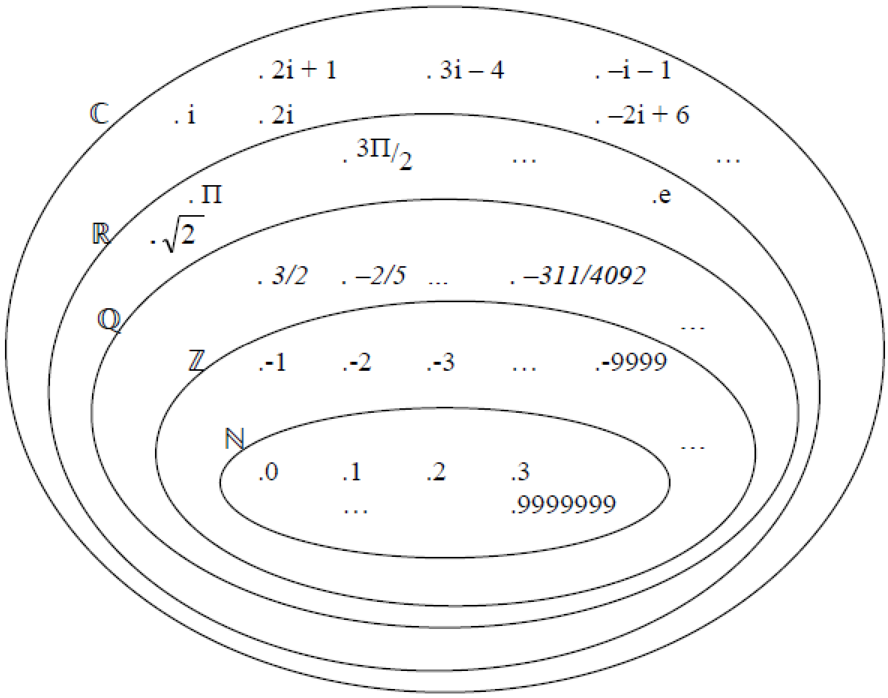
1. Arithmétique et écriture binaire ou dans d'autres bases

1.1. Les ensembles de nombres



- ℕ est l'ensemble des naturels ou ℤ \ ℤ⁻
- ℤ est l'ensemble des entiers (relatifs)
- ℚ est l'ensemble des nombres rationnels
- ℝ est l'ensemble des réels
- ℂ est l'ensemble des nombres complexes ; il contient tous les nombres de la forme $a + bi$ où a et b sont des réels et i est le nombre imaginaire, définit par $i^2 = -1$.

1.2. Multiples et diviseurs

- Multiple : On dit qu'un entier a est multiple d'un entier b s'il existe un entier c tel que a = b*c.
- Diviseurs (dans une division entière) : Dans une division entière, le diviseur est le nombre entier par lequel on divise un autre nombre entier (appelé dividende).
- Reste : Le reste d'une division entière est la différence entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient.

1.3. Nombres premiers

Un nombre premier est un entier naturel ne possédant que deux diviseurs entiers naturels, 1 et lui-même.

1.4. Opérateurs

- DIV (Quotient de la division entière)
- MOD (Reste de la division entière)
- PPCM (Plus petit commun multiple)
- PGCD (Plus grand commun diviseur)

1.5. Factorielle d'un nombre

Le produit des n premiers entiers naturels 1*2*3*4*…*n s'écrit n ! et se nomme factorielle de n.

1.6. Le signe de sommation

C'est le symbole Σ. Il permet d'écrire de façon condensée une somme de termes semblables à un élément.

Exemple : $\sum_{i=m}^{n} a^i$

1.7. Puissance

1.7.1. Condenser une multiplication

Si b est un nombre non nul quelconque et n un entier naturel, l'écriture b^n désigne le produit b*b*b*b*…*b. n facteurs.

Cas particuliers :

- Pour n ≠ 0 : $0^n = 0$ $1^n = 1$
- Pour b ≠ 0 : $b^0 = 1$ $b^1 = 1$

1.7.2. L'inverse

L'inverse de b est : $\frac{1}{b}$ $ou\ b^{-1}$. $\frac{1}{b^n} = b^{-n}$

1.7.3. Propriétés des puissances

Propriétés :	Exemple :
$b^n * b^m = b^{n+m}$	$2^2 * 2^3 = 2^5 = 32$ car (2*2)*(2*2*2) = 32
$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$	$\frac{2^3}{2^2} = 2$ car $\frac{2*2*2}{2*2} = 2^{3-2} = 2$
$(b^n)^m = b^{n*m}$	$(2^2)^3 = 64\ car\ 4^3 = 2^6 = 64$
$\frac{1}{b^n} = b^{-n}$	$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ car $10^0 = 1; 10^{-1} = \frac{1}{10}$ etc …
$(a * b)^n = a^n * b^n$	$(2 * 3)^2 = 36$ car $6^2 = 2^2 * 3^2 = 36$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{20}{10}\right)^2 = 2^2 = 4$ car $\frac{400}{100} = 4$

1.7.4. Puissance fractionnaires :

Propriétés :	Exemple :
$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ car 2*2 = 4
$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$	$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ car 2*2*2=8
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	Même principe que les exemples ci-dessus

1.7.5. Préfixes scientifiques :

Dans le langage scientifique, une puissance de 10 s'indique par des préfixes grecs ou latins :

10^{-12}	: pico
10^{-9}	: nano
10^{-6}	: micro
10^{-3}	: milli
10^{-2}	: centi
10^{-1}	: déci
10^{1}	: déca
10^{2}	: hecto
10^{3}	: kilo
10^{6}	: méga
10^{9}	: giga
10^{12}	: téra

1.8. Définitions

1.8.1. Système de numérotation

C'est un ensemble de conventions d'écriture qui permet de représenter et, éventuellement, de manipuler des nombres.

Base

1.8.2. Système de numérotation de position

$$(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)_a = \sum_{i=0}^{n} b_i a^i$$

Par exemple, dans $235_{10}, b_0 = 5, b_1 = 3, b_2 = 2,$

car $\sum_{i=0}^{2} b_i 10^i = b_0 * 10^0 + b_1 * 10^1 + b_2 * 10^2$

1.9. Conversions entre les différents systèmes

Pour passer de la base 2 à la base 16 = 2^4, on peut regrouper par paquets de 4 :

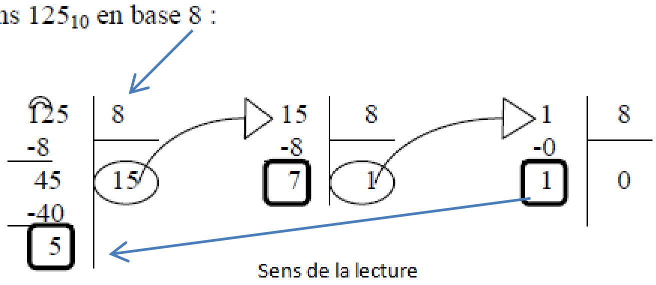
$$1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1_2 = \underbrace{0\,0\,0\,1}_{1}\,\underbrace{0\,0\,1\,0}_{2}\,\underbrace{1\,1\,0\,1}_{13\,=\,D}{}_2$$

$$= 1\,2\,D_{16}.$$

1.9.1. Conversion en base a d'un nombre entier donné en décimal

Les unités qui restent fournissent le dernier chiffre du résultat.

Convertissons 125_{10} en base 8 :



Donc $125_{10} = 175_8$ car $125_{10} = 15*8 + 5$

$= (1*8 + 7)*8 + 5$

$= 1*8^2 + 7*8 + 5$

1.9.2. Conversion de base a en base b sans passer par la base 10

Exemple :

$$64_9 \text{ en base } 2 = 6 * 9^1 + 4 * 9^0$$

$$\Leftrightarrow 110 * 1001 + 100 * 1001$$

			1	0	0	1
*				1	1	0
		1	0	0	1	0
+	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0
+				1	0	0
	1	1	1	0	1	0

1.10. Conversion de la partie non entière

1.10.1. Conversion en décimal de la partie non entière donnée en base a

Il faut faire intervenir des exposants négatifs de la base.

Par exemple : $0{,}101_2 = 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

1.10.2. Conversion de la base a en base a^n et vice versa

Pour la partie non entière, les groupements en paquet de n (cas particulier de la base 2) chiffres commencent à droite de la virgule et doivent, le cas échéant, être complétés par des 0.

Par exemple : $0{,}1011101_2 = 0{,}101\ 110\ 100_2 = 0{,}564_8$

1.10.3. Conversion de base 10 en base a

Si le nombre multiplié par 2 < 1, alors on met 0, sinon 1.

Exemple : écrire $0{,}375_{10}$ en binaire

Nombre	Retourne …	Commentaire
0,375	0	On multiplie par 2
0,75	0	On multiplie à nouveau par 2
1,5	1 (1,5 -1=0,5)	On multiplie par 2 uniquement la partie non entière.
1	1	

Remarque :

Il est possible qu'on puisse avoir un nombre illimité périodique.

Exemple :

$$0{,}4_{10} = 0{,}101210121012\ldots_3$$

1.11. Critère de divisibilité

1.11.1. Critère qui concerne les diviseurs de la base [Règle 1]

En base **a**, un nombre **n** est divisible par un diviseur **d** de **a**, si le dernier chiffre de **n** est un multiple de **d**.

$$\frac{18_{10}}{2_{10}} = 9$$

1.11.2. Critère qui concerne les diviseurs de la (base -1) [Règle 2]

En base **a**, un nombre **n** est divisible par un diviseur **d** de **(a-1)** si la sommes des chiffres de **n** est un multiple de **d**.

$$\frac{720_{10}}{80_9} = \frac{720_{10}}{72_{10}} = 10$$

1.11.3. Critère concernant a^k

En base **a**, un nombre **n** est divisible par a^k si le nombre **n** se termine par au moins **k** zéros.

$$\frac{2.000.000_{10}}{10^5} = \frac{2.000.000_{10}}{100.000_{10}} = 20$$

1.12. Représentation et manipulation de nombres en compléments à 2, à 16, à a

But : Représenter des nombres positifs et négatifs à l'aide d'un nombre limité de nombres entiers (un nombre limité de digits).

Les compléments interviennent également au cours de l'opération de soustraction.

1.12.1. Notion de complément à 10

Soit A un nombre décimal. Le complément à 9 de A est obtenu en soustrayant de 9 chaque chiffre de A. Et le complément à 10 de A est le complément à 9 de A auquel on ajoute 1.

Nombre décimal	4308
Complément à 9	5691
Complément à 10	5692

Exemple :

	9	9	9	9	
-	4	3	0	8	
	5	6	9	1	Complément à 9
+				1	Complément à 10
	5	6	9	2	

1.12.2. Notion de complément à 2

Le complément à 1 de A est obtenu en soustrayant de 1 chaque chiffre de A, le complément à 2 de A est le complément de 1 de A auquel on a ajouté 1.

Nombre binaire	111100001111
Complément à 1	000011110000
Complément à 2	000011110001

1.12.3. Généralisation en base a

La notion de complément à 2 peut être généralisée en la notion de complément à **a** en base **a** sur **n** positions.

- Remplacer chaque chiffre de **X** par son complément à **a-1** (ce qui donne $(a^n - 1 - X)$
- Ajouter **a** à ce résultat (ce qui donne le complément à **a** :$(a^n - X)$

Exercices de base :

- Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100 en appliquant le crible d'Eratosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Calculer

5 DIV 3	1	5 MOD 3	2	PPCM (12 , 18)	36
3 DIV 5	0	3 MOD 5	3	PGCD (18 , 24)	6
19 DIV 5	3	19 MOD 5	4	PPCM (7 , 11)	77
19 DIV 3	6	19 MOD 3	1	PGCD (35 , 24)	1

- Ecrire à l'aide du signe de sommation :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1000$	$\sum_{i=1}^{1000} i$
$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}$	$\sum_{i=0}^{20} x_i$
$a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5$	$\sum_{i=5}^{5} i * a^i$
$x^{19} + 2x^{18} + \cdots + 19x + 20$	$\sum_{i=1}^{20} i * x^{(20-i)}$

- Convertir en base 10

26_8	$2*8^1+6*8^0=16+6=22_{10}$
$A2_{16}$	$A*16^1+2*16^0=160+2=162_{10}$
202_7	$2*7^2+2*7^0=98+2=100_{10}$
1201_3	$1*3^3+2*3^2+1*3^0=27+18+1=46_{10}$
10111_2	$1*2^4+1*2^2+1*2^1+1*2^0=16+4+2+1=23_{10}$

- Convertir en binaire

16_{10}	10000_2
64_9	$\Leftrightarrow 6*9^1+4*9^0=54+4=58_{10}=111010_2$
32_7	$\Leftrightarrow 3*7^1+2*7^0=21+2=23_{10}=10111_2$
143_5	$\Leftrightarrow 1*5^2+4*5^1+3*5^0=25+20+3=48_{10}=110000_2$

- Convertir dans la base indiquée
  - 5 en base 5 $= \ 10_5$

5	5
0	1
1	0

  - 21_6 en base 7 $= \ 16_7$

$$21_6=2*6^1+1*6^0=12+1=13_{10}$$

13	7
6	1
1	0

  - 64_{10} en base 8 $=100_8$

64	8
0	8
0	1
1	0

  - 111_{10} en hexadécimal $6F_{16}$

111	16
15	6
6	0

- Conversion de la base b en base b^n (et vice-versa)

$1.0100.1101_2$	Base 16	$14D_{16}$
20371_8	Base 16	$\Leftrightarrow 010.000.011.111.001_2 = 10.0000.1111.1001_2 = 30F9_{16}$
12032_4	Base 2	$01.10.00.11.10_2$
11011_2	Base 8	33_8

- Convertir les nombres à partie non entière
  - $421{,}3_5\ en\ base\ 10$

$$4*5^2+2*5^1+1*5^0+3*5^{-1}=100+10+1+0{,}6=111{,}6$$

  - $4{,}5_{10}\ en\ binaire$

$$100{,}1_2$$

- Tester la divisibilité de …
  - $C12C1_{16}\ par\ 3$? Non

    3 divise 15 (16-1) => Règle 2. Ok !

    C + 1 + 2 + C + 1 = 28. 28 n'est pas divisible par 3 donc non !
  - $34765427_8\ par\ 2$? Non

    8 divise 2 => Règle 1. Ok !

    Le dernier chiffre de n n'est pas un multiple de 2. Non !
  - $CD165E_{16}\ par\ 6$? Non

    6 = 2*3. 2 => Le dernier chiffre est divisible par 2. Ok !

    3 => 52 n'est pas divisible par 3 donc non !
- Effectuer les soustractions suivantes par la méthode des compléments à 2
  - 10101 – 11011 = 11011

	1	0	1	0	1	
+	0	0	1	0	0	Complément à 1
	1	1	0	0	1	
+					1	Complément à 2
	1	1	0	1	0	

Exercices supplémentaires

- Chercher tous les nombres de deux chiffres multiples de 5 et pas de 2 et multiples de 3 et pas de 9.

10	15	20	25	30	35	40	45	50
55	60	65	70	75	80	85	90	95

- Convertir dans la base indiquée
  - $(2^{14})_{10} \Leftrightarrow 16384_{10} = 40000_8$

16384	8
0	2048
0	256
0	32
0	4
4	0

Ou bien $(2^{14})_{10} = 100.000.000.000.000_2 = 40000_8$

  - $39_{10}\ en\ base\ 16 = 27_{16}$

39	16
7	2
2	0

- Convertir les nombres à partie non entière
  - $1A3{,}4_{16}\ en\ base\ 10$

$$1 * 16^2 + A * 16^1 + 3 * 16^0 + 4 * 16^{-1} = 256 + 160 + 3 + 0{,}4 = 419{,}4$$

0,4	10
4	0

- Tester la divisibilité de …
  - $27049_{10}\ par\ 11$ Oui

    Les critères ne sont pas applicables. Dans ce cas, utilisons la division euclidienne.

	2	7	0	4	9	1	1		
-	2	4				2	2	5	9
		3	0						
	-	2	4						
			6	4					
		-	5	5					
				9	9				
			-	9	9				
					0				

  - 5200_7 par 49_{10}Oui

    49 = 7*7 = $100_7\ ce\ qui\ fait\ \frac{5200_7}{100_7}\ Vrai$!

2. Logique mathématique

2.1. Proposition

2.1.1. Définition

Une proposition est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse.

2.1.2. Connecteurs usuels

Non	Négation	$\neg$
Et	Conjonction	$\wedge$
Ou (et/ou)	Disjonction inclusive	$\vee$
Ou (exclusif)	Disjonction exclusive	$\underline{\vee}$
Si … alors	Implication	$\Rightarrow$
Si et seulement si	Équivalence	$\Leftrightarrow$

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	pVq
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	p $\underline{\vee}$ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	p ⇔ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	¬p
0	1
1	0

2.1.3. Tautologie

Une tautologie est une formule toujours vraie (c'est-à-dire dont la dernière colonne de la table de vérité ne contient que des 1) quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui y figurent.

- La proposition vraie (V)
- La proposition fausse (F)

Exemple :

$$\overline{A \,.\, B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	A	.	B	$\overline{A\,.\,B}$	$\overline{A}$	+	$\overline{B}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0

≡

Les équivalences suivantes sont des tautologies

Commutativité de ∧	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
Neutres pour ∧ et ∨	$(p \wedge V) \Leftrightarrow p\ et\ (p \vee F) \Leftrightarrow p$
V est absorbante pour ∨	$(p \vee V) \Leftrightarrow V$
F est absorbante pour ∧	$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
Distributivité	$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$ $\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$
Contradiction et tiers-exclu	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow F\ et\ (p \vee \neg q) \Leftrightarrow V$
Idempotence pour ∧ *et* ∨	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p\ et\ (p \vee p) \Leftrightarrow p$
Double négation	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Associativité de ∧ *et de* ∨	$\big(p \wedge (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \wedge r\big)$ $\big(p \vee (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \vee r\big)$
Lois de de Morgan (dualité)	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
Généralisation	$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n)$ $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n)$
L'équivalence de deux propositions remplacée par leurs négations	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$

Remarque :

Une antilogie (ou contradiction) est une formule toujours fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui y figurent.

Propriétés de l'implication :

Expression de l'implication à l'aide de la négation et de la disjonction	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
Bi-implication	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big)$
Contraposée de l'implication (*modus tollens*)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Réciproque de l'implication	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
Négation de l'implication	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
Inverse de l'implication	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
Raisonnement par l'absurde	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow F\big)$
Règle de déduction (*Modus Ponens*)	$\big((p \Rightarrow q) \wedge p\big) \Rightarrow q$
Syllogisme	$\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

2.2. Prédicat ou condition

2.2.3. Rappel sur les ensembles

Un ensemble E est une collection d'objets. Chaque objet est appelé un élément. On dit qu'un élément x *appartient* (ou n'appartient pas) à l'ensemble E et est noté $x \in E$ et $x \notin E$. On peut aussi dire que E *comprend* (ou ne comprend pas) x, ce qui est noté $E \ni x$.

Le cardinal de E est le nombre d'éléments appartenant à l'ensemble E. Il est noté $|E|$ ou $\#E$

Ensemble vide : c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$ ou $\{\}$.

Il est possible de décrire un ensemble de 2 façons :

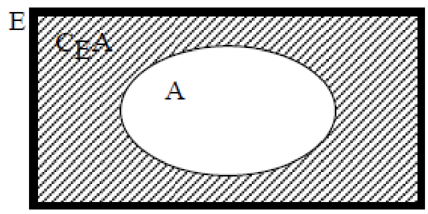
- Soit on décrit l'ensemble en donnant tous ses éléments séparés par des virgules : $E = \{a, b, c, d\}$
- Soit on décrit l'ensemble en donnant la/les caractéristique(s) de ses éléments : $\{x \mid \text{x obéit à une caractéristique bien précise}\}$

Égalité et inclusion de deux ensembles :

- A *est inclus* à B : $(A \subset B)$
- B *contient* A : $(B \supset A)$
- Dans le cas d'égalité possible entre A et B : $(A \subseteq B$ ou $B \supseteq A)$.

Opérations sur les ensembles : (exemple via le diagramme de Venn)

- Union : $A \cup B$ = l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
- L'intersection : $A \cap B$ = l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.
- La différence : A \ B = l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B.
- La différence symétrique : $A \Delta B$. Il s'agit de l'union privée de l'intersection.
- Le complémentaire d'un ensemble A : C'est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A dans un ensemble de référence E. Il est noté $C_e(A)$ ou $\bar{A}$



2.2.4. *Définition d'un prédicat*

Une fonction propositionnelle, un prédicat ou une condition est une expression dont la valeur de vérité (vraie ou fausse) dépend d'une ou de plusieurs variable(s).

Exemples :

$$p(x) : x > 5$$
$$q(x, y): x + y = 3$$

Le domaine de définition d'un prédicat est l'ensemble sur lequel le prédicat peut être vérifié (Vérifié sur l'ensemble $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La classe de vérité de ce prédicat est l'ensemble des éléments du domaine de définition où il prend la valeur vrai.

2.2.5. *Quantification*

On quantifie un prédicat en utilisant les quantificateurs universels. Notions deux quantificateurs universels :

- ✓ $\forall$ (pour tout)
- ✓ $\exists$ (il existe)

2.3. *Récurrence*

- Partie 1 : La démonstration de la propriété pour la valeur initiale.
- Partie 2 : L'induction qui consiste à démontrer que si la valeur propriété est vraie pour un élément quelconque k de l'ensemble, alors elle est vraie pour l'élément suivant k+1.
- Conclusion : C'est lorsque ces deux parties sont démontrées que l'on peut affirmer automatiquement que la propriété est vraie pour tout l'ensemble.

