Rappel - Fonctions
Fonctions élémentaires

R. Absil

Année académique 2019 - 2020

Cette fiche présente les caractéristiques et illustre les graphes de plusieurs fonctions dites « élémentaires », dans la mesure où leur écriture est simple, et où de nombreuses fonctions sont construites sur base de ces mêmes fonctions.

1 Polynômes

Les polynômes sont des fonctions dont la simplicité offre de nombreux avantages dans plusieurs domaines, tels que la physique et l'informatique.

Par exemple, en traitement du signal, on est parfois amené à approcher le graphe d'une fonction complexe par un polynôme, à forme plus simple. De la même manière, en statistique, on est parfois amené à tenter de faire passer un polynôme à la formule simple pour modéliser au mieux le comportement d'un nuage de points.

Plus formellement, on les définit en termes de fonction comme suit.

Définition 1

Un polynôme de degré n *est une fonction* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *et* $a_n \neq 0$. *Le facteur* a_i *est appelé le* coefficient de degré i *du polynôme.*

Exemple 1. La fonction $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ est un polynôme de degré 2 avec $a_0 = 5$, $a_1 = 6$ et $a_2 = 3$.

En particulier, les polynômes de degré n
- ont un domaine égal à $\mathbb{R}$,
- ne sont jamais périodiques,

— sont continus sur leur domaine,
— n'admettent aucune asymptote,
— admettent au plus n racines réelles.

On présente ici plusieurs polynômes courants.

— La fonction identité $f(x) = x$. Cette fonction est impaire et strictement croissante. Elle admet une racine en $x = 0$. Son graphe est illustré à la figure 1(a).
— La fonction carré $f(x) = x^2$. Cette fonction est paire, décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet une racine double[1] en $x = 0$. Son graphe en parabole est illustré à la figure 1(b).
— La fonction cube $f(x) = x^3$. Cette fonction est impaire et strictement croissante. Elle admet une racine triple en $x = 0$. Son graphe est illustré à la figure 1(c).

2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques, sont des fonctions permettant de déterminer les caractéristiques d'un triangle (longueur des côtés et angles) à partir d'autres caractéristiques de ce triangle. On peut par exemple déterminer l'amplitude d'un angle à partir de la mesure de deux de ses côtés.

On présente ici trois fonctions trigonométriques, le sinus, noté sin, le cosinus, noté cos, et la tangente, notée tan. Ces fonctions sont continues sur leur domaine et ont les caractéristiques suivantes.

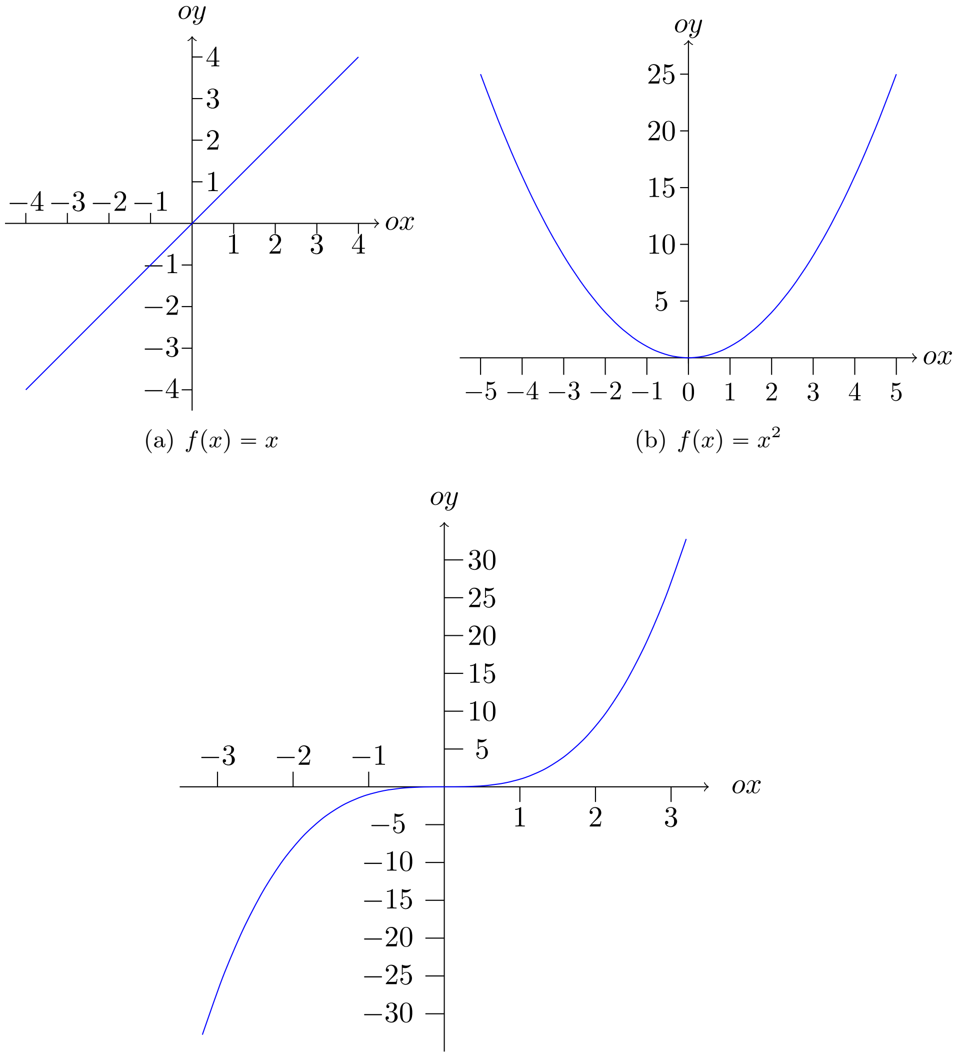
sinus On a
— $\mathrm{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$.
— L'ensemble des racines de $\sin(x)$ est égal à $\left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
— Cette fonction est périodique de période 2π.
— Cette fonction est impaire et n'admet aucune asymptote.

