STA2 - Lucky Summary

Sm!le42

20 mars 2021

Table des matières

1 Chapitre 1 – Introduction au calcul des probabilités

1.1 Théorie

1.1.1 Expérience aléatoire

Processus dont l'issue est aléatoire, c'est à dire soumis au hasard, de telle sorte que le résultat de l'expérience ne puisse pas être connu à l'avance.

(Ex : Lancement d'une pièce de monnaie)

1.1.2 Catégorie d'épreuve Ω

Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est noté Ω.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie, alors Ω = {Pile, Face})

1.1.3 Évènement aléatoire

Une des issues possibles d'une expérience aléatoire, ou plus techniquement un sous-ensemble de Ω.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie, alors "La pièce tombe sur Pile" est un évènement aléatoire)

1.1.4 Probabilité P(A)

Nombre réel compris entre 0 et 1 inclus, donnant une mesure de la chance qu'a cet évènement à se réaliser. Si la probabilité vaut 1, on parle d'*évènement certain*, et lorsque la probabilité vaut 0, on parle d'*évènement impossible*. La probabilité de l'évènement aléatoire A est notées P(A). Si la probabilité est la même pour deux évènements distincts, alors ce sont des *évènements équiprobables*.

(Ex : Si on lance une pièce de monnaie non truquée, alors P(Pile) = ½)

1.1.5 Probabilité à priori

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas équiprobables possibles}}$$

1.1.6 Évènements incompatibles

Évènements ne pouvant pas se produire simultanément.

Ainsi, si A et B sont *incompatibles*, alors **P(A et B) = 0**, et donc, **P(A ou B) = P(A) + P(B)**.

(Ex : Si on lance un dé non truqué, alors P(2) et P(4) sont incompatibles)

1.1.7 Évènements indépendants

La réalisation d'un évènement n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre.

Ainsi, si A et B sont *indépendants*, alors **P(A | B) = P(A)**.

(Ex : Si on lance deux dés en même temps, alors les deux évènements sont indépendants)

1.1.8 Évènement complémentaire

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(Ex : Si P(A) = ⅓, alors son évènement complémentaire $P(\bar{A})$ = ⅔)

1.1.9 Addition P(A ou B)

P(A ou B) = P(A) ou P(B) – P(A et B)

= P(A) + P(B) – (P(A) * P(B | A))

Note : Si deux évènements sont *incompatibles* alors P(A et B) = 0, et la formule se simplifie en P(A) + P(B).

1.1.10 Multiplication P(A et B)

P(A et B) = P(A) * P(B | A)

Note : Si deux évènements sont *indépendants* alors P(B | A) = P(B), et la formule se simplifie en P(A) * P(B).

1.1.11 Probabilité conditionnelle P(A | B)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ et } B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)}$$

Note : Si deux évènements sont *indépendants* alors P(A et B) = P(A) * P(B), et la formule se simplifie en P(A).

1.1.12 Probabilités totales

Lorsque l'on considère un évènement aléatoire se réalisant avec des probabilités différentes suivant différents cas.

Ex : La probabilité qu'un bus arrive à l'heure est de 0.9 le week-end, de 0.8 du mardi au jeudi, et de 0.6 le lundi et vendredi. Quelle est la probabilité totale que le bus arrive à l'heure ?

3 cas possibles :
- P(Bus à l'heure et Week-end) (ou)
- P(Bus à l'heure et Mardi, Mercredi ou Jeudi) (ou)
- P(Bus à l'heure et Lundi ou Vendredi)

Donc :
- P(week-end) * P(Bus à l'heure | Week-end) (ou)
- P(Mardi, Mercredi ou Jeudi) * P(Bus à l'heure | Mardi, Mercredi ou Jeudi) (ou)
- P(Lundi ou Vendredi) * P(Bus à l'heure | Lundi ou Vendredi)

Ainsi, P(Bus à l'heure) = ($\frac{2}{7}$ * 0.9) + ($\frac{3}{7}$ * 0.8) + ($\frac{2}{7}$ * 0.6)

= $\frac{27}{35}$

1.1.13 Arbre de probabilités

Caractéristiques :
- Les sommets de l'arbre représentent des évènements aléatoires (sauf le premier appelé *racine*)
- À chaque arête est associée une probabilité
- Deux évènements issus d'un même sommet sont toujours incompatibles
- L'ensemble des évènements issus d'un même sommet couvre toutes les possibilités relatives à l'expérience concernée
- La somme des probabilités associées aux arêtes issues d'un même sommet vaut toujours 1

