aux 2 premiers lancers)**
   = P(Rouge lancer3 | Rouge lancer1 **et** Rouge lancer2)
   = P(Rouge) (La probabilité Rouge au 3ème lancer est la même que la probabilité Rouge tout court)
   $=$ **$5/9$**

1.16 Exercice 25

Un fabricant de baromètres a testé un nouveau modèle très simple, et a constaté que celui-ci était de temps en temps inexact :

Pour 10% des jours où il pleuvait, il affichait *beau temps*, et pour 30% des jours où il faisait beau, il affichait *pluie*.

Sachant que le baromètre a été vendu dans une région où il pleut en moyenne un jour sur cinq :

1. Quelle est la probabilité que le baromètre indique *pluie* ?
2. Quelle est la probabilité que l'indication du baromètre soit correcte ?

1.16.1 Solution ($^{21}/_{50}$; $^{37}/_{50}$)

(Voir Figure 4)

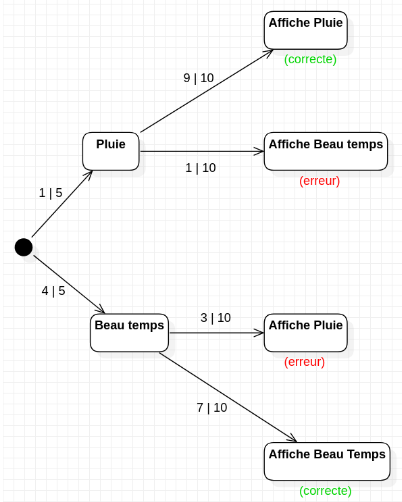

FIGURE 4 – Chapitre 1 Exercice 25 Schéma

1. **P(Affiche Pluie)**
   = P(Pluie **et** Affiche Pluie) **ou** P(Beau temps **et** Affiche Pluie)
   = ($^1/_5$ * $^9/_{10}$) + ($^4/_5$ * $^3/_{10}$) $=$ **$^{21}/_{50}$**
2. **P(Indication correcte)**
   = P(Pluie **et** Affiche Pluie) **ou** P(Beau temps **et** Affiche Beau temps)
   = ($^1/_5$ * $^9/_{10}$) + ($^4/_5$ * $^7/_{10}$) $=$ **$^{37}/_{50}$**

1.17 Exercice 26

Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut périlleux que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10. Sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas. Calculez :

1. La probabilité que le patineur réussisse le second saut
2. La probabilité que le patineur rate le deuxième saut sachant que le 1er était réussi
3. La probabilité que le patineur réussisse les deux sauts

1.17.1 Solution (89% ;10% ; $^{171}/_{200}$)

(Voir Figure 5)

1. **P(Deuxième saut réussi)**
   = P(Saut1 réussi **et** Saut2 réussi) **ou** P(Saut1 raté **et** Saut2 réussi)
   = (95% * 92%) + (5% * 70%) $=$ **89%**
2. **P(Deuxième saut raté sachant que Premier saut réussi)**
   = P(Saut2 raté | Saut1 réussi) $=$ **10%**
3. **P(Deux sauts réussis)**
   = P(Saut1 réussi **et** Saut2 réussi **sachant que** Saut1 réussi)
   = 95% * 90% $=$ **$^{171}/_{200}$**

1.18 Exercice 27

Marcel travaille 5 jours par semaine. Chaque jour, il quitte habituellement son bureau vers 17h et se rend à pied à son domicile. Quand il passe devant le Café des Sports, il y aperçoit une fois sur deux son copain Antoine avec lequel il ne manque jamais de déguster une de ses bières préférées. Plus loin, au Café de la Gare, il rencontre également une fois sur deux son autre copain Émile, avec lequel il ne peut non plus refuser de faire la causette devant un autre verre. Évidemment, les rencontres avec Antoine ou Émile sont indépendantes les unes des autres : Parfois il rencontre les deux, parfois un seul, et parfois aucun des deux. Enfin, quand il arrive devant chez lui, il sort de sa poche un trousseau de clés, dont une seule ouvre la porte d'entrée.

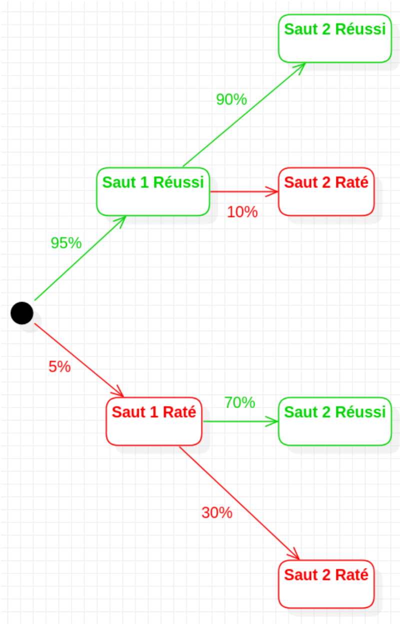

FIGURE 5 – Chapitre 1 Exercice 26 Schéma

Quand Marcel n'a rien bu, ses pensées sont lucides et il ouvre la porte immédiatement avec la bonne clé.

Quand il a bu un verre de bière, il ne reconnaît pas directement la bonne clé, ainsi il les essaie toute les trois une par une jusqu'à ce que la porte s'ouvre.

Enfin, quand il a bu deux bières, il ne réfléchit plus à ce qu'il fait, et après chaque essai de clé, il secoue chaque fois son trousseau et réessaie jusqu'à ce que la porte s'ouvre enfin.

Calculez la probabilité que :

1. Marcel ouvre la porte du premier coup à la fin d'une journée de travail
2. Marcel ouvre la porte en deux essais à la fin d'une journée de travail
3. Marcel ouvre la porte en au plus deux essais à la fin d'une journée de travail
4. Marcel ouvre la porte en au moins trois essais à la fin d'une journée de travail

1.18.1 Solution ($\frac{1}{2}$;$\frac{2}{9}$;$\frac{13}{18}$;$\frac{5}{18}$)

(Voir Figure 6)

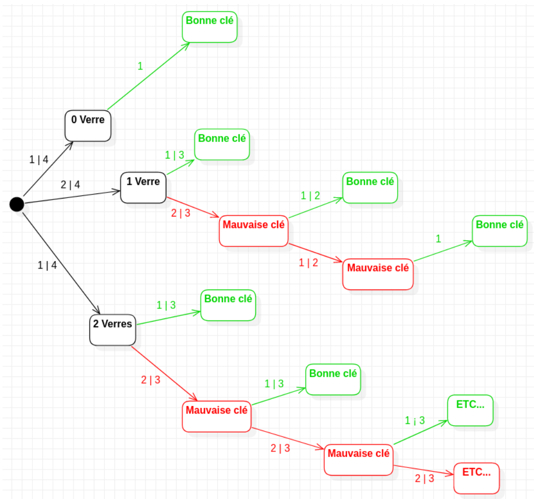

FIGURE 6 – Chapitre 1 Exercice 27 Schéma

1. **P(Bonne clé premier coup)**

   3 possibilités :
   — P(Bonne clé 1er coup **sachant que** pas de verre bu) (ou)

— P(Bonne clé 1er coup **sachant que** 1 verre bu) (ou)
— P(Bonne clé 1er coup **sachant que** 2 verres bus)

= (¼ * 1) + (²⁄₄ * ⅓) + (¼ * ⅓) $= {}^{1}/_{2}$

2. **P(Bonne clé en deux essais)**

   2 possibilités :
   — P(Bonne clé en deux essais **sachant que** (1 verre bu **et** 1 mauvaise clé)) (ou)
   — P(Bonne clé en deux essais **sachant que** (2 verres bus **et** 1 mauvaise clé))

   = (²⁄₄ * ⅔ * ⅓) + (¼ * ⅔ * ⅓) $= {}^{2}/_{9}$

3. **P(Bonne clé en deux essais max)**
   = P(Bonne clé premier coup) + P(Bonne clé en deux essais)
   = réponse 1 + réponse 2
   = ½ + ²⁄₉ $= {}^{13}/_{18}$

4. **P(Bonne clé en 3 essais min)**
   = 1 – P(Bonne clé en deux essais max)
   = 1 – réponse 3
   = 1 – ¹³⁄₁₈ $= {}^{5}/_{18}$

1.19 Exercice 31

Une personne envisage d'acheter une voiture d'une certaine marque et apprend via un magazine spécialisé que 5% de ces véhicules ont un problème de transmission. Un mécanicien vient apporter son aide pour juger de l'état de son véhicule :

Sur toutes les autos défectueuses qu'il a examiné dans le passé, il a décelé l'état défectueux dans 90% des cas.

