2. Signaux périodiques

2.1. Propriétés :

2.1.1. Généralités :

$f(t) = A.\sin(\omega.t + \varphi)$

$\omega = 2.\pi.\nu$ = vitesse angulaire [rad/s]

ν = fréquence [Hz]

λ = longueur d'onde [m] (=vitesse de propagation/ν)

Les sons sont des ondes qui se propagent (par compressions) dans l'air. La vitesse de propagation du son au sol est de 340 m/s (ν = 340Hz $\rightarrow$ λ = 1m).

2.1.2. Les ondes électromagnétiques :

$$v_{propagation(vide)} = v_{lumière(vide)} = C = 3.10^8 m/s$$

ondes radios : 200 kHz – 800 MHz
micro-ondes : 800 MHz – 100 GHz

IR (infra-rouge)	:	$< 0,8.10^{-6}$ m
Visible	:	$0,8.10^{-6} - 0,4.10^{-6}$ m
UV (ultra-violet)	:	$> 0,4.10^{-6}$ m

exs :

$0,6.10^{-6}$ m = $\lambda_{(lumière)}$

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{C}{\lambda} = \frac{3.10^8}{6.10^{-7}} = 5.10^{14} Hz$$

2.1.3. Bande passante :

Une voie de transmission (réception) ne laisse passer que certaines fréquences

exs :

oreille humaine (son) : 20 Hz – 20 kHz
téléphone : 300 Hz – 3400 Hz

2.2. Combinaison de signaux et modulation :

2.2.1. Utilité :

- Transporter le signal dans un domaine de fréquences adapté au support
- Combiner différentes techniques pour augmenter le débit
- Protection contre le bruit

2.2.2. Modulation d'amplitude (AM) :

$f(t) = A.\cos(\omega.t)$ et $g(t) = A.\cos(2.\omega.t)$

$f(t) + g(t) = 2.A.\cos\left(\frac{\omega 1 + \omega 2}{2}\right)t.\cos\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right)t$ avec $\omega_P = \frac{\omega 1 + \omega 2}{2}$ et $\omega_{mod} = \frac{\omega 1 - \omega 2}{2}$

$f(t) + g(t) = A_{mod}(t).\cos(\omega_P.t)$ avec $A_{mod}(t) = 2.A.\cos(\omega_{mod}.t)$

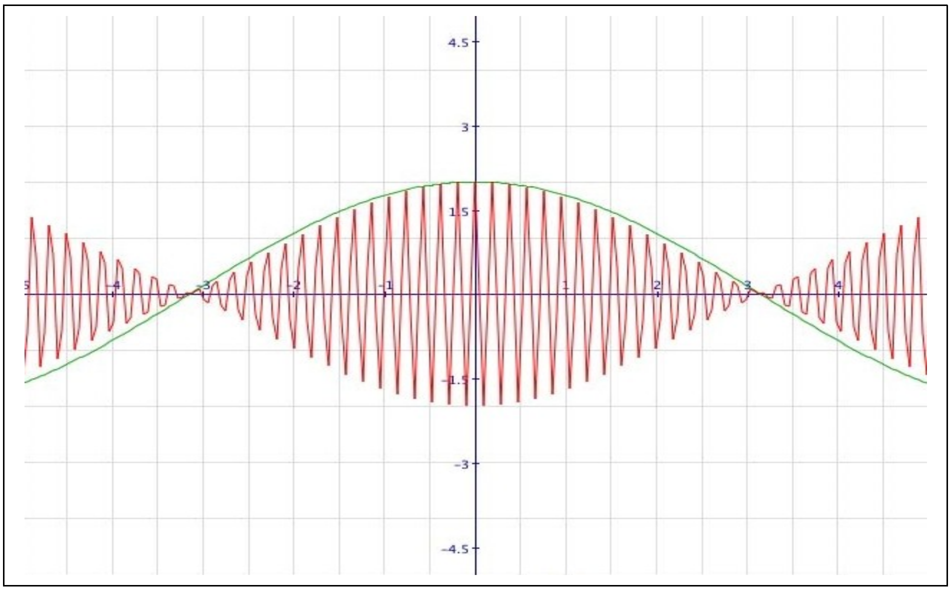
ω_P est la vitesse angulaire de la porteuse (fréquence à 2π près) ($\rightarrow$ $\frac{\omega_P}{2\pi} = \nu_P$).

