

# Mathématiques

MAT1 - MAT

2020 - 2021

R. ABSIL  
L. BEECKMANS  
J. BELEHO  
D. BOIGELOT  
P. HAUWEELE  
C. LEIGNEL  
N. RICHARD  
M. WAHID

Haute École Bruxelles-Brabant

École supérieure d'informatique





---

## License

---



Ce document, et l'intégralité de son contenu, est sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) », à l'exception des logos de la haute-école Bruxelles - Brabant (HE2B) et de l'école supérieure d'informatique (ESI), ainsi que les contenus issus des références listées dans la bibliographie qui, sont la propriété de leurs détenteurs respectifs.

Le texte légal complet de cette licence peut être trouvé sur [le site de Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode)<sup>1</sup>.

---

1. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>



---

# Table des matières

---

<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>xix</b>
À propos de ce syllabus . . . . .	xx
<b>I Mathématiques discrètes</b>	<b>1</b>
<b>1 Algèbre booléenne</b>	<b>3</b>
1.1 Propositions et opérateurs logiques . . . . .	4
1.1.1 Négation . . . . .	7
1.1.2 Conjonction . . . . .	8
1.1.3 Disjonction . . . . .	8
1.1.4 Disjonction exclusive . . . . .	10
1.1.5 Implication . . . . .	10

---

1.1.6	Équivalence . . . . .	14
1.1.7	Négation de disjonctions, de conjonction et d'implication .	15
1.2	Calcul propositionnel et priorités des opérateurs logiques . . . . .	18
1.3	Quelques propriétés des opérateurs logiques . . . . .	19
1.4	Formes normales . . . . .	22
1.4.1	Forme normale disjonctive . . . . .	23
1.4.2	Forme normale conjonctive . . . . .	23
1.5	Exercices résolus . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Théorie des ensembles</b>	<b>33</b>
2.1	Concepts de base . . . . .	34
2.1.1	Égalité d'ensembles . . . . .	36
2.1.2	Sous-ensemble . . . . .	37
2.1.3	Cardinal . . . . .	38
2.2	Définition en compréhension . . . . .	40
2.3	Opérations ensemblistes . . . . .	43
2.3.1	Parties d'un ensemble . . . . .	43
2.3.2	Complémentaire d'un ensemble . . . . .	44
2.3.3	Union de deux ensembles . . . . .	44
2.3.4	Intersection de deux ensembles . . . . .	45
2.3.5	Différence de deux ensembles . . . . .	46
2.3.6	Différence symétrique de deux ensembles . . . . .	47

---

2.3.7	Cas particuliers . . . . .	47
2.3.8	Produit cartésien . . . . .	48
2.4	Exercices résolus . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Logique des prédicats</b>	<b>57</b>
3.1	Concepts de base . . . . .	58
3.2	Connexion entre prédicats et opérateurs ensemblistes . . . . .	61
3.3	Exercices résolus . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Éléments de la théorie des graphes</b>	<b>69</b>
4.1	Concepts de base en théorie des graphes . . . . .	70
4.1.1	Adjacence . . . . .	71
4.2	Variantes du modèle de graphe . . . . .	74
4.2.1	Multigraphe . . . . .	74
4.2.2	Graphe dirigé . . . . .	76
4.2.3	Graphe étiqueté . . . . .	77
4.3	Chemins et connexité . . . . .	78
4.4	Distances . . . . .	82
4.5	Coloration de graphes . . . . .	86
4.6	Exercices résolus . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Dénombrement</b>	<b>99</b>
5.1	Un problème de modélisation . . . . .	100

---

5.1.1	Diagrammes en arbre . . . . .	101
5.1.2	Encodage d'une solution d'un problème . . . . .	101
5.2	Outils de base du dénombrement . . . . .	104
5.2.1	La règle du produit . . . . .	105
5.2.2	Le principe d'inclusion-exclusion . . . . .	108
5.2.3	La règle de la division . . . . .	112
5.2.4	Le principe des tiroirs . . . . .	114
5.3	Deux grandes questions . . . . .	118
5.4	Arrangements et permutations . . . . .	120
5.4.1	Arrangements sans répétitions . . . . .	121
5.4.2	Permutations . . . . .	124
5.4.3	Arrangement avec répétitions . . . . .	125
5.5	Combinaisons . . . . .	127
5.5.1	Combinaisons sans répétition . . . . .	127
5.5.2	Binôme de Newton et triangle de Pascal . . . . .	129
5.6	Exercices résolus . . . . .	131
<b>II</b>	<b>Algèbre linéaire</b>	<b>147</b>
<b>6</b>	<b>Vecteurs</b>	<b>149</b>
6.1	Concepts de base . . . . .	150
6.2	Opérations sur les vecteurs . . . . .	152



---

6.2.1	Multiplication par un scalaire . . . . .	152
6.2.2	Addition et soustraction . . . . .	154
6.2.3	Produit scalaire . . . . .	155
6.3	Exercices résolus . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Matrices</b>	<b>163</b>
7.1	Introduction . . . . .	164
7.2	Concepts de base . . . . .	165
7.3	Opérations matricielles . . . . .	167
7.3.1	Transposition . . . . .	167
7.3.2	Addition, soustraction et multiplication scalaire . . . . .	168
7.3.3	Multiplication . . . . .	169
7.4	Déterminant . . . . .	171
7.4.1	Matrices $2 \times 2$ et $3 \times 3$ . . . . .	172
7.4.2	Matrices d'ordre supérieur . . . . .	173
7.5	Inverse de matrice . . . . .	176
7.6	Exercices résolus . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Diagonalisation</b>	<b>187</b>
8.1	Résolution de systèmes . . . . .	188
8.2	Indépendance linéaire . . . . .	190
8.3	Applications linéaires . . . . .	196
8.4	Bases et changements de bases . . . . .	202

8.5	Vecteurs et valeurs propres . . . . .	209
8.6	Exercices résolus . . . . .	216
<b>III</b>	<b>Mathématiques continues</b>	<b>229</b>
<b>9</b>	<b>Dérivation et intégration</b>	<b>231</b>
9.1	Dérivation . . . . .	232
9.1.1	Définition géométrique . . . . .	232
9.1.2	Définition analytique . . . . .	234
9.1.3	Fonction dérivée . . . . .	240
9.1.4	Dérivées d'ordre supérieurs et applications des dérivées . .	243
9.2	Intégration . . . . .	252
9.2.1	Intégrales définies et indéfinies . . . . .	253
9.2.2	Calcul intégral . . . . .	256
9.3	Exercices résolus . . . . .	260
<b>10</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>273</b>
10.1	Introduction . . . . .	274
10.2	Concepts de base . . . . .	275
10.3	Forme trigonométrique . . . . .	277
10.4	Opérations sur les complexes . . . . .	281
10.4.1	Addition et soustraction . . . . .	282
10.4.2	Multiplication . . . . .	283

10.4.3 Inverse et division . . . . .	285
10.5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ . . . . .	288
10.5.1 Racines de l'unité . . . . .	291
10.6 Exercices résolus . . . . .	295
<b>IV Annexes</b>	<b>307</b>
<b>A Exemples de raisonnements erronés classiques</b>	<b>309</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>317</b>
<b>Index</b>	<b>319</b>



---

## Table des figures

---

1.1	tables de vérité de d'Exercice 1.6 . . . . .	29
2.1	Illustration de l'inclusion d'ensemble . . . . .	37
2.2	Diagramme de Venn du complémentaire . . . . .	44
2.3	Diagramme de Venn de l'union . . . . .	45
2.4	Diagramme de Venn de l'intersection . . . . .	46
2.5	Diagramme de Venn de la différence . . . . .	46
2.6	Diagramme de Venn de la différence symétrique . . . . .	47
2.7	Union d'ensembles inclus ou disjoints . . . . .	48
2.8	Intersection d'ensembles inclus ou disjoints . . . . .	48
2.9	Différence entre ensembles inclus ou disjoints . . . . .	49
2.10	Différence symétrique entre ensembles inclus ou disjoints . . . . .	49
2.11	Résultats d'opérateurs ensemblistes sur $A$ et $B$ . . . . .	53
2.12	Illustration d'ensembles . . . . .	54

3.1	Illustration de la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ (cas 1) . . . . .	60
3.2	Illustration de la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ (cas 2) . . . . .	61
3.3	Classes de vérités de prédicats . . . . .	67
4.1	Modélisation d'une carte d'Europe sous forme de graphe . . . . .	70
4.2	Un graphe $G$ non orienté . . . . .	71
4.3	Exemple de multigraphe. . . . .	75
4.4	Exemple de graphe dirigé. . . . .	77
4.5	Exemple de graphe étiqueté . . . . .	78
4.6	Un exemple de graphe connexe . . . . .	79
4.7	Deux exemples de graphes $G$ et $H$ . . . . .	81
4.8	Un exemple d'arbre de racine $r$ . . . . .	82
4.9	Illustration du concept de distance . . . . .	84
4.10	Un graphe et sa matrice des distances . . . . .	86
4.11	Plusieurs assignations de couleurs aux sommets d'un graphe . . . . .	87
4.12	Le graphe de Petersen . . . . .	89
4.13	Un graphe $G$ . . . . .	91
4.14	Plan d'une maison . . . . .	91
4.15	Modélisation de la maison sous forme de graphe . . . . .	92
4.16	Modélisation du réseau distribution d'eau d'un village . . . . .	94
4.17	Avions aux alentours de l'aéroport de Zaventem . . . . .	95
4.18	Modélisation en graphe de la figure 4.17 . . . . .	96

---

4.19	Le graphe correspondant aux contraintes de cours . . . . .	97
5.1	Chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne contenant pas deux « 1 » consécutifs . . . . .	102
5.2	Une main de cinq cartes . . . . .	104
5.3	Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 3 . . .	105
5.4	Structure d'une plaque de voiture . . . . .	107
5.5	Ensemble des professeurs de réseaux et de système . . . . .	108
5.6	Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 8 com- mencent par « 1 » ou finissent par « 00 » . . . . .	111
5.7	Six différentes façons d'asseoir quatre personnes autour d'une table	113
5.8	Illustration de la règle de la division . . . . .	113
5.9	Au moins une boîte contient deux chaussettes . . . . .	115
5.10	Trois fonctions qui ne peuvent être des bijections . . . . .	117
5.11	Bijection entre $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ . . . . .	118
5.12	Deux mains identiques . . . . .	119
5.13	Une main illégale . . . . .	120
5.14	Construction du nombre d'arrangements sans répétitions . . . . .	122
5.15	Construction du nombre d'arrangements avec répétitions . . . . .	126
5.16	Triangle de Pascal . . . . .	130
5.17	Un plateau d'échecs . . . . .	132
5.18	T-shirts disponibles . . . . .	135
5.19	Un graphe en grille . . . . .	135

5.20	Un graphe en grille . . . . .	136
5.21	Un bloc peut apparaître à six positions disponibles . . . . .	141
5.22	Le bloc de quatre « 1 » peut apparaître à sept positions disponibles	142
5.23	Le bloc de quatre « 1 » peut apparaître à sept positions disponibles	143
5.24	Énumération des chaînes contenant exactement six « 1 » . . . . .	144
5.25	Énumération des chaînes contenant exactement sept « 1 » . . . . .	145
6.1	Illustration de $v = (3, 2)$ . . . . .	150
6.2	Deux vecteurs égaux . . . . .	151
6.3	Multiplication par un scalaire . . . . .	153
6.4	Addition et soustraction de vecteurs . . . . .	155
6.5	Construction géométrique du produit scalaire . . . . .	156
6.6	Produit scalaire de deux vecteurs . . . . .	157
6.7	Quatre vecteurs . . . . .	158
6.8	Un hexagone . . . . .	160
6.9	Illustration du calcul de vecteurs . . . . .	161
7.1	Illustration de la multiplication matricielle . . . . .	170
7.2	Illustration de la règle de Sarrus . . . . .	173
8.1	Illustration géométrique d'un système . . . . .	195
8.2	Illustration d'une symétrie orthogonale d'axe $y = -x$ . . . . .	197
8.3	Illustration d'une centrale de centre $O$ . . . . .	198



8.4	Illustration de la symétrie orthogonale d'axe $y = -x$ . . . . .	200
8.5	Illustration d'applications linéaires . . . . .	201
8.6	Illustration d'une base vectorielle . . . . .	202
8.7	Illustration d'un changement de base . . . . .	204
8.8	Changement de base en pratique . . . . .	206
8.9	Illustration d'une symétrie orthogonale d'axe $y = -x$ . . . . .	211
8.10	Division euclidienne du polynôme caractéristique . . . . .	213
8.11	Construction géométrique d'une application linéaire . . . . .	222
9.1	Interprétation géométrique de la dérivée . . . . .	233
9.2	Construction de la tangente de $\frac{1}{2}x^2 + 2$ en 1 . . . . .	234
9.3	Interprétation analytique de la dérivée . . . . .	236
9.4	Calcul analytique de $f(x) = x^2$ . . . . .	237
9.5	Exemple de fonctions non dérivables . . . . .	239
9.6	Graphe de $f(x) = x^3 - x$ . . . . .	247
9.7	Illustration de la construction de l'étang . . . . .	248
9.8	Un étudiant assoiffé au bord d'une route aperçoit un bar . . . . .	250
9.9	Concept d'intégrales tel qu'introduit par Newton et Leibniz . . . . .	252
9.10	Intégrale définie et calcul d'aire . . . . .	255
9.11	Esquisse du graphe d'une fonction . . . . .	260
9.12	Dérivées possibles pour $f$ . . . . .	261
9.13	Graphe de la fonction $f$ . . . . .	268

9.14 Représentation d'une boîte de conserve cylindrique . . . . .	268
10.1 Exemple de nombre complexe . . . . .	276
10.2 Forme trigonométrique d'un complexe $z$ . . . . .	277
10.3 Quatre complexes . . . . .	279
10.4 Translation d'un point . . . . .	280
10.5 Rotation d'un point autour de l'origine . . . . .	281
10.6 Addition de deux complexes . . . . .	282
10.7 Illustration de la multiplication de complexes . . . . .	284
10.8 Construction de l'inverse d'un complexe . . . . .	286
10.9 Solutions de l'équation $z^3 = 1$ . . . . .	293
10.10 Solutions de l'équation $z^5 = 1$ . . . . .	294
10.11 Solutions de $z^4 = 3 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{6} \right)$ . . . . .	295
10.12 Représentation de complexes . . . . .	296
10.13 Illustration de $z^n$ . . . . .	301
10.14 Solutions de $z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ . . . . .	302
10.15 Illustration de six solutions . . . . .	303
A.1 Construction des chaînes qui contiennent trois « 0 » consécutifs et quatre « 1 » consécutifs . . . . .	314

---

## Liste des tableaux

---

1.1	Table de vérité de $p$ . . . . .	6
1.2	Table de vérité de la négation . . . . .	7
1.3	Table de vérité de la conjonction . . . . .	8
1.4	Table de vérité de la disjonction . . . . .	9
1.5	Table de vérité de la disjonction exclusive . . . . .	10
1.6	Table de vérité de l'implication . . . . .	11
1.7	Table de vérité de l'équivalence . . . . .	15
1.8	Table de vérité de la négation d'une conjonction . . . . .	16
1.9	Table de vérité de la négation d'une implication . . . . .	17
1.10	Table de vérité de $\neg p \vee r \wedge (p \Leftrightarrow q \Rightarrow r)$ . . . . .	20
1.11	Table de vérité des propositions (1.1) à (1.4) . . . . .	31
3.1	Préférences d'un groupe d'amis . . . . .	65
4.1	Voisinages et degrés de la figure 4.2 . . . . .	72

4.2	Matrice d'adjacence de $G$ . . . . .	74
4.3	matrice d'adjacence d'un multigraphe . . . . .	75
4.4	Matrice des distances de $G$ . . . . .	85
4.5	Matrice des distances du graphe de Petersen . . . . .	90
4.6	Coût de transport local d'eau dans un village . . . . .	93
4.7	Cours à dispenser à différents groupes . . . . .	96
5.1	Nombre d'arrangements et de combinaisons avec et sans répétitions	131
9.1	Dérivées des fonctions élémentaires . . . . .	240
9.2	Différents cas de tableaux de variations . . . . .	245
9.3	Tableau de variation de $f(x) = x^3 - x$ . . . . .	246
9.4	tableau de variation de $V(x)$ . . . . .	249
9.5	tableau de variation de $V(x)$ . . . . .	251
9.6	Liste des primitives élémentaires . . . . .	257
9.7	Exemples d'utilisation de l'intégration par partie . . . . .	258
9.8	tableau de variation de $f(x)$ . . . . .	266
A.1	Table de vérité de $(p \vee q) \Rightarrow r$ . . . . .	310

---

# Introduction

---

## *À propos de ce syllabus*

---

L'étude des mathématiques est une tâche compliquée, qui requiert de la rigueur, du temps, et de la pratique. Le cours de mathématiques à l'école supérieure d'informatique (ESI) s'adresse à des étudiants sortant tout juste du secondaire, et venant d'horizons divers, certains ayant eu jusqu'à huit heures de mathématiques par semaine, d'autres seulement deux. Le but de ce cours est de mettre tous les étudiants sur un même pied d'égalité afin qu'ils puissent poursuivre leurs études sans difficultés liées à l'enseignement suivi dans le secondaire.

Notez toutefois que le cours de mathématiques ne comporte actuellement que peu d'heures au programme, il est donc impossible de voir l'intégralité des mathématiques utilisées dans le cursus de bachelier dans ce seul syllabus.

Pour ces raisons, ce syllabus est donné à l'étudiant en tant qu'outil, afin de l'aider dans son cursus. Il y trouvera l'intégralité de la matière enseignée, voire plus. Ce syllabus est rédigé de façon pédagogique, afin que tout étudiant puisse s'en servir comme support pendant les cours magistraux dispensés à l'ESI. Il y trouvera tous les concepts vus aux cours, parfois expliqués plus en détails, ainsi qu'une liste d'exercices, dont certains sont résolus. Notez néanmoins que ce document n'est qu'un support qu'il ne suffit pas de suivre simplement pour réussir l'examen.

## À propos de ce syllabus

Ce syllabus est un support pour le cours théorique dispensé en auditoire. L'étudiant y trouvera tous les concepts et informations nécessaires afin de réussir cette activité d'apprentissage. En plus de cela, un syllabus d'exercices non résolus est également disponible, exercices qui seront réalisés soit en cours, soit en séance de remédiation.

Notez également que le syllabus de théorie ne doit pas être utilisé comme un « roman », à lire de la première à la dernière page. Sa taille est trop conséquente pour une telle tâche, surtout étant donné le temps imparti pour le cours de mathématique. Il doit plutôt être utilisé comme support : une référence à consulter *ponctuellement* quand le besoin s'en fait sentir par l'étudiant. Ce besoin de provenir de plusieurs origines : des notes de cours peu claires ou incomplètes, la nécessité de précision sur une définition, l'envie de consulter des exercices avec solutions, l'envie de plus d'exercices que ceux qui ont été dispensés.

Ainsi, on peut partitionner le syllabus en deux types de contenu.

- La théorie : les définitions, propriétés, théorèmes, etc., à connaître afin de pouvoir résoudre les exercices. Ces éléments sont mis en évidence par un environnement en boîte bleue dotée d'une numérotation commune (définition 1.1, théorème 1.2, etc.).
- Tout le reste : les nombreux exemples et figures, les exercices résolus, les intuitions, etc., sont tous présents pour aider à comprendre et assimiler la théorie afin que l'étudiant puisse résoudre les exercices sans encombre.

À cet effet, notez que ce document dispose d'une table des matières ainsi que d'un index des notations, définitions et de la terminologie afin de faciliter votre recherche. Dès lors, étant donné cette volonté délibérée d'usage ponctuel, l'étudiant ne doit pas être effrayé par l'épaisseur de cet ouvrage.

Par ailleurs, et malgré cette taille imposante, notez néanmoins que ce syllabus n'est qu'un support, c'est-à-dire un ensemble de pages susceptibles d'aider les étudiants dans leur cursus. Dans la plupart des cas, se contenter de lire ce document ne suffit *pas* pour réussir l'examen. Comme mentionné en début de chapitre, faire des mathématiques requiert de la rigueur, du temps et de la pratique. Ainsi, ce document est fourni pour permettre à l'étudiant de développer sa capacité d'*autonomie* et de *réflexion personnelle* dans la pratique de notions mathématiques de base.

Pour ces raisons, il est vivement recommandé d'assister à chacun des cours dispensés, les étudiants y trouveront souvent des informations complémentaires liées aux concepts enseignés, qui peuvent faciliter leur compréhension. De plus, certains professeurs prévoient du temps pour permettre aux étudiants de travailler sur leurs exercices en classe, et fournissent une correction individuelle pour ces exercices. De telles séances permettent à l'étudiant de s'entraîner, et de se familiariser à la rigueur qui est demandée d'avoir pour l'examen.

Néanmoins, encore une fois, aller au cours et se servir du syllabus judicieusement ne suffit généralement pas non plus pour réussir l'examen. Il sera souvent nécessaire à l'étudiant de s'entraîner lui-même chez lui, en refaisant à la main les exercices vus au cours, sans la solution, ou en prenant l'initiative de résoudre les exercices non résolus au cours. Les professeurs dispensant le cours peuvent corriger de tels exercices, une fois une solution rédigée par l'étudiant.

Une telle pratique offre de l'expérience dans l'utilisation des mathématiques, cette expérience est fondamentale à la maîtrise des concepts. Pour cette raison, se contenter de lire les solutions des exercices résolus est souvent inutile : même si l'étudiant comprend ce qui y est fait, il n'acquiert pas l'expérience qu'il aurait pu acquérir en résolvant l'exercice lui-même.

En conclusion, même si ce syllabus est un support complet, c'est à l'étudiant de former lui-même son expérience dans l'utilisation des mathématiques, via les cours magistraux et le travail fourni à la maison.





Première partie

Mathématiques discrètes



---

## Algèbre booléenne

*Propositions et opérateurs logiques • Calcul propositionnel et priorités des opérateurs logiques • Quelques propriétés des opérateurs logiques • Formes normales • Exercices résolus*

---

La logique mathématique est la base de tout raisonnement de déduction mathématique. C'est ce formalisme qui permet de tirer des conclusions de type « si / alors » dans une argumentation complète, telle qu'une preuve, ou même dans une simple affirmation telle que « s'il pleut, alors je prends mon parapluie ».

L'algèbre booléenne, quant à elle, définit les opérateurs de base que l'on rencontre dans de telles affirmations, tels que le « et » et le « ou », ainsi que leurs propriétés. Ce sont également ces règles et propriétés qui permettent de distinguer des arguments mathématiques valides ou non.

Ces deux disciplines ne caractérisent *que* cela : pas de calcul de nombres, pas de fonctions, pas d'ensembles, mais uniquement des affirmations qui sont soit vraies, soit fausses, ainsi que la manière de les manipuler. Pour cette raison, la quasi-totalité des exemples et exercices de ce chapitre sont rédigés « en français ».

Plus particulièrement, la section 1.1 définit brièvement ce qu'est une proposition et les opérateurs logiques que l'on peut réaliser entre propositions. Ensuite,

la section 1.2 détaille les mécanismes de calcul propositionnel, ainsi que les priorités entre opérateurs logiques. La section 1.3 est consacrée à diverses propriétés élémentaires de propositions logiques, telles que les lois de De Morgan. Ensuite, la section 1.4 définit les *formes normales*, c'est-à-dire les conventions d'écriture pour rendre plus facile la lecture d'une proposition.

Ce chapitre est conclu par une série d'exercices résolus en section 1.5.

## 1.1 Propositions et opérateurs logiques

### Définition 1.1

*Une proposition est une affirmation qui possède une valeur de vérité qui peut être soit vraie, soit fausse.*

*A priori*, cette définition n'a rien de « mathématique ». On peut l'utiliser dans tout contexte, comme en français dans l'exemple suivant.

**Exemple 1.1.** Considérez les phrases suivantes :

1. « La carotte est un légume » est une proposition. Le légume est un concept clairement défini, et cette proposition est vraie.
2. « La carotte est un moyen de locomotion » est une proposition. Elle est fausse : personne ne se déplace à dos de carotte.
3. « La carotte a bon goût » n'est pas une proposition. En effet, la valeur de vérité de cette affirmation dépend de qui mange la carotte. Cette affirmation est subjective.
4. « Arrache cette carotte ! » et « Qu'est-ce qu'une carotte ? » ne sont pas des propositions. Ces phrases ne déclarent pas un fait, et n'ont pas de valeur de vérité.
5. « Je mens » n'est pas une proposition. En effet, on ne peut lui associer ni la valeur de vérité vrai, ni la valeur de vérité faux<sup>1</sup>.

---

1. Cette phrase est appelée *le paradoxe du menteur* : si la personne ment véritablement, alors elle a dit vérité en affirmant qu'elle mentait. Similairement, si elle disait la vérité, elle n'aurait pas menti. C'est pour cette raison qu'il est impossible d'assigner la valeur de vérité vrai ou faux à cette affirmation.

6. « Il existe de la vie ailleurs dans l'univers » est une proposition. Elle possède une valeur de vérité : soit vrai, soit faux. Le fait qu'on ne puisse pas décider laquelle de ces valeurs est la bonne est sans importance.



La suite de ce chapitre est dédiée à la complexification de ce modèle. En particulier, on verra comment composer une proposition à partir d'autres propositions, comment introduire des variables dans une proposition, comment restreindre les valeurs de ces variables, etc.

Ce modèle est très utilisé en logique propositionnelle, un formalisme utilisé dans de nombreuses disciplines mathématiques, telles que l'algèbre, l'analyse, l'arithmétique, etc. Dans cette logique, on raisonne la plupart du temps sur des compositions de propositions quelconques que l'on nomme  $p, q, r \dots$ . Comme on ne connaît pas *a priori* la valeur de vérité de la proposition originale, ni de celles des sous-propositions  $p, q, r$ , etc., on doit envisager tous les cas de valeurs possibles. Cette énumération requiert l'utilisation de *tables de vérité*.

Une table de vérité est simplement un tableau qui énumère toutes les possibilités de valeurs de vérité d'une proposition. Si une proposition  $p$  est composée de deux sous-propositions  $q$  et  $r$ , on y note les valeurs de vérité de  $q$  et  $r$ , et on en déduit la valeur de vérité de  $p$ . Ces valeurs sont notées  $V$  pour la valeur « vrai », et  $F$  pour la valeur « faux »<sup>2</sup>.

**Exemple 1.2.** Considérez une personne disant « Ce poisson a des dents et est rouge<sup>3</sup> ». C'est une proposition, car elle peut être soit vraie, soit fausse. Notons-la  $p$ . Elle est composée de deux sous-propositions.

- Le poisson a des dents. Notons cette propriété  $q$ .
- Le poisson est rouge. Notons cette propriété  $r$ .

On peut illustrer la table de vérité de cette proposition avec la table 1.1.

On peut interpréter cette table de la façon suivante.

---

2. Notez que, parfois, « vrai » est noté comme le chiffre « 1 » et « faux » comme le chiffre « 0 ». Cette notation est souvent utilisée en électronique, notamment.

3. Les couleurs utilisées dans les exemples de ce cours sont considérées comme définies clairement à l'aide d'un code de 3 octets, comme dans la plupart des systèmes informatiques. En ce sens, elles ne sont pas sujettes à interprétation.

$q$	$r$	$p$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$

TABLE 1.1 – Table de vérité de  $p$ 

- La première ligne du tableau signifie donc « le poisson a des dents et est bel et bien rouge ». La proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc vraie.
- La deuxième ligne du tableau signifie « le poisson a des dents, mais n'est pas rouge ». La proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.
- La troisième ligne du tableau signifie « ce poisson n'a pas de dents, mais il est rouge ». Encore une fois, la proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.
- La quatrième ligne du tableau signifie « ce poisson n'a pas de dents et n'est pas rouge ». Évidemment, dans ce cas final, la proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.



Les tables de vérité sont très utiles pour décrire les opérateurs logiques de base, tels que le « ou », le « et », etc. On utilisera le même formalisme que dans l'exemple précédent pour les illustrer : un tableau à deux dimensions, avec un  $V$  signifiant vrai, et un  $F$  signifiant faux.

À ce titre, on définit les concepts de *tautologie* et d'*antilogie*.

### Définition 1.2

Une tautologie (resp. antilogie ou une contradiction) est une proposition toujours vraie (resp. fausse).

Intuitivement, la valeur de vérité des tautologies (vrai) et des antilogies (faux) ne dépend pas des valeurs de vérité des propositions qui la composent. Visuellement, la dernière colonne de la table de vérité d'une tautologie ne contient que

des  $V$ , celle d'une antilogie ne contient que des  $F$ .

Le très grand intérêt des tautologies est de fournir des méthodes de raisonnement sûres. Par exemple, lorsque l'on écrit  $ab = 0$  si et seulement si  $a = 0$  ou  $b = 0$ , on définit en réalité une tautologie. Comme cette formule est toujours vraie quelle que soit la valeur de son contenu (en l'occurrence, les valeurs des variables  $a$  et  $b$ ), développer le raisonnement de cette manière répond à la question originale (trouver  $a$  et  $b$ ) de manière sûre.

Dans la suite de cette section, on définit divers opérateurs logiques de base, avec leurs tables de vérité associées pour illustrer ces définitions.

### 1.1.1 Négation

Intuitivement, la négation d'une proposition échange sa valeur de vérité. En français, cela correspond au contraire.

#### Définition 1.3

La négation d'une proposition  $p$  est notée  $\neg p$ , et se lit « non  $p$  ». Si  $p$  est vrai,  $\neg p$  est faux, et inversement.

La table 1.2 illustre la table de vérité de la négation d'une proposition  $p$ .

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

TABLE 1.2 – Table de vérité de la négation

**Exemple 1.3.** Considérez la proposition « il pleut<sup>4</sup> », notée  $p$ . On peut écrire en français  $\neg p$  comme « il est faux qu'il pleut », ou plus simplement comme « il ne pleut pas ». ◀

**Exemple 1.4.** Considérez la proposition « mon ordinateur a au moins 8GB de mémoire ». La négation de cette proposition est « il est faux que mon ordinateur

4. Ici, on sous-entend « il pleut maintenant, en ce moment, dehors, quand on regarde par la fenêtre ». Le contexte de cette affirmation est donc bien défini.

a au moins 8GB de mémoire », ou mieux construit : « mon ordinateur a *moins* de 8GB de mémoire »<sup>5</sup>. ◀

### 1.1.2 Conjonction

La conjonction de deux propositions impose à deux propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond au « et ». Dans l'exemple 1.2, pour que le résultat soit vrai, il faut que le poisson ait des dents *et* qu'il soit rouge.

#### Définition 1.4

*La conjonction de deux propositions  $p$  et  $q$  est notée  $p \wedge q$  et se lit «  $p$  et  $q$  ». Elle n'est vraie que si à la fois  $p$  et  $q$  sont vraies, et est fausse dans tous les autres cas.*

La table 1.3 illustre la table de vérité de la conjonction de deux propositions  $p$  et  $q$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

TABLE 1.3 – Table de vérité de la conjonction

**Exemple 1.5.** Soient les propositions  $p$  « il pleut » et  $q$  « le soleil brille ». La conjonction de ces deux propositions est, « il pleut et le soleil brille », ou encore « il pleut mais le soleil brille », ou même « le soleil brille mais il pleut ». ◀

### 1.1.3 Disjonction

La disjonction de deux propositions impose à au moins une de ces propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond *généralement* au « ou ».

---

5. Notez qu'il est ambigu d'affirmer que la négation est « mon ordinateur a au *plus* 8GB de mémoire », dans la mesure où cette proposition inclut l'ordinateur avec exactement 8 GB de mémoire.



Par exemple, quand on affirme « pendant les repas, je bois de l'eau ou du vin », le seul cas dans lequel on mentirait serait celui où on ne boirait ni eau, ni vin. En particulier, boire à la fois de l'eau et du vin n'est pas interdit par la proposition.

Notez néanmoins que, parfois, le contexte en français va parfois rendre cette disjonction comme exclusive. En effet, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, on ne s'attend pas à ce qu'elle se rende à ces deux activités. En mathématiques, elle pourrait très bien aller à la fois à la plage et à la piscine.

#### Définition 1.5

*La disjonction de deux propositions  $p$  et  $q$  est notée  $p \vee q$  et se lit «  $p$  ou  $q$  ». Elle est vraie si au moins un de ses opérandes est vrai.*

L'opérateur  $\vee$  est également appelé le « ou inclusif ». La table 1.4 illustre la table de vérité de la disjonction.

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

TABLE 1.4 – Table de vérité de la disjonction

**Exemple 1.6.** Soit la proposition « seuls les étudiants qui ont réussi algorithmique ou mathématiques peuvent suivre ce cours ». Il est évident que les étudiants ayant réussi à la fois mathématiques et algorithmique peuvent suivre ce cours. Seuls les étudiants n'ayant réussi ni mathématiques ni algorithmique ne peuvent pas participer. ◀

**Exemple 1.7.** Soit la proposition « dépendant de mon humeur, je me ferai livrer une pizza ou des sushis ». Se faire livrer à la fois une pizza et des sushis ne constitue pas un mensonge en soi. ◀

**Exemple 1.8.** L'affirmation « il pleut ou l'orage éclate » est fausse s'il n'y a *ni* pluie, *ni* orage. ◀

### 1.1.4 Disjonction exclusive

La disjonction exclusive de deux propositions correspond en général à l'usage du « ou » en français : elle est vraie si exactement une de ces propositions est vraie. Par analogie avec la section précédente, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, elle ne se rend pas à ces deux activités.

#### Définition 1.6

La disjonction exclusive de deux propositions  $p$  et  $q$  est notée  $p \vee q$  et se lit « soit  $p$ , soit  $q$  ». Elle est vraie si exactement un de ses opérandes est vrai.

L'opérateur  $\vee$  est également appelé le « ou exclusif ». Parfois, il est noté  $\oplus$ . La table 1.5 illustre la table de vérité de cet opérateur.

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

TABLE 1.5 – Table de vérité de la disjonction exclusive

**Exemple 1.9.** Dans la proposition « pour se rendre à l'école, vous devez tourner soit à droite, soit à gauche », il n'est pas permis de continuer par exemple tout droit, ni de tourner à la fois à droite et à gauche. ◀

### 1.1.5 Implication

L'implication mathématique est un opérateur logique permettant d'effectuer des affirmations conditionnelles. On la retrouve en français dans des phrases du type « si (...), alors (...) ».

Similairement à la disjonction, notez que l'implication fonctionne différemment en français qu'en mathématique. En effet, dans une phrase du type « s'il pleut, je prends mon parapluie », on ne s'attend pas à ce que la personne prenne son parapluie s'il ne pleut pas. En mathématique, si la proposition « je prends mon parapluie » est vraie, alors l'implication est vraie peu importe si il pleut.

**Définition 1.7**

L'implication d'une proposition  $q$  par une proposition  $p$  est notée  $p \Rightarrow q$  et est lue «  $p$  implique  $q$  » ou « si  $p$ , alors  $q$  ». Elle est fausse uniquement quand  $p$  est vrai et  $q$  est faux.

La table 1.6 illustre la table de vérité de l'implication. Sur cette table, on remarque qu'en particulier,  $p \Rightarrow q$  est toujours vrai

- lorsque  $p$  est faux, quelle que soit la valeur de vérité de  $q$  ;
- lorsque  $q$  est vrai, quelle que soit la valeur de vérité de  $p$ .

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

TABLE 1.6 – Table de vérité de l'implication

Dans l'expression  $p \Rightarrow q$ , on appelle  $p$  l'*antécédent*, la *prémisse* ou l'*hypothèse* tandis que  $q$  est le *conséquent* ou la *conclusion*.

L'implication joue un rôle central dans le raisonnement mathématique. Pour cette raison, la terminologie en français de cet opérateur est très variée. Par exemple, si  $p$  et  $q$  sont des propositions,  $p \Rightarrow q$  peut être décrit en français comme

« Si $p$ , alors $q$ »	« $p$ implique $q$ »
« Si $p$ , $q$ »	« $p$ seulement si $q$ »
« $p$ est suffisant pour $q$ »	« $p$ est une condition suffisante pour $q$ »
« $q$ si $p$ »	« une condition nécessaire pour $p$ est $q$ »
« on déduit $q$ de $p$ »	« $q$ à moins que $\neg p$ »
« $q$ quand $p$ »	

Les exemples suivants illustrent une interprétation de la table de vérité de l'implication mathématique. Bien que répétitifs, l'expérience montre que beaucoup d'étudiants se reposent trop sur le sens du « si (...) alors (...) » français au lieu de sa signification mathématique, ce qui est sujet aux erreurs.

**Exemple 1.10.** Soit la phrase « si je suis élu, je diminuerai les taxes », pro-

noncée dans de nombreux discours politiques engagés. On peut modéliser cette affirmation sous forme propositionnelle de la façon suivante :

- soit  $p$  la proposition « je suis élu »,
- soit  $q$  la proposition « je diminuerai les taxes ».

La proposition « *si* je suis élu, *alors* je diminuerai les taxes » peut donc être modélisée mathématiquement comme  $p \Rightarrow q$ .

La table de vérité de l'implication exprime le fait que lorsque l'on affirme

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

le seul cas où le politicien ment est celui où il est élu mais où il *ne* diminue *pas* les taxes, c'est-à-dire quand  $p$  est vrai et  $q$  est faux. Évidemment, si le politicien est élu et diminue les taxes, il n'a pas menti. Par ailleurs, si le politicien n'est pas élu, qu'il diminue ou non les taxes ne constitue pas non plus un mensonge car

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

ne représente un engagement *que* si le politicien est élu. ◀

**Exemple 1.11.** Dans la proposition « s'il pleut, je prends mon parapluie », il est évident que l'on dit la vérité s'il pleut et que l'on prend bien son parapluie, ou s'il ne pleut pas et que l'on ne prend pas son parapluie. Par ailleurs, on est tout à fait autorisé à prendre son parapluie en l'absence de pluie. Le seul cas de mensonge avéré dans ce cas est celui où il pleut mais où l'on ne prend pas son parapluie avec soi. ◀

**Exemple 1.12.** Soient  $p$  la proposition « je résous tous les exercices du syllabus » et  $q$  la proposition « je vais réussir le cours de mathématiques ». On peut exprimer  $p \Rightarrow q$  en français comme

« Si je résous tous les exercices du syllabus, alors je vais réussir le cours de  
mathématique »,  
« Je vais réussir le cours de mathématique quand j'aurai résolu<sup>6</sup> tous les  
exercices du syllabus »,

---

<sup>6</sup>. La conjugaison des verbes dans une proposition pour des raisons de syntaxe linguistique est sans importance d'un point de vue logique.

« Pour réussir le cours de mathématiques, je dois résoudre tous les exercices du syllabus »,  
 « Je vais réussir le cours de mathématiques à moins que je ne résolve pas tous les exercices du syllabus ».



Notez que la façon dont on a défini l'implication logique, sous forme d'affirmation conditionnelle, est plus puissante que sa signification en français. En effet, dans les exemples ci-dessus, il y a systématiquement une relation entre l'hypothèse et la conclusion, comme dans la phrase « si j'ai faim, je mange ».

Cette relation peut être décrite facilement en français grâce à la richesse du vocabulaire de la langue. En mathématique, un tel lien apparent de cause à effet n'est pas nécessaire. Ainsi, on peut sans problème décrire des propositions telles que « si le soleil brille, alors  $2 + 3 = 5$  ». Cette proposition est fausse uniquement si le soleil brille mais  $2 + 3 \neq 5$ . Dans ce cas, cette proposition est vraie, car on a toujours  $2 + 3 = 5$ . De la même manière, la proposition « si le soleil brille, alors  $2 + 3 = 6$  » est fausse uniquement si le soleil brille, car on a toujours  $2 + 3 \neq 6$ .

Dans la mesure où l'implication est fréquemment utilisée dans l'argumentation en français (comme en mathématique), on lui associe diverses définitions et propriétés. Par exemple, la propriété suivante décrit comment définir une implication à l'aide uniquement d'opérateurs « ou », « et » et « non ».

**Définition 1.8 ▶ Définition positive et négative de l'implication**

Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, la proposition  $p \Rightarrow q$  est équivalente à

$$\neg p \vee q$$

et à

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Cette définition permet régulièrement de faciliter les calculs et de réduire l'écriture d'une implication afin de n'utiliser que des opérateurs « ou », « et » et « non ». Comme mentionné en section 1.4, ce type d'écriture a de nombreuses applications en informatique et en électronique.

De la même manière, on peut définir l'implication à l'aide de sa *contraposée*, à ne pas confondre avec sa *réciproque*.

#### Définition 1.9

Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, la contraposée de  $p \Rightarrow q$  est définie comme  $\neg q \Rightarrow \neg p$ . L'implication est équivalente à sa contraposée.

#### Définition 1.10

Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, la réciproque de  $p \Rightarrow q$  est définie comme  $q \Rightarrow p$ . L'implication n'est pas équivalente à sa réciproque.

**Exemple 1.13.** Considérez la proposition « si je saute du pont, je meurs ». Cette proposition est équivalente à « si je ne meurs pas, je ne saute pas du pont » (contraposée). Par contre, elle n'est pas équivalente à « si je meurs, je saute du pont » (réciproque). ◀

### 1.1.6 Équivalence

L'équivalence de deux propositions mathématiques fonctionne exactement comme en français : deux propositions sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité. La proposition « un gâteau pour quatre personnes nécessite 250g de farine » est donc équivalente à la proposition « un gâteau pour deux personnes nécessite 125g de farine ». En effet, aucune de ces propositions ne peut être vraie (resp. fausse) si l'autre ne l'est pas.

Cet opérateur est excessivement utilisé en mathématiques, notamment dans la résolution d'équations : chaque ligne est équivalente à la précédente.

#### Définition 1.11

L'équivalence de deux propositions  $p$  et  $q$ , notée  $p \Leftrightarrow q$ , se lit «  $p$  si et seulement si  $q$  ». Elle est vraie uniquement dans les cas où  $p$  et  $q$  ont la même valeur de vérité.

La table 1.7 illustre la table de vérité de l'équivalence.

**Exemple 1.14.** Soit la proposition « je peux m'inscrire en médecine si et seulement si je réussis le concours d'entrée ». Cette proposition est fausse si l'on

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

TABLE 1.7 – Table de vérité de l'équivalence

s'inscrit sans réussir le concours, ou si on réussit le concours et qu'on ne s'inscrit pas. ◀

**Exemple 1.15.** Soit la proposition « un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés de la longueur de ses deux plus petits côtés est égale au carré de la longueur de son grand côté ». Cette proposition est vraie quand les deux opérandes sont en même temps vraies (on a un triangle rectangle), ou en même temps fausses (le triangle n'est pas rectangle). Il n'est pas possible d'avoir un triangle rectangle qui ne valide pas la deuxième partie de la proposition, et inversement. ◀

### 1.1.7 Négation de disjonctions, de conjonction et d'implication

La conjonction, la disjonction (exclusive ou non) et la négation sont des opérateurs relativement simples. Toutefois, on remarque que calculer la négation d'une conjonction ou d'une disjonction est souvent source d'erreurs auprès des étudiants. Dans ce cadre, les *lois de De Morgan* permettent de les construire correctement. Elles ont été établies par Auguste De Morgan, un mathématicien britannique du XIX<sup>e</sup> siècle.

Illustrons avant tout ces lois par un exemple. Considérons un vendeur d'informatique qui affirme « ce processeur est de la marque Intel et a une fréquence de 2.4Ghz ». À l'évidence, si le processeur n'est *pas* de la marque Intel *ou* s'il n'a *pas* une fréquence de 2.4Ghz, le vendeur a menti. On remarque donc ici que pour nier une conjonction de propositions, il faut construire la disjonction des négations des propositions.

On peut vérifier cette conclusion « mécaniquement » en construisant une table de vérité de la négation de cette proposition. Notons  $p$  la proposition « ce processeur est de la marque Intel » et  $q$  « ce processeur a une fréquence de 2.4Ghz

». Construisons la table de vérité de  $\neg(p \wedge q)$  et de  $(\neg p \vee \neg q)$ , illustrée à la table 1.8.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

TABLE 1.8 – Table de vérité de la négation d’une conjonction

On constate que les valeurs de vérité de  $\neg(p \wedge q)$  et de  $(\neg p \vee \neg q)$  sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes.

On peut procéder de manière similaire pour construire la négation de disjonctions, et ainsi établir les lois de De Morgan.

**Propriété 1.12 ▶ Lois de De Morgan**

Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, on a

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

et

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Ces lois peuvent être généralisés à des conjonctions et disjonctions d’un nombre arbitraire de propositions de la manière suivante :

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$$

et

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

Dans le cas d’une disjonction exclusive, on ne peut pas utiliser les lois de De Morgan. Néanmoins, si l’on affirme « ce soir, je mange soit de la pizza, soit un durum », les cas dans lesquels on mentirait sont soit celui où on mange *à la fois* de la pizza et un durum, soit celui où on ne mange *ni l’un, ni l’autre*.

Sur base de cette observation, on remarque donc qu’il est nécessaire, dans la négation d’une disjonction exclusive, que les deux opérandes aient la même



valeur de vérité pour rendre la négation vraie. Ceci correspond exactement à l'équivalence des propositions.

On peut donc énoncer la propriété suivante.

**Propriété 1.13**

*Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, on a*

$$(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

De la même manière que dans le cas de la négation d'une conjonction ou d'une disjonction, on peut vérifier cette propriété en construisant sa table de vérité.

Par ailleurs, similairement à la négation de conjonction et de disjonctions, on remarque que la négation d'une implication est également source d'erreurs pour les étudiants. Procédons comme précédemment, à l'aide d'un exemple.

Considérons un étudiant affirmant « si je bois douze bières, je serai ivre ». Le seul cas dans lequel cet étudiant se trompe est s'il boit douze bières *et* qu'il n'est *pas* ivre.

En répétant la démarche effectuée pour les lois de De Morgan, on peut également vérifier cette conclusion avec des tables de vérité, comme illustré à la table 1.9 où  $p$  dénote « je bois douze bières » et  $q$  « je suis ivre ».