cosinus On a
— $\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$.
— L'ensemble des racines de $\cos(x)$ est égal à $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
— Cette fonction est périodique de période 2π.
— Cette fonction est paire et n'admet aucune asymptote.

tangente On a
— $\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\mathrm{Im}(\tan) = \mathbb{R}$.
— L'ensemble des racines de $\tan(x)$ est égal à $\left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
— Cette fonction est périodique de période π.
— L'ensemble des asymptotes de cette fonction est $\left\{ x = k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Elles sont toutes verticales.
— Cette fonction est impaire.

Les graphes de ces fonctions sont illustrés à la figure 2.

1. Une racine double, ou plus généralement multiple, est une racine apparaissant plusieurs fois comme solution d'une équation. Par exemple, $x^2 = 0$ est une équation admettant deux solutions (car x^2 est un polynôme de degré 2), dès lors $x^2 = (x - 0) \cdot (x - 0)$ admet une racine double : zéro.

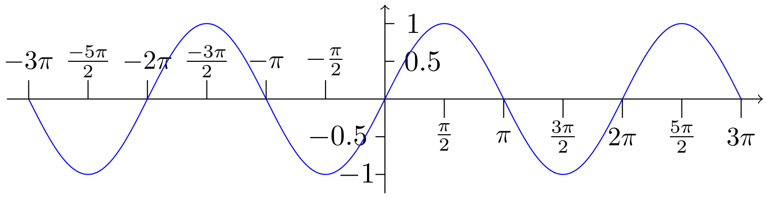


(a) $f(x) = x$

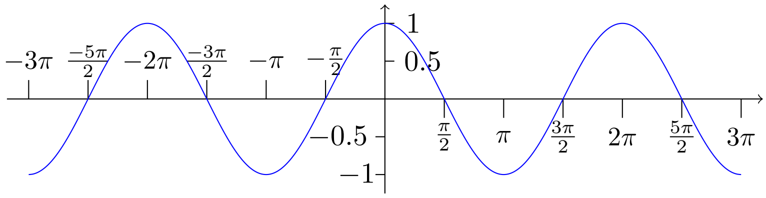
(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^3$