Pour les bonnes voitures son jugement est également bon : Il les déclare "bonne" dans 80% des cas.

Quelle est la probabilité que la voiture que la personne envisage d'acheter ait un problème de transmission :

1. Avant d'avoir l'avis du mécanicien
2. Si le mécanicien déclare le véhicule "défectueux"
3. Si le mécanicien déclare le véhicule "en bon état"

1.19.1 Solution (5% ;⁹⁄₄₇ ;¹⁄₁₅₃)

(Voir Figure 7)

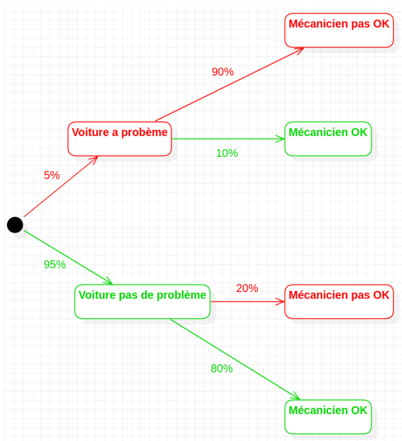

FIGURE 7 – Chapitre 1 Exercice 31 Schéma

1. **P(Problème sans avis)** $= 5\%$

2. **P(Problème si Mécanicien pas OK)**
   = P(Problème | Mécanicien !OK)

   $= \dfrac{\text{P(Problème **et** Mécanicien !OK)}}{\text{P(Mécanicien !OK)}}$

   $= \dfrac{5\% * 90\%}{(5\% * 90\%) + (95\% * 20\%)}$ car P(Mécanicien !OK) = P(Problème et !OK) ou P(!Problème et !OK)

   $= \dfrac{9/200}{47/200} = {}^{9}/_{47}$

3. **P(Problème si Mécanicien OK)**
   = P(Problème | Mécanicien OK)
   $= \frac{\text{P(Problème } \textbf{et} \text{ Mécanicien OK)}}{\text{P(Mécanicien OK)}}$
   $= \frac{5\% * 10\%}{(5\% * 10\%) + (95\% * 80\%)}$ car P(Mécanicien OK) = P(Problème et OK) ou P(!Problème et OK)
   $= \frac{1/200}{153/200} = \mathbf{1/153}$

1.20 Exercice 32

Dans une usine, trois machine M1, M2 et M3 fabriquent des stylos.

Par jour, la machine M1 en fabrique 1000 dont 3% sont défectueux, la machine M2 en fabrique 2000 dont 2% sont défectueux et la machine M3 en fabrique 3000 dont 1% sont défectueux :

1. En fin de journée, on choisit un stylo au hasard parmi les 6000 stylos produits. Quelle est la probabilité de tirer un stylo défectueux ?
2. On constate que le stylo choisit est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de M2 ?

1.20.1 Solution (1⁄60 ;2⁄5)

(Voir Figure 8)

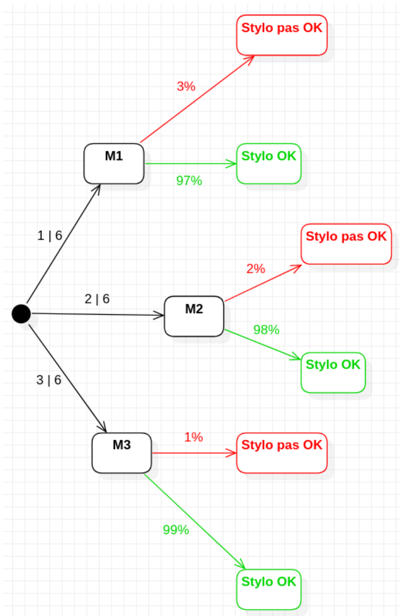

FIGURE 8 – Chapitre 1 Exercice 32 Schéma

1. **P(Tirer stylo défectueux)**
   3 possibilités :
   — P(Stylo !OK | M1) (ou)
   — P(Stylo !OK | M2) (ou)
   — P(Stylo !OK | M3)
   = (1⁄6 * 3%) + (2⁄6 * 2%) + (3⁄6 * 1%)
   = 1⁄200 + 1⁄150 + 1⁄200 $=$ **1⁄60**
2. **P(M2 sachant que Stylo défectueux)**
   = P(M2 | Stylo !OK)
   $= \frac{\text{P(M2) * P(Stylo !OK | M2)}}{\text{P(Stylo !OK)}}$
   $= \frac{2/6 * 2\%}{\text{réponse 1}}$
   $= \frac{1/150}{1/60} = \mathbf{2/5}$

1.21 Exercice 34

Pour se rendre à l'école, Gontran utilise les transports en commun. Il prend le métro 2 fois plus souvent que le bus, et il prend le bus 2 fois plus souvent que le tram. Les probabilités respectives d'arriver en retard en prenant le bus, le tram et le métro sont de 0.3, 0.2 et 0.1 :

1. Quelle est la probabilité que Gontran arrive en retard ?
2. Quelle est la probabilité que Gontran prenne le métro et n'arrive pas en retard ?
3. Sachant que Gontran est arrivé en retard, quelle est la probabilité qu'il ait pris le tram ?
4. Quelle est la probabilité que Gontran arrive en retard deux jours de suite ?

1.21.1 Solution ($^6/_{35}$; $^{18}/_{35}$; $^1/_6$; $^{36}/_{1225}$)

(Voir figure 9)

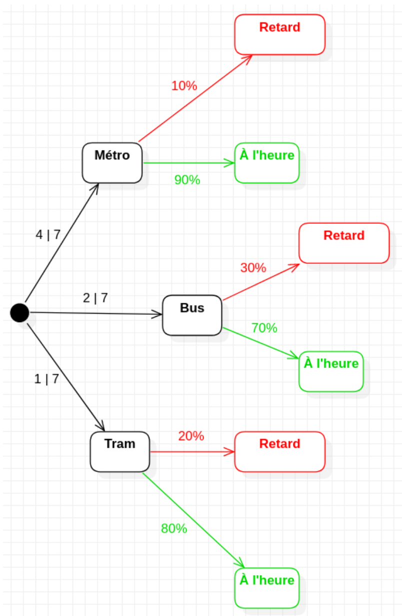

FIGURE 9 – Chapitre 1 Exercice 34 Schéma

1. **P(Retard)**

   3 possibilités :
   - P(Retard en métro) (ou)
   - P(Retard en bus) (ou)
   - P(Retard en tram)

   P(Retard) = ($^4/_7$ * 10%) + ($^2/_7$ * 30%) + ($^1/_7$ * 20%) $= \mathbf{^6/_{35}}$
2. **P(Métro et À l'heure)**

   = ($^4/_7$ * 90%) $= \mathbf{^{18}/_{35}}$
3. **P(Tram sachant que Retard)**

   = P(Tram | Retard) = $\frac{\text{P(Tram et Retard)}}{\text{P(Retard)}}$

   $= \frac{^1/_7 * 20\%}{\text{Réponse 1}}$

   $= \frac{^1/_7 * 20\%}{^6/_{35}} = \mathbf{^1/_6}$
4. **P(Retard 2 jours de suite)**

   = P(Retard jour1 **et** Retard jour2) = P(Retard) * P(Retard)

   = (Réponse 1)^2 $= \mathbf{^{36}/_{1225}}$

2 Chapitre 2 – Variables aléatoires et grandes distributions théoriques

2.1 Théorie

2.1.1 Variable aléatoire

Association d'une valeur numérique au résultat d'une expérience aléatoire.