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$

TABLE 1.9 – Table de vérité de la négation d'une implication

On constate que les valeurs de vérité de  $\neg(p \Rightarrow q)$  et de  $p \wedge \neg q$  sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes. Ceci permet dès lors de construire correctement la négation d'une implication grâce à la propriété suivante.

**Propriété 1.14**

Soient  $p$  et  $q$  deux propositions, on a

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

## 1.2 Calcul propositionnel et priorités des opérateurs logiques

Dans les définitions des sections précédentes, toutes les propositions rencontrées étaient simples et composées au maximum de deux sous-propositions. À l'évidence, des propositions plus complexes sont évidemment possibles, simplement en combinant plus de propositions avec divers opérateurs.

Dans ce cas, la valeur de vérité de la formule dépend de la valeur de vérité des propositions qui y figurent. Tous les opérateurs logiques n'ayant pas la même priorité<sup>7</sup>, il convient au minimum de faire attention lors de la lecture de formules logiques. Ces formules peuvent également être parenthésées pour lever les ambiguïtés.

En arithmétique, par exemple,  $2 + 3 \times 4$  est interprété comme  $2 + (3 \times 4)$  : le  $\times$  a une plus forte priorité que le  $+$ . De la même façon, en logique,  $p \vee q \wedge r$  est interprété comme  $p \vee (q \wedge r)$  : le « et » a une plus forte priorité que le « ou ».

Ces priorités ont l'avantage de limiter le nombre de parenthèses dans une expression. Par ailleurs, elles sont les mêmes que celles des opérateurs logiques rencontrés dans la plupart des langages de programmation, tels que le **C++** ou le **Java**. Dans certains langages fonctionnels, tels que le **Lisp** ou le **Scheme**, la *notation polonaise* est toujours d'application.

Ces priorités sont appliquées dans l'ordre suivant.

---

7. Au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, les opérateurs logiques étaient considérés comme ayant tous la même priorité. Pour cette raison, il était nécessaire de systématiquement placer des parenthèses pour éviter toute ambiguïté. Afin d'éviter un excès des symboles « ( » et « ) » dans les formules logiques, le mathématicien Jan Łukasiewicz inventa en 1924 la *notation polonaise*, qui place un opérateur avant ses opérands dans un calcul. Ainsi,  $2 + 3$  était écrit comme  $+2\ 3$ . Cette notation a l'avantage d'être non ambiguë en l'absence de parenthèses, et d'être facile à interpréter dans un système informatique. Cette notation n'est à l'heure actuelle plus utilisée en logique mathématique, mais a toujours de nombreuses applications en informatique, plus particulièrement dans le domaine de la compilation.

1. Le « non » a la plus forte priorité des opérateurs logiques :  $\neg p \vee q$  est donc interprété comme  $(\neg p) \vee q$ .
2. Le « et » a plus forte priorité que le « ou » :  $p \vee q \wedge r$  est donc interprété comme  $p \vee (q \wedge r)$ .
3. Le « ou » et le « ou exclusif » ont la même priorité, il convient donc dans ce cas d'utiliser systématiquement des parenthèses pour lever les ambiguïtés.
4. L'implication a plus forte priorité que l'équivalence (mais moins que le « ou ») :  $p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$  est donc interprété comme  $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ .
5. L'équivalence a la plus faible des priorités.

Notez que malgré ces priorités rendant la formulation d'expressions logiques non ambiguës, généralement on placera quand même des parenthèses pour éviter au lecteur la construction mentale de l'ordre d'évaluation.

**Exemple 1.16.** Soit la formule  $\neg p \vee r \wedge (p \Leftrightarrow q \Rightarrow r)$  sur les propositions  $p$ ,  $q$  et  $r$ . On peut parenthéser complètement cette formule comme

$$\underbrace{(\neg p) \vee (r \wedge \underbrace{(p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)))}_B}_{A}$$



On peut déterminer la table de vérité de cette formule comme illustré à la table 1.10. Dans cette table, on a considéré les valeurs de vérité des propositions  $p$ ,  $q$  et  $r$ , ainsi que de chacune des sous-propositions composant la formule originale, dans l'ordre dans lequel elles doivent être calculées.

### 1.3 Quelques propriétés des opérateurs logiques

Soient  $p$ ,  $p_1$ ,  $\dots$ ,  $p_n$ ,  $q$  et  $r$  des propositions quelconques, les équivalences suivantes sont des tautologies, et décrivent donc diverses propriétés des opérateurs logiques.

**Commutativité de  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\underline{\vee}$  et  $\Leftrightarrow$  :**

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$p$	$q$	$r$	$q \Rightarrow r$	$A$	$B$	$\neg p$	$\neg p \vee B$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$

TABLE 1.10 – Table de vérité de  $\neg p \vee r \wedge (p \Leftrightarrow q \Rightarrow r)$ 

Si on remplace dans cette formule  $\wedge$  par  $\vee$ ,  $\underline{\vee}$  ou  $\Leftrightarrow$ , on obtient aussi une tautologie. Le seul opérateur logique binaire<sup>8</sup> non commutatif est l'implication.

**Associativité de  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\underline{\vee}$  et  $\Leftrightarrow$  :**

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$$

Si on remplace dans cette formule  $\wedge$  par  $\vee$ ,  $\underline{\vee}$  ou  $\Leftrightarrow$ , on obtient aussi une tautologie. Le seul opérateur logique binaire non associatif est l'implication.

**Neutres pour  $\wedge$  et  $\vee$  :**

$$(p \wedge V) \Leftrightarrow p \quad \text{et} \quad (p \vee F) \Leftrightarrow p$$

**$V$  est absorbant pour  $\vee$  :**

$$(p \vee V) \Leftrightarrow V$$

**$F$  est absorbant pour  $\wedge$  :**

$$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$$

**Distributivité de  $\wedge$  et  $\vee$  :**

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

et

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

---

8. Un opérateur est binaire s'il s'applique à deux arguments.

**Contradiction et tiers-exclu :**

$$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow F$$

et

$$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow V$$

**Idempotence pour  $\wedge$  et  $\vee$  :**

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

et

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

**Transitivité de  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$**

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

et

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

**Double négation :**

$$(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$$

**Équivalence et équivalence de négations :**

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$$

Toutes ces tautologies ci-dessus donnent des propriétés qui permettent de simplifier les formules propositionnelles. En informatique, la conception de circuits électroniques, mais aussi la construction de programmes efficaces, exploitent ces lois.

Les équivalences qui suivent sont encore des tautologies, plus particulières à l'implication logique.

**Équivalence et *bi-implication* :**

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

**Inverse (ou opposée) de l'implication :** L'*inverse* de :

$$p \Rightarrow q$$

est l'implication :

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Notez que la contraposée de l'inverse est la réciproque.

**Raisonnement par l'absurde :**

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$$

Ce type de raisonnement est excessivement utilisé en mathématiques comme en informatique pour prouver qu'une proposition est fausse : on suppose une hypothèse absurde (fausse), et on montre que cela conduit à une contradiction.

**Règle de déduction** (*Modus ponens*<sup>9</sup>) :

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

**1.4 Formes normales**

Les formules logiques peuvent avoir des formes diverses et variées, en longueur comme en structure. Afin de faciliter leur lecture, plusieurs conventions existent quant à leur écriture. Habituellement, on privilégie les formules courtes (en nombre d'opérateurs). De la même manière, on préfère écrire des formules sous *forme normale*, présentant une structure répétitive « facile » à lire.

Les ordinateurs étant composés de microcircuits dont la tâche peut être intuitivement ramenée à calculer des opérations logiques simples, écrire des formules sous forme normale peut impacter les performances du système. Toutefois, de nos jours, la puissance des ordinateurs étant considérable comparée à celle qu'elle était à l'heure des premiers microcircuits, une telle optimisation n'est plus obligatoire.

Par ailleurs, le fait que toute formule peut s'écrire sous forme normale permet de construire des ordinateurs avec un nombre très limité de types de portes logiques réalisant les opérations dans les microcircuits. Plus particulièrement, de nombreux ordinateurs actuels sont uniquement composés de milliards<sup>10</sup> de portes **NAND**, réalisant l'opération « non et ».

---

9. Ou plus exactement *modus ponendo ponens*.

10. L'ordinateur de guidage du programme Apollo 11 (ACG), était composé d'un peu plus de cinq mille portes **NOR**, réalisant l'opération « non ou », et a permis à l'homme de marcher sur la lune en 1969.

### 1.4.1 Forme normale disjonctive

Toute formule du calcul propositionnel classique peut s'écrire d'une et une seule façon (à commutativité près) sous *forme normale disjonctive*, c'est-à-dire sous la forme d'une disjonction de termes comprenant chacun uniquement des variables ou leur négation, séparés par une conjonction.

**Exemple 1.17.** Soit l'expression  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ , on peut réécrire cette formule sous forme normale disjonctive comme

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

On remarque que dans cette formule, toutes les clauses sont séparées par un « ou », et ces clauses sont elles-mêmes séparées par des « et ». ◀

### 1.4.2 Forme normale conjonctive

Similairement à la section précédente, toute formule du calcul propositionnel classique peut s'écrire d'une et une seule façon (à commutativité près) sous *forme normale conjonctive*, c'est-à-dire sous la forme d'une conjonction de termes comprenant chacun uniquement des variables ou leur négation, séparés par une disjonction.

**Exemple 1.18.** Soit l'expression  $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$ , on peut réécrire cette formule sous forme normale conjonctive comme

$$p \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).$$

On remarque que dans cette formule, toutes les clauses sont séparées par un « et », et ces clauses sont elles-mêmes séparées par des « ou ». ◀

## 1.5 Exercices résolus

La plupart des énoncés de ces exercices ci-dessous sont tirés du livre de Rosen [16].

**Exercice 1.1.** Lesquelles de ces phrases sont-elles des propositions ?

— Bruxelles est la capitale de la Belgique,

- $2 + 2 = 5$ ,
- il existe de la vie ailleurs dans l'univers,
- répondez à cette question.

*Solution.* La première phrase est bien une proposition : elle déclare un fait, et a une valeur de vérité, en l'occurrence vraie.

La deuxième « phrase » est également une proposition, qui affirme le fait que deux et deux fassent cinq. Elle a également une valeur de vérité, qui dans ce cas-ci est fausse.

La troisième phrase est également une proposition : elle déclare en effet un fait, et possède aussi une valeur de vérité, soit vraie, soit fausse. Qu'on ne puisse pas déterminer, voire même deviner laquelle des deux est avérée à l'heure actuelle est sans importance : on sait que c'est exactement une de ces possibilités.

La quatrième phrase n'est par contre pas une proposition : elle ne déclare pas de fait, et ne possède pas de valeur de vérité. ◀

**Exercice 1.2.** Écrivez la négation des phrases suivantes, sans utiliser de formulation telle que « il est faux que » ou équivalents.

- $2 + 2 = 4$ .
- J'ai un smartphone.
- Il n'y a pas de pollution en Belgique.
- Si je plonge dans la piscine, je serai mouillé.
- Je vais jouer à l'ordinateur ou réussir l'examen.
- L'été en Écosse n'est ni chaud, ni ensoleillé.

*Solution.* Les négations de ces phrases sont construites de la façon suivante.

- La négation de « deux plus deux égal quatre » est « deux plus deux n'est pas égal à quatre », ou en écriture mathématique :  $2 + 2 \neq 4$ .
- Nier le fait que l'on ait un smartphone revient à dire que l'on n'a pas de smartphone.
- Nier « il n'y a pas de pollution en Belgique » revient simplement à dire « il y a de la pollution en Belgique ».
- Cette phrase étant plus difficile, passons par une étape de modélisation. Dans le cas général, cette étape est systématiquement nécessaire, afin ne fusse que de justifier la réponse donnée à l'exercice, ou simplement de pas tomber dans des contre-intuitions inhérentes au langage. Soient  $p$  la



proposition « je joue à l'ordinateur » et  $q$  « je réussis l'examen<sup>11</sup> ». On doit donc nier  $p \vee q$ , ce qui donne  $\neg p \wedge \neg q$  (par les lois de De Morgan), ou en français : « je ne joue pas à l'ordinateur et je réussis pas l'examen ».

- De la même manière que précédemment, modélisons en mathématiques la phrase à nier. Soient  $p$  la proposition « je plonge dans la piscine » et  $q$  la proposition « je suis mouillé ». On doit nier  $p \Rightarrow q$ . Dans la mesure où ce cas-ci est un peu plus difficile, écrivons la table de vérité de cette proposition. Notez qu'en général, cette étape « table de vérité » sera systématiquement nécessaire, les constructions des négations n'étant pas immédiates.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$
$V$	$V$	$V$	$F$

La dernière colonne de cette table de vérité a la même valeur de vérité que  $p \wedge \neg q$ , ce qui correspond, en français, à « je plonge dans la piscine et je ne suis pas mouillé ».

- Cette dernière phrase est un peu plus subtile, du fait de la présence de négations déjà au sein de la phrase originale. Soient  $p$  la proposition « l'été en Écosse est chaud » et  $q$  « l'été en Écosse est ensoleillé ». la proposition à nier est  $\neg p \wedge \neg q$ , c'est-à-dire décrire la valeur de vérité de  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ . Écrivons la table de vérité de cette proposition<sup>12</sup> :

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$

On remarque que la dernière colonne de cette table correspond à  $p \vee q$ . La négation de la phrase originale est donc « l'été en Écosse est chaud ou ensoleillé ».

11. Notez que dans cette phrase, les temps de conjugaison des propositions originales ont changé. Ce changement est sans importance pour la modélisation ou pour la valeur de vérité des propositions, et est simplement effectué pour rendre la lecture plus naturelle en français.

12. Remarquez qu'un étudiant « à l'aise » avec la matière pourrait simplement distribuer la négation et trouver directement la solution via les lois de De Morgan, sous réserve qu'il justifie sa réponse correctement.



**Exercice 1.3.** Soient  $p$  et  $q$  les propositions suivantes :

- $p$  : j'achète un billet de loterie ce week-end,
- $q$  : je gagne un jackpot d'un million d'euros.

Exprimez chacune des propositions suivantes en français :

- |                        |                            |                                  |
|------------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1. $\neg p$ ,          | 4. $q \Rightarrow p$ ,     | 7. $\neg p \Rightarrow \neg q$ , |
| 2. $p \vee q$ ,        | 5. $p \wedge q$ ,          | 8. $\neg p \wedge \neg q$ ,      |
| 3. $p \Rightarrow q$ , | 6. $p \Leftrightarrow q$ , | 9. $\neg p \vee (p \wedge q)$ .  |

*Solution.* On peut écrire ces propositions de la façon suivante :

1. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end.
2. J'achète un billet de loterie ce week-end ou je gagne un jackpot d'un million d'euros.
3. Si j'achète un billet de loterie ce week-end, alors je gagne un jackpot d'un million d'euros.
4. Si je gagne un jackpot d'un million d'euros, alors j'achète un billet de loterie ce week-end.
5. J'achète un billet de loterie ce week-end et je gagne un jackpot d'un millions d'euros.
6. J'achète un billet de loterie ce week-end si et seulement si je gagne un jackpot d'un million d'euros.
7. Si je n'achète pas de billet de loterie ce week-end, alors je ne gagne pas de jackpot d'un million d'euros.
8. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end et je ne gagne pas de jackpot d'un million d'euros.
9. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end, ou j'achète un billet de loterie ce week-end et je gagne un jackpot d'un million d'euros.



**Exercice 1.4.** Soient  $p$ ,  $q$  et  $r$  les propositions suivantes.

- $p$  : des grizzlis ont été vus dans les environs.
- $q$  : faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger.
- $r$  : les baies sont mûres sur ce sentier.

Écrivez les propositions suivantes en mathématiques en utilisant des connecteurs logiques :

1. les baies sont mûres sur ce sentier, mais des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs ;
2. des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger, mais les baies sont mûres sur ce sentier ;
3. si les baies sont mûres sur ce sentier, y faire de la randonnée est sans danger si et seulement si des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs ;
4. il est dangereux de faire de la randonnée sur ce sentier, mais des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et les baies sont mûres sur ce sentier ;
5. pour faire de la randonnée sans danger sur ce sentier, il est nécessaire mais pas suffisant que les baies soient mûres sur ce sentier et que l'on n'ait pas vu de grizzlis dans les environs.
6. faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger quand des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et quand les baies sont mûres sur ce sentier.

*Solution.* Ces propositions peuvent être écrites en mathématiques de la façon suivante.

1.  $r \wedge \neg p$ . Le « mais » a la même valeur logique que le « et ».
2.  $\neg p \wedge q \wedge r$ . Même justification.
3.  $r \Rightarrow (q \Leftrightarrow \neg p)$ . L'implication est claire, et le conséquent est formé de deux parties équivalentes (« si et seulement si »). Notez ici l'importance des parenthèses, à cause des priorités des opérateurs.
4.  $\neg q \wedge \neg p \wedge r$ . Même justification qu'au premier point. Être dangereux est le contraire d'être sans danger, d'où le  $\neg q$ .
5.  $q \Rightarrow (r \wedge \neg p)$ . Cette phrase dénote une implication. De plus, pour rappel, dans une implication  $x \Rightarrow y$ ,  $y$  est appelé une condition nécessaire pour  $p$ .
6.  $(\neg p \wedge r) \Rightarrow q$ . Cette phrase dénote également une implication. Le conséquent de cette implication est la randonnée dangereuse.



**Exercice 1.5.** Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes.

- $1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$ .
- $1 + 1 = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$ .
- $1 + 1 = 3$  si et seulement si les vaches peuvent voler.
- Si les vaches peuvent voler, alors  $1 + 1 = 3$ .

- Si les vaches peuvent voler, alors  $1 + 1 = 2$ .

*Solution.* Les valeurs de vérité des propositions sont les suivantes.

- Vrai : les sous-propositions sont équivalentes, toutes les deux ont la même valeur de vérité vrai.
- Faux : les sous-propositions ne sont pas équivalentes. En effet,  $1 + 1 = 3$  a la valeur de vérité faux, mais  $2 + 2 = 4$  a la valeur de vérité vrai.
- Vrai : les sous-propositions sont équivalentes, toutes les deux ont la même valeur de vérité faux.
- Vrai : toute implication d'une proposition par une autre qui est fausse (les vaches peuvent voler) est vraie.
- Vrai : même justification que ci-dessus.



**Exercice 1.6.** Construisez les tables de vérité des propositions suivantes.

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $p \Rightarrow \neg p$ ,     | 4. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ ,                           |
| 2. $p \Leftrightarrow \neg p$ , | 5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ , |
| 3. $p \vee (p \vee q)$ ,        | 6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ .               |

*Solution.* Les tables de vérité de ces propositions sont illustrées à la figure 1.1. Notez que le point 2 est une antilogie triviale (car  $p$  et  $\neg p$  n'ont jamais la même valeur de vérité), et que le point 5 est une tautologie définie dans le cours. Notez également que le point 6 n'est pas équivalent à  $p \Leftrightarrow q$ .



**Exercice 1.7** ([17]). Un meurtre a été commis dans la ville de Dualis, séparée en deux par une rivière qui la traverse d'est en ouest. La particularité de cette ville est que seuls les habitants au sud de la rivière disent la vérité. Un inspecteur est dépêché sur place pour résoudre l'affaire, et on lui présente trois témoins, venant des deux parties de la ville : Alex, Virginie et Carl. Il les interroge dans l'espoir de trouver un habitant (du sud de la ville) qui lui dise la vérité sur le meurtre. Voici leurs réponses.

1. Alex : Virginie habite au sud.
2. Virginie : Alex et moi habitons ensemble.
3. Carl : c'est faux, Virginie ment comme elle respire !

Exercice 1				Exercice 2		
$p$	$\neg p$	$p \Rightarrow \neg p$		$p$	$\neg p$	$p \Leftrightarrow \neg p$
$F$	$V$	$V$		$F$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$		$V$	$F$	$F$

Exercice 3				Exercice 4				
$p$	$q$	$p \vee q$	$p \vee (p \vee q)$	$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

Exercice 5						
$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$

Exercice 6				
$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

FIGURE 1.1 – tables de vérité de d'Exercice 1.6

Pouvez-vous indiquer quels citoyens l'inspecteur doit interroger à propos du meurtre ?

*Solution.* Modélisons avant tout le problème sous forme mathématique, en commençant par les propositions à analyser. En l'occurrence, on veut savoir qui habite au sud de la ville, pour savoir qui l'inspecteur doit interroger. On pose donc

$P_1$ :	Alex habite au sud de la ville.
$P_2$ :	Virginie habite au sud de la ville.
$P_3$ :	Carl habite au sud de la ville.

Traduisons à présent leurs affirmations sous forme de propositions logiques. Dans la déposition d'Alex, on déduit les points suivants.

- Si Alex habite au sud de la ville, il dit la vérité. Or, il affirme que  $P_2$  est vrai. Donc, si  $P_1$  est vrai, alors  $P_2$  est vrai.
- Si Alex habite au nord, soit il ment, soit il dit la vérité, et on ne peut rien conclure de la valeur de vérité de  $P_2$ .

Ces deux affirmations mises ensemble, on en conclut que  $P_1 \Rightarrow P_2$ . Ce constat peut être dressé à l'aide de la table de vérité de l'implication. On va procéder de manière similaire pour les dépositions de Virginie et de Carl.

Dans le cas de Virginie, on déduit que si elle habite au sud (si elle dit la vérité, si  $P_2$  est vrai), alors elle vit avec Alex, et donc ils habitent tous les deux au sud, ou tous les deux au sud ( $P_1 \wedge P_2$ ), ou tous les deux au nord ( $\neg P_1 \wedge \neg P_2$ ). On en déduit donc que  $P_2 \Rightarrow (P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$ .

Enfin, si Carl vit au sud, alors Virginie ment, et donc ce qu'elle affirme est faux, et donc la négation de ce qu'elle affirme est vraie. On a donc  $P_3 \Rightarrow \neg((P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2))$ .

Par ailleurs, on sait que les témoins viennent des deux parties de la ville, ce qui signifie que deux habitent au sud et un au nord, ou inversement. On a donc  $P_i \wedge P_j \wedge \neg P_k$  ou l'inverse, c'est-à-dire  $\neg P_i \wedge \neg P_j \wedge P_k$ , pour certains  $i, j, k$  différents. Pour cet exercice, il va donc falloir envisager toutes les possibilités de ces valeurs  $i, j$  et  $k$ .

En conclusion, on obtient donc les propositions suivantes :

$$P_1 \Rightarrow P_2, \quad (1.1)$$

$$P_2 \Rightarrow (P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2), \quad (1.2)$$

$$P_3 \Rightarrow \neg((P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)), \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} &(\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \\ &\vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3). \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'affirmation que les propositions (1.1) à (1.2) est vraie restreint les valeurs de vérité de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , et c'est de ces restrictions que l'on va pouvoir aider l'inspecteur. La table de vérité de ces propositions est illustrée à la table 1.11. Cette table a été illustrée « horizontalement » plutôt que « verticalement » (comme à l'habitude) pour des raisons de présentation.

La dernière ligne correspondant à la proposition (1.4) peut être obtenue facilement en raisonnant de la façon suivante. Toutes les sous-propositions sont séparées par un « ou ». Dès lors, pour rendre cette proposition fausse, il faut que chacune de ces sous-proposition soit fausse. À l'intérieur de ces sous-propositions, toutes les clauses sont séparées par des « et ». Dès lors, pour les rendre fausses, il suffit que l'une des clauses soit fausse. Dans la mesure où on remarque la présence de négations dans chacune de ces sous-propositions, et que tous les cas possibles de une ou deux négations sont envisagés, le seul cas possible est soit quand chacune des clauses  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  est vraie, soit quand chacune des clauses  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  est fausse.

$P_1$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$P_2$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$P_3$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$P_1 \wedge P_2$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$(P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
(1.1)	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
(1.2)	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
(1.3)	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$
(1.4)	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$

TABLE 1.11 – Table de vérité des propositions (1.1) à (1.4)

On remarque sur cette table que la seule possibilité pour que les propositions (1.1) à (1.4) soient vraies en même temps est que  $P_1$  et  $P_2$  soient vraies, et que  $P_3$  soit faux. Ces cas de figure sont entourés en rouge dans la table de vérité.

L'inspecteur doit donc interroger Alex ou Virginie à propos du meurtre, car il est certain qu'ils disent la vérité! 



---

## Théorie des ensembles

*Concepts de base • Définition en compréhension • Opérations ensemblistes • Exercices résolus*

---

De la même manière que pour la logique mathématique, la théorie des ensembles est l'un des aspects les plus basiques des mathématiques. En effet, elle définit formellement l'un de ses concepts les plus élémentaires, à savoir les ensembles, leurs propriétés et les opérations qu'il est possible d'effectuer avec eux.

C'est également sur base de ce domaine qu'est défini le concept de *fonction*, central des mathématiques. Les fonctions sont des relations particulières entre les éléments d'un ensemble.

Toute cette terminologie est introduite ici. Notez que comme la sémantique présentée ici est par certains aspects très proche du français, l'étudiant ne doit pas s'étonner de ne trouver que peu de parties calculatoires ou d'exercices de raisonnement.

Plus particulièrement, la section 2.1 introduit les définitions de base associées aux ensembles. La section 2.2 fournit une manière différente de définir un ensemble que celle décrite en section 2.1, ainsi que ses avantages et inconvénients.

Ensuite, la section 2.3 décrit comment, à l'aide d'opérateurs, construire des ensembles complexes à partir d'ensembles plus simples.

Comme précédemment, ce chapitre se termine par des exercices résolus en section 2.4.

## 2.1 Concepts de base

L'un des concepts les plus simples en mathématiques est celui de la théorie éponyme, à savoir l'ensemble. Comme vous le constaterez, leur définition est formulée « en français ». Comme dans le cadre de la logique, il est en effet ardu de définir en mathématiques un concept sur lequel une grande partie des mathématiques est bâti.

### Définition 2.1

*Un ensemble est une collection d'objets distincts. Chacun de ces objets est appelé élément.*

**Notation 2.1.** Soient  $S$  un ensemble et  $x$  un élément de  $S$ , on dit que  $x$  *appartient* à  $S$ , et on note cette relation  $x \in S$ .

Si  $x$  n'est pas un élément de  $S$ , on dit que  $x$  *n'appartient pas* à  $S$ , et on note cette relation  $x \notin S$ . Réciproquement, si  $x$  est un élément de  $S$ , on dit que  $S$  *comprend*  $x$ , noté  $S \ni x$ . Sinon, on dit que  $S$  ne comprend pas  $x$ , noté  $S \not\ni x$ .

Au vu des notations ci-dessus, remarquez que les notations mathématiques utilisant «  $\in$  » peuvent se lire dans les deux sens, étant donné la symétrie entre «  $\in$  » et «  $\ni$  ».

**Exemple 2.1.** Soit  $M$  l'ensemble des mammifères. On a, entre autres, les propriétés suivantes :

- Humain  $\in M$ ,
- $M \ni$  Chat,
- Canard  $\notin M$ .



Si l'ensemble  $S$  comprend un nombre fini d'éléments, on peut le définir en fournissant la liste de ses éléments. Une telle définition de  $S$  est dite *en extension*. Habituellement, on note les éléments de  $S$  entre accolades, et on les sépare par des virgules. Notez que, dans cette définition, chaque élément de  $S$  apparaît une *unique* fois. Remarquez également que dans cette définition, l'ordre dans lequel sont énumérés les éléments est sans importance.

**Exemple 2.2.** Soit *Saisons* l'ensemble des saisons en climat tempéré. On peut définir cet ensemble en extension comme

$$Saisons = \{ Printemps, \acute{E}t\acute{e}, Automne, Hiver \}.$$

De même, si l'on considère les saisons météorologiques<sup>1</sup> boréales<sup>2</sup>, on a :

$$\begin{aligned} Printemps &= \{ Mars, Avril, Mai \}, \\ \acute{E}t\acute{e} &= \{ Juin, Juillet, Ao\hat{u}t \}, \\ Automne &= \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \\ Hiver &= \{ D\acute{e}cembre, Janvier, F\acute{e}vrier \}. \end{aligned}$$

Remarquez que les définitions d'ensemble et d'éléments ne sont pas absolues. *Printemps* est un élément de l'ensemble *Saisons*, mais est également un ensemble constitué des éléments *Mars*, *Avril* et *Mai*.

De plus, on peut écrire

$$Saisons = \left\{ \{ Mars, Avril, Mai \}, \{ Juin, Juillet, Ao\hat{u}t \}, \right. \\ \left. \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \{ D\acute{e}cembre, Janvier, F\acute{e}vrier \} \right\}$$



**Remarque 2.3.** Notez que dans le chapitre 5 dédié au dénombrement, on considérera des collections d'objets dont les éléments se répètent. De tels ensembles

1. Contrairement aux saisons astronomiques qui commencent aux équinoxes ou aux solstices, les saisons météorologiques commencent toujours un premier du mois

2. Dans l'hémisphère nord, le printemps météorologique va de mars à mai, l'été de juin à août, etc. Dans l'hémisphère sud, les saisons sont inversées. Ainsi, le printemps météorologique austral se déroule pendant l'automne météorologique de l'hémisphère boréal

s'appellent des *multiensembles*. On peut les définir en extension de manière similaire aux ensembles, avec des accolades, comme dans

$$M = \{ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 \}.$$

On n'utilisera toutefois pas ce concept dans ce chapitre.

**Remarque 2.4.** Notez que parfois, la convention mathématique séparant les éléments d'un ensemble défini en extension par le caractère « , » crée des ambiguïtés en français où la typographie note le séparateur décimal également comme le caractère « , ». Ainsi, dans une écriture telle que  $S = \{ 1, 2 \}$ , il peut ne pas être clair si  $S$  est constitué des deux éléments 1 et 2, ou si  $S = \{ \frac{12}{10} \}$ . Dans ce document, l'ensemble  $\{ 1, 2 \}$  sera systématiquement considéré comme l'ensemble constitué des éléments 1 et 2.

### 2.1.1 Égalité d'ensembles


#### Définition 2.2

Deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$  sont dits égaux, noté  $S_1 = S_2$ , s'ils comprennent les mêmes éléments.

Inversement, si  $S_1$  et  $S_2$  ne comprennent pas les mêmes éléments, on dit que  $S_1$  et  $S_2$  sont *différents*, noté  $S_1 \neq S_2$ .

**Exemple 2.5.** Soient les ensembles suivants, et leurs définitions à l'exemple 2.2 :

$$\begin{aligned} \text{Saisons} &= \{ \text{Printemps}, \text{Été}, \text{Automne}, \text{Hiver} \}, \\ S_1 &= \{ \text{Été}, \text{Automne}, \text{Hiver}, \text{Printemps} \}, \\ S_2 &= \{ \text{Automne}, \{ \text{Mars}, \text{Avril}, \text{Mai} \}, \text{Été}, \text{Hiver} \}. \end{aligned}$$

On a  $\text{Saisons} = S_1 = S_2$ . Notez que dans  $S_2$ ,  $\{ \text{Mars}, \text{Avril}, \text{Mai} \} = \text{Printemps}$ . 

**Remarque 2.6.** Notez que le nom des ensembles considérés pour une égalité, ainsi que l'ordre de leur éléments spécifiés dans une définition en extension est sans importance pour le concept d'égalité. Seul le contenu importe.

## 2.1.2 Sous-ensemble

**Définition 2.3**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles. On dit que  $S_1$  est un sous-ensemble de  $S_2$ , noté  $S_1 \subseteq S_2$  si tous les éléments de  $S_1$  appartiennent à  $S_2$ .

Si  $S_1 \subseteq S_2$ , on dit que  $S_1$  est *inclus* à  $S_2$  ou que  $S_2$  *contient*  $S_1$ . On peut aussi noter cette relation  $S_2 \supseteq S_1$ .

De plus, si  $S_1 \neq S_2$  et  $S_1 \subseteq S_2$ , on dit que  $S_1$  est *strictement inclus* à  $S_2$ , noté  $S_1 \subset S_2$ . Réciproquement, on dit que  $S_2$  contient  $S_1$  strictement (ou au sens strict), noté  $S_2 \supset S_1$ .

**Exemple 2.7.** Soit  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . On a  $A \subseteq B$  : tous les éléments de  $A$  sont des éléments de  $B$ . ◀

Ces concepts sont également illustrés avec un diagramme sur la figure 2.1, avec deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$ .

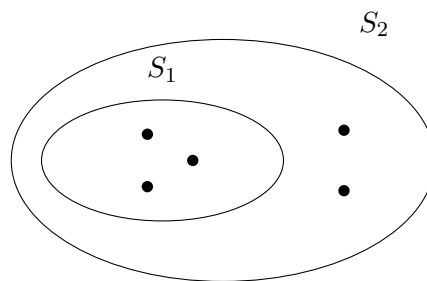


FIGURE 2.1 – Illustration de l'inclusion d'ensemble

La propriété suivante exploite les inclusions et est très utile pour montrer que deux ensembles sont égaux.

**Propriété 2.4**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles. Si  $S_1 \subseteq S_2$  et  $S_2 \subseteq S_1$ , alors  $S_1 = S_2$ .

Plus particulièrement, dans un contexte de preuve, pour montrer que deux

ensembles sont égaux, il faut en général montrer que tous les éléments du premier ensemble sont compris dans le deuxième, et inversement.

Une telle utilisation de cette définition est utilisée à l'exemple 2.14, pour montrer l'égalité de deux ensembles définis abstraitement<sup>3</sup>. En mathématiques, ce genre de preuve et d'utilisation de définition est extrêmement présent. Ce n'est toutefois pas l'objet principal de ce cours, et de telles utilisations sont fournies à titre d'illustration.

**Remarque 2.8.** Ne confondez pas les concepts d'inclusion et d'appartenance. Un élément *appartient* à un ensemble, un (sous-)ensemble est *inclus* dans un ensemble.

**Exemple 2.9.** En reprenant les ensembles de l'exemple 2.2, on a donc, entre autres, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 & Mars \in Printemps, \\
 & Octobre \notin Été, \\
 & Juin \notin Saisons, \\
 & Printemps \in Saisons, \\
 & \{ Printemps \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Mars, Avril, Mai \} \in Saisons, \\
 & \{ \{ Mars, Avril, Mai \} \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Novembre, Mars \} \not\subseteq Printemps, \\
 & \{ Hiver, Automne \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Hiver, Automne \} \subset Saisons, \\
 & Saisons \supset \left\{ \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \right. \\
 & \quad \left. \{ Mars, Avril, Mai \} \right\}.
 \end{aligned}$$



### 2.1.3 Cardinal

Le cardinal d'un ensemble définit intuitivement sa taille, et permet de caractériser si un ensemble est « plus gros » qu'un autre.

<sup>3</sup>. Au vu des concepts présentés actuellement, il est rébarbatif, voire impossible, d'illustrer l'utilisation de cette définition d'égalité. On a pour cela besoin du concept de *définition en compréhension*, détaillé en section 2.2

**Définition 2.5**

*Soit  $S$  un ensemble, le cardinal de  $S$ , noté  $|S|$ , est le nombre d'éléments de  $S$ .*

Parfois, le cardinal de  $S$  est aussi appelé la *cardinalité* de  $S$  ou la *taille* de  $S$ , et est également parfois<sup>4</sup> noté  $\#S$ . Ce document utilisera néanmoins systématiquement le terme « cardinal » ainsi que la notation précédente pour des raisons d'uniformisation.

**Exemple 2.10.** En reprenant les ensembles définis à l'exemple 2.2, on remarque que  $|Saisons| = 4$  et  $|Printemps| = |Été| = |Automne| = |Hiver| = 3$ . ◀

Les cardinaux d'ensembles sont souvent utilisés pour comparer des ensembles. En effet, si deux ensembles n'ont pas le même cardinal, ils ne peuvent pas être égaux.

**Remarque 2.11.** Comparer le cardinal d'ensembles infinis est plus compliqué que comparer deux nombres entiers, et requiert l'emploi de certaines précautions. De telles finesses seront abordées plus tard dans ce document, au chapitre 5.

On définit un ensemble particulier sur base du cardinal : l'*ensemble vide*, caractérisé formellement comme suit.

**Définition 2.6**

*L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément.*

Cet ensemble est donc le seul ensemble de cardinal nul. En extension, on peut également le noter comme  $\{ \}$ .

De plus, quel que soit l'ensemble  $S$  considéré, on a toujours  $\emptyset \subseteq S$ . Si  $S$  est non vide, on a  $\emptyset \subset S$ . L'ensemble vide est donc contenu au sens strict dans n'importe quel ensemble non vide.

---

4. Il semblerait que cette notation ait été abandonnée dans les ouvrages mathématiques récents, raison pour laquelle la notation  $|\cdot|$  est privilégiée dans ce document.

## 2.2 Définition en compréhension

Le début de la section 2.1 détaille, entre autres, comment définir en extension un ensemble, en énumérant simplement ses éléments. Dans certains cas, une telle définition est peu pratique, par exemple quand l'ensemble est de grande taille, et, *a fortiori*, quand son cardinal est infini.

Par exemple, même si l'on peut noter les naturels comme  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , cette définition est peu formelle. Par ailleurs, dans certains cas, une telle « définition par généralisation » est ardue, voire même impossible. Comment écrire succinctement en extension l'ensemble des mammifères ? Comment décrire en extension les réels ?

Pour parer à cette difficulté, on introduit la notion de *définition en compréhension*. Plutôt que de définir un ensemble en énumérant explicitement ses éléments, on fournit une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble. Un ensemble défini comme tel est donc une collection d'objets distincts possédant une caractéristique commune.

**Exemple 2.12.** On peut définir les mammifères<sup>5</sup> en compréhension comme

$$\{x \mid x \text{ est un animal} \wedge x \text{ a des mamelles}\},$$

où le symbole «  $\mid$  » se lit « tel que ».

**Exemple 2.13.** Soit  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . On peut définir cet ensemble en compréhension comme  $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < 7\}$ .

Similairement, on peut par exemple<sup>6</sup> définir l'ensemble vide en compréhension comme  $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\}$  ou  $\emptyset = \{x \mid x \text{ est une vache} \wedge x \text{ sait voler}\}$ .

De la même manière, on peut définir l'ensemble  $P$  des nombres pairs comme  $P = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , et l'ensemble  $I$  des nombres impairs comme  $I = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

---

5. Le biologiste averti conviendra que cette définition des mammifères est incomplète. On s'en satisfera néanmoins dans ce document traitant avant tout de mathématiques.

6. Il existe une infinité de manières de définir l'ensemble vide en compréhension.



### Comparaison des définitions en extension et en compréhension

Soit  $S$  un ensemble défini en extension comme  $S = \{-1, 1\}$ . On remarque que cette définition est unique, car les éléments ont été énumérés. Par contre,  $S$  peut être défini en compréhension de multiples manières.

On a, par exemple

$$\begin{aligned} S &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{Z}_0 \mid 0 \leq x + 1 < 3 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1 \}, \end{aligned}$$

où  $|x|$  dénote la valeur absolue d'un nombre  $x$ , à ne pas confondre avec le cardinal d'un ensemble.

Notez également que, tandis qu'il est très facile de déterminer les relations d'inclusion ou d'égalités de deux ensembles donnés en extension (il suffit de comparer les listes d'éléments), cela s'avère en général plus compliqué lorsque l'un ou les deux ensembles en question sont fournis en compréhension. En effet, il faut alors analyser les propriétés, déterminer si un élément validant une propriété d'un ensemble en valide une autre, etc.

**Exemple 2.14.** Soient  $S_1 = \{ 4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$  et  $S_2 = \{ 4k - 3 \mid k \in \mathbb{Z} \}$ . Montrons que  $S_1 = S_2$ .

*Preuve.* Montrons que  $S_1 \subseteq S_2$  et  $S_2 \subseteq S_1$ . Ainsi, grâce à la propriété 2.4, on aura  $S_1 = S_2$ .

CAS 1 :  $S_1 \subseteq S_2$ .

Pour prouver cette affirmation, on va montrer que l'on peut écrire n'importe quel élément  $x$  de  $S_1$  comme un élément de  $S_2$ . Ainsi, tous les éléments de  $S_1$  seront des éléments de  $S_2$ , car on a choisi  $x$  arbitrairement. Procédons.

Soit  $x \in S_1$ . Par définition de  $S_1$ , on sait que  $x = 4n + 1$ , pour un certain<sup>7</sup>  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour écrire  $x$  comme un élément de  $S_2$ , il faut donc trouver une valeur de

---

7. Le nom de la variable employée ici est sans importance.

$k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = 4k - 3$ , par définition de  $S_2$ . Prenons  $k = n + 1$ . On a donc

$$\begin{aligned} x &= 4n + 1 \\ &= 4(k - 1) + 1 \quad \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } k \\ &= 4k - 4 + 1 \\ &= 4k - 3. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que  $x = 4k - 3$  pour un certain  $k$  (ici  $n + 1$ ), et donc que  $x \in S_2$ , et en conséquence que  $S_1 \subseteq S_2$ .

CAS 2 :  $S_2 \subseteq S_1$ .

Procédons similairement à ce qui a été fait précédemment. Soit  $x \in S_2$ , montrons que  $x$  peut être écrit comme un élément de  $S_1$ . Par définition de  $S_2$ , on a que  $x = 4n - 3$ , pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ . On doit trouver une valeur de  $k$  telle que  $x = 4k + 1$ . Prenons  $k = n - 1$ . On a

$$\begin{aligned} x &= 4n - 3 \\ &= 4(k + 1) - 3 \quad \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } k \\ &= 4k + 4 - 3 \\ &= 4k + 1. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $x = 4k + 1$  pour un certain  $k$  (ici  $n - 1$ ), et donc que  $x \in S_1$ , et en conséquence que  $S_2 \subseteq S_1$ . De plus, comme on a montré que  $S_1 \subseteq S_2$  et que  $S_2 \subseteq S_1$ , par la propriété 2.4, on a donc que  $S_1 = S_2$ .  $\square$

Notez que dans l'exemple ci-dessus, il est impossible de définir  $S_1$  et  $S_2$  en extension, leur cardinal étant infini. Dans un tel cas, on n'a donc pas le choix et l'on doit requérir à une preuve mathématique telle que ci-dessus pour montrer que les deux ensembles en question sont égaux.

Remarquez également que cette preuve est donnée ici à titre d'exemple et de comparaison des définitions en extension et en compréhension, et n'est pas l'objet de ce cours.  $\blacktriangleleft$

## 2.3 Opérations ensemblistes

Les ensembles seraient de pauvres outils s'il n'était pas possible d'effectuer des manipulations entre eux. Ainsi, on définit plusieurs opérations entre les ensembles permettant d'effectuer des calculs, tels que de trouver « ce qui est commun ». De telles opérations sont très importantes en théorie des ensembles car elles permettent de « créer » des ensembles à partir d'autres.

On remarque également que la définition de ces opérateurs est très similaire à celle des connecteurs logiques du chapitre 1. Pour cette raison, chacune de ces définitions est formulée en ce sens, à l'aide desdits connecteurs logiques.

### 2.3.1 Parties d'un ensemble

Les parties d'un ensemble décrivent en quelque sorte tous les sous-ensembles que peut contenir un ensemble quelconque. Cet opérateur a plusieurs applications, notamment dans la classification des cardinaux d'ensembles infinis.

Plus formellement, on définit les parties d'un ensemble de la façon suivante.

#### Définition 2.7

*Soit  $S$  un ensemble, on définit les parties de  $S$ , noté  $\mathcal{P}(S)$ , comme l'ensemble*

$$\mathcal{P}(S) = \{ S' \mid S' \subseteq S \}.$$

En particulier, notez que quel que soit l'ensemble  $S$  considéré, on a toujours  $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$  et  $S \in \mathcal{P}(S)$ . De plus, on a  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$ . Pour rappel,  $\emptyset \neq \{ \emptyset \}$  ( car  $|\emptyset| = 0$  et  $|\{ \emptyset \}| = 1$  ).

**Exemple 2.15.** Soit  $S = \{ a, b, c \}$ , on a

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}.$$



Enfin, notez que dans le cas général, si  $S$  est fini, on a  $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$ .

### 2.3.2 Complémentaire d'un ensemble

Le complémentaire d'un ensemble  $S$  décrit, intuitivement, les éléments qui n'appartiennent pas à  $S$ . Plus formellement, on le définit de la façon suivante.

#### Définition 2.8

Soient  $S$  et  $A$  deux ensembles, tels que  $S \subseteq A$ . On définit le complémentaire de  $S$  dans  $A$ , noté  $\complement_A(S)$ , comme

$$\complement_A(S) = \{ x \in A \mid x \notin S \}.$$

Quand le contexte est clair, on omettra  $A$  et on notera simplement ce complémentaire comme  $\complement(S)$  ou  $\overline{S}$ .

La figure 2.2 illustre cette définition à l'aide d'un *diagramme de Venn*. Sur cette figure, le complémentaire de  $S$  est colorié en gris.

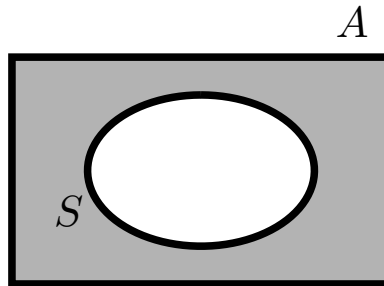


FIGURE 2.2 – Diagramme de Venn du complémentaire

**Remarque 2.16.** Notez que la notion de complémentaire de  $S$  dans un ensemble  $A$  est importante. En effet, si l'on ne précise pas dans quoi le complémentaire est plongé, on peut trouver *n'importe quoi* dans  $\overline{S}$ . Ainsi, soit  $S \subseteq \mathbb{Z}$ , on aurait *vache*  $\in \overline{S}$ , ce qui n'est probablement pas ce qui nous intéresse, mais plutôt  $\frac{1}{2} \in \overline{S}$ .