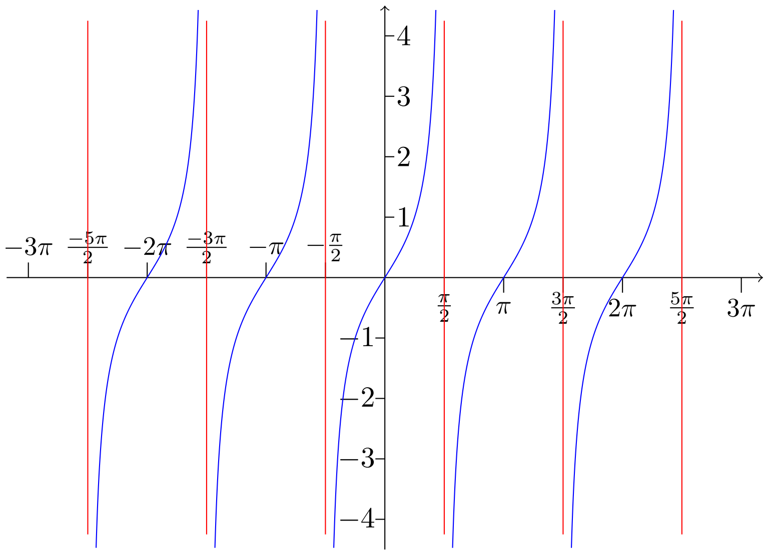
FIGURE 1 – Graphes de polynômes élémentaires



(a) $\sin(x)$



(b) $\cos(x)$



(c) $\tan(x)$

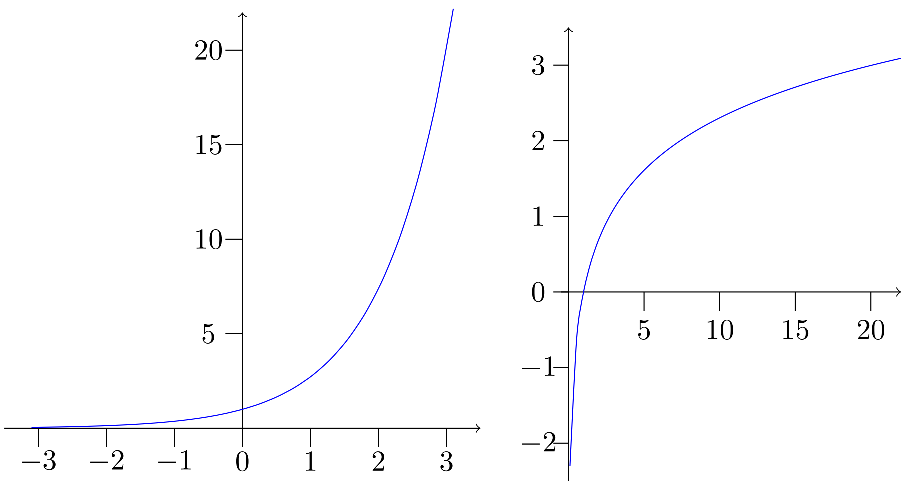
FIGURE 2 – Illustration du graphe des fonctions trigonométriques

3 Exponentielle et logarithme

Les fonctions exponentielles et logarithmiques sont très présentes tant en mathématiques qu'en physique, en probabilité et en informatique. Par ailleurs, certains processus naturels, comme la division cellulaire, progressent suivant une telle fonction.

On présente ici deux de ces fonctions :
- e^x : l'exponentielle [2] (de e). On a :
  - $\text{Dom}\,(e^x) = \mathbb{R}$, $\text{Im}\,(e^x) =]0, +\infty[$,
  - cette fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$,
  - cette fonction n'admet pas de racines.
- $\ln(x)$: le logarithme *népérien* [3]. On a :
  - $\text{Dom}\,(\ln(x)) = \mathbb{R}_0^+$, $\text{Im}\,(\ln(x)) = \mathbb{R}$,
  - cette fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$,
  - cette fonction admet une racine en $x = 1$.

De plus, ces fonctions sont strictement croissantes, sont continues sur leur domaine et ne sont jamais périodiques. Notons également que $\ln(x)$ est la réciproque de e^x. Le graphe de ces fonctions est illustré à la figure 3.



(a) e^x (b) $\ln(x)$

FIGURE 3 – Fonctions exponentielles et logarithmes

Parfois, on rencontre les fonctions exponentielles et logarithmiques exprimées en fonction d'une base $a > 0$ différente de e, par exemple dans le cas de 2^x ou de $\log_{10}(x)$. On note dès lors la propriété suivante sur les logarithmes :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

2. Le nombre e peut être défini comme $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

3. Cette fonction est parfois également appelé le logarithme naturel, et a été introduite avant 1649 par Grégoire de Saint-Vincent et Alphonse Antonio de Sarasa [1].

4 Autres fonctions élémentaires

Enfin, outre les polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques, quatre autres fonctions élémentaires sont habituellement rencontrées : la valeur absolue, la racine carrée et cubique, ainsi que la fonction inverse.