Exercices sur la logique propositionnelle

- Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes :
  - $\big((1 \neq 1) \Rightarrow (2 = 3)\big) \vee (4 = 5)$

    $(1 \neq 1)$ $\Rightarrow$ $(2 = 3)$ $\vee$ $(4 = 5)$

    Faux Faux

    Vrai Faux

    Vrai

  - $\big((0 = 1) \vee ou\ exclusif\ (5 = 5)\big) \wedge \big((1 = 2) \Leftrightarrow (2 = 1)\big)$

    $(0 = 1)$ $\underline{\vee}$ $(5 = 5)$ $\wedge$ $(1 = 2)$ $\Leftrightarrow$ $(2 = 1)$

    Faux Vrai Faux Faux

    Vrai Vrai

    Vrai

  - $(1 + 1 = 2) \vee "1989791\ est\ un\ nombre\ premier$

    $1 + 1 = 2\ Vrai\ donc\ vrai\ (pas\ besoin\ de\ vérifier\ l'autre\ condition)$
  - Si une armoire n'est pas un meuble alors une pomme n'est pas un fruit

    $F \Rightarrow F\ donne\ vrai$

- Soient les propositions p : « j'ai la grippe », q : « j'ai mal à la gorge » et r : « j'ai de la température ». Traduire en langage courant les propositions :
  - $q \Rightarrow p$

    Si j'ai mal à la gorge alors j'ai la grippe.
  - q $\underline{\vee} \neg r$

    J'ai mal à la gorge ou j'ai pas de température.

V : soit … soit => Si … alors <=> Signifie

- Vérifier si les propositions sont des tautologies :

(	(	p	⇒	q	)	∧	(	q	⇒	p	)	)	⇔	(	p	⇔	q	)
		0	1	0		1		0	1	0			1		0	1	0	
		0	1	1		0		1	0	0			1		0	0	1	
		1	0	0		0		0	1	1			1		1	0	0	
		1	1	1		1		1	1	1			1		1	1	1	

(	p	$\veebar$	q	)	⇔	(	(	$\neg p$	∧	q	)	∨	(	p	∧	$\neg q$	)
	0	0	0		1			1	0	0		0		0	0	1	
	0	1	1		1			1	1	1		1		0	0	0	
	1	1	0		1			0	0	0		1		1	1	1	
	1	0	1		1			0	0	1		0		1	0	0	

- Soit p : « J'en ai marre » et q : « Je vais m'en aller ». Ecrire sous forme symbolique :
  - J'en ai marre, et je vais m'en aller

$$p \wedge q$$

  - Si je ne m'en vais pas, c'est que j'en ai marre

$$\neg q \Rightarrow p$$

  - Soit j'en ai marre, soit je ne m'en vais pas

$$p \veebar \neg q$$

  - Quand je m'en vais, j'en ai marre

$$q \Rightarrow p$$

- Nier les propositions :
  - La voiture est rouge et l'arbre est vert

    La voiture n'est pas ronde et l'arbre n'est pas vert
  - Si la terre est ronde, alors elle tourne

    La terre est ronde mais elle ne tourne pas
  - Si c'est rare, c'est cher

    C'est rare et ce n'est pas cher
  - Le paysan sème du blé ou du maïs

    Le paysan ne sème pas du blé et pas de maïs

- Ecrire la contraposée des implications :
  - Si le chien miaule, alors le chat aboie.

    Si le chat n'aboie pas, alors le chien ne miaule pas.
  - Quand le chat est parti, les souris dansent.

    Quand les souris ne dansent pas, le chat n'est pas parti
  - Je vais à la plage chaque fois qu'il y a du soleil

    Si je ne vais pas à la plage, c'est qu'il y a pas de soleil.

- Ecrire la contraposée des implications
  - Je vais à la plage chaque fois qu'il y a du soleil.

    Si je ne vais pas à la plage, c'est qu'il y a pas de soleil.

- Cédric, Casper et Titeuf sont en voyage. L'un à Paris, le second à Rome et le troisième à Berlin. Où est Cédric, sachant que
  - Si Cédric est à Berlin, alors Titeuf est à Rome
  - Si Casper est à Paris, alors Titeuf est à Berlin
  - Si Cédric n'est pas à Berlin, alors Casper est à Paris

Paris	Rome	Berlin	R1	R2	R3
Casper	Titeuf	Cedric	1	0	0
Casper	Cedric	Titeuf	1	1	1
Casper	Cedric	Titeuf	1	1	1

Exercice sur la logique des prédicats

- Décrire les classes de vérité de $\neg p(x); p(x) \wedge q(x);\ p(x) \vee q(x);\ p(x) \veebar\ q(x);\ p(x) \Rightarrow q(x);\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$

$p(x): 12 \leq x \leq 39\ et\ q(x): 5 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{N}$	
$\neg p(x)$	$]-\infty, 12[\cup]39, +\infty[$
$p(x) \wedge q(x)$	$[12, 20], \forall x \in \mathbb{R}$
$p(x) \vee q(x)$	$[5, 39]$
$p(x) \veebar q(x)$	$[5, 12[\cup]20, 39]$
$p(x) \Rightarrow q(x)$	$\mathbb{R} \setminus]20, 39[$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$]-\infty; 5[\cup[12, 20]\cup]39, +\infty[$

$p(x): 7 < x\ et\ q(x): 9 \geq x, x \in \mathbb{N}$	
$\neg p(x)$	$\mathbb{N} \setminus P = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}; \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7\}$
$p(x) \wedge q(x)$	$[8, 9]$
$p(x) \vee q(x)$	$\mathbb{N}$
$p(x) \veebar q(x)$	$\mathbb{N} \setminus \{8, 9\}$
$p(x) \Rightarrow q(x)$	$\{0,1,\dots,7\} \cup \{0,1,\dots,9\} = \{0,1,\dots,9\}$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$[8, 9]$

- Trouver la classe de vérité des fonctions propositionnelles suivantes :

$x > 1 \Rightarrow x > 2$	$dom = \mathbb{R}$	$]\leftarrow; 1[\cup]2; \rightarrow[$
$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$	$dom = \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$	$dom = \mathbb{N}$	$\mathbb{N}$

- Nier les propositions suivantes et préciser la valeur de vérité du résultat

Proposition	Vrai	$\forall x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
Valeur de vérité	Faux	$\exists x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 \neq x^2 + 2x + 1$
Proposition	Faux	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \mid a + b * c = (a+b) * (a+c)$
Valeur de vérité	Vrai	$\exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid a + b * c \neq (a+b) * (a+c)$

- Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

$\forall x \in \mathbb{N} \mid x \leq x$	Vrai	Vrai quel que soit la valeur de N
$\forall x \in \mathbb{Z} \mid 2 - x \leq 3 + x$	Faux	Contre-exemple : x = 3
$\exists x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 < 4$	Vrai	Exemple : x = 0
$\exists m \in [\,0\,,1\,]\ \forall n \in [\,0\,,1\,] \mid m \geq n$	Vrai	Il existe bien un m plus grand ou égal que tous les n possible, à savoir n = 1
$\exists m \in]\,0\,,1\,[\ \forall n \in]\,0\,,1\,[\mid m \geq n$	Faux	Il y a toujours un n qui est plus grand

- Nier les propositions suivantes
  - Tous les chemins mènent à Rome.

$$\forall c \in \{chemins\} : c \text{ mène à } Rome$$
$$\exists c \in \{chemins\} : c \text{ ne mène pas à } Rome$$
$$Il\ existe\ un\ chemin\ qui\ ne\ mène\ pas\ à\ Rome$$

  - Tous les étudiants ne sont pas des ivrognes.

$$\forall e \in \{étudiants\} : e\ ne\ sont\ pas\ des\ ivrognes$$
$$\exists e \in \{étudiants\} : e\ est\ un\ ivrogne$$
$$Il\ existe\ un\ étudiant\ qui\ est\ ivrogne$$

  - Ce panier contient au moins une pomme qui n'est pas rouge

$$\exists p \in \{pomme\} : p\ n'est\ pas\ rouge$$
$$\forall p \in \{pomme\} : p\ est\ rouge$$
$$Toutes\ les\ pommes\ sont\ rouge$$

  - Dans chaque groupe, on trouve au moins un étudiant qui parle une langue étrangère

$$\exists e \in \{étudiants\} : e\ parle\ une\ langue\ étrangère$$
$$\forall e \in \{étudiants\} : e\ ne\ parlent\ pas\ une\ langue\ étrangère$$
$$Dans\ chaque\ groupe, chaque\ étudiant\ ne\ parle\ pas\ une\ langue\ étrangère$$

  - Dans toutes les prisons, il y a un gardien qui connaît le nom de tous les détenus

$$\exists g \in \{gardiens\} : g\ connaît\ le\ nom\ de\ tous\ les\ détenus$$
$$\forall g \in \{gardiens\} : g\ ne\ connaissent\ pas\ le\ nom\ de\ tous\ les\ détenus$$
$$Tous\ les\ gardiens\ ne\ connaissent\ pas\ le\ nom\ de\ tous\ les\ détenus$$

Exercices sur la récurrence

- Démontrer par récurrence les formules suivantes
  - $1+2+3+\cdots+n=\frac{n*(n+1)}{2}$

Démonstration de la base de la récurrence

$$n=0\,;\ \sum_{i=0}^{0} i=0\ ;\ \frac{0*1}{2}=0\ ok\ !$$

Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1

$$\sum_{i=0}^{n+1} i=\frac{(n+1)*(n+2)}{2}=\frac{n^2+2n+n+2}{2}$$

$$=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}\Leftrightarrow\frac{n*(n+1)}{2}+n+1\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{n} i+(n+1)=\sum_{i=0}^{n+1} i$$

Pour aller plus loin :

$$\sum_{i=0}^{n+1} i=\sum_{i=0}^{n} i+(n+1)$$

$$\frac{n*(n+1)}{2}+(n+1)\Leftrightarrow\frac{n*(n+1)+2(n+1)}{2}\ car\ ab+cb=b*(a+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)*(n+2)}{2}$$

Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit ∀n ∈ ℕ

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$

  Démonstration de la base de la récurrence

  $$n = 1; \frac{1*(1+1)*\left((2*1)+1\right)}{6} = \frac{1*2*3}{6} = \frac{6}{6} = 1\ ok\ !$$

  Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1

  $$\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)*(n+2)*(2n+3)}{6}$$

  $$(n+1)*\left(n*(2n+)+6*(n+1)\right) = (n+1)*(n+2)*(2n+3)$$

  $$2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

  Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- $1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 = \frac{n^2*(n+1)^2}{4}$

  Démonstration de la base de la récurrence

  $$\text{Si n} = 1\ ;\ \frac{1^2*(1+1)^2}{4} = \frac{1*4}{4} = 1.Ok\ !$$

  Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1

  $$1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2*\left((n+1)+1\right)}{4}$$

  $$\frac{n^2*(n+1)^2}{4} + 4*(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2*(n+2)^2}{4}$$

  $$n^2 + 4*(n+1) = (n+2)^2$$

  $$n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4n + 4$$

  Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit $\forall n \in \mathbb{N}$

- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

  Démonstration de la base de la récurrence

  N = 0 : $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. Ok !

  Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} i^i = 2^{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^i = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^i = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \; car \; z - 1 + z = 2z - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^i = 2^1 * 2^{n+1} - 1 \Leftrightarrow 2^{1+n+1} - 1 \Leftrightarrow 2^{n+2} - 1$$

  Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit $\forall n \in \mathbb{N}$

- Démontrer par récurrence les formules suivantes donnant pour une fonction $f(x)$ l'expression $f^{(n)}(x)$ (dérivée d'ordre n de $f(x)$) :

  - $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $f^{(n)}(x) = (-1)^n * n! * x^{-(n+1)}$

$$f'^0(x) = f(x)$$

  Rappel :

$$(x^n)' = n * x^{n-1} \; et \; \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

  Démonstration de la base de la récurrence

  N= 0 ; $f(0) \equiv f'^0(x) = (-1)^0 * 0! * x^{-(n+1)} \Leftrightarrow 1 * 1 * x^{-1} = \frac{1*1}{x} = \frac{1}{x}$ ok !

  Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1

$$f(n+1) \equiv f'^{n+1}(n) = (-1)^{n+1} * (n+1)! * x^{-(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \left(f'^n(x)\right)' = (-1)^n * n! * x^{-(n+1)}$$

$$= (-1)^n * (-1) * n!^{(n+1)} * x^{-n+2} \Leftrightarrow (-1)^{n+1} * (n+1)! * x^{-(x+2)}$$

  Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit $\forall n \in \mathbb{N}$

- $f(x) = xe^x$ avec $f^{(n)}(x) = (x+n) * e^x$

$$f(n) = f'^n(x) = (x+n) * e^x \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$f(0) = f'^0(x) = x * e^x$$

<u>Rappel :</u>

$$(e^n)' = e^n \ et \ (f * g)' = f' * g + f * g'$$

<u>Démonstration de la base de la récurrence</u>

$$f'^0(x) = (x+0) * e^x$$

$$x * e^x = x * e^x \ \ ok\,!$$

<u>Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1</u>

$$f'^{(n+1)} = (x+n+1) * e^x \Leftrightarrow f'^n(x) = x+n+1 * e^x$$

$$\Leftrightarrow (x+n) * e^x = x+n+1 * e^x$$

$$\Leftrightarrow (x+n) * e^x = (x+n)' * e^x + (x+n) * (e^x)'$$

$$\Leftrightarrow (x'+n') * e^x + (x+n) * (e^x)'$$

$$\Leftrightarrow e^x + (x+n) * e^x = e^x * (1+x+n)$$

<u>Comme la propriété a été démontrée par la plus petite valeur (base) et par l'hypothèse de récurrence, alors la propriété est vraie quelle que soit $\forall n \in \mathbb{N}$</u>

- Démontrer par récurrence les propriétés suivantes pour tout nombre naturel n :

  - $3 \ divise \ n^3 - n$

<u>Démonstration de la base de la récurrence</u>

$$f(n) \equiv mod(n^3 - n, 3) = 0$$

$$f(0) \equiv mod\ (0^3 - 0\,, 3) = 0 \Leftrightarrow mod\ (\,0\,, 3\,) = 0 \ ok\,!$$

<u>Supposons que la propriété soit vraie jusque n, alors montrons qu'elle est encore vraie pour n + 1</u>

$$f(n+1) \Leftrightarrow mod\ ((n+1)^3 - (n+1), 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow mod\ (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow mod\ (n^3 + 3n^2 + 3n - n) = 0 \ est \ divisible \ par \ 3$$

3. Ensembles – relations et fonctions

3.1. Couple

Définition : Suite finie de longueur 2 dont les première et deuxième composantes sont souvent appelées respectivement « origine » et « image ».

Notation : (a , b) où a est l'origine et b l'image.

Couple identique : (a , b) où a = b. Couple réciproque de (a , b) : (b , a).

Généralisation de la notion de couple : $(a_1, a_2, \dots a_n)$

3.2. Produit cartésien

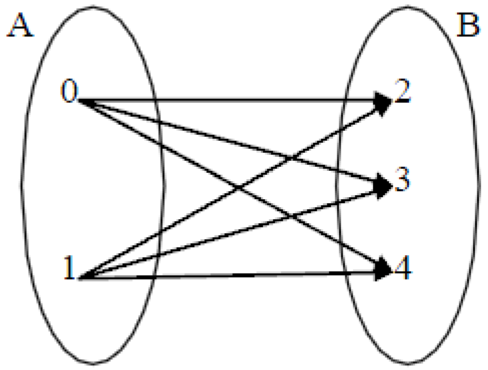
Le produit cartésien des ensembles A et B est l'ensemble de tous les couples (a , b) où a appartient à A et b appartient à B. On le note $A \times B$ avec

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

Exemple : A = { 0 , 1 } et B = { 2 , 3 , 4 }

Produit cartésien de $A \times B$: $\{(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

3.2.1. Représentation sagittale

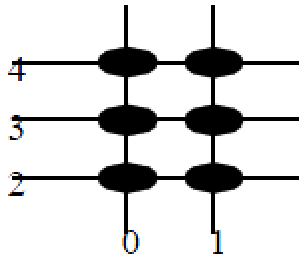


Les flèches sont la représentation des couples

3.2.2. La représentation en tableau

A \ B	2	3	4
0	(0,2)	(0,3)	(0,4)
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)

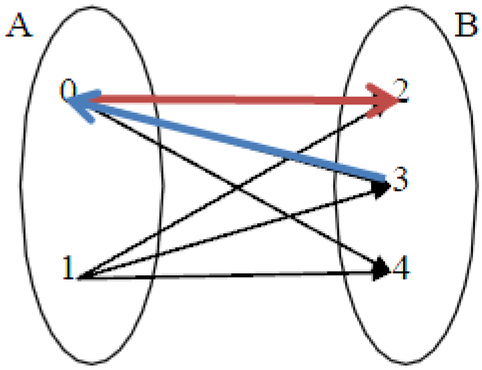
3.2.3. La représentation cartésienne



3.3. Relation

3.3.1. Définition :

Une relation (binaire) est un sous-ensemble d'un point cartésien de deux ensembles A et B : $R \subseteq A \times B$. Si cette relation est vraie, alors on note aRb.



Domaine de la relation R :

$Dom(R) = \{ x \in A \mid \exists y \in B : (x, y) \in R \}$

Image de la relation R :

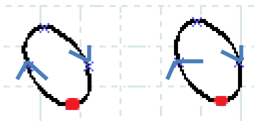
$Im(R) = \{ y \in B \mid \exists x \in A : (x, y) \in R \}$

3.3.2. Propriétés d’une relation de $A \times A$

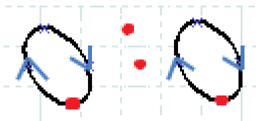
Une relation de $A \times A$ peut-être :

- Réflexive : $\forall a \in A \mid aRa$

  Exemple :

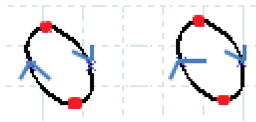
  

  Exemple non réflexive :

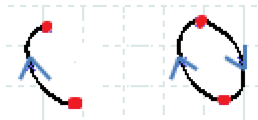
  

- Symétrique : $\forall a, b \in A \mid aRb \Rightarrow bRa$

  Exemple :

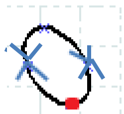
  

  Exemple non symétrique :

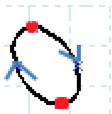
  

- Antisymétrique : $\forall a, b \in A \mid (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$

  Exemple :

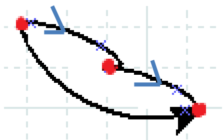
  

  Exemple non antisymétrique :

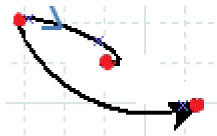
  

- Transitive : $\forall a, b, c \in A \mid (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

  Exemple :

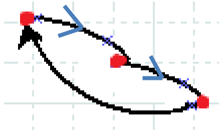
  

  Exemple non transitive :

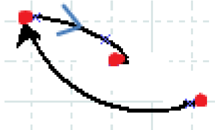
  

- Circulaire : $\forall a, b, c \in A \mid (aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa)$

  Exemple :

  Exemple non circulaire :

3.4. Fonctions

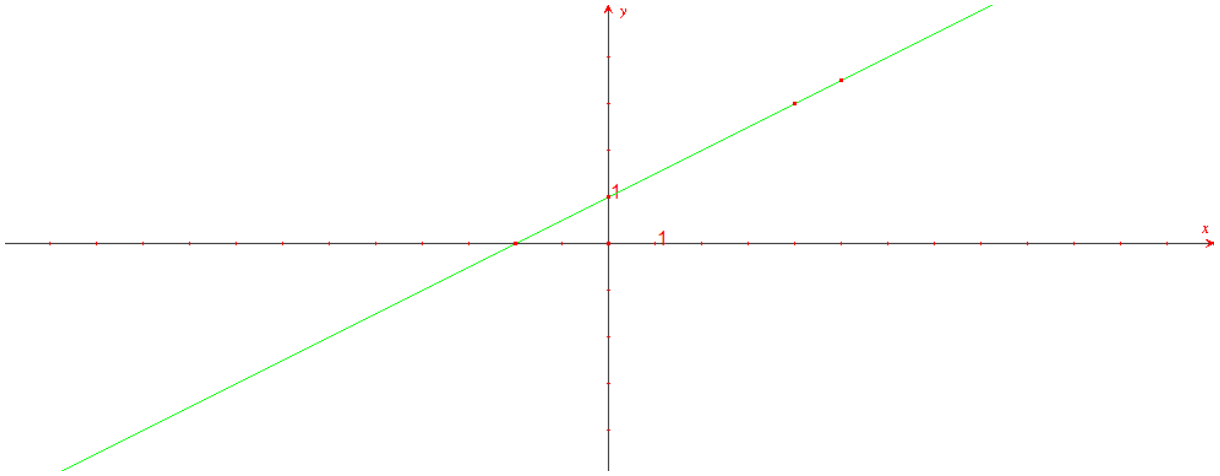
Une fonction est une relation dont les origines des couples qui la composent ont au plus une image. (0 ou 1)

$R \subseteq Dom \times Im$

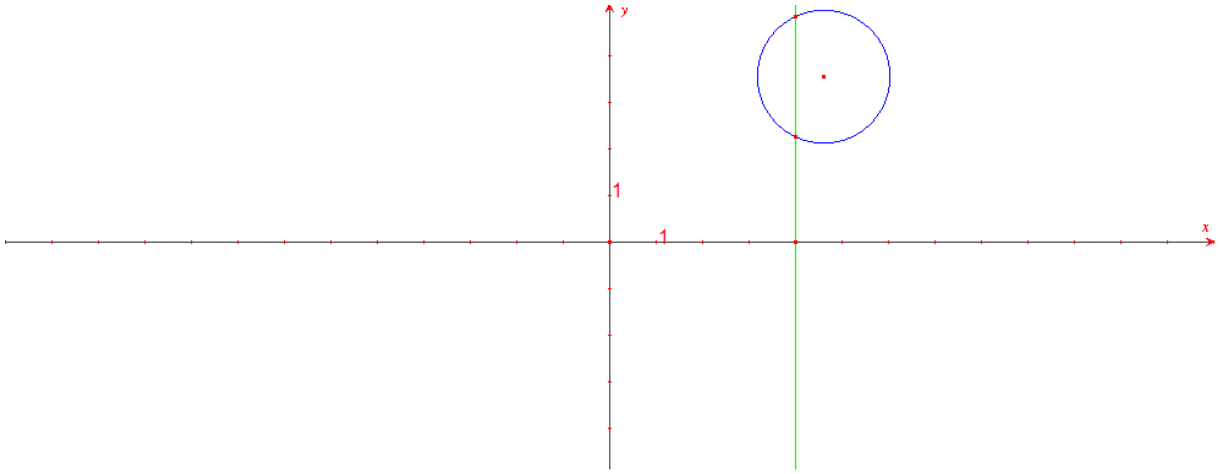
$R = \{\ldots, (-2,-3), (-1,-2), (0,-1), \ldots\}$ Définition en extension