### 2.3.3 Union de deux ensembles

L'union de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui sont dans l'un ou l'autre ensemble. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

**Définition 2.9**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, on définit l'union de  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \cup S_2$ , comme

$$S_1 \cup S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \}.$$

Notez que le « ou » qui apparaît dans l'intuition est le *ou inclusif* (cf. section 1.1.3). Une telle « ambiguïté » n'est pas présente dans la définition formelle. La figure 2.3 illustre l'union de deux ensembles en toute généralité.

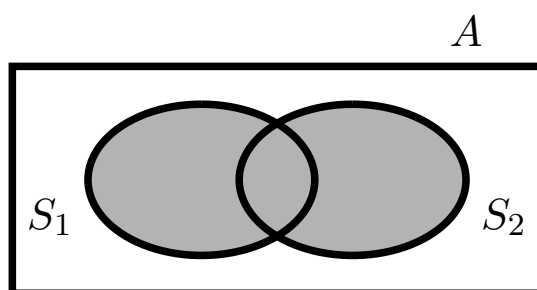


FIGURE 2.3 – Diagramme de Venn de l'union

## 2.3.4 Intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles considérés. On la définit formellement de la façon suivante.

**Définition 2.10**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, l'intersection de  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \cap S_2$ , est définie comme

$$S_1 \cap S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \in S_2 \}.$$

La figure 2.4 illustre l'intersection de deux ensembles.

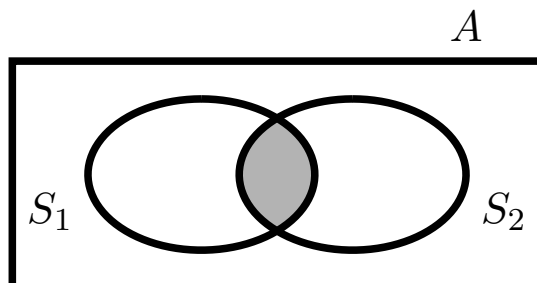


FIGURE 2.4 – Diagramme de Venn de l'intersection

### 2.3.5 Différence de deux ensembles

Intuitivement, la différence entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui sont dans le premier mais pas dans le second. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

#### Définition 2.11

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, la différence entre  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \setminus S_2$ , est définie comme

$$S_1 \setminus S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \notin S_2 \}.$$

Parfois, on note la différence entre  $S_1$  et  $S_2$  comme  $S_1 - S_2$ . La figure 2.5 illustre la différence entre deux ensembles.

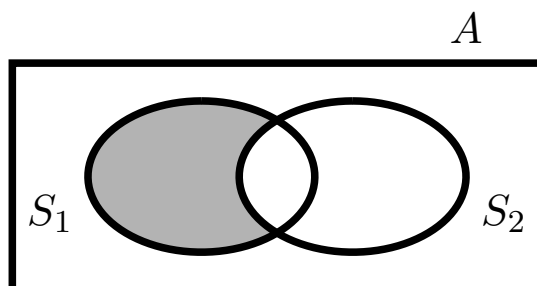


FIGURE 2.5 – Diagramme de Venn de la différence

Remarquez que si  $S_1 = S_2$ , alors  $S_1 \setminus S_2 = S_2 \setminus S_1 = \emptyset$ . De plus, si  $S_2 \subseteq S_1$ , alors  $S_1 \setminus S_2 = \complement_{S_1}(S_2)$ .

### 2.3.6 Différence symétrique de deux ensembles

Intuitivement, la différence symétrique entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à l'un, soit à l'autre. On la définit formellement de la façon suivante.

#### Définition 2.12

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, la différence symétrique entre  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \Delta S_2$  et lue «  $S_1$  delta  $S_2$  », est définie comme

$$\begin{aligned} S_1 \Delta S_2 &= \{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \} \\ &= (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2) \\ &= (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \end{aligned}$$

La figure 2.6 illustre la construction de la différence symétrique.

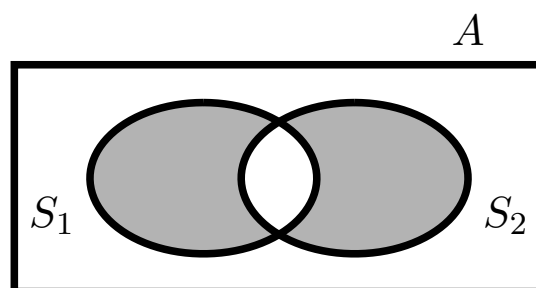


FIGURE 2.6 – Diagramme de Venn de la différence symétrique

### 2.3.7 Cas particuliers

Notons que cette section illustre les opérations ensemblistes en toute généralité. Les diagrammes de Venn sont à raffiner quand l'un des deux ensembles considérés est inclus dans l'autre, ou quand les deux ensembles sont disjoints.

Ces cas particuliers sont illustrés aux figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10.

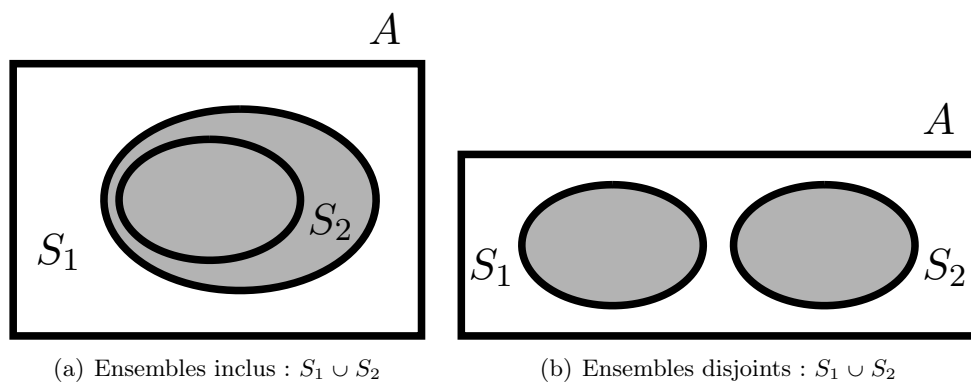


FIGURE 2.7 – Union d'ensembles inclus ou disjoints

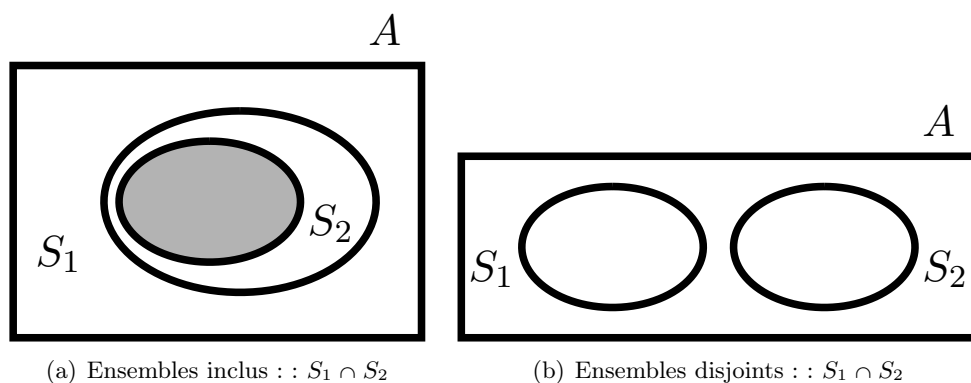


FIGURE 2.8 – Intersection d'ensembles inclus ou disjoints

### 2.3.8 Produit cartésien

Le produit cartésien est un opérateur particulier, sans le sens où il permet d'augmenter la « dimension » d'un ensemble. Le but de cet opérateur est de définir des éléments d'un ensemble comme deux éléments de deux ensembles différents. Pour cela, on définit d'abord la notion de *couple* et de *paire*.



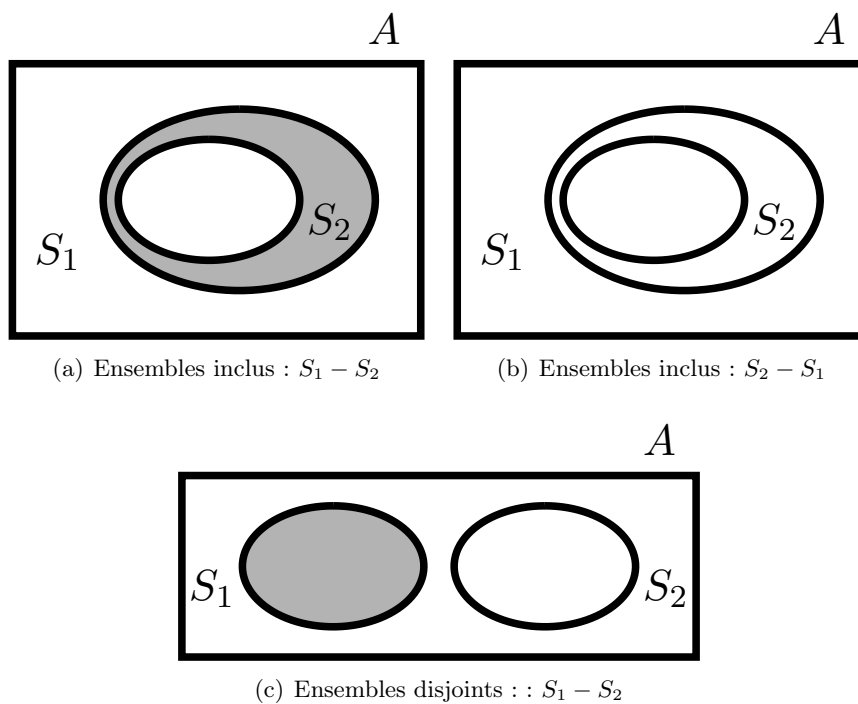


FIGURE 2.9 – Différence entre ensembles inclus ou disjoints

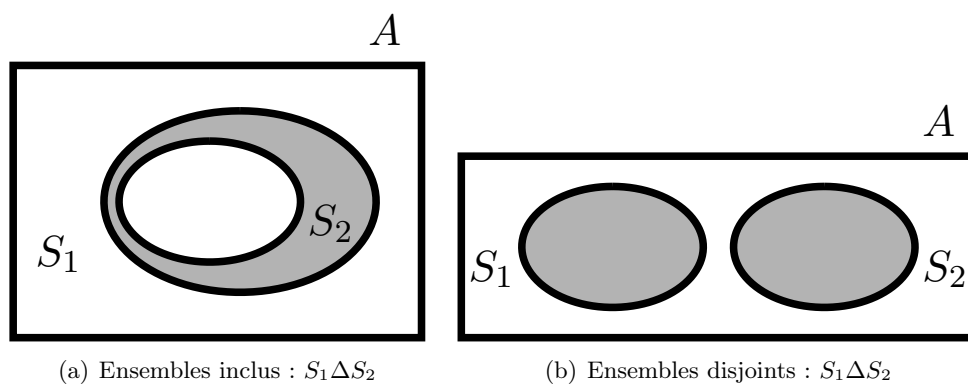


FIGURE 2.10 – Différence symétrique entre ensembles inclus ou disjoints

**Définition 2.13**

Un couple est une séquence ordonnée de deux éléments. Une paire est un ensemble (non ordonné) de cardinal 2.

Les éléments d'un couple sont appelées *composantes*. Dépendant du contexte, la première composante est parfois appelée l'*origine* et sa deuxième *image*, dans le cadre de fonctions, ou respectivement *abscisse* et *ordonnée* dans le cadre de points du plan.

**Notation 2.2.** Le couple d'origine  $a$  et d'image  $b$  est noté  $(a, b)$ . La paire composée des éléments  $a$  et  $b$  est notée  $\{a, b\}$

**Exemple 2.17.** Les notations suivantes sont des couples d'éléments de  $\mathbb{Z}$  :  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 4)$ . Notez que dans cet exemple,  $(1, 2) \neq (2, 1)$ . En effet, les couples sont définis comme des séquences *ordonnées*. Dans le cas de paire, on aurait  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ . ◀

**Définition 2.14**

Soit un couple  $(a, b)$ , on dit que ce couple

- est identique si  $a = b$ ,
- a pour réciproque le couple  $(b, a)$ ,
- est égal au couple  $(c, d)$  si  $a = c$  et  $b = d$ .

Notez que la définition de couple et de paire peut être généralisée en *triples*  $(a, b, c)$ , en *quadruples*  $(a, b, c, d)$ , en *quintuples*  $(a, b, c, d, e)$ , ou, en toute généralité, en *n-uples*  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ .

**Remarque 2.18.** Les définitions ci-dessus peuvent être facilement généralisées à la notion de paire. Notez toutefois que comme une paire est non ordonnée, on a toujours  $\{a, b\} = \{b, a\}$ . La notion de réciproque d'une paire est donc peu pertinente.

**Produit cartésien**

Grace à la notion de couple, on peut à présent définir facilement le produit cartésien.

**Définition 2.15**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, on définit le produit cartésien de  $S_1$  et  $S_2$ , noté  $S_1 \times S_2$ , comme

$$S_1 \times S_2 = \{ (x, y) \mid x \in S_1 \wedge y \in S_2 \}.$$

Notez que pour construire le produit cartésien de deux ensembles, il faut donc construire toutes les combinaisons possibles de couples de deux éléments, la première composante appartenant au premier ensemble, la deuxième composante au deuxième ensemble.

**Exemple 2.19.** Soient  $S_1 = \{ a, b, c \}$  et  $S_2 = \{ a, b \}$ . On a

$$S_1 \times S_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b) \}.$$



Le produit cartésien peut être facilement généralisé entre plusieurs ensembles et ses éléments sont alors des n-uples. Formellement, on définit le produit cartésien à  $n$  dimensions entre  $S_1, S_2, \dots, S_n$  comme

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2 \wedge \dots \wedge x_n \in S_n \}.$$

De plus, si  $S_1 = S_2 = \dots = S_n$ , on note un tel produit  $S^n$ .

**Exemple 2.20.** Soient  $S_1 = \{ Saucisse, Poulet, Porc \}$ ,  $S_2 = \{ Frites, Purée \}$  et  $S_3 = \{ Compote, Carottes \}$ . On construit  $S_1 \times S_2 \times S_3$  comme

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 \times S_3 = \{ & (Saucisse, Frites, Compote), (Saucisse, Frites, Carottes), \\ & (Saucisse, Purée, Compote), (Saucisse, Purée, Carottes), \\ & (Poulet, Frites, Compote), (Poulet, Frites, Carottes), \\ & (Poulet, Purée, Compote), (Poulet, Purée, Carottes), \\ & (Porc, Frites, Compote), (Porc, Frites, Carottes), \\ & (Porc, Purée, Compote), (Porc, Purée, Carottes) \}. \end{aligned}$$



**Remarque 2.21.** Remarquez que l'opérateur  $\times$  n'est pas *commutatif*, c'est à dire que

$$S_1 \neq S_2 \Rightarrow (S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1),$$

quels que soient deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$ . Cela signifie qu'en toute généralité, on ne peut pas permuter les opérandes du produit cartésien.

## 2.4 Exercices résolus

Certains des exercices ci-dessous exercices sont tirés du livre de Rosen [16].

**Exercice 2.1.** Soient les intervalles réels  $A = ]2, 4]$  et  $B = [3, 5]$ . Écrivez sous forme d'intervalle les ensembles

- |                                  |                     |
|----------------------------------|---------------------|
| — $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(A)$ , | — $A \setminus B$ , |
| — $A \cap B$ ,                   | — $B \setminus A$ , |
| — $A \cup B$ ,                   | — $A \triangle B$ . |

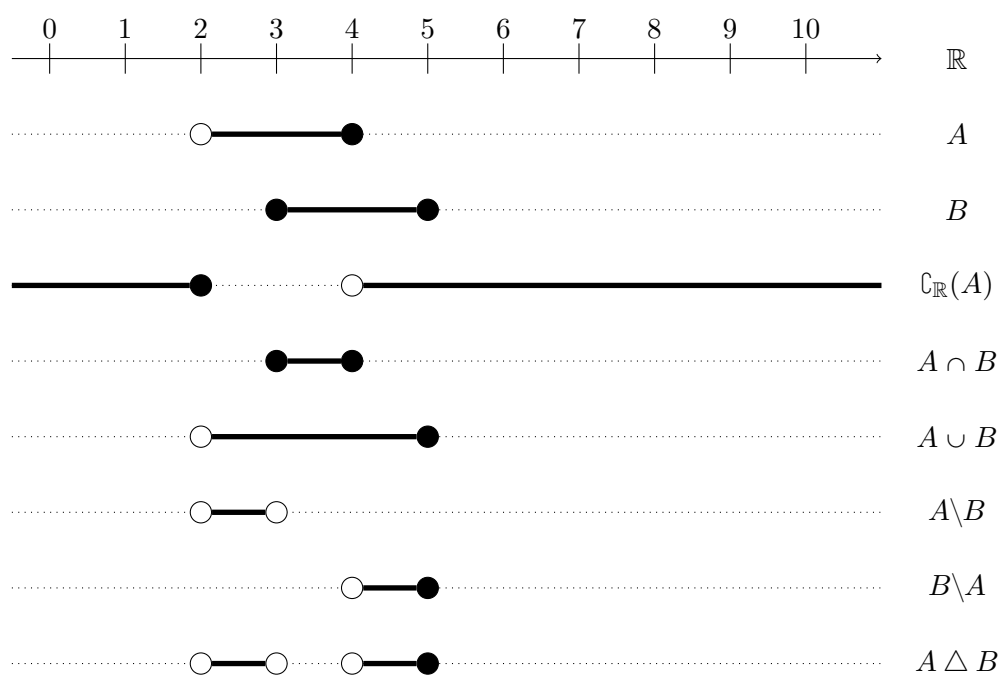
*Solution.* La figure 2.11 illustre la construction des ensembles demandés. Plus formellement, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(A) &= ]-\infty, 2] \cup ]4, +\infty[, \\ A \cap B &= [3, 4], \\ A \cup B &= ]2, 5], \\ A \setminus B &= ]2, 3[, \\ B \setminus A &= [4, 5], \\ A \triangle B &= ]2, 3[ \cup ]4, 5].\end{aligned}$$



**Exercice 2.2.** Soient les ensembles  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $B = \{c, f\}$ ,  $C = \{a, c, d, e, f, h\}$  et  $D = \{c, d, h\}$ .

1. Illustrez cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Lesquels de ces ensembles sont des sous-ensembles stricts des autres ?
3. Est-il vrai que  $A$  et  $B$  sont disjoints ?

FIGURE 2.11 – Résultats d'opérateurs ensemblistes sur  $A$  et  $B$

*Solution.* Les ensembles sont illustrés par un diagramme de Venn à la figure 2.12. De plus, on remarque que  $B \subset C$ ,  $B \subset A$ ,  $D \subset C$ ,  $D \subset A$  et  $C \subset A$ . Enfin,  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, ils ont en effet des éléments en commun (par exemple  $c$ ).

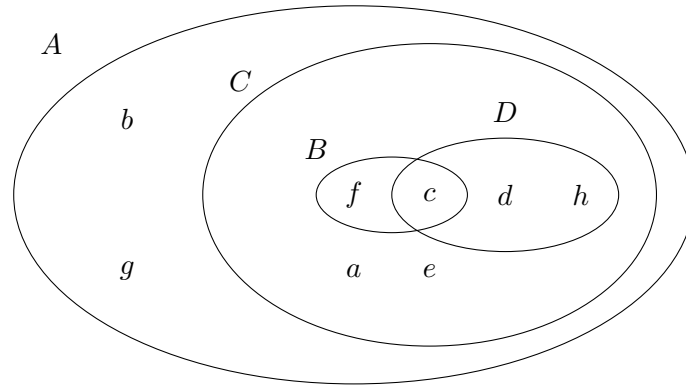


FIGURE 2.12 – Illustration d'ensembles

**Exercice 2.3.** Que peut-on dire de deux ensembles  $P$  et  $Q$  si  $P \cap Q = \emptyset$  et  $P \cup Q = P$  ?

*Solution.* Si  $P \cap Q = \emptyset$ , cela signifie que  $P$  et  $Q$  sont disjoints : il n'y a aucun élément en commun entre ces deux ensembles. D'autre part, si  $P \cup Q = P$ , cela signifie que  $Q \subseteq P$ , car tous les éléments de  $Q$  sont des éléments de  $P$ , sinon le résultat de l'union n'aurait pas été  $P$ . Comme  $Q \subset P$  et que ces ensembles n'ont pas d'éléments en commun, on en conclut que  $Q = \emptyset$ .

**Exercice 2.4.** Écrire en compréhension l'ensemble

$$S = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}.$$

*Solution.* On remarque que la liste des éléments de  $S$  est constituée des carrés d'entiers inférieurs à 11. On peut donc écrire cet ensemble en compréhension comme

$$S = \{ x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \leq 10 \}.$$

Il existe bien entendu d'autres définitions en extensions de cet ensemble. Avec des naturels, par exemple, on aurait

$$S = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 10 \}.$$



**Exercice 2.5.** Soient  $S = \{ (-1)^n n \mid n \in \mathbb{N} \}$  et  $T = \{ -2n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$ .

1. Écrivez quelques éléments de  $S$  et  $T$ .
2. Montrez que  $T \subseteq S$ .

*Solution.* Avant toutes choses, remarquons que

- $S = \{ 0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots \}$  et
- $T = \{ -1, -3, -5, -7, \dots \}$ .

Au vu de ces définitions informelles en extension, on remarque qu'il semble bien que  $T \subseteq S$ . Montrons-le.

Pour montrer que  $T \subseteq S$ , il faut montrer que tous les éléments de  $T$  sont des éléments de  $S$ . On va procéder en prenant un élément arbitraire de  $T$ , et l'écrire sous la forme d'un élément de  $S$ .

Soit  $t \in T$ . On sait que  $t = 2m - 1$ , pour un certain  $m$ . Pour l'écrire sous forme d'un élément de  $S$ , il faut l'écrire sous la forme de  $(-1)^n n$ , c'est-à-dire trouver une valeur de  $n$  telle que  $t = (-1)^n n$ . Prenons  $n = 2m + 1$ . On remarque ici que  $n$  est un nombre impair, et que  $m = \frac{n-1}{2}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned}
 t &= -2m - 1 \\
 &= -2 \frac{n-1}{2} - 1 && \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } m \\
 &= \frac{-2n}{2} + \frac{2}{2} - 1 \\
 &= -n \\
 &= (-1)^n n && \text{Car } n \text{ est impair}
 \end{aligned}$$



**Exercice 2.6.** Soit  $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ . Écrivez  $\mathcal{P}(A)$  en extension.

*Solution.* Par définition,  $\mathcal{P}(A)$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $A$ . On a

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) = \big\{ & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \big\} \end{aligned}$$



**Exercice 2.7.** Soient  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $B = \{c, d, e\}$ . Construisez en extension l'ensemble  $(A \times B) - \{(x, x) \in A \times B\}$ .

*Solution.* On a

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e)\}.$$

De cet ensemble, il faut enlever les couples  $(x, x)$ , avec  $x \in A \cap B$ . Il faut donc enlever les couples  $(c, c)$  et  $(d, d)$ . Au final, l'ensemble demandé est l'ensemble

$$\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, c), (d, e)\}.$$





---

## Logique des prédicats

*Concepts de base • Connexion entre prédicats et opérateurs ensemblistes • Exercices résolus*

---

La logique des prédicats vient compléter l’algèbre booléenne dans la mise en œuvre théorique de la logique mathématique. Intuitivement, un prédicat est une proposition qui comporte des variables. Les prédicats apportent de la puissance aux formules booléennes, dans le sens où l’introduction de variables permet d’exprimer plus de choses. On peut par exemple écrire des propositions telles que « tous les chats sont gris ».

Plus particulièrement, la section 3.1 introduit les concepts élémentaires à la compréhension de prédicat. Ensuite, la section 3.2 revient sur les similarités entre connecteurs logiques et ensemblistes, et leur impact sur les prédicats.

Comme d’habitude, ce chapitre est conclut par une série d’exercices résolus en section 3.3.

### 3.1 Concepts de base

Une variable est simplement un symbole dont la valeur, *a priori* inconnue, est comprise dans un certain ensemble de valeurs possibles. On peut par exemple restreindre une variable à des valeurs réelles, entières, booléennes, etc.

#### Définition 3.1

*Un prédicat, une fonction propositionnelle ou une condition est une expression dont la valeur de vérité (vraie ou fausse) dépend d'une ou plusieurs variables.*

**Exemple 3.1.** Les deux lignes suivantes illustrent des exemples de prédicats, l'un à une variable  $x$ , et l'autre à deux variables  $x$  et  $y$ .

$$p(x) : x \text{ est rouge,} \quad (3.1)$$

$$q(x, y) : x \text{ est jaune et } y \text{ a un noyau.} \quad (3.2)$$



Évidemment, construire la table de vérité de tels prédicats peut s'avérer difficile : il faut considérer toutes les valeurs possibles des variables, ce qui peut être fastidieux. En réalité, souvent, une telle énumération n'est pas possible, à cause du nombre de valeurs différentes que peuvent prendre ces variables. Pour cette raison, on utilise un concept similaire aux tables de vérité : les *classes de vérité*.

Afin de clairement définir un prédicat, il faut restreindre les valeurs possibles de ses variables. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces variables est appelé le *domaine de définition* du prédicat. L'ensemble des valeurs du domaine de définition qui donnent la valeur « vrai » au prédicat est appelé la *classe de vérité* du prédicat.

Plus formellement, on définit ces deux concepts de la façon suivante.

#### Définition 3.2

*Soit  $P$  un prédicat, le domaine de définition de  $P$ , noté  $\text{Dom}(P)$ , est l'ensemble sur lequel le prédicat peut être défini.*

Pour simplifier, on considérera toujours ce domaine comme non-vide.

**Définition 3.3**

*Soit  $P$  un prédicat, la classe de vérité de  $P$ , notée  $\mathcal{C}_V(P)$ , est l'ensemble des éléments du domaine de définition qui vérifient  $P$ .*

**Exemple 3.2.** Considérez le prédicat «  $x$  est rouge », noté  $p(x)$ . Posons son domaine de définition comme l'ensemble des fruits. Cela signifie que le prédicat n'a de sens uniquement que lorsqu'il est évalué sur un fruit :  $p(pomme)$  et  $p(banane)$  ont un sens mathématique,  $p(coquelicot)$  n'a pas de sens au vu de ce domaine de définition.

« Framboise » fait partie de la classe de vérité de ce prédicat. C'est en effet un fruit, qui est rouge. La classe de vérité  $\mathcal{C}_V(P)$  est en fait l'ensemble des fruits rouges. Ce prédicat n'est évidemment pas une tautologie : certains fruits ne font pas partie de son domaine de définition. Par exemple, « banane » ne fait pas partie de la classe de vérité de ce prédicat, car une banane n'est pas rouge. Par ailleurs, se demander si « coquelicot » fait partie de la classe de vérité de  $P$  n'a pas de sens, car « coquelicot » ne fait pas partir du domaine de définition de  $P$ . ◀

**Exemple 3.3.** Soient  $p(x)$  et  $q(x)$  deux prédicats définis comme

$$\begin{aligned} p(x) : 2 \leq x < 7, \\ q(x) : 5 < x < 9. \end{aligned}$$

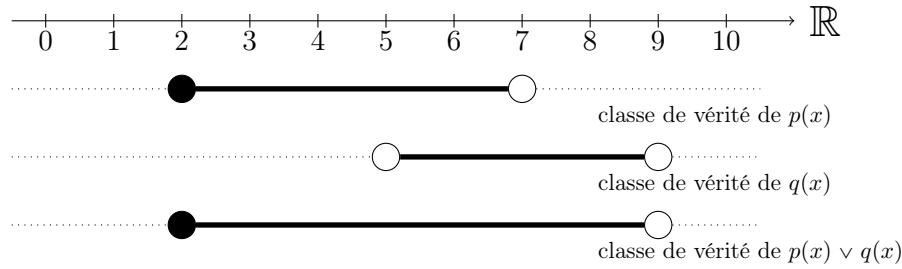
Cherchons la classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  en procédant de la manière suivante :

- on établit une table de vérité à partir d'une analyse de tout intervalle où les valeurs de vérité de  $p(x)$  et  $q(x)$  ne varient pas ;
- on dessine une droite et on y place les classes de vérité.

Dans la suite de cet exemple, on va considérer deux cas d'énoncé différents. Le premier, où le domaine de définition de  $p(x)$  et de  $q(x)$  sera  $\mathbb{R}$ , et le deuxième uniquement  $\mathbb{Z}$ .

CAS 1 : considérons  $\mathbb{R}$  comme le domaine de définition de  $p(x)$  et  $q(x)$ . Ainsi, aussi bien 2 que 2,5 appartiennent au domaine de définition de ces prédicats.

La classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  dans ce cas peut être construite comme à la figure 3.1. En résumé, cette classe de vérité est l'intervalle des nombres compris entre 2 (inclusivement) et 9 (exclusivement).



$x$	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \vee q(x)$
$] -\infty, 2[$	$F$	$F$	$F$
$[2, 5]$	$V$	$F$	$V$
$]5, 7[$	$V$	$V$	$V$
$[7, 9[$	$F$	$V$	$V$
$[9, +\infty[$	$F$	$F$	$F$

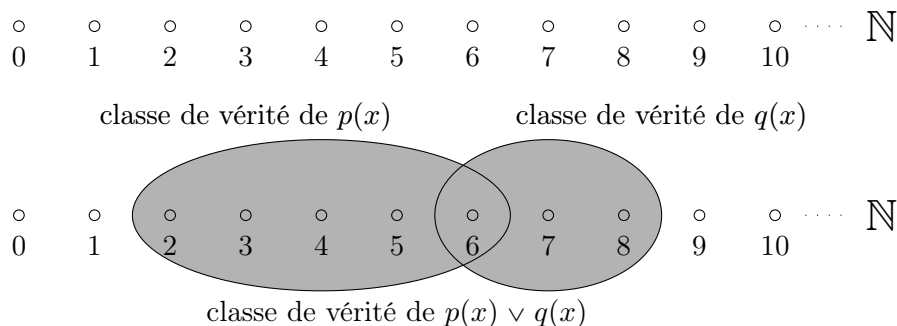
FIGURE 3.1 – Illustration de la classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  (cas 1)

**Remarque 3.4.** Sur la figure 3.1, un gros point noir signifie que l'on prend l'élément considéré dans la classe de vérité, alors qu'un point blanc encerclé de noir signifie que l'on ne prend pas l'élément en question. Cette convention de représentation sera utilisée tout au long de ce document lors d'illustrations de concepts.

CAS 2 : considérons à présent uniquement  $\mathbb{N}$  comme le domaine de définition de ces prédicats. Ainsi, 2 appartient au domaine de définition de ces prédicats, mais pas 2, 5 ni  $-1$ .

La classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  peut être dans ce cas illustrée comme à la figure 3.2. Notez que cette fois-ci, on ne peut plus utiliser de droite « continue », on a donc opté pour de simples points.

En résumé, la classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  est les nombres entiers allant de 2 à 8.

FIGURE 3.2 – Illustration de la classe de vérité de  $p(x) \vee q(x)$  (cas 2)

**Exemple 3.5.** Soit le prédicat  $p(x, y)$  défini comme « l'étudiant  $x$  a le cours  $y$  dans son programme ». Si on considère  $E$  comme l'ensemble des étudiants et  $C$  comme l'ensemble des cours dispensés à l'école, le domaine de définition de  $p$  est  $E \times S$ . La classe de vérité de  $p$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que l'étudiant  $x$  a le cours  $y$  dans son programme. ◀

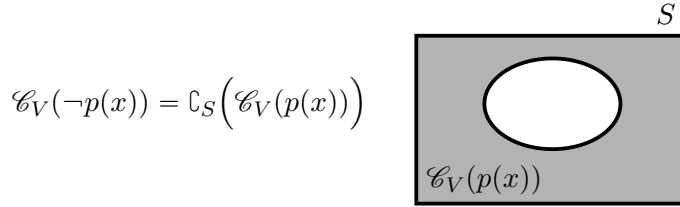
### 3.2 Connexion entre prédicats et opérateurs ensemblistes

On a déjà vu aux chapitres 1 et 2 que les connecteurs logiques et opérateurs ensemblistes sont très semblables de par leur fonctionnement. Du point de vue des classes de vérité de prédicats, ces similarités sont toujours très présentes. Cette section détaille ces similitudes à l'aide de diagrammes de Venn.

Soient  $p(x)$  et  $q(x)$  des prédicats dont le domaine de définition est  $S$ , on peut les connecter entre eux et la valeur de vérité de du résultat, également un prédicat, est obtenue en utilisant les tables de vérités.

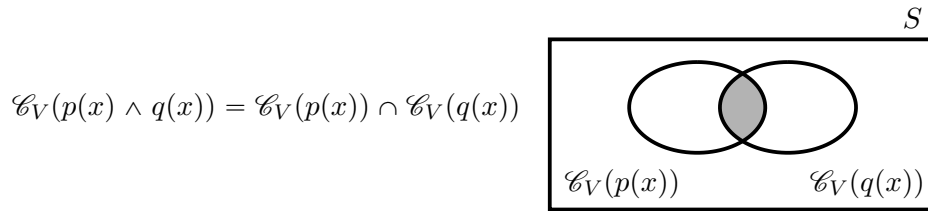
Pour chacun des opérateurs logiques présentés, on a donc les propriétés suivantes.

#### Négation



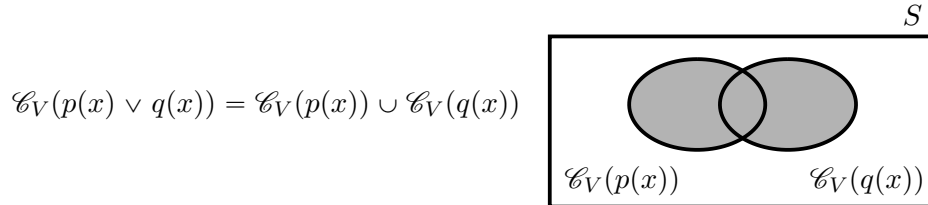
En d'autres termes, la classe de vérité de la négation d'un prédicat  $p$  est égale au complémentaire de la classe de vérité de  $p$ .

### Conjonction



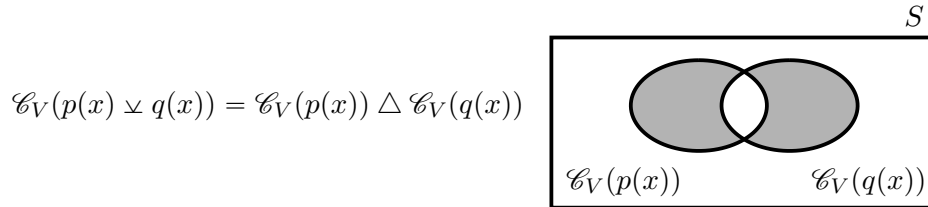
Autrement dit, la classe de vérité de la conjonction de deux prédicats est égale à l'intersection des classes de vérité de ces prédicats.

### Disjonction



Ceci signifie que la classe de vérité de la disjonction de deux prédicats est égale à l'union des classes de vérité de ces prédicats.

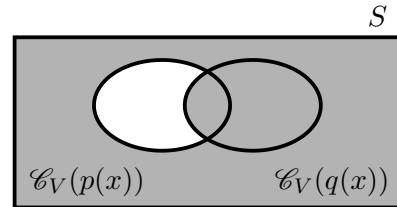
### Disjonction exclusive



En d'autres termes, la classe de vérité de la disjonction exclusive de deux prédicats est la différence symétrique entre les classes de vérité de ces prédicats.

### Implication

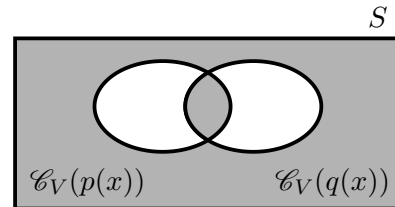
$$\mathcal{C}_V(p(x) \Rightarrow q(x)) = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_V(p(x))) \cup \mathcal{C}_V(q(x))$$



Ceci signifie que la classe de vérité de l'implication d'un prédicat  $q$  par un prédicat  $p$  est égale à l'union entre le complémentaire de la classe de vérité de  $p$  et la classe de vérité de  $q$ . Ceci peut-être facilement déduit des relations précédentes via la définition positive de l'implication implication.

### Équivalence

$$\mathcal{C}_V(p(x) \Leftrightarrow q(x)) = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_V(p(x)) \triangle \mathcal{C}_V(q(x)))$$



Enfin, la classe de vérité de deux prédicats équivalents peut être construite comme le complémentaire de la différence symétrique entre les classes de vérité des deux prédicats. Ceci est normal, étant donné que deux prédicats sont équivalents s'ils ont la même valeur de vérité, et que la différence symétrique définit les éléments qui sont soit dans un ensemble, soit dans un autre.

## 3.3 Exercices résolus

**Exercice 3.1.** Soit  $p(x)$  le prédicat « le mot  $x$  contient la lettre 'a' », défini sur l'ensemble des mots de la langue française. Quelles sont les valeurs de vérité de

- $p(\text{orange})$ ,
- $p(\text{citron})$ ,
- $p(\text{vrai})$ ,
- $p(\text{faux})$ .

*Solution.* Ces propositions ont toutes la valeur de vérité vrai, à l'exception de  $p(\text{citron})$ , car « citron » ne contient pas la lettre  $a$ . ◀

**Exercice 3.2.** Soit  $p(x)$  le prédicat  $x > 5$ . Donnez la valeur de  $x$  après qu’une instruction<sup>1</sup> de type « si  $p(x)$ , alors  $x := 1$  », si la valeur de  $x$  quand cette instruction est atteinte est

- $x = 0$ ,
- $x = 1$ ,
- $x = 6$ .

*Solution.* L’implication détermine ici la valeur de  $x$ . Si la valeur de vérité du prédicat évalué est vraie, la valeur de  $x$  est changée à 1, sinon, elle reste à sa valeur originale. On a donc, après exécution :

- $x = 0$ ,
- $x = 1$ ,
- $x = 1$ .



**Exercice 3.3.** Soit  $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 3 = 2 \wedge n < 20 \}$ . Déterminez la classe de vérité de

$$p(x) = (x + 2)^2 \bmod 3 = 0,$$

avec  $x \in A$ .

*Solution.* Avant toutes choses, on remarque que  $A = \{ 2, 5, 8, 11, 14, 17 \}$ . Ensuite, il n’existe aucun élément  $x$  de cet ensemble tel que  $(x + 2)^2$  est divisible par 3. En conséquence,  $\mathcal{C}_V(p(x)) = \emptyset$ .



**Exercice 3.4.** Soit un groupe d’amis dont certaines caractéristiques sont reprises à la table 3.1.

- Quelle est la classe de vérité du prédicat  $c(x)$  :  $x$  aime le chocolat ?
- Traduisez en logique des prédicats et déterminer la classe de vérité de la phrase : « Si un des membres du groupe aime le chocolat alors il aime les gâteaux mais pas les biscuits ».

*Solution.* On suppose pour cet exercice que les domaines de définitions des prédicats que l’on va utiliser est l’ensemble des 5 personnes reprises à la table 3.1.

- Le classe de vérité de  $c(x)$  est  $\{ Abdel, Paul, Merveille \}$ .
- En posant
  1.  $c(x)$  :  $x$  aime le chocolat,
  2.  $g(x)$  :  $x$  aime le gâteau,

---

1. Dans cette instruction, le symbole «  $:=$  » dénote l’affectation d’une variable à une valeur.



	Aime le chocolat ?	Aime les gâteaux ?	Aime les biscuits ?
Abdel	vrai	faux	vrai
Gabriella	faux	faux	vrai
Paul	vrai	vrai	vrai
Fatima	faux	faux	faux
Merveille	vrai	vrai	faux

TABLE 3.1 – Préférences d'un groupe d'amis

3.  $b(x)$  :  $x$  aime les biscuits,  
on peut exprimer cette phrase comme

$$c(x) \Rightarrow (g(x) \wedge \neg b(x)).$$

Pour chacune des personnes, calculons la valeur de vérité du prédicat ci-dessus. Notez que dans le cas du calcul de la valeur de vérité d'une implication, on abrégera systématiquement le calcul de la valeur de vérité d'une implication dont la prémisse est fausse. En effet, cette valeur est toujours vraie.

— Abdel :

$$\begin{aligned} c(\text{Abdel}) &\Rightarrow (g(\text{Abdel}) \wedge \neg b(\text{Abdel})) \\ &\Leftrightarrow V \Rightarrow (F \wedge F) \\ &\Leftrightarrow V \Rightarrow F \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

— Gabriella :

$$\begin{aligned} c(\text{Gabriella}) &\Rightarrow (g(\text{Gabriella}) \wedge \neg b(\text{Gabriella})) \\ &\Leftrightarrow F \Rightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow V \end{aligned}$$

— Paul :

$$\begin{aligned} c(\text{Paul}) &\Rightarrow (g(\text{Paul}) \wedge \neg b(\text{Paul})) \\ &\Leftrightarrow V \Rightarrow (V \wedge F) \\ &\Leftrightarrow V \Rightarrow F \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

— Fatima :

$$\begin{aligned} c(Fatima) &\Rightarrow (g(Fatima) \wedge \neg b(Fatima)) \\ \Leftrightarrow F &\Rightarrow \dots \\ \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

— Merveille :

$$\begin{aligned} c(Merveille) &\Rightarrow (g(Merveille) \wedge \neg b(Merveille)) \\ \Leftrightarrow V &\Rightarrow (V \wedge V) \\ \Leftrightarrow V &\Rightarrow V \\ \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la classe de vérité de ce prédicat est

$$\{ Gabriella, Fatima, Merveille \}.$$



**Exercice 3.5.** Soient  $p(x)$  et  $q(x)$  des prédicats définis sur l'ensemble des réels tels que

$$\begin{aligned} p(x) &: x < 3 \\ q(x) &: x \geq 7, \end{aligned}$$

décrivez les classes de vérité de

- |                                 |                               |                                |
|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $p(x) \wedge q(x)$           | 4. $\neg p(x) \vee \neg q(x)$ | 7. $q(x) \Rightarrow p(x)$     |
| 2. $p(x) \vee q(x)$             | 5. $p(x) \vee q(x)$           |                                |
| 3. $\neg p(x) \wedge \neg q(x)$ | 6. $p(x) \Rightarrow q(x)$    | 8. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ |

*Solution.* Les classes de vérité des prédicats peuvent être construites et exprimées comme illustré à la figure 3.3. Notez que l'on a construit les classes de vérité de  $\neg p(x) \wedge \neg q(x)$  et  $\neg p(x) \vee \neg q(x)$  par application des lois de De Morgan, en niant respectivement  $p(x) \vee q(x)$  et  $p(x) \wedge q(x)$ .



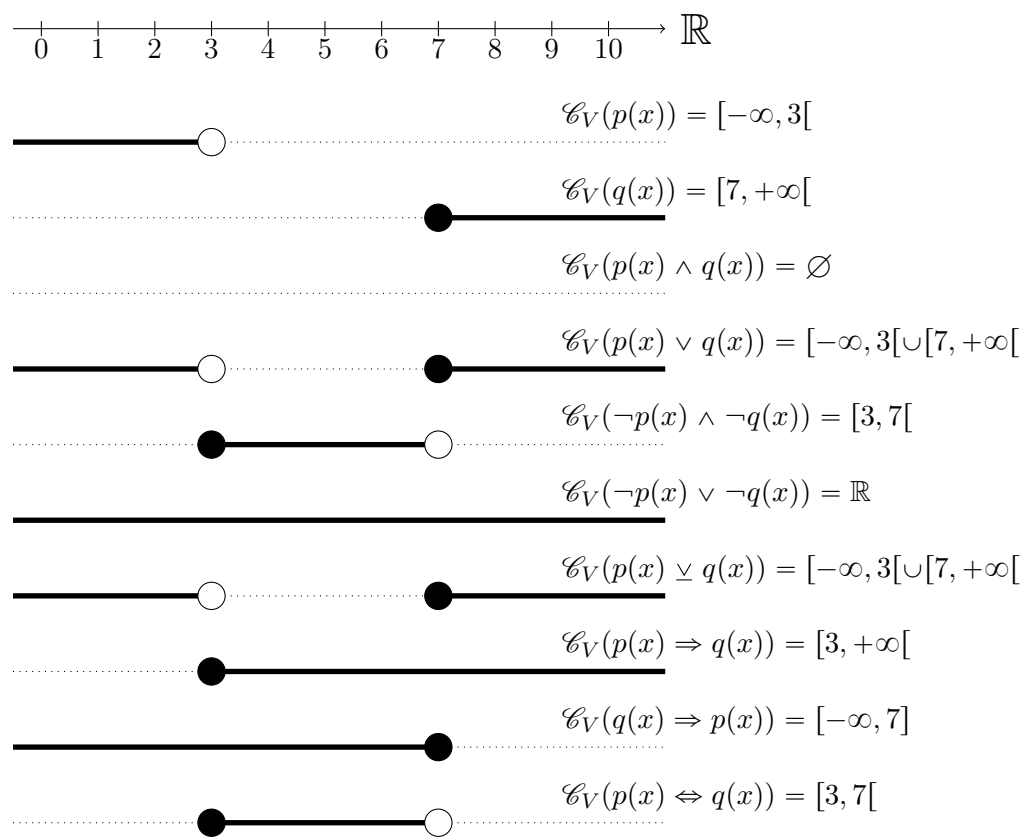


FIGURE 3.3 – Classes de vérités de prédicats



---

## Éléments de la théorie des graphes

*Concepts de base en théorie des graphes • Variantes du modèle de graphe • Chemins et connexité • Distances • Coloration de graphes • Exercices résolus*

---

La théorie des graphes est une discipline des mathématiques discrètes consacrée à l'étude des graphes, souvent représentés comme un ensemble de cercles reliés par des lignes. Cette structure simple peut être utilisée pour modéliser beaucoup d'éléments et problèmes de la vie courante, ce qui motive leur étude théorique.

Par exemple, on peut modéliser une carte en assignant à chaque pays un cercle, et en reliant deux cercles entre eux si les pays correspondants ont une frontière commune, comme illustré à la figure 4.1 pour une carte d'Europe<sup>1</sup>.

