Rappel - Trigonométrie et coordonnées polaires

R. Absil

17 octobre 2017

La trigonométrie est, lexicalement, une discipline caractérisant les relations entre distances et angles dans un triangle. Par extension, cette matière définit également les fonctions trigonométriques. Cette annexe rappelle à l'étudiant ces concepts.

Plus particulièrement, la trigonométrie définit trois fonctions principales, permettant de calculer, au choix, un angle ou la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, à partir de deux données relatives à ce triangle. Ces fonctions et leurs calculs sont illustrées à la figure 1.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{B}{C} \\
\cos(\alpha) &= \frac{A}{C} \\
\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{B}{A}
\end{aligned}$$

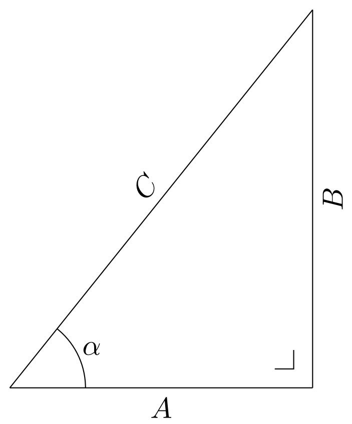

Figure 1 – Trigonométrie du triangle rectangle

Ces trois fonctions sont inversibles, et leurs inverses arc sinus, arc cosinus et arc tangente sont respectivement notées $\text{asin}(\alpha)$, $\text{asin}(\alpha)$ et $\text{atan}(\alpha)$.

En résumé, les trois fonctions trigonométriques et leurs inverses ont donc la signature suivante :

$$\begin{aligned}
\sin : \mathbb{R} &\to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)\\
\cos : \mathbb{R} &\to [-1, 1], x \mapsto \cos(x)\\
\tan : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, x \mapsto \tan(x)\\
\text{asin} : [-1, 1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \text{asin}(x)\\
\text{acos} : \mathbb{R} &\to [0, \pi], x \mapsto \text{acos}(x)\\
\text{atan} : \mathbb{R} &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \text{atan}(x)
\end{aligned}$$

Les images de ces fonctions en certains angles remarquables sont illustrées à la table 1.

		Angles				
		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Fonction	sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$

Table 1 – Fonctions trigonométriques et angles remarquables

Parfois, on représente ces fonctions au sein d'un cercle : le *cercle* trigonométrique, illustré à la figure 2.

Sur cette figure, par simple application du théorème de Pythagore, on remarque notamment la propriété suivante :

Propriété 1 (Relation fondamentale de trigonométrie)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Sur base du cercle trigonométrique, on construit également le système de coordonnées polaires, décrites à la section suivante.

Coordonnées polaires

La plupart des gens sont familiers avec le système de *coordonnées cartésiennes* : un point (a, b) est défini comme décalé horizontalement de a unités sur l'axe ox, et de b unités sur l'axe oy. Ce système de coordonnées permet d'identifier uniquement chaque point du plan.

Un des avantages principaux de ce système de coordonnées est qu'il est facile d'effectuer une translation sur un point. En effet, si $p = (a, b)$ est un point du plan à translater selon un vecteur