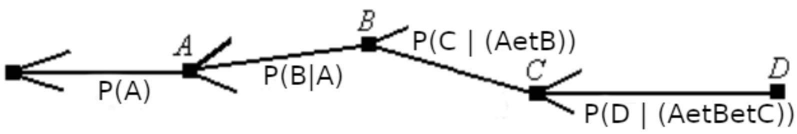

FIGURE 1 – Exemple de relations dans un arbre de probabilité

1.1.14 Système exhaustif d'évènements aléatoires

Un système d'évènements aléatoires est exhaustif si :
- Aucun évènement n'est impossible
- Les évènements sont incompatibles deux à deux
- La somme des probabilités de tous ses évènements est égale à 1

Ex :
- {{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}} pour le jet d'un dé à 6 faces
- {{Pairs}, {Impairs}} pour le jet d'un dé
- {{Week-end}, {Mardi, Mercredi, Jeudi}, {Lundi, Vendredi}} pour le choix d'un jour de la semaine

1.1.15 Théorème de Bayes

En probabilité conditionnelle nous avons vu que P(A | B) = $\frac{\text{P(A et B)}}{\text{P(B)}}$

Le théorème de Bayes nous permet de faire le chemin inverse. Ainsi :

P(B | A) = $\frac{P(B) * P(A|B)}{P(A)}$

1.2 Exercice 3

Un dé est truqué de sorte qu'en le lançant, la probabilité d'obtenir 6 vaut le triple de celle d'obtenir toute autre valeur. Avec ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un point pair ?

1.2.1 Solution *(5/8)*

P(1) = 1/8 P(2) = 1/8 P(3) = 1/8 P(4) = 1/8 P(5) = 1/8 **P(6) = 3/8**

P(Pair) = P(2)+P(4)+P(6)

= 1/8 + 1/8 + 3/8

= **5/8**

1.3 Exercice 4

Trois chevaux sont en course. Le premier à 2 fois plus de chances de gagner que le deuxième, celui-ci a aussi 2 fois plus de chances de gagner que le troisième. Quelles sont les probabilités de gagner de chacun des trois chevaux ?

1.3.1 Solution *(4/7;2/7;1/7)*

Cheval	1	2	3
Proba	4*x	2*x	x

$x = \frac{1}{4+2+1}$ = 1/7

Cheval	1	2	3
Proba	**4/7**	**2/7**	**1/7**

1.4 Exercice 5

Soit un jeu de 52 cartes dont on tire une carte au hasard. On définit les évènements aléatoires suivants :
- A : obtenir un as
- B : obtenir une carte rouge
- C : obtenir un cœur.

Définissez les évènements suivants et calculez-en la probabilité :

1. A ∩ B
2. B ∩ C
3. A ∪ C
4. B ∪ C

1.4.1 Solution *(1/26;1/4;4/13;1/2)*

- P(A) = 4/52 = 1/13
- P(B) = 26/52 = 1/2
- P(C) = 13/52 = 1/4

1. **A ∩ B** –> *As et Rouge*
   = P(A **et** B) = 1/13 * 1/2 = **1/26**
2. **B ∩ C** –> *Rouge et Coeur*
   = P(B **et** C) = P(C) = **1/4** –> *Car un coeur est toujours rouge*
3. **A ∪ C** –> *As ou Coeur*
   = P(A **ou** C) = P(A)+P(C)–P(A **et** C) –> *On retire les As Rouges comptés en double*
   = 4/52 + 13/52 – (4/52 * 1/4)
   = **4/13**

4. **B ∪ C** –> Rouge ou Coeur
   = P(B **ou** C) = P(B) –> *Car un coeur est toujours rouge*
   $= \mathbf{1/2}$

1.5 Exercice 9

Soit un groupe composé de 12 hommes dont la moitié a des lunettes et de 15 femmes dont le tiers a des lunettes. Si on choisit une personne au hasard dans ce groupe, quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ou porte des lunettes ?

1.5.1 Solution *(17/27)*

	Lunettes	!Lunettes	Total
Hommes	**6**	6	**12**
Femmes	5	10	15
Total	**11**	16	**27**

–> P(Hommes **ou** Lunettes)

= P(Homme) + P(Lunettes) – P(Homme **et** Lunettes)

= 12/27 + 11/27 – 6/27

$= \mathbf{17/27}$

Même résultat avec la Loi *complémentaire* de Morgan :
P(Homme ou Lunettes) = 1 – P(Femmes et !Lunettes)
= 1 – 10/27 $= \mathbf{17/27}$

1.6 Exercice 10

Lors de vacances scolaires, deux activités sportives sont proposées : natation et vélo. On sait que 40% des participants se sont inscrits à la natation, 50% aux randonnées vélo et 25% se sont inscrits au deux. Quelle est la probabilité qu'un participant choisi au hasard ne fasse pas de sport ?