L'un des objectifs de ce chapitre est de présenter la terminologie de base de cette discipline, et d'être capable de modéliser divers problèmes à l'aide de cette structure, en se posant la question « Quels objets jouent le rôle de cercle, quelle est la relation entre ces objets qui est modélisée par les lignes ? ».

---

1. Les auteurs de ce document sont conscients que certains cercles ne sont pas des pays, et ont néanmoins décidé de les modéliser comme tels pour des raisons de pertinence avec les frontières affichées

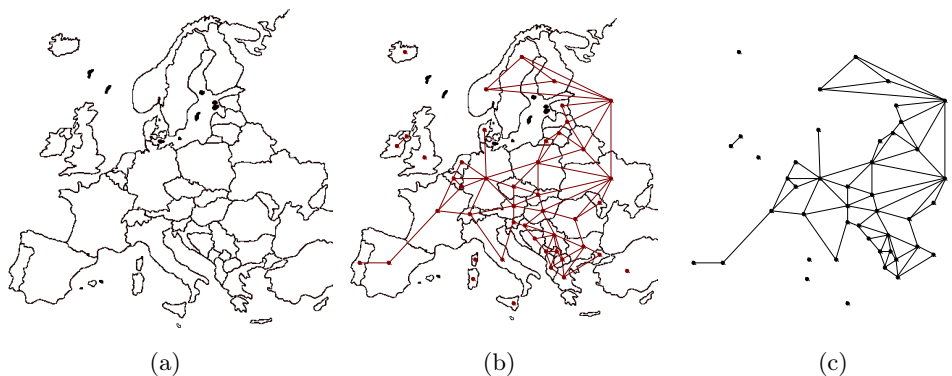


FIGURE 4.1 – Modélisation d'une carte d'Europe sous forme de graphe

Plus particulièrement, la section 4.1 introduit à l'étudiant les concepts de base de ce domaine. La section 4.2 avance quelques variantes du modèle de base présenté en section 4.1.

Ensuite, la section 4.3 détaille la propriété de *connerité*, permettant de dire si un graphe est « en un seul morceau », et la terminologie de *chemin* associée. Le concept est également utile en section 4.4, consacrée aux distances dans un graphe. Finalement, la section 4.5 illustre la notion de *coloration* de graphe. Ce chapitre est conclu par la section 4.6 qui fournit une série d'exercices résolus.

## 4.1 Concepts de base en théorie des graphes

### Définition 4.1

Un graphe  $G$  non orienté est un couple  $(V, E)$  tel que

- $V$  est un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets,
- $E$  est un ensemble fini de paires<sup>a</sup> de sommets de  $V$  appelées arêtes.

<sup>a</sup>. Une paire est un ensemble de taille 2.

On note un tel graphe  $G = (V, E)$ . Habituellement, un tel graphe est dit *simple* (maximum une arête par paire de sommets) et *sans boucles* (pas d'arête d'un sommet à lui-même). De plus, parfois, de tels graphes sont dits *non dirigés*

plutôt que non orientés.

#### Définition 4.2

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, on dit que

- $|V|$  est l'ordre de  $G$ ,
- $|E|$  est la taille de  $G$ .

En d'autres termes, l'ordre et la taille d'un graphe dénotent respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de ce graphe.

Les graphes sont souvent visualisés comme un ensemble de cercles (les sommets) reliés par des lignes (les arêtes). L'exemple suivant illustre la définition de graphe non orienté ainsi qu'une représentation dans le plan de ce graphe.

**Exemple 4.1.** Sur la figure 4.2, on a  $G = (V, E)$  avec

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ .

On remarque que l'arête  $\{2, 1\}$  n'apparaît pas dans la liste des arêtes de  $G$ . En effet, comme les arêtes sont des paires, c'est-à-dire des sous-ensembles de taille 2, on a  $\{2, 1\} = \{1, 2\}$ . De plus,  $G$  est d'ordre 5 (il a 5 sommets) et de taille 7 (il a 7 arêtes). ◀

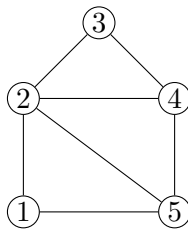


FIGURE 4.2 – Un graphe  $G$  non orienté

#### 4.1.1 Adjacence

Le concept d'adjacence au sein d'un graphe permet de décrire la structure interne de ce graphe. On peut par exemple élaborer des concepts tels que «  $a$  est

relié à  $b$  », «  $c$  est à côté de  $a$  », etc. On verra également dans la suite de cette section comment résumer l'information d'adjacence au sein d'une seule et même structure.

#### Définition 4.3

Soient  $G = (V, E)$ , et  $u, v \in V$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont adjacents si  $\{u, v\} \in E$ . Si une arête  $e = \{u, v\} \in E$ , on dit que  $e$  est incidente à  $u$  et  $v$ . De plus, on définit le voisinage  $N(v)$  d'un sommet  $v$  comme

$$N(v) = \{ u \mid \{u, v\} \in E \},$$

et le degré  $d(v)$  de  $v$  comme  $|N(v)|$ .

Autrement dit, deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête. Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets adjacents à ce sommet, et le degré d'un sommet est égal à la taille du voisinage d'un sommet, ou encore égal au nombre d'arêtes incidentes à un sommet.

**Exemple 4.2.** Les voisinages et degrés de chacun des sommets du graphe de la figure 4.2 sont illustrés à la table 4.1.

Sommet	Degré	Voisinage
1	2	$\{2, 5\}$
2	4	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	2	$\{2, 4\}$
4	3	$\{2, 3, 5\}$
5	3	$\{1, 2, 4\}$

TABLE 4.1 – Voisinages et degrés de la figure 4.2



On remarque que la propriété suivante est vérifiée sur les degrés d'un graphe.



**Propriété 4.4**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de taille  $m$ , on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

En d'autres termes, la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois la taille de ce graphe. Intuitivement, comme le degré d'un sommet représente le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, additionner les sommets revient à compter chaque arête deux fois (une fois pour chaque extrémité correspondant à un sommet). Cette propriété peut être vérifiée à l'aide du graphe de la figure 4.2 et de la table 4.1

Un point important dans la manipulation des graphes est souvent leur représentation, et leur codage en informatique. Nous présentons ici l'une de ces représentations courantes.

Considérez les sommets d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  comme étiquetés par les naturels de 1 à  $n$ . Le concept d'adjacence d'un graphe est souvent résumé dans une matrice  $M \in \mathbb{N}^{n \times n} = (m_{ij})$  telle que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle une telle matrice la *matrice d'adjacence* de  $G$ .

**Remarque 4.3.** Comme les graphes que l'on considère sont sans boucles, on a toujours  $m_{ii} = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ . De plus, la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. En effet, on a toujours  $m_{ij} = m_{ji}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

**Exemple 4.4.** La table 4.2 illustre ma matrice d'adjacence de  $G$ . La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

**Remarque 4.5.** Parfois, la matrice d'adjacence est encodée sous format booléen, on y remplace ainsi 1 par « vrai » (V) et 0 par « faux » (F).

Il existe de nombreuses autres représentations de graphes, telles que la *liste d'adjacence*. Nous ne détaillerons néanmoins pas ces représentations ici. L'étudiant intéressé peut consulter plus d'informations dans le livre d'Aho *et al.* [1].

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

TABLE 4.2 – Matrice d’adjacence de  $G$ 

## 4.2 Variantes du modèle de graphe

Les applications des graphes étant très larges, il existe divers variantes au modèle présenté dans les sections précédentes. Nous présentons ici quelques-unes de ces variantes.

### 4.2.1 Multigraphe

Un *multigraphe* est un graphe pouvant contenir des *boucles* et dans lequel deux sommets distincts peuvent être rejoints par *plusieurs arêtes*. Lorsque deux arêtes joignent la même paire de sommets, on les qualifie d’arêtes *parallèles*.

Dans un tel graphe, on note en indice  $(i, j)$  de la matrice d’adjacence le nombre d’arêtes entre un sommet  $i$  et un sommet  $j$ . Cette matrice n’est donc plus binaire, comme dans le cas des graphes simples. Elle est néanmoins toujours symétrique.

**Exemple 4.6.** La figure 4.3 illustre un exemple de multigraphe. Sur ce graphe  $G$ , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe  $G$  est un multigraphe. Il compte des arêtes parallèles.
- Les sommets  $s_2$  et  $s_4$  sont reliés par 2 arêtes parallèles. Il en est de même des sommets  $s_3$  et  $s_4$ .

La table 4.3 illustre la matrice d’adjacence de ce graphe. ◀

Notez que les graphes des figures ?? et ?? du problème des sept ponts de Königsberg correspondent à un multigraphe.

Dans la matrice d’adjacence d’un tel graphe, habituellement, on note un  $k$  à la case  $(i, j)$  s’il y a  $k$  arêtes entre les sommets  $i$  et  $j$ .

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$s_1$	0	1	1	1
$s_2$	1	0	0	2
$s_3$	1	0	0	1
$s_4$	1	2	1	0

TABLE 4.3 – matrice d’adjacence d’un multigraphe

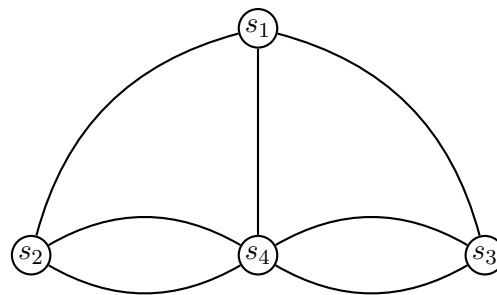
Graphe  $G$ 

FIGURE 4.3 – Exemple de multigraphe.

### 4.2.2 Graphe dirigé

Les graphes dirigés sont des variantes du modèle non orienté vu précédemment dans lesquelles les relations modélisées ne sont pas nécessairement symétriques. On les définit comme suit.

#### Définition 4.5

Un graphe  $G$  dirigé est un couple  $(V, E)$  tel que

- $V$  est un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets,
- $E \subseteq V \times V$  est un ensemble fini non vide de couples (ordonnés) de sommets disjoints de  $V$  appelés arcs ou flèches.

Notez que dans certaines références, les notions de graphe *dirigé* et de graphe *orienté* [6] sont incorrectement confondues. Ce sont des concepts différents. Dans un graphe orienté, on ne peut pas avoir une paire d'arcs  $(i, j)$  et  $(j, i)$  entre deux sommets  $i$  et  $j$  d'un graphe, ni de boucle. Ce détail de terminologie n'est toutefois nécessaire que si l'on travaille avec les deux modèles de façon précise, ce qui n'est pas le cas dans ce document.

Habituellement, on représente ces graphes de façon similaire aux graphes non orientés, les arcs étant ici représentés par des flèches dotées d'une origine et d'une extrémité. On les représente par une flèche allant du sommet origine au sommet extrémité.

On peut également envisager des variantes du modèle de graphe dirigé en le rendant « multigraphe ».

La figure 4.4 illustre un exemple de graphe dirigé.

**Exemple 4.7.** La figure 4.4 illustre un exemple de graphe dirigé. Sur ce graphe  $G$ , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe  $G$  est un graphe dirigé car « ses arêtes sont des arcs ».
- L'arc qui va du sommet  $s_1$  vers le sommet  $s_2$  est distinct de celui qui va de  $s_2$  vers  $s_1$ .



La matrice d'adjacence d'un graphe dirigé est construite de manière similaire à celle d'un graphe non orienté. Elle n'est néanmoins en général pas symétrique.

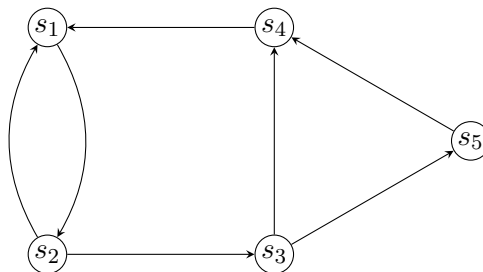
Graphe  $G$ 

FIGURE 4.4 – Exemple de graphe dirigé.

### 4.2.3 Graphe étiqueté

Un graphe *étiqueté* est un graphe (non orienté, dirigé, multigraphe) dont chaque arête ou arc est étiqueté. Généralement, les étiquettes sont des nombres, dénotant, par exemple, ce que cela coûte pour se rendre d'un sommet à son voisin, combien rapporte la relation entre deux sommets, etc.

Parfois, de tels graphes sont dits *valués* ou *pondérés* si les étiquettes sont des nombres. Dans ce cas, on appelle de telles étiquettes des *poids*.

**Exemple 4.8.** La figure 4.5 illustre un exemple de graphe pondéré. Sur ce graphe  $G$ , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe  $G$  est orienté car ses arêtes sont représentées par des flèches.
- C'est également un graphe étiqueté.
- L'arc  $(s_2, s_3)$  est de poids 2.



Les graphes étiquetés ont de nombreuses applications pratiques. Modélisons par exemple une ville en désignant les croisements de routes comme les sommets et en reliant deux sommets par un arc si une route joint les deux carrefours correspondants. Notez que ce modèle dirigé inclut les sens interdits. De plus, on peut par exemple étiqueter un arc par un nombre dénotant la distance entre deux carrefours. On peut ainsi résoudre des problèmes complexes tels que se demander quel est le plus court chemin entre deux carrefours en ville.

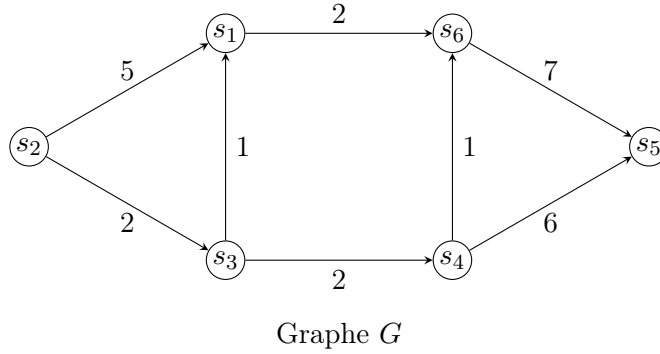


FIGURE 4.5 – Exemple de graphe étiqueté

### 4.3 Chemins et connexité

Les chemins et la connexité sont des concepts qui permettent, par exemple, « de dire combien de morceaux composent un graphe », de « savoir s'il est possible de se rendre d'un sommet à un autre », etc. Ces concepts décrivent la structure interne du graphe d'un point de vue topologique, ainsi que la structure de la matrice d'adjacence.

#### Définition 4.6

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté. Un chemin de longueur  $k$  avec  $k \geq 1$  dans  $G$  est une séquence de sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  telle que

$$\forall i = 1, 2, \dots, k, \{v_i, v_{i+1}\} \in E.$$

Un tel chemin est noté  $v_1 - v_2 - \dots - v_{k+1}$ . De plus, si tous les sommets d'un chemin sont distincts, il est dit élémentaire.

Intuitivement, un chemin est une séquence de sommets joints deux à deux par des arêtes, et la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. Ce concept peut être étendu facilement dans le contexte de graphes dirigés, pondérés et de multigraphes.

Notez que dans le cadre de ce cours, on considérera systématiquement des chemins élémentaires, à l'unique exception du *chemin eulérien*, formellement in-

troduit à la définition 4.9.

Il existe des chemins particuliers : les cycles, qui sont intuitivement des chemins « qui se terminent au sommet où ils ont commencé ».

#### Définition 4.7

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté et  $p = v_1 - v_2 - \dots - v_{k+1}$  un chemin de  $G$ , avec  $k \geq 3$ . On dit que  $p$  est un cycle si  $v_{k+1} = v_1$ .

Un cycle est dit élémentaire si les sommets  $v_1, \dots, v_k$  sont différents (le sommet  $v_{k+1}$  est forcément identique à  $v_1$ ).

#### Définition 4.8

Un graphe non orienté  $G$  est connexe si, pour chaque paire de sommets distincts de  $G$  il existe un chemin allant de l'un à l'autre.

**Exemple 4.9.** Sur le graphe de la figure 4.6, on remarque, entre autres, que

- $1 - 2 - 3 - 4$  est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1 - 2 - 4 - 1 - 2 - 4 - 1$  est un cycle non élémentaire de longueur 6,
- $4 - 5 - 1 - 4 - 2$  est un chemin non élémentaire de longueur 4,
- $1 - 2 - 4 - 5$  est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1 - 2 - 4 - 5 - 1$  est un cycle élémentaire de longueur 4,
- le graphe est connexe : il est possible de relier toute paire de sommets par un chemin (le chemin  $1 - 2 - 3 - 4 - 5$  relie tous les sommets, par exemple).

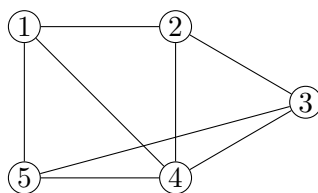


FIGURE 4.6 – Un exemple de graphe connexe

En pratique, on utilise des algorithmes dédiés pour déterminer si un graphe est connexe, tels que le *parcours en profondeur* [1, 9]. De tels algorithmes ne sont toutefois pas l'objet de ce cours.

**Définition 4.9**

*Soit  $G$  un graphe, un chemin eulérien dans  $G$  est un chemin passant une unique fois par chaque arête de  $G$ . Un cycle eulérien dans  $G$  est un cycle passant une unique fois par chaque arête de  $G$ . Un graphe qui contient un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.*

Notez que cette définition ne requiert *pas* que les chemins ou cycles recherchés au sein du graphe soient élémentaires. Il est donc tout à fait acceptable que ces chemins ou ces cycles passent plusieurs fois par un même sommet.

Pour savoir si un graphe est eulérien, une possibilité est de chercher un cycle eulérien, ou de montrer qu'il n'en existe pas. Une telle démarche peut être fastidieuse. Néanmoins, la propriété suivante est facile à vérifier et décrit les seuls cas dans lesquels un chemin ou un cycle eulérien peut exister au sein d'un graphe.

**Propriété 4.10**

*Un graphe  $G$  est eulérien si et seulement si il est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair. Un graphe  $G$  contient un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est zéro ou deux.*

Intuitivement, lorsque l'on parcourt un cycle eulérien, à chaque fois que l'on entre dans un sommet, il est nécessaire d'en ressortir, ce qui explique la nécessité d'avoir des sommets de degré pair. Dans le cas d'un chemin, les sommets potentiels de degré impair sont le sommet de début et de fin du chemin.

**Définition 4.11**

*Soit  $G$  un graphe, un chemin hamiltonien dans  $G$  est un chemin élémentaire passant une unique fois par chaque sommet de  $G$ . Un cycle hamiltonien dans  $G$  est un cycle élémentaire passant par chaque sommet de  $G$ . Un graphe qui contient un cycle hamiltonien est appelé graphe hamiltonien.*

Contrairement au cas eulérien, les mathématiciens pensent qu'il n'existe pas d'algorithme rapide pour décider si un graphe admet un cycle hamiltonien ou non [11]. Ce problème est appelé le *problème du cycle hamiltonien*, et est très étudié en théorie des graphes [4, 5, 8, 12, 18, 19].



Dès lors, pour montrer qu'un graphe admet un cycle hamiltonien, il faut l'exhiber. Dans le cas contraire, il faut montrer qu'un tel cycle n'existe pas.

**Exemple 4.10.** Soient les graphes  $G$  et  $H$  illustrés à la figure 4.7. On remarque que :

- $G$  est hamiltonien, il contient un cycle (et donc un chemin) hamiltonien, par exemple  $v_1 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$  ;
- $G$  n'est pas eulérien : tous les sommets ne sont pas de degré pair ( $v_1$  et  $v_4$ , par exemple) ;
- $G$  contient un chemin eulérien :  $v_1 - v_4 - v_2 - v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_3 - v_4$ , on remarque aussi que le nombre de sommets de degré impair est 2 ( $v_1$  et  $v_4$ ) ;
- $H$  est eulérien, il contient donc un cycle (et un chemin) eulérien, par exemple  $v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_4 - v_3 - v_1$ , on note également que ce graphe est connexe et que le degré de tous les sommets est pair ;
- $H$  n'est pas hamiltonien : en effet, pour passer de la partie droite à la partie gauche du graphe et y revenir, il est nécessaire de passer deux fois par  $v_4$ , ce qui n'est pas permis.

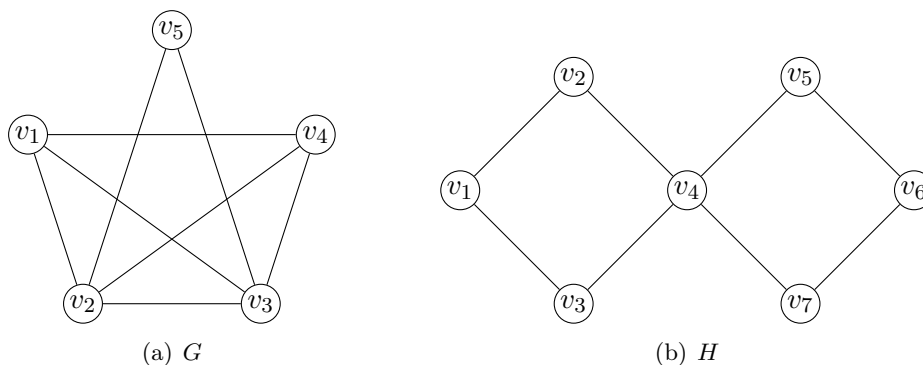


FIGURE 4.7 – Deux exemples de graphes  $G$  et  $H$

Cette section aborde une dernière partie relative à la connexité, très utile en algorithmique : la structure d'arbre. Intuitivement, un arbre a la même structure qu'un arbre généalogique : pas de cycles (on ne se marie pas avec ses parents, ses enfants ou ses frères et sœurs), et connexe. Les arbres sont très utilisés en tant que structures de données, comme concept illustratif d'appels récurifs, etc.

La définition suivante définit formellement le concept d'arbre à l'aide de plusieurs propositions équivalentes.

**Définition 4.12** ▶ [7]

Soit  $G$  un graphe non orienté d'ordre  $n \geq 2$ , on dit que  $G$  est un arbre si l'une des propositions suivantes équivalentes est vérifiée :

- $G$  est connexe et acyclique,
- $G$  est connexe et a  $n - 1$  arêtes,
- $G$  est acyclique et a  $n - 1$  arêtes,
- $G$  est acyclique et ajouter une arête crée exactement un cycle,
- $G$  est connexe et supprimer une arête brise la connexité de  $G$ ,
- chaque paire de sommets de  $G$  est reliée par exactement un chemin.

Parfois, on nomme un sommet particulier du graphe qu'on appelle *racine*, à des fins de simple référencement.

**Exemple 4.11.** La figure 4.8 illustre un arbre de racine  $r$ . On remarque que chacune des propositions de la définition 4.12 est vérifiée. ◀

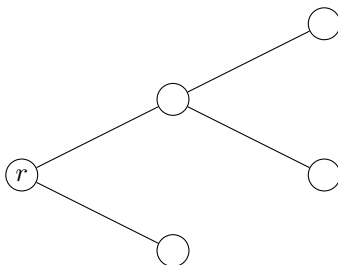


FIGURE 4.8 – Un exemple d'arbre de racine  $r$

## 4.4 Distances

Les distances dans un graphe permettent de décrire l'éloignement d'un sommet par rapport à un autre, la distance moyenne pour se rendre d'un sommet arbitraire à un autre, le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe, etc.

Ce concept a de nombreuses applications pratiques, des algorithmes guidant une voiture à l'aide de son G.P.S., en passant par le routage de paquets au sein d'un réseau ou l'analyse d'images.

Formellement, on définit la notion de distance de la façon suivante :

**Définition 4.13**

*Soit  $G$  un graphe connexe, on définit la distance entre deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , notée  $|u, v|_G$ , comme la longueur d'un plus court chemin entre  $u$  et  $v$ .*

Quand le contexte est clair, on omettra  $G$  et on notera<sup>2</sup> cette distance simplement  $|u, v|$ . Par convention, on suppose que  $|u, u| = 0$  quel que soit le sommet  $u$  considéré.

Notez qu'au vu de cette définition, on ne considère pas la distance au sein de graphes non connexes<sup>3</sup>. En effet, dans un tel graphe, il est possible de trouver deux sommets qui ne sont pas reliés par un chemin. En particulier, ils ne sont donc pas reliés par un plus court chemin et la distance entre ces deux sommets ne peut être donc être calculée.

Par ailleurs, remarquez que dans le cas d'un graphe non orienté, on a toujours  $|u, v| = |v, u|$ , quel que soit les sommets  $u$  et  $v$  considérés. En effet, si  $p = v - p_1 - \dots - p_{k-1} - u$  est un plus court chemin de longueur  $k$  entre  $u$  et  $v$ , alors  $p' = u - p_{k-1} - \dots - p_1 - v$  est un plus court chemin de longueur  $k$  entre  $v$  et  $u$ .

**Remarque 4.12.** Bien que la longueur d'un plus court chemin entre deux sommets soit unique (et donc, la distance entre ces deux sommets également), il peut exister plusieurs plus courts chemins de même longueur entre deux sommets.

**Remarque 4.13.** La contrainte « longueur d'un *plus court* chemin » est importante dans la définition de distance. En effet, sans ce critère de minimalité, la longueur de n'importe quel chemin entre deux sommets pourrait être utilisée, ce qui induirait de l'ambiguïté.

**Exemple 4.14.** Sur le graphe  $G$  de la figure 4.9, on remarque, entre autres, que

2. Dans la littérature, la distance entre deux sommets  $u$  et  $v$  est souvent notée  $d(x, y)$ . Dans ce document, on s'écarte de cette notation à des fins de clarté car la lettre  $d$  est déjà utilisée pour dénoter le degré d'un sommet, une notation également standard.

3. Dans la littérature, cette hypothèse n'est pas systématiquement faite. Le cas échéant, on considère que  $|u, v| = \infty$  si aucun chemin ne relie  $u$  et  $v$ .

- $G$  est connexe,
- $|1, 1| = 0$ ,
- $|1, 3| = 1$ ,
- $|1, 5| = 2$ , et il y a quatre plus courts chemins joignant les sommets 1 à 5 :  $1 - 2 - 5$ ,  $1 - 3 - 5$ ,  $1 - 6 - 5$  et  $1 - 4 - 5$ .

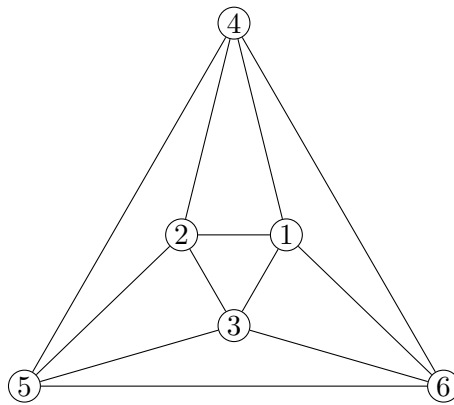


FIGURE 4.9 – Illustration du concept de distance

Il existe de nombreux algorithmes efficaces pour calculer les distances au sein d'un graphe [9]. Ces algorithmes ne seront néanmoins pas détaillés dans cette section, dans la mesure où les concepts ne sont présentés qu'à titre d'introduction. Aussi, lors d'exemples et d'exercices, les distances seront toujours calculées sur des graphes relativement petits.

Souvent, lorsque de nombreuses distances au sein d'un graphe ont besoin d'être calculées, on les calcule exhaustivement et on rassemble cette information au sein d'un tableau. Considérez les sommets d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  comme étiquetés par les naturels de 1 à  $n$ . On peut résumer les distances au sein d'un graphe dans une matrice  $D \in \mathbb{N}^{n \times n} = (m_{ij})$  telle que

$$m_{ij} = k \text{ si } |i, j|_G = k.$$

On appelle une telle matrice la *matrice des distances* de  $G$ .

**Exemple 4.15.** La table 4.4 illustre la matrice des distances du graphe de la figure 4.9. La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des

sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	2	1
2	1	0	1	1	1	2
3	1	1	0	2	1	1
4	1	1	2	0	1	1
5	2	1	1	1	0	1
6	1	2	1	1	1	0

TABLE 4.4 – Matrice des distances de  $G$

Une fois calculée, cette matrice est très utile pour connaître rapidement la distance entre n'importe quelle paire de sommets. Elle permet également de repérer facilement les distances les plus longues entre deux sommets arbitraires, le sommet le plus éloigné d'un sommet donné, etc. En l'occurrence, elle permet de facilement calculer le *diamètre* d'un graphe, défini comme suit.

#### Définition 4.14

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe, on définit le diamètre de  $G$ , noté  $D(G)$  comme

$$D(G) = \max_{u, v \in V} |u, v|_G.$$

En d'autres termes, le diamètre est la distance la plus longue au sein d'un graphe, il décrit le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe.

**Exemple 4.16.** Considérez le graphe de la figure 4.10. Dans sa matrice des distances, on remarque que la plus grande distance est 3, atteinte entre les sommets 1 et 4. On a donc  $D(G) = 3$ . ◀

Remarquez que la matrice des distances est l'une des seules façons de justifier formellement la valeur d'un diamètre. En effet, se contenter de dire «  $D(G) = 3$ , atteint entre les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sur le chemin  $v_1 - v_3 - v_5 - v_2$  » montre que la distance entre  $v_1$  et  $v_2$  est bien égale à 3, mais ne prouve en rien que cette distance est maximum. Cette information se trouve dans la matrice des distances, qui exhibe *toutes* les distances au sein du graphe considéré. De cette façon, on peut vérifier facilement que le nombre avancé est bien la distance maximum.

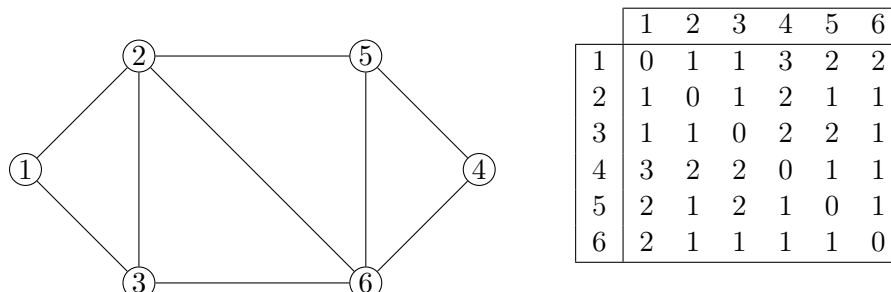


FIGURE 4.10 – Un graphe et sa matrice des distances

Finalement, notez que dans le cas de graphes pondérés, le concept de distance est facilement étendu en considérant la longueur d'un chemin comme étant la somme des poids des arêtes qu'il traverse. Similairement, dans les graphes dirigés, on considère qu'un chemin ne peut être construit qu'en suivant le sens des arcs.

## 4.5 Coloration de graphes

Les colorations de graphes sont une autre partie de la théorie des graphes riche en applications et en résultats. Les colorations permettent de partitionner les sommets d'un graphe en classes, chaque élément d'une classe étant incompatible avec les autres éléments de cette classe.

Par exemple, si l'on veut colorier les pays d'une carte du monde de sorte à ce que deux pays ayant une frontière commune ne partagent pas la même couleur, on va classer ces pays en plusieurs ensembles : les pays coloriés en rouge, les pays coloriés en bleu, etc. Aucun pays colorié en rouge ne peut avoir de frontière commune avec un autre pays colorié en rouge.

Les colorations sont utilisées notamment dans la conception d'horaires, l'assignation de fréquences radio, la distribution de ressources non partageables, etc. Formellement, on définit la notion de coloration de la façon suivante.

**Définition 4.15**

*Une coloration de graphe est une assignation de couleurs à chacun de ses sommets telle que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur.*

Historiquement, le terme « coloration » trouve ses origines dans le problème de coloration des pays d'une carte cité ci-dessus [10].

**Exemple 4.17.** La figure 4.11 illustre deux colorations. La première utilise 3 couleurs et la deuxième 4. On remarque que l'assignation de couleurs sur le graphe de droite n'est pas une coloration : les sommets  $v_2$  et  $v_5$ , ainsi que  $v_4$  et  $v_5$  ont la même couleur alors qu'ils sont adjacents. ◀

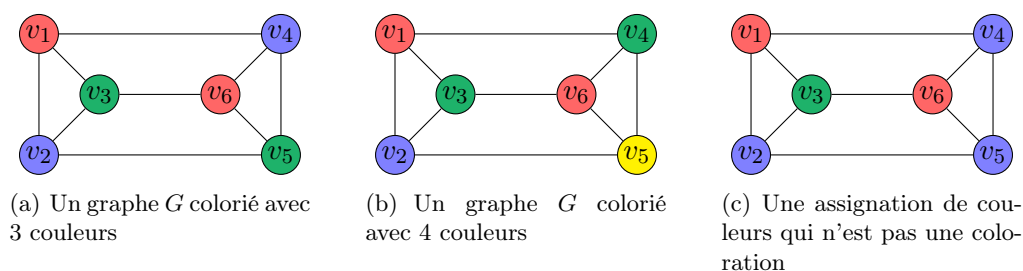


FIGURE 4.11 – Plusieurs assignations de couleurs aux sommets d'un graphe

Souvent, dans le cadre de colorations, on est amené à chercher le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier un graphe. Ce concept est appelé le *nombre chromatique*.

**Définition 4.16**

*Le nombre chromatique d'un graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de couleurs utilisées au sein d'une coloration de  $G$ .*

**Exemple 4.18.** Sur le graphe de la figure 4.11, on a  $\chi(G) = 3$ . En effet, on remarque que le graphe de gauche a été colorié avec 3 couleurs. De plus, il est impossible de le colorier avec 2 couleurs, car colorier uniquement les sommets  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  requiert déjà 3 couleurs (car ces sommets sont adjacents les uns aux autres). ◀

Notez qu'au vu de la définition de  $\chi$ , il est important de justifier que la

quantité avancée est bien le nombre de couleurs minimum nécessaire. Une façon de le faire est de trouver, comme dans l'exemple ci-dessus, une partie du graphe qui ne peut pas être coloriée avec un nombre inférieur de couleurs.

**Remarque 4.19.** Notez que l'hypothèse selon laquelle le nombre chromatique est le nombre *minimum* de couleurs nécessaires pour colorier un graphe est importante. En effet, sans cette contrainte de minimalité, on pourrait assigner une couleur à chaque sommet du graphe, ce qui n'est pas intéressant.

Notez qu'il n'existe à ce jour pas de technique *rapide* permettant de calculer rapidement le nombre chromatique d'un graphe. Par ailleurs, les mathématiciens pensent qu'un tel algorithme n'existe tout simplement pas [11].

De plus, à partir d'une coloration non optimale (qui n'utilise pas un nombre minimum de couleurs), il n'est pas toujours facile de la transformer en coloration optimale. Sur le graphe du milieu de la figure 4.11, par exemple, on a utilisé 4 couleurs, ce qui n'est pas optimal. Toutefois, on ne peut pas se contenter de remplacer la couleur jaune de  $v_5$  par la couleur rouge, bleue ou verte, car les sommets adjacents à  $v_5$  sont coloriés dans ces couleurs.

Il existe néanmoins certains résultats donnant des bornes sur le nombre chromatique, comme le théorème suivant, célèbre.

**Théorème 4.17 ▶ Théorème des 4 couleurs**

Un graphe  $G$  peut être représenté dans le plan tel que ses arêtes ne se croisent pas<sup>a</sup> si et seulement si  $\chi(G) \leq 4$ .

<sup>a</sup>. Un tel graphe est appelé un graphe *planaire*.

Ce théorème affirme donc, entre autre, que toute carte des provinces d'un pays ou des pays du monde peut être coloriée avec un maximum de quatre couleurs.

La preuve de ce théorème est excessivement complexe, et n'est pas vue ici entre autres pour cette raison. Notez que cette preuve a un sens historique, dans la mesure où c'est la première preuve assistée par ordinateur à avoir été acceptée par la communauté scientifique. Un ordinateur a en effet été utilisé pour énumérer des milliers de configurations, qui ont été ultérieurement analysées par des scientifiques.



## 4.6 Exercices résolus

**Exercice 4.1.** Soit le graphe<sup>4</sup>  $G$  de la figure 4.12. Déterminez

- l'ordre de  $G$ ,
- la taille de  $G$ ,
- si  $G$  est connexe,
- le diamètre de  $G$ ,
- si  $G$  possède un cycle ou un chemin eulérien.

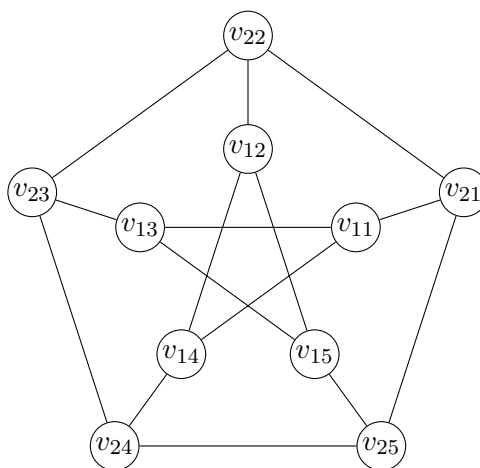


FIGURE 4.12 – Le graphe de Petersen

*Solution.* On remarque que  $G$  est d'ordre 10 et de taille 15 car il possède respectivement 10 sommets et 15 arêtes.

Ce graphe est connexe, il est en effet possible de relier chaque paire de sommets entre eux par un chemin.

On remarque que  $D(G) = 2$ , à l'aide de la matrice des distances de  $G$  illustrée à la table 4.5. Comme cette matrice est symétrique à diagonale nulle (car  $G$  est non orienté), on s'est ici contenté de ne représenter que la partie triangulaire supérieure de la matrice.

4. Ce graphe est appelé le graphe de Petersen.

	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$	$v_{15}$	$v_{21}$	$v_{22}$	$v_{23}$	$v_{24}$	$v_{25}$
$v_{11}$		2	1	1	2	1	2	2	2	2
$v_{12}$			2	1	1	2	1	2	2	2
$v_{13}$				2	1	2	2	1	2	2
$v_{14}$					2	2	2	2	1	2
$v_{15}$						2	2	2	2	1
$v_{21}$							1	2	2	1
$v_{22}$								1	2	2
$v_{23}$									1	2
$v_{24}$										1
$v_{25}$										

TABLE 4.5 – Matrice des distances du graphe de Petersen

Ce graphe ne possède ni de chemin ni de cycle eulérien. En effet, les dix sommets de  $G$  sont de degré impair. ◀

**Exercice 4.2.** Même énoncé que précédemment avec le graphe  $G = (V, E)$  d'ordre 5 tel que

$$\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \in E. \quad (4.1)$$

*Solution.* L'équation (4.1) dénote un graphe d'ordre 5 tel que quel que soit la paire de sommets distincts considérés, il existe une arête entre ces deux sommets.

On peut immédiatement conclure que

- $G$  est d'ordre 5 et de taille  $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ ;
- $G$  est connexe (car tous les sommets sont reliés deux à deux) ;
- le diamètre de  $G$  est de 1, car il est possible de se rendre directement d'un sommet à n'importe quel autre en empruntant une unique arête ;
- $\chi(G) = 5$ , car comme tous les sommets sont reliés entre eux par une arête, il n'est pas possible de colorier  $G$  avec moins de 5 couleurs ;
- $G$  est eulérien, car tous ses sommet sont de degré pair (degré égal à 4).

Ces conclusions peuvent être vérifiés sur une représentation de  $G$  à la figure 4.13. Remarquons également que comme  $G$  n'est pas planaire, il n'est pas possible de le dessiner avec 4 couleurs.

◀

**Exercice 4.3.** Considérez une maison dont un plan simplifié est illustré à la

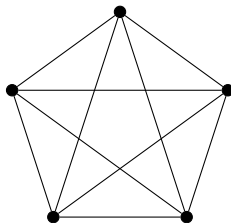
FIGURE 4.13 – Un graphe  $G$ 

figure 4.14. Les pièces de cette maison sont délimitées par des murs (les lignes), les trous désignent les portes. Est-il possible de promener le chien de la famille en passant une unique fois par chaque porte ? Est-ce possible si l'on impose de revenir à la pièce de départ ?

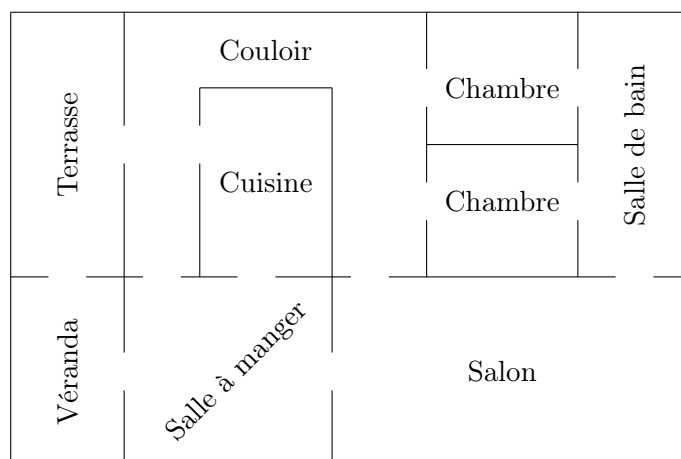


FIGURE 4.14 – Plan d'une maison

*Solution.* Pour des raisons de présentation, associons les étiquettes suivantes aux pièces de la maison :

- 1 : véranda,
- 2 : terrasse,
- 3 : salle à manger,
- 4 : couloir,
- 5 : cuisine,

- 6 : salon,
- 7 : chambre inférieure,
- 8 : chambre supérieure,
- 9 : salle de bain.

On peut modéliser la maison sous forme de graphe en associant un sommet à chaque pièce, et en reliant deux sommets par une arête si les pièces sous-jacentes sont séparées par une porte. Un tel graphe est illustré à la figure 4.15.

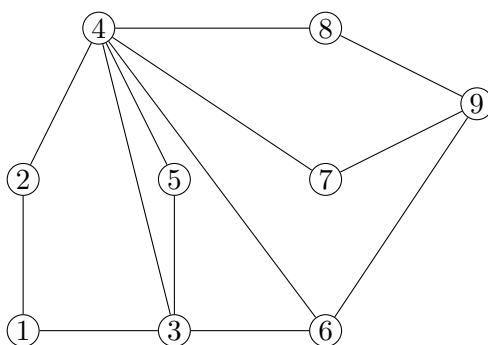


FIGURE 4.15 – Modélisation de la maison sous forme de graphe

Promener le chien en passant une unique fois par chaque porte correspond à trouver un chemin eulérien dans le graphe de la figure 4.15. On remarque que comme le nombre de sommets impair de ce graphe est 2 (pour le salon et la salle de bains), qu'un tel chemin existe (théorème d'Euler). Par exemple, le chemin

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9$$

est eulérien.

On remarque qu'un circuit eulérien n'existe pas, en effet, certains sommets sont de degré impair (cf. argument précédent). Il n'est donc pas possible de promener le chien de la famille en passant une unique fois par chacune des portes et en revenant à son point de départ. ◀

**Exercice 4.4.** Un ingénieur employé par un petit village de montagne souhaite analyser les performances du réseau de distribution d'eau communal, divisé en 6 sites. Le coût du transport local de l'eau entre chaque site est défini à la table 4.6. Quels sont les sites entre lesquels le transport de l'eau est le plus cher, sachant que l'ingénieur tente de travailler aux coûts les plus faibles ?

Connexion		Prix
Site 1	Site 2	
Hôtel de ville	Café	12
Hôtel de ville	Salle des fêtes	16
Café	Hôtel de ville	14
Café	Salle des fêtes	22
Café	Magasin	46
Café	Restaurant	22
Salle des fêtes	Café	16
Salle des fêtes	Restaurant	19
Magasin	Café	15
Magasin	Restaurant	40
Restaurant	Église	12
Église	Magasin	22
Église	Restaurant	27

TABLE 4.6 – Coût de transport local d'eau dans un village

*Solution.* Modélisons la situation décrite à l'aide d'un graphe. Les sites seront modélisés par les sommets, et on reliera un sommet  $u$  à un sommet  $v$  par un arc si il est possible de transporter de l'eau de  $u$  à  $v$ . On remarque au vu des définitions de la table 4.6 que ce graphe *doit* être dirigé. En effet, s'il est par exemple possible de transporter de l'eau de l'hôtel de ville à la salle des fêtes, il n'y a pas de canalisation pour le transfert inverse. Par ailleurs, même si la ville dispose de canalisation pour transporter de l'eau dans les deux sens entre deux sites, ce transport n'est pas effectué au même coût. On imagine par exemple la nécessité de pompes pour transporter de l'eau en haut d'une colline, alors que dans l'autre sens, la gravité fait son œuvre gratuitement. On obtient ainsi le graphe de la figure 4.16, pondéré par le coût du transport de l'eau. Sur ce graphe, on a abrégé le nom des sites avec la première lettre de leur nom.

On doit chercher les deux sites entre lesquels le coût de transport d'eau est le plus élevé, sachant qu'on considère que les transports sont effectués optimalement. Ceci correspond à chercher le diamètre du graphe de la figure 4.16 : on cherche la plus longue distance, c'est-à-dire le plus long plus court chemin du graphe.

Construisons la matrice des distances de ce graphe. Cette matrice est illustrée à la figure 4.16. On remarque avant tout que cette matrice n'est pas symétrique. En effet, le graphe est dirigé. Ainsi, il est par exemple plus cher de transporter

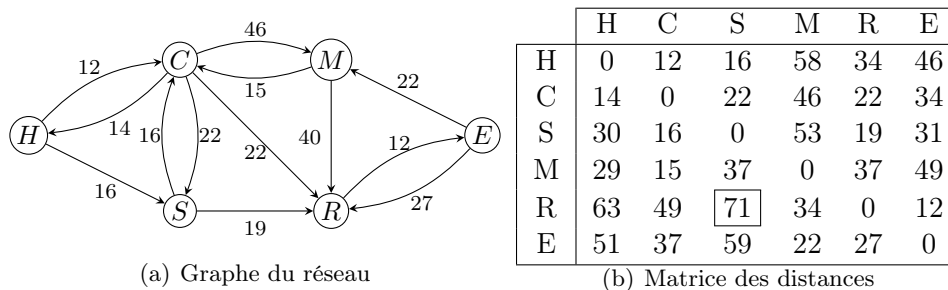


FIGURE 4.16 – Modélisation du réseau distribution d'eau d'un village

de l'eau du café à la salle des fêtes que l'inverse.