ω_{mod} est la « fréquence » de modulation.

$\omega 1 + \omega 2 = 2.\omega_p$
$\omega 1 - \omega 2 = 2.\omega_{mod}$
$\omega 1 = \omega_p + \omega_{mod}$
$\omega 2 = \omega_p - \omega_{mod}$

Si on prend ω_{mod} très inférieur à ω_p, on a $\omega 1 \cong \omega 2$.
En radio, on utilise par exemple pour ν_p=100 MHz ν_{mod}=1k Hz.

Tracé : $\cos(200.2) + \cos(99.x)$ (pour la modulation : $2.\cos\left(\frac{x}{2}\right)$)



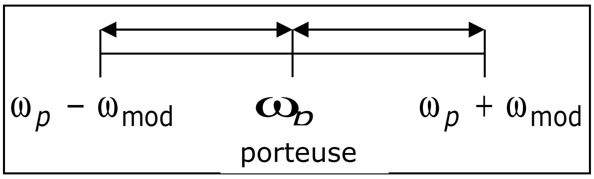
On peut également moduler en amplitude un signal en utilisant un signal modulant digital (binaire).

En pratique : $A_{mod}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{mod}} A.\omega_{mod}.\cos(\omega_{mod}.t + \varphi.\omega_{mod})$

On obtient :

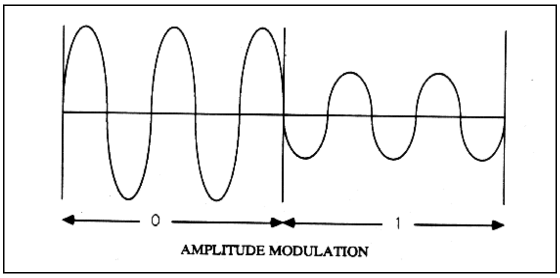
$$A_{mod}(t).\cos(\omega.p.t) = A_0.\cos(\omega.p.t) + \sum_{\omega_{mod}} A.\omega_{mod}.\cos(\omega_{mod}.t + \varphi.\omega_{mod}).\cos(\omega.p.t)$$

$$A_0.\cos(\omega.p.t) + \frac{1}{2}\sum_{\omega_{mod}} A.\omega_{mod}.\cos[(\omega_{mod} + \omega_p).t + \varphi.\omega_{mod}] + \frac{1}{2}\sum_{\omega_{mod}} A.\omega_{mod}.\cos[(\omega_{mod} - \omega_p).t - \varphi.\omega_{mod}]$$



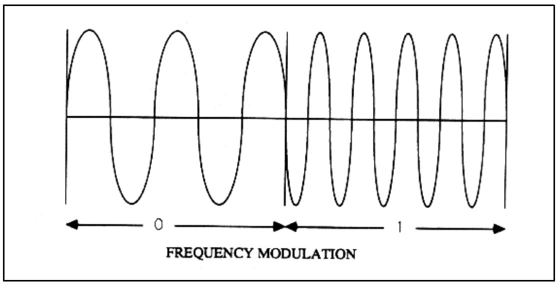
Toute l'information contenue dans la signal modulant sera transmise dans 2 bandes latérales situées autour de la porteuse.
On peut également se passer de l'une des 2 bandes, on parlera alors de modulation en bande latérale unique (BLU).

On définit la largeur de bande : $\Delta\nu = 2.\nu.\mathrm{mod}(\max) = 2.2\pi.\omega_{mod(max)}$
ex : 2x5 KHz (transmission musicale)
La démodulation s'effectue à l'aide d'un ampli-mélangeur et de filtres laissant passer certains domaines de fréquences.