1.6.1 Solution *(35%)*

	Vélo	!Vélo	Total
Natation	25%	15%	40%
!Natation	25%	35%	60%
Total	50%	50%	100%

P(!Sport) = P(!Vélo **et** !Natation) $=$ **35%**

Alternative :
P(!Sport) = 1 – P(Natation **ou** Vélo)
= 1 – P(Natation) + P(Vélo) – P(Natation **et** Vélo)
= 100% – 40% + 50% – 25% $=$ **35%**

1.7 Exercice 11

Un marchand d'électro-ménager a réalisé des statistiques sur les ventes de frigos tout au long du mois de décembre dernier. Les probabilités du nombre de frigos vendus par jour sont données dans le tableau suivant :

Nombre de frigos vendus par jour	**Probabilité**
0	0.2
1	0.4
2	0.3
Au moins 3	0.1

1. Quelle est la probabilité qu'il vende au moins un frigo ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ne vende pas de frigos sur 2 jours consécutifs ?
3. Quelle est la probabilité qu'il vende un et un seul frigo sur 3 jours consécutifs ?

1.7.1 Solution (80% ;4% ;4.8%)

1. **P(Vendre au moins 1 frigo)**
   = P(1 frigo **ou** 2 frigos **ou** au moins 3 frigos)
   = P(1) + P(2) + P(Au moins 3)
   = 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8 = **80%**
2. **P(Pas de frigo vendu en 2 jours)**
   = P(0 frigo le jour 1 **et** 0 frigo le jour 2)
   = P(0 frigo jour1 * 0 frigo jour2)
   = 0.2 * 0.2 = 0.04 = **4%**
3. **P(1 frigo en 3 jours)**
   3 cas possibles :
   — P(**1 frigo jour1 et** 0 frigo jour2 **et** 0 frigo jour3) (ou)
   — P(0 frigo jour1 **et 1 frigo jour2 et** 0 frigo jour3) (ou)
   — P(0 frigo jour1 **et** 0 frigo jour2 **et 1 frigo jour3**)
   = (0.4 * 0.2 * 0.2) + (0.2 * 0.4 * 0.2) + (0.2 * 0.2 * 0.4)
   = 3 * (0.4 * 0.2 * 0.2)
   = 3 * 0.016
   = 0.048 = **4.8%**

1.8 Exercice 12

On jette 3 fois un dé "normal". Calculez :

1. La probabilité d'obtenir le point 6 en exactement 1 fois
2. La probabilité d'obtenir le point 6 au moins une fois
3. La probabilité d'obtenir 3 points différents

1.8.1 Solution ($^{25}/_{72}$;$^{91}/_{216}$;$^{5}/_{9}$)

1. **P(Une fois 6 en 3 coups)**
   3 cas possibles :
   — P(**6 coup1 et** !6 coup2 **et** !6 coup3) (ou)
   — P(!6 coup1 **et 6 coup2 et** !6 coup3) (ou)
   — P(!6 coup1 **et** !6 coup2 **et 6 coup3**)
   = 3 * ($^1/_6$ * $^5/_6$ * $^5/_6$)
   = 3 * $^{25}/_{216}$ = **$^{25}/_{72}$**
2. **P(6 au moins une fois)**
   = 1 – P(Jamais 6)
   = 1 – ($^5/_6$ * $^5/_6$ * $^5/_6$)
   = 1 – $^{125}/_{216}$
   = **$^{91}/_{216}$**
3. **P(3 différents)**
   = P(1er = 1er **et** 2ème != 1er **et** 3ème != deux premiers)
   = $^6/_6$ * $^5/_6$ * $^4/_6$
   = 1 * $^{20}/_{36}$ = **$^5/_9$**

1.9 Exercice 13

On tire trois cartes avec remise intermédiaire dans un jeu de 52 cartes. Calculez :

1. La probabilité que la deuxième soit un Roi et la troisième différente d'un Roi
2. La probabilité qu'exactement deux des cartes soient un Roi
3. La probabilité de tirer 3 fois la même carte

1.9.1 Solution ($^{12}/_{169}$; $^{36}/_{2197}$; $^{1}/_{2704}$)

1. **P(carte2 = Roi et carte3 != Roi)**
   = P(1ère = peu importe **et** 2ème = Roi **et** 3ème != Roi)
   = $^{52}/_{52}$ * $^{4}/_{52}$ * $^{48}/_{52}$
   = 1 * $^{1}/_{13}$ * $^{12}/_{13}$ = **$^{12}/_{169}$**
2. **P(Deux des cartes sont un Roi)**
   3 cas possibles :
   — P(Roi carte1 **et** Roi carte2 **et !Roi carte3**) (ou)
   — P(Roi carte1 **et !Roi carte2 et** Roi carte3) (ou)
   — P(**!Roi carte1 et** Roi carte2 **et** Roi carte3)
   = 3 * ($^{4}/_{52}$ * $^{4}/_{52}$ * $^{48}/_{52}$)
   = 3 * ($^{1}/_{13}$ * $^{1}/_{13}$ * $^{12}/_{13}$)
   = 3 * $^{12}/_{2197}$ = **$^{36}/_{2197}$**
3. **P(3 fois la même carte)**
   = P(carte1 = carte2 = carte3)
   = P(1ère = peu importe **et** 2ème = 1ère **et** 3ème = 1ère)
   = $^{52}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$
   = 1 * $^{1}/_{52}$ * $^{1}/_{52}$
   = $(^{1}/_{52})^2$ = **$^{1}/_{2704}$**

1.10 Exercice 16

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes sans remise intermédiaire :

1. La première carte est un Roi. Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit encore un Roi ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux Rois ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 Roi ?