Sur cette matrice, on remarque entre autre que le diamètre du graphe est de 71 atteint du restaurant à la salle des fêtes. ce sont donc les deux sites entre lesquels le transport de l'eau est le plus cher. ◀

**Exercice 4.5.** Panique à l'aéroport de Zaventem ! Les distances de sécurité des avions en approche ou qui viennent de décoller ne sont pas respectées. L'ordinateur de la tour de contrôle affiche la carte illustrée à la figure 4.17. Les distances de sécurité que doivent respecter chaque avion sont dessinées en pointillés. La procédure standard de sécurisation impose à deux avions trop proches de voler à des altitudes différentes.

Combien de niveaux d'altitudes différents la tour de contrôle doit-elle imposer aux avions aux alentours de l'aéroport, au moment où la carte de la figure 4.17 est affichée ?

*Solution.* Modélisons la situation de la figure 4.17 par un graphe. Les avions seront les sommets du graphe, et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les cercles correspondant aux distances de sécurité des avions considérés s'intersectent. Autrement dit, deux sommets sont reliés par une arête si les avions peuvent s'accrocher, c'est-à-dire s'ils doivent être affectés à des altitudes différentes.

On cherche à colorier les sommets du graphe : une couleur correspond à un niveau d'altitude. En effet, deux sommets avec des couleurs identiques étant non adjacents, les avions correspondants sont assignés à des altitudes différentes.

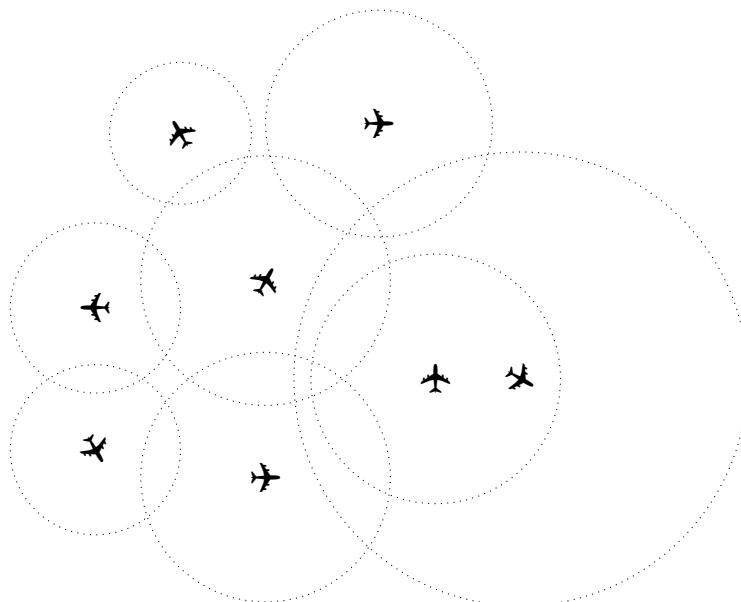


FIGURE 4.17 – Avions aux alentours de l’aéroport de Zaventem

Calculer le nombre minimum de niveaux d’altitude à assigner aux avions revient donc à calculer le nombre chromatique de ce graphe.

On obtient ainsi le graphe de la figure 4.18. On remarque que sur cette figure, il est impossible de colorier le graphe avec moins de 4 couleurs, à cause des sommets  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_7$  et  $p_8$  qui sont tous adjacents deux à deux. De plus, il est possible de colorier le graphe avec 4 couleurs, comme illustré. On a donc  $\chi(G) = 4$ .

Ainsi, on a besoin d’assigner quatre niveaux d’altitude pour l’ensemble des avions : un par couleur.



**Exercice 4.6.** Considérez les cours que doivent suivre les groupes A à F illustrés à la table 4.7. Par exemple, on remarque que le groupe A doit suivre « système » et « réseau », alors que le groupe C doit suivre à la fois système, java et analyse.

1. Modélisez la situation illustrée à la table 4.7 à l’aide d’un graphe.
2. Que vaut  $\chi$  sur ce graphe ?
3. Tous ces cours de chacun 2h peuvent-ils être organisés au sein d’une journée

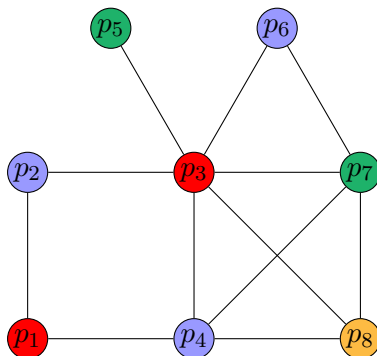


FIGURE 4.18 – Modélisation en graphe de la figure 4.17

de 8h, sachant que le professeur qui donne Java donne également le cours d'analyse, et que les classes ne peuvent accueillir qu'un groupe à la fois ?

	Système	Math	Java	Analyse	Réseau
<b>Groupe A</b>	X				X
<b>Groupe B</b>		X	X	X	
<b>Groupe C</b>	X		X	X	
<b>Groupe D</b>		X	X		X
<b>Groupe E</b>	X				X
<b>Groupe F</b>		X			

TABLE 4.7 – Cours à dispenser à différents groupes

*Solution.* 1. On remarque, au vu des contraintes ci-dessus, que

- un groupe ne peut pas suivre deux cours différents en même temps,
- un cours ne peut pas être donné à plusieurs groupes en même temps,
- un professeur ne peut pas donner plus d'un cours à la fois.

Modélisons cette situation à l'aide d'un graphe. Les sommets seront des couples « (Groupe, Cours) ». Deux sommets adjacents signifieront que les cours sous-jacents ne peuvent être donnés en même temps aux groupes concernés. Une coloration des sommets d'un tel graphe listera donc les cours qui peuvent être donnés en même temps et à quels groupes. En l'occurrence, les cours de deux sommets ayant la même couleur peuvent être donnés en même temps.



Modélisons donc chaque couple « (Groupe, Cours) » du tableau par un sommet. Un sommet  $(g_1, c_1)$  est adjacent à un sommet  $(g_2, c_2)$  si  $g_1 = g_2$  ou si  $c_1 = c_2$ . Ainsi, lors du calcul du nombre chromatique, deux sommets ayant un groupe ou un cours commun ne pourront se voir assigner la même couleur, et donc ne pourront se donner en même temps. De la même manière, si les cours de deux sommets sont donnés par un même professeur, il faut également les joindre par une arête afin que les cours ne puissent être donnés en même temps.

Ceci donne donc le graphe illustré à la figure 4.19(a). Sur cette figure, on a respecté la disposition des sommets similairement à leur place au sein de la table 4.7, pour des raisons de clarté.

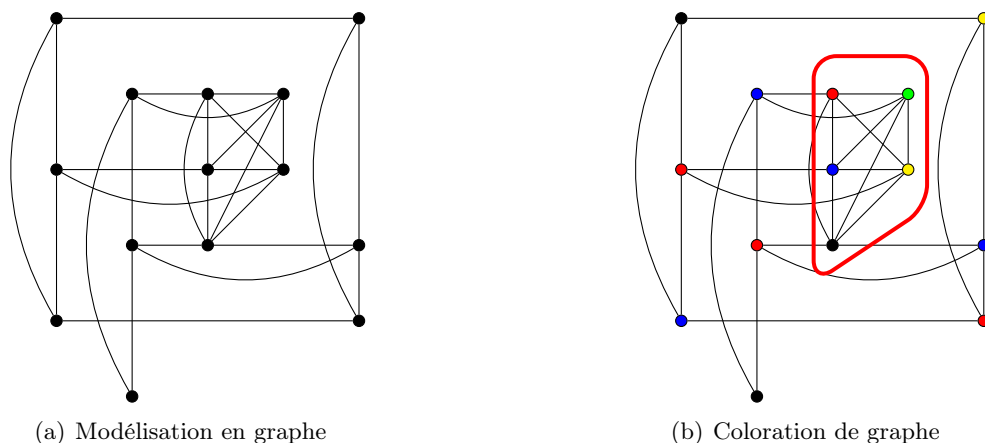


FIGURE 4.19 – Le graphe correspondant aux contraintes de cours

2. On a  $\chi(G) = 5$ . En effet, la figure 4.19(b) illustre une coloration à 5 couleurs. De plus, il n'est pas possible de colorier ce graphe avec moins de 5 couleurs, car les 5 sommets entourés en rouge sur cette figure sont complètement adjacents entre eux, et nécessitent donc 5 couleurs différentes pour une coloration.
3. Comme la question est de savoir si ces cours de 2h chacun peuvent être organisés au sein d'une seule journée de 8h, il faut savoir s'il est possible de colorier ce graphe avec 4 couleurs. Si c'est possible, alors, chaque sommet ayant la même couleur peut être organisé en même temps.

Or, on remarque que 5 sommets sont complètement adjacents entre eux, comme illustré en rouge à la figure 4.19(b). Ces 5 sommets nécessitent à eux seuls 5 couleurs pour être coloriés.

Donc, il n'est pas possible de donner ces cours sur une seule journée.



---

## Dénombrement

*Un problème de modélisation • Outils de base du dénombrement • Deux grandes questions • Arrangements et permutations • Combinaisons • Exercices résolus*

---

Parfois, en informatique, on est amené à compter le nombre de configurations possibles d'une structure. En effet, la résolution de nombreux problèmes consiste en l'énumération exhaustive des possibilités pour ensuite décider pour chacune si elle est une solution ou non au problème. Et avant d'énumérer, il est prudent de dénombrer, c'est-à-dire de compter.

Habituellement, on classe ces énumérations en différents types, comme les *arrangements* et les *combinaisons*. L'étude du nombre de permutations, d'arrangements, de combinaisons ou de partitions d'un ensemble fini d'objets s'appelle traditionnellement en mathématique l'*analyse combinatoire*. Elle est omniprésente en informatique mais plus généralement en sciences.

Il y a plusieurs autres raisons à cette omniprésence de l'analyse combinatoire en sciences exactes, telles que

- le codage des données en binaire,
- les propriétés combinatoires des structures de données,
- la programmation itérative ou récursive,

- l'estimation du temps de calcul des algorithmes en fonction de la taille des entrées,
- séquençage de l'ADN,
- estimation des probabilités d'occurrence d'événements, etc.

L'analyse combinatoire joue également un rôle important en analyse statistique. Ses domaines d'application sont nombreux : physique, économie, médecine, recherche opérationnelle, démographie, et, comme déjà signalé, informatique.

Dans ce chapitre, on verra en détail comment décomposer un problème combinatoire en sous-problèmes, et calculer les arrangements ou combinaisons d'objets à l'aide de formules et de raisonnements efficaces dédiés. Notez qu'il existe certains comptages pour lesquels aucune formule ni aucun comptage efficace (qui n'énumère pas *à la main* toutes les configurations) ne peut être élaborée. Compter le nombre de graphes non isomorphes à un ordre donné est un exemple d'un tel problème.

Plus particulièrement, ce chapitre commence à la section 5.2 avec plusieurs règles et outils de base utilisés intensivement dans les problèmes de comptage habituels. Ce chapitre se poursuit en 5.1 avec deux exemples de problèmes classiques en combinatoire, et insiste sur l'importance de les modéliser correctement afin de pouvoir déterminer le type de raisonnement à utiliser pour compter.

Dans cet ordre d'idées, la suite de ce chapitre présente aux sections 5.4 et 5.5 ces types de raisonnement en question et les concepts associés d'arrangements et de combinaisons, à utiliser selon que l'ordre au sein des structures énumérées ait de l'importance ou non.

Enfin, comme d'accoutumée, des exercices résolus concluent ce chapitre en section 5.6.

## 5.1 Un problème de modélisation

Comme déjà mentionné dans les chapitres précédents, la modélisation mathématique est souvent une étape importante dans la résolution d'un problème, si ce n'est la plus importante. Dans ce chapitre, en l'occurrence, on verra que sans elle, on ne peut résoudre un problème à la fois correctement tout en justifiant son raisonnement sur des arguments formels.

En particulier, on expose deux principes de modélisation utilisés intensément en combinatoire, à savoir la modélisation d'un problème sous la forme d'un *diagramme en arbre*, détaillée à la section 5.1.1, et le codage d'une solution d'un problème en section 5.1.2.

### 5.1.1 Diagrammes en arbre

De nombreux problèmes de comptage peuvent être modélisés et résolus en utilisant des *diagrammes en arbre*. La structure d'arbre est sensiblement la même que celle vue dans le chapitre 4 dédié aux graphes.

On considère ici qu'un arbre est constitué d'une *racine* de laquelle partent plusieurs *branches*, avec d'autres branches partant des extrémités d'autres branches. Les sommets de degré 1 sont appelés les *feuilles*. On utilise cette structure en modélisant chaque choix possible d'une configuration comme une branche. Pour compter le nombre de configurations possibles du problème original, il suffit de compter les feuilles de l'arbre.

**Exemple 5.1.** Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne possèdent pas deux « 1 » consécutifs. ◀

*Solution.* Le diagramme de la figure 5.1 illustre cette situation. Sur cette figure, on remarque qu'il y a 8 telles chaînes de caractères. ◀

### 5.1.2 Encodage d'une solution d'un problème

Parfois, la modélisation en arbre ainsi ne suffit pas pour résoudre un problème combinatoire directement. Ceci peut arriver quand il existe un trop grand nombre de configurations (représenter en arbre devient fastidieux) ou quand le problème est trop complexe (les règles usuelles de comptage ne s'appliquent pas directement).

Dès lors, il convient d'utiliser une modélisation dédiée sur laquelle on pourra appliquer les outils vus précédemment.

Pour illustrer cette modélisation ainsi que les points importants à garder à

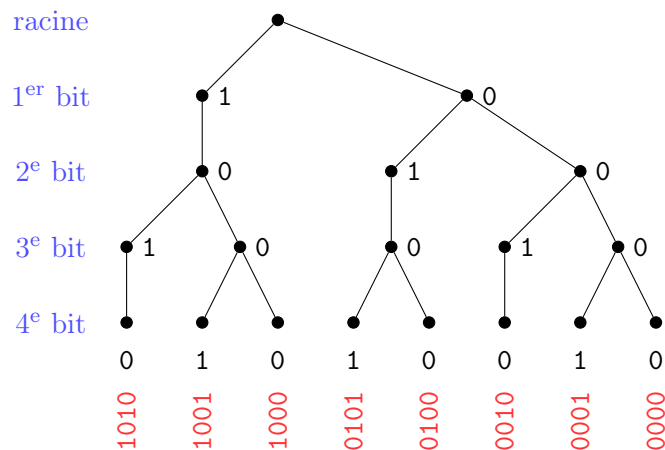


FIGURE 5.1 – Chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne contenant pas deux « 1 » consécutifs

l'esprit dans le reste de ce chapitre, introduisons deux exemples de problèmes simples, sans chercher à les résoudre<sup>1</sup>.

### Problèmes

- 5.1. Combien de code de vélos à quatre chiffres décimaux existe-t-il ?
- 5.2. Combien de mains poker à 5 cartes au sein d'un jeu de 52 existe-t-il ?

Modélisons ces problèmes de manière simple sous forme mathématique. En l'occurrence, on veut pouvoir décrire « ce qu'est un code de vélo » et « ce qu'est une main de poker ». On crée ainsi un « encodage » d'un code de vélo et d'une main de poker. Modéliser ces situations de cette manière permet de compter le nombre d'encodages différents possibles plutôt que de compter le nombre de situations originales, abstraites.

Dans le cas de des deux problèmes simples ci-dessus, on peut par exemple procéder de la façon suivante.

1. La résolution de ces problèmes sera effectuée plus loin dans le chapitre.

**Encodage**

Un code de vélo est un n-uple  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  tel que  $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  avec  $1 \leq i \leq 4$ .

Cette petite définition décrit ce qu'est un code de vélo. Tous les codes de vélo peuvent être modélisés avec cette définition. Par exemple, le code « 2343 » est modélisé par le n-uple  $(2, 3, 4, 3)$ .

Dans le cas des mains de poker, on peut procéder comme suit. Dans cette définition, on note le valet comme 11, la reine comme 12, le roi comme 13 et l'as comme 1. Ainsi, le roi de trèfle est noté  $13\clubsuit$ .

**Encodage**

Une main de poker est un n-uple  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  tel que

$$m_i \in \{1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, 11\heartsuit, 12\heartsuit, 13\heartsuit, \\ 1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, 11\diamondsuit, 12\diamondsuit, 13\diamondsuit, \\ 1\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, 11\clubsuit, 12\clubsuit, 13\clubsuit, \\ 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, 11\spadesuit, 12\spadesuit, 13\spadesuit\},$$

avec  $1 \leq i \leq 5$ .

Cette définition décrit bien toutes les mains de poker possibles, comme des n-uples à 5 composantes. Par exemple, la main illustrée à la figure 5.2 est encodée comme  $(11\spadesuit, 1\diamondsuit, 13\diamondsuit, 5\clubsuit, 12\heartsuit)$ .

Bien que rébarbatives, ces deux définitions vont permettre de répondre très rapidement et avec une justification formelle à deux questions qu'il est *systématiquement* nécessaire de se poser dans les problèmes de comptage, à savoir « si l'ordre importe » et « si les répétitions sont autorisées ». Ces questions seront abordées plus loin, aux sections 5.3, 5.4 et 5.5.

Notons qu'en pratique, encoder une configuration dans le but d'effectuer un dénombrement sera parfois difficile, étant donné que les problèmes considérés incluent régulièrement des contraintes. Dans la mesure du possible, on essaiera d'introduire un maximum de ces contraintes dans l'encodage utilisé, afin de faciliter les calculs.

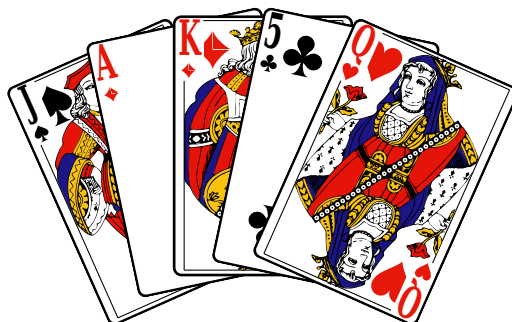


FIGURE 5.2 – Une main de cinq cartes

Par exemple, on peut compter un placement de 8 pions identiques sur un échiquier comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 64 (ces composantes dénotant la case à laquelle les pions se trouvent), mais si l'on veut les placer sur des lignes différentes, il est peut-être plus sage de modéliser ce placement comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 8 (la composante  $i$  étant à  $k$  si le pion de la  $i^{\text{e}}$  ligne se trouve à la colonne  $k$ ).

## 5.2 Outils de base du dénombrement

Souvent, les problèmes de combinatoire ne peuvent être résolus directement par un encodage et des diagrammes en arbre. Ainsi, résoudre un problème combinatoire consiste avant tout à le décomposer en sous-problèmes plus faciles à résoudre, et à ensuite combiner les résultats de résolution de ces problèmes pour composer la solution du problème original.

Par exemple, si on doit assigner deux informaticiens sur des ordinateurs dans une salle qui en contient dix, on peut décomposer ce problème en assignant d'abord un ordinateur au premier informaticien, puis en assignant un ordinateur au second.

Cette section détaille donc comment analyser un problème complexe afin de choisir une bonne manière de le décomposer en sous-problèmes plus simples. De plus, elle explique comment recomposer la solution du problème original à partir des solutions de ces sous-problèmes, à l'aide d'opérateurs mathématiques simples



tels que le « + » et le « × ».

La structure de cette section ainsi que les exemples qui s'y trouvent sont largement inspirés du livre de Rosen [16], à l'exception de la fin consacrée au principe des tiroirs.

### 5.2.1 La règle du produit

Supposons que l'on se pose la question suivante : « combien de chaînes de caractères binaires de longueur 3 peut-on créer ? ». Procédons comme indiqué ci-dessus, c'est-à-dire en décomposant ce problème en sous-problèmes.

On peut encoder une telle chaîne comme un triplet  $(c_1, c_2, c_3)$ , où  $c_i \in \{0, 1\}$ . Pour composer un tel triplet, on peut commencer par assigner un caractère à la position 1. Il y a 2 tels premiers choix. On peut ensuite assigner un caractère à la position 2. Il y a également 2 tels choix. Finalement, on peut assigner un caractère à la position 3, il y a encore une fois deux tels choix.

On peut représenter cette construction sous forme d'arbre, tel qu'illustré à la figure 5.3.

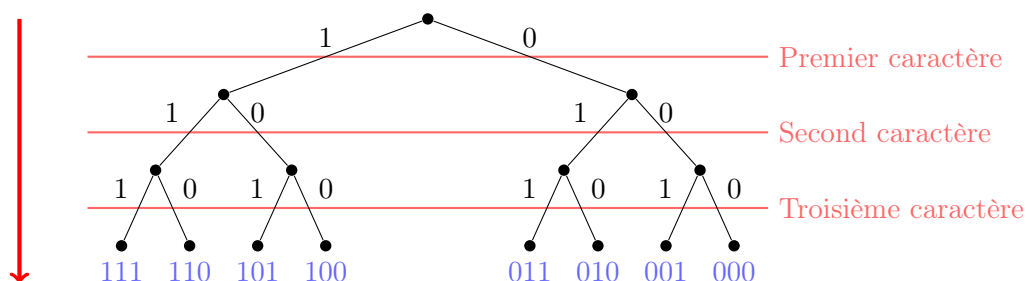


FIGURE 5.3 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 3

Ainsi, on remarque qu'à l'étape 1, on a 2 choix possibles. Pour chacun de ces deux choix, on en a deux suivants, ce qui résulte en 4 choix possibles ( $2 \cdot 2$ ). Finalement, pour chacun de ces 4 choix, on a 2 choix possibles, ce qui résulte finalement en  $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$  chaînes de caractères possibles.

On peut généraliser cette démarche dans le cas du calcul de la taille d'un produit cartésien. Si l'on décompose la construction d'un couple, on doit sélectionner

indépendamment un élément de chaque ensemble qui constitue ce produit, et on a donc

$$|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|.$$

On peut finalement énoncer la « *la règle du produit* », très utilisée en combinatoire et utilisée quand une tâche est constituée d'une séquence de différentes sous-tâches.

**Théorème 5.1 ▶ Règle du produit**

*Supposez qu'une procédure soit constituée d'une séquence de deux tâches. Si il y a  $n_1$  façons de réaliser la première tâche et  $n_2$  façons de réaliser la deuxième, alors il y a  $n_1 n_2$  façons de réaliser la procédure originale.*

**Exemple 5.2.** Les chaises d'un auditoire sont étiquetées par une lettre majuscule de l'alphabet et un naturel compris entre 1 et 100. Quel est le plus grand nombre de chaises qui peuvent être étiquetées différemment de cette façon ? ◀

*Solution.* La procédure d'étiquetage des chaises peut être séparée en deux tâches :

1. assigner une lettre majuscule de l'alphabet parmi les 26 lettres disponibles,
2. assigner l'un des 100 naturels disponibles.

La règle du produit affirme qu'il y a donc  $26 \cdot 100$  façons d'étiqueter une chaise. ◀

Parfois, il est utile de généraliser la règle du produit en séparant une procédure en une séquence de  $k$  tâches. Dans ce cas, on multiplie le nombre de façons qu'il y a de réaliser chacune des  $k$  tâches pour achever la procédure originale.

**Exemple 5.3.** Combien de plaques de voitures peuvent être conçues si chaque plaque est constituée d'une séquence de trois lettres majuscules, suivie d'un tiret et d'une séquence de trois chiffres décimaux ? ◀

*Solution.* Comme illustré à la figure 5.4, il y a 26 choix possibles pour chacune des trois lettres majuscules constituant la première partie de la plaque, et 10 choix possibles de chiffres décimaux pour la seconde partie de la plaque.

Dès lors, la règle du produit affirme qu'il y a

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$$

différentes plaques de voitures possibles. ◀

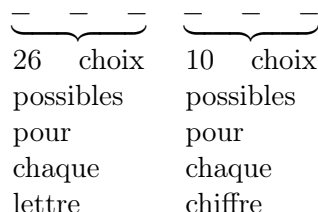


FIGURE 5.4 – Structure d'une plaque de voiture

**Exemple 5.4.** L'information héréditaire d'un organisme vivant est encodée en utilisant *l'acide désoxyribonucléique* (ADN), ou dans certains virus, *l'acide ribonucléique* (ARN). L'ADN et l'ARN sont des molécules très complexes, et interagissent à différents niveaux du processus du vivant.

Dans le cadre de ce chapitre, on ne donne ici qu'une brève description sur ces deux structures, leurs interactions dans le vivant et l'utilisation de la combinatoire dans ce contexte. L'étudiant intéressé trouvera plus d'informations à ce sujet, ainsi que les références au contenu scientifique de cet exemple dans le livre de Petsko et Ringe [15].

Les molécules d'ADN et d'ARN sont constituées de sous-composants appelés *bases*, et dans les deux cas, chaque base peut être de quatre types différents<sup>2</sup>. Un *gène* est une séquence d'ADN qui encode une protéine particulière. L'ensemble de l'information génétique d'un organisme est appelé son *génome*.

Les séquences d'ADN et d'ARN codent de longues chaînes de protéines appelées *acides aminés*. Il y a 22 acides aminés essentiels dans l'organisme humain. On remarque rapidement qu'une séquence d'au moins 3 bases est nécessaire pour encoder ces 22 acides aminés. En effet, comme il n'y a que quatre possibilités

2. Dans le cas de l'ADN, les bases sont la guanine (G), la thymine (T), l'adénine (A) et la cytosine (C). Dans le cas de l'ARN, l'uracile (U) remplace la thymine.

pour chaque base dans l'ADN, par la règle du produit il y a  $4^2 = 16 < 22$  différentes séquences de deux bases. Toutefois, il y a  $4^3 = 64$  différentes séquences de trois bases, ce qui fournit assez de séquences différentes pour encoder les 22 acides aminés<sup>3</sup>.

L'ADN des créatures vivantes simples telles que les algues et les bactéries a une longueur comprise entre  $10^5$  et  $10^7$ , ce qui signifie que leur ADN est composé d'une séquence d'entre  $10^5$  et  $10^7$  bases. Des organismes plus complexes, tels que les insectes, les oiseaux et les mammifères ont un ADN de longueur comprise entre  $10^8$  et  $10^{10}$ . Dès lors, par la règle du produit, il existe au moins  $4^{10^5}$  séquences d'ADN différentes possibles pour les organismes simples, et au moins  $4^{10^8}$  séquences dans le cas des organismes complexes. Ces nombres sont gigantesques, ce qui explique entre autres la grande diversité du vivant sur la planète<sup>4</sup>. ◀

## 5.2.2 Le principe d'inclusion-exclusion

Similairement au cas du produit, partons d'un problème simple : pour reformer la grille des sections « informatique : réseaux » et « informatique : systèmes », on réunit les professeurs donnant des cours dans ces deux sections. Combien de place faut-il prévoir ?

On peut représenter cette situation par un diagramme de Venn, tel qu'illustré à la figure 5.5.

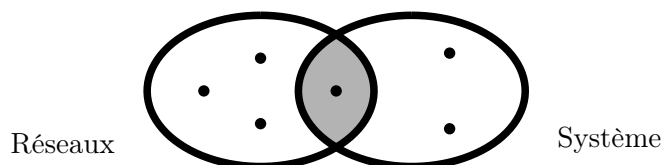


FIGURE 5.5 – Ensemble des professeurs de réseaux et de système

Sur cette figure, on remarque que bien qu'il y ait 4 professeurs de réseaux et 3 de systèmes, il ne faut pas prévoir  $4 + 3$  places. En effet, il y a un des professeurs qui donne cours à la fois en réseaux et en systèmes. En conséquence, lorsque l'on

3. En pratique, plusieurs séquences différentes encodent les mêmes acides aminés, mais des séquences de trois bases suffisent quand même à encoder l'ensemble des 22 acides aminés.

4. Notons que de nombreuses séquences ne correspondent pas à un être vivant, et au sein de l'ADN, certaines parties sont considérées comme *non codantes*

fait  $4 + 3$ , on compte ce professeur deux fois<sup>5</sup>. La réponse est donnée par  $4 + 3 - 1$ , où 1 est le nombre de professeurs qui donnent cours à la fois en réseaux et en système.

On peut généraliser cette règle « addition / soustraction » de manière ensembliste comme suit.

**Théorème 5.2 ▶ Principe d'inclusion-exclusion**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles, on a

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

En particulier, on remarque que si  $S_1$  et  $S_2$  sont disjoints, on a  $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$ .

**Exemple 5.5.** Un étudiant peut choisir un projet en informatique parmi deux listes, qui contiennent respectivement 23 et 15 projets possibles. Aucun projet n'est présent sur plus d'une liste. Combien de projets l'étudiant peut-il choisir ?

◀

*Solution.* L'étudiant peut choisir un projet soit en le sélectionnant dans la première liste, soit dans la deuxième. Comme un projet n'est présent que dans une seule liste, le principe d'inclusion-exclusion affirme qu'il y a  $23 + 15$  choix de projets disponibles. ◀

**Exemple 5.6.** Chaque utilisateur d'un système possède un mot de passe, qui comporte de 6 à 8 caractères, où chaque caractère est soit une lettre majuscule, soit un chiffre. De plus, chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de mots de passe possible existe-t-il ?

◀

*Solution.* Soit  $P$  le nombre total de mots de passe possible. Ces mots de passe sont soit de longueur 6, soit de longueur 7, soit de longueur 8. Notons respectivement  $P_6$ ,  $P_7$  et  $P_8$  le nombre de mots de passe de chacune de ces longueurs. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que  $P = P_6 + P_7 + P_8$ . Cherchons à présent les valeurs de  $P_6$ ,  $P_7$  et  $P_8$ .

---

5. Remarquez que cette erreur : « compter deux fois plusieurs choses identiques » est très commune en combinatoire, il faut donc redoubler de vigilance dans la résolution de ces problèmes. Souvenez-vous que la section 5.1 détaille une manière de limiter ce risque, à savoir procéder par une étape de modélisation du problème à résoudre.

Trouver l'une de ces valeurs directement est difficile. Pour cette raison, pour calculer  $P_6$ , comptons le nombre de chaînes de caractères de longueur 6 contenant des chiffres et des lettres majuscules (incluant celles ne contenant pas de chiffres), et soustrayons de cette quantité le nombre de chaînes de caractères ne contenant pas de chiffres. Par la règle du produit, le nombre de chaînes de longueur 6 est  $36^6$  (car il y a 26 lettres et 10 chiffres), et le nombre de chaînes de caractères sans chiffres est  $26^6$ . Dès lors, on a

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

On calcule les valeurs de  $P_7$  et  $P_8$  de manière similaire, et on obtient donc

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

et

$$\begin{aligned} P_8 &= 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 \\ &= 2\,612\,282\,842\,880. \end{aligned}$$

Dès lors, on en conclut que  $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360$ . ◀

**Exemple 5.7.** Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 ? ◀

*Solution.* Notons  $\mathcal{I}$  l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 100 qui sont divisibles par 4 ou par 6. On remarque que le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 est égal à  $100 - |\mathcal{I}|$ .

Notons  $\mathcal{I}_4$  l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 4, et  $\mathcal{I}_6$  l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 6. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que

$$|\mathcal{I}| = |\mathcal{I}_4| + |\mathcal{I}_6| - |\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6|.$$

On remarque qu'il y a exactement  $100 \div 4 = 25$  nombres entiers inférieurs à 100 divisibles par 4, et  $100 \div 6 = 16$  nombres entiers divisibles par 6. Ces nombres caractérisent les cardinalités de respectivement  $\mathcal{I}_4$  et  $\mathcal{I}_6$ .

On remarque que  $\mathcal{I}_4$  et  $\mathcal{I}_6$  ne sont pas disjoints : les nombres entiers qui sont à la fois dans  $\mathcal{I}_4$  et dans  $\mathcal{I}_6$  sont des entiers à la fois divisibles par 4 et

par 6, c'est à dire des entiers divisibles par  $PPCM(4, 6) = 12$ . Dès lors, on a  $|\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6| = 100 \div 12 = 8$ .

Dès lors, on sait que  $|\mathcal{I}| = 25 + 16 - 8 = 33$ . Dans la question originale, on demande les entiers qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6, c'est-à-dire les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont pas dans  $|\mathcal{I}|$ . On a  $100 - 33 = 67$  tels entiers. ◀

**Exemple 5.8.** Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 » ? ◀

*Solution.* On peut construire une chaîne de caractères qui commence par « 1 » ou finit par « 00 » en construisant une chaîne de caractères qui commence par « 1 » ou en construisant une chaîne de caractères qui finit par « 00 ».

Par la règle du produit, on sait qu'il y a  $2^7 = 128$  chaînes de caractères qui commencent par « 1 », car on fixe le premier bit de la chaîne et les 7 autres peuvent être choisis indépendamment parmi les choix « 0 » et « 1 ». De la même manière et toujours par la règle du produit, on a  $2^6 = 64$  chaînes de caractères qui finissent par « 00 ».

Notons que certaines chaînes commençant par « 1 » finissent par « 00 ». Par la règle du produit, il y a exactement  $2^5 = 32$  telles chaînes, car on fixe le premier bit ainsi que les deux derniers, laissant les 5 autres être choisis indépendamment. Ces trois constructions sont illustrées à la figure 5.6.

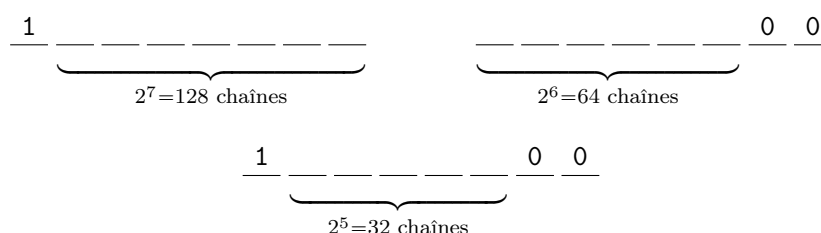


FIGURE 5.6 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commençant par « 1 » ou finissant par « 00 »

Dès lors, par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement  $128 + 64 - 32 = 160$  chaînes de caractères binaires de longueur 8 commençant par « 1 » ou finissant

par « 00 ». ◀

### 5.2.3 La règle de la division

Enfin, la dernière règle « arithmétique » que l'on peut utiliser en combinatoire est la *règle de la division*. Celle-ci est utile lorsqu'une tâche peut être réalisée de diverses  $n$  façons, mais dont certaines façons sont équivalentes.

**Exemple 5.9.** Combien de façons y a-t-il d'asseoir quatre personnes autour d'une table circulaire, où deux configurations sont considérées équivalentes quand chaque personne a le même voisin de droite et le même voisin de gauche ? ▶

*Solution.* Comptons préalablement toutes les façons possibles d'asseoir dans l'ordre ces quatre personnes. Pour cela, on choisit au hasard un siège autour de la table qu'on étiquette par « 1 ». On numérote les autres sièges dans l'ordre, sans perdre de généralité dans le sens horloger.

On sélectionne arbitrairement la première personne et on l'assoit sur le siège « 1 ». Il y a quatre façons de sélectionner cette personne. On sélectionne ensuite la deuxième personne, il reste trois choix possibles, on l'assoit sur le siège « 2 ». De la même manière, il reste deux façons de sélectionner la troisième personne à asseoir sur le siège « 3 », et un unique choix pour la dernière personne qui s'assoit sur le siège « 4 ».

Par la règle du produit, il y a  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  façons d'ordonner les quatre personnes autour de la table. Néanmoins, chacun des quatre choix possible du siège numéroté « 1 » conduit à une même configuration, car on considère deux configurations comme différentes si l'une des personnes a un voisin direct à droite ou à gauche différent.

Comme il y a quatre choix d'étiquettes pour le siège « 1 », on a  $\frac{24}{4} = 6$  différentes configurations possibles d'asseoir les quatre personnes autour de la table. Ces configurations sont illustrées à la figure 5.7. ▶

D'un point de vue ensembliste, cette technique correspond à compter le nombre d'ensembles dans d'une union d'ensembles disjoints. Ainsi, on peut gé-



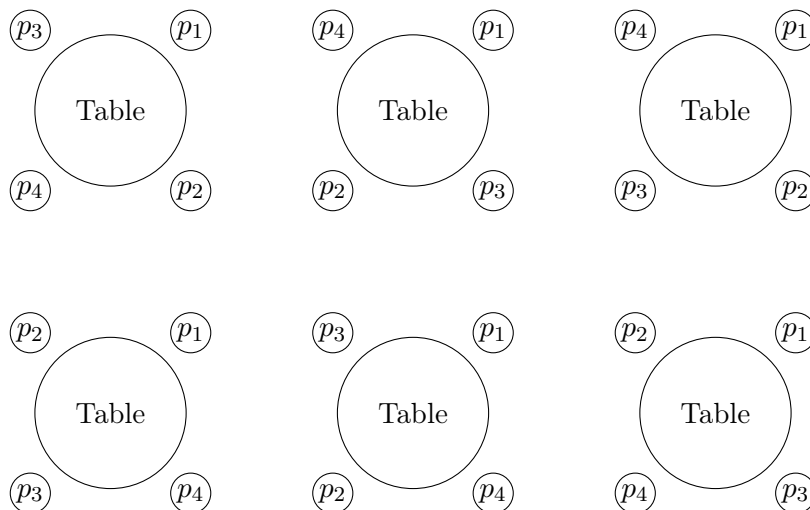


FIGURE 5.7 – Six différentes façons d’asseoir quatre personnes autour d’une table

généraliser cette technique de comptage de manière ensembliste comme suit : si un ensemble  $S$  est l’union de  $n$  ensembles disjoints de taille  $d$ , alors  $n = \frac{|S|}{d}$ .

Cette situation est illustrée à la figure 5.8, avec  $|S| = 12$  et  $d = 3$ . On remarque que  $S$  est bien constitué de  $\frac{|S|}{3} = 4$  ensembles disjoints.

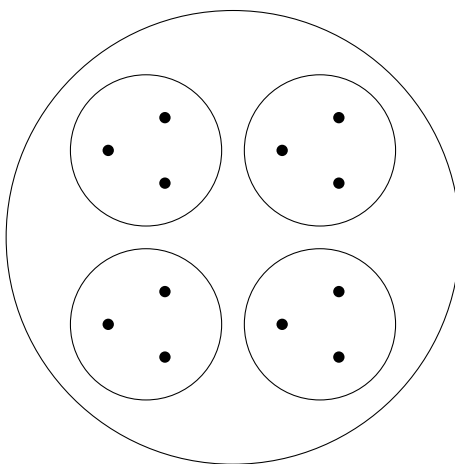


FIGURE 5.8 – Illustration de la règle de la division

Similairement aux cas précédents, on peut généraliser ce principe en termes de tâches, de la manière suivante.

**Théorème 5.3 ▶ Règle de la division**

*Si une tâche peut être effectuée de  $n$  façons, mais pour chaque façon  $w$ , exactement  $d$  de ces  $n$  façons sont équivalentes à  $w$ , alors il y a  $\frac{n}{d}$  façons de réaliser la tâche originale.*

Intuitivement, on procède à un comptage avec cette règle de la manière suivante : on compte l'intégralité des façons par lesquelles une tâche peut être effectuée, et on divise ce nombre par le nombre de façons équivalentes à tous les cas comptés. Ceci permet d'éviter de compter deux fois deux façons équivalentes de réaliser la tâche originale.

#### 5.2.4 Le principe des tiroirs

Comme on l'a vu dans le chapitre dédié aux ensembles, comparer les cardinalités d'ensembles peut s'avérer difficile. En effet, il y est affirmé que si deux ensembles sont finis, comparer leur taille est aisé car une simple énumération de leurs éléments suffit à montrer lequel d'entre eux possède le plus grand cardinal.

Néanmoins, une telle technique ne peut être utilisée dans le cadre d'ensembles infinis. Premièrement, une énumération exhaustive des éléments n'est en toute généralité pas possible. Deuxièmement, même si une énumération est possible, il n'est pas trivial de montrer que deux infinis ont le même ordre de grandeur.

On présente ici une technique, permettant de résoudre ce problème, illustrée par l'exemple suivant.

Supposez que l'on veuille ranger 13 chaussettes dans 12 tiroirs. Comme il n'y a que 12 tiroirs pour 13 chaussettes, il doit y avoir un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. En effet, si chaque tiroir contient au moins une chaussette, au moins 12 chaussettes (une par tiroir) peuvent être rangées. Ce principe est appelé le *principe des tiroirs* de Dirichlet<sup>6</sup>.

---

6. En anglais, ce principe est souvent appelé le « principe des trous de pigeon » ou *pigeonhole principle*, où  $n$  pigeons veulent nicher dans  $m$  nichoirs.

**Théorème 5.4 ▶ Principe des tiroirs**

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $m > n$ , si  $m$  objets sont placés dans  $n$  boîtes, alors au moins une boîte contient deux objets.

Ce principe est illustré sur base de l'exemple précédent à la figure 5.9.

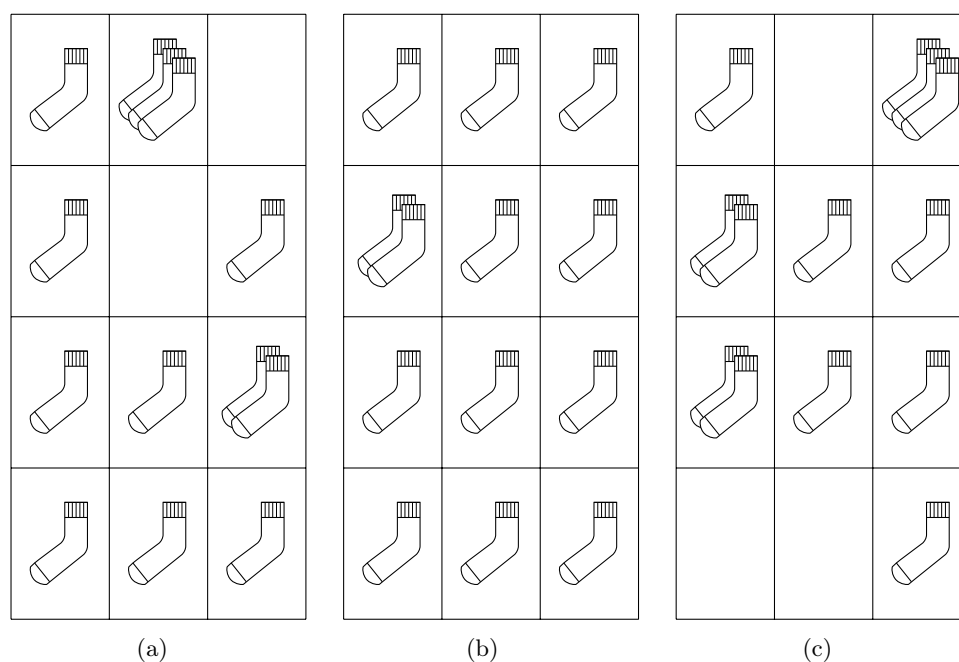


FIGURE 5.9 – Au moins une boîte contient deux chaussettes

**Exemple 5.10.** Combien de personnes doit-on placer dans une pièce afin qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire ? ◀

*Solution.* Dans la mesure où il y a 366 dates d'anniversaire possibles (incluant le 29 février), par le principe des tiroirs, la pièce doit contenir au moins 367 personnes afin que deux d'entre elles aient le même anniversaire. ◀

**Exemple 5.11.** Combien de cartes doivent être piochées dans un jeu de 52 cartes afin que trois cartes de la même couleur soient sélectionnées ? ◀

*Solution.* On dispose de quatre boîtes différentes, une pour chaque couleur, et chaque fois qu'une carte est piochée, on la place dans la boîte correspondant à sa couleur. Ainsi, par le principe des tiroirs, si  $n$  cartes sont sélectionnées, au moins une des boîtes contient  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  cartes, où  $\lceil x \rceil$  dénote le plus entier supérieur à  $x$ .

Dès lors, on sait que 3 cartes de la même couleur sont sélectionnées si  $\lceil \frac{n}{4} \rceil \geq 3$ . Le plus petit entier tel que  $\lceil \frac{n}{4} \rceil \geq 3$  est  $2 \cdot 4 + 1 = 9$ . Ainsi, piocher 9 cartes suffit pour en piocher trois de la même couleur.

Remarquons que si l'on pioche 8 cartes, on pourrait malencontreusement en piocher 2 de chaque couleur, ainsi au moins 9 cartes doivent être piochées. Ce cas arrive si on pioche par exemple les quatre as (aucune carte n'a la même couleur), puis les quatre rois (chaque couleur est représentée par deux cartes). La carte suivante que l'on piochera sera forcément d'une couleur déjà présente. ◀

Les deux corollaires suivants sur les bijections sont en particulier très utiles dans le cadre des cardinalités d'ensemble, comme mentionné plus haut.

#### Corollaire 5.5

*Une application  $f$  d'un ensemble de taille  $n + 1$  vers un ensemble de taille  $n$  ne peut pas être une bijection.*

En effet, par le principe des tiroirs, au moins deux éléments de l'ensemble de départ doivent être envoyés sur un même élément de l'ensemble d'arrivée. Ceci empêche  $f$  d'être injective, et donc d'être une bijection.

De plus, on remarque que la réciproque de ce corollaire est également vraie, ce qui peut être démontré avec des arguments similaires à ceux du paragraphe précédent.