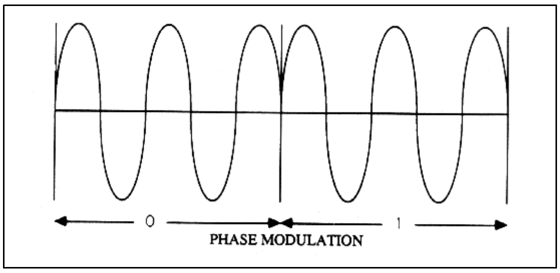
2.2.3. Modulation de fréquence (FM) :

$f(t) = A.\cos(\omega.t)$ avec $\omega = \omega(t) = \omega_p.(\cos(\omega_{mod}.t))$



2.2.4. Modulation de phase (PM) :

$f(t) = A.\cos(\omega_p.t + \varphi(t))$ avec $\varphi(t) = \sin(\omega_{mod}.t)$



On peut utiliser 4 valeurs (ou plus) pour la phase.
ex avec 4 valeurs : 0 (00), π /2 (01), π (11), 3π /2 (10)
ex avec 8 valeurs : 0, π /4, π /2, 3π /4, π , 5π /4, 3π /2, 7π /4

2.2.5. Combinaison de AM et PM :

$f(t) = A.\mathrm{mod}(t).\cos(\omega_p.t + \varphi(t))$

On combine la modulation d'amplitude avec des décalages de phases multiples de π /2. Cette technique s'appelle QAM (Quadrature Amplitude Modulation). Une technique très employée (dans les modems) utilise 4 valeurs d'amplitude et 4 valeurs de phase (QAM16), ce qui permet d'avoir 16 états (4 bits).

ex :

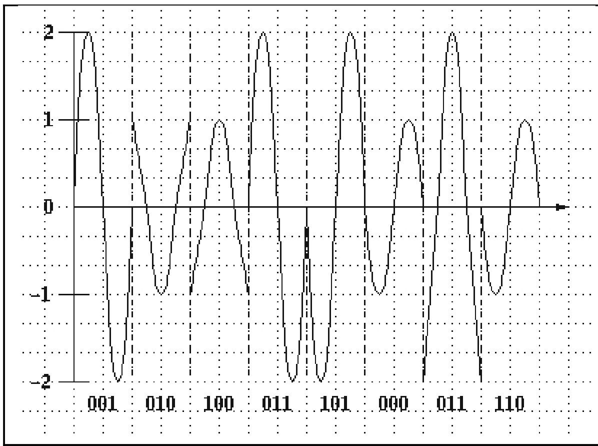
QAM8 :	2 valeurs d'amplitude (1 & 2) 4 valeurs de phase (φ=0,π /2,π ,3π /2)

Supposons le signal digital suivant (en entrée) à transmettre :

001 010 100 011 101 000 011 110

On prend la convention suivante :

Binaire	Amplitude (A)	Changement de φ
000	1	0
001	2	0
010	1	$\pi/2$
011	2	$\pi/2$
100	1	π
101	2	π
110	1	$3\pi/2$
111	2	$3\pi/2$



001 → 010 : A/2 & $\Delta\varphi=\pi/2$

010 → 100 : $\Delta\varphi=\pi$

100 → 011 : A*2 & $\Delta\varphi=\pi/2$

011 → 101 : $\Delta\varphi=\pi$

101 → 000 : A/2

000 → 011 : A*2 & $\Delta\varphi=\pi/2$

011 → 110 : A/2 & $\Delta\varphi=3\pi/2$

2.3. Séries de Fourrier :

2.3.1. Théorème :

Tout signal périodique peut être représenté sous la forme d'une série infinie de termes composés de sinusoïdes