1.10.1 Solution ($^{3}/_{52}$; $^{1}/_{221}$; $^{33}/_{221}$)

1. **P(2ème carte est un Roi sachant que la 1ère est un Roi)**
   = P(Roi carte2 | Roi carte1)
   = $^{4}/_{52}$ – $^{1}/_{52}$
   = **$^{3}/_{52}$**
2. **P(Deux Rois)**
   = P(Roi carte1 **et** Roi carte2)
   = $^{4}/_{52}$ * $^{3}/_{51}$
   = $^{1}/_{13}$ * $^{1}/_{17}$ = **$^{1}/_{221}$**
3. **P(Au moins 1 Roi)**
   = P(1ère pas Roi) **et** P(2ème pas Roi **sachant que** 1ère pas Roi)
   = 1– P(Aucun Roi)
   P(Aucun Roi)
   = P(1ère pas Roi) * P(2ème pas Roi **sachant que** 1ère pas Roi)
   = P(1ère !Roi) * P(2ème !Roi | 1ère !Roi)
   = $^{48}/_{52}$ * $^{47}/_{51}$
   1 – P(Aucun Roi)
   = 1 – $^{48}/_{52}$ * $^{47}/_{51}$ = **$^{33}/_{221}$**

1.11 Exercice 17

Trois personnes tirent sans remise un billet au hasard dans un ensemble de billets numérotés de 1 à 20. Quelle est la probabilité que les trois billets soient impairs ?

1.11.1 Solution (9%)

P(Billet1 impair **et** Billet2 impair **et** Billet3 impair)

3 conditions à respecter :
- P(Billet 1 impair) (et)
- P(Billet 2 impair **sachant que** Billet 1 impair) (et)
- P(Billet 3 impair **sachant que** Billet 1 impair **et** Billet 2 impair)

= P(Billet1 impair) * P(Billet2 impair | Billet1 impair) * P(Billet3 impair | Billet1 impair * Billet2 impair)

= $^{10}/_{20}$ * $^{9}/_{20}$ * $^{8}/_{20}$

= ½ * $^{9}/_{20}$ * ⅖ = $^{9}/_{100}$ = **9%**

1.12 Exercice 18

Un sac contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quatre personnes A, B, C et D tirent dans cet ordre une boule sans la remettre dans le sac. La première personne qui tire une boule blanche gagne le jeu. Calculez la probabilité de gagner le jeu pour chacune des personnes.

1.12.1 Solution ($^{3}/_{10}$;$^{7}/_{30}$;$^{21}/_{120}$;⅛)

1. **P(A gagne)**
   = **$^{3}/_{10}$** (3 boules blanches sur (3+7) boules)
2. **P(B gagne)**
   = P(A noire **et** B blanche)
   = P(A noire) * P(B blanche | A noire)
   = $^{7}/_{10}$ * $^{3}/_{9}$
   = $^{7}/_{10}$ * ⅓ = **$^{7}/_{30}$**
3. **P(C gagne)**
   = P(A noire **et** B noire **et** C blanche)
   = P(A noire) * P(B noire | A noire) * P(C blanche | A noire **et** B noire)
   = $^{7}/_{10}$ * $^{6}/_{9}$ * ⅜
   = $^{7}/_{10}$ * ⅓ * ¾ = **$^{21}/_{120}$**
4. **P(D gagne)**
   = P(A noire **et** B noire **et** C noire **et** C blanche)
   = P(A noire) * P(B noire | A noire) * P(C noire | A noire **et** B noire) * P(D blanche | A noire **et** B noire **et** C noire)
   = $^{7}/_{10}$ * $^{6}/_{9}$ * ⅝ * $^{3}/_{7}$ = **⅛**

1.13 Exercice 21

Dans un certain pays, la population en âge de travail est répartie de la manière suivante :
- 51% sont des hommes possédant un emploi
- 3% sont des hommes au chômage
- 41% sont des femmes possédant un emploi
- 5% sont des femmes au chômage

Calculez la probabilité :

1. Qu'une personne choisie au hasard soit un homme
2. Qu'une personne choisie au hasard soit un chômeur
3. Qu'un chômeur choisi au hasard soit un homme
4. Qu'un homme choisi au hasard soit un chômeur