Les caractéristiques de ces fonctions sont les suivantes.

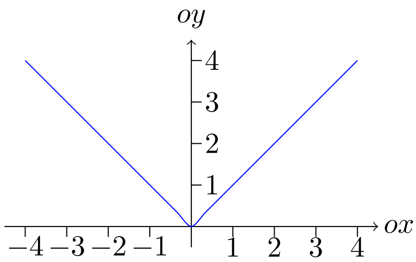
- Valeur absolue $|x|$:
  - $\text{Dom}\,(|x|) = \mathbb{R}$ et $\text{Im}\,(|x|) = \mathbb{R}^+$.
  - Cette fonction est paire est admet une racine en $x = 0$.
  - Cette fonction est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
  - Cette fonction n'admet pas d'asymptote.
- Racine carrée $\sqrt{x}$:
  - $\text{Dom}\,(\sqrt{x}) = \text{Im}\,(\sqrt{x}) = \mathbb{R}^+$,
  - Cette fonction est strictement croissante et admet une racine en $x = 0$,
  - Cette fonction n'admet pas d'asymptote.
- Racine cubique $\sqrt[3]{x}$:
  - $\text{Dom}\,(\sqrt[3]{x}) = \text{Im}\,(\sqrt[3]{x}) = \mathbb{R}$,
  - Cette fonction est strictement croissante et admet une racine en $x = 0$,
  - Cette fonction est impaire et n'admet pas d'asymptote.
- Inverse $\frac{1}{x}$:
  - $\text{Dom}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{Im}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}_0$,
  - Cette fonction est impaire et n'admet pas de racines,
  - Cette fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Par ailleurs, ces fonctions sont toutes continues sur leur domaine, et ne sont pas périodiques. Notons également que $\sqrt{x}$ est la réciproque de x^2 pour $x > 0$, et que $\sqrt[3]{x}$ est la réciproque de x^3.

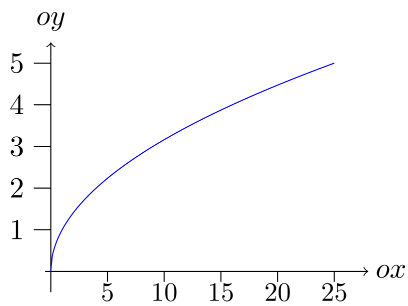
Le graphe de ces fonctions est illustré à la figure 4.

Références

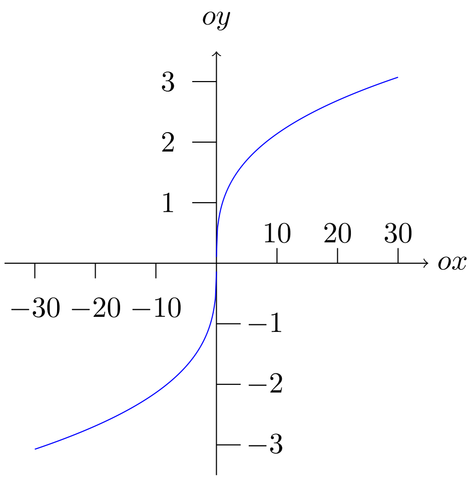
[1] R. P. Burn. Alphonse antonio de sarasa and logarithms. *Historia Mathematica*, 28 :1–17, 2001.



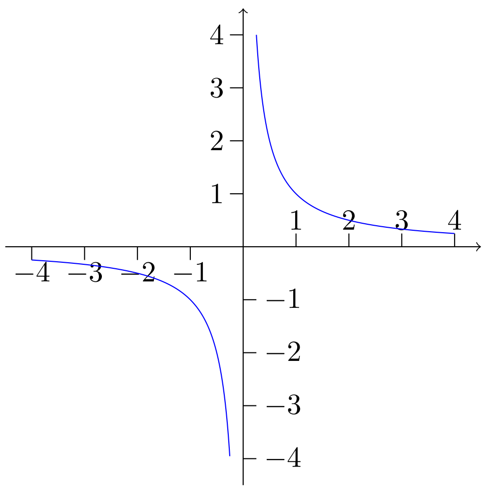
(a) $|x|$



(b) $\sqrt{x}$



(c) $\sqrt[3]{x}$



(d) $\frac{1}{x}$

FIGURE 4 – Illustration d'autres graphes de fonctions élémentaires