2.3.2. Ecriture mathématique :

$$f(t) = A_0 + \sum_{x=1}^{\infty} A_n.\cos(n.\omega.t) + \sum_{x=1}^{\infty} B_n.\sin(n.\omega.t)\ \mathrm{f}$$
$$= A_0 + A_1.\cos(\omega.t) + B_1.\sin(\omega.t) + A_2.\cos(2.\omega.t) + B_2.\sin(2.\omega.t) + \ldots$$

avec $A_0 = \frac{1}{T}.\int_0^T x(t).dt$

$$A_1 = \frac{2}{T}.\int_0^T x(t).\cos(n.\omega.t).dt$$

$$B_1 = \frac{2}{T}.\int_0^T x(t).\sin(n.\omega.t).dt$$

T la période du signal

$x(t)$ la fonction décrivant la forme du signal

2.3.3. Calculs des coefficients A et B :

Formules utiles :

$\omega = 2.\pi.\nu = \frac{2.\pi}{T}$

$\frac{1}{\omega} = \frac{T}{2.\pi}$

$\frac{2}{T}.\frac{1}{\omega} = \frac{2}{T}.\frac{T}{2.\pi} = \frac{1}{\pi}$

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{T}.\int_0^{T/2} 1.dt + \frac{1}{T}.\int_{T/2}^{T} (-1).dt \\
&= \frac{1}{T}.[t]_0^{T/2} - \frac{1}{T}.[t]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{T}.\left(\frac{T}{2} - 0\right) - \frac{1}{T}.\left(T - \frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{1}{T}.\left(\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{T}.\int_0^{T/2} 1.\cos(\omega.t).dt + \frac{2}{T}.\int_{T/2}^{T} (-1).\cos(\omega.t).dt \\
&= \frac{2}{T}.\left[\frac{\sin(\omega.t)}{\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{2}{T}.\left[\frac{\sin(\omega.t)}{\omega}\right]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{2}{T.\omega}.\left[\sin\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2}{T.\omega}.\left[\sin\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right)\right]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{\pi}.(\sin(\pi) - 0) - \frac{1}{\pi}.(\sin(2.\pi) - \sin(\pi)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Si on calculait A_2, on trouverait des contributions du style $\sin(n.\pi)$ toutes nulles. Donc, $A_2=0$, de même pour tout A_n.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{T}.\int_0^{T/2} \sin(\omega.t).dt - \frac{2}{T}.\int_{T/2}^{T} \sin(\omega.t).dt \\
&= \frac{2}{T}.\frac{1}{\omega}.\left[-\cos\left(\frac{2.\pi}{T}.t\right)\right]_0^{T/2} + \frac{2}{T}.\frac{1}{\omega}.\left[\cos\left(\frac{2.\pi}{T}.t\right)\right]_{T/2}^{T} \\
&= -\frac{1}{\pi}.(\cos(\pi) - \cos(0)) + \frac{1}{\pi}.(\cos(2.\pi) - \cos(\pi)) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{\pi}.\frac{1}{2}.\left[-\cos\left(\frac{4.\pi}{T}.t\right)\right]_0^{T/2} - \frac{1}{\pi}.\frac{1}{2}.\left[-\cos\left(\frac{4.\pi}{T}.t\right)\right]_{T/2}^{T} \\
&= -\frac{1}{2.\pi}.(\cos(2.\pi) - \cos(0)) + \frac{1}{2.\pi}.(\cos(4.\pi) - \cos(2.\pi)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Si on calculait d'autres coefficients d'indice pair B_n, on trouverait 0. Donc, $B_2=B_4=B_6=\ldots=0$