(Ex : On jette un dé à six faces. Si on obtient 6, on gagne 3€. Si on obtient 2 ou 4, on perd 2€. Pour les autres faces, il ne se passe rien. On définit ainsi une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont -2, 0 et 3)

2.1.2 Distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète x_i et p_i

La *distribution de probabilité* d'une variable aléatoire se définit par la donnée des différentes valeurs possibles de la variable (notée x_i) accompagnées de leur probabilité respective (notée p_i).

La somme des p_i est toujours égale à 1.

Ainsi, si on reprend l'exemple vu dans la définition de la Variable aléatoire, on obtient la distribution de la variable aléatoire X suivante :

x_i	p_i
-2	⅓
0	½
3	⅙

Par définition on a donc : $\boldsymbol{p_i = P[\ X = x_i\ ]}$

Et la somme des p_i = (⅓ + ½ + ⅙) = **1**

On peut représenter cette distribution par un diagramme en bâtonnets :

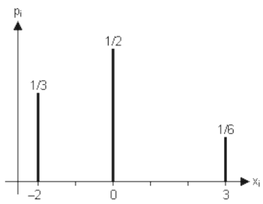

FIGURE 10 – Distribution de probabilité – Diagramme

2.1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète F(x_i)

Pour une variable aléatoire discrète, la *fonction de répartition* est une fonction en escalier définie par :

$$F(x_i) = P[\ X \leq x_i\ ]$$

Elle possède des valeurs pour tout réel x.

Ses valeurs extrêmes sont 0 lorsque x_i tend vers $-\infty$ et 1 lorsque x_i tend vers $+\infty$.

Pour chaque valeur x_i prise par la variable aléatoire, alors F(x_i) est égal à la somme des probabilités correspondant aux valeurs inférieures ou égales à x_i.

Reprenons l'exemple vu dans la définition de la Variable aléatoire, voici le tableau reprenant les valeurs de la fonction de répartition en chaque x_i :

x_i	p_i	F(x_i)
-2	⅓	⅓
0	½	⅚
3	⅙	1

Le diagramme de F(x) aura alors l'allure suivante : `(Voir Figure 11)`

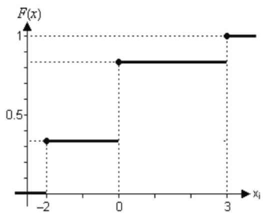

FIGURE 11 – Fonction de répartition F(x) – Diagramme

2.1.4 Espérance mathématique E[X] ou μ

Notée μ, l'espérance mathématique est la valeur moyenne que peut prendre une variable aléatoire.

Ainsi, si X représente le gain associé à un jeu de hasard, alors μ est le gain moyen de ce jeu, c'est à dire la valeur que l'on peut espérer gagner en jouant à ce jeu.

Elle se calcule grâce à la formule suivante :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

autrement dit :

$$\mu = (x_1 * p_1) + (x_2 * p_2) + (x_3 * p_3) + \ldots + (x_n * p_n)$$

Exemple : Dans le cas de l'exemple vu lors de la définition d'une fonction de répartition (cf. 2.1.3), le calcul de l'espérance mathématique donne ceci :

$\mu = ((-2) * ⅓) + (0 * ½) + (3 * ⅙)$

$\mu = -⅙$ €

Cela signifie qu'en moyenne, on perd à chaque partie environ 0.17€.

Remarque : Dans le cas de distribution binomiale, si X~B(n, p) alors $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$

2.1.5 La variance et l'écart-type σ^2 et σ

L'écart-type (noté σ) mesure la **dispersion** des valeurs de la variable aléatoire autour de sa moyenne (μ).

La variance (σ^2) étant σ au carré, on peut obtenir l'écart-type en calculant la racine carré de la variance.

$$\textbf{Écart-type} = \sqrt{\textbf{Variance}}$$

La formule pour trouver la variance est la suivante :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 p_i - \mu^2$$

autrement dit :

$$\sigma^2 = (x_1^2 * p_1) + (x_2^2 * p_2) + (x_3^2 * p_3) + \ldots + (x_n^2 * p_n) - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Connaissant l'espérance (μ) et l'écart-type (σ) d'une distribution de probabilité, on peut s'attendre à ceci :

`(Voir Figure 12)`

- Environ 68% des valeurs prises par la variable aléatoire se trouveront dans l'intervalle [$\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$].
- Environ 95% des valeurs prises par la variable aléatoire se trouveront dans l'intervalle [$\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$]
- À peine 1% se trouveront à plus de 3 écart-types d'écart de la moyenne.

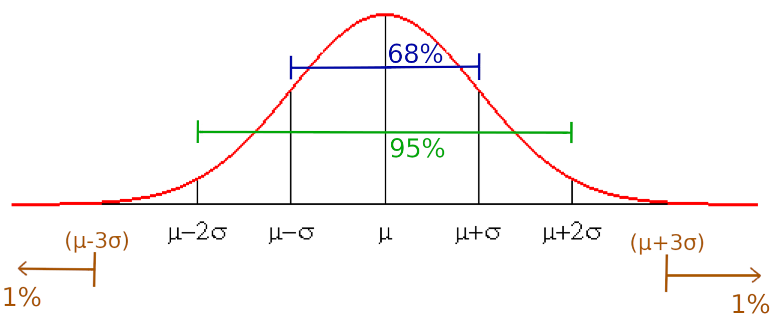

FIGURE 12 – Courbe de Gauss – Diagramme

Exemple : Dans le cas de l'exemple vu lors de la définition de l'espérance mathématique (cf. 2.1.4), le calcul de l'écart-type donne ceci :

Nous avons vu que $\mu = -⅙$, alors :

$\sigma^2 = ((-2)^2 * ⅓) + (0^2 * ½) + (3^2 * ⅙) - (-⅙)^2$

$= \frac{4}{3} + 0 + \frac{5}{6} - \frac{1}{36} = \frac{101}{36}$

$\sigma = \sqrt{101/36}$

$\simeq 1.67\ldots$

Il y a donc en moyenne 68% des gens qui vont gagner entre –1.5€ et 1.84€ (car $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$), ensuite 95% des gens qui vont gagner entre –3.17€ et 3.51€ (car $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$) et seulement 1% qui vont perdre plus que 4.84€ ou gagner plus que 5.18€ (car $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$).

Remarque : Dans le cas de distribution binomiale, si X~B(n, p) alors $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$

2.1.6 Distribution par classe d'une variable aléatoire continue $[\, x_{i-1}, x_i\, [$

On donne les probabilités pour des classes *(intervalles)* de valeurs de la variable aléatoire :

$$p_i = \mathrm{P}[\, x_{i-1} \leq \mathrm{X} < x_i \,]$$

Prenons par exemple la taille d'un individu choisi au hasard dans une grande population où les probabilités connues seraient les suivantes :

Classes $[\, x_{i-1}, x_i\, [$	p_i	dp_i	$\mathrm{F}(x_i)$
[150, 170[	0.3	0.015	0.3
[170, 180[	0.45	0.045	0.75
[180, 200[	0.25	0.0125	1

Remarque : Le tableau indique par exemple que P[150 ≤ X < 170] = 0.3, mais ne permet pas de savoir s'il y a plus d'individus dans la 1ère moitié de cette classe (150 à 160) ou dans la seconde (160 à 170). Ceci nous amène à étudier le concept de densité de probabilité.