1.13.1 Solution (54% ;8% ;⅜ ;$^{1}/_{18}$)

	Homme	Femme	Total
Emploi	51%	41%	92%
Chômage	3%	5%	8%
Total	54%	46%	100%

1. **P(Homme)**
   = 51% + 3% = **54%**

2. **P(Chômeur)**
   = 3% + 5% $=$ **8%**
3. **P(Homme | Chômeur)**
   = $\frac{\text{P(Homme et Chômeur)}}{\text{P(Chômeur)}}$
   = $\frac{3\%}{8\%} = \mathbf{3/8}$
4. **P(Chômeur | Homme)**
   = $\frac{\text{P(Chômeur et Homme)}}{\text{P(Homme)}}$
   = $\frac{3\%}{54\%}$
   = $3/54 = \mathbf{1/18}$

1.14 Exercice 22

On dispose de 2 urnes **U1** *(5 boules rouges et 3 boules blanches)* et **U2** *(4 boules rouges et 6 boules blanches)*. Des tirages sont effectués suivant les règles suivantes :

Si une boule rouge a été tirée alors le tirage suivant se fait dans la même urne, mais si une boule blanche a été tirée, alors le tirage suivant se fera dans l'autre urne. Le premier tirage se fait dans U1.

Si les tirages se font sans remise, quelles sont les probabilités d'obtenir :

1. Trois boules rouges en 3 tirages
2. Trois boules blanches en 3 tirages
3. Une boule blanche suivie de 2 boules rouges en 3 tirages
4. Une boule rouge en 3ème sachant que les 2 premières sont blanches

1.14.1 Solution ($5/28$; $9/140$; $1/20$; $5/7$)

(Voir Figure 2)

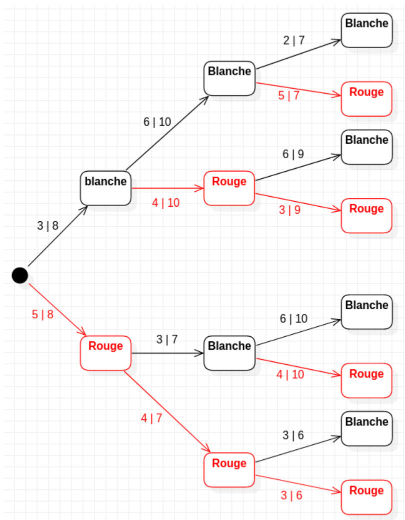

FIGURE 2 – Chapitre 1 Exercice 22 Schéma

1. **P(Trois boules rouges en 3 tirages)**
   = P(Boule1 rouge U1 **et** Boule2 rouge U1 **et** Boule3 rouge U1)
   = P(Boule1 rouge U1) * P(Boule2 rouge U1 | Boule1 rouge U1) * P(Boule3 rouge U1 | Boule1 rouge U1 **et** Boule2 rouge U1)
   = $5/8 * 4/7 * 3/6 = \mathbf{5/28}$
2. **P(Trois boules blanches en 3 tirages)**
   = P(Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche en U2 **et** Boule3 blanche en U1)
   = P(Boule1 blanche U1) * P(Boule2 blanche U2 | Boule1 blanche U1) * P(Boule3 blanche U1 | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche U2)
   = $3/8 * 6/10 * 2/7 = \mathbf{9/140}$

3. **P(Une boule blanche suivie de 2 boules rouges en 3 tirages)**
   = P(Boule1 blanche U1 **et** Boule2 rouge U2 **et** Boule3 rouge U2)
   = P(Boule1 blanche U1) * P(Boule2 rouge U2 | Boule1 blanche U1) * P(Boule3 rouge U2 | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 rouge U2)
   = $\frac{3}{8}$ * $\frac{4}{10}$ * $\frac{3}{9}$ = $\mathbf{\frac{1}{20}}$
4. **P(Une boule rouge en 3ème sachant que les 2 premières sont blanches)**
   = P(Boule3 rouge | Boule1 blanche U1 **et** Boule2 blanche U2)
   = $\mathbf{\frac{5}{7}}$ (On connaît les valeurs de Boule1 et Boule2)

1.15 Exercice 24

Soient deux dés **A** et **B** ayant respectivement 4 faces rouges et 2 blanches, 4 faces blanches et 2 rouges.

On choisit un des deux dés avec une pièce tombant deux fois plus souvent sur pile que sur face : pile donne le dé **A** et face donne le dé **B**. Ensuite on jette le dé choisi et on regarde la couleur obtenue.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?
3. On répète tout le processus 3 fois de suite ? Quelle est la probabilité d'obtenir rouge aux 3 lancés si on a obtenu rouge aux 2 premiers lancers ?