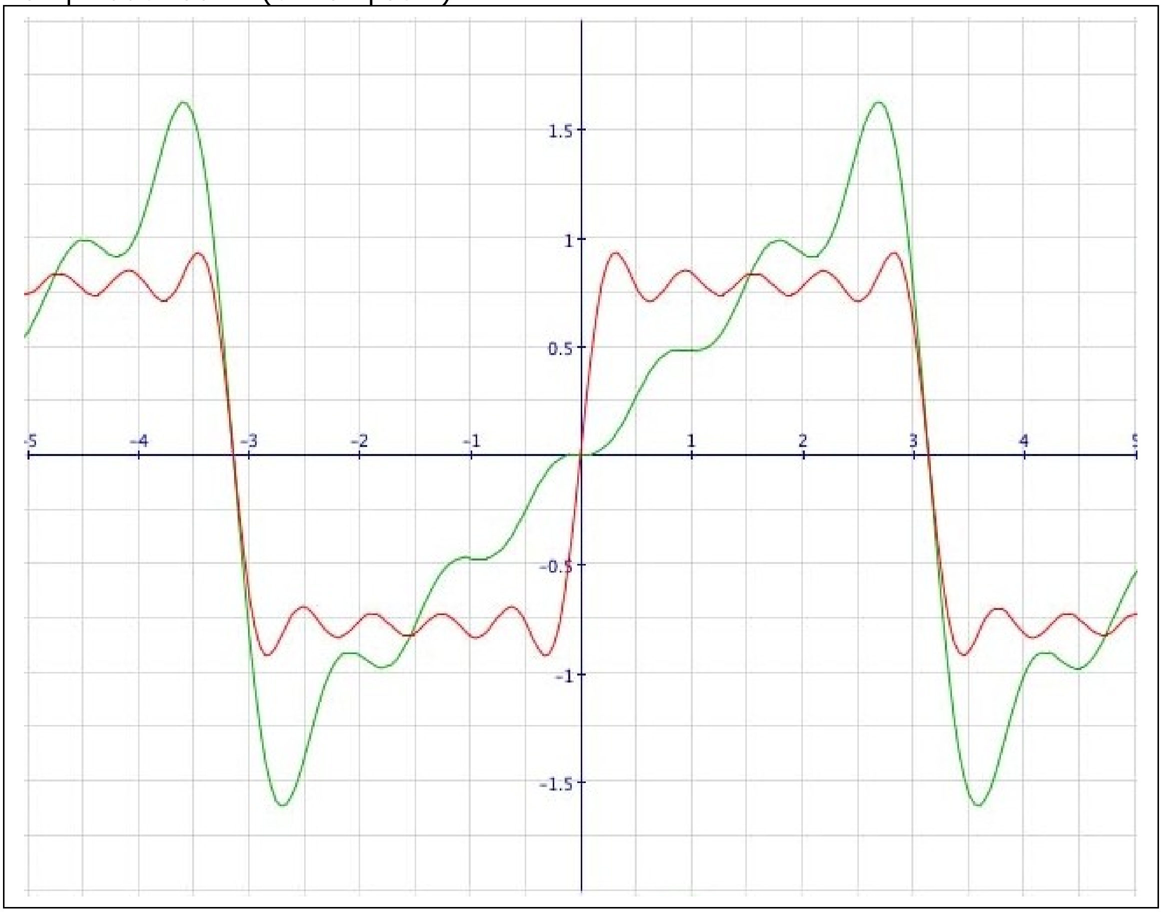
Si on calculait les coefficients B_n d'indice impair, on trouverait $B_n = \frac{4}{\pi}.\frac{1}{n}$

exs : $B_1 = \frac{4}{\pi}$, $B_3 = \frac{4}{\pi}.\frac{1}{3}$, $B_5 = \frac{4}{\pi}.\frac{1}{5}$, ...

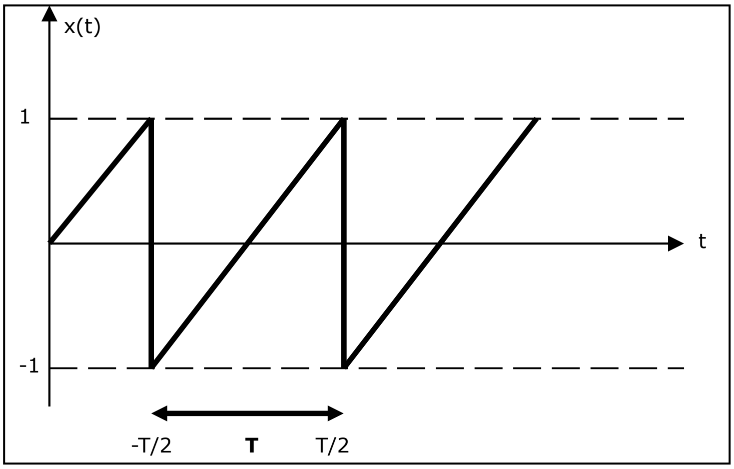
Conclusion :

$f(t) = \frac{4}{\pi}.A.\left(\sin(\omega.t) + \frac{1}{3}.\sin(3.\omega.t) + \frac{1}{5}.\sin(5.\omega.t) + \ldots\right)$

L'amplitude vaut A (et non pas 1).