$R = \{(x,y) \leftarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x - 1\}$ Définition en compréhension

Exemple fonction : $\{(x,y) \leftarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}\ ssi\ \forall x \in \mathbb{R} :\ \exists\ 0\ ou\ 1\ f(x)$



Exemple non fonction :

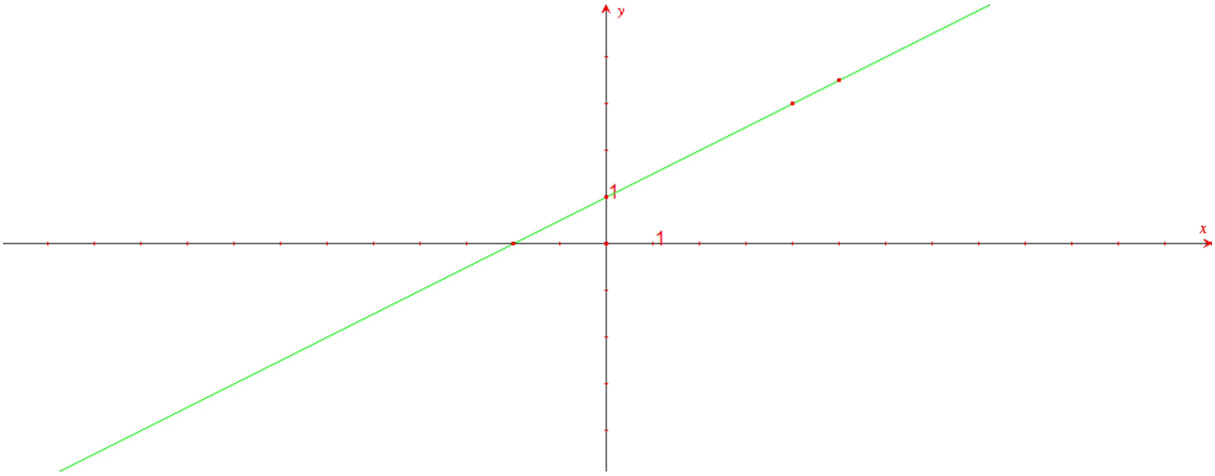


3.5. Applications

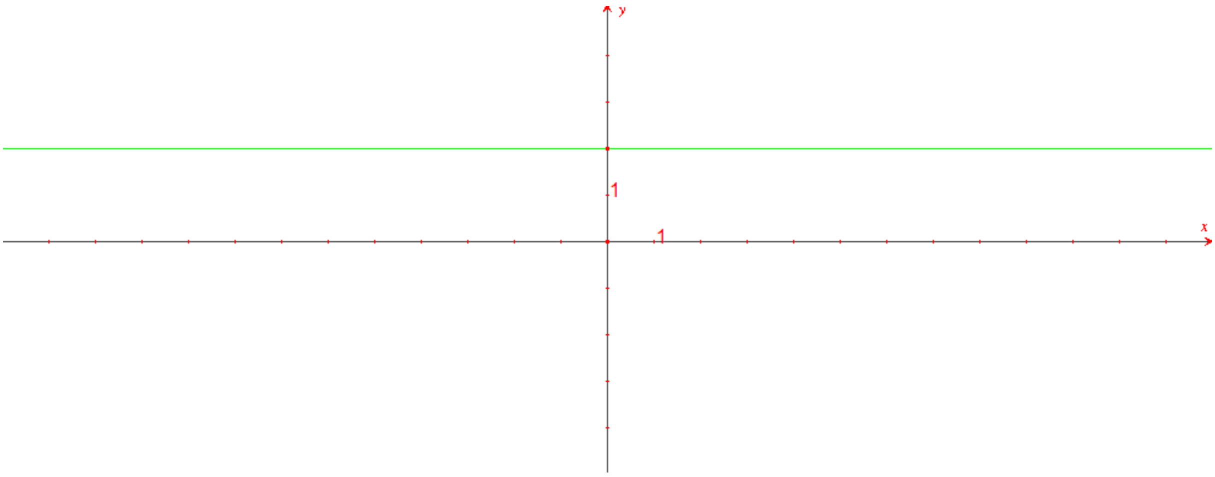
3.5.1. Définition

Une application est une fonction dont les origines des couples qui la composent ont exactement une et une seule image.

Exemple application : $\{(x, y) \leftarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R} : \exists!\ f(x)$



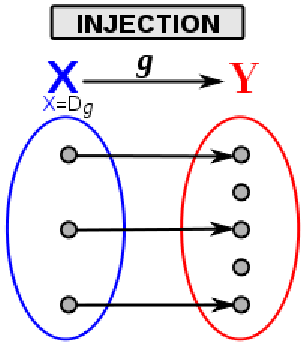
Exemple non application :



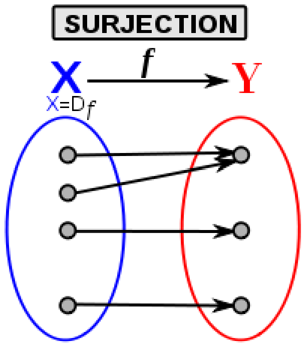
3.5.2. Propriétés d'une application

L'application f , contenue dans $A \times B$, peut-être :

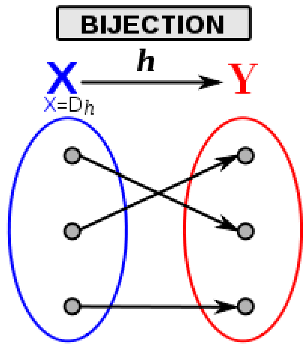
- Une injection : Tout élément de b est image d'au plus un élément de A



- Une surjection : Tout élément de b est l'image d'au moins un élément de A



- Une bijection : Tout élément de b est l'image d'une et une seule élément de A



Exercices sur les ensembles :

- Soit A = ensemble des diviseurs de 24 et B = ensemble des diviseurs de 36
  - Déterminer A et B

    $24 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

    $36 = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
  - Trouver leur cardinal

    #A = 8

    #B = 9
  - Écrire en extension les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \vartriangle B$

    $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

    $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$

    $A \setminus B = \{8, 24\}$

    $B \setminus A = \{9, 18, 36\}$

    $A \vartriangle B = \{8, 9, 18, 24, 36\} = A \setminus B \cup B \setminus A$
- Soient les 2 intervalles réels $=]2, 4]\ et\ B = [3, 5]$. Ecrire sous forme d'intervalles les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \vartriangle B$

  $A \cap B = [3, 4]$

  $A \cup B =]2, 5]$

  $A \setminus B =]2, 3[$

  $B \setminus A =]4, 5]$

  $A \vartriangle B =]2, 3[\cup]4, 5]$
- Écrire en extension l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{N} \mid ((x\ MOD\ 4 = 0)\ ou\ (x\ MOD\ 7 = 2))\ et\ (x < 30)\}$$

$$A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$$

$$B = \{2, 9, 16, 23\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{0, 2, 4, 8, 9, 12, 16, 20, 23, 24, 28\}$$

- Écrire en compréhension l'ensemble $\{0, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

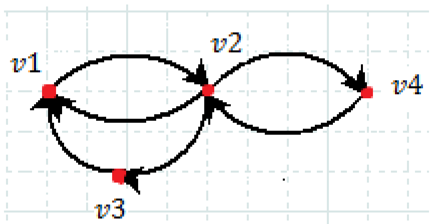
$$\{x^2 \mid (x \in \mathbb{N}_0) \wedge (x \leq 10)\}$$

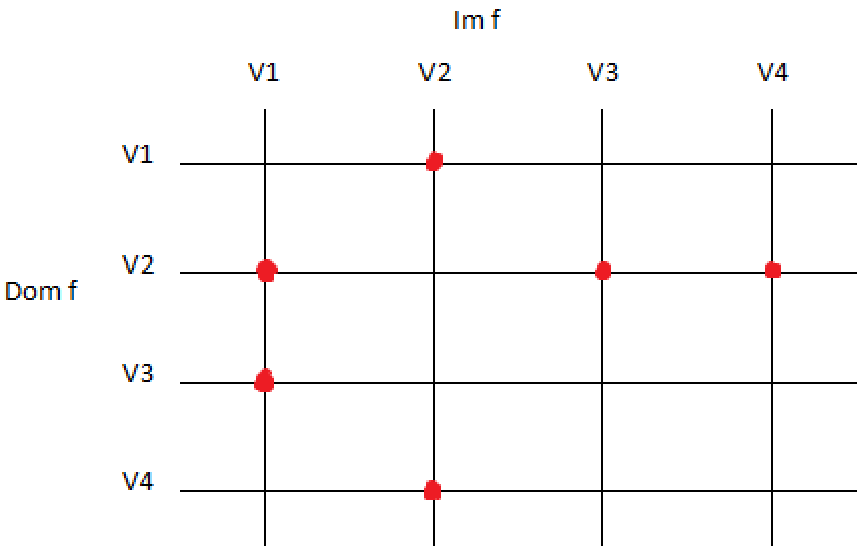
- Calculez # $\emptyset$

$$\#\,\emptyset = \{\} = 0$$

Exercices sur les relations et fonctions

- Une compagnie aérienne dessert 4 villes v1, v2, v3, v4. Elle assure les liaisons directes : aller et retour entre v1 et v2, v3 à v1, v2 à v3, aller et retour entre v2 et v4.
  - Ecrire cette relation en extension

    $R = \{(v1, v2), (v2, v1), (v3, v1), (v2, v3), (v2, v4), (v4, v2)\}$
  - Représenter de trois manières différentes
    - ✓ 

    - ✓ $R = \{(v1, v2), (v2, v1), (v3, v1), (v2, v3), (v2, v4), (v4, v2)\}$
    - 

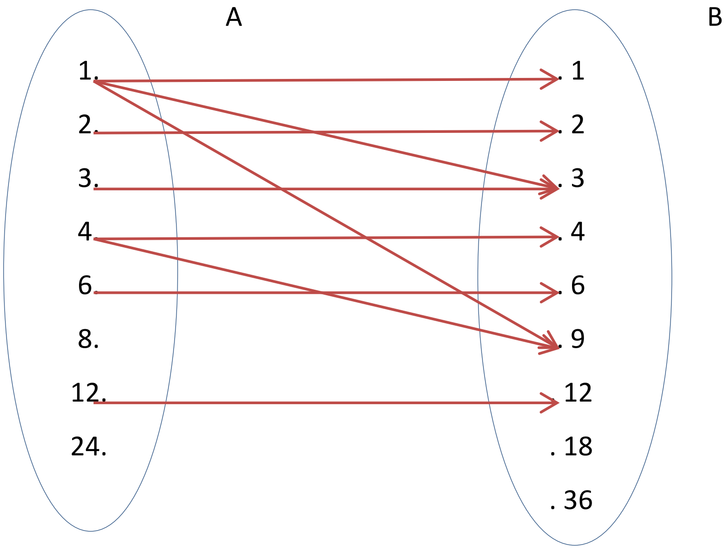
    - ✓
  - Décrire ses propriétés.
    - ✓ Réflexive ? Non car aucun trajet qui revient directement à son trajet de départ
    - ✓ Symétrique ? Non car par exemple : le trajet v2 à v3 n'a pas de symétrique direct
    - ✓ Antisymétrique ? Non car par exemple : le trajet v1 à v2 à son propre symétrique
    - ✓ Transitif ? Non car par exemple : Le trajet successif de v1 à v2 et v2 à v4 existent mais pas v1 à v4
    - ✓ Circulaire ? Non car par exemple : Le trajet de v4 à v1 n'existe pas alors que les trajets v1 à v2 et v2 à v4 existent

- Soient les ensembles $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n\ divise\ 24 \}$ et $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid n\ divise\ 36 \}$. La relation R de $A \times B$ est définie par $aRb \Leftrightarrow (a + 1)\ divise\ (b + 1)$.
  - Décrire R en extension

    $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24 \}$

    $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 9 , 12 , 18 , 36 \}$

    $A \times B = \{(1 , 1) , (1 , 3) , (1 , 9) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (4 , 9) , (6 , 6) , (12 , 12)\}$
  - Décrire R en représentation sagittale



  - Décrire son domaine et son image

    $Dom(R) = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12 \}$

    $Im(R) = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 9 , 12 \}$

- Soit l'ensemble $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n\ MOD\ 3 = 1\ ET\ n < 20\}$.
  - Décrire la relation R de $A \times A$ définie par $aRb \Leftrightarrow 2a < b$

    $$R = \begin{Bmatrix} (1 , 4) , (1 , 7) , (1 , 10) , (1 , 13) , (1 , 16) , (1 , 19) , \\ (4 , 10) , (4 , 13) , (4 , 16) , (4 , 19) , (7 , 16) , (7 , 19) \end{Bmatrix}$$
  - Décrire son domaine et son image

    $Dom(R) = \{ 1 , 4 , 7 \}$

    $Im(R) = \{ 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 \}$

- Pour chaque ensemble E suivant, on définit une relation R de $E \times E$. Cette relation est réflexive, symétrique, transitive ? Justifiez votre réponse.

E	R	Relation		Justification
$\mathbb{N}$	$x \leq y$	Réflexive ?	Oui	$\forall n \in \mathbb{N} \mid n \leq m$ *Vrai par definition de* $\leq$
		Symétrique ?	Non	$\exists m, n \in \mathbb{N} \mid m < n \not\Rightarrow n < m$. *Par exemple* : $2 < 4$ *mais pas* $4 \nless 2$
		Transitive ?	Oui	
$\mathbb{R}$	$x > y$	Réflexive ?	Non	
		Symétrique ?	Non	
		Transitive ?	Oui	
$\mathbb{N}$	a MOD b = 1	Réflexive ?	Non	Par exemple : 2 MOD 200 ≠ 1
		Symétrique ?	Non	1 MOD 2 = 1 et 2 MOD 1 ≠ 1
		Transitive ?	Non	10 MOD 3 = 1 , 3 MOD 2 = 1 donc 10 MOD 2 ≠ 1
$\{x \in \mathbb{N} \mid 24\ MOD\ n = 0\}$	x divise y	Réflexive ?	Oui	$\forall x \in E : x \mid x$ *est vrai*
		Symétrique ?	Non	
		Transitive ?	Oui	12 | 6 = 0 et 6 | 12 ≠ 0
Droites de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	d1 est // à d2	Réflexive ?	Oui	Par calcul du coefficient angulaire des droites //
		Symétrique ?	Oui	
		Transitive ?	Oui	d1 || d2 , d2 || d3 donc d1 || d3
Droites de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	d1 est ⊥ à d2	Réflexive ?	Non	Par définition de ⊥. Une droite ne peut être ⊥ à elle-même
		Symétrique ?	Oui	Par calcul du coefficient angulaire des droites //
		Transitive ?	Non	Non car d1 || d3
Propositions logiques	$p \Rightarrow q$	Réflexive ?	Oui	Car $p \Rightarrow p$ (par tautologie)
		Symétrique ?	Non	$(p \Rightarrow q) \not\Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
		Transitive ?	Oui	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ *par tautologie*

- On considère les fonctions suivantes de $A \times B$. Pour chacune, vérifier s'il s'agit d'une application. Si oui, indiquer si elle est injective, surjective ou bijective. Justifiez votre réponse.

A	B	F	Appl ?	Inj ?	Surj ?	Bij ?
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$n \to n+1$	Oui	Oui	Oui	Oui
$\mathbb{N}$	$\{n \in \mathbb{N} \mid n\ MOD\ 2 = 0\}$	$n \to 2n$	Oui	Oui	Oui	Oui
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \to x^2$	Oui	Non	Non	Non
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \to x^3$	Oui	Oui	Oui	Oui
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \to e^x$	Oui	Non	Non	Non
$\{ n \mid n\ divise\ 36 \}$	$\{ n \mid n\ divise\ 24 \}$	$n \to PGCD\ (n, 24)$	Oui	Oui	Non	Non

4. Graphes

4.1. Introduction

4.1.1. Définitions

- Un graphe est structuré par un ensemble de sommets (ou nœuds) reliés par des arêtes.
- Le nombre de sommets est l'ordre du graphe.
- Une arête est une paire non ordonnée de sommets reliés, représentée par une ligne joignant ces deux sommets.
- Une boucle est une arête joignant un sommet à lui-même.

4.1.2. Types de graphes

- Un graphe simple est un graphe sans boucle dans lequel deux sommets distincts sont rejoints par au plus une arête.

  Exemple :

- Un multigraphe est un graphe dans lequel deux sommets distincts peuvent être rejoints par plusieurs arêtes.

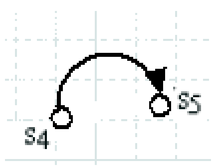
  Exemple :

  Lorsque deux arêtes joignent la même paire de sommets, on les qualifie d'arêtes parallèles.

  Exemple :

- Un digraphe est un graphe orienté, c'est-à-dire un graphe dont les arêtes sont des arcs. Un arc est une paire ordonnée (ou couple) de deux sommets reliés, représenté par une flèche joignant ces deux sommets.

  Exemple :

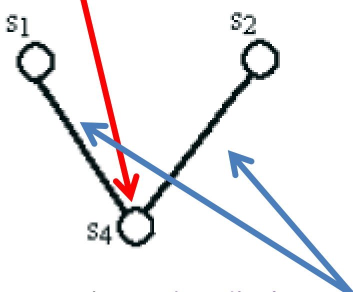


4.1.3. Adjacence et incidence

- Deux sommets sont adjacents lorsqu'ils sont reliés par une arête (ou par un arc dans un graphe orienté).

Exemple :

- Deux arêtes sont adjacentes si elles possèdent un sommet commun. On dira qu'une arête est incidente à un sommet.



Exemple :

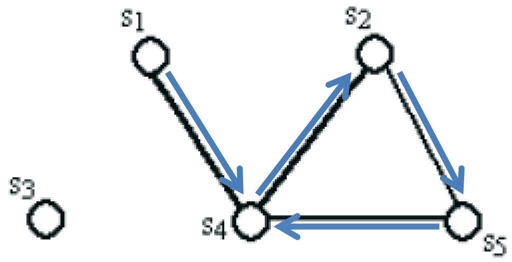
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- La matrice d'adjacence d'un graphe est une matrice booléenne dont les lignes et colonnes correspondent à un ordre donné des sommets de ce graphe et dont les éléments expriment l'adjacence ou non des sommets.

Exemple :

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	0	0	0	1	0
S_2	0	0	0	1	1
S_3	0	0	0	0	0
S_4	1	1	0	0	1
S_5	0	1	0	1	0

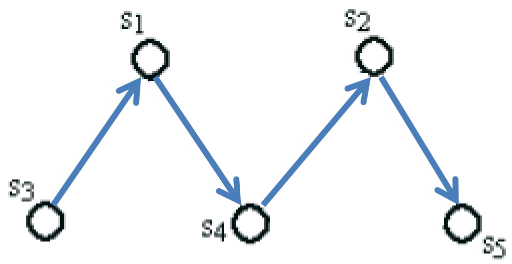
4.2. Chemins, circuits et cycles

- Un chemin est une suite d'arêtes adjacentes distinctes. Un chemin peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas plusieurs fois par la même arête.



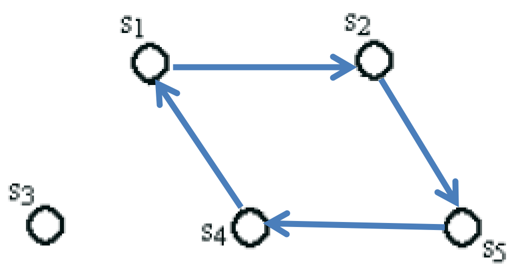
Exemple :

- Un graphe est connexe si toute paire de sommets est reliée par un chemin.



Exemple :

- La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes de ce chemin.
- La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets.
- Le diamètre d'un graphe connexe est la distance maximum entre les sommets d'un graphe.
- Un cycle (ou circuit) est un chemin fermé, qui revient à son point de départ, c'est à dire un chemin dont la première et la dernière arête sont incidentes au même sommet.

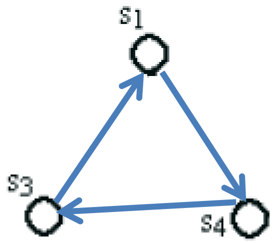


Exemple :

- Un graphe sans cycle ni boucle est un arbre.

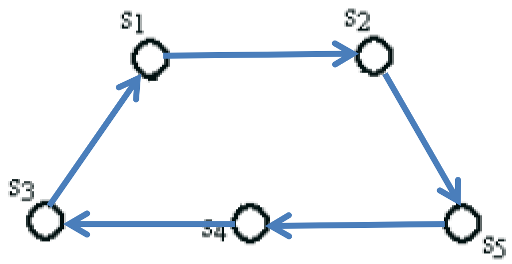
- Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois. Tous les graphes ne possèdent pas un tel cycle, mais si c'est le cas, on dit que le graphe est un graphe eulérien.

Exemple :



- Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois. Un graphe possédant un tel cycle est un graphe hamiltonien.