1.15.1 Solution ($\frac{5}{9}$;$\frac{4}{9}$;$\frac{5}{9}$)

`(Voir Figure 3)`

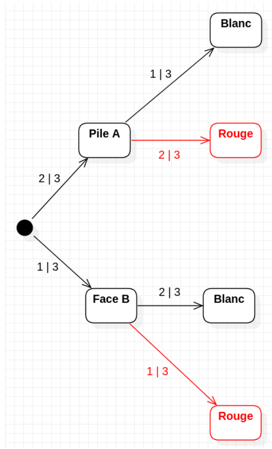

FIGURE 3 – Chapitre 1 Exercice 24 Schéma

1. **P(Rouge)**
   = ($\frac{2}{3}$ * $\frac{2}{3}$) + ($\frac{1}{3}$ * $\frac{1}{3}$) = $\mathbf{\frac{5}{9}}$
2. **P(Blanche)**
   = ($\frac{2}{3}$ * $\frac{1}{3}$) + ($\frac{1}{3}$ * $\frac{2}{3}$) = $\mathbf{\frac{4}{9}}$
   Alternative : P(Blanche) = 1 – P(Rouge) (On peut utiliser P(Rouge) calculé à l'exercice 1)
   = 1 – $\frac{5}{9}$ = $\mathbf{\frac{4}{9}}$
3. **P(Rouge au 3ème lancer sachant que Rouge aux 2 premiers lancers)**
   = P(Rouge lancer3 | Rouge lancer1 **et** Rouge lancer2)
   = P(Rouge) (La probabilité Rouge au 3ème lancer est la même que la probabilité Rouge tout court)
   = $\mathbf{\frac{5}{9}}$

1.16 Exercice 25

Un fabricant de baromètres a testé un nouveau modèle très simple, et a constaté que celui-ci était de temps en temps inexact :

Pour 10% des jours où il pleuvait, il affichait *beau temps*, et pour 30% des jours où il faisait beau, il affichait *pluie*.

Sachant que le baromètre a été vendu dans une région où il pleut en moyenne jour sur 5 :

1. Quelle est la probabilité que le baromètre indique *pluie* ?
2. Quelle est la probabilité que l'indication du baromètre soit correcte ?

1.16.1 Solution ($^{21}/_{50}$;$^{37}/_{50}$)

(Voir Figure 4)

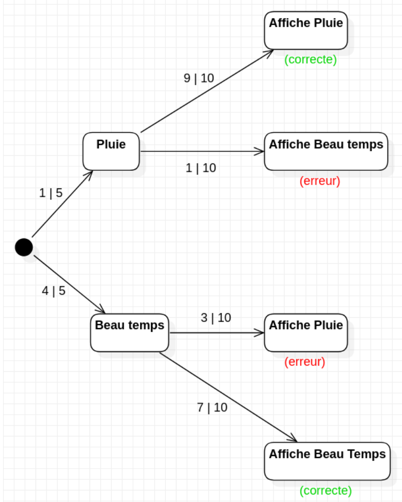

FIGURE 4 – Chapitre 1 Exercice 25 Schéma

1. **P(Affiche Pluie)**
   = P(Pluie **et** Affiche Pluie) **ou** P(Beau temps **et** Affiche Pluie)
   = ($^1/_5$ * $^9/_{10}$) + ($^4/_5$ * $^3/_{10}$) $=$ $\mathbf{^{21}/_{50}}$
2. **P(Indication correcte)**
   = P(Pluie **et** Affiche Pluie) **ou** P(Beau temps **et** Affiche Beau temps)
   = ($^1/_5$ * $^9/_{10}$) + ($^4/_5$ * $^7/_{10}$) $=$ $\mathbf{^{37}/_{50}}$

1.17 Exercice 26

Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut périlleux que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10. Sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas. Calculez :

1. La probabilité que le patineur réussisse le second saut
2. La probabilité que le patineur rate le deuxième saut sachant que le 1er était réussi
3. La probabilité que le patineur réussisse les deux sauts

1.17.1 Solution (89% ;10% ;$^{171}/_{200}$)

(Voir Figure 5)

1. **P(Deuxième saut réussi)**
   = P(Saut1 réussi **et** Saut2 réussi) **ou** P(Saut1 raté **et** Saut2 réussi)
   = (95% * 92%) + (5% * 70%) $=$ **89%**
2. **P(Deuxième saut raté sachant que Premier saut réussi)**
   = P(Saut2 raté | Saut1 réussi) $=$ **10%**
3. **P(Deux sauts réussis)**
   = P(Saut1 réussi **et** Saut2 réussi **sachant que** Saut1 réussi)
   = 95% * 90% $=$ $\mathbf{^{171}/_{200}}$

1.18 Exercice 27

Marcel travaille 5 jours par semaine. Chaque jour, il quitte habituellement son bureau vers 17h et se rend à pied à son domicile. Quand il passe devant le Café des Sports, il y aperçoit une fois sur deux son copain Antoine avec lequel il ne manque jamais de déguster une de ses bières préférées. Plus loin, au Café de la Gare, il rencontre également une fois sur deux son autre copain Émile, avec lequel il ne peut non plus refuser de faire la causette devant un autre verre. Évidemment, les rencontres avec Antoine ou Émile sont indépendantes les unes des autres : Parfois il rencontre les deux, parfois un seul, et parfois aucun des deux. Enfin, quand il arrive devant chez lui, il sort de sa poche un trousseau de clés, dont une seule ouvre la porte d'entrée.