**Exemple 5.12.** Sur la figure 5.10, les trois applications de  $S_1$  vers  $S_2$  ne sont pas des bijections. En effet, on remarque que  $S_1 = 4$  et  $S_2 = 3$ . De la même manière, les inverses de ces trois fonctions ne peuvent également pas être des bijections. ◀

Néanmoins, toute la puissance du principe des tiroirs et de l'application des bijections ne réside pas dans les ensembles finis, mais bien dans les ensembles infinis. En effet, l'existence ou l'absence d'une bijection entre deux ensembles, finis

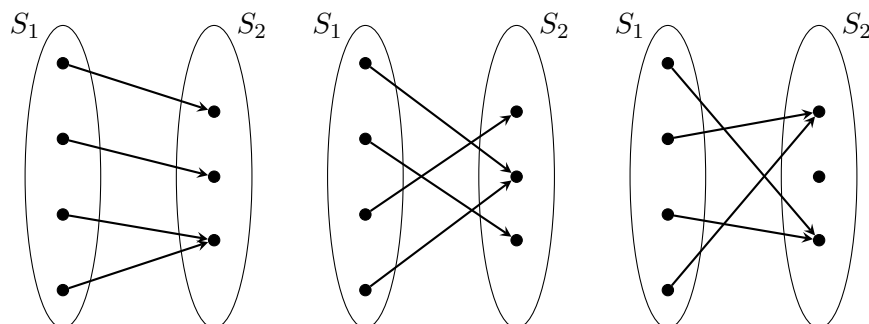


FIGURE 5.10 – Trois fonctions qui ne peuvent être des bijections

ou non, permet de comparer leurs cardinalités. Ceci est exprimé par le corollaire suivant.

**Corollaire 5.6**

*Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont la même cardinalité.*

Avec ce corollaire, on peut prouver certains résultats *a priori* contre-intuitifs relatifs aux ensembles de taille infinis.

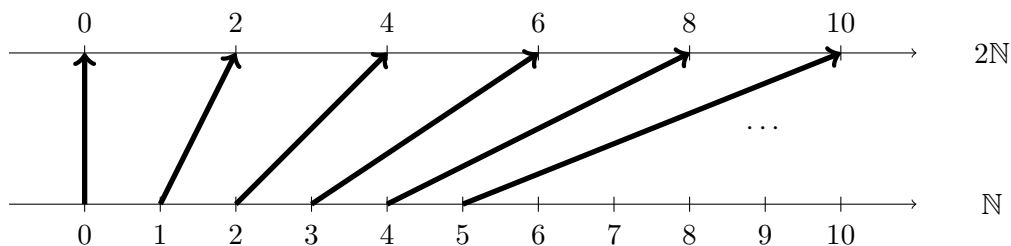
**Exemple 5.13.** Montrons qu'il existe autant de nombres naturels pairs que de nombres naturels. L'intuition voudrait qu'il y en ait deux fois moins.

On va construire  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  de la façon suivante (avec  $2\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres pairs) :

- on associe 0 à 0 ;
- on associe le premier nombre naturel (1) au premier nombre naturel (2). Ainsi,  $f(1) = 2$  ;
- on associe le deuxième nombre naturel (2) au deuxième nombre naturel (4). Ainsi,  $f(2) = 4$  ;
- on procède de manière similaire pour les autres naturels.

On a donc construit l'application  $f(n) = 2n$ , illustrée sur la figure 5.11.

On remarque que cette application est une bijection. Elle est en effet injective (tous les éléments de  $2\mathbb{N}$  sont l'image de maximum un élément de  $\mathbb{N}$ ) et surjective (tous les éléments de  $2\mathbb{N}$  sont l'image d'au moins un élément de  $\mathbb{N}$ ). Donc, on a  $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ . On a associé chaque nombre entier à un nombre pair, et inversement.

FIGURE 5.11 – Bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $2\mathbb{N}$ 

Avec des arguments similaires, on peut montrer que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$ , que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ , que  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ , que  $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ , etc. Notez qu'il est possible de montrer que  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ .

### 5.3 Deux grandes questions

Parfois, les diagrammes en arbre et les règles vues à la section ne suffisent pas pour résoudre un problème de combinatoire, dans la mesure où il n'est pas toujours possible d'encoder toutes les contraintes d'un problème au sein du codage d'une configuration à compter.

En effet, une fois un problème de comptage modélisé, afin d'appliquer un raisonnement correct, il est souvent nécessaire de répondre à deux questions fondamentales, posées sur cette modélisation même.

#### Questions

1. L'ordre des composantes au sein de la modélisation a-t-il de l'importance ?
2. Des répétitions des composantes au sein de la modélisation sont-elles autorisées ?

On peut répondre à chacune de ces questions positivement ou négativement, ce qui laisse 4 choix de raisonnement possibles dans tous les cas de figure.

Dans le cas du problème 5.1 comptant les codes de vélo, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage a de l'importance. En effet, le vecteur  $(2, 3, 4, 5)$  décrit le code « 2345 », qui est différent du code décrit par le vecteur  $(3, 2, 4, 5)$ , correspondant au code « 3245 ». Permuter les deux premières composantes du vecteur change le code.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage sont autorisées. En effet, le vecteur  $(2, 3, 4, 3)$  décrit le code « 2343 » qui est tout à fait légal. Les deuxième et quatrième composantes sont répétées, et ce code peut exister pour un vélo.

Dans le cas du problème 5.2 comptant les mains de bridge, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage n'a pas d'importance. En effet, le vecteur  $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$  décrit la main illustrée à la figure 5.12(a), qui est la même main que celle décrite par le vecteur  $(3\diamondsuit, 10\clubsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$ , illustrée à la figure 5.12(b). Ces deux mains sont les mêmes pour les joueurs, qui d'ailleurs trient habituellement les cartes dans leur main.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage ne sont pas autorisées. En effet, le vecteur  $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 10\clubsuit)$  décrit une main qui n'est pas légale, illustrée à la figure 5.13. Il n'y a en effet qu'un exemplaire de chaque carte au sein du paquet, on ne peut donc pas avoir deux 10 de trèfle.

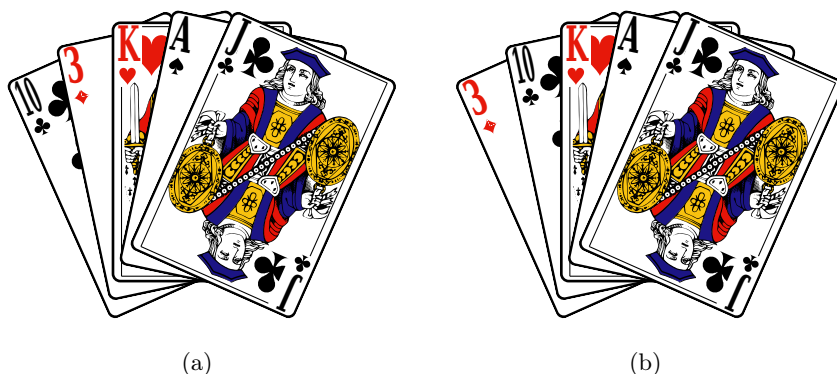


FIGURE 5.12 – Deux mains identiques

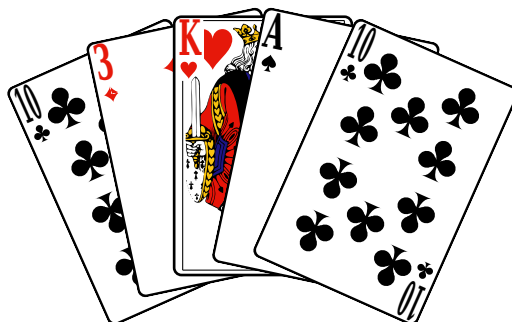


FIGURE 5.13 – Une main illégale

Ces deux questions seront omniprésentes dans la suite de ce chapitre, et on axera tous les raisonnements présentés en fonction des réponses à ses questions.

Notez également que bien que la modélisation des problèmes puisse parfois sembler rébarbative (comme dans le cas ci-dessus), sans elle on ne pourrait pas formellement justifier les réponses à ces deux questions.

Notez toutefois que les formules vues dans les chapitres ne peuvent pas être utilisées en toute généralité en répondant aux deux questions posées ci-dessus. On sera très souvent confronté à des cas particuliers, et il faudra alors adapter les calculs en fonctions de la situation.

Les techniques et raisonnements vus dans les sections suivantes peuvent toutefois être adaptés, en fonction des particularités des problèmes rencontrés.

## 5.4 Arrangements et permutations

Les arrangements sont le type de structure sur laquelle on appuie un raisonnement dans le cas où l'ordre des composantes au sein d'un codage importe, où l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments importe. On les rencontre par exemple dans la structure des codes de cadenas, les lettres d'un mot de passe, les caractères d'une plaque de voiture, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments a de l'importance.



Plus formellement, on les définit comme suit.

**Définition 5.7**

*Soit  $S$  un ensemble, un arrangement de  $k$  éléments de  $S$  est une séquence ordonnée de  $k$  éléments de  $S$ .*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre d'arrangements possibles de  $k$  éléments pris parmi les  $n$  éléments d'un ensemble. Dès lors, comme annoncé, on est amené à distinguer deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

**5.4.1 Arrangements sans répétitions**

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle d'arrangements sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

**Définition 5.8**

*Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, un arrangement sans répétitions de  $k$  éléments de  $E$  est une séquence ordonnée de  $k$  éléments distincts de  $E$ .*

Parfois, on qualifie ces arrangements d'arrangements *simples*, d'arrangements de  $k$  objets pris parmi  $n$ , ou d'arrangements de  $n$  objets pris  $k$  à  $k$ .

**Exemple 5.14.** Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6 :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, d) \quad (a, b, c, e) \quad (b, d, c, e) \quad (e, a, f, d).$$

Comme mentionné dans l'introduction, ce chapitre se concentre sur le comptage de structures, en l'occurrence au sein de cette section le comptage d'arrangements sans répétitions.

Comptons donc à présent *tous* les arrangements de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4 différents. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme dans certaines loteries.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités :  $a, b, c, d, e$  ou  $f$ . Pour le second objet, nous n'avons plus que 5 possibilités car une possibilité a déjà été prise pour le premier objet. Pour le troisième objet, nous avons 4 possibilités. Et enfin, pour le quatrième objet, il reste 3 possibilités. Ceci donne donc par la règle du produit  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  arrangements sans répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 5.14 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre.

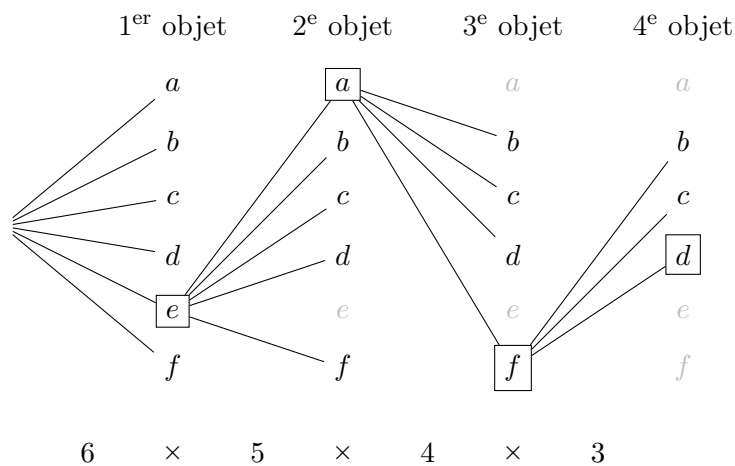


FIGURE 5.14 – Construction du nombre d'arrangements sans répétitions

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements sans répétitions* d'éléments.

**Définition 5.9**

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, le nombre d'arrangements sans répétitions de  $k$  éléments de  $S$  pris parmi  $n$  éléments de  $S$  est noté  $A_n^k$  et est défini comme

$$\begin{aligned} A_n^k &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

avec  $k \leq n$ .

La fonction  $n!$  est appelée la *factorielle* de  $n$  est est définie comme

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par récurrence, on peut également définir  $A_n^k$  comme

$$A_n^k = \begin{cases} n \cdot A_{n-1}^{k-1} & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

**Exemple 5.15.** Dix voitures sont au départ d'un rallye. Combien de podiums de trois pilotes est-il possible d'obtenir une fois la course finie, sachant que les *ex-æquo* sont départagés via les tours d'essai. ◀

*Solution.* Le fait que les *ex-æquo* soient départagés signifie que l'on n'a pas à se soucier du fait que deux pilotes pourraient finir la course en même temps et se retrouver à la même place du podium.

Ainsi, on remarque qu'on doit sélectionner, dans l'ordre, trois pilotes pour un podium. Sachant qu'il y a douze pilotes de voiture, on a donc

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

podiums possibles. ◀

### 5.4.2 Permutations

On remarque en particulier avec la définition 5.9 que  $A_n^n = n!$ . Ceci correspond, au vu de la notation, à ordonner  $n$  éléments sélectionnés par  $n$  éléments. Un tel ordonnancement s'appelle une *permutation*, définie formellement comme suit.

#### Définition 5.10

*Une permutation d'éléments d'un ensemble est une séquence ordonnée d'éléments distincts de cet ensemble.*

On remarque qu'une permutation est simplement un cas particulier d'arrangement de  $n$  objets pris parmi  $n$  objets.

**Exemple 5.16.** Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ , les trois n-uples suivants sont des exemples de permutations des éléments de  $E$  :

$$(a, b, c, d, e, f) \quad (a, c, b, d, e, f) \quad (a, b, c, e, d, f).$$



Comme les permutations sont un cas particulier d'arrangement, on peut caractériser leur nombre de la façon suivante.

#### Définition 5.11

*Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, le nombre de permutations des  $n$  éléments de  $S$  est noté  $P_n$  et est défini comme*

$$P_n = n!,$$

*ou encore par récurrence comme*

$$P_n = \begin{cases} n \cdot P_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 5.17.** Il y a 8 coureurs au départ d'une course d'athlétisme. Combien de classements possibles des coureurs (sans *ex-æquo*) y a-t-il à l'issue de cette course ?



*Solution.* Le nombre de classements de coureurs possibles est le nombre de permutations de 8 éléments. On a donc  $8! = 40\,320$  tels classements possibles. ◀

### 5.4.3 Arrangement avec répétitions

Dans le cas où l'ordre dans lequel des éléments sont sélectionnés a de l'importance, mais où des répétitions peuvent apparaître, on parle d'*arrangements avec répétitions*. On les définit formellement comme suit.

#### Définition 5.12

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, un arrangement avec répétitions de  $k$  éléments de  $S$  est une séquence ordonnée de  $k$  éléments de  $S$ .

Remarquez que comparée à la définition 5.9 des arrangements sans répétition, on ne force pas ici les éléments à être distincts, ce qui permet d'avoir des répétitions au sein de la sélection.

**Exemple 5.18.** Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6, avec répétitions potentielles :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, a) \quad (a, b, b, e) \quad (b, e, e, e) \quad (a, a, a, a).$$

Comptons à présent *tous* les arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme par exemple lors de 4 lancers consécutifs de dés à 6 faces.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités :  $a, b, c, d, e$  ou  $f$ . Pour le second objet, on a toujours 6 choix possibles, car les répétitions sont autorisées. Pour les mêmes raisons, on a également 6 choix possibles pour chacun des tirages restants. Ceci donne donc par la règle du produit  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$  arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 5.15 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre. ◀

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements* d'éléments.

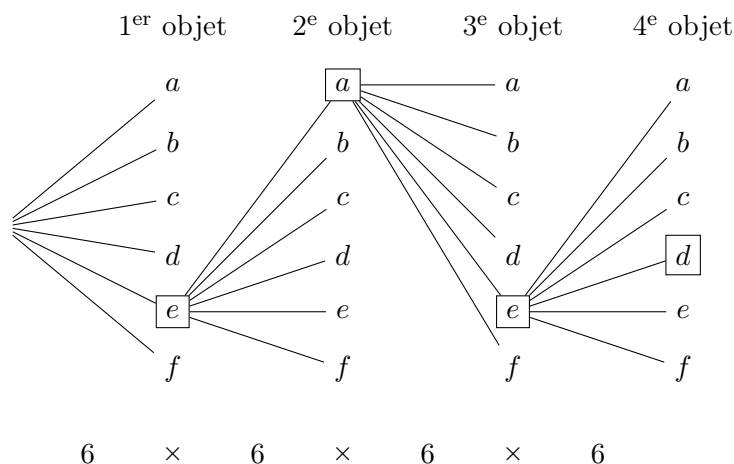


FIGURE 5.15 – Construction du nombre d'arrangements avec répétitions

**Définition 5.13**

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, le nombre d'arrangements avec répétitions de  $k$  éléments de  $S$  pris parmi  $n$  éléments de  $S$  est noté  $\alpha_n^k$  et est défini comme

$$\alpha_n^k = n^k.$$

Par récurrence, on les définit comme suit :

$$\alpha_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ n \alpha_n^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut à présent résoudre le problème 5.1, demandant de calculer le nombre de codes de vélo à quatre chiffres décimaux.

*Solution du problème 5.1 (page 102).* Modélisons ce problème sous forme d'un vecteur  $c$  à quatre composantes, comme effectué en section 5.1.2. Compter le nombre de codes à quatre chiffres décimaux correspond à compter le nombre de vecteurs  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  tel que  $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  avec  $1 \leq i \leq 4$ . Ce nombre est égal au nombre d'arrangements avec répétitions de 4 éléments sélectionnés parmi 10, c'est à dire  $\alpha_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ .  $\square$

## 5.5 Combinaisons

On a à présent vu tous les cas de figure dans lesquels l'ordre de sélection des éléments pour un tirage importe, et on utilise les arrangements pour ces problèmes. Dans les autres cas, on utilise les *combinaisons*. Plus précisément, on les utilise quand l'ordre des composantes au sein d'un codage n'importe pas, quand l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments dans un tirage est sans importance.

On les rencontre par exemple dans la structure des mains de jeu de cartes, des positions assises autour d'une table ronde, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments n'a pas d'importance.

Plus formellement, on les définit comme suit.

**Définition 5.14**

*Soit  $S$  un ensemble, une combinaison de  $k$  éléments de  $S$  est une séquence non ordonnée de  $k$  éléments de  $S$ .*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre de combinaisons possibles de  $k$  éléments pris parmi les  $n$  éléments d'un ensemble. On procédera comme annoncé dans l'introduction et similairement à la section consacrée aux arrangements, c'est-à-dire en distinguant deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

### 5.5.1 Combinaisons sans répétition

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle de combinaisons sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

**Définition 5.15**

*Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, une combinaison sans répétitions de  $k$  éléments de  $S$  est une séquence non ordonnée de  $k$  éléments distincts de  $S$ .*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter toutes les combinaisons

de  $k$  objets pris parmi  $n$ . On basera le raisonnement permettant de trouver cette quantité sur le problème 5.2, tentant de déterminer le nombre de mains possibles de poker. Basons ce raisonnement sur la modélisation dégagée en section 5.1.

*Solution du problème 5.2 (page 102).* On doit sélectionner 5 cartes parmi les 52 disponibles. On remarque que l'ordre dans lequel ces cartes sont piochées est sans importance, car la main résultante est la même, comme illustré précédemment à la figure 5.12(b).

Procédons par étapes : supposons que l'ordre importe, il y a donc  $A_{52}^5$  telles pioches possibles. Toutefois, comme l'ordre importe bel et bien, on a compté certaines pioches plusieurs fois. En l'occurrence, pour chaque pioche  $p$  de 5 cartes, exactement  $5!$  pioches sont équivalentes à  $p$  : toutes les permutations de cartes au sein de la main sont équivalentes.

Par exemple, les mains des figures 5.12(a) et 5.12(b) sont équivalentes, on peut obtenir l'une en permutant certaines cartes de l'autre (le dix de trèfle et le trois de carreau).

Dès lors, avec la règle de la division, on a exactement

$$\frac{A_{52}^5}{P_5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = 2\,598\,960$$

mains différentes possibles. □

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle de la division, on peut caractériser le *nombre de combinaisons sans répétitions*.

#### Définition 5.16

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  éléments, le nombre de combinaisons sans répétitions de  $k$  éléments de  $S$  pris parmi  $n$  éléments de  $S$  est noté  $C_n^k$  et est défini comme

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

avec  $k \leq n$ . Par récurrence, on les définit comme suit :

$$C_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \vee k = n \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k & \text{sinon.} \end{cases}$$



Notez également que ce nombre de combinaison sans répétitions donne en fait le nombre de sous-ensembles de  $k$  éléments dans un ensemble de  $n$  éléments.

Par ailleurs, parfois, on nomme  $C_n^k$  le *coefficient binomial*, et on le note  $\binom{n}{k}$ .

**Exemple 5.19.** Combien de délégations différentes de 4 personnes sélectionnées parmi un groupe 50 peut-on constituer ? ◀

*Solution.* Encodons une délégation comme un vecteur  $d = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ , où  $v_i \in \{1, 2, \dots, 50\}$ .

On voit que les répétitions sont interdites dans ce codage, en effet, par exemple, la délégation  $(4, 3, 5, 4)$  sélectionnerait la personne numéro 4 deux fois. De plus, l'ordre ici n'importe pas. Par exemple, la délégation  $(2, 3, 4, 5)$  est la même que la délégation  $(3, 2, 4, 5)$ .

On calcule donc le nombre de délégations de 4 personnes sélectionnées parmi 50 comme le nombre de combinaisons sans répétitions  $C_{50}^4 = 230\,300$ . ◀

On remarque la propriété de symétrie suivante sur les combinaisons.

#### Propriété 5.17

Soient  $k, n \in \mathbb{N}$  avec  $k \leq n$ , on a

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

En effet, calculer le nombre de combinaisons possibles pour  $k$  objets choisis est équivalent à calculer le nombre de combinaisons pour  $n - k$  éléments non choisis.

### 5.5.2 Binôme de Newton et triangle de Pascal

On peut se servir de la définition par récurrence des combinaisons afin de construire le *triangle de Pascal*. Ce triangle illustre cette construction récursive, en construisant chaque étage sur base de somme d'éléments de l'étage inférieur.

La construction complète de ce triangle est illustrée à la figure 5.16 pour  $C_n^k$ , avec  $n$  et  $k$  allant de 0 à 10.

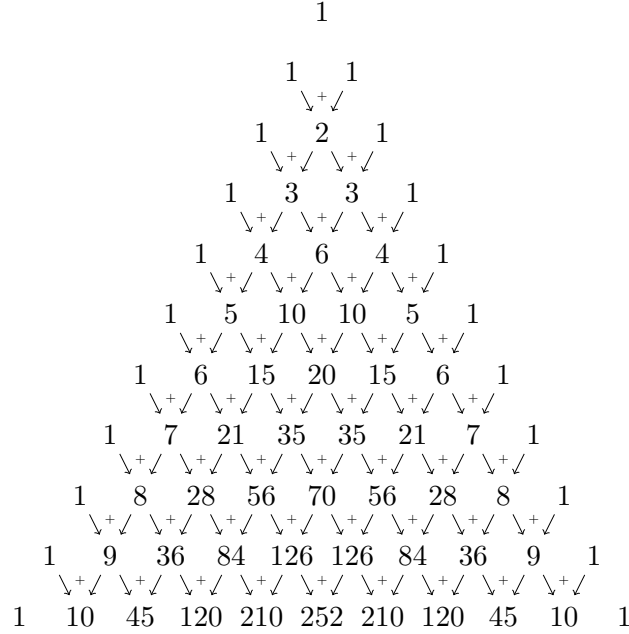


FIGURE 5.16 – Triangle de Pascal

Par ailleurs, le terme *coefficient binomial* vient en mathématiques de l'expression  $(a + b)^n$  appelée le *binôme de Newton*. Ils tirent leur nom du fait que leur valeur décrit exactement les coefficients du polynôme  $(a + b)^n$ , comme illustré par le théorème suivant.

**Théorème 5.18 ▶ Binôme de Newton**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}, \\
 &= b^n + nab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^3 a^3 b^{n-3} + \dots \\
 &\quad + C_n^{n-3} a^{n-3} b^3 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + na^{n-1} b + a^n
 \end{aligned}$$

Cette formule est particulièrement utile lorsqu'on doit calculer la puissance entière positive d'une somme de deux termes. Ainsi, avec  $n = 2$  et  $n = 3$ , on retrouve immédiatement les formules bien connues

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= b^2 + 2ab^{2-1} + a^2 \\ &= b^2 + 2ab + a^2, \\ (a + b)^3 &= b^3 + 3ab^{3-1} + 3a^{3-1}b + a^3 \\ &= b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3,\end{aligned}$$

en se référant aux 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> lignes du triangle de Pascal de la figure 5.16.

La table 5.1 résume tous les cas vus dans ce documents de sélections de  $k$  éléments choisis parmi  $n$  éléments, selon que l'ordre dans lequel ces éléments sont sélectionnés importe ou non, et s'il est permis de sélectionner plusieurs fois un même élément.

Type	Répétitions autorisées ?	Ordre im- porte ?	Formule
Arrangement	Non	Oui	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Combinaison	Non	Non	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Arrangement	Oui	Oui	$n^k$

TABLE 5.1 – Nombre d'arrangements et de combinaisons avec et sans répétitions

## 5.6 Exercices résolus

**Exercice 5.1.** Combien de chaînes de caractères binaires de longueur  $n$  contiennent exactement  $k$  « 1 » ?

*Solution.* Les positions des  $k$  « 1 » au sein de la chaîne de caractères correspondent à la sélection de  $k$  éléments sélectionnés parmi  $n$ . Modélisons ceci comme un vecteur

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_k),$$

où  $c_i = j$  signifie qu'on a un « 1 » au sein de la chaîne en position  $j$ , avec  $1 \leq j \leq n$ . Par exemple, sur des chaînes de longueur 5 et  $k = 3$ ,  $c = (1, 3, 4)$  correspond à la chaîne « 10110 ».

Au sein de ce codage, l'ordre n'importe pas. Par exemple, le vecteur  $(1, 3, \dots)$  représente la même situation que le vecteur  $(3, 1, \dots)$  et ces deux vecteurs dénotent qu'on a un « 1 » en positions 1 et 3.

Dès lors, on a  $C_n^k$  chaînes de caractères binaires de longueur  $n$  comprenant exactement  $k$  « 1 ». ◀

**Exercice 5.2.** Considérez un échiquier standard de taille  $8 \times 8$ , comme illustré à la figure 5.17. De combien de façons peut-on y placer 8 pions identiques en n'en mettant qu'un seul par case et :

1. en les mettant n'importe où ?
2. en les mettant sur les cases du bord de l'échiquier ?
3. de telle sorte qu'ils soient tous alignés, que ce soit horizontalement, verticalement ou en oblique ?
4. de telle sorte qu'il n'y en ait jamais 2 sur une même rangée ni sur une même colonne ?

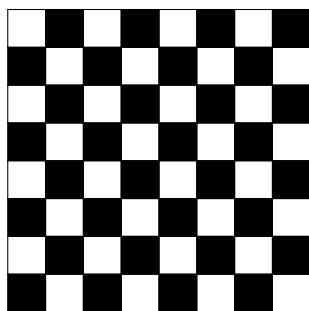


FIGURE 5.17 – Un plateau d'échecs

*Solution.* On procède de la manière suivante.

1. Modélisons un placement  $p$  de huit pions sous la forme d'un vecteur à huit composantes de la forme suivante :

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_8),$$

avec  $p_i \in \{1, 2, \dots, 64\}$ , où  $p_i = k$  signifie que le pion  $i$  est placé à la case numéro  $k$  (avec  $1 \leq i \leq 8$  et  $1 \leq k \leq 64$ ).

Au sein de ce codage, on remarque que l'ordre n'importe pas, en effet, par exemple,  $(12, 34, \dots)$  et  $(34, 12, \dots)$  décrivent tous deux le fait qu'il y ait un pion à la case numéro 12 et un autre à la case 34. Par ailleurs, les répétitions sont interdites. En effet, par exemple,  $(17, 17, \dots)$  signifierait qu'il y a deux pions à la case 17, ce qui est interdit.

Dès lors, répondre à la question revient à calculer le nombre de combinaisons sans répétitions de 8 éléments pris parmi 64, c'est à dire  $C_{64}^8$ . Remarquez qu'on aurait pu, au premier abord, modéliser un placement de pions comme un vecteur à 64 composantes binaires, où un « 1 » marquerait le fait qu'une case soit occupée. Cette modélisation est néanmoins hasardeuse, comme l'illustre l'Erreur A.5.

2. Dans le cas où on ne peut placer les pions que sur le bord de l'échiquier, en utilisant une modélisation et un raisonnement similaire à ci-dessus, on a donc  $C_{28}^8$  tels placements possibles, car il y a 28 cases sur le bord de l'échiquier.
3. Dans le cas où on force tous les pions à être alignés, on peut se contenter simplement d'énumérer toutes les possibilités de tels placements. Il y a 8 tels alignements horizontaux, 8 tels alignements verticaux et 2 en oblique. Par le principe d'inclusion-exclusion, on a donc  $8 + 8 + 2 = 18$  tels alignements.
4. Dans le cas où un pion ne peut se trouver sur la même ligne ou la même colonne qu'un autre pion, on ne peut pas utiliser la modélisation du premier pion, à cause de cette contrainte additionnelle. Dès lors, modélisons un placement sous la forme d'un vecteur  $p$  à huit composantes défini comme

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_8),$$

où  $p_i \in 1, \dots, 8$ , où  $p_i = k$  signifie qu'il y a un pion à la ligne  $i$  et la colonne  $k$ .

Notez que cette modélisation empêche immédiatement que deux pions soient placés sur la même ligne.

De plus, l'ordre dans lequel est spécifié les composantes importe :  $(3, 4, \dots)$  signifie qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 3, ainsi qu'un pion à la ligne 2 et la colonne 4, alors que  $(4, 3, \dots)$  signifie qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 4, ainsi qu'un pion à la ligne 2 et la colonne 3. Ces placements ne sont clairement pas identiques.

Par ailleurs, les répétitions sont interdites au sein de ce codage :  $(3, 3, \dots)$  signifierait qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 3, ainsi qu'un pion

à la ligne 2 et à la colonne 3, ce qui est interdit par contrainte (deux pions sur la même colonne).

Ainsi, répondre à la question consiste à compter le nombre d'arrangements sans répétitions de 8 éléments sélectionnés parmi 8, c'est-à-dire au nombre de permutations de 8 éléments. Il y a exactement  $8!$  telles permutations.



**Exercice 5.3.** Durant un mois de 30 jours, une équipe de basket joue au moins un match par jour, mais pas plus de 45 matchs. Montrez qu'il doit y avoir une période de jours consécutifs pendant laquelle l'équipe doit jouer exactement 14 matchs.

*Solution.* Soit  $a_j$  le nombre de matchs joués avant le  $j^{\text{e}}$  jour (ce jour inclus) du mois. On remarque que  $a_1 < a_2 < \dots < a_{30}$ , avec  $1 \leq a_j \leq 45$  et que tous ces entiers positifs sont distincts. En conséquence,  $a_1 + 14 < a_2 + 14 < \dots < a_{30} + 14$ , avec  $15 \leq a_j \leq 59$ , et tous ces entiers sont également distincts.

Dès lors, les 60 entiers  $a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \dots, a_{30} + 14$  sont tous inférieurs ou égaux à 59. Donc, par le principe des tiroirs, au moins deux de ces entiers sont égaux. Comme les entiers  $a_1, a_2, \dots, a_{30}$  sont distincts et que les entiers  $a_1 + 14, a_2 + 14, \dots, a_{30} + 14$  sont distincts, il doit exister deux indices  $i$  et  $j$  tels que  $a_i = a_j + 14$ . Ceci implique qu'exactly 14 matchs ont été joués du jour  $j + 1$  au jour  $i$ .



**Exercice 5.4.** Supposez que les T-shirts « I ♥ ESI » sont disponibles en cinq tailles : S, M, L, XL et XXL. De plus, supposez que chaque taille est disponible en quatre couleurs : blanc, rouge, vert et noir, à l'exception de la taille XL qui n'est pas disponible en blanc, et XXL qui n'est ni disponible en blanc, ni en rouge. Combien de T-shirts un stand doit-il au moins contenir pour disposer d'au moins trois T-shirts en chaque taille et chaque couleur ?

*Solution.* Le diagramme en arbre de la figure 5.18 détaille toutes les tailles et couleurs possibles de T-shirts. Cet arbre possède 17 feuilles. Comme le stand doit posséder au moins trois T-shirt de chaque type, il faut donc qu'il ait au minimum  $17 \cdot 3 = 51$  T-shirts.



**Exercice 5.5.** Considérez le graphe en grille de la figure 5.19. Combien de plus courts chemins existe-il entre les deux sommets noirs, sachant que la largeur  $m$

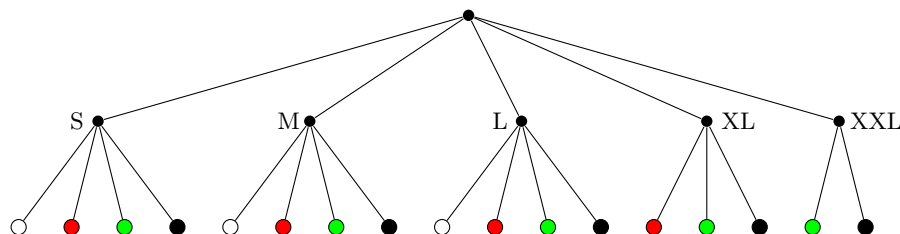


FIGURE 5.18 – T-shirts disponibles

et la hauteur  $n$  de la grille sont arbitraires ? Sur cette figure, on remarque que  $m = 4$  et  $n = 6$ .

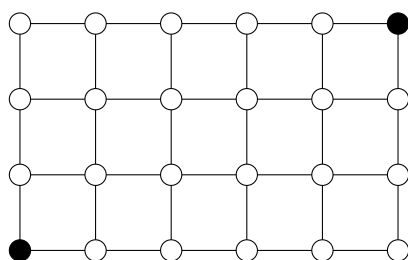


FIGURE 5.19 – Un graphe en grille

*Solution.* Modélisons un plus court chemin entre deux sommets noirs comme un vecteur binaire

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+m-2}),$$

où 0 représente un « mouvement vers la droite » et 1 un « mouvement vers le haut ». Ainsi, le chemin en gras de la figure 5.20 est représenté comme  $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Ce codage a la propriété suivante : si un vecteur  $v$  représente un chemin reliant deux sommets noirs, alors ce chemin est un plus court chemin.

On remarque sur cette modélisation que, dans le cas général, on est obligé de sélectionner  $m - 1$  mouvements vers la droite, et en conséquence  $n - 1$  mouvements vers le haut. Les positions de ces  $n - 1$  mouvements vers le haut sont une combinaison de  $n - 1$  éléments sélectionnés parmi  $n + m - 2$ . Notez que ceci correspond également au nombre de chaînes de caractères binaires de longueur 8

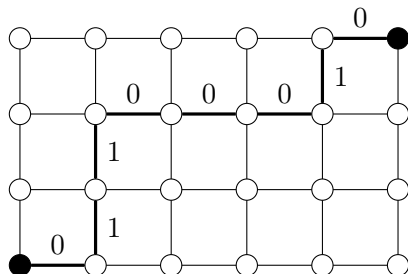


FIGURE 5.20 – Un graphe en grille

contenant exactement 3 « 1 »<sup>7</sup>.

Dès lors, on a exactement  $C_{m+n-2}^{n-1}$  chemins joignant deux sommets noirs. En particulier, on remarque aisément que si la grille est de taille  $2 \times 2$ , on n'a que  $2 = C_2^1$  chemins possibles. ◀

**Exercice 5.6.** Donnez le coefficient en  $x^{12}y^{13}$  dans le développement de l'expression

1.  $(x + y)^{25}$ ,
2.  $(2x - 3y)^{25}$ .

*Solution.* Dans le premier cas, grâce au théorème 5.18 relatif au binôme de Newton, on sait que ce coefficient est égal à

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13! 12!} = 5\,200\,300.$$

Dans le second cas, on remarque que  $(2x - 3y)^{25} = (2x + (-3y))^{25}$ . Encore une fois grâce au théorème 5.18, on sait que

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{i=0}^{25} \binom{25}{i} (2x)^{25-i} (-3y)^i.$$

---

7. Sous cette forme, on peut modéliser un positionnement de 3 « 1 » comme un vecteur à trois composantes variant de 1 à 8, chaque composante dénotant la place d'un « 1 ».



Dès lors, le coefficient en  $x^{12}y^{13}$  est obtenu quand  $i = 13$  (comme précédemment), et vaut donc

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13! 12!} 2^{12} (-3)^{13}.$$



**Exercice 5.7.** Supposez qu'au sein d'un conseil étudiant, il y ait 9 étudiants inscrits en section « gestion », 11 en section « réseau » et 13 en section « industrielle ». Combien de façons y a-t-il de constituer un comité pour défendre les intérêts des étudiants aux autorités si ce comité doit être constitué à partir des membres du conseil et doit comprendre 3 étudiants en gestion, 4 en réseau et 5 en industrielle ?

*Solution.* On remarque qu'au sein du comité, l'ordre des membres n'importe pas (seule la composition importe), et que les répétitions sont interdites vu qu'on ne peut sélectionner un étudiant qu'une seule fois. De plus, on peut décomposer la tâche de composition du comité en la sélection indépendante de ses membres en gestion, réseau et industrielle. On peut en effet d'abord sélectionner les trois étudiants de gestion, puis, sans se préoccuper de ces étudiants, sélectionner les étudiants de réseau, et enfin ceux d'industrielle.

Dès lors, par la règle du produit et la définition du nombre de combinaisons, on a exactement

$$C_9^3 \cdot C_{11}^4 \cdot C_{13}^5 = \frac{9!}{3! 6!} \cdot \frac{11!}{4! 7!} \cdot \frac{13!}{5! 8!}$$

façons de composer le comité.



**Exercice 5.8.** Combien de permutations des lettres « ABCDEFGH » contiennent la chaîne « ABC » ?

*Solution.* Comme les lettres « ABC » doivent apparaître sous la forme d'un bloc, il suffit pour répondre à la question de trouver le nombre de permutations de 6 objets, en l'occurrence, la chaîne « ABC », ainsi que les cinq lettres « D », « E », « F », « G » et « H ».

On en conclut qu'il y a donc  $6! = 720$  permutations des lettres « ABCDEFGH » qui contiennent la chaîne « ABC ».



**Exercice 5.9.** Combien de podiums de trois concurrents (*ex-æquo* exclus) peut-il y avoir dans une compétition de 100 sportifs ?

*Solution.* On remarque que les concurrents sur le podium sont tous distincts, et que l'ordre sur le podium importe. Dès lors, il y a  $A_{100}^3 = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$  podiums possibles. ◀

**Exercice 5.10.** Un marchand doit visiter huit villes différentes, toutes reliées deux à deux par une route. Il commence sa visite dans une ville déterminée, et peut ensuite visiter les autres dans n'importe quel ordre. Combien de façons le marchand possède-t-il de visiter les huit villes ?

*Solution.* Le nombre de chemins possibles pour le marchand est le nombre de permutations de 7 éléments, car la première ville est fixée, et les 7 autres peuvent être parcourues dans un ordre arbitraire.

Dès lors, il y a  $7! = 5040$  façons pour le marchand d'effectuer sa tournée. ◀

**Exercice 5.11.** Combien de séquences de 5 éléments d'ADN<sup>8</sup>

- finissent par A ?
- commencent par T et finissent par G ?
- ne contiennent que des A et des T ?
- ne contiennent pas C ?

*Solution.* L'ADN étant une séquence ordonnée d'éléments sélectionnés parmi 4 types possibles pouvant se répéter, il est clair que, dans chaque cas, il faut utiliser le nombre d'arrangements avec répétitions de 5 éléments.

- Imposer que la chaîne finisse par A revient à fixer un élément, et donc à ne considérer que des séquences de longueur 4 pour le comptage. Dès lors, on a  $\alpha_4^4 = 4^4 = 256$  différentes séquences de ce type.
- Similairement, fixer la première et la dernière lettre revient à compter les arrangements avec répétitions de 3 éléments pris parmi 4. On a donc  $\alpha_4^3 = 4^3 = 64$  différentes séquences de ce type.
- Dans le cas où les séquences ne contiennent que des A et des T, on réduit le comptage à celui d'un arrangement de 5 éléments pris parmi 2 (le A et le T). Dès lors, on a  $\alpha_2^5 = 2^5 = 32$  séquences de ce type.

---

8. Pour rappel, l'ADN est composé de quatre bases différentes notées A, C, T, G.

- Similairement, si les séquences ne peuvent pas contenir de C, on réduit le comptage à celui d'un arrangement de 5 éléments pris parmi 3 (le A, le T et le G). Dès lors, on a  $\alpha_3^5 = 3^5 = 243$  séquences de ce type. ◀

**Exercice 5.12.** Combien de mots peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot « Abracadabra » ?

*Solution.* On remarque que comme certaines lettres du mot « Abracadabra » se répètent, la réponse à la question n'est *pas* donnée par le nombre de permutations de 11 éléments. En effet, ce mot contient cinq « a », deux « b », deux « r », un « c » et un « d ».

Afin de déterminer le nombre de mots différents qui peuvent être formés en réordonnant les lettres, décomposons la construction de ce mot en y plaçant itérativement les lettres de même type. Ainsi, on remarque avant tout que les cinq « a » peuvent être placés sur n'importe lesquelles des onze positions de  $C_{11}^5$  façons différentes, laissant ainsi six positions libres. Ensuite, les deux « b » peuvent être placés de  $C_6^2$  façons différentes sur n'importe lesquelles de ces six positions, laissant au final quatre positions encore vides. En poursuivant ce résultat, on conclut que les deux « r » peuvent être placés de  $C_4^2$  façons différentes, le « c » de  $C_2^1$  façons différentes et finalement le « d » d'une unique façon possible.

En conséquence, par la règle du produit, le nombre de mots qui peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot « Abracadabra » est égal à

$$\begin{aligned} C_{11}^5 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 &= \frac{11!}{5!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} \\ &= \frac{11!}{5!2!2!} \\ &= 83\,160. \end{aligned}$$

Notez que si l'on change l'ordre dans lequel on place les lettres, cela ne change évidemment rien au résultat. Par exemple, si l'on place les « b » avant les « a », on a

$$\begin{aligned} C_{11}^2 \cdot C_9^5 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 &= \frac{11!}{2!9!} \cdot \frac{9!}{5!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} \\ &= \frac{11!}{5!2!2!} \\ &= 83\,160 \end{aligned}$$

façons de réorganiser les lettres du mot « Abracadabra ». ◀

**Exercice 5.13.** Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 10

1. commencent par deux « 0 » ou finissent par trois « 1 » ?
2. soit commencent par deux « 0 », soit finissent par trois « 1 » ?
3. contiennent cinq « 0 » zéros consécutifs ou cinq « 1 » consécutifs ?
4. contiennent soit trois « 0 » consécutifs, soit quatre « 1 » consécutifs ?

*Solution.* Dans chacun des cas de cette question, on remarque que l'ordre des éléments importe, chaque séquence énumérée étant différente, et que des répétitions (de « 0 » et de « 1 ») peuvent se produire. On devra donc utiliser les arrangements avec répétitions tout au long de cet exercice.

1. Soit  $n_0$  le nombre de chaînes commençant par deux « 0 »,  $n_1$  le nombre de chaînes finissant par trois « 1 » et  $n_{01}$  le nombre de chaînes commençant par deux « 0 » et finissant par trois « 1 ». Par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement  $n_0 + n_1 - n_{01}$  chaînes qui commencent par deux « 0 » ou qui finissent par trois « 1 ».

De plus, on remarque que commencer par deux « 0 » revient à fixer les deux premiers caractères de la chaîne, et donc à ne considérer que les arrangements avec répétitions de 8 caractères pris parmi 2. On a  $n_0 = \alpha_2^8 = 2^8 = 256$  telles chaînes.

Similairement, on a  $n_1 = \alpha_2^7 = 2^7 = 128$  chaînes qui finissent par trois « 1 », et  $n_{01} = \alpha_2^5 = 2^5 = 32$  chaînes commençant par deux « 0 » et finissant par trois « 1 ».

Ainsi, on a  $256 + 128 - 32 = 352$  chaînes qui commencent par deux « 0 » ou finissent par trois « 1 ».

2. On utilise ici les mêmes notations qu'au point précédent. Comme on ne permet pas aux deux cas de se produire en même temps, on a

$$n_0 + n_1 - n_{01} - n_{01}$$

chaînes qui soit commencent par deux « 0 », soit qui finissent par trois « 1 ». On doit ici soustraire deux fois  $n_{01}$  : une fois pour les chaînes commençant par deux « 0 » et finissant par trois « 1 », et une autre fois pour les chaînes qui ni ne commencent par deux « 0 », ni ne finissent par trois « 1 ». Ainsi, on a  $352 - 32 = 320$  telles chaînes.

3. On remarque que les blocs de cinq « 0 » ou « 1 » consécutifs peuvent commencer à six positions possibles : 1, 2, 3, 4, 5, et 6. Dans une telle chaîne, les 5 autres caractères aux positions libres peuvent prendre des valeurs arbitraires. Cette situation est illustrée à la figure 5.21.

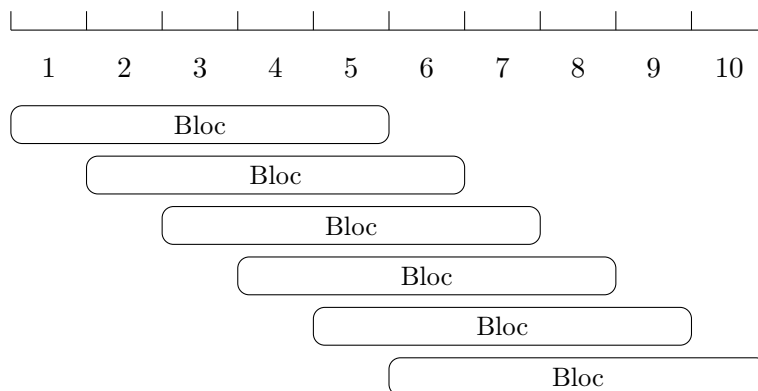


FIGURE 5.21 – Un bloc peut apparaître à six positions disponibles

Ainsi, par la règle du produit, on a exactement  $6 \cdot \alpha_2^5 = 192$  chaînes contenant un bloc de cinq « 1 » consécutifs, et également 192 chaînes contenant un bloc de cinq « 0 » consécutifs. On remarque également qu'il n'existe que deux chaînes contenant à la fois un bloc de cinq « 0 » consécutifs et un bloc de cinq « 1 » consécutifs : les chaînes 0000011111 et 1111100000.