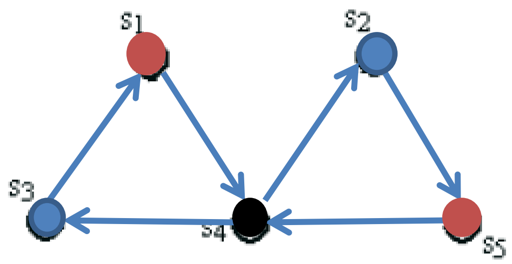
Exemple :



4.3. Coloration d'un graphe et nombre chromatique

- Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que 2 sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Exemple :

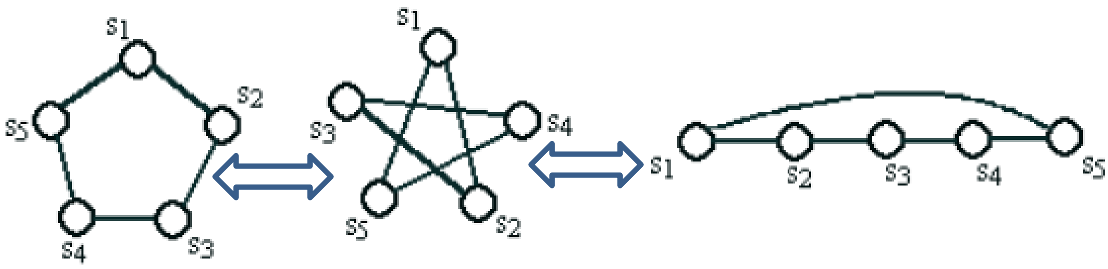


- Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

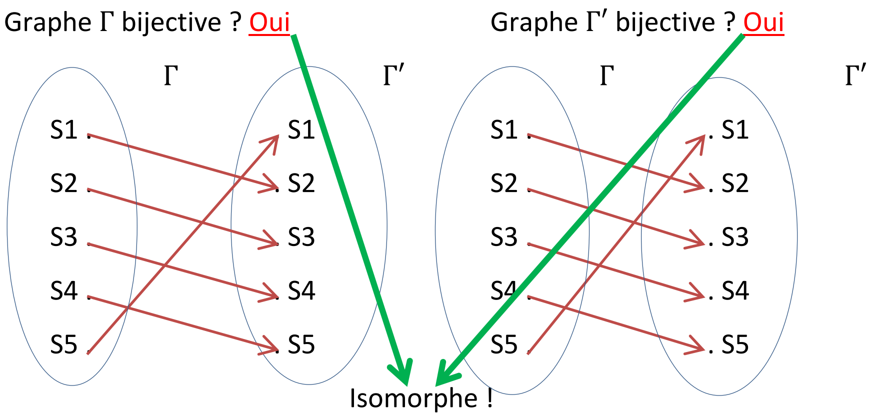
4.4. Isomorphismes de graphes

La forme donnée au graphe sur le papier n'a pas d'importance. Ce sont des représentations différentes sur le papier mais c'est la même réalité mathématique.

Exemples :



Deux graphes Γ et Γ' sont isomorphes s'il existe une bijection de l'ensemble des sommets de Γ vers l'ensemble des sommets de Γ' tels que si deux sommets de Γ sont adjacents, leurs sommets-images par la bijection sont encore adjacents dans Γ'.



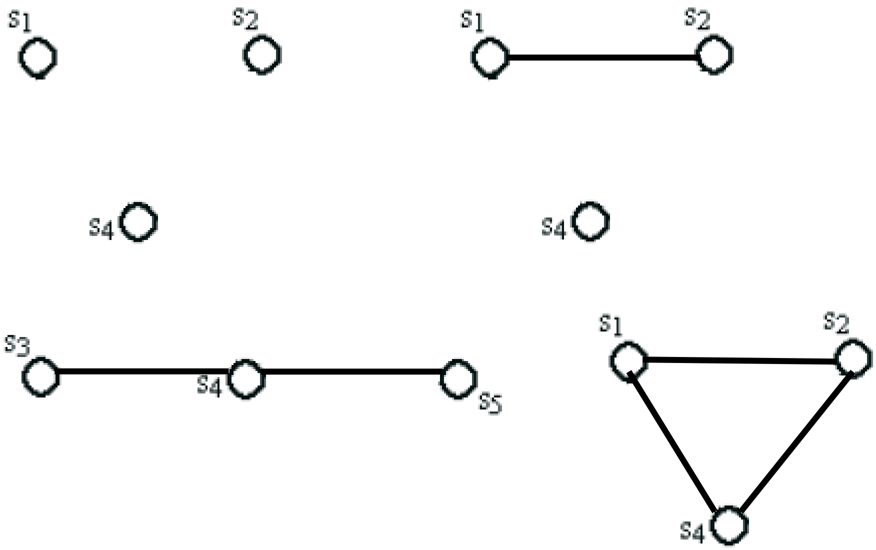
- S'il n'y a pas d'isomorphisme
  - Détecter une propriété présente dans un graphe (longueur de chemin, degré d'un sommet, etc).
- S'il y a isomorphisme
  - Établir une bijection mettant l'isomorphisme en évidence
  - Comparer les matrices d'adjacence des deux graphes.

Exercices sur les graphes

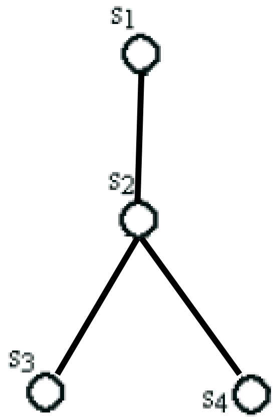
- Esquisser et énumérer tous les graphes simples
  - Ordre 1 [1 possibilité]

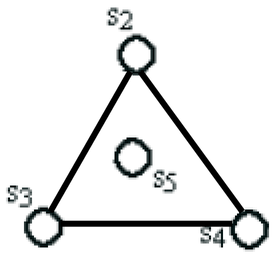
  - Ordre 2 [2 possibilités]

  - Ordre 3 [4 possibilités]

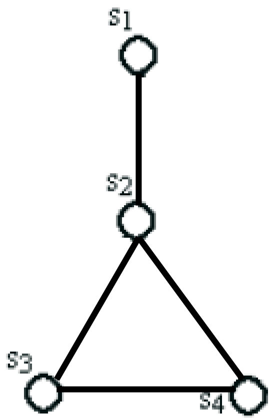


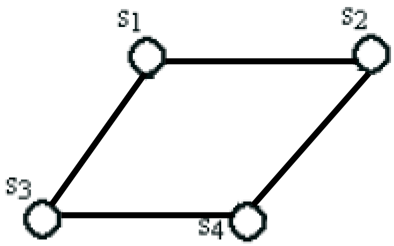
- Ordre 4 [11 possibilités]

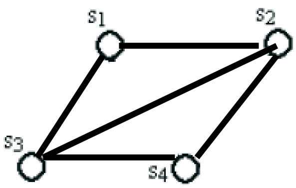


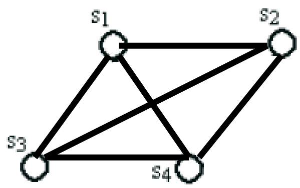


q

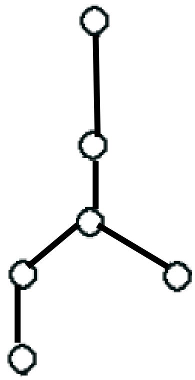




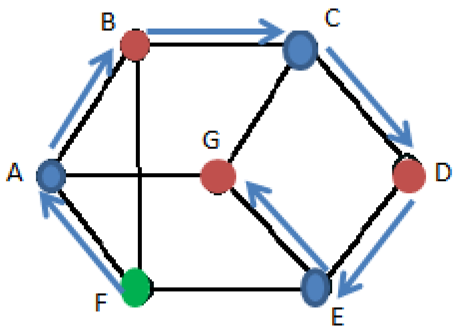




- Dessiner un graphe de 5 sommets ayant les caractéristiques suivantes :
  - Le graphe est connexe
  - Le graphe est un arbre
  - Son diamètre est de 3



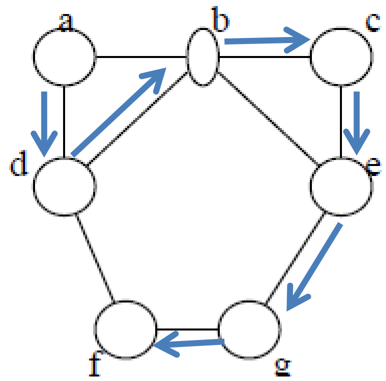
- Etudier le graphe ci-dessous



  - Son ordre ? 7
  - Son diamètre ? 3
  - Son nombre chromatique ? 3
  - Existence d'un cycle eulérien ? Non
  - Existence d'un cycle hamiltonien ? Oui
  - Etablir sa matrice d'adjacence

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	0	1	1
B	1	0	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	0	0	1
D	0	0	1	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0	1	1
F	1	1	0	0	1	0	0
G	1	0	1	0	1	0	0

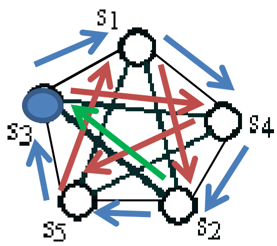
- Soit le graphe Γ



Donner en justifiant votre réponse :

- Son ordre : 7 car 7 sommets
- Le sommet de plus grand degré : 4 car le sommet b possède 4 arêtes incidentes
- La distance entre d et e : 2 car { d , b } et { b , e }
- Le diamètre de Γ : 3
- Γ possède-t-il un circuit eulérien ? Non car par exemple e et d ont des sommets de degré 3 (impair)
- Γ possède-t-il un circuit hamiltonien ? Oui

- Une ligue de football compte 5 équipes. Il est décidé lors d'un week-end que chaque équipe jouera 4 matchs (2 équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois).
  - Représenter cette situation à l'aide d'un graphe :



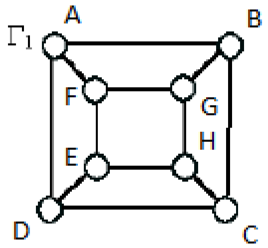
- Donner son type ? (simple ou multigraphe) : Simple
- Donner son ordre ? 5
- Donner le degré de chacun des sommets de ce graphe ? 4 pour chaque sommet
- Le graphe possède-t-il un circuit eulérien ? Si oui, donnez-en un.

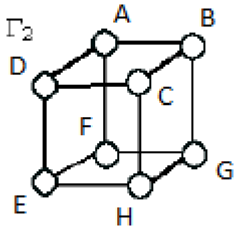
  Oui car chaque sommet est de degré pair. $\{s_3 , s_4\}$ $\{s_4 , s_5\}$ $\{s_5 , s_1\}$ $\{s_1 , s_2\}$ $\{s_2 , s_5\}$ $\{s_5 , s_3\}$ $\{s_3 , s_1\}$ $\{s_1 , s_4\}$ $\{s_4 , s_2\}$ $\{s_2 , s_3\}$

- Justifier
  - La matrice d'adjacence d'un graphe est-elle toujours symétrique ?
    - Si oui :
      - Dans un graphe simple dans tous les cas
      - Dans un graphe orienté, si et seulement si toutes les arêtes ont leurs symétriques
    - Si non :
      - Dans un graphe orienté, la matrice adjacente n'est pas symétrique s'il existe au moins 1 arête qui n'a pas sa symétrique
  - A quoi correspond le nombre d'élément vrai d'une ligne ou d'une colonne de la matrice d'adjacence ?

    Le nombre d'éléments vrai d'une ligne ou d'une colonne de la matrice représente le degré de sommet correspondant.

- Dans chacun des cas suivants, les graphes Γ_1 *et* Γ_2 sont-ils isomorphes ?

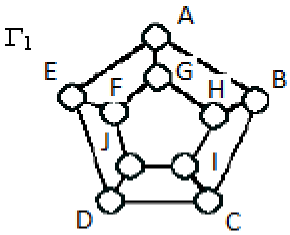


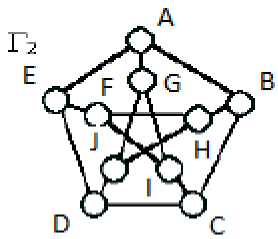


	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0	1	0
C	0	1	0	1	0	0	0	1
D	1	0	1	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	1
F	1	0	0	0	1	0	1	0
G	0	1	0	0	0	1	0	1
H	0	0	1	0	1	0	1	0

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0	1	0
C	0	1	0	1	0	0	0	1
D	1	0	1	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	1
F	1	0	0	0	1	0	1	0
G	0	1	0	0	0	1	0	1
H	0	0	1	0	1	0	1	0

De la numérotation près, les graphes sont isomorphes (ils ont la même matrice adjacente)





Isomorphisme ? Non car il existe une propriété qui les différenties :

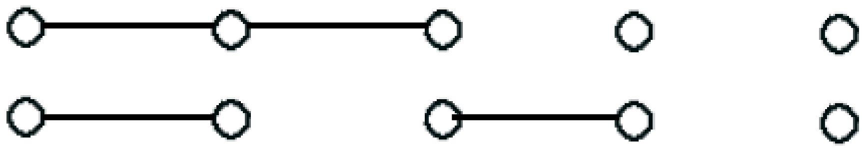
- Γ_1 a un cycle de longueur 4 et de diamètre 3
- Γ_2 a un cycle de longueur 4 et de diamètre 2

Exercices et problèmes d'entrainement

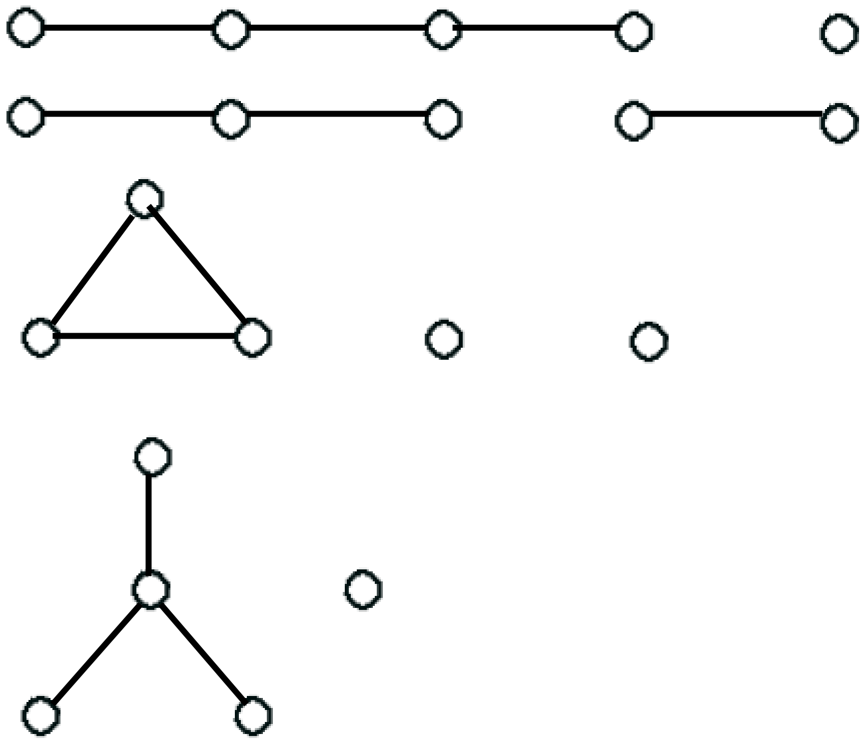
- Esquisser et énumérer tous les graphes simples d'ordre 5
  - 0 arête

  - 1 arête

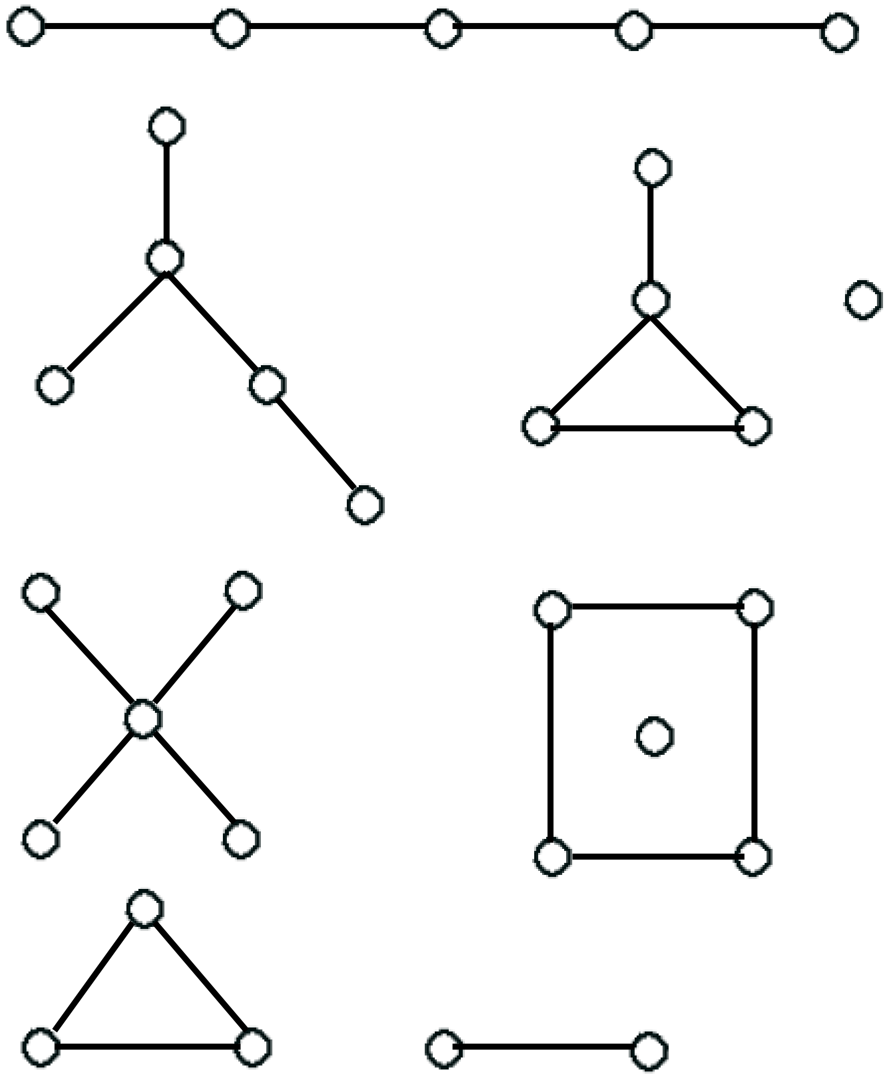
  - 2 arêtes



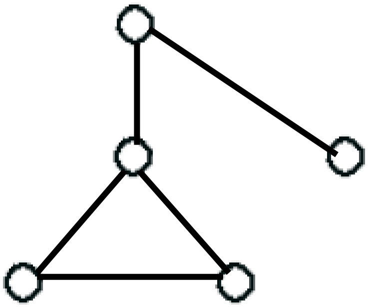
  - 3 arêtes

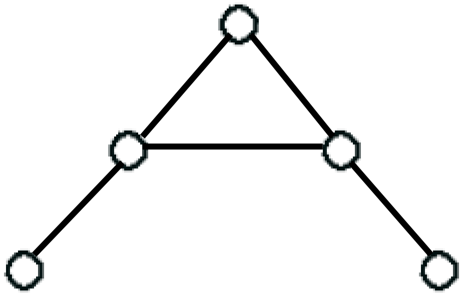


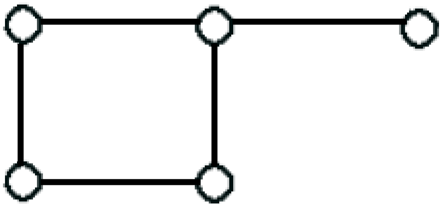
- 4 arêtes

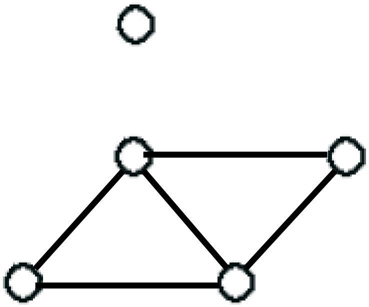


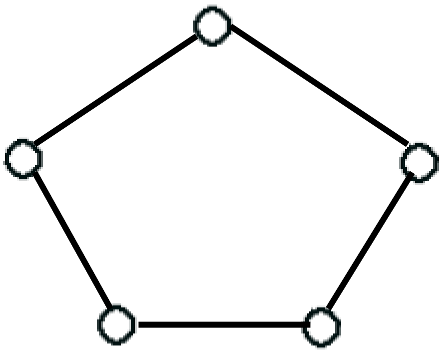
- 5 arêtes



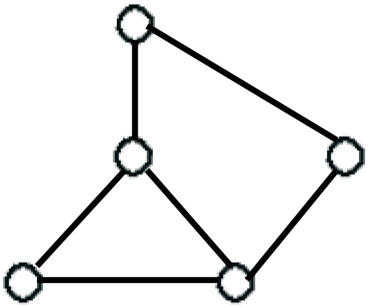
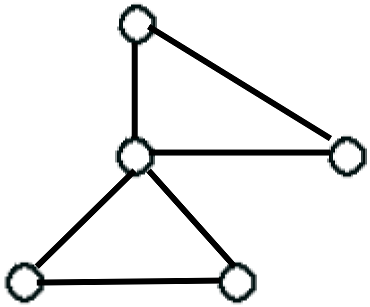
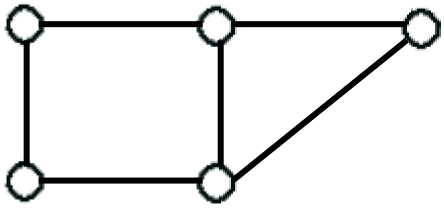
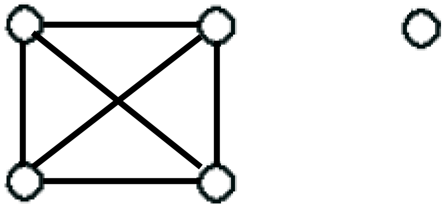
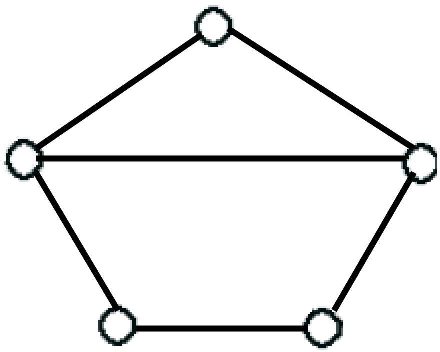