2.1.7 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue $\mathrm{P}[\, a \leq \mathrm{X} \leq b \,]$

$\mathrm{P}[\, a \leq \mathrm{X} \leq b] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

On peut représenter la *fonction de répartition* $\mathrm{F}(x)$ de l'exemple précédent dans un diagramme, et constater ces propriétés :

(Voir Figure 13)

- $\mathrm{F}(x)$ est la probabilité que X soit inférieur ou égal à x, quel que soit le réel x
- $\mathrm{F}(x_i)$ (où x_i est la bonne droite d'une classe) est la somme des probabilités de toutes les classes à gauche de x_i
- La pente d'un segment équivaut à la densité de probabilité dp_i de la classe correspondante
- L'équation du segment de la classe $[\, x_{i-1}, x_i\, [$ est $y = dp_i\,(x - x_{i-1}) + \mathrm{F}(x_{i-1})$
- $\mathrm{P}[\, a \leq \mathrm{X} \leq b \,] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$
- La probabilité en un point donné est toujours nulle : $\mathrm{P}[\, \mathrm{X} = a \,] = 0$

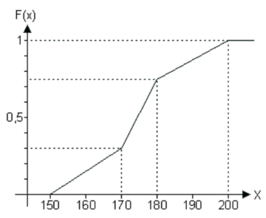

FIGURE 13 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue – Diagramme

2.1.8 Densité de probabilité dp_i

Dans une classe, en divisant la probabilité par la largeur de la classe, on obtient la densité de probabilité, qui est la probabilité par intervalle d'une unité.

$$dp_i = \frac{p_i}{l_i}$$

Ainsi, si on reprend l'exemple vu dans l'explication de la distribution par classe d'une variable aléatoire continue, pour la première classe on obtient $dp_i = \frac{0.3}{170 - 150} = 0.3/20 = 0.015$, cela signifie que la probabilité de trouver quelqu'un qui mesure entre 150 et 151cm vaut 0.015, et de même entre 151 et 152cm etc.

Si on trace l'histogramme de la densité de probabilité de cet exemple, on remarque que :

(Voir Figure 14)

— L'aire de chaque rectangle est égale à p_i
— L'aire totale vaut 1

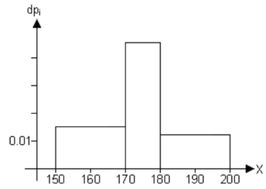

FIGURE 14 – Densité de probabilité – Histogramme

2.1.9 Distribution binomiale X~B(n, p)

Modèle théorique qui s'applique dans le cas où une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois dans des conditions identiques et indépendants.

Si X admet une distribution binomiale, alors on peut noter **X~B(n, p)**, où :

n = Nombre de fois que l'on répète l'expérience.

p = Probabilité de succès de l'expérience.

q = Probabilité d'échec de l'expérience.

C_n^k = Nombre de possibilités différentes de succès

P[X=k] = $C_n^k p^k q^{n-k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

L'espérance $\mu = np$

L'écart-type $\sigma = \sqrt{npq}$

Exemple : On lance 5 fois un dé, quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois 6 ?

$n = 5$

$p = 1/6$

$q = 5/6$

$$\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{k} = \mathrm{C}_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5*4*3*2*1}{2*1*3*2*1} = 10$$

P(2 fois 6 en 5 lancers) = $C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^2 (1/6)^2 (5/6)^3$

$$= 10 * 1/36 * 125/216 = \frac{625}{3888}$$

$\mu = np = 5 * 1/6 = 5/6$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 * 1/6 * 5/6} = 5/6$

Exemple de graphique représentant les valeurs de la distribution binomiale de paramètres n = 10 et p = 0.4 :

`(Voir Figure 15)`

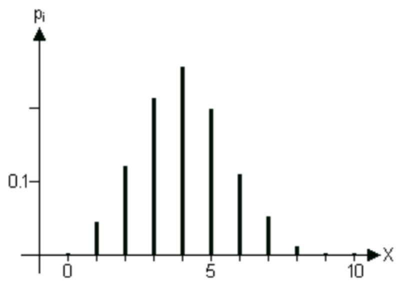

FIGURE 15 – Distribution binomiale n=10 et p=0.4 – Graphique

Les probabilités de succès p étant inférieure à ½, le graphique présente une dissymétrie vers la gauche. Dans le cas où p est supérieur à ½, les valeurs seraient plutôt concentrées du coté droit.

Le graphique n'est parfaitement symétrique que lorsque $p = q = ½$, on a alors P[X=k] = P[X= n–k] pour toute valeur de k.

2.1.10 Distribution normale X~N(μ, σ)

C'est la distribution continue sans doute la plus utile et la plus répandue.

Si X admet une distribution normale, alors on peut écrire **X~N(μ, σ)**, où μ = l'espérance et σ = l'écart-type.

Le graphique de la fonction de densité de probabilité $f(x)$ de la distribution normale est la fameuse *courbe en cloche*, ou autrement appelée *courbe de Gauss*. (Voir Figure 16)

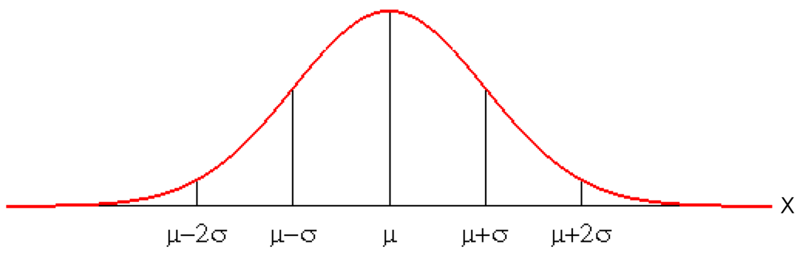

FIGURE 16 – Courbe de Gauss

2.1.11 Distribution normale réduite Z~N(0, 1)

C'est le nom donné à la distribution normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Afin de la distinguer d'une distribution normale quelconque, on la notera **Z~N(0, 1)**.

Son graphique est donc centré en 0 et les points d'inflexions sont en -1 et 1. (Voir Figure 17)

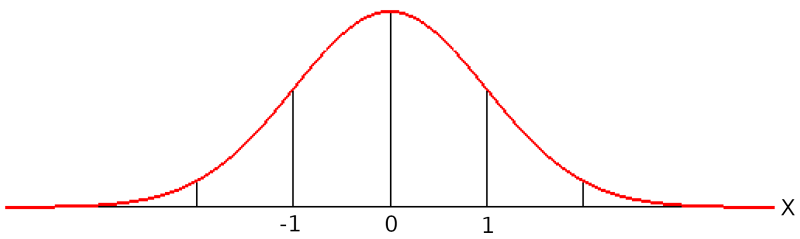

FIGURE 17 – Distribution normale réduite

Comme l'aire totale sous la courbe est égale à 1, on a la formule :

F(x) = 1 – F(–x)

c'est à dire :

P[Z > x] = 1 – P[Z < x]

et donc :

P[x < Z < y] = F(y) – F(x)

Démontrons la troisième formule en calculant P[0.57 < Z < 1.63], on remarquera ceci :

(Voir Figure 18)

Si on regarde le graphique, on constate que l'on doit calculer tout l'aire supérieur à 0.53, en retirant tout l'aire supérieur à 1.63. C'est à dire : P[Z > 0.57] – P[Z > 1.63].