Dès lors, par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement  $192 + 192 - 2 = 382$  chaînes qui contiennent cinq « 0 » zéros consécutifs ou cinq « 1 » consécutifs.

4. Similairement au point précédent, on remarque que les blocs de trois « 0 » consécutifs peuvent commencer à 8 positions différentes, et les blocs de quatre « 1 » consécutifs peuvent commencer à 7 positions différentes. Les autres caractères des chaînes peuvent prendre des valeurs arbitraires. On a donc  $8 \cdot \alpha_2^7 = 1024$  chaînes qui contiennent un bloc de trois « 0 » consécutifs, et  $7 \cdot \alpha_2^6 = 448$  chaînes qui contiennent un bloc de quatre « 1 » consécutifs. Néanmoins, on ne peut pas se contenter d'additionner en l'état, sachant que certaines chaînes qui contiennent un bloc de trois « 0 » consécutifs contiennent également un bloc de quatre « 1 » consécutifs.

Calculons le nombre de chaînes comprenant ces deux configurations, en les construisant par étapes. Bien qu'elle puisse sembler rébarbative, il est nécessaire de prendre des précautions afin de ne pas compter deux fois une

configuration, comme l'illustre la résolution délibérément fautive de l'Erreur A.6, en annexe.

Comptons séparément le nombre de telles chaînes qui contiennent exactement quatre « 1 », cinq « 1 », six « 1 » et sept « 1 ». Il n'y a pas d'autres cas possibles, les dernières positions restantes devant au minimum contenir le bloc de trois « 0 » consécutifs.

Dans le cas où la chaîne contient exactement quatre « 1 », ils forment un bloc (par contrainte) et les autres caractères de la chaîne sont tous des « 0 ». Il y a exactement sept telles chaînes, comme illustré à la figure 5.22.

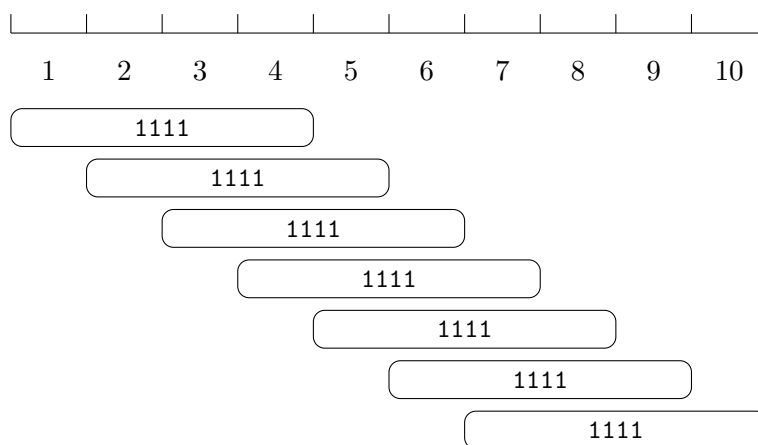


FIGURE 5.22 – Le bloc de quatre « 1 » peut apparaître à sept positions disponibles

Dans le cas où la chaîne contient exactement cinq « 1 », il faut distinguer deux cas. Le premier, celui où ladite chaîne ne contient pas de bloc de cinq « 1 » consécutifs, et le second où tel est le cas<sup>9</sup>. Dans le cas où la chaîne ne contient pas de bloc de cinq « 1 » et où le bloc de quatre « 1 » commence aux positions 1 ou 7, il y a exactement cinq positions possibles pour le dernier « 1 » afin de permettre au bloc de trois « 0 » d'être inséré<sup>10</sup>. La figure 5.23 illustre tous les placements possibles pour le dernier « 1 », il y a donc 22 telles chaînes. De plus, avec un raisonnement similaire à celui de la figure 5.22, on compte exactement six chaînes contenant un bloc de cinq « 1 » consécutifs (les autres caractères étant des zéros). On a donc exactement  $22 + 6 = 28$  chaînes contenant exactement cinq « 1 ».

9. Une telle distinction *est nécessaire*. Voyez-vous pourquoi ?

10. Par exemple, si le bloc de quatre « 1 » commence en 1, les positions disponibles pour le dernier « 1 » sont 6, 7, 8, 9 et 10.

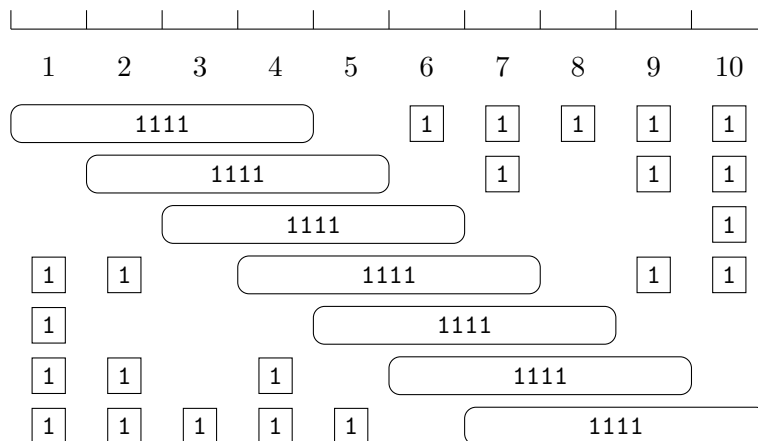


FIGURE 5.23 – Le bloc de quatre « 1 » peut apparaître à sept positions disponibles

On peut utiliser un raisonnement similaire d'énumération minutieuse pour les chaînes contenant exactement six et sept « 1 ». Ces énumérations sont détaillées aux figures 5.24 et 5.25, respectivement. On y remarque qu'on a exactement  $16 + 6 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 35$  telles chaînes.

Ainsi, on en conclut, au final, qu'il y a exactement

$$1024 + 448 - (7 + 28 + 35) - (7 + 28 + 35) = 1332$$

chaînes qui contiennent soit trois « 0 » consécutifs, soit quatre « 1 » consécutifs.



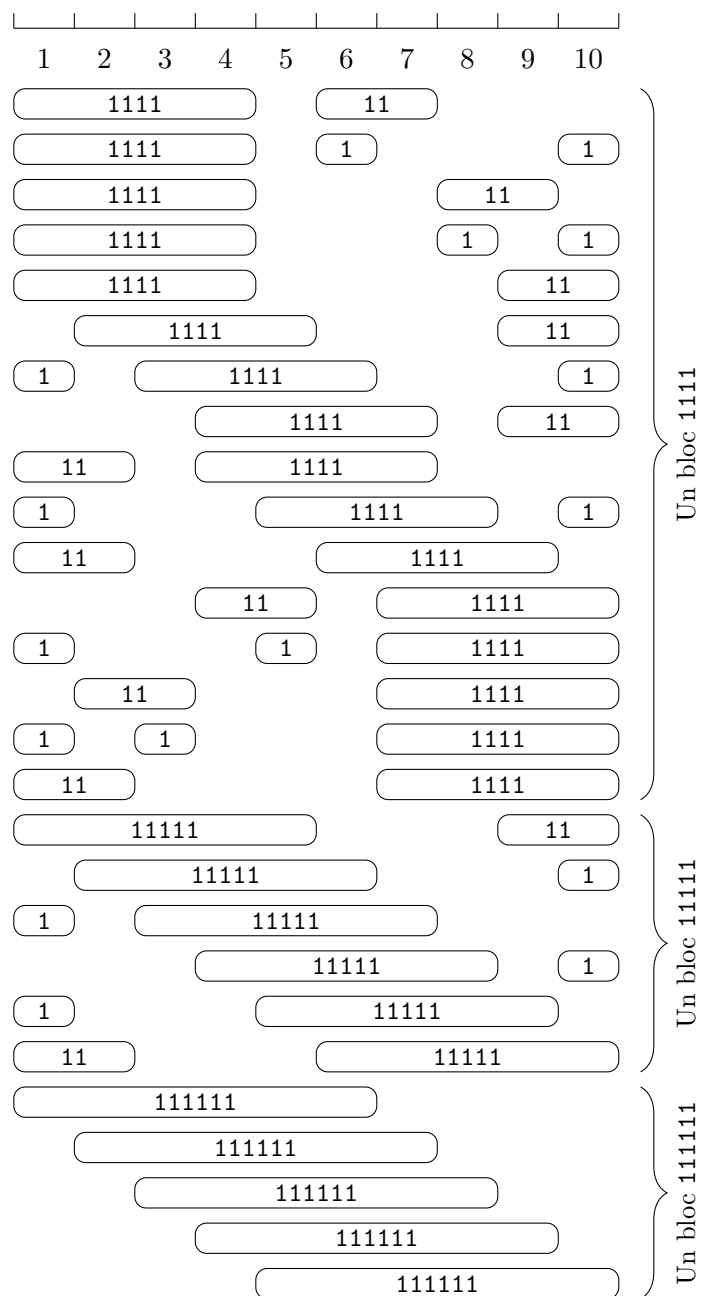


FIGURE 5.24 – Énumération des chaînes contenant exactement six « 1 »



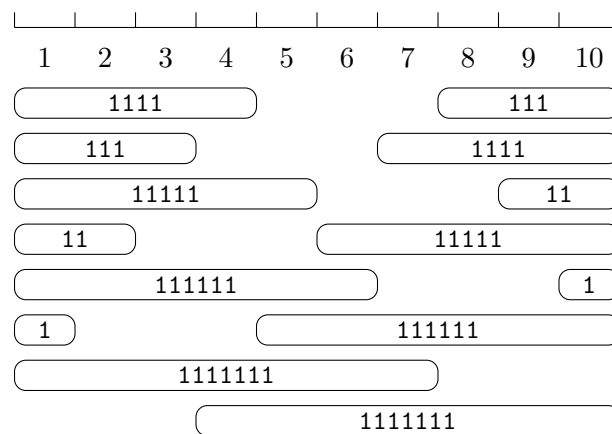


FIGURE 5.25 – Énumération des chaînes contenant exactement sept « 1 »



Deuxième partie

Algèbre linéaire



---

## Vecteurs

*Concepts de base • Opérations sur les vecteurs • Exercices résolus*

---

Certains concepts peuvent être complètement décrits par une quantité scalaire, comme la température. En effet, s'il fait  $23^{\circ}\text{C}$ ., la température est entièrement décrite par cette mesure : le nombre 23. Néanmoins, parfois, une telle mesure ne suffit pas à décrire certaines grandeurs physiques. On peut par exemple affirmer qu'un objet pèse 2kg, mais cela ne précise pas que l'objet est attiré vers le sol. Similairement, lorsque qu'on accélère en voiture, donner la valeur de l'accélération ne précise pas que l'on est écrasé dans son siège.

Pour cette raison, les mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle, en particulier Giusto Bellavitis et William Rowan Hamilton, ont introduit le concept de *vecteur*, afin de compléter la notion de scalaire et de décrire de manière plus précise les phénomènes physiques qu'ils observaient. Intuitivement, les vecteurs décrivent à la fois une quantité mais également une *direction*, pour décrire « dans quel sens » la quantité est pertinente. Ainsi, on peut parfaitement décrire qu'un objet pèse 2kg et qu'il est attiré vers le bas.

Ce chapitre décrit premièrement les concepts de base liés aux vecteurs en section 6.1, et définit ensuite les opérations habituellement utilisées sur les vec-

teurs en section 6.2. Comme d'habitude, ce chapitre est clôturé par des exercices résolus, en section 6.3.

## 6.1 Concepts de base

### Définition 6.1

Un vecteur  $\vec{v}$  à  $n$  composantes est un  $n$ -uplet  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 2$ .

Quand  $n = 2$ , on représente habituellement un vecteur  $v$  dans un plan cartésien comme un segment de droite muni d'une flèche. Dans la suite de ce document, toutes les définitions, propositions et exemples seront énoncés pour  $n = 2$ , mais peuvent être facilement étendues pour  $n$  arbitraire.

**Exemple 6.1.** Soit  $v = (3, 2)$ . On peut représenter  $\vec{v}$  comme à la figure 6.1. Sur cette figure, on remarque que la première composante décrit un déplacement sur l'axe  $ox$ , et la deuxième un déplacement sur l'axe  $oy$ .

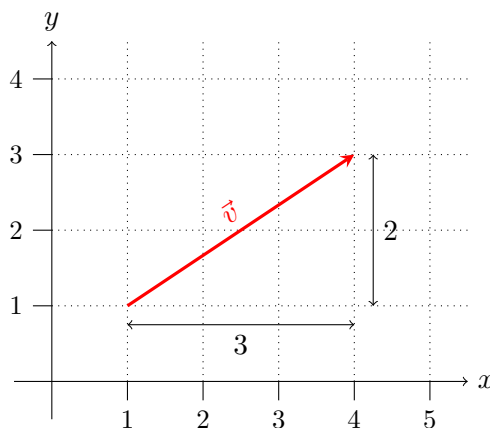


FIGURE 6.1 – Illustration de  $v = (3, 2)$



Notons que, parfois, on note un vecteur en nommant explicitement ses deux

extrémités.

**Notation 6.1.** Soient  $A = (a_x, a_y)$  et  $B = (b_x, b_y)$ , le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

est le vecteur joignant  $A$  à  $B$ .

**Exemple 6.2.** Soient  $A = (1, 2)$  et  $B = (3, 5)$ , on a  $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 5 - 2) = (2, 3)$ . ◀

### Propriété 6.2

Soient  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égaux, noté  $\vec{u} = \vec{v}$ , si et seulement si  $u_1 = v_1$  et  $u_2 = v_2$ .

En particulier, on remarque que cette définition d'égalité de vecteurs fait abstraction du « départ » d'un vecteur. Par exemple, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  illustrés à la figure 6.2 sont égaux. En physique, souvent, la définition de vecteur est étendue pour tenir compte du point d'application d'un vecteur. Ce n'est pas le cas en mathématiques.

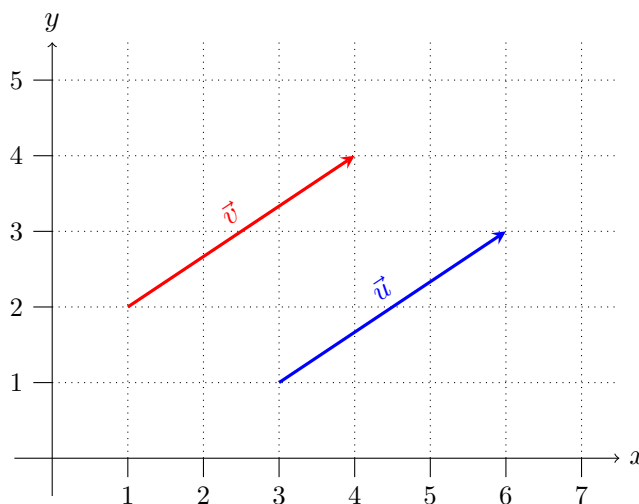


FIGURE 6.2 – Deux vecteurs égaux

Souvent, en plus des composantes d'un vecteur, on veut souvent exprimer sa « magnitude ». Dans  $\mathbb{R}^2$ , cela correspond à trouver la longueur du segment

joignant les deux extrémités du vecteur considéré. Par application du théorème de Pythagore, on définit en conséquence la *norme* d'un vecteur comme suit.

### Définition 6.3

Soit  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on définit la norme de  $\vec{v}$ , notée  $\|\vec{v}\|$ , comme

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

**Exemple 6.3.** Sur la figure 6.1, on a  $\vec{v} = (2, 3)$  et, en conséquence,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ . ◀

**Notation 6.2.** Le *vecteur nul*, noté  $\vec{0}$ , est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles. Sa norme est également nulle.

## 6.2 Opérations sur les vecteurs

Diverses opérations sont définies sur les vecteurs. En particulier, il est possible de les additionner et soustraire. Ainsi, on peut par exemple dire que si des bûcherons écossais s'entraînent au tir de corde et que l'une équipe tire avec une force de 4 000N et l'autre avec une force de 5 000N, la tension totale dans la corde est de 9 000N, et la résultante de la force est de 1 000N en faveur de la deuxième équipe.

### 6.2.1 Multiplication par un scalaire

Une opération couramment utilisée dans le cas de calculs vectoriels est la multiplication par un scalaire. Intuitivement, cette opération permet d'augmenter la norme d'un vecteur (sa « grandeur »), sans en modifier la direction<sup>1</sup>.

### Définition 6.4

Soit  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lambda \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

1. Par direction, on entend ici le coefficient angulaire de la droite support d'un vecteur, pas le sens de la flèche de la représentation dans le plan.



En d'autres termes, multiplier un vecteur  $\vec{v}$  par un scalaire  $\lambda$  consiste à multiplier chaque composante de  $\vec{v}$  par  $\lambda$ .

**Exemple 6.4.** Soit  $\vec{v} = (2, 1)$ , on a  $3\vec{v} = (2 \cdot 3, 1 \cdot 3) = (6, 3)$ . Cette situation est illustrée à la figure 6.3. Similairement,  $-\vec{v} = (-2, -1)$ . ◀

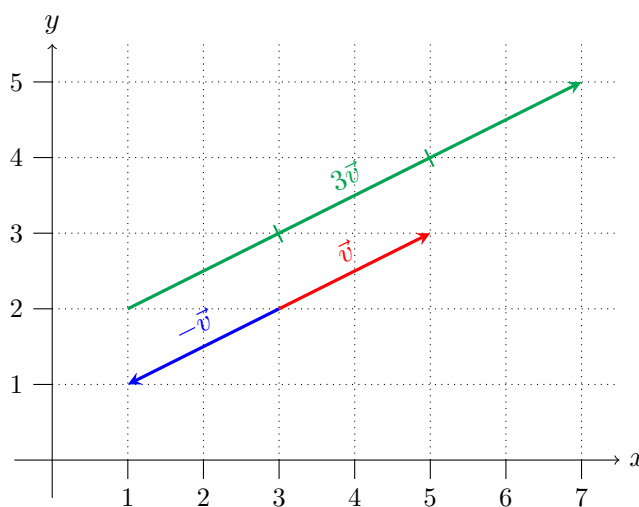


FIGURE 6.3 – Multiplication par un scalaire

Par ailleurs, la multiplication scalaire permet de définir la notion de vecteurs « parallèles ». En effet, si deux vecteurs sont parallèles, l'un de ces vecteurs est multiple de l'autre. On dit que de tels vecteurs sont *colinéaires*.

#### Définition 6.5

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}_0$ .

Les vecteurs colinéaires ont une certaine importance dans le cadre de résolution de systèmes. En effet, la notion de linéarité généralise la notion de parallélisme pour des droites. Dans la mesure où des systèmes incluant des droites parallèles ont rarement une solution, ces configurations sont généralement écartées.

### 6.2.2 Addition et soustraction

Une autre opération couramment utilisée est l'addition et la soustraction de vecteurs. Ces opérations ont de nombreuses applications, comme en physique où elles permettent, par exemple, de calculer la résultante de forces.

#### Définition 6.6

Soient  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on définit

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2).$$

Intuitivement, l'addition et la soustraction de vecteurs est effectuée composante par composante. En conséquence, on remarque que la somme de vecteurs est commutative, mais pas la différence.

**Exemple 6.5.** Soient  $\vec{u} = (1, 2)$  et  $\vec{v} = (-1, 3)$ . On a

$$— \vec{u} + \vec{v} = (1 - 1, 2 + 3) = (0, 5),$$

$$— \vec{u} - \vec{v} = (1 + 1, 2 - 3) = (2, -1).$$



#### Relation de Chasles

Dans le cas des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , on peut construire géométriquement la somme ou de la différence de deux vecteurs en utilisant la *relation de Chasles*, aussi appelée « règle du parallélogramme ».

L'utilisation de cette règle est illustrée à la figure 6.4. Sur cette figure, on remarque que l'on peut reporter le vecteur  $\vec{u}$  à l'extrémité du vecteur  $\vec{v}$ , et inversement, afin de former un parallélogramme. L'addition dénote l'une des diagonales, et la différence l'autre diagonale.

On remarque que souvent, en mathématiques, on définit un vecteur comme le résultat de l'addition et multiplication scalaire d'autres vecteurs, par exemple, on peut écrire  $\vec{u} = 3\vec{v} - 4\vec{w}$ . Une telle écriture est appelée une *combinaison linéaire*.

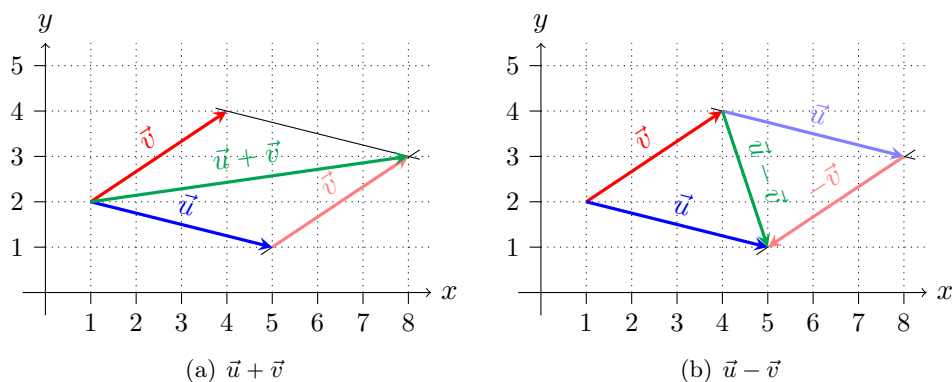


FIGURE 6.4 – Addition et soustraction de vecteurs

**Définition 6.7**

Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$ , tout vecteur  $\vec{u}$  de la forme

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

est une combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

On dit aussi que  $\vec{u}$  *dépend linéairement* de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . De plus amples informations au sujet de la dépendance et de l'indépendance linéaire seront fournis en section 8.2 du chapitre 7.

**6.2.3 Produit scalaire**

Finalement, un dernier opérateur de calcul vectoriel est le *produit scalaire*. Cet opérateur a de nombreuses applications en physique et en infographie, entre autres. Contrairement au cas de l'addition, soustraction et multiplication par un scalaire, le résultat d'un produit scalaire *n'* est *pas* un vecteur, mais un nombre réel.

Formellement, on définit le produit scalaire comme suit.

**Définition 6.8**

Soient  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\theta$  l'angle formé entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le produit scalaire entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est défini comme

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2\end{aligned}$$

Notez ici que l'opérateur «  $\cdot$  » entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , à gauche, n'est pas le même opérateur que le «  $\cdot$  » entre  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  et  $\cos(\theta)$ , à droite. Le premier est un opérateur entre vecteurs, le second entre réels.

Géométriquement, on peut construire le produit scalaire par un système de projection, tel qu'illustré à la figure 6.5.

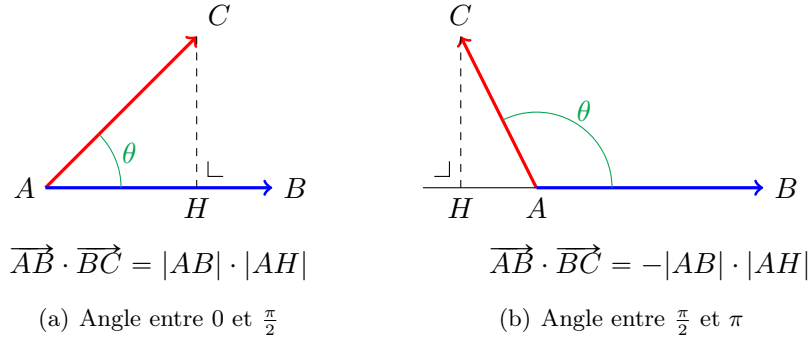


FIGURE 6.5 – Construction géométrique du produit scalaire

**Exemple 6.6.** Soient  $\vec{u} = (0, 3)$  et  $\vec{v} = (4, 4)$ , illustrés la figure 6.6. On remarque

avant tout que l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est de  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ . On a donc

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{32} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 12.\end{aligned}$$

Similairement, on peut calculer ce produit scalaire comme

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

Cette situation est illustrée à la figure 6.6.

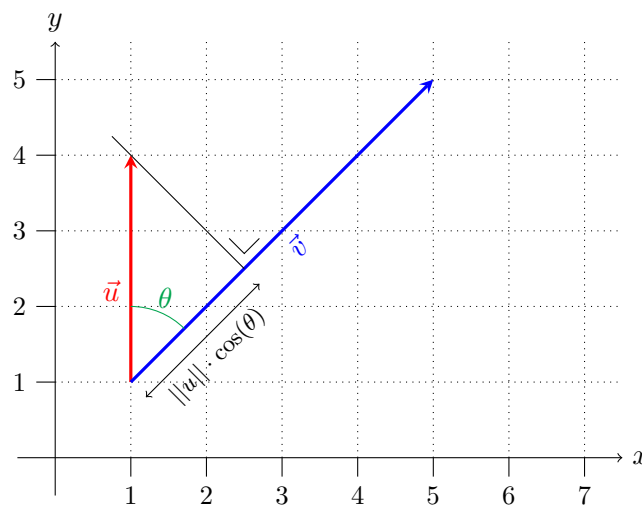


FIGURE 6.6 – Produit scalaire de deux vecteurs

Par ailleurs, on peut dégager une propriété importante de vecteurs *orthogonaux*, c'est-à-dire de vecteurs dont les droites support sont perpendiculaires.

### Propriété 6.9

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  orthogonaux, on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

En effet, par définition, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, l'angle formé par ces deux vecteurs est égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

## 6.3 Exercices résolus

**Exercice 6.1.** Soient les vecteurs  $\vec{t}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  illustrés à la figure 6.7. Calculez

1. les composantes de  $\vec{t}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ ,
2.  $\|\vec{t}\|$ ,  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  et  $\|\vec{w}\|$ ,
3.  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{t} \cdot \vec{w}$ ,  $\vec{t} \cdot \vec{u}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

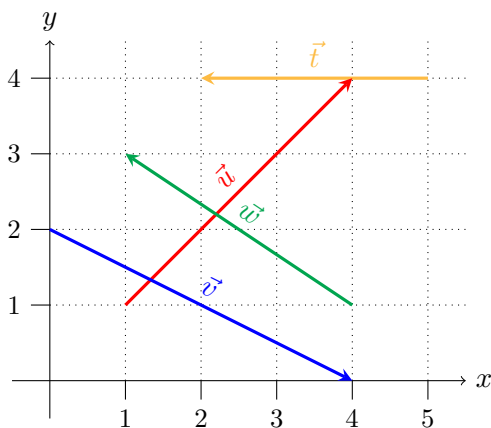


FIGURE 6.7 – Quatre vecteurs

*Solution.* On procède comme suit.

1. On a
  - $\vec{t} = (2 - 5, 4 - 4) = (-3, 0)$ ,
  - $\vec{u} = (4 - 1, 4 - 1) = (3, 3)$ ,

- $\vec{v} = (4 - 0, 0 - 2) = (4, -2),$
- $\vec{w} = (1 - 4, 1 - 3) = (-3, 2).$

2. Les normes sont calculées comme

- $\|t\| = \|(-3, 0)\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3,$
- $\|u\| = \|(3, 3)\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$
- $\|v\| = \|(4, -2)\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$
- $\|w\| = \|(-3, 2)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$

3. On obtient

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 6,$
- $\vec{t} \cdot \vec{w} = (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot (-2) = 9,$
- $\vec{t} \cdot \vec{u} = (-3) \cdot 3 + 0 \cdot 3 = -9,$
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) = -8.$



**Exercice 6.2.** Calculez les composantes des vecteurs suivants :

- a)  $(1, 2) + (-4, 3),$
- b)  $2(-1, 4) - 3(2, 5),$
- c)  $-(1, 2) + 5(3, -2),$
- d)  $(5, -3) - (2, -1).$

*Solution.* On a

- a)  $(1, 2) + (-4, 3) = (1 - 4, 2 + 3) = (-3, 5),$
- b)  $2(-1, 4) - 3(2, 5) = (-2, 8) - (6, 15) = (-8, -7),$
- c)  $-(1, 2) + 5(3, -2) = (-1 + 15, -2 - 10) = (14, -12),$
- d)  $(5, -3) - (2, -1) = (3, 2).$



**Exercice 6.3.** Illustrez les vecteurs suivants sur l'hexagone de la figure 6.8 :

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE},$
- b)  $2\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CB},$
- c)  $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CD},$
- d)  $2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DC}.$

*Solution.* On a

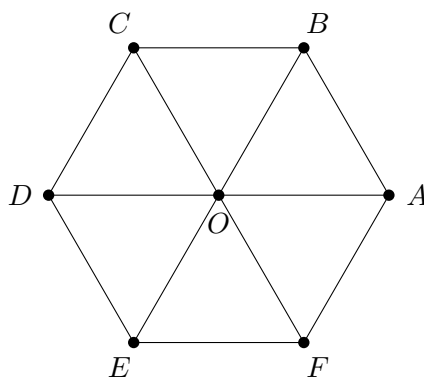


FIGURE 6.8 – Un hexagone

- a)  $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO}$ , et donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ ,  
 b)  $2\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{FC}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DO}$ , donc  $2\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{FD}$ ,  
 c)  $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$ , en conséquence  $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ ,  
 d)  $-\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FD}$ , donc

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DC} &= 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} \\
 &= 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} \\
 &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} \\
 &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC},
 \end{aligned}$$

or  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FB}$ , donc  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EB}$ .



**Exercice 6.4.** Soient les points  $A = (1, 0)$ ,  $B = (5, 4)$ ,  $C = (1, 8)$ , et  $X$  le point du plan tel que

$$2\overrightarrow{XA} - 3\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XC} = \vec{0}.$$

Quelles sont les coordonnées de  $X$  ?



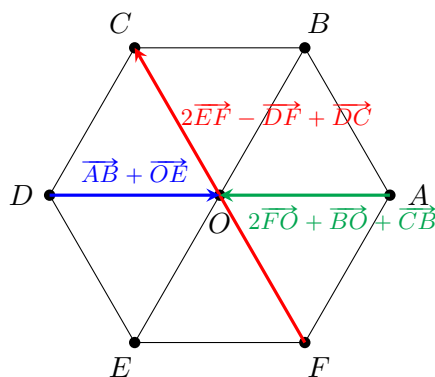


FIGURE 6.9 – Illustration du calcul de vecteurs

*Solution.* Posons  $X = (p_x, p_y)$ . On veut

$$\begin{aligned}
 & 2\overrightarrow{XA} - 3\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow & 2(1 - p_x, 0 - p_y) - 3(5 - p_x, 4 - p_y) + 2(1 - p_x, 8 - p_y) = (0, 0) \\
 \Leftrightarrow & (2 - 2p_x, -2p_y) - (15 - 3p_x, 12 - 3p_y) + (2 - 2p_x, 16 - 2p_y) = (0, 0) \\
 \Leftrightarrow & (2 - 15 + 2 - 2p_x + 3p_x - 2p_x, -12 + 16 - 2p_y + 3p_y - 2p_y) = (0, 0) \\
 \Leftrightarrow & (-11 - p_x, 4 - p_y) = (0, 0) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} p_x = -11, \\ p_y = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc  $X = (-11, 4)$ . ◀

**Exercice 6.5.** Soient les points  $A = (1, 1)$  et  $B = (3, 2)$ . Quelle est la norme de  $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB}$

*Solution.* On a  $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$ . Dès lors,  $3\overrightarrow{AB} = (6, 3)$ . Dès lors,

$$\begin{aligned}
 \left\| 3\overrightarrow{AB} \right\| &= \sqrt{6^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{36 + 9} \\
 &= \sqrt{45} \\
 &= 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$
◀

**Exercice 6.6.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 4$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ . Que vaut  $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|$  ?

*Solution.* Avant toutes choses, notons  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ . On sait que

$$\|\vec{u}\| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 4, \quad (6.1)$$

$$\|\vec{v}\| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4, \quad (6.2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 3. \quad (6.3)$$

On a

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + 2\vec{v}\| &= \|(u_x + 2v_x, u_y + 2v_y)\| \\ &= \sqrt{(u_x + 2v_x)^2 + (u_y + 2v_y)^2} \\ &= \sqrt{(u_x^2 + 4v_x^2 + 4u_x v_x) + (u_y^2 + 4v_y^2 + 4u_y v_y)} \\ &= \sqrt{(u_x^2 + u_y^2) + 4(v_x^2 + v_y^2) + 4(u_x v_x + u_y v_y)} \\ &= \sqrt{16 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 3} \\ &\quad \text{par les équations (6.1), (6.2) et (6.3)} \\ &= \sqrt{92} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$



---

## Matrices

*Introduction • Concepts de base • Opérations matricielles • Déterminant • Inverse de matrice • Exercices résolus*

---

Les matrices sont des objets élémentaires d'algèbre linéaire, et ont de nombreuses applications pratiques, notamment dans la résolution de systèmes d'équations. Elles sont également couramment utilisées en physique, en infographie, en optimisation combinatoire, etc.

Après une introduction en section 7.1, elles sont présentées sommairement à la section 7.2. Diverses opérations matricielles sont ensuite présentées en section 7.3. Le concept de *déterminant*, central dans la manipulation de matrices, est ensuite introduit en section 7.4, et l'inversion de matrices en section 7.5.

Comme d'habitude, une section d'exercices résolus conclut ce document, en section 7.6.

## 7.1 Introduction

Les matrices ont couramment été utilisées pour résoudre des équations linéaires<sup>1</sup>, mais ne sont pas connues sous ce nom avant le XIX<sup>e</sup> siècle.

Leur première utilisation pour résoudre des systèmes d'équation date du II<sup>e</sup> siècle ACN, par des mathématiciens chinois. Elles furent popularisées par Leibniz entre 1700 et 1710 qui mit en évidence leur utilité dans l'enregistrement et la modélisation de solutions d'équations, et par Cramer en 1750 qui présenta une technique de résolution de systèmes.

Le terme « matrice » a été néanmoins introduit plus tard par le mathématicien anglais Sylvester en 1850, dérivant directement du latin où « matrice » signifie utérus. Il choisit ce terme dans son étude des *déterminants* (une caractéristique des matrices) en comprenant qu'une matrice engendrait de nombreux déterminants, qu'on appelle aujourd'hui des *mineurs*.

Le mathématicien anglais Arthur Cayley utilisa par la suite les matrices pour modéliser des transformations géométriques telles que des rotations et des translations, et définit pour cet usage des opérations matricielles telles que l'addition et la multiplication. À cette époque, l'utilisation de matrices comme objets mathématiques abstraits fut révolutionnaire. Il contribua également énormément au concept de systèmes d'équations indépendantes.

Par la suite, de nombreux mathématiciens célèbres étudièrent les matrices et leurs applications, comme Gauss qui les utilisa pour modéliser les formes quadratiques (un type de fonction en algèbre linéaire), et Cauchy qui apporta la première définition formelle de déterminant.

De nos jours, les matrices sont couramment utilisées en infographie pour la modélisation de concepts physiques et de transformations de repères, en optimisation combinatoire pour modéliser des systèmes de contraintes et des problèmes d'optimisation linéaire, etc.

---

1. Une équation est linéaire si aucune variable qu'elle contient n'est élevée à une puissance, les variables ne sont également pas multipliées entre elles.

## 7.2 Concepts de base

### Définition 7.1

Une matrice de taille  $m \times n$  est un tableau rectangulaire à  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

Les éléments d'une matrice sont souvent des nombres d'un ensemble classique, tel que  $\mathbb{R}$ . Le cas échéant, on dit qu'une matrice  $m$  de taille  $m \times n$  appartient à l'ensemble  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , noté  $m \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Notation 7.1.** Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est représentée comme une « boîte » entourées de crochets ou de parenthèses.

On note  $A = (a_{ij})$ , où  $a_{ij}$  dénote l'élément situé à la ligne  $i$  et colonne  $j$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Les éléments  $a_{ii}$  sont appelés la *diagonale* de la matrice.

**Exemple 7.1.** La matrice  $A$  illustrée ci-dessous est un exemple de matrice de  $\mathbb{R}^{4 \times 3}$ .

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 13 & 15 \\ 2 & 11 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 13 & 15 \\ 2 & 11 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$



Dans la suite du cours, on favorise (arbitrairement) la représentation à l'aide de parenthèses.

Notez qu'on donne souvent une appellation spécifique aux matrices aux dimensions particulières :

- une *matrice carrée* est une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes,
- une *matrice ligne* est une matrice à une ligne et  $n$  colonnes,
- une *matrice colonne* est une matrice à  $n$  lignes et une colonne.

**Exemple 7.2.** La matrice  $A$  est une matrice carrée de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . La matrice  $B$  est une matrice ligne de  $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ . La matrice  $C$  est une matrice colonne de  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = ( \begin{array}{ccc} 7 & 1 & 4 \end{array} ) \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



La matrice identité est une autre matrice particulière, très importante dans toutes les opérations liées à la multiplication matricielle et aux déterminants, tels que la résolution de systèmes. Elle est définie comme suit.

### Définition 7.2

La matrice identité, notée  $\mathbf{1}_n$ , est la matrice carrée  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette matrice est définie pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Quand le contexte est clair, on la nomme simplement  $\mathbf{1}$ .

**Exemple 7.3.** La matrice ci-dessous est la matrice identité de taille  $3 \times 3$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La *matrice nulle*, simplement notée  $0$ , est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Une *matrice diagonale* est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls à l'exception de la diagonale. Une *matrice triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) est une matrice dont tous les éléments inférieurs (resp. supérieurs) à la diagonale sont nuls.

## 7.3 Opérations matricielles

Il est possible d'effectuer diverses opérations sur les matrices, telles que la somme, la différence, le produit, etc.

### 7.3.1 Transposition

La transposition d'une matrice est une opération qui effectue une symétrie des éléments par rapport à la diagonale.

#### Définition 7.3

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la transposée de  $A$ , notée  $A^T$ , est la matrice  $(t_{ij}) \in \mathbb{R}$  telle que  $t_{ij} = a_{ji}$ .

Intuitivement, cette opération peut être obtenue en

- effectuer une symétrie de  $A$  sur sa diagonale,
- écrire les lignes de  $A$  comme les colonnes de  $A^T$ ,
- écrire les colonnes de  $A$  comme les lignes de  $A^T$ .

**Exemple 7.4.** On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad L^T = (-1 \quad 3 \quad 5)$$



On remarque la propriété suivante sur la transposée des matrices.

#### Propriété 7.4

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , on a  $(A^T)^T = A$ .

En effet, échanger deux fois de suite les lignes et colonnes d'une matrice revient à restituer la matrice originale.

### 7.3.2 Addition, soustraction et multiplication scalaire

L'addition, soustraction et multiplication scalaire de matrices est effectuée naturellement. Dans le cas d'addition (resp. de soustraction), chaque élément de la somme (resp. de la différence) est obtenu en additionnant (resp. en soustrayant) deux à deux les éléments des matrices opérandes. Dans le cas de multiplication par un scalaire, on multiplie chaque élément de la matrice par le scalaire considéré.

#### Définition 7.5

Soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$A + B = (s_{ij}) \text{ avec } s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A - B = (d_{ij}) \text{ avec } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

$$\lambda A = (p_{ij}) \text{ avec } p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

En remarque en particulier que l'addition et la multiplication par un scalaire de matrices sont des opérations commutatives.

**Exemple 7.5.** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 8 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+2 & -2+1 & 5-2 \\ -2-2 & 2+1 & 1-4 & -4+8 \\ -6+7 & 7+3 & 9+0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 0-2 & -2-1 & 5+2 \\ -2+2 & 2-1 & 1+4 & -4-8 \\ -6-7 & 7-3 & 9-0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -12 \\ -13 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-6) & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 9 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 10 \\ -4 & 4 & 2 & -8 \\ -12 & 14 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$



### 7.3.3 Multiplication

Contrairement à l'addition et soustraction, la multiplication matricielle *n'est pas* commutative, et n'est pas effectuée par l'application directe d'une opération entre chaque éléments des termes du produit.

On la définit comme suit.

#### Définition 7.6

Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , le produit matriciel  $AB$  est une matrice  $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  telle que

$$p_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} \cdot b_{qj}.$$

Formulé autrement, l'élément  $ij$  du produit  $AB$  est égal au produit scalaire entre la ligne  $i$  de la matrice  $A$  et la colonne  $j$  de la matrice  $B$ . Cette situation est illustrée à la figure 7.1. On a, par exemple,

$$p_{12} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \cdot (b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}).$$

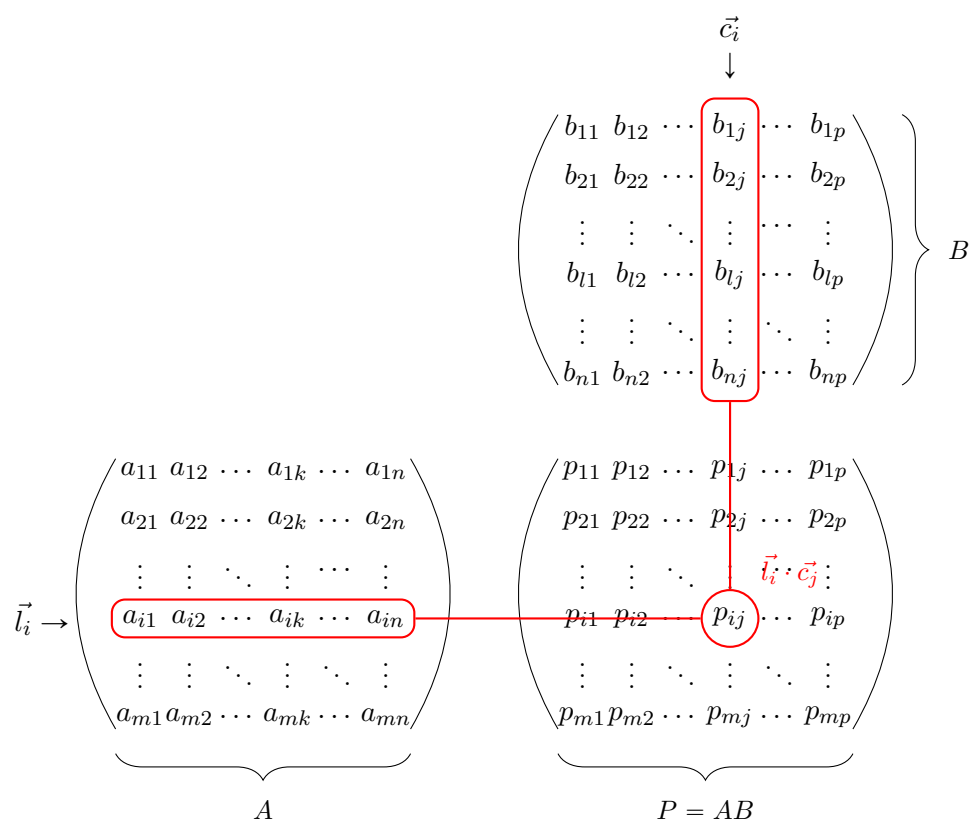


FIGURE 7.1 – Illustration de la multiplication matricielle

Ainsi, si l'on nomme la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$  comme  $\vec{l}_i$  et la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $B$  comme  $\vec{c}_j$ , on a  $p_{ij} = \vec{l}_i \cdot \vec{c}_j$ .

**Exemple 7.6.** Soient les matrices  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  et  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a  $AB \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  telle que

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ -7 & -15 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}$$



On remarque que la matrice identité est *neutre* pour le produit matriciel, c'est-à-dire que  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A$ . Néanmoins, dans le cas général, le produit matriciel *n'est pas* commutatif.

**Exemple 7.7.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et on remarque clairement que  $AB \neq BA$ .



## 7.4 Déterminant

Le *déterminant* d'une matrice carrée est une valeur réelle qui peut être calculée à partir de ses éléments. Les déterminants ont de nombreuses applications en algèbre linéaire, notamment en matière de résolution de systèmes.

**Notation 7.2.** Le déterminant d'une matrice  $A$  est noté  $\det A$  ou  $\det(A)$ .

On peut également directement noter le déterminant en terme de matrices en substituant les parenthèses par des barres verticales, comme ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ on note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Une définition formelle de déterminant a été formulée par Leibniz et utilise la notion de *permutation* d'un ensemble. Dans la mesure où elle sort du cadre de ce cours, elle n'est pas abordée ici.

On présente néanmoins deux méthodes de calcul de déterminant, l'une immédiate pour les matrices  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ , et une récursive pour les matrices de taille supérieure.

#### 7.4.1 Matrices $2 \times 2$ et $3 \times 3$

Une technique immédiate pour calculer les déterminants de « petites » matrices est d'utiliser la *règle de Sarrus*, un mathématicien français du XIX<sup>e</sup> siècle qui présenta ce moyen mnémotechnique.

##### Définition 7.7 ▶ Règle de Sarrus

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

on a

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{aligned} \det(B) = & b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} \\ & - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

Cette définition est illustrée à la figure 7.2. Sur cette figure, les produits précédés de « + » sont barrés en rouge, ceux précédés de « - » sont barrés en bleu.

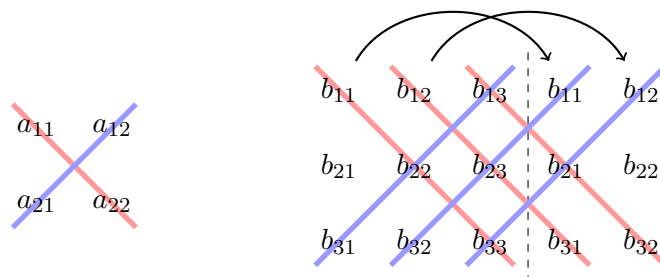


FIGURE 7.2 – Illustration de la règle de Sarrus

### 7.4.2 Matrices d'ordre supérieur

Les formules présentées dans le cadre des matrices  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$  ne peuvent pas être « visuellement » étendues aux matrices d'ordre supérieur. Par contre, il est possible de ramener le problème du calcul de déterminant pour des matrices plus grandes aux matrices  $3 \times 3$ .