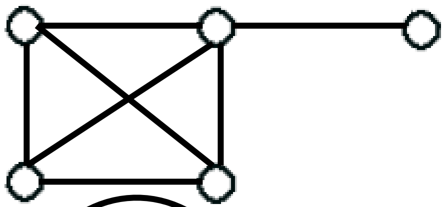
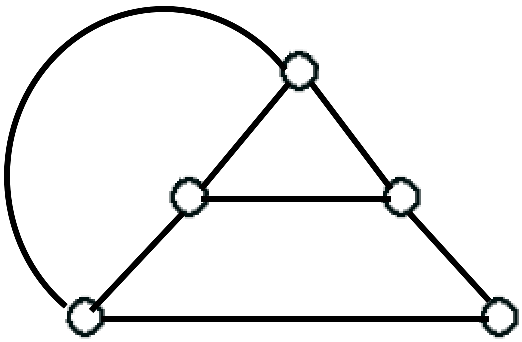
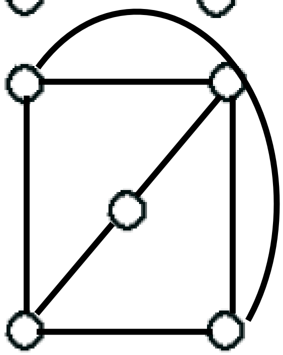
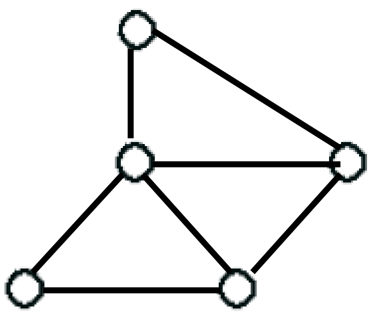




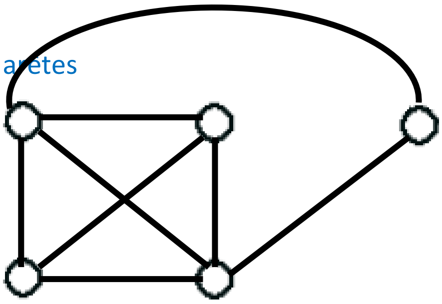
- 6 arêtes

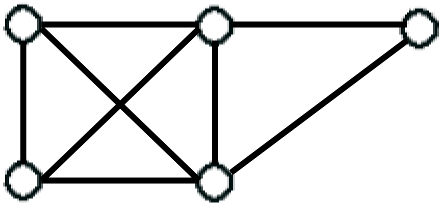






- 7 arêtes

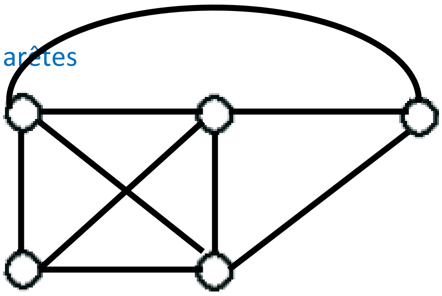





- 8 arêtes





- 9 arêtes

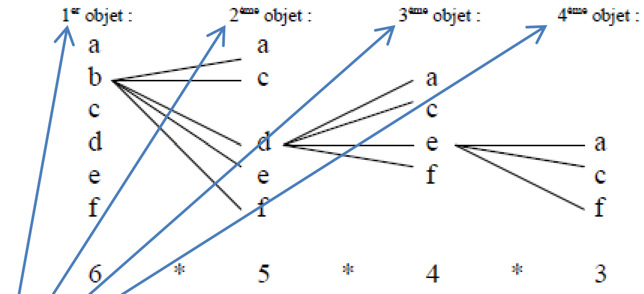


5. Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire concerne les ensembles finis ; elle s'occupe de dénombrements. On dénombre les sous-ensembles.

5.1. Arrangements

On appelle arrangements (sans répétition) de m objets pris p à p $(m \geq p)$ tous les groupements de p objets distincts pris parmi m.



Le nombre d'arrangements de m objets pris p à p est noté :

$$A_m^p = m * (m-1) * (m-2) * \dots * (m-p+1) = \frac{m!}{(m-p)!}$$

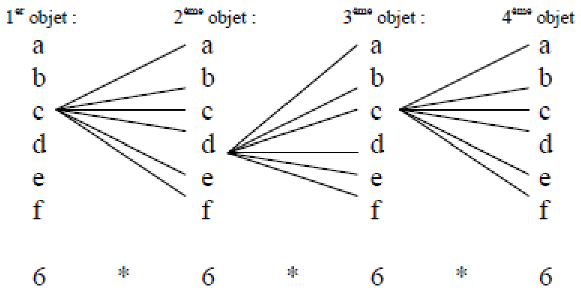
Exemples :

$$A_6^1 = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{5*4*3*2*1} = 6\ arrangements\ possibles$$

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = 30\ arrangements\ possibles$$

La formule de récurrence est de $A_m^p = mA_{m-1}^{p-1}$

Lorsqu'on accepte qu'un ou plusieurs objet(s) se répète(nt), on parle d'arrangements avec répétitions.



Le nombre d'arrangements avec répétitions de m objets pris p à p est parfois noté :

$$\alpha_m^p = m^p$$

Exemple :

$$\alpha_6^4 = 6^4 = 1296\ arrangements\ possibles$$

La formule de récurrence est de $\alpha_m^p = m\alpha_m^{p-1}$

5.2. Permutations

On appelle permutations de m objets tous les groupements de m objets distincts où deux groupements diffèrent par l'ordre dans lequel ces objets sont rangés.

Le nombre de permutations de m objets est noté :

$$P_m = m!$$

Exemple :

A = {1 , 2 , 3}. Les rangements possibles sont :

{ 1-2-3 } , { 1-3-2 } , { 2-1-3 } , { 2-3-1 } , { 3-2-1 } , { 3-1-2 }

$$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6 \: permutations \: possibles$$

Lorsque les m objets comprennent α fois l'objet a, β fois l'objet b, etc… On parle de permutations avec répétitions.

Le nombre de permutations avec répétitions de m objets est noté :

$$P_m^{\alpha,\beta,\dots,1} = \frac{P_m}{P_\alpha, P_\beta, \dots, P_1}$$

5.3. Combinaisons

On appelle combinaisons de m objets pris p à p $(m \geq p)$ tous les groupements de p objets distincts pris parmi m où deux groupements différents par la nature des objets.

Le nombre de combinaisons de m objets pris p à p est noté :

$$C_p^m = \frac{A_m^p}{P_p} = \frac{m!}{(m-p)! * p!}$$

Exemple :

$$C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! * 2!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{720}{48} = 15 \: combinaisons \: possibles$$

La formule de récurrence est :

$$C_m^p = \frac{m}{p} * C_{m-1}^{p-1}$$

5.4. Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est particulièrement utile lorsqu'on doit calculer la puissance entière positive d'une somme de 2 termes.

$$(a+b)^m$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^p * a^{m-1} * b^p$$

$$= C_m^0 * a^m + \dots + C_m^p * a^{m-p} * b^p + \dots + C_m^m * b^m \: avec \: m \in \mathbb{N}_0$$

Exercices sous forme de travaux dirigés au niveau 1

- Combien de bulletins doit-on remplir pour être certain de gagner le tiercé dans l'ordre pour une course où participent 20 chevaux?

$$A_{20}^{3} = \frac{20\,!}{(20-3)\,!} = \frac{20\,!}{17\,!} = 20 * 19 * 18 = 6.840$$

- De combien de manières peut-on classer :
    - 30 fiches?

$$30\,! \simeq 2{,}652528598 * 10^{32}$$

    - 100 fiches?

$$100\,! \;\simeq plus\ de\ 10^{100}$$

- De combien de manières peut-on remplir une grille d'un bulletin de loto?

$$C_{42}^{6} = \frac{42\,!}{(42-6)\,! * 6\,!} = 5.245.786$$

- Soit un ensemble de 11 points dans le plan tels que trois points quelconques de ceux-ci ne soient pas alignés. Combien y a-t-il de droites joignant ces points deux à deux?

$$C_{11}^{2} = \frac{11\,!}{(11-2)\,! * 2!} = 55$$

- De combien de manières peut-on distribuer 5 chapeaux distincts à 5 personnes de telle manière que chacune ait un chapeau?

$$5\,! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

- Combien d'équipes de 6 personnes peut-on former si l'on dispose de 10 personnes?

$$C_{10}^{6} = \frac{10\,!}{(10-6)\,! * 6\,!} = 210$$

- Avec des décimaux différents :
    - Combien peut-on former de codes de 5 chiffres ?

$$A_{10}^{5} = 10 * 9 * 8 * 7 * 6 = 30.240$$

    - Combien parmi eux se terminent par 3 ?

$$A_{9}^{4} = 9 * 8 * 7 * 6 = 3.024$$

    - Combien parmi eux commencent par 12 ?

$$A_{8}^{3} = 8 * 7 * 6 = 336$$

    - Combien parmi eux ne se termine ni par 3, ni par 6 ?

$$A_{9}^{5} * 8 = 9 * 8 * 7 * 6 * 8 = 24.192$$

- Avec des décimaux pas forcément différents :
  - Combien peut-on former de codes de 5 chiffres ?

$$\alpha_{10}^{5} = 10^5 = 100.000$$

  - Combien parmi eux se terminent par 3 ?

$$\alpha_{10}^{4} = 10^4 = 10.000$$

  - Combien parmi eux commencent par 12 ?

$$\alpha_{10}^{3} = 10^3 = 1.000$$

  - Combien parmi eux ne se termine ni par 3, ni par 6 ?

$$8 * \alpha_{10}^{4} = 8 * 10^4 = 80.000$$

- Si on définit le mot comme un assemblage de lettres, combien de mots différents peut-on former avec toutes les lettres du mot HURLUBERLU?

$$\frac{10\,!}{3\,! * 2\,! * 2!} = 151.200$$

- Une réunion met en présence 50 personnes. Combien de poignées de mains sont échangées?

$$C_{50}^{2} = \frac{50\,!}{(50-2)\,! * 2\,!} = \frac{50\,!}{48\,! * 2\,!} = \frac{50 * 49}{2} = 1.225$$

- Les 9 gagnants d'un concours peuvent choisir entre 4 lots différents, chaque lot existant en 9 exemplaires. Combien de choix distincts sont possibles?

$$\alpha_{9}^{4} = 9^4 = 262.144$$

Exercices sous forme de travaux dirigés au niveau 2

- Parmi 50 professeurs et 600 élèves on doit choisir des délégués pour former une commission comprenant 4 professeurs et 3 élèves. Déterminer le nombre de possibilités.

$$C_{50}^{4} * C_{600}^{3} = 5.527.200 * 214.921.200 = 1.187.912.456.640.000$$

- Combien peut-on former de plaques d'immatriculation du type 3 lettres et 3 chiffres.

$$\alpha_{26}^{3} * \alpha_{10}^{3} = 17.576.000$$

- Combien peut-on former de codes de 5 chiffres différents :
    - Qui comprennent le « 5 »?

$$A_{9}^{4} * 5 = (1 * 9 * 8 * 7 * 6) * 5 = 15.120$$

    - Qui comprennent le « 3 », mais pas le « 7 »?

$$A_{8}^{4} * 5 = (1 * 8 * 7 * 6 * 5) * 5 = 8.400$$

- Combien peut-on former de codes de 5 chiffres qui peuvent se répéter :
    - Qui comprennent le « 5 »?

$$\alpha_{10}^{4} * 5 = 10^{4} * 5 = 50.000$$

    - Qui comprennent le « 3 », mais pas le « 7 »?

$$\alpha_{9}^{4} * 5 = 9^{4} * 4 = 32.805$$

- Pour ranger 20 nouveaux ouvrages dans une bibliothèque, il reste 7 places dans un premier rayon, 5 places dans un second rayon et 8 dans un troisième. De combien de manières peut-on répartir ces 20 volumes dans ces trois rayons, l'ordre dans un rayon étant sans importance ?

$$C_{20}^{7} * C_{13}^{5} * C_{8}^{8} = \frac{20\,!}{(20-7)\,! * 7\,!} * \frac{13\,!}{(13-5)\,! * 5\,!} = 77520 * 1287 = 99.768.240$$

- Parmi les 10^{5} codes de 5 chiffres combien comprennent le chiffre 3 :
    - Une fois ?

$$\alpha_{9}^{4} * 5 = 9^{4} * 5 = 32.805$$

    - Deux fois ?

$$\alpha_{9}^{3} * 10 = 9^{3} * 10 = 7.290$$

    - Trois fois ?

$$\alpha_{9}^{2} * 10 = 9^{2} * 10 = 810$$

    - Quatre fois ?

$$\alpha_{9}^{1} * 5 = 5 * 9^{1} = 45$$

    - Cinq fois ?

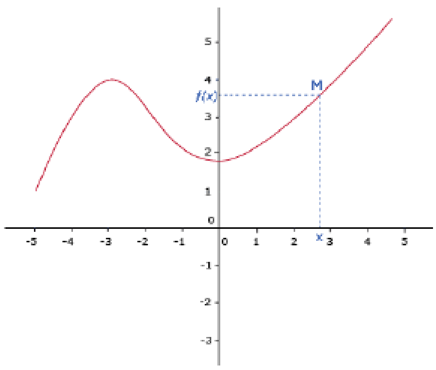
$$\alpha_{10}^{0} = 10^{0} = 1$$

6. Notions basées sur les fonctions réelles

6.1. Rappels

6.1.1. Représentation cartésienne d'une fonction réelle

Une fonction réelle fait correspondre un nombre réel x à son image $y = f(x)$. L'ensemble des couples (x, y) ou $(x, f(x))$ de la fonction peut être représenté dans un repère cartésien pour former le graphe de la fonction

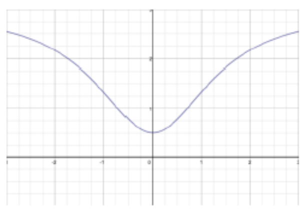


6.1.2. Monotonie et croissance

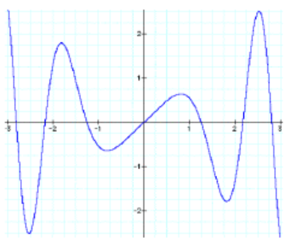
Une fonction monotone est une fonction qui est soit constamment croissante, soit constamment décroissant sur tout intervalle de son domaine de définition.

6.1.3. Parité d'une fonction

f est une fonction paire si et seulement si $\forall x \in Dom(f), f(-x) = f(x)$. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.



f est une fonction impaire si et seulement si $\forall x \in Dom(f), f(-x) = -f(x)$. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



6.1.4. Périodicité d'une fonction

Une fonction f est périodique s'il existe un réel T non nul tel que :

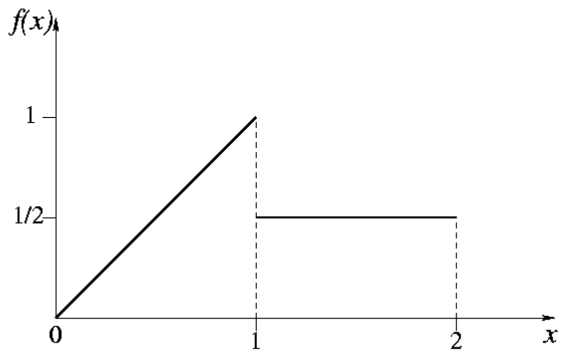
$$f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

La période est la plus petite valeur de T pour laquelle la fonction possède cette propriété. Les fonctions périodiques les plus connues sont les fonctions trigonométriques :

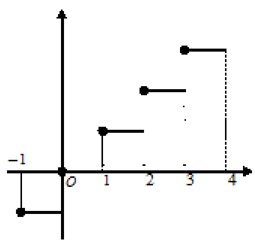
- Cosinus
- Sinus
- Tangente

6.1.5. Les fonctions continues et discontinues

Une vision intuitive de la notion de fonction continue est une fonction dont le graphique cartésien est dessiné sans lever le crayon, ce qui n'est pas le cas pour une fonction discontinue.



- f est continue en a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche en a $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en a $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$



Ces définitions de la continuité en un point conduisent aux définitions plus générales :

- f est continue sur un intervalle $]a,b[$ si et seulement si f est continue en tout point de cet intervalle
- f est continue sur un intervalle $[a,b]$ si et seulement si f est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

6.1.6. Asymptotes

6.1.6.1. Asymptote verticale

Lorsque les valeurs d'une fonction f tendent vers l'infini en s'approchant d'un point a, on dit que le graphe f admet une asymptote verticale au point a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow f \text{ possède une asymptote verticale d'équation } x = a$$

6.1.6.2. Asymptote horizontale

Lorsque les valeurs d'une fonction f tendent vers un réel a lorsque x tend vers l'infini, on dit que le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

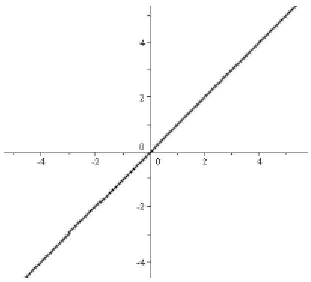
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a \Leftrightarrow f \text{ possède une asymptote horizontale d'équation } y = a$$

Remarque : Une fonction peut posséder plusieurs asymptotes verticales et au plus 2 asymptotes horizontales.

6.2. Fonctions élémentaires

6.2.1. La fonction identique

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$



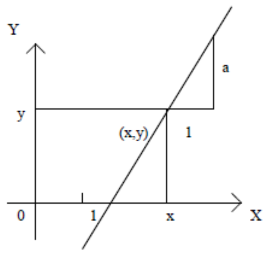
6.2.2. Fonctions du premier degré

Il s'agit des fonctions de la forme $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to ax + b$

Une fonction du premier degré a comme graphique une droite.

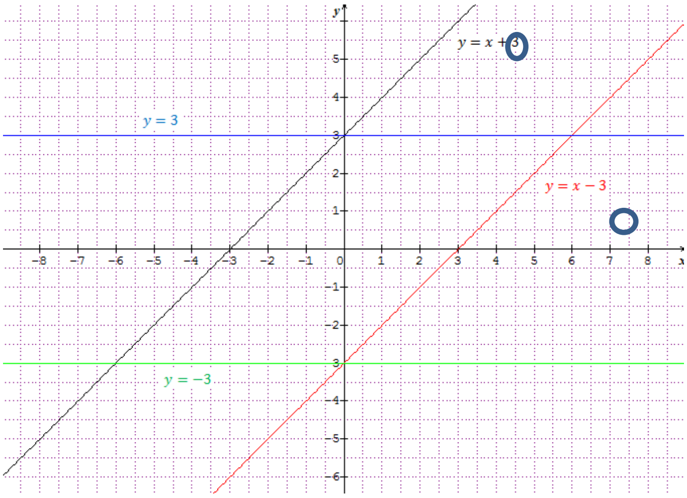
Remarques :

- La pente de la droite $y = ax + b$ (ou coefficient angulaire) est la valeur de a.
  b vaut la valeur de y lorsque x=0
- L'angle α que fait la droite avec l'axe horizontal est donné par $a = tg\ \alpha$



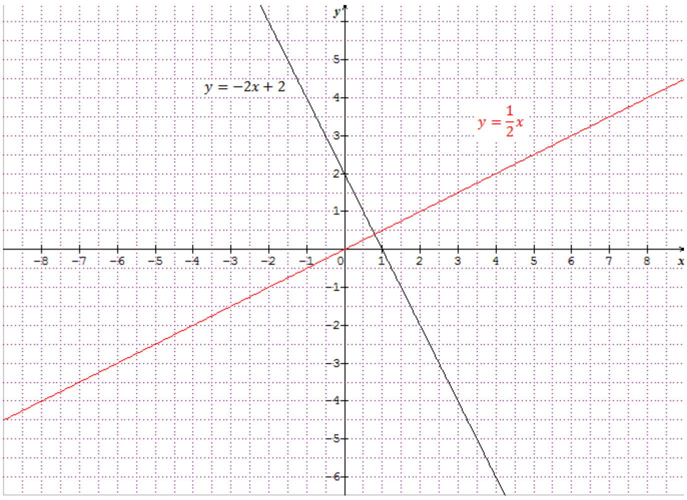
- 2 droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient angulaire.

  Exemple :



- 2 droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs coefficient angulaire sont inversés et opposés, c'est-à-dire si le produit de leurs coefficients angulaires vaut -1.

  Exemple : $-2 * \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$



- Équation cartésienne d'une droite passant par 2 points $(x_1, y_1)\ et\ (x_2, y_2)$:

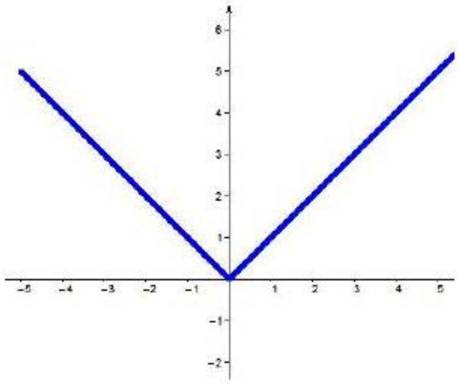
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- Équation cartésienne d'une droite passant par un point (x_0, y_0) et de pente m :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

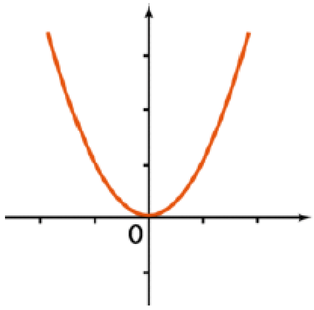
6.2.3. La fonction valeur absolue

Il s'agit de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to |x|$



6.2.4. La fonction carré

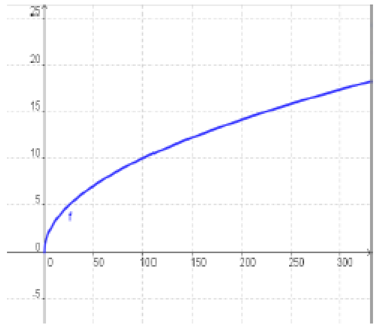
Il s'agit de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$



Le graphique est une parabole de sommet (0,0).