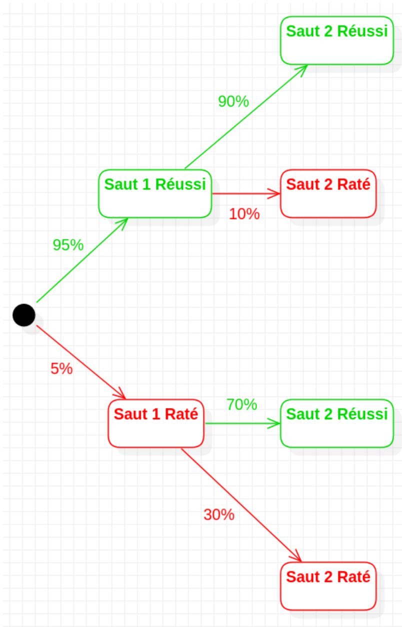

FIGURE 5 – Chapitre 1 Exercice 26 Schéma

Quand Marcel n'a rien bu, ses pensées sont lucides et il ouvre la porte immédiatement avec la bonne clé.

Quand il a bu un verre de bière, il ne reconnaît pas directement la bonne clé, ainsi il les essaie toute les trois une par une jusqu'à ce que la porte s'ouvre.

Enfin, quand il a bu deux bières, il ne réfléchit plus à ce qu'il fait, et après chaque essai de clé, il secoue chaque fois son trousseau et réessaie jusqu'à ce que la porte s'ouvre enfin.

Calculez la probabilité que :

1. Marcel ouvre la porte du premier coup à la fin d'une journée de travail
2. Marcel ouvre la porte en deux essais à la fin d'une journée de travail
3. Marcel ouvre la porte en au plus deux essais à la fin d'une journée de travail
4. Marcel ouvre la porte en au moins trois essais à la fin d'une journée de travail

1.18.1 Solution (½ ;²⁄₉ ;¹³⁄₁₈ ;⁵⁄₁₈)

(Voir Figure 6)

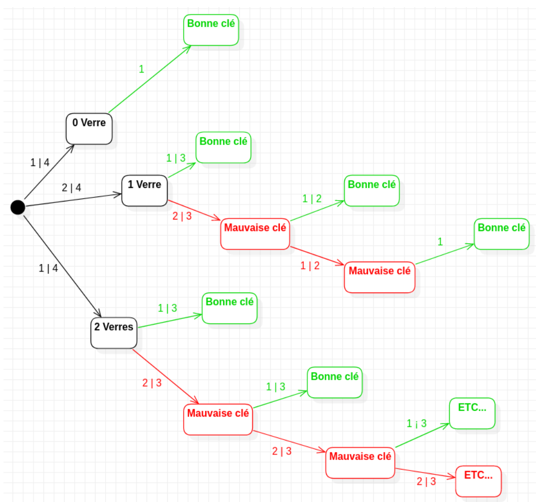

FIGURE 6 – Chapitre 1 Exercice 27 Schéma

1. **P(Bonne clé premier coup)**

   3 possibilités :
   — P(Bonne clé 1er coup **sachant que** pas de verre bu) (ou)

— P(Bonne clé 1er coup **sachant que** 1 verre bu) (ou)
— P(Bonne clé 1er coup **sachant que** 2 verres bus)

= (¼ * 1) + (²⁄₄ * ⅓) + (¼ * ⅓) $= {}^{1}/_{2}$

2. **P(Bonne clé en deux essais)**

   2 possibilités :
   — P(Bonne clé en deux essais **sachant que** (1 verre bu **et** 1 mauvaise clé)) (ou)
   — P(Bonne clé en deux essais **sachant que** (2 verres bus **et** 1 mauvaise clé))

   = (²⁄₄ * ⅔ * ⅓) + (¼ * ⅔ * ⅓) $= {}^{2}/_{9}$

3. **P(Bonne clé en deux essais max)**
   = P(Bonne clé premier coup) + P(Bonne clé en deux essais)
   = réponse 1 + réponse 2
   = ½ + ²⁄₉ $= {}^{13}/_{18}$

4. **P(Bonne clé en 3 essais min)**
   = 1 – P(Bonne clé en deux essais max)
   = 1 – réponse 3
   = 1 – ¹³⁄₁₈ $= {}^{5}/_{18}$

1.19 Exercice 31

Une personne envisage d'acheter une voiture d'une certaine marque et apprend via un magazine spécialisé que 5% de ces véhicules ont un problème de transmission. Un mécanicien vient apporter son aide pour juger de l'état de son véhicule :

Sur toutes les autos défectueuses qu'il a examiné dans le passé, il a décelé l'état défectueux dans 90% des cas.