Étant donné que le signe doit toujours être $\leq$ ou <, on doit inverser nos deux signes. Ainsi :

P[Z > 0.57] – P[Z > 1.63]

= 1 – P[Z < 0.57] – (1 – P[Z < 1.63]) (F(x) = 1 – F(–x))

= – P[Z < 0.57] + P[Z < 1.63]

= P[Z < 1.63] – P[Z < 0.57]

On en conclut donc que : P[x < Z < y] = P[Z < y] – P[Z < x] **= F(y) – F(x)**

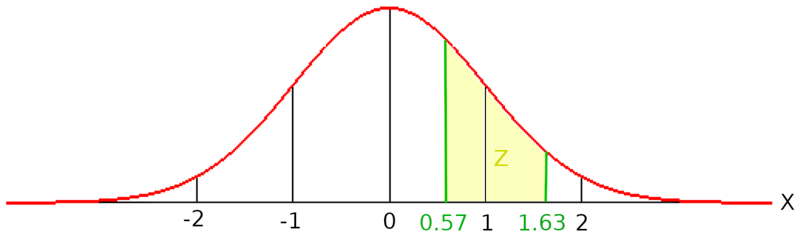

FIGURE 18 – Graphique de $P[0.57 < Z < 1.63]$

2.1.12 Table de la fonction de répartition de la distribution normale réduite Z~N(0, 1)

Cette table donne les valeurs arrondies à la 4ème décimale de $F(x) = P[\ -\infty \leq Z \leq x\ ]$ pour toutes les valeurs positives de x multiples de 0.01 entre 0 et 3.

(Voir Figure 19)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,5	0,9998									
4,0	1									

FIGURE 19 – Table de la fonction de répartition de la distribution normale réduite

2.1.13 Passage d'une normale quelconque à la normale réduite X~N(μ, σ) –> Z~N(0, 1)

La table de la fonction de répartition de la distribution normale réduite ne donne que les valeurs de la distribution normale réduite Z~N(0, 1).

Heureusement, il est possible de passer d'une distribution normale quelconque à une distribution normale réduite grâce à cette simple transformation :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Il est à présent simple de calculer la probabilité sur un intervalle [a, b] d'une normale X~N(μ, σ) quelconque :

$$P[a \leq X \leq b] = P[\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}] = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Remarque : Le passage d'une normale quelconque à la normale réduite est un simple *changement d'échelle*.

2.1.14 Valeurs typiques de la distribution normale réduite (68%, 95%, 4.56%, 0.2%)

$$P[\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma] = P[-1 \leq Z \leq 1] = 0.6826$$

Autrement dit, la probabilité de se trouver à **moins d'un écart-type** de distance de la moyenne est d'environ 68%.

$$P[\mu - 2\sigma \leq \mu + 2\sigma] = P[-2 \leq Z \leq 2] = 0.9544$$

Autrement dit, la probabilité de se trouver à **moins de deux écart-types** de distance est d'environ 95%.

Donc, la probabilité de se trouver **au delà de deux écart-types** ne vaut que (1 – 0.9544) = 0.0456 = 4.56%.

Quant à la probabilité de se trouver **au delà de 3 écart-types**, elle est quasi nulle, (1 – 0.9974) = 0.0026 = 0.2%

2.1.15 Approximation de la binomiale par la normale (Théorème de Moivre-Laplace)

Lorsque *n* est grand, le calcul de probabilité d'une variable distribuée par la loi binomiale s'avère long et fastidieux.

Ce calcul peut être facilité et replacé par une approximation à l'aide de la *distribution normale*.

Pour cela on utilise le théorème de Moivre-Laplace qui affirme que *la distribution binomiale est asymptotiquement normale*.

Si on superpose le graphique en bâtonnets d'une distribution binomiale avec un n grand ($\geq$ 30) et celui de la normale de paramètres correspondants, on observe que le tracé de la courbe de Gauss se confond avec les extrémités des bâtonnets.

Ainsi, on peut approcher chaque probabilité $P[X_b = k]$ par l'aire sous la courbe de Gauss entre les valeurs k – ½ et k + ½ sans grande perte de précision. On aura donc :

$$P[a \leq X_b \leq b] \simeq P[a - \frac{1}{2} \leq X_n \leq b + \frac{1}{2}]$$

Note : L'ajout des $\frac{1}{2}$ de part et d'autre de l'intervalle s'appelle la *correction de continuité*. Elle peut être négligée pour des très grandes valeurs de *n*.

2.2 Exercice 1

Donnez la distribution de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance mathématique et l'écart-type des variables aléatoires suivantes :

1. On lance un dé bien équilibré : Si le point est impair on gagne autant d'euros que le point indiqué, s'il est perd on perd autant d'euros que le point indiqué.
2. Une urne contient 13 boules blanches et 7 boules noires. Si on tire une boule noire on gagne 20€, sinon on perd 15€.
3. On joue à "pile ou face" avec 2 pièces bien équilibrées. Si les cotés sont deux "pile" on gagne 10€, sinon on perd 5€.
4. On tire successivement et avec remise 3 fruits d'une corbeille contenant 6 oranges et 3 pommes. Soit X le nombre de pommes tirées.

2.2.1 Solution (σ=3.86 ;16.69 ; ;)

1. **Réponse 1**

x_i	p_i	F(x_i)
-6	⅙	⅙
-4	⅙	2⁄6
-2	⅙	3⁄6
1	⅙	4⁄6
3	⅙	⅚
5	⅙	6⁄6

   (a) Espérance :
   μ = (–6 * ⅙) + (–4 * ⅙) + (–2 * ⅙) + (1 * ⅙) + (3 * ⅙) + (5 * ⅙)
   = ⅙ * (–6–4–2+1+3+5)
   = – ½

(b) Variance :
$\sigma^2 = ((-6)^2 * \frac{1}{6}) + ((-4)^2 * \frac{1}{6}) + ((-2)^2 * \frac{1}{6}) + (1^2 * \frac{1}{6}) + (3^2 * \frac{1}{6}) + (5^2 * \frac{1}{6}) - (-\frac{1}{2})^2$
$= \frac{1}{6} * (36+16+4+1+9+25) - \frac{1}{4}$
$= \frac{179}{12}$

(c) Écart-type :
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{179/12} = \mathbf{3.86}$

2. **Réponse 2**

x_i	p_i
-15	13/20
20	7/20

(a) Espérance :
$\mu = (-15 * \frac{13}{20}) + (20 * \frac{7}{20})$
$= -\frac{11}{4}$

(b) Variance :
$\sigma^2 = ((-15)^2 * \frac{13}{20}) + (20^2 * \frac{7}{20}) - (-\frac{11}{4})^2)$
$= 278.69\ldots$

(c) Écart-type :
$\sigma = \sqrt{278.69} = \mathbf{16.69}$

3. **Réponse 3**
À venir…

4. **Réponse 4**
À venir…

2.3 Exercice 2

Un représentant d'un grand laboratoire pharmaceutique téléphone à une pharmacie 3 fois par an.

Au premier appel, il a 8 chances sur 10 de réaliser une vente.

Ensuite, la probabilité de réaliser une vente dépend de ce qui a précédé : Si l'appel suit une vente, la probabilité d'une nouvelle vente est de 0.9, sinon elle est de 0.4. Soit la variable aléatoire du nombre de total de vente par an. Fournissez la distribution de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance mathématique et l'écart-type. Quelle est le probabilité de réaliser au moins 2 ventes ?