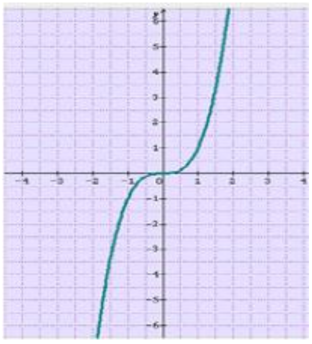
6.2.5. La fonction racine carrée

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to \sqrt{x}$



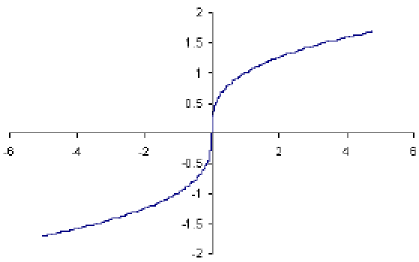
6.2.6. La fonction cube

Il s'agit de la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$



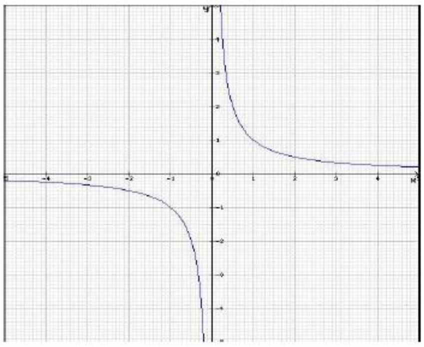
6.2.7. La fonction racine cubique

Il s'agit de la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt[3]{x}$



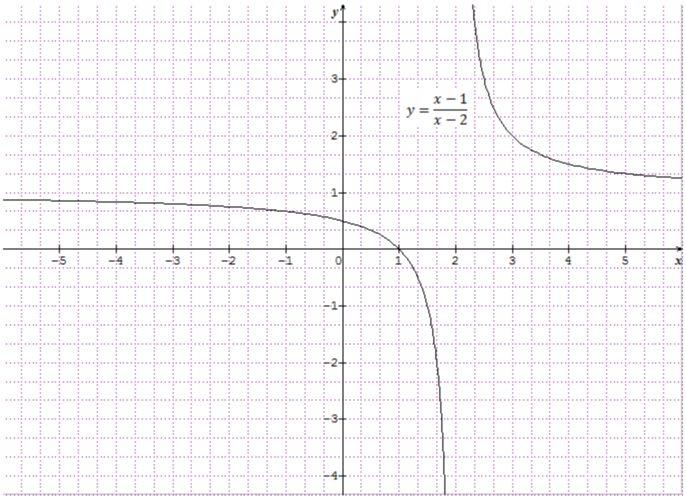
6.2.8. La fonction inverse

Il s'agit de la fonction $f\ :\ \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0\ :x \to \frac{1}{x}$. C'est une hyperbole.



Exemple :

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$



Asymptote horizontale : $y = 1$

Asymptote verticale : $x = 2$

Remarque :

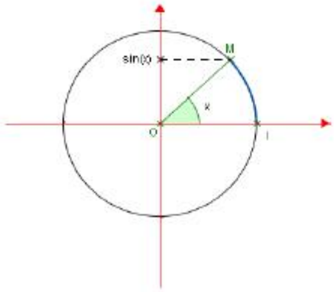
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} : \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d}$$

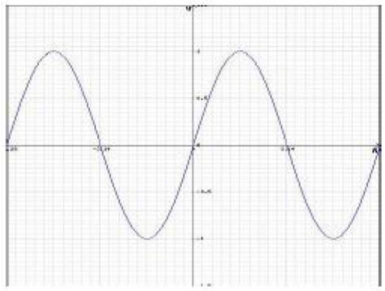
On divise tout par x :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{ax+b}{x}}{\frac{cx+d}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}\ avec\ x = 0$$

6.2.9. La fonction sinus

Il s'agit de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \sin x$. Pour rappel, le sinus de x est l'ordonnée du point sur le cercle trigonométrique correspondant à un angle d'amplitude x (mesuré en radians).

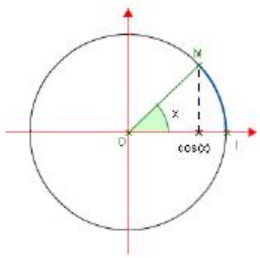


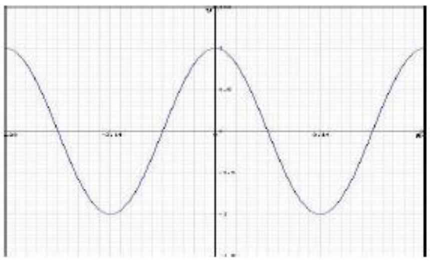


C'est une fonction périodique de période 2π. Elle s'annule en $x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

6.2.10. La fonction cosinus

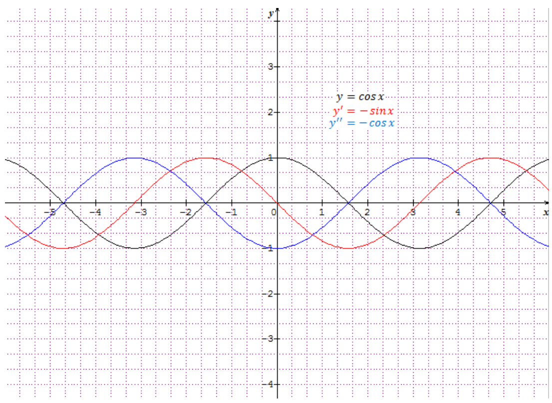
Il s'agit de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \cos x$. Pour rappel, le cosinus de x est l'ordonnée du point sur le cercle trigonométrique correspondant à un angle d'amplitude x (mesuré en radians).



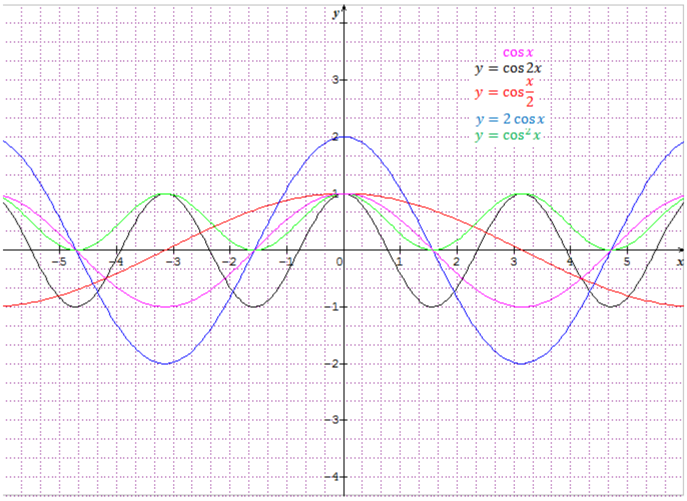


Exemples :

$y = cos\,x$	
$y' = -\,sin\,x$	$x = 0\ min/max$
$y'' = -\,cos\,x$	$x = \pm\,\dfrac{\pi}{2}$

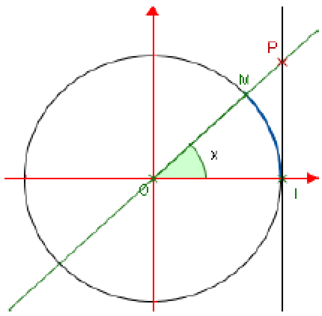


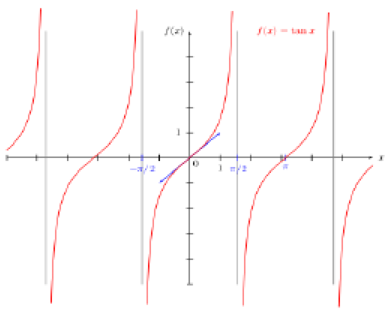
$y = \cos 2x$	$\cos x \xrightarrow[abs\ div\ 2]{} \cos 2x$	Période divisée par 2 = π
$y = \cos \frac{x}{2}$	$\cos x \xrightarrow[abs\ mult\ 2]{} \cos \frac{x}{2}$	Période multipliée par 2 = 4 π
$y = 2\cos x$	$\cos x \xrightarrow[ord\ mult\ 2]{} 2\cos x$	
$y = \cos^2 x$	$(\cos x)^2$	



6.2.11. La fonction tangente

Il s'agit de la fonction $f : x \to tg\ x$. Pour rappel, la tangente de x est l'ordonnée du point d'abscisse 1 déterminé par l'angle d'amplitude x (mesuré en radians) dessiné sur le cercle trigonométrique.

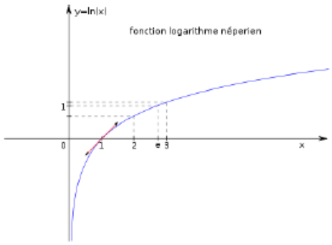




En chaque point de discontinuité, elle admet une asymptote verticale.

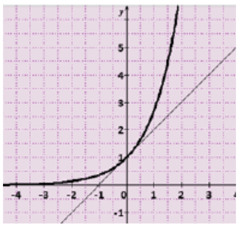
6.2.12. La fonction logarithme népérien

Il s'agit de la fonction $f\,:\,\mathbb{R}_0{}^+ \to \mathbb{R} : x \to \ln x$.



6.2.13. La fonction exponentielle

Il s'agit de la fonction $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0{}^+ : x \to e^x$. Le nombre e est la constante de Néper, c'est la base des logarithmes népériens, et sa valeur est 2,71828…

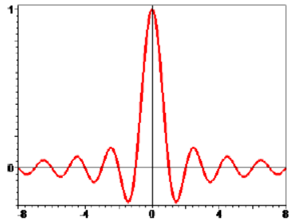


6.3. Autres fonctions

6.3.1. La fonction sinus cardinal

La fonction obtenue en effectuant le rapport d'une fonction sinusoïdale et de son argument. Elle porte le nom de sinus cardinal et est définie par $sinc(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

Son graphe caractéristique est communément appelé « chapeau mexicain ».

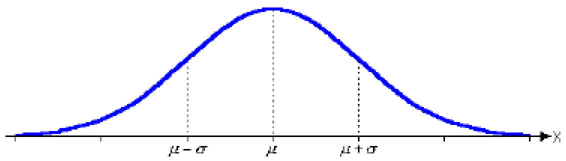


6.3.2. La fonction gaussienne

La fonction gaussienne joue un rôle important dans le domaine des probabilités.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ est l'espérance mathématique et σ est l'écart type de la distribution normale. On l'appelle aussi courbe en cloche.



Exemple :

Etude de fonction : y', y'', asymptotes, racines, Pi.

$$y = e^{-x^2}\ avec\ u = -x^2\ donc\ y = e^u$$

$$y' = u' * e^u \Leftrightarrow -2x * e^{-x^2} = 0$$

$$x = 0\ (maximum)\ donc\ y' = (-2*0) * e^{-0^2} = 0$$

$$y' = e^0 = 1$$

$$y'' = (-2x)' * e^{-x^2} + (-2x) * \left(e^{-x^2}\right)' avec\ e^{-x^2} = -2x * e^{-x^2}$$

$$y'' = -2 * e^{-x^2} + 4x^2 * e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{-x^2} * (-2 + 4x^2)$$

$$y'' = \left(2 * e^{-x^2}\right) * (-1 + 2x^2) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\ car\ 2 * e^0 * (-1 + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow 2 * 1 * \left(-1 + 2 * \sqrt{\frac{1}{2}}^{2}\right) = 2 * \left(-1 + \left(2 * \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 2 * (-1 + 1) = 2 * 0 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ et\ \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

6.4. Exercices

- Représenter graphiquement et écrire l'équation de la droite de coefficient angulaire 1/2 et passant par (1,3).

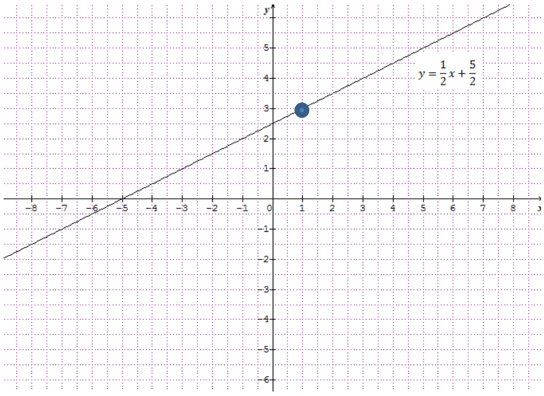
  Rappel :

  Équation cartésienne d'une droite passant par un point (x_0, y_0) et de pente m :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



- Représenter graphiquement et écrire l'équation de la droite passant par (1,-2) et (3,4).

  Rappel :

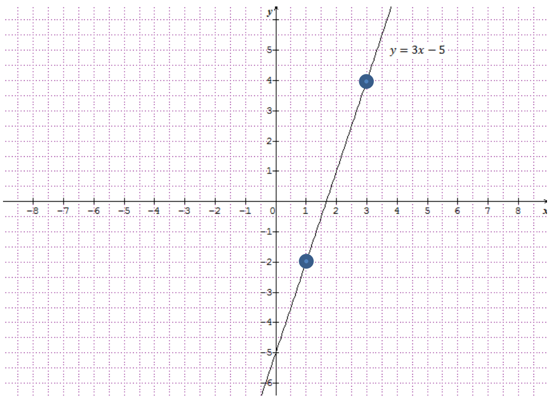
  Équation cartésienne d'une droite passant par 2 points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$avec\ (x_1, y_1) = (1; -2)\ et\ (x_2, y_2) = (3,4)$$

$$y - (-2) = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} * (x - 1) \Leftrightarrow y + 2 = \frac{6}{2} * (x - 1)$$

$$y + 2 = 3x - 3 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$



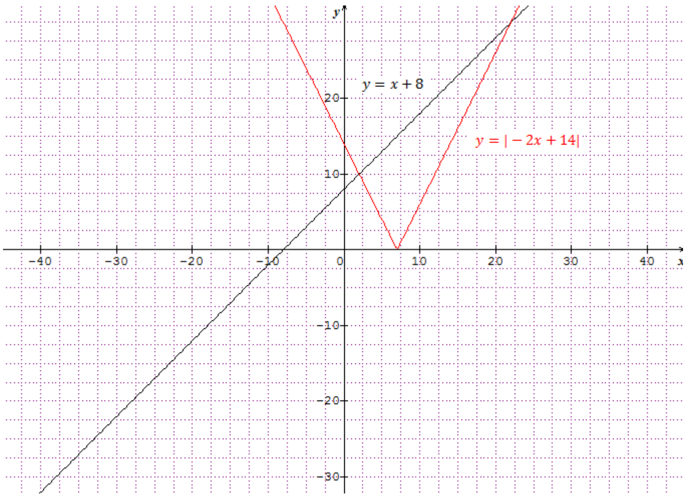
- Esquissez les graphes des fonctions $f(x) = x + 8$ *et* $g(x) = |-2x + 14|$. Localisez et calculez les coordonnées de leurs points d'intersection.

$$x + 8 = -2x + 14 \Leftrightarrow x + 8 - 8 + 2x = -2x + 14 - 8 + 2x$$
$$3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$
$$y = x + 8 \Leftrightarrow y = 2 + 8\ donc\ y = 10$$

Première intersection : (2,10)

$$x + 8 = 2x - 14 \Leftrightarrow x + 8 - 2x - 8 = 2x - 14 - 2x - 8$$
$$-x = -22 \Leftrightarrow x = 22$$
$$y = x + 8 \Leftrightarrow y = 22 + 8\ donc\ y = 30$$

Deuxième intersection : (22,30)



- Trouver l'équation de la droite :
  - Passant par le point (2, 3) et de pente –4

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = -4(x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = -4x + 8$$
$$y = -4x + 11$$

  - Passant par les points (1, 4) et (3, –2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 4 = \frac{-2 - 4}{3 - 1}(x - 1) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{6}{2}(x - 1)$$
$$y - 4 = -3x + 3 \Leftrightarrow y = -3x + 7$$

  - Parallèle à la droite d'équation y = 3x + 5 et passant par (–1, –2)

$$-2 = -3 + b \Leftrightarrow b = 1\ donc\ y = 3x + 1$$

- Passant par l'origine et perpendiculaire à la droite passant par (–1, –1) et (0, 4)

<u>Détermination de la droite passant par 2 points :</u>

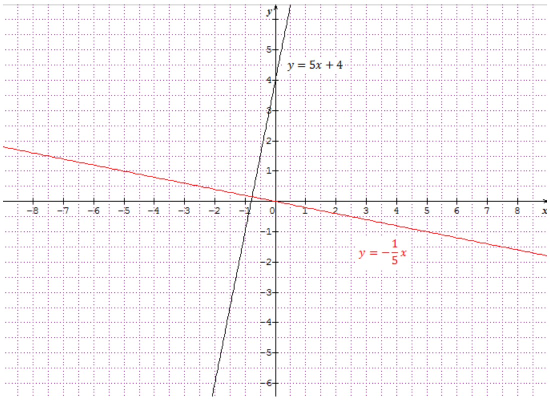
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{4 - (-1)}{0 - (-1)} * \big(x - (-1)\big) \Leftrightarrow y + 1 = \frac{5}{1} * (x + 1)$$

$$y + 1 = 5x + 5 \Leftrightarrow y = 5x + 4$$

<u>Détermination du coefficient angulaire de la droite perpendiculaire :</u>

$$5 * n = -1 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{5}\ donc\ y = -\frac{1}{5}x$$



Représenter graphiquement les paires de droites suivantes, et rechercher leur intersection.

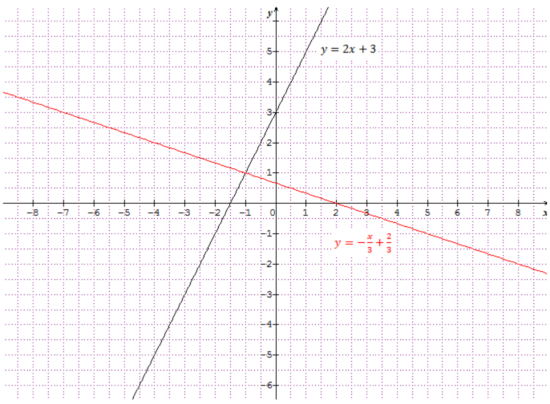
- $y = 2x + 3\ et\ y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

$$2x + 3 = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} - 3$$

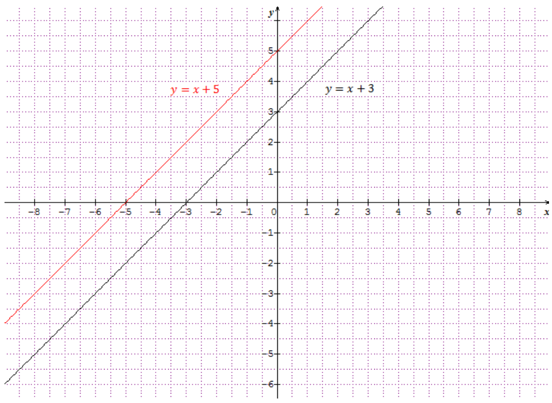
$$\frac{7x}{3} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow 7x = -7 \Leftrightarrow x = -1$$

$$y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = \big(2 * (-1)\big) + 3 \Leftrightarrow y = 1$$

L'intersection se trouve en $(-1{,}1)$



- $y = x + 3 \; et \; y = x + 5$

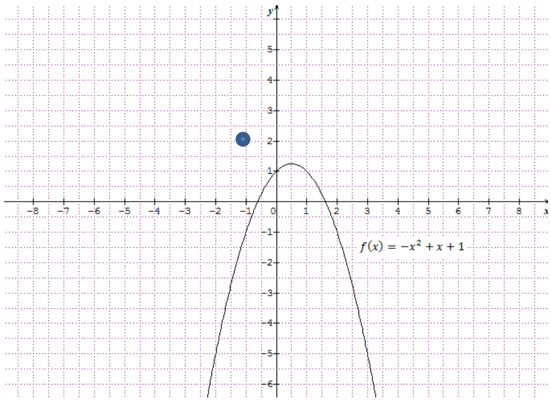


Comme les 2 équations ont le même coefficient angulaire, ces 2 droites sont parallèles et ne possède pas de point d'intersection.