Pour les bonnes voitures son jugement est également bon : Il les déclare "bonne" dans 80% des cas.

Quelle est la probabilité que la voiture que la personne envisage d'acheter ait un problème de transmission :

1. Avant d'avoir l'avis du mécanicien
2. Si le mécanicien déclare le véhicule "défectueux"
3. Si le mécanicien déclare le véhicule "en bon état"

1.19.1 Solution (5% ;⁹⁄₄₇ ;¹⁄₁₅₃)

(Voir Figure 7)

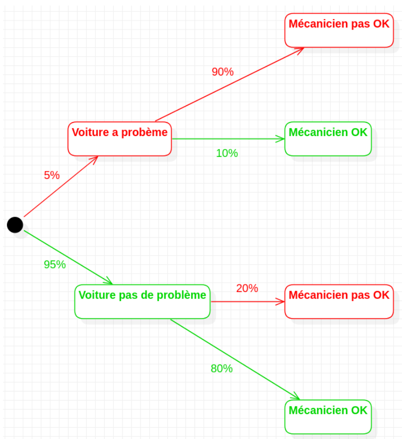

FIGURE 7 – Chapitre 1 Exercice 31 Schéma

1. **P(Problème sans avis)** $= 5\%$
2. **P(Problème si Mécanicien pas OK)**
   = P(Problème | Mécanicien !OK)
   $= \dfrac{\text{P(Problème \textbf{et} Mécanicien !OK)}}{\text{P(Mécanicien !OK)}}$
   $= \dfrac{5\% * 90\%}{(5\% * 90\%) + (95\% * 20\%)}$ car P(Mécanicien !OK) = P(Problème et !OK) ou P(!Problème et !OK)
   $= \dfrac{9/200}{47/200} = {}^{9}/_{47}$

3. **P(Problème si Mécanicien OK)**
   = P(Problème | Mécanicien OK)
   $= \frac{\text{P(Problème et Mécanicien OK)}}{\text{P(Mécanicien OK)}}$
   $= \frac{5\% * 10\%}{(5\% * 10\%) + (95\% * 80\%)}$ car P(Mécanicien OK) = P(Problème et OK) ou P(!Problème et OK)
   $= \frac{1/200}{153/200} = \mathbf{1/153}$

1.20 Exercice 32

Dans une usine, trois machine M1, M2 et M3 fabriquent des stylos.

Par jour, la machine M1 en fabrique 1000 dont 3% sont défectueux, la machine M2 en fabrique 2000 dont 2% sont défectueux et la machine M3 en fabrique 3000 dont 1% sont défectueux :

1. En fin de journée, on choisit un stylo au hasard parmi les 6000 stylos produits. Quelle est la probabilité de tirer un stylo défectueux ?
2. On constate que le stylo choisit est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de M2 ?

1.20.1 Solution (1/60 ; 2/5)

(Voir Figure 8)

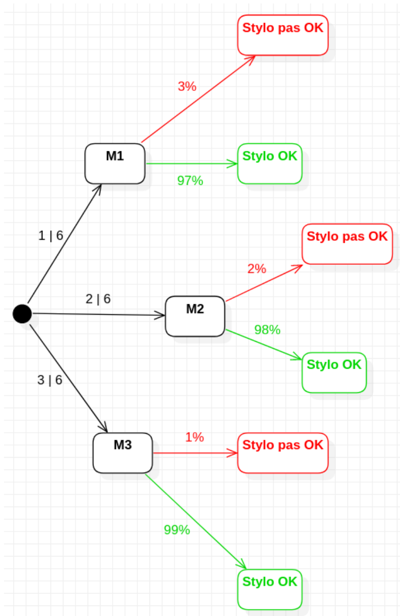

FIGURE 8 – Chapitre 1 Exercice 32 Schéma

1. **P(Tirer stylo défectueux)**
   3 possibilités :
   — P(Stylo !OK | M1) (ou)
   — P(Stylo !OK | M2) (ou)
   — P(Stylo !OK | M3)
   = (1/6 * 3%) + (2/6 * 2%) + (3/6 * 1%)
   = 1/200 + 1/150 + 1/200 $= \mathbf{1/60}$
2. **P(M2 sachant que Stylo défectueux)**
   = P(M2 | Stylo !OK)
   $= \frac{\text{P(M2) * P(Stylo !OK | M2)}}{\text{P(Stylo !OK)}}$
   $= \frac{2/6 * 2\%}{\text{réponse 1}}$
   $= \frac{1/150}{1/60} = \mathbf{2/5}$