2.3.1 Solution ($\sigma \simeq 0.93808$;$F[X \geq 2] \simeq 0.824$)

(Voir Figure 20)

X = nombre de ventes par an

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

P[X=0] = 20% * 60% * 60% = $\frac{9}{125}$

(!Vente appel1 et appel2 et appel3)

P[X=1] = (80% * 10% * 60%) + (20% * 40% * 10%) + (20% * 60% * 40%) = $\frac{13}{125}$

(Vente appel1 et pas2ni3 ou appel2 et pas1ni3 ou appel3 et pas1ni2)

P[X=2] = (80% * 90% * 10%) + (80% * 10% * 40%) + (20% * 40% * 90%) = $\frac{22}{125}$

(Vente appel1et2 et pas3 ou Vente appel1et3 et pas2 ou Vente appel2et3 et pas1)

P[X=3] = (80% * 90% * 90%) = $\frac{81}{125}$

(Vente appel1 et appel2 et appel3)

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	$\frac{9}{125}$	$\frac{9}{125}$
1	$\frac{13}{125}$	$\frac{22}{125}$
2	$\frac{22}{125}$	$\frac{44}{125}$
3	$\frac{81}{125}$	1

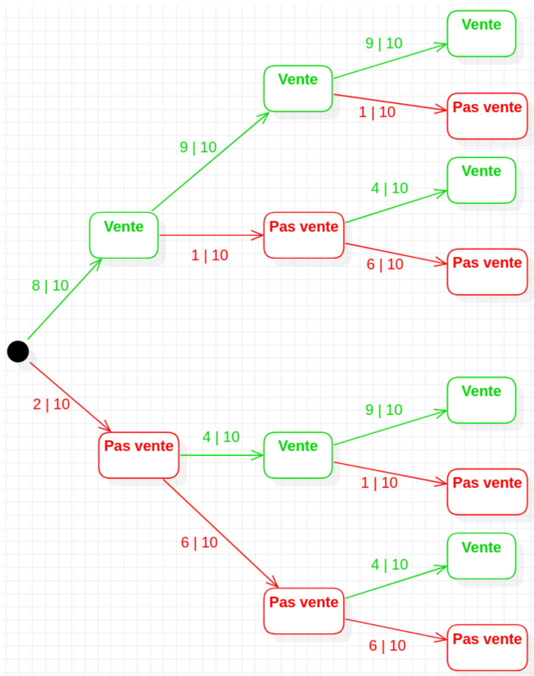

FIGURE 20 – Chapitre 2 Exercice 2 – Schéma

1. Espérance :
   $\mu = (0 * \frac{9}{125}) + (1 * \frac{13}{125}) + (2 * \frac{22}{125}) + (3 * \frac{81}{125})$
   $= \frac{13}{125} + \frac{44}{125} + \frac{243}{125}$
   $= \frac{300}{125} = \frac{12}{5}$
2. Variance :
   $\sigma^2 = (0^2 * \frac{9}{125}) + (1^2 * \frac{13}{125}) + (2^2 * \frac{22}{125}) + (3^2 * \frac{81}{125}) - (\frac{12}{5})^2$
   $= \frac{13}{125} + \frac{88}{125} + \frac{729}{125} - \frac{144}{25}$
   $= \frac{22}{25}$
3. Écart-type :
   $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{22}{25}} \simeq \mathbf{0.93808...}$
4. Probabilité de réaliser au moins 2 ventes :
   $F[X \geq 2] = p_2 + p_3 = \frac{22}{125} + \frac{81}{125} = \frac{103}{125} = \mathbf{0.824}$

2.4 Exercice 4

Un installateur de frigos en commande trois nouveaux qui sont garantis par le constructeur.

Chaque frigo a une probabilité de 0.2 d'être défectueux. Soit X la variable aléatoire du nombre total de frigos défectueux :

1. Fournissez (valeurs et graphiques) la distribution de probabilité de X
2. Fournissez (valeurs et graphiques) la fonction de répartition de X
3. Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de X
4. Le contrat de garantie stipule que les frais de réparation comportent une partie fixe de 25€ et une composante variable de 35€ par frigo à réparer. Quelle est l'espérance des frais de réparation dans le cas de la commande de trois frigos ?

2.4.1 Solution ($\sigma \simeq$0.6928 ;E[Y]=33.20€)

X = nombre de frigos défectueux

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

1. **Réponse 1** :
   P[X=0] = 80% * 80% * 80% = $\frac{64}{125}$ (Frigo1 et Frigo2 et Frigo3 OK)
   P[X=1] = 3 * (20% * 80% * 80%) = $\frac{48}{125}$ (3 possibilités d'avoir 1 frigo défectueux sur 3)
   P[X=2] = 3 * (20% * 20% * 80%) = $\frac{12}{125}$ (3 possibilités d'avoir 2 frigos défectueux sur 3)
   P[X=3] = (20% * 20% * 20%) = $\frac{1}{125}$ (Frigo1 et Frigo2 et Frigo3 défectueux)

x_i	p_i
0	$^{64}/_{125}$
1	$^{48}/_{125}$
2	$^{12}/_{125}$
3	$^{1}/_{125}$

2. **Réponse 2 :**

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	$^{64}/_{125}$	$^{64}/_{125}$
1	$^{48}/_{125}$	$^{112}/_{125}$
2	$^{12}/_{125}$	$^{124}/_{125}$
3	$^{1}/_{125}$	1

3. **Réponse 3 :**
   $\mu = (0 * {}^{64}/_{125}) + (1 * {}^{48}/_{125}) + (2 * {}^{12}/_{125}) + (3 * {}^{1}/_{125})$
   $= {}^{3}/_{5}$
   $\sigma^2 = (0^2 * {}^{64}/_{125}) + (1^2 * {}^{48}/_{125}) + (2^2 * {}^{12}/_{125}) + (3^2 * {}^{1}/_{125}) - ({}^{3}/_{5})^2$
   $= {}^{12}/_{25}$
   $\sigma = \sqrt{{}^{12}/_{25}} \simeq$ **0.6928...**
4. **Réponse 4 :**
   Y = Frais de réparation des frigos défectueux

x_i	y_i	p_i	$F(x_i)$
0	0	$^{64}/_{125}$	$^{64}/_{125}$
1	60	$^{48}/_{125}$	$^{112}/_{125}$
2	95	$^{12}/_{125}$	$^{124}/_{125}$
3	130	$^{1}/_{125}$	1

   $\mu_y = (0 * {}^{64}/_{125}) + (60 * {}^{48}/_{125}) + (95 * {}^{12}/_{125}) + (130 * {}^{1}/_{125})$
   $= {}^{166}/_{5}$ **= 33.20€**

2.5 Exercice 5

Un jeu très simple consiste à lancer 2 dés. Un gain est associé au lancé de la façon suivante :

Si on obtient un double 6, on gagne 5€. Si on obtient un seul 6, on gagne 2€. Dans tous les autres cas on perd 1€.

1. Donnez la distribution de probabilité de la variable aléatoire représentant le gain associé à ce jeu
2. Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de cette variable aléatoire. Ce jeu vous semble-t-il équitable ? Pourquoi ? Combien doit-on s'attendre à gagner à ce jeu si on joue 20 fois de suite ?
3. Richard Naqueur, le célèbre tricheur professionnel, a fabriqué un dé truqué : La probabilité que ce dé tombe sur 6 est trois fois plus élevée que la probabilité qu'il tombe sur n'importe quel autre chiffre. Pour camoufler sa fraude, il l'utilise avec un dé normal. Quelle est alors l'espérance du gain de Richard Naqueur ? Combien de fois en moyenne doit-il jouer à ce jeu pour espérer gagner 50€ ?