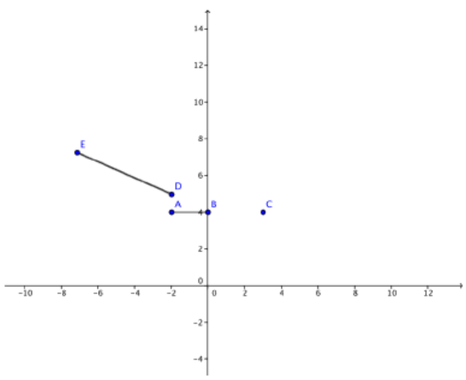
- Le point (-1,3) appartient-il au graphique de la fonction $f(x) = -x^2 + x + 1$?

$$3 = -(-1)^2 + (-1) + 1 \Leftrightarrow 3 = -1 - 1 + 1 \Leftrightarrow 3 \neq -1$$

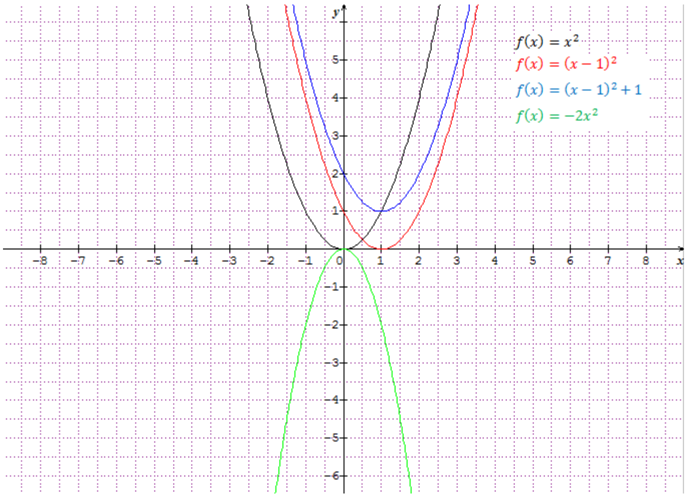
Le point $(-1,3) \notin f(x)$



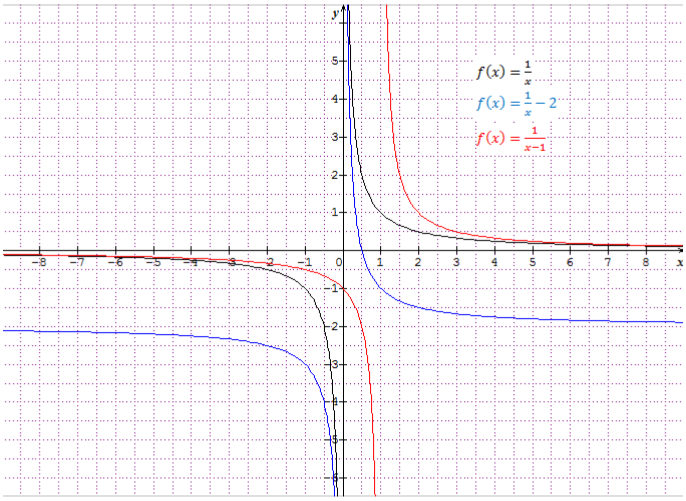
- Dessiner l'allure du graphique d'une fonction discontinue à gauche et continue à droite en $x = -2$, d'une fonction discontinue à droite et continue à gauche en $x = 0$, d'une fonction discontinue à gauche et à droite en $x = 3$.



- Représenter graphiquement la fonction $f(x) = x^2$. Partir de ce graphique pour représenter graphiquement les fonctions suivantes :
  - $f(x) = (x-1)^2$
  - $f(x) = (x-1)^2 + 1$
  - $f(x) = -2x^2$

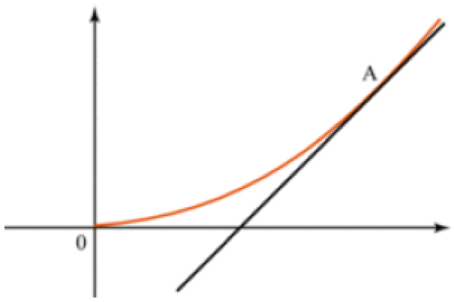


- Représenter $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ et $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en se référant au graphique de $f(x) = \frac{1}{x}$



6.5. Dérivées

6.5.1. Représentation géométrique

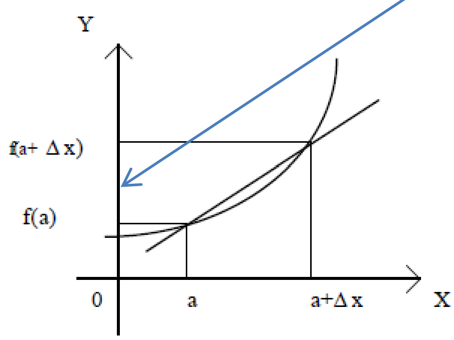


La dérivée d'une fonction en un point est égale à la pente de la droite tangente en ce point au graphe de la fonction. La dérivée de *f* au point d'abscisse *a* est notée $f'(a)$.

6.5.2. Définitions et propriétés

6.5.2.1. Variation d'une fonction

La variation de la fonction f $entre$ $a + \Delta x$ est égale à $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$, où Δx est un accroissement de la variable, c'est-à-dire une petite quantité, de sorte que $a + \Delta x$ désigne une valeur « voisine de a.



6.5.2.2. Pente de la tangente en a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Imaginez sur le dessin ci-dessus que l'on face diminuer Δx jusqu'à ce qu'il atteigne 0, c'est-à-dire jusqu'à ce que les 2 points soient confondus. On a donc :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Remarques :

- Cette limite n'est pas nécessairement la même à gauche et à droite de *a*, elle peut aussi ne pas exister. Dans ces différents cas, la fonction n'est pas dérivable en *a*. Par contre, si la limite existe, on dit que la fonction est dérivable en *a*.
- Une fonction dérivable en *a* est continue en *a* mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Exemple : $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

6.5.2.3. Équation de la tangente en a

La formule découle immédiatement de l'équation de la droite passant par le point $(a, f(a))$, et de pente $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

6.5.2.4. Fonction de la tangente en a

Sur l'ensemble des points où une fonction f est dérivable, on définit la fonction dérivée de f par :

$$f' : x \to f'(x)$$

6.5.2.5. Dérivées successives

Si la dérivée f' d'une fonction f est elle-même dérivable, sa dérivée s'appelle dérivée seconde de f et est notée f''. Si elle-même est dérivable, on l'appelle dérivée n$^{\text{ième}}$ (aussi appelée dérivée d'ordre n) se note $f^{(n)}$, $\text{où } n \in \mathbb{N}_0$.

6.5.2.6. Autre notation de la dérivée

Il est courant d'écrire la dérivée $f'(x)$ sous la forme $\frac{df}{dx}$. Cette notation différentielle de la dérivée est utile dans le cas de fonctions de plusieurs variables, car elle indique explicitement par rapport à quelle variable on dérive.

De même pour la dérivée d'ordre n, on utilise souvent la notation $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$.

6.5.3. Dérivées des fonctions élémentaires

Fonction	Dérivable sur	Dérivée
a (où $a \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	0
x^p (où $p \in \mathbb{R}_0$)	$\mathbb{R}\ si\ p > 0$ $\mathbb{R}_0\ si\ p < 0$	$p\ x^{p-1}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$tg(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{cos^2 x}$
$\ln x$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x

6.5.4. Formules de dérivation

Soit f et g des fonctions dérivables et a un nombre réel. On a alors les formules suivantes :

- Dérivée de la somme :

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

- Dérivée du multiple d'une fonction :

$$\big(af(x)\big)' = af'(x)$$

- Dérivée du produit :

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Dérivée du quotient :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

- Dérivée des fonctions composées :

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

6.5.5. Interprétation géométrique de la dérivée première

La dérivée première est liée à la croissance et décroissance d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses extrema. Pour rappel, un extremum est soit un minimum ou un maximum.

Exemple : la fonction x^2 et $-x^2$

Remarque : Le minimum et le maximum sont en (0,0)

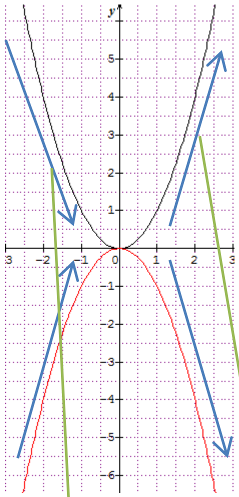


Tableau de variation :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	minimum en $(a, f(a))$	↗	

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	maximum en $(a, f(a))$	↘	

6.5.6. Maximum et minimum d'un graphe

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b \Leftrightarrow -b = 2ax \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x$$

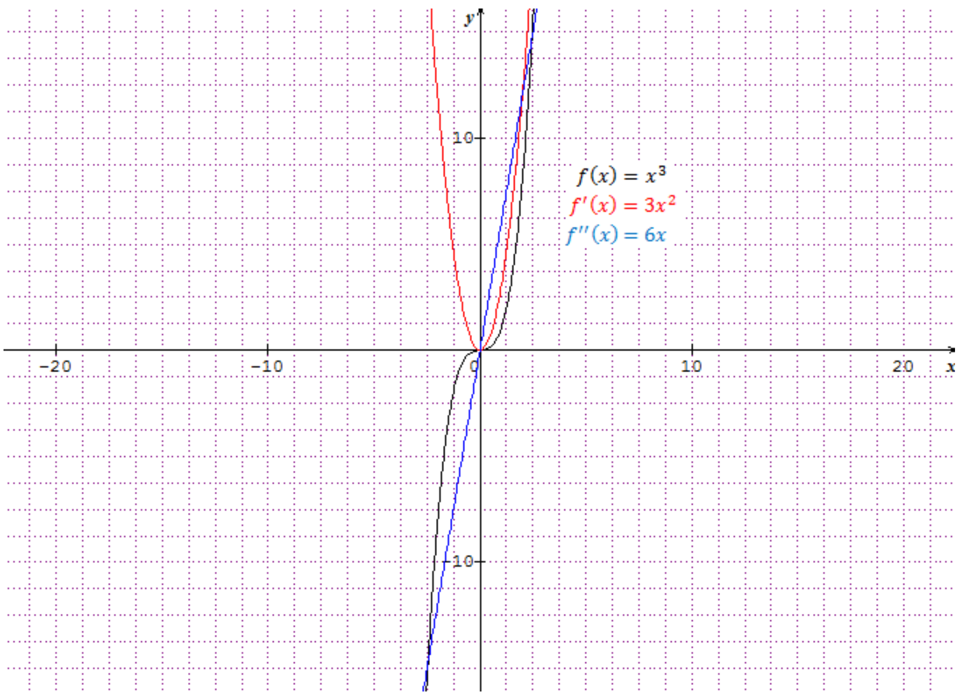
$$y'' = 2a \neq 0$$

Changement de concavité :

+	-	$f'(x)$
+	-	$f''(x)$
↗	↘	

Exemple :

$f(x) = x^3$	
$f'(x) = 3x^2$	x^2 ne change jamais de signe donc pas de minimum pas de maximum
$f''(x) = 6x$	Changement de signe



Autre exemple :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

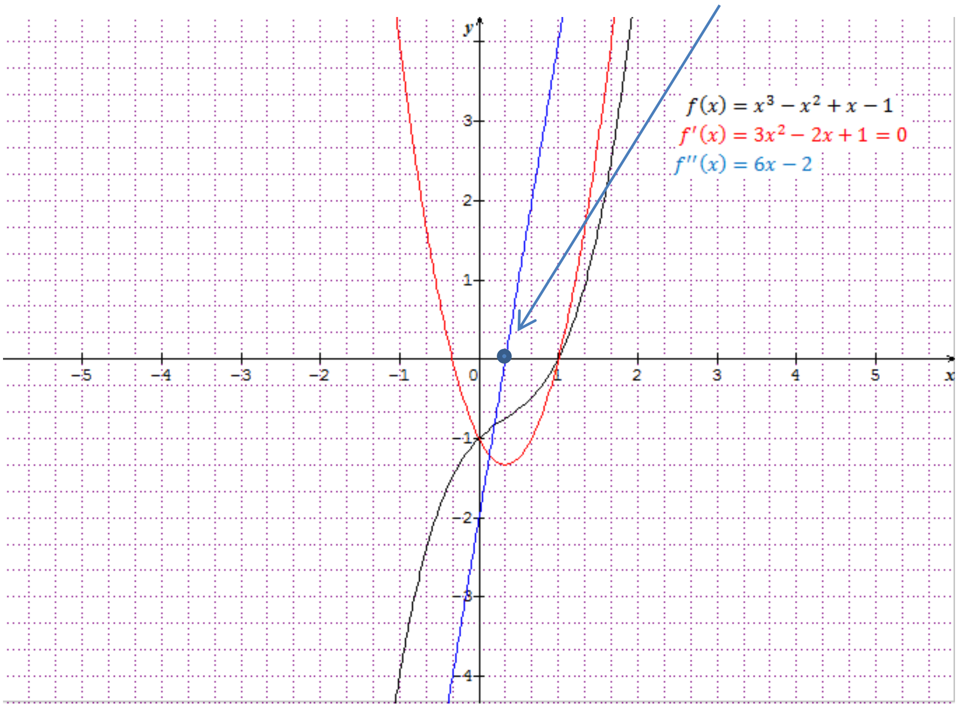
$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow -2^2 - (4 * 3 * 1) = -8$$

$$\Delta < 0 : Pas\ de\ racine$$

Rappel :

$y = 0$	Racines
$y' = 0$	Minimum et maximum
$y'' = 0$	Pi

$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$



<u>Autre exemple :</u>

$$y = x^3 - x^2 - x - 1$$

$$y = 3x^2 - 2x - 1$$

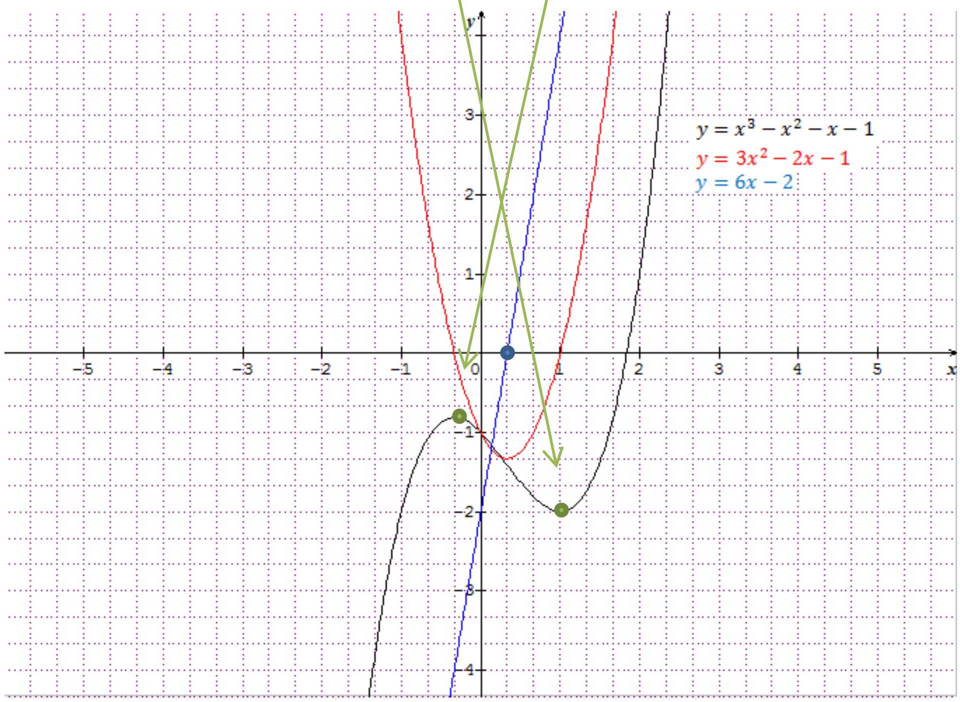
$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 4 - \big(4 * 3 * (-1)\big) = 4 - (-12) = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{a}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 * 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = 1\ (maximum)\ ou\ x = -\frac{1}{3}(minimum)$$

$$y'' = 6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$



6.5.7. Interprétation géométrique de la dérivée seconde

La dérivée seconde est liée au sens de concavité d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses points d'inflexion.

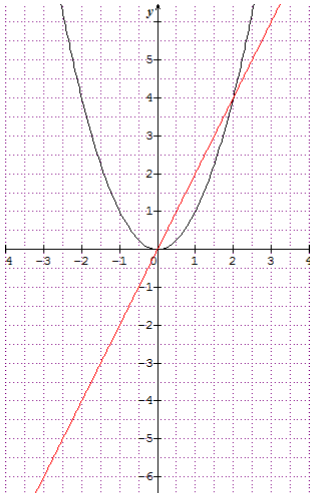
Par exemple :

- La dérivé x^2 vaut $2x^1$ car $ax^n = (a * n)x^{n-1}$ d'ordre n - 1

  Preuve :

  Remplaçons la valeur de *x* par la valeur de l'exposant.

  On a $2^2 = 2 * 2 = 4$ Ok. Vérifions graphiquement :



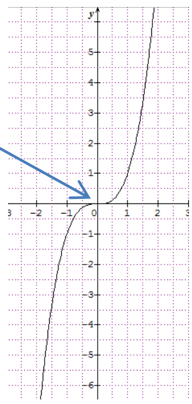
  L'intersection des 2 fonctions montre que les coordonnées de l'intersection vaut $(2{,}4)$

- La dérivé $3x^3$ $vaut$ $9x^2$ $vaut$ $18x$

Remarque :

$f''(a) = f''(x)$ change de signe au voisinage de *a* ⇔ *f* a un point d'inflexion en *a*.

Exemple : La fonction x^3. Le changement de signe (au niveau de l'ordonné) se trouve en (0,0) car 6x = 0 ; x = 0 donc le point d'inflexion se trouve en x = 0.



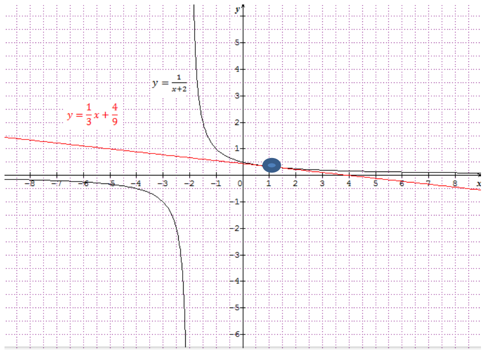
6.6. Exercices

- Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x+2}$ au point $\left(1, \frac{1}{3}\right)$

Equation de la tangente d'une fonction : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{(a+2)^2} * (x - a) \Leftrightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9} * (x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$$



- Trouver les équations des tangentes aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 3$, des fonctions :
  - $f(x) = 2x^3 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 \text{ (dérivé) donc } f'(0) = 0 \text{ et } f'(3) = 6 * 3^2 = 54$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - (2a^3 - 1) = 6a^2 * (x - a)$$

$$x = 0 \text{ donc } y - \left((2 * 0^3) - 1\right) = (6 * 0^2) * (x - 0)$$

$$y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

$$x = 3 \text{ donc } y - \left((2 * 3^3) - 1\right) = (6 * 3^2) * (x - 3)$$

$$y - 53 = 54 * (x - 3) \Leftrightarrow y - 53 = 54x - 162$$

$$y = 54x - 109$$

  - $f(x) = \frac{3x+7}{x-4}$

$$f'(x) = \frac{\left((3x+7)' * (x-4)\right) - \left((3x+7) * (x-4)'\right)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3 * (x-4) - (3x+7)}{(x-4)^2} = \frac{3x - 12 - 3x - 7}{(x-4)^2} = \frac{19}{(x-4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-12-7}{16} = -\frac{19}{16} \text{ et } f'(3) = \frac{9 - 12 - 9 - 7}{1} = -19$$

<u>En utilisant l'équation de la tangente :</u> $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$x = 0 \text{ donc } y - \frac{(3 * 0) + 7}{0 - 4} = -\frac{19}{16} * (x - 0) \Leftrightarrow y + \frac{7}{4} = -\frac{19}{16x} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{19}{16}x - \frac{7}{4}$$

$$x = 3 \text{ donc } y - \frac{(3 * 3) + 7}{3 - 4} = -19 * (x - 3) \Leftrightarrow y + 16 = -19x + 57$$

$$y = -19x + 41$$

- Calculer la dérivée seconde de $f(x) = \frac{(x-1)*(x+1)^2}{x^2-1}$ en pensant à simplifier au bon moment.

$$f(x) = \frac{(x-1)*(x+1)^2}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)*(x^2+2x+1)}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2+x-x^2-2x-1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{\big((x^3+x^2-x-1)' * (x^2-1)\big) - \big((x^3+x^2-x-1)*(x^2-1)'\big)}{(x^2-1)^2}$$

On dérive $f'(x)$ (uniquement contenu dans ()') ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{\big((3x^2+2x-1)*(x^2-1)\big) - \big((x^3+x^2-x-1)*(2x)\big)}{(x^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x^4+2x^3-x^2-3x^2-2x+1)-(2x^4+2x^3-2x^2-2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-2x^2+1}{(x^2-1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^4-2x^2+1}{x^4-2x^2+1} = 1$$

$$f''(x) = 0$$

- Calculer la dérivée seconde de la fonction $f(t) = t^2 - \frac{1}{t^2}$

$$f(t) = t^2 - \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow t^2 - t^{-2}$$

$$f'(t) = 2t + 2t^{-3} \Leftrightarrow 2t + \frac{2}{t^3}$$

$$f''(t) = 2 - 6t^{-4} \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{t^4}$$

- Pour quelles valeurs de a et b la fonction $f(x) = x^3 - 4ax + b$ possède-t-elle un minimum en 2, et passe par le point $(1,-5)$? Donner l'équation de la tangente au graphe de $f(x)$ lorsque $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4a$$

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3*2^2 - 4a \Leftrightarrow -12 = -4a \Leftrightarrow a = 3$$

$$f(x) = x^3 - 4ax + b \Leftrightarrow -5 = 1 - (4*3) + b$$

$$-5 = 1 - 12 + b \Leftrightarrow b = 6$$

<u>Equation de la tangente quand x = 1 :</u>

$$f'(x) = 3x^2 - 4a \Leftrightarrow f'(1) = (3*1^2) - (4*3)$$

$$\Leftrightarrow f'(1) = 3 - 12 \Leftrightarrow f'(1) = -9$$

$$f(1) = x^3 - 4ax + b \Leftrightarrow 1^3 - (4*3*1) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(1) = -5$$

$$y - f(a) = f'(a)*(x-a) \Leftrightarrow y - (-5) = -9*(x-1)$$

$$y + 5 = -9x + 9 \Leftrightarrow y = -9x + 4$$

6.7. Primitives

6.7.1. Intégrales indéfinies

L'intégration vue comme opérateur sur l'ensemble des fonctions, est, en un certain sens, l'opérateur inverse de la dérivation. Une fonction $F(x)$ est dite primitive de la fonction $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

Exemple :

Soit $f(x) = 3x^2$. x^3 est une primitive de $f(x)$ car $(x^3)' = 3x^2$

La fonction $x^3 + 4$ est également une primitive de $f(x)$ car $(x^3 + 4)' = 3x^2$. Il existe en fait une infinité de primitive pour cette fonction, et elles sont de la forme $x^3 + C$ où C est une constante réelle.

On appelle intégrale indéfinie de $f(x)$, la famille des fonctions de la forme $F(x) + C$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C, appelée constante d'intégration est une constante réelle arbitraire.