2.3.4. Autre exemple : signal en dents de scie



$x(t) = \frac{2.t}{T}$

$$A_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2.t}{T}.dt$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-T/2}^{T/2}$$
$$= \frac{2}{T^2} \cdot \left[\frac{T^2}{8} - \frac{T^2}{8}\right]$$

On trouve $A_n=0$ $\forall$ n et $B_n = \frac{2.A}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1}$

$$f(t) = \frac{2.A}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega.t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2.\omega.t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3.\omega.t) - \ldots\right)$$

2.3.5. Transformées de Fourrier :

Rappel :

- On peut utiliser le formalisme des séries de Fourrier si le signal est périodique.
- Si on veut traiter un signal non périodique, on utilise les « intégrales de Fourrier ».

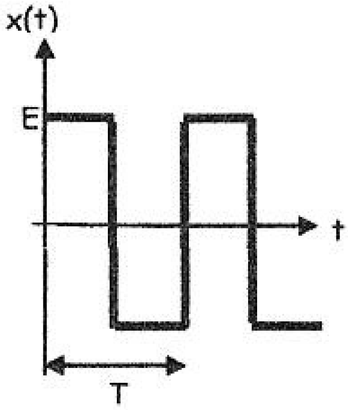
$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega).\sin(\omega.t).d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega).\cos(\omega.t).d\omega$ avec $A(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\sin(\omega.t).dt$ et

$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos(\omega.t).dt$

Dans la théorie des séries de Fourrier, on fait une sommation infinie sur des valeurs discrètes (valeurs de ω multiples). Dans la théorie des intégrales de Fourrier, on a un spectre continu de fréquences (vitesse angulaire), d'où l'utilisation d'une intégrale et non d'une somme.

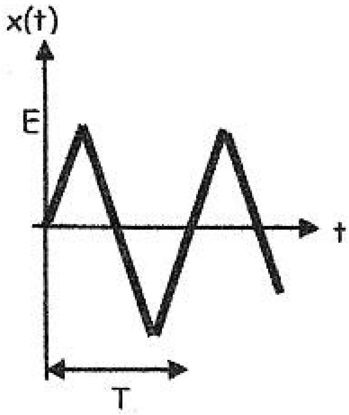
Rq. : exemples p. suivante.

am



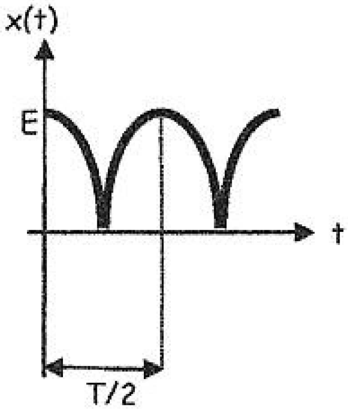
$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right]$$

am



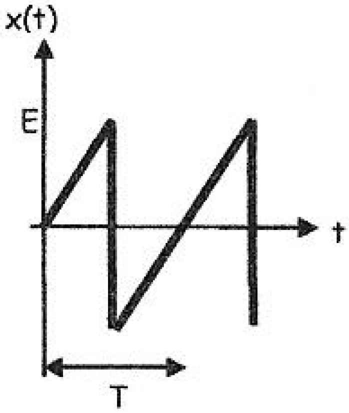
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \ldots\right]$$

am



$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1 + \frac{2\cos(2\omega t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega t)}{15} + \ldots\right]$$

am



$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \ldots\right]$$