2.5.1 Solution (σ=1.58€ ;μ=${}^{15}/_{24}$ il doit jouer 80 fois)

1. **Réponse 1 :**
   X = Gain d'un jeu de dé
   $\Omega = \{-1, 2, 5\}$
   $P[X=-1]$ = P(Pas de 6) = ${}^{5}/_{6} * {}^{5}/_{6} = {}^{25}/_{36}$
   $P[X=2]$ = P(Un seul 6) = $2 * ({}^{5}/_{6} * {}^{1}/_{6}) = {}^{10}/_{36}$
   $P[X=5]$ = P(Deux 6) = ${}^{1}/_{6} * {}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{36}$

x_i	p_i	$F(x_i)$
-1	$^{25}/_{36}$	$^{25}/_{36}$
2	$^{10}/_{36}$	$^{35}/_{36}$
5	$^{1}/_{36}$	1

2. **Réponse 2 :**
   $\mu = (-1 * {}^{25}/_{36}) + (2 * {}^{10}/_{36}) + (5 * {}^{1}/_{36})$
   $= 0$
   $\sigma^2 = ((-1)^2 * {}^{25}/_{36}) + (2^2 * {}^{10}/_{36}) + (5^2 * {}^{1}/_{36}) - 0^2$
   $= {}^{10}/_{4}$
   $\sigma = \sqrt{{}^{10}/_{4}} \simeq$ **1.58...**

3. **Réponse 3 :**
   P(Dé truqué tombe sur 6) = $3/8$
   P[X=-1] = P(Pas de 6) = $5/6$ * $5/8$ = $25/48$
   P[X=2] = P(Un seul 6) = ($1/6$ * $5/8$) + $5/6$ * $3/8$) = $5/12$
   P[X=5] = P(Deux 6) = $1/6$ * $3/8$ = $1/16$

x_i	p_i	$F(x_i)$
-1	$25/48$	$25/48$
2	$5/12$	$45/48$
5	$1/16$	1

   μ = (-1 * $25/48$) + (2 * $5/12$) + (5 * $1/16$)
   = $15/24$
   Nombre de coups pour espérer gagner 50€ = $\dfrac{50}{15/24}$ **= Il doit jouer 80 fois**

2.6 Exercice 9

Pour être certain d'obtenir au moins un garçon, un couple décide d'avoir 5 enfants. Quelles sont ses chances de succès si la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52 ?

2.6.1 Solution ($\simeq$0.9745)

n = 5

p = 0.52

q = 1 – 0.52 = 0.48

X = nombre de garçons en 5 naissances ~ B(5, 0.52)

P(Avoir au moins 1 garçon) = 1 – P(Pas de garçon)

P[X$\geq$1] = 1 – P[X=0]

1 – P[X=0] = 1 – $C_5^0(0.52)^0(0.48)^5$

= 1 – 1 * (1 * $(0.48)^5$) = 1 – $(0.48)^5$ $\simeq$ **0.9745...**

2.7 Exercice 11

En jetant 6 fois une paire de dés, quelle est la probabilité d'avoir un total de 9 à 2 reprises ? Et à au moins 2 reprises ?

2.7.1 Solution ($\simeq$0.1156 ;$\simeq$0.1368)

9 = 3+6 = 6+3 = 4+5 = 5+4, il y a donc $4/36$ = $1/9$ possibilités d'obtenir 9.

n = 6

p = $1/9$ (probabilité d'obtenir 9 avec deux dés)

q = 1 – $1/9$ = $8/9$

X = Nombre de 9 obtenus en 6 lancers ~ B(6, $1/9$)

$C_6^2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

P[X=2] = $C_2^6(1/9)^2(8/9)^{6-2} = 15(1/9)^2(8/9)^4$ $\simeq$ **0.1156...**

P[X$\geq$2] = 1 – P[X=0] – P[X=1]

   P[X=0] = $C_6^0(1/9)^0(8/9)^6$ = 1 * (1 * $(8/9)^6$) $\simeq$ 0.4933
   P[X=1] = $C_6^1(1/9)^1(8/9)^5 = 6(1/9)(8/9)^5$ $\simeq$ 0.3699

P[X$\geq$2] = 1 – 0.4933 – 0.3699 $\simeq$ **0.1368...**

2.8 Exercice 13

Combien de fois doit-on jeter un dé pour que le probabilité d'obtenir au moins une fois 6 soit plus grande que 0.9 ?

2.8.1 Solution (Au moins 13 fois)

n = ?

p = ⅙

q = ⅚

X = Nombre de 6 obtenus ~ B(?, ⅙)

P(Au moins un 6) = P[X≥1] ≥ 0.9 (on sait que P[X≥1] = 1 – P[X=0])

1 – P[X=0] ≥ 0.9

–P[X=0] ≥ 0.9 – 1

–P[X=0] ≥ –0.1

P[X=0] ≤ 0.1 (On inverse les signes, et donc, le ≥ devient ≤)

P[X=0] représente la probabilité de n'avoir que des échecs, c'est à dire $C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 * 1 * q^n$, donc :

$(5/6)^n \leq 0.1$ (Pour trouver n on doit effectuer le logarithme)

$log((5/6)^n) \leq log(0.1)$

$n * log(5/6) \leq log(0.1)$

$n \geq \dfrac{log(0.1)}{log(5/6)}$ (Le ≤ devient ≥ car log(⅚) donne un résultat négatif)

$n \geq 12.6292$ **= Il faut lancer le dé au moins 13 fois**

2.9 Exercice 17

Quels sont l'espérance mathématique et l'écart-type :

1. Du nombre de "face" pour le jet de 100 pièces de monnaie
2. Du nombre d'As obtenus lors du jet de 30 dés de poker
3. Du nombre de réponses correctes à 50 questions de "VRAI ou FAUX", les réponses étant données au hasard

2.9.1 Solution (μ=50 ;σ=5 ;μ=5 ;$\sigma \simeq$2.0412… ;μ=25 ;$\sigma \simeq$3.5355…)

1. **Réponse 1 :**
   n = 100
   p = ½
   q = ½
   X = Nombre de "face" obtenus ~ B(100, ½)
   $\mu = np = 100 * 1/2$ **= 50**
   $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 1/2 * 1/2}$ **= 5**
2. **Réponse 2 :**
   n = 30
   p = ⅙
   q = ⅚
   X = Nombre d'As obtenus ~ B(30, ⅙)
   $\mu = 30 * 1/6$ **= 5**
   $\sigma = \sqrt{30 * 1/6 * 5/6} \simeq$ **2.0412…**
3. **Réponse 3 :**
   n = 50
   p = ½
   q = ½
   X = Nombre de réponses correctes ~ B(50, ½)
   $\mu = 50 * 1/2$ **= 25**
   $\sigma = \sqrt{50 * 1/2 * 1/2} \simeq$ **3.5355…**

2.10 Exercice 18

Une compagnie pétrolière doit, sous peine de banqueroute, trouver au moins trois puits de pétrole. Elle réussit à financer douze forages, et pour chacun d'eux, elle a 20% de chances d'aboutir. Quelle est la probabilité de ne pas être en faillite ?

2.10.1 Solution (≃0.4416)

n = 12

p = 0.2

q = 0.8

X = Nombre de puits de pétrole trouvés ~ B(12, 0.2)

P(Ne pas être en faillite) = $P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2]$

$= 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2]$

$= 1 - C_{12}^{0} 0.2^{0} 0.8^{12-0} - C_{12}^{1} 0.2^{1} 0.8^{12-1} - C_{12}^{2} 0.2^{2} 0.8^{12-2}$

$C_{12}^{0} = 1$
$C_{12}^{1} = 12$
$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$

$= 1 - (1 * 1 * 0.8^{12}) - (12 * 0.2 * 0.8^{11}) - (66 * 0.2^{2} * 0.8^{10}) \simeq$ **0.4416...**

2.11 Exercice 25

Dessinez sur un même graphique les gaussiennes de distribution N(8, 2) et N(12, 2). À quoi correspond leur intersection ?

2.11.1 Solution (2-25.png)

(Voir Figure 21)

Elles se croisent au point d'abscisse 10 (point d'inflexion).