On note cette intégrale indéfinie :

$$\int f(x)dx$$

Avec :

- $\int$ est le signe d'intégration
- $f(x)$ est l'intégrante (c'est-à-dire la fonction à intégrer)
- dx est l'élément différentiel (il indique par rapport à quelle variable on intègre)

Remarque :

- Toute fonction n'est pas nécessairement intégrable

6.7.2. Primitives élémentaires

Dans les formules suivantes :

- *n* et *a* sont des constantes réelles
- *C* est la constante d'intégration.

$\int dx$	$x + C$
$\int x^n dx \; (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin ax \; dx$	$-\frac{1}{a}\cos ax + C$
$\int \cos ax \; dx$	$\frac{1}{a}\sin ax + C$
$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\int a^x dx \; (a > 0)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

6.7.3. Calcul d'intégrales indéfinies

On essaye la méthode choisie et si elle ne convient pas, on en choisit une autre. Nous rappelons d'abord les formules élémentaires suivantes :

- *f* et *g* sont des fonctions intégrables
- *a* une constante réelle

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

6.7.4. Formule d'intégration par partie

De la formule de dérivation d'un produit de 2 fonctions on peut tirer la formule de base pour l'intégration par partie :

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Si l'intégrale à calculer a une forme similaire au membre de gauche, on peut appliquer cette formule. Le but étant évidemment que l'intégrale dans le membre de droite soit plus simple que celle de départ…

Le tableau suivant donne quelques indices pour faire le bon choix des fonctions f et g. $P(x)$ représente un polynôme de degré quelconque.

Si l'intégrale a la forme …	On pose …
$\int P(x)e^{ax}dx$	$f(x) = P(x)\ et\ g'(x) = e^{ax}$
$\int P(x)\ln x\ dx$	$f(x) = \ln x\ \ et\ g'^{(x)} = P(x)$
$\int P(x)\sin ax\ dx$	$f(x) = P(x)\ et\ g'(x) = \sin ax$
$\int P(x)\cos ax\ dx$	$f(x) = P(x)\ et\ g'(x) = \cos ax$
$\int e^{ax}\sin bx\ dx$	On a le choix
$\int e^{ax}\cos bx\ dx$	On a le choix

6.7.5. Intégration par substitution

Il s'agit d'essayer de reconnaître dans l'intégrale une fonction et sa dérivée, afin de pouvoir revenir après une substitution à une intégrale élémentaire.

Exemple :

$$\int (x^3+1)^7\,3x^2\,dx \Leftrightarrow \int u^7\,du$$

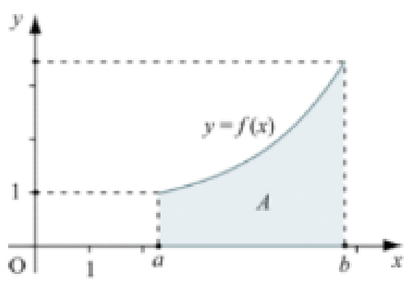
$$avec\ x^3+1 = u$$

6.7.6. Introduction au calcul d'aires

Si $f(x)$ est une fonction positive et si $a < b$, l'aire de la surface comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des x et les droites verticales d'équations $x = a\ et\ x = b$ est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$



6.8. Exercices

- Calculer les intégrales et les primitives suivantes :
  - $\int x^{17} dx$

$\int x^n dx \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int x^{17} dx = \frac{x^{18}}{18} + C$$

  - $\int 7dx$

$\int dx$	$x + C$

$$\int 7 \, dx = 7x + C$$

  - $\int_{-1}^{1} 9u^{12} \, du$

$\int x^n dx \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int_{-1}^{1} 9u^{12} \, du = \left[\frac{9u^{13}}{13}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow \left[\frac{9}{13} - \left(-\frac{9}{13}\right)\right] \Leftrightarrow \frac{9}{13} + \frac{9}{13} = \frac{18}{13} + C$$

  - $\int \frac{4}{x^4} \, dx$

$\int x^n dx \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int \frac{4}{x^4} \, dx = \int 4 * x^{-4} \, dx \Leftrightarrow \frac{4 * x^{-3}}{-3} + C \Leftrightarrow -\frac{4}{3x^3} + C$$

  - $\int_1^2 \frac{5}{7\sqrt{t}} \, dt$

$\int dx$	$x + C$

$$\int_1^2 \frac{5}{7\sqrt{t}} \, dt = \int_1^2 \frac{5}{7} * t^{-\frac{1}{2}} \, dt \Leftrightarrow \frac{5}{7} \int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{10}{7} * \left[t^{\frac{-1}{2}}\right]_1^2 \Leftrightarrow \frac{10}{7} * \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{7} * \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + C$$

- $\int_{-2}^{-1}(1-2v)\,dv$

$\int dx$	$x+C$

$$\int_{-2}^{-1}(1-2v)\,dv=\left[v-\frac{2v^2}{2}\right]_{-2}^{-1}\Leftrightarrow -1-1-(-2-4)=4$$

- $\int \cos\omega\,d\omega$

$\int \cos ax\,dx$	$\frac{1}{a}\sin ax+C$

$$\int \cos\omega\,d\omega=sin\omega+C$$

- $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx$

$\int \sin ax\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos ax+C$

$$[\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow -\cos\frac{\pi}{2}+cos-\frac{\pi}{2}=0\ \ car\ 0+0=0$$

- $\int_{-\pi}^{0} cos\,2x\,dx$

$\int \cos ax\,dx$	$\frac{1}{a}\sin ax+C$

$$\int_{-\pi}^{0}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{0}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 0-\frac{1}{2}\sin(-\pi)\Leftrightarrow 0-0=0$$

- $\int sin\frac{x}{2}\,dx$

$\int \sin ax\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos ax+C$

$$\int \sin\frac{x}{2}\,dx=-2\cos\frac{x}{2}+C$$

- $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx=[e^x]_{-\infty}^{0}\Leftrightarrow e^0-e^{-\infty}\Leftrightarrow e^0-\frac{1}{e^{\infty}}\Leftrightarrow 1-0=1$$

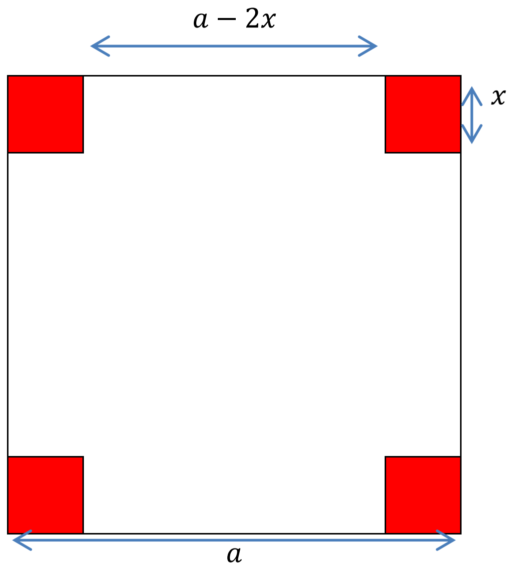
- $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert+C$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln\lvert x\rvert]_1^{\infty}\Leftrightarrow \ln\infty-\ln 1=\infty-0=\infty$$

- Aux quatre coins d'un carré de côté a, on découpe quatre carrés isométriques. Par pliage, on obtient une boîte (sans couvercle). Déterminer la longueur x des côtés des carrés découpés pour que le volume de la boîte soit maximum.

Schéma :



$$V = (a-2x)^2 * x \text{ avec :}$$

$$(a-2x)^2 \text{ la base et } x \text{ la hauteur}$$

$$V' = (a-2x)*(a-2x)*x \Leftrightarrow a^2 - 2ax - 2ax + 4x^2 \Leftrightarrow a^2 - 4ax + 4x^2$$

$$V' = -4*(a-2x)*x + (a-2x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2x)*(-4x + a - 2x) = 0 \text{ (mise en évidence)}$$

$$\Leftrightarrow (a-2x)*(-6x+a) = 0 \Leftrightarrow -6ax + a^2 + 12x^2 - 2ax = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 8^2a^2 - (4*12*a^2) \Leftrightarrow 64a^2 - 48a^2 = 16a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8a \pm 4a}{24} \text{ donc } x = \frac{1}{2}a \text{ ou } x = \frac{1}{6}a$$

$$x = \frac{1}{6}a \text{ car } x = \frac{1}{2}a \text{ impossible}$$

7. Suites et séries de nombres réels

7.1. Définition d'une suite

Une suite est une liste ordonnée de nombres réels. On peut voir la suite comme une fonction de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exemple :

$$u_n = n^2 + 1$$

Les éléments de cette suite se nomment termes de la suite. La facilité et la tradition ont mis en place une notation particulière, dite notation indicée : chaque terme est noté par une lettre affectée d'un indice naturel qui indique sa place dans la suite. Le terme u_n est appelé terme général de la suite.

Parfois, la suite peut être défini par récurrence, c'est-à-dire par la donnée d'une (ou plusieurs) valeur(s) initiale(s) et d'une formule donnant la valeur d'un terme en fonction d'un ou de plusieurs des termes précédents.

Exemple :

$$u_0 = 0\,; u_1 = 1 \; et \; u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$$

7.2. Quelques familles de suites

7.2.1. Suite arithmétique

Une suite (u_n) est une suite arithmétique lorsque la différence de 2 termes consécutifs de cette suite est une valeur *r* constante, appelé raison de la suite.

$$u_{n+1} - u_n = r \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriété :

$$u_n = u_0 + (n * r) \; et \; u_m = u_n + (m - n) * r$$

Exemple :

- La suite 6,7,8,9… est une suite arithmétique de raison 1.

7.2.2. Suite géométrique

Une suite (u_n) est une suite géométrique lorsque le quotient de 2 termes consécutifs de cette suite est une valeur *q* constante, appelée raison de la suite.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriété :

$$u_n = u_0 * q^n \; et \; u_m = u_n * q^{m-n}$$

Exemple :

- La suite 3,6,12,24 … est une suite géométrique de raison 2.

7.2.3. Suite harmonique

Une suite (u_n) est une suite harmonique lorsque la suite formée par les inverses de cette suite est une suite arithmétique.

Exemple :

- $1\,; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

7.3. Propriétés des suites

- Une suite (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

  Exemple : $u_n = 1\,;\ u_{n+1} = 1\,;\ u_{n+2} = 2$
- Une suite (u_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$

  Exemple : $u_n = 1\,;\ u_{n+1} = 2\,;\ u_{n+2} = 3$
- Une suite (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$

  Exemple : $u_n = 2\,;\ u_{n+1} = 1\,;\ u_{n+2} = 1$
- Une suite (u_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$

  Exemple : $u_n = 3\,;\ u_{n+1} = 2\,;\ u_{n+2} = 1$
- Une suite (u_n) est constante ou stationnaire si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

  Exemple : $u_n = 1\,;\ u_{n+1} = 1\,;\ u_{n+2} = 1$
- Une suite (u_n) est alternée si 2 termes consécutifs de cette suite sont toujours de signes contraires

  Exemple : $u_n = 2\,;\ u_{n+1} = -2\,;\ u_{n+2} = 2$
- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

  Exemple : La suite de nombre négatif : $M \in \mathbb{Z}^+$
- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

  Exemple : La suite de nombre positif : $M \in \mathbb{Z}^-$
- Une suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée

7.4. Convergence d'une suite

7.4.1. Suite réelle convergente

Une suite de nombres réels $(u_n)(n \in \mathbb{N})$ sera dite convergente si elle a tendance à se stabiliser autour d'une valeur L, pour atteindre cette valeur lorsque *n* se tend vers l'infini. Dans ce cas, on dit que L est la limite de la suite. On peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L$$

Si la suite est convergente, sa limite L est forcément unique.

7.4.2. Suite réelle divergente

Dans tous les cas où une suite ne converge pas, elle est dite divergente.

7.4.2.1. Divergence non bornée

Elle possède des valeurs qui sont soit de plus en plus grandes ou de plus en plus petites. On dit aussi que la suite a une limite infinie.

Exemple :

- La suite géométrique 1, 2, 4, 8, 16 … qui tend vers $+\infty$

7.4.2.2. Divergence bornée

Une suite non convergente peut rester bornée, c'est le cas lorsque ses termes oscillent entre 2 ou plusieurs valeurs, comme par exemple la suite $1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$

7.5. Séries

7.5.1. Définition

Une série est la somme infinie des termes d'une suite : si (u_n) est une suite réelle, la suite associée est la somme.

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

La série peut être vue comme la limite de la suite des sommes partielles.

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

On a alors :

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

7.5.2. Convergence des séries

La convergence d'une série est qualifiée de la même façon que la convergence de la suite de ses sommes partielles.

Exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \; est\ convergente\ et\ converge\ vers\ 2$$

7.5.3. *Condition nécessaire de convergence*

Le terme général u_n doit devenir de plus en plus proche de 0 à mesure que *n* tend vers l'infini. C'est la condition nécessaire de la convergence.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \; converge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Cette condition n'est cependant pas suffisante, c'est-à-dire que sa réciproque est fausse : si le terme général d'une série tend vers 0, alors la série n'est pas forcément convergente.

Contre-exemple : La série harmonique des inverses des naturels non nuls.

7.5.4. *Le critère des comparaisons*

On doit utiliser des critères de convergence plus ou moins compliqués suivant le type que l'on étudie. Par exemple le critère de comparaison :

Soient 2 séries à termes positifs dont les termes généraux $u_n \; et \; v_n$ sont tels que :

$$0 < u_n \leq \; v_n \; \forall n \in n_0$$

Remarque :

D'autres méthodes telles que le test de l'intégrale, la règle de d'Alembert et la règle de Cauchy permettent d'approfondir les critères de convergence.

7.5.5. *Théorème de Leibniz*

Le théorème de Leibniz concerne les séries alternées de la forme :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots (avec \; a_n > 0)$$

Si dans une série alternée les termes en valeur absolue forment une suite strictement décroissante et si la suite (a_n) converge vers 0, alors la série alternée converge.

7.6. *Calcul de la somme d'une série géométrique convergente*

Si la raison d'une série géométrique est inférieure à 1 en valeur absolue, cette série est toujours convergente.

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$qS = qu_0 + qu_1 + \cdots + qu_n + \cdots = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} + \cdots$$

$$S - qS = u_0 \Leftrightarrow S = \frac{u_0}{(1-q)}$$

7.7. Exercices

- Déterminer parmi les suites suivantes celles qui sont arithmétiques, géométriques, alternées. Lorsqu'elle existe, préciser la raison de la suite.

	Suite …	Raison
15, 11, 7, 3 …	Arithmétique	$r = -4$
1, 4, 9, 16, 25 …	/	n^2
32, 48, 72, 108 …	Géométrique	$q = \frac{3}{2}$
1, -1, 1, -1, 1, -1 …	Alternée	
2, 2, 2, 2, 2 …	Géométrique Arithmétique	$q = 1$ $r = 0$

- Soit une suite arithmétique noté u_n. Trouver :
  - u_5 sachant que $u_1 = 3 \; et \; r = 6$

$$u_m = u_n + \left((m-n) * r\right)$$

$$u_5 = u_1 + \left((5-1) * 6\right) \Leftrightarrow u_5 = 3 + (4 * 6) = 27$$

  - u_2 sachant que $u_{10} = 5 \; et \; r = -10$

$$u_m = u_n + \left((m-n) * r\right)$$

$$u_2 = u_{10} + \left((2-10) * (-10)\right) \Leftrightarrow u_2 = 5 + \left((-8) * (-10)\right) = 5 + 80 = 85$$

  - r sachant que $u_3 = 14 \; et \; u_8 = 4$

$$u_m = u_n + \left((m-n) * r\right)$$

$$u_3 = u_8 + \left((3-8) * r\right) \Leftrightarrow 14 = 4 + \left((-5) * r\right) \Leftrightarrow 10 = -5 * r$$

$$r = -2$$

- Soit une suite géométrique noté u_n. Trouver :
  - u_4 sachant que $u_1 = 25 \; et \; q = \frac{1}{5}$

$$u_m = u_n * q^{m-n}$$

$$u_4 = 25 * q^{4-1} \Leftrightarrow u_4 = 25 * \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 25 * \frac{1}{125} = \frac{25}{125} = 0{,}2$$

  - u_3 sachant que $u_8 = 128 \; et \; q = \frac{-2}{3}$

$$u_m = u_n * q^{m-n}$$

$$u_3 = 128 * q^{3-8} \Leftrightarrow u_3 = 128 * \left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{128}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{128}{\frac{32}{243}} = \frac{4096}{243}$$

  - q sachant que $u_3 = 18 \; et \; u_6 - \frac{2}{3}$

$$u_m = u_n * q^{m-n}$$

$$u_3 = u_6 * q^{3-6} \Leftrightarrow 18 = -\frac{2}{3} * q^{-3} \Leftrightarrow -27 = q^{-3} \Leftrightarrow -27 = \frac{1}{-q^3} \Leftrightarrow q = -\frac{1}{3}$$

- Calculer :
  - $1+2+3+4+5+\cdots+1000$

$$S=\frac{n+1}{2}*(u_0+u_n)$$

$$avec\ u_0=1\ et\ u_{999}=1000\ donc\ S=\frac{999+1}{2}*(1+1000)$$

$$=500*1001=500500$$

  - $50+55+60+65+\cdots+200$

$$S=\frac{n+1}{2}*(u_0+u_n)$$

$$Nombre\ de\ termes:\ (200-50)\ DIV\ 5=150\ DIV\ 5=30$$

$$S=\frac{30+1}{2}*(50+200)=\frac{31}{2}*250=31*125=3875$$

  - $2+4+8+16+\cdots+256$

$$u_n=u_0*q^n$$

$$256=2*q^n\Leftrightarrow 128=2^n\Leftrightarrow n=7$$

$$S=\frac{u_0}{1-q}*(1-q^{n+1})$$

$$S=\frac{2}{1-2}*(1-2^8)\Leftrightarrow -2*(1-256)=-2*(-255)=510$$

  - $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots-\frac{1}{1024}$

$$u_n=u_0*q^n$$

$$-\frac{1}{1024}=\frac{1}{2}*\left(-\frac{1}{2}\right)^n\Leftrightarrow -\frac{1}{512}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\Leftrightarrow -\frac{1}{512}=\frac{-1^n}{2^n}\Leftrightarrow n=9$$

$$S=\frac{u_0}{1-q}*(1-q^{n+1})$$

$$s=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}*\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{9+1}\right)\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}*\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}*\left(1-\frac{1}{1024}\right)=\frac{1}{3}*\frac{1023}{1024}$$

- Trouver le terme général et étudier le comportement des séries suivantes :
  - $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}\dots$

    Le terme général est $u_n=\frac{1}{4n}$

    Est-ce qu'elle converge ?

    $$\lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0$$

    Elle peut converger.

    Est-ce que sa réciproque est vrai ?

    $$S=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

    On remarque que c'est une série harmonique donc divergente.

  - $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots$

    Le terme général est $u_n=\frac{1}{3^n}$ de raison $q=\frac{1}{3}$

    Est-ce qu'elle converge ?

    $$\lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$$

    Elle peut converger.

    Sa somme vaut :

    $$S=\frac{u_0}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

  - $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\cdots$

    Le terme général est $u_n=\frac{1}{1+3n}$

    Est-ce qu'elle converge ?

    $$\lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+3n}=0$$

    Elle peut converger.

    Avec le critère de comparaison, est-ce que $\frac{1}{1+3n}?\frac{1}{4n}$

    Testons avec $n=2\ \Rightarrow \frac{1}{7}>\frac{1}{8}$

    Or $\frac{1}{4n}$ diverge donc $\frac{1}{1+3n}$ diverge aussi.

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots$

  Le terme général est $u_n=\frac{1}{(1+n)^2}$

  Est-ce qu'elle converge ?

  $$\lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+n)^n}=0$$

  Elle peut converger.

  Avec le critère de comparaison, est-ce que $\frac{1}{(1+n)^n}?\frac{1}{2^n}$

  Testons avec $n=2\ \Rightarrow \frac{1}{3}>\frac{1}{4}$

  Or $\frac{1}{2^n}$ converge donc $\frac{1}{(1+n)^n}$ converge aussi.

- $1-2+3-4+5-6\ldots$

  Le terme général est $u_n=(-1)^{n-1}*n$

  Est-ce qu'elle converge ?

  $$\lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}*n=\pm\infty\ donc\ non$$

  Elle peut diverger.

- Soient les séries géométriques suivantes ; écrire ces séries explicitement, étudiez-en la convergence, et si elles convergent, trouver la valeur de la somme.

  - La série commençant par 1 et de terme général 2^n

    C'est-à-dire $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$ de raison $q=2$

    Est-ce qu'elle converge ?

    $$Il\ faut\ que\ q<1\ pour\ que\ cette\ suite\ converge$$

    Elle peut diverger.

  - La série commençant par 1 et de terme général 4^{-n}

    C'est-à-dire $1+4^{-1}+4^{-2}+4^{-3}+\cdots+4^{-n}$ de raison $q=\frac{1}{4}$

    Est-ce qu'elle converge ?

    $$q<1\ vrai$$

    Elle peut converger.

    $$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

- La série commençant par $\frac{1}{3}$ et de terme général 3^{-n}

  C'est-à-dire $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ de raison $q=\frac{1}{3}$

  Est-ce qu'elle converge ?

  $$q<1\ vrai$$

  Elle peut converger.

  $$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{\frac{2}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

  Pourquoi -1 ? Car la suite ne commence pas par 1 donc il faut enlever.

- La série commençant par $\frac{1}{3}$ et de terme général 3^n

  C'est-à-dire $\frac{1}{3}+1+3+9+27+\cdots+3^n\ de\ raison\ q=3$

  Est-ce qu'elle converge ?

  $$q<1\ faux$$

- La série commençant par $\frac{2}{3}$ et de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

  C'est-à-dire $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\ de\ raison\,\frac{2}{3}$

  Est-ce qu'elle converge ?

  $$q<1\ vrai$$

  Elle peut converger.

  $$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-1=\frac{1}{\frac{1}{3}}-1=2$$