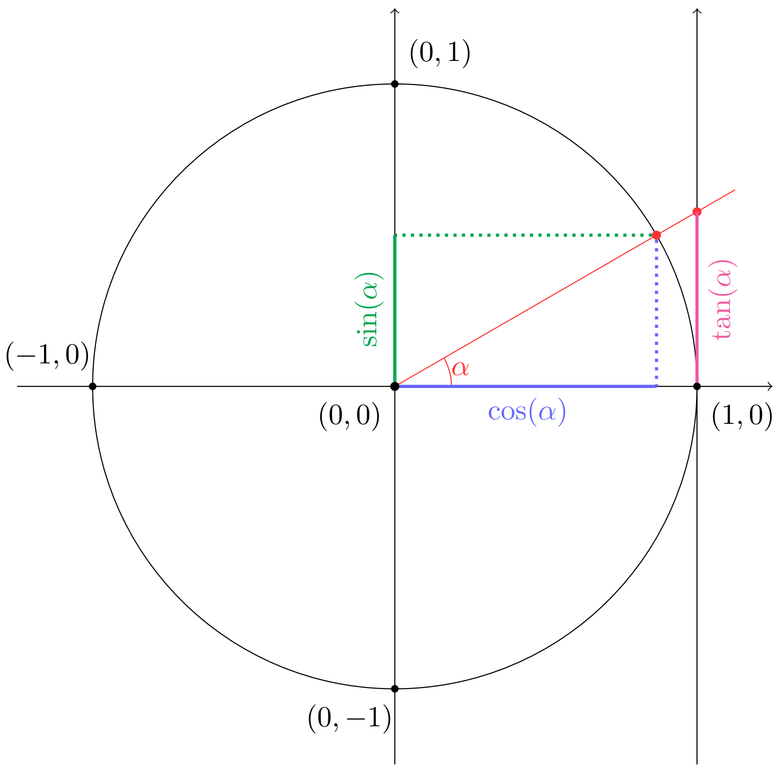

Figure 2 – Le cercle trigonométrique

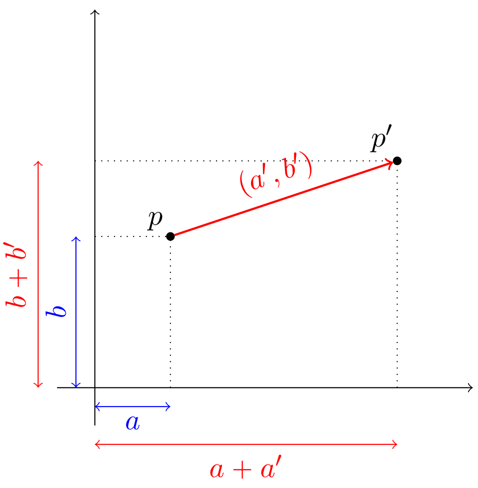

Figure 3 – Translation d'un point

(a', b'), il suffit d'ajouter a' unités à l'abscisse de p, et b' unités à l'ordonnée de p. Cette situation est illustrée à la figure 3.

Néanmoins, le calcul des nouvelles coordonnées est significativement plus difficile si l'on souhaite effectuer une rotation de p autour d'un certain point. Pour ce faire, on peut utiliser le système de *coordonnées polaires*, qui a l'avantage de simplifier le calcul des rotations, au détriment du calcul des translations.

Dans le système de coordonnées polaires, un point $p = (\rho, \theta)$ est identifié par deux composantes :

— son *module* ρ : la distance qui sépare p de l'origine du repère,

— son *angle* θ : la pente de la droite joignant l'origine du repère à p.

De la même manière que pour les coordonnées cartésiennes, ce système permet d'identifier sans ambiguïté chaque point du plan. Par ailleurs, si l'on souhaite effectuer une rotation d'angle α autour de l'origine d'un point $p = (\rho, \theta)$ exprimé en coordonnées polaires, il suffit d'ajouter α à l'angle de p. Cette situation est illustrée à la figure 4.

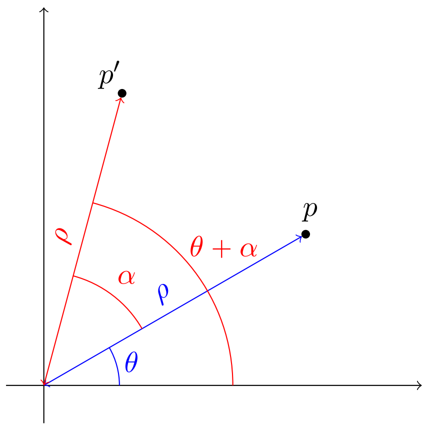

FIGURE 4 – Rotation d'un point autour de l'origine

Notez que cette brève introduction ne couvre pas exhaustivement toutes les informations liées aux coordonnées polaires. En effet, elles n'expliquent pas directement comment effectuer une rotation autour d'un point quelconque, ni comment passer d'un système de coordonnées à un autre. Les étudiants se doivent de se renseigner à ce sujet, sous réserve qu'ils utilisent ces systèmes de coordonnées.