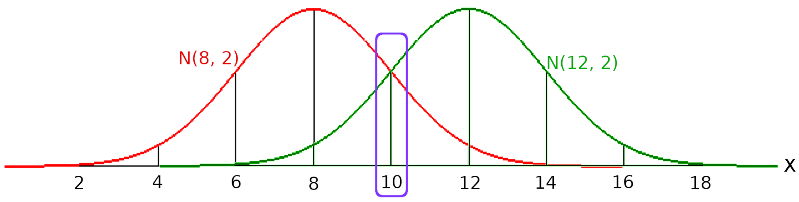

FIGURE 21 – Chapitre 2 Exercice 25 – Graphiques

2.12 Exercice 27

Pour la distribution normale réduite, calculez :

1. $P[Z < 1.34]$
2. $P[0.57 < Z < 1.63]$
3. $P[-0.68 < Z < 1.04]$
4. $P[Z > -0.5]$

2.12.1 Solution (0.9099 ;0.2327 ;0.6026 ;0.6915)

1. **Réponse 1 :**
   $P[Z < 1.34]$
   $= F(1.34)$ **= 0.9099** (Voir la table de la fonction de répartition de la distribution normale réduite)
2. **Réponse 2 :**
   $P[0.57 < Z < 1.63]$
   $= F(1.63) - F(0.57)$ ($P[x < Z < y] = F(y) - F(x)$)
   $= 0.9484 - 0.7157$ **= 0.2327**
3. **Réponse 3 :**
   $P[-0.68 < Z < 1.04]$
   $= F(1.04) - F(-0.68)$
   $= F(1.04) - (1 - F(0.68))$ ($F(x) = 1 - F(-x)$)
   $= F(1.04) - 1 + F(0.68)$
   $= 0.8508 - 1 + 0.7518$ **= 0.6026**

4. **Réponse 4 :**
   P[Z > –0.5]
   = 1 – P[Z < –0.5]
   = 1 – F(–0.5)
   = 1 – (1 – F(0.5))
   = 1 – 1 + F(0.5)
   = F(0.5) **= 0.6915**

2.13 Exercice 28

Pour une normale X~B(70, 25), calculez :

1. P[56 < X < 83]
2. P[X > 89]
3. P[40 < X < 67]
4. P[X = 82]

2.13.1 Solution (0.4108 ;0.2236 ;0.3371 ;0)

1. **Réponse 1 :**
   P[56 < X < 83]
   $= P[\frac{56-70}{25} < \frac{X-70}{25} < \frac{83-70}{25}]$ $(Z = \frac{X-\mu}{\sigma})$
   = P[$^{-14}/_{25}$ < $^{X-70}/_{25}$ < $^{13}/_{25}$]
   = F($^{13}/_{25}$) – F($^{-14}/_{25}$)
   = F($^{13}/_{25}$) – (1 – F($^{14}/_{25}$))
   = F($^{13}/_{25}$) – 1 + F($^{14}/_{25}$)
   = 0.6985 – 1 + 0.7123 **= 0.4108**
2. **Réponse 2 :**
   P[X > 89]
   = 1 – P[X < 89]
   $= 1 - P[\frac{X-70}{25} < \frac{89-70}{25}]$
   = 1 – F(0.76)
   = 1 – 0.7764 **= 0.2236**
3. **Réponse 3 :**
   P[40 < X < 67]
   $= P[\frac{40-70}{25} < \frac{X-70}{25} < \frac{67-70}{25}]$
   = P[–1.2 < Z < –0.12]
   = F(–0.12) – F(–1.2)
   = 1 – F(0.12) – (1 – F(1.2))
   = F(1.2) – F(0.12)
   = 0.8849 – 0.5478 **= 0.3371**
4. **Réponse 4 :**
   P[X = 82] **= 0** (En continu, les probabilités ponctuelles sont toujours nulles)

2.14 Exercice 29

Une certaine marque de pneus permet en moyenne de parcourir 60_{000km} avec un écart-type de 10 000km. On suppose la distribution normale. Quelle est la probabilité qu'un pneu soit usé avant 50 000km ?

2.14.1 Solution (0.1587)

X = distance parcourue avec un pneu ~N(60 000, 10 000)

P(Pneu usé avant 50 000km)

= P[X < 50 000]

$= P[\frac{X-60000}{10000} < \frac{50000-60000}{10000}]$

$= P[Z < -1]$

$= F(-1)$

$= 1 - F(1)$

$= 1 - 0.8413$ **= 0.1587**

2.15 Exercice 30

La vitesse des véhicules passant sur une nationale donnée est distribuée par une normale de moyenne 90km/h et d'écart-type 16km/h.

1. Quelle est la proportion de véhicules roulant à plus de 110km/h ?
2. Quelle est la proportion de véhicules roulant entre 70km/h et 102km/h ?
3. On veut diviser les véhicules en trois catégories d'effectif égal : Les "lent", les "modéré" et les "rapide". Quelles sont les intervalles de vitesse qui les délimitent ?

2.15.1 Solution (0.1056 ;0.6678 ;83.12 et 96.88 km/h)

1. **Réponse 1 :**
   $P[X > 110]$
   $= P[\frac{X-90}{16} > \frac{110-90}{16}]$
   $= P[Z > 1.25]$
   $= 1 - P[Z < 1.25]$
   $= 1 - F(1.25)$
   $= 1 - 0.8944$ **= 0.1056** (Donc 10.58% des véhiculent roulent à plus de 110km/h)
2. **Réponse 2 :**
   $P[70 < X < 102]$
   $= P[\frac{70-90}{16} < \frac{X-90}{16} < \frac{102-90}{16}]$
   $= P[-1.25 < Z < 0.75]$
   $= F(0.75) - F(-1.25)$
   $= F(0.75) - (1 - F(1.25))$
   $= F(0.75) - 1 + F(1.25)$
   $= 0.7734 - 1 + 0.8944$ **= 0.6678** (Donc 66.78% des véhicules roulent entre 70 et 102km/h)
3. **Réponse 3 :**
   (Voir Figure 22)

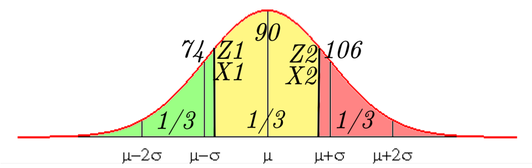

FIGURE 22 – Chapitre 2 Exercice 30 Réponse 3 – Graphique

Trois catégories d'effectif égal, c'est à dire ⅓ dans chaque groupe (33.333. . . %).
On cherche la valeur de Z2 qui est telle qu'il y a une probabilité ⅔ d'être à gauche de cette valeur.
$P[Z < Z2] = F(Z2) = ⅔ = 0.6666...$
On cherche la valeur la plus proche de 0.6666 dans le tableau de distribution normale réduite, on trouve alors 0.6664 qui correspond à 0.43, ainsi Z2 = 0.43 (donc Z1 = –0.43).
On sait que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, donc on en conclut que $X = \mu + Z\sigma$, ainsi :
$X1 = 90 + 16*(-0.43)$ **= 83.12km/h**
$X2 = 90 + 16*(0.43)$ **= 96.88km/h**
Lents : Ceux qui roulent à moins de 83.12km/h. Modérés : Ceux qui roulent entre 83.12km/h et 96.88km/h. Rapides : Ceux qui roulent à plus de 96.88km/h.

2.16 Exercice 31

Le temps nécessaire aux étudiants pour terminer une interrogation est une variable normale de moyenne 90 minutes et d'écart-type 15 minutes.

1. Quelle est la proportion d'étudiants qui terminent en moins de deux heures ?
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si on souhaite que 90% des étudiants puissent la terminer ?

2.16.1 Solution (97.72% ;01h49m12s)

1. **Réponse 1 :**
   P[X < 120]
   = P[$\frac{X-90}{15} < \frac{120-90}{15}$]
   = P[Z < 2]
   = F(2) **= 0.9772**
2. **Réponse 2 :**
   Soit Z tel que F(Z) = 0.9, le Z le plus proche dans la table est 1.28 qui correspond à 0.8997, on en déduit donc que X = 90 + 1.28*15 = 109.2 = 01h49m12s. (X = $\mu + Z\sigma$)
   90% des élèves termineront en 1h49m12s max.