Il existe diverses techniques pour cela, tels que *la décomposition de Laplace*, par l'intermédiaire des *mineurs* de la matrice considérée. On peut aussi utiliser *l'élimination de Gauss-Jordan*, qui exploite des propriétés relatives aux déterminants pour faciliter le calcul. C'est cette technique qui est privilégiée dans ce cours.

En effet, il est possible de décomposer le calcul de déterminant d'une matrice en calculant le déterminant d'autres matrices. En particulier, les propriétés suivantes sont vérifiées.

#### Propriété 7.8

Soit  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T), \\ \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B), \\ \det(\lambda A) &= \lambda^n \det(A), \\ \det(A) &= \prod_{i=1}^n a_{ii} \text{ si } A \text{ est triangulaire} \end{aligned}$$

La propriété sur le produit matriciel est particulièrement utile, car elle permet de calculer le déterminant d'un produit sans avoir à calculer le produit en tant que tel.

On note également que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux de cette matrice. En particulier, on remarque donc que  $\det(\mathbf{1}) = 1$ .

Cette dernière propriété sur le déterminants des matrices triangulaires est particulièrement utile en pratique. En effet, si l'on possède une technique permettant de « transformer » une matrice carrée quelconque en matrice triangulaire, et qu'on l'on peut tracer l'évolution du déterminant à chaque étape, alors il est facile d'obtenir la valeur du déterminant de la matrice d'origine.

Cette technique s'appelle *l'élimination de Gauss-Jordan*. En pratique, la mécanique de cette méthode consiste à chaque étape à additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne. Le déterminant de la matrice résultante est alors affecté comme suit.

**Propriété 7.9 ▶ Élimination de Gauss-Jordan**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- *permuter deux lignes ou deux colonnes de  $A$  multiplie le déterminant par  $-1$ ,*
- *si deux lignes de  $A$  sont identiques, alors  $\det(A) = 0$ ,*
- *ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne ne change pas  $\det(A)$ ,*
- *multiplier une ligne par  $\lambda$  multiplie le déterminant par  $\lambda$ .*

Chacune de ces transformations peut également être formulée sur les colonnes de  $A$ . Notons qu'en pratique, cette technique est *significativement*<sup>2</sup> plus rapide que l'utilisation de la formule de Laplace.

L'objectif de l'élimination de Gauss-Jordan, dans le cadre du calcul de déterminants<sup>3</sup>, est, par une suite d'opérations, de « transformer » la matrice considérée en matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Le déterminant peut ensuite être calculé en multipliant les éléments diagonaux de la matrice.

2. Laplace prend un temps « proportionnel » à  $n!$ , et l'élimination gaussienne à  $n^3$ .

3. Cette technique a également de nombreuses autres applications en algèbre linéaire.

**Exemple 7.8.** On a

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{aligned} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_3 \end{aligned} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{vmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 + 25L_3 \\
 &= 2 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 29 && \text{car matrice triangulaire} \\
 &= -116
 \end{aligned}$$



**Exemple 7.9.** On a

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{aligned} \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 &= 3 \cdot 2 \cdot (-1) && \text{car matrice triangulaire} \\
 &= -6
 \end{aligned}$$



En pratique, transformer une matrice en amenant un maximum de zéros en dessous de la diagonale est appelé *échelonner* une matrice, et la matrice résultante est dite *échelonnée*.

Dans l'exécution de la méthode de Gauss-Jordan, on réfère souvent les éléments que l'on a utilisés comme « repères » et en dessous desquels on a amené des zéros comme des *pivots*. Plus formellement, si une matrice est échelonnée, le premier élément non nul de chaque ligne est appelé un *pivot*, et les colonnes dans lesquelles ces pivots apparaissent sont appelées des *colonnes pivots*.

## 7.5 Inverse de matrice

Il n'y a pas d'opération de division définie sur les matrices. On parle plutôt d'*inverse* de matrice.

### Définition 7.10

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , l'inverse de  $A$ , noté  $A^{-1}$ , est l'unique matrice telle que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$$

Seules les matrices  $A$  telles que  $\det A \neq 0$  possèdent un inverse.

Si une matrice  $A$  possède un inverse, on dit que  $A$  est *invertible*.

Calculer l'inverse d'une matrice n'est pas aussi immédiat que de calculer une somme ou un produit. Plusieurs méthodes efficaces existent, telles que la méthode de Newton, la décomposition LU, etc. L'élimination de Gauss-Jordan, bien que non optimale, permet également de construire l'inverse de matrice.

Pour cela, on étend une matrice  $A$  à droite avec la matrice identité, noté  $(A|\mathbb{1})$ . On utilise ensuite cette méthode pour « transformer »  $A$  en la matrice identité. L'extension du résultat après cette manipulation est  $A^{-1}$  (c'est-à-dire, on a obtenu  $(\mathbb{1}|A^{-1})$ ). Cette méthode est souvent appelée *méthode de la matrice adjointe*.

**Exemple 7.10.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$



on calcule  $A^{-1}$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_2 & \leftarrow L_2 - 2L_1 & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 7-2\cdot 3 & 0-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 \end{array} \right) \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ L_1 & \leftarrow L_1 - 3L_2 & \left( \begin{array}{cc|cc} 1-3\cdot 0 & 3-3\cdot 1 & 1-3\cdot (-2) & 0-3\cdot 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$



On remarque que, comme attendu, cette méthode ne fonctionne pas avec une matrice non inversible (dont le déterminant est nul), comme illustré ci-dessous.

**Exemple 7.11.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que  $\det A = 6 - 6 = 0$ , donc  $A$  n'est pas inversible. Si l'on utilise

la méthode de la matrice adjointe, on « est coincé » :

$$\begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 + 2 \cdot 1 & 6 + 2 \cdot (-3) & 0 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 0 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Comme on a obtenu une ligne nulle par Gauss-Jordan, il n'est plus possible d'obtenir une ligne de la matrice identité (l'objectif à atteindre). La matrice considérée n'est donc pas inversible. ◀

On procède de manière similaire pour les matrices carrées de taille supérieure. En particulier, dans le cadre des matrices  $3 \times 3$ , on procède de la manière suivante.

**Exemple 7.12.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

on calcule  $A^{-1}$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 & L_3 \leftarrow -L_3 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \\
 & L_1 = L_1 - 2L_2 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$



En pratique, on remarque également la propriété suivante sur les déterminants de matrice.

**Propriété 7.11**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Cette propriété est très utile si l'on doit calculer le déterminant de l'inverse d'une matrice sans avoir besoin de la matrice inverse.

On peut également montrer la propriété suivante sur le produit matriciel.

**Propriété 7.12**

Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $AB = 0$ , alors  $A$  ou  $B$  n'est pas inversible.

En effet, si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire si à la fois  $A$  et  $B$  sont inversibles, on peut écrire

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}A^{-1}0 \\ \Leftrightarrow B^{-1}\mathbb{1}B &= \mathbb{1} \cdot 0 \\ \Leftrightarrow B^{-1}B &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{1} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

Ceci conclut la théorie de base relative aux matrices.

## 7.6 Exercices résolus

**Exercice 7.1.** Construisez la transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solution.* La transposée d'une matrice s'obtient en échangeant les lignes et les

colonnes :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Exercice 7.2.** Soient les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

calculez :

1.  $A + B$
2.  $A - B$
3.  $3A + 3B$

*Solution.*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 4+1 & 7+5 \\ 2+1 & 5+2 & 8+2 \\ 3+3 & 6+3 & 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 10 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & 4-1 & 7-5 \\ 2-1 & 5-2 & 8-2 \\ 3-3 & 6-3 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que  $3A + 3B = 3(A+B)$ . Or nous avons déjà calculé  $A+B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 10 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ et donc } 3(A + B) = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 36 \\ 9 & 21 & 30 \\ 18 & 27 & 30 \end{pmatrix}$$



**Exercice 7.3.** Calculez le produit  $AB$  pour les matrices A et B suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 23 & b & c \\ c & 3 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \end{pmatrix}$$

*Solution.* Appliquons les formules :

1.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot a + c \cdot c & a \cdot 1 + b \cdot a + c \cdot c & a \cdot 1 + b \cdot a + c \cdot c \\ c \cdot 1 + b \cdot b + a \cdot b & c \cdot 1 + b \cdot b + a \cdot b & c \cdot 1 + b \cdot b + a \cdot b \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot c + 1 \cdot a & 1 \cdot 1 + 1 \cdot c + 1 \cdot a & 1 \cdot 1 + 1 \cdot c + 1 \cdot a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b + c & a^2 + b^2 + c^2 & 2ac + b^2 \\ a + b + c & 2ac + b^2 & a^2 + b^2 + c^2 \\ 3 & a + b + c & a + b + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Il est impossible de multiplier une matrice  $3 \times 3$  par une matrice  $2 \times 3$ .



**Exercice 7.4.** Calculez le déterminant des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 5 & a \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solution.* Calculez le déterminant des matrices suivantes :

$$1. |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$2. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3$$

3. En utilisant la méthode de Sarrus,

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot 4 \cdot 21 + 0 \cdot 15 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 \cdot 6 - 6 \cdot 15 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 21 \\ &= 84 + 0 + 108 - 120 - 90 - 0 \\ &= -18 \end{aligned}$$

4. Il est très facile de calculer le déterminant de matrice triangulaire. En effet, il suffit de multiplier les éléments diagonaux.

$$|A| = 1 \cdot 5 \cdot (-2) = -10$$

5. Nous allons transformer cette matrice en une matrice triangulaire, afin de faciliter le calcul du déterminant.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \\ &= 1 \cdot (-2) \cdot 6 \\ &= -12 \end{aligned}$$

6. En utilisant la formule de Laplace par rapport à la troisième colonne

$$\begin{aligned} |A| &= (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 5 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

7. Le développement de Laplace par rapport à la deuxième ligne est celui qui facilite le plus les calculs, car cette ligne possède deux zéros.

$$\begin{aligned} |A| &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (0) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (0) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4 + 0 + 0 \\ &= 44 \end{aligned}$$



**Exercice 7.5.** Montrez, sans le calculer, que le déterminant de cette matrice est divisible par deux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

*Solution.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

En additionnant la ligne 1 à la ligne 4, nous obtenons :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$



On remarque que la dernière ligne est divisible par deux, on peut mettre deux en évidence.

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Le déterminant de A est donc bel et bien multiple de deux.



**Exercice 7.6.** Calculez, si possible, les inverses des matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

*Solution.* On a

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array} \right] & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{array} \right] & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-4} \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{array} \right] & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{aligned}$$

Et donc, on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}
 [B|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Et donc, on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [C|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}
 \end{aligned}$$

La matrice n'est pas inversible, en effet son déterminant vaut 0. Nous pouvons le déduire dès le début car la troisième ligne est une combinaison linéaire de la première ( $L_3 \leftarrow 2L_1$ ). ◀

---

## Diagonalisation

*Résolution de systèmes • Indépendance linéaire • Applications linéaires • Bases et changements de bases • Vecteurs et valeurs propres • Exercices résolus*

---

Les matrices sont un objet couramment utilisées pour trouver des valeurs satisfaisant un ensemble de contraintes, appelé *système*. Elles sont aussi couramment utilisées en mathématiques, en physique, en infographie, etc., pour modéliser des diverses transformations du plan telles que des translations, des rotations, des dilatations d'un objet.

Ce chapitre présente ces applications au sein d'un concept central, celui de *diagonalisation*. Intuitivement, l'idée de base est de transformer une matrice en un équivalent plus simple, diagonal.

Dans ce cadre, les applications des matrices liées dans la résolution de systèmes sont présentées en section 8.1.

Finalement, le concepts d'indépendance linéaire est présenté en section 8.2, et son application dans le cadre des applications linéaires, des changements de base et du calcul des vecteurs propres et valeurs propres en section 8.3.

## 8.1 Résolution de systèmes

Les systèmes d'équations linéaires ont de nombreuses applications pratiques, comme en ingénierie, en optimisation combinatoire, en économie, etc. Ces nombreuses applications motivent les études extensives qui ont été réalisées pour leur résolution.

Formellement, une *équation linéaire* est une équation d'une ou plusieurs variables qui ne sont pas multiples les unes des autres. Ainsi, un terme  $x^2$  ou  $xy$  n'est pas linéaire, et ce genre de cas n'est pas considéré dans cette section. Un *système d'équation linéaires* est une collection d'au moins deux équations linéaires au même ensemble de variables.

**Exemple 8.1.** Dans une petite fête de village, le tarif d'inscription pour un enfant est de 1,5€, et de 4€ pour un adulte. Sur une journée, 2 200 personnes sont entrées et 5 050€ ont été récoltés. Combien d'adultes et d'enfants sont venus ?

Posons  $a$  comme le nombre d'adultes venus à la fête, et  $e$  le nombre d'enfants. On sait que comme 2 200 personnes sont venues, on a

$$a + e = 2\,200. \quad (8.1)$$

De plus, chaque adulte rapporte 4€ et chaque enfant 1,5€, comme 5 050€ ont été récoltés, on a

$$4a + \frac{3}{2}e = 5\,050. \quad (8.2)$$

En mettant les informations modélisées dans les équations (8.1) et (8.2), on obtient le système

$$\begin{cases} a + e = 2\,200 \\ 4a + \frac{3}{2}e = 5\,050 \end{cases}$$

Une manière simple de résoudre des systèmes d'équations avec peu de variables est la *substitution* : successivement écrire une variable comme une fonction des autres, et remplacer sa valeur les autres équations du système.

Dans le cas présent, on peut écrire l'équation (8.1) comme  $e = 2\,200 - a$ .

Ainsi, en substituant la valeur de  $e$  dans l'équation 8.2, on a

$$\begin{aligned}
 4a + \frac{3}{2}(2\,200 - a) &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow 4a + \frac{3 \cdot 2\,200}{2} - \frac{3}{2}a &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2}a + 3\,300 &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2}a &= 1\,750 \\
 \Leftrightarrow a &= 1\,750 \cdot \frac{2}{5} \\
 \Leftrightarrow a &= 700
 \end{aligned}$$

Ainsi, en substituant  $a$  par sa valeur dans l'équation (8.1), on a

$$\begin{aligned}
 700 + e &= 2\,200 \\
 \Leftrightarrow e &= 1\,500
 \end{aligned}$$

Et donc 700 adultes et 1 500 enfants sont venus à la fête de village. 

Cette technique de substitution correspond en réalité à l'élimination de Gauss Jordan utilisée dans le cas du calcul de déterminant. En pratique, il est possible de modéliser un système d'équations comme un produit matriciel. Considérons en effet le système

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

On peut écrire les coefficients des variables  $x$  et  $y$  de ce système sous la forme de la matrice  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , et ainsi écrire la partie gauche de ce système comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En effet, calculer ce produit résulte en la matrice  $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$ , et l'égaliser à la matrice des termes indépendants  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  correspond exactement au système original.

Dans le cas du système formé des équations (8.1) et (8.2), on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\,200 \\ 5\,500 \end{pmatrix}}_B$$

Pour procéder par élimination de Gauss-Jordan, augmentons la matrice  $A$  du vecteur colonne  $B$ , pour obtenir  $[A|B]$  :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 4 & \frac{3}{2} & 5\,500 \end{array} \right)$$

Le but ici est d'obtenir par Gauss-Jordan une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. On a

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -3\,750 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & 1 & 1\,500 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -\frac{2}{5}L_2$$

La dernière ligne de cette matrice donne  $e = 1\,500$ . En substituant  $e$  par sa valeur dans la première ligne, on a  $a = 2\,200 - e = 700$ . Ces solutions correspondent exactement à la substitution effectuée « à la main » en début de cette section.

## 8.2 Indépendance linéaire

En pratique, tout système de  $n$  équations à  $n$  inconnues<sup>1</sup> peut être modélisé comme un tel produit matriciel<sup>2</sup>  $AX = B$  sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

1. On considérera à la fin de cette section les cas de systèmes « non carrés ».

2. Notez que si l'on connaît l'inverse de la matrice  $A$ , on peut calculer la solution  $X$  de ce système comme  $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ .

On note que, à l'évidence, si deux lignes de ce système sont identiques, le système n'admettra pas une unique solution réelle, dans la mesure où il sera réduit à un système à  $n - 1$  équations et à  $n$  inconnues. De la même manière, si deux colonnes sont identiques, résoudre le système est souvent impossible dans la mesure où il est réduit à un système à  $n$  équations et  $n - 1$  inconnues. D'un point de vue théorique, cette remarque implique que deux lignes ou colonnes de  $A$  soient identiques, et en conséquence, que  $\det A = 0$ .

Cette caractérisation des systèmes « impossibles » à résoudre en fonction de la forme de leurs équations sous-jacentes, ou des matrices en fonction de leur déterminant est souvent appelée *l'indépendance linéaire*. Pour rappel, la définition 6.5 (p. 153) introduit le concept de vecteurs *colinéaires*, c'est-à-dire de vecteurs multiples l'un de l'autre. On peut étendre cette définition pour décrire un ensemble de vecteurs comme *linéairement dépendant*.

### Définition 8.1

Soit  $S = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S$  est dit linéairement dépendant s'il existe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}. \quad (8.3)$$

Si une telle écriture n'est pas possible, les vecteurs sont dits linéairement indépendants.

Notons que si au moins l'un de ces scalaires  $\lambda$  n'est pas nul (sans perte de généralité, supposons  $\lambda_1$ ), on peut écrire l'équation (8.3) comme

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{v}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{v}_n,$$

c'est-à-dire exprimer  $\vec{v}_1$  comme une combinaison linéaire de  $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ .

En conséquence, si l'on considère un système comme une écriture matricielle  $AX = B$ , et les lignes de la matrice  $A$  comme un ensemble de vecteurs appelés *vecteurs lignes*, on peut déduire le théorème suivant.

**Théorème 8.2**

Soit un système d'équations linéaires  $AX = B$  à variables réelles, ce système possède une unique solution si et seulement si

- l'ensemble des vecteurs lignes de  $A$  est linéairement indépendant,
- $\det A \neq 0$ .

Ces deux propositions sont équivalentes.

**Exemple 8.2.** Soit le système

$$\begin{cases} x & +3y & -z & = & 2 \\ -2x & +2y & +3z & = & 3 \\ -3x & +7y & +5z & = & 1 \end{cases}$$

Ce système peut être écrit comme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et en notant les lignes  $A$  comme  $\vec{l}_1$ ,  $\vec{l}_2$  et  $\vec{l}_3$ , on remarque que

$$\begin{aligned} \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 &= (1, 3, -1) + 2 \cdot (-2, 2, 3) \\ &= (-3, 7, 5) \\ &= \vec{l}_3, \end{aligned}$$

et donc, on a pu exprimer  $l_3$  comme une combinaison linéaire de  $l_1$  et  $l_2$ , et donc, par le théorème 8.2, ce système ne possède pas de solution unique.

Alternativement, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 7 \cdot (-1) \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= 10 - 27 + 14 - 6 + 30 - 21 \\ &= 54 - 54 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc, toujours par le théorème 8.2, ce système ne possède pas de solution unique.



Si l'on essaie de résoudre ce système par substitution, par exemple, en isolant  $x$  dans la première équation pour obtenir

$$x = 2 - 3y + z. \quad (8.4)$$

En substituant  $x$  par sa valeur dans la deuxième et troisième équation, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2(2 - 3y + z) + 2y + 3z = 3 \\ -3(2 - 3y + z) + 7y + 5z = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 8y + z = 7 \\ 16y + 2z = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut continuer la substitution, mais on remarque que ces équations décrivent les graphes de deux droites parallèles. Elles n'ont donc pas d'intersection, et en conséquence, le système n'admet pas de solution. ◀

**Exemple 8.3.** Soit le système

$$\begin{cases} x & +3y & -z & = & 2 \\ -2x & +2y & +3z & = & 3 \\ -3x & +7y & +5z & = & 8 \end{cases}$$

Ce système est identique à celui du système de l'exemple 8.2, à l'exception du terme indépendant de la troisième équation. Ainsi, en reprenant les notations de l'exemple 8.2, on a toujours  $\vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 = \vec{l}_3$  et  $\det(A) = 0$ , et donc ce système ne possède pas de solution unique.

En résolvant ce système par substitution, par exemple, en isolant  $x$  dans la première équation pour obtenir

$$x = 2 - 3y + z. \quad (8.5)$$

En substituant  $x$  par sa valeur dans la deuxième et troisième équation, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2(2 - 3y + z) + 2y + 3z = 3 \\ -3(2 - 3y + z) + 7y + 5z = 8 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 8y + z = 7 \\ 16y + 2z = 14 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut continuer la substitution, mais on remarque que ces équations décrivent les graphes de deux droites confondues. La solution de ce système est donc l'ensemble des points de la droite de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $8y + z = 7$  (cette droite est parallèle à l'axe  $ox$ ). Comme annoncé, la solution n'est donc pas unique. ◀

Ce dernier exemple justifie également l'hypothèse de systèmes matriciels de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . En effet, si la matrice engendrée par le système n'est pas carrée,

- soit il y a plus de variables que d'équations linéairement indépendantes,
- soit il y a plus d'équations linéairement indépendantes que de variables.

Dans le premier cas, deux situations peuvent se produire, illustrées par les exemples 8.2 et 8.3 exprimant un vecteur ligne comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs lignes :

- soit le système n'admet pas de solution, car il se réduit à des équations de courbes sans intersection,
- soit le système possède une infinité de solutions, car il se réduit aux équations de courbes confondues.

Le second cas est illustré ci-dessous.

**Exemple 8.4.** Soit le système

$$\begin{cases} x & +4y & = & 16 \\ -2x & +y & = & 1 \\ -x & +3y & = & 2 \end{cases}$$

Comme on peut le constater à la figure 8.1, ce système est impossible. En effet, les trois équations du système décrivent le graphe de trois droites, qui ne se coupent pas en un point. Le système n'a donc pas de solution.

Analytiquement, on note que les vecteurs  $\vec{v}_1 = (1, 4)$ ,  $\vec{v}_2 = (-2, 1)$  et  $\vec{v}_3 = (-1, 3)$  sont linéairement dépendants, car  $-5\vec{v}_1 + -7\vec{v}_2 + 9\vec{v}_3 = \vec{0}$ . Par le théorème 8.2, le système n'admet pas de solution. ◀

En relation avec le concept d'indépendance linéaire, on introduit le concept de *rang* d'une matrice.

### Définition 8.3

*Le rang d'une matrice  $A$ , noté  $\text{rang}(A)$ , est le nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants de cette matrice.*

À titre de conclusion, on peut donc reformuler le théorème 8.2 de la manière suivante.

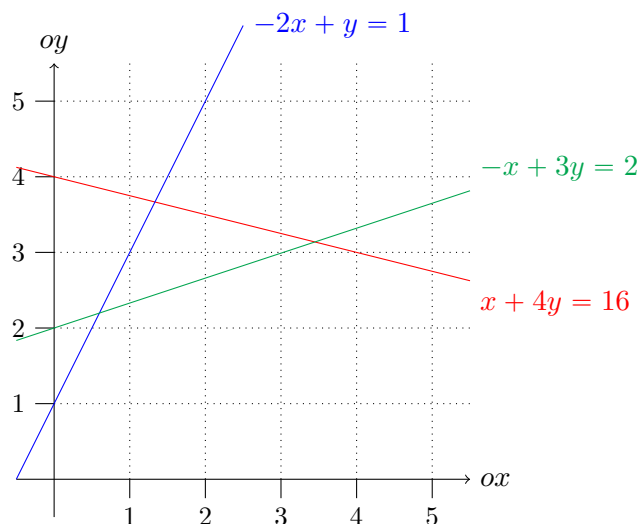


FIGURE 8.1 – Illustration géométrique d'un système

**Corollaire 8.4**

*Soit un système d'équations linéaires  $AX = B$  avec  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ce système possède une unique solution si et seulement si  $\text{rang}(A) = n$ .*

Les exemples 8.2, 8.3 et 8.4 illustrent le cas où  $\text{rang}(A) < n$ .

Notez que pour trouver le rang d'une matrice, on peut utiliser la méthode de Gauss-Jordan.

**Propriété 8.5**

*Soit une matrice  $A$  échelonnée par la méthode de Gauss-Jordan, le rang de  $A$  est égal au nombre de pivots de  $A$ .*

**Exemple 8.5.** Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

de l'exemple 8.2. On peut l'échelonner comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 16 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux pivots : le 1 de la première colonne, et le 8 de la deuxième colonne (il n'y a pas de pivot sur la troisième colonne, car la troisième ligne ne contient pas d'élément non nul). On en conclut donc que le rang de  $A$  est égal à 2. ◀

**Exemple 8.6.** Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

de l'exemple 8.2. On peut l'échelonner comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{9}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

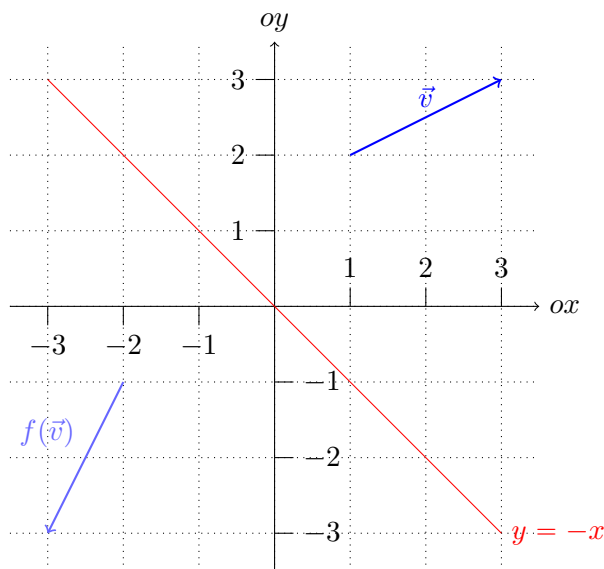
Cette matrice a deux pivots : le 1 de la première colonne, et le 9 de la deuxième colonne. On en conclut donc que le rang de  $A$  est égal à 2. ◀

### 8.3 Applications linéaires

Intuitivement, une application linéaire est une transformation d'espace qui fixe l'origine (l'origine ne bouge pas) et préserve les droites (une droite, avant la transformation, est toujours une droite après la transformation). Par exemple, les trois points  $(2, 1)$ ,  $(4, 2)$  et  $(8, 4)$  sont alignés. Si l'on construit l'image de ces trois points par une symétrie centrale de centre  $(0, 0)$ , ces trois points sont envoyés respectivement sur  $(-2, -1)$ ,  $(-4, -2)$  et  $(-8, -4)$  : ils sont toujours alignés. Ceci étant vrai pour n'importe quels trois points alignés, c'est donc une application linéaire.

**Exemple 8.7.** Considérons une symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$ . Cette situation est illustrée à la figure 8.2, avec un vecteur  $\vec{v}$  et son image par la symétrie orthogonale<sup>3</sup>.

3. Pour des raisons de présentation, le vecteur  $\vec{v}$  n'a délibérément pas été basé en  $(0, 0)$ . Pour rappel, contrairement en physique, les vecteurs en mathématiques n'ont pas d'origine.

FIGURE 8.2 – Illustration d'une symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$ 

On remarque que l'image d'un vecteur  $(v_x, v_y)$  par l'application est  $(-v_y, -v_x)$ . Or, cette image peut être directement calculée en multipliant la matrice<sup>4</sup>

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

par la matrice colonne  $(v_x, v_y)$ .

Par exemple, l'image  $f(\vec{v})$  de  $\vec{v} = (2, 1)$  est calculée comme

$$S \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond bien à la construction géométrique effectuée à la figure 8.2 (on a  $f(\vec{v}) = (-1, -2)$ ). ◀

Plus formellement, on définit le concept d'application linéaire comme suit.

---

4. On verra en section 8.4 comment obtenir cette matrice.

**Définition 8.6**

Une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^n$ ,
- quels que soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ ,
- quels que soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ .

Ainsi, les applications linéaires sont considérées comme des fonctions prenant en paramètre un vecteur et retournant un autre vecteur. Toutefois, on utilisera rarement une notation telle que  $f((2, 3))$  pour dénoter l'image du vecteur  $(2, 3)$ , et on condensera la notation en  $f(2, 3)$ .

**Exemple 8.8.** Considérons  $f$  définie comme la symétrie centrale de centre  $O = (0, 0)$ , telle qu'illustrée à la figure 8.3. Par exemple, on a  $f(0, 1) = (0, -1)$  et  $f(1, 0) = (-1, 0)$ . On remarque que  $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$ , et que

$$f(1, 1) = f((0, 1) + (1, 0)) = (0, -1) + (-1, 0) = (-1, -1).$$

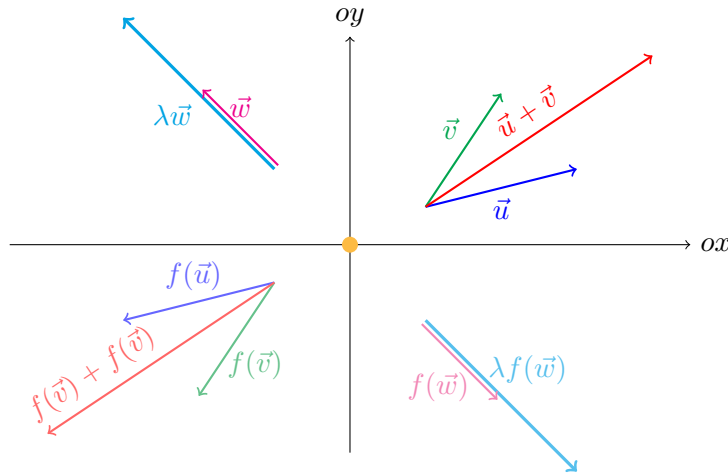


FIGURE 8.3 – Illustration d'une symétrie centrale de centre  $O$

Plus généralement, l'image d'un vecteur  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  par cette symétrie est égale à  $(-v_x, -v_y)$ . De la même manière, l'image de  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  est égale à

$(-u_x, -u_y)$ . Vérifions que  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ . On a

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f((u_x, u_y) + (v_x, v_y)) \\ &= f((u_x + v_x, u_y + v_y)) \\ &= (-u_x - v_x, -u_y - v_y) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

De la même manière, vérifions que quel que soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $f(\lambda\vec{w}) = \lambda f(\vec{w})$ , pour tout  $\vec{w} = (w_x, w_y)$ . On a

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{w}) &= f(\lambda(w_x, w_y)) \\ &= f((\lambda w_x, \lambda w_y)) \\ &= (-\lambda w_x, -\lambda w_y) \\ &= \lambda f(\vec{w}) \end{aligned}$$

Ces deux points démontrent donc que la symétrie centrale de centre 0 est une application linéaire. ◀

En pratique, on peut représenter une application linéaire<sup>5</sup> de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  par une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

En effet, on remarque que lors de lorsque l'on utilise la notation  $\vec{v} = (2, 3)$ , on exprime  $\vec{v}$  comme une combinaison linéaire des vecteurs<sup>6</sup>  $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0)$  et  $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)$ , sous la forme

$$\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1).$$

En conséquence, on peut également définir une application linéaire<sup>7</sup> de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  en définissant l'image des vecteurs  $\vec{\varepsilon}_1$  et  $\vec{\varepsilon}_2$ .

**Exemple 8.9.** Considérons la symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$ . C'est une application linéaire, définie sous forme matricielle comme

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. En toute généralité, on peut représenter une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  par une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Toutefois, dans le cadre de ce cours, on se limitera aux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , représentées par des matrices carrées.

6. On dit que ces vecteurs forment *une base*. Ce concept est détaillé à la section 8.4.

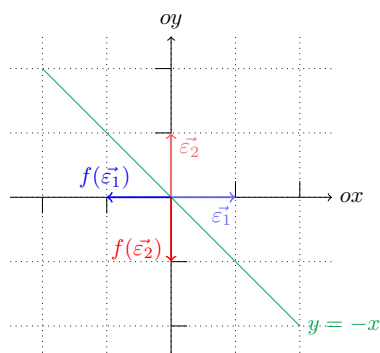
7. Dans le cadre de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on la définira en fonction de  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .

Calculons les images des vecteurs  $\vec{\varepsilon}_1$  et  $\vec{\varepsilon}_2$  par cette symétrie. On a

$$f(1, 0) = (0, -1),$$

$$f(0, 1) = (-1, 0),$$

tel qu'illustré à la figure 8.4.



(a) Illustration graphique

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

↓ ↓  
 $f(\vec{\varepsilon}_1)$   $f(\vec{\varepsilon}_2)$

(b) Forme matricielle

FIGURE 8.4 – Illustration de la symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$

On remarque que la matrice  $S$  décrit exactement les images des vecteurs  $\vec{\varepsilon}_1$  et  $\vec{\varepsilon}_2$ , respectivement dans les colonnes 1 et 2. ◀

Sur base de l'exemple ci-dessus, on remarque les points suivants.

### Propriété 8.7

Soit une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

1. on peut en toute généralité définir  $f$  sous forme matricielle  $A$  en exprimant en colonne l'image des vecteurs  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ , etc.,
2. le produit matriciel  $A \cdot \vec{v}$  permet de calculer  $f(\vec{v})$ .

**Exemple 8.10.** Considérons les applications linéaires suivantes de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

- $A_1$  : la symétrie orthogonale d'axe  $oy$ ,
- $A_2$  : la symétrie centrale de centre  $(1, 1)$ ,
- $A_3$  : la dilatation<sup>8</sup> de facteur  $(2, 3)$ ,

8. Ces transformations sont aussi appelées rétrécissements, agrandissements ou encore homothéties.



- $A_4$  : la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  (rad) autour de l'origine.

Ces quatre applications linéaires peuvent être exprimées sous forme matricielles comme suit.

- $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  car  $f(1, 0) = (-1, 0)$  et  $f(0, 1) = (0, 1)$ ,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  car  $f(1, 0) = (-1, 0)$  et  $f(0, 1) = (0, -1)$ ,
- $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  car  $f(1, 0) = (2, 0)$  et  $f(0, 1) = (0, 3)$ ,
- $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  car  $f(1, 0) = (0, 1)$  et  $f(0, 1) = (-1, 0)$ .

Ces applications linéaires sont illustrées à la figure 8.5. ◀

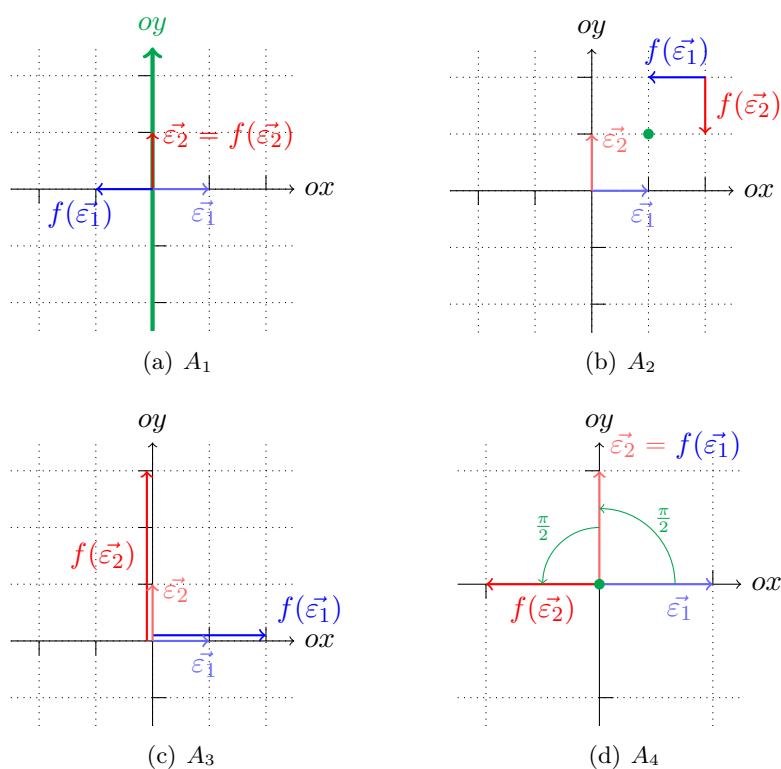


FIGURE 8.5 – Illustration d'applications linéaires

## 8.4 Bases et changements de bases

On a vu dans la section précédente qu'il était possible de modéliser une application linéaire sous forme matricielle en exprimant en colonne les images des vecteurs  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 1)$ . En pratique, cet ensemble de vecteurs est appelé une *base*.

Intuitivement, une base est un ensemble d'éléments permettant de décrire un objet. Par exemple, on utilise souvent la base décimale (la base 10) pour exprimer les nombres. Ainsi, le nombre 2 347 peut être écrit comme

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Dans le cadre concret de  $\mathbb{R}^2$ , on peut exprimer n'importe quel vecteur en fonction des vecteurs  $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0)$  et  $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)$ . Par exemple, le vecteur  $\vec{v} = (3, 2)$  peut être défini comme

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) \\ &= 3\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2. \end{aligned}$$

Cette situation est illustrée à la figure 8.6.

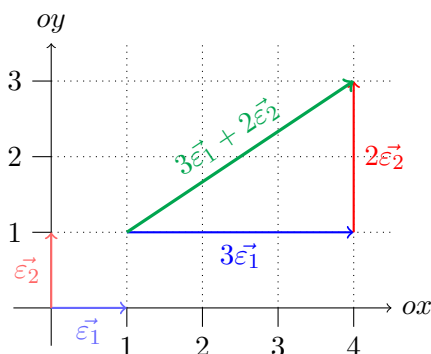


FIGURE 8.6 – Illustration d'une base vectorielle

Formellement, une *base* est un ensemble de vecteurs  $\vec{\varepsilon}_i$  linéairement indépendants<sup>9</sup> qui permet d'exprimer n'importe quel vecteur comme une combinaison

9. On dit qu'une base est libre

linéaire<sup>10</sup> des  $\vec{\varepsilon}_i$ . La base particulière de  $\mathbb{R}^n$  définie comme  $\{\vec{\varepsilon}_i\}$  où les composantes de  $\vec{\varepsilon}_i$  sont toutes nulles à l'exception de la  $i^{\text{ème}}$  est appelée la *base canonique*. Par exemple, dans  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_1 &= (1, 0, 0), \\ \vec{\varepsilon}_2 &= (0, 1, 0), \\ \vec{\varepsilon}_3 &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Notez que bien que l'écriture d'un vecteur comme une combinaison linéaire d'une base donnée est *unique*, on peut trouver plusieurs bases pour un même espace de vecteurs. Par exemple, les peintres composent souvent leurs couleurs comme une combinaison de magenta, de jaune et de bleu, alors qu'en informatique, il est courant de les exprimer comme une combinaison de rouge, de vert et de bleu.

**Notation 8.1.** On note  $\varepsilon$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Ainsi, parfois, il est pratique de changer l'écriture d'un vecteur d'une base vers une autre. En toute généralité, cela signifie que l'on dispose d'un vecteur  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  écrit dans la base canonique, que l'on souhaite écrire dans une base  $\phi$  arbitraire.

**Notation 8.2.** Soit  $\phi = \{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n\}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\vec{v}_\varepsilon$  l'écriture d'un vecteur  $\vec{v}$  dans la base canonique et  $\vec{v}_\phi$  l'écriture de  $\vec{v}$  dans la base  $\phi$ . Quand le contexte est clair, on notera simplement  $\vec{v}_\varepsilon$  comme  $\vec{v}$ .

Exprimer ainsi un vecteur  $\vec{v}$  depuis la base  $\varepsilon$  vers une base  $\phi$  est effectuer un *changement de base*. Cette opération est une application linéaire, que l'on applique comme suit.

Dans le cadre de  $\mathbb{R}^2$ , supposons que l'on dispose d'un vecteur  $\vec{v}$  que l'on souhaite l'écrire dans une base  $\phi = \{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2\}$ , avec  $\vec{\phi}_1 = (\phi_{1,x}, \phi_{1,y})_\varepsilon$  et  $\vec{\phi}_2 = (\phi_{2,x}, \phi_{2,y})_\varepsilon$ , tel qu'illustré à la figure 8.7.

On sait que l'on pourra écrire  $\vec{v} = (v_x, v_y)_\varepsilon$  comme

$$\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2, \tag{8.6}$$

---

10. On dit qu'une base est génératrice

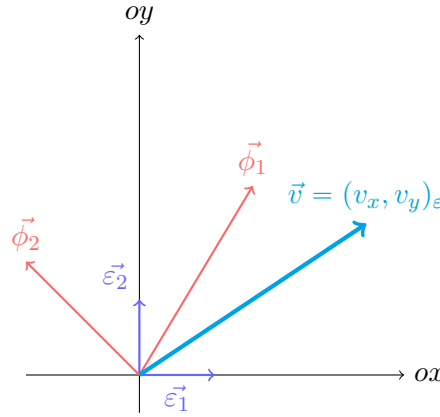


FIGURE 8.7 – Illustration d'un changement de base

pour certains coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réels. Cette dernière ligne correspond à l'écriture de  $\vec{v}$  dans la base  $\phi$ , au même titre que  $\vec{v} = (2, 3)_\varepsilon = 2 \cdot \vec{\varepsilon}_1 + 3 \cdot \vec{\varepsilon}_2$ . L'objectif d'un changement de base est de trouver ces coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

On peut poursuivre l'écriture de l'équation (8.6) comme

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \phi_{1,x} & \lambda_1 \phi_{1,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \phi_{2,x} & \lambda_2 \phi_{2,y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \phi_{1,x} + \lambda_2 \phi_{2,x} & \lambda_1 \phi_{1,y} + \lambda_2 \phi_{2,y} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

On peut trouver les inconnues  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par exemple en écrivant cette dernière équation sous forme matricielle, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour trouver  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il suffit de calculer la matrice inverse de  $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}$ , tel qu'illustré en section 7.5.

### Définition 8.8

On appelle matrice de passage de  $\phi$  à  $\varepsilon$  la matrice  $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}$  et la matrice de passage de  $\varepsilon$  à  $\phi$  la matrice  $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1}$ . Cette définition s'étend facilement aux matrices d'ordre supérieur.

En effet, ces matrices permettent d'exprimer des vecteurs depuis  $\varepsilon$  vers  $\phi$ , et inversement. Par exemple, soit  $\vec{v} = (v_x, v_y)_\varepsilon = (v'_x, v'_y)_\phi$ , on a

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Notons que cette définition de matrice de passage dans  $\mathbb{R}^2$  est facilement extensible à  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ , etc.

**Exemple 8.11.** Considérons le vecteur  $\vec{v} = (1, 3)_\varepsilon$ , exprimons ce vecteur en fonction de la base<sup>11</sup>  $\phi = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ . Cette situation est illustrée à la figure 8.8.

Dans la base  $\phi$ , en posant  $\vec{\phi}_1 = (1, 0)_\phi$  et  $\vec{\phi}_2 = (0, 1)_\phi$  on sait que  $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ , et que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. On ne montrera pas ici que  $\phi$  est une base.

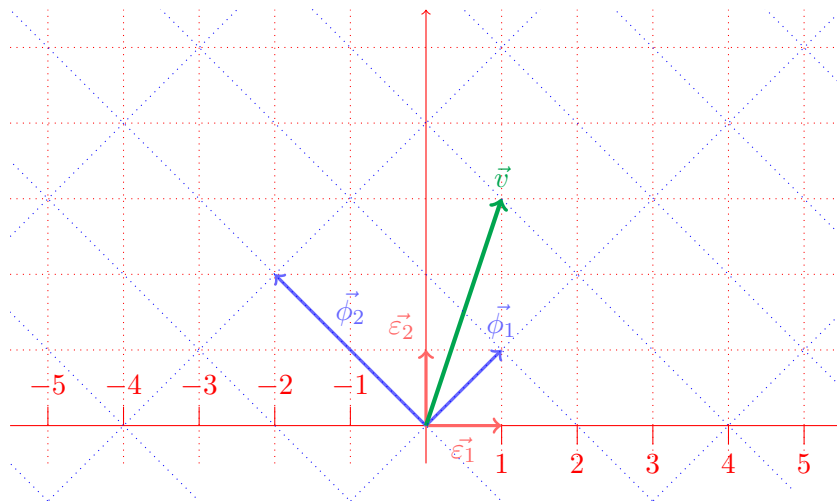


FIGURE 8.8 – Changement de base en pratique

Calculons  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ . On échelonne la matrice de la manière suivante, en étendant par la matrice identité :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \longrightarrow \frac{1}{4}L_2 \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

On a donc  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ . On calcule donc  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  comme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme  $\vec{\phi}_1 = (1, 0)_\phi$  et  $\vec{\phi}_2 = (0, 1)_\phi$  et  $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2 \cdot (1, 1)_\varepsilon + \frac{1}{2} \cdot (-2, 2)_\varepsilon \\ &= 2 \cdot (1, 0)_\phi + \frac{1}{2} \cdot (0, 1)_\phi \\ &= \left(2, \frac{1}{2}\right)_\phi \end{aligned}$$

On remarque que cela correspond bien à la construction géométrique illustrée à la figure 8.8.

Par ailleurs, on constate que la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  est bien la matrice de passage de  $\varepsilon$  à  $\phi$  : elle permet de calculer l'expression de vecteurs depuis  $\varepsilon$  vers  $\phi$ , comme on l'a montré avec  $\vec{v}$ . À titre d'exemple additionnel, on a

$$\vec{w} = (0, 4)_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1)_\phi,$$

ce qui correspond à la construction géométrique illustrée à la figure 8.8. De la même manière, la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est bien la matrice de passage de  $\phi$  à  $\varepsilon$  : elle permet de calculer l'expression de vecteurs depuis  $\phi$  vers  $\varepsilon$ , par exemple,

$$\vec{w} = (2, 1)_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = (0, 4)_\varepsilon,$$

comme attendu. ◀

**Exemple 8.12.** Soit  $\vec{v} = (6, 6, 3)_\varepsilon$ , exprimons ce vecteur dans la base  $\phi =$

$\left\{ \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3 \right\}$  telle que

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_1 &= (1, 2, 0)_\varepsilon, \\ \vec{\phi}_2 &= (2, 2, 2)_\varepsilon, \\ \vec{\phi}_3 &= (1, 2, 6)_\varepsilon.\end{aligned}$$

Dans la base  $\phi$ , en posant  $\vec{\phi}_1 = (1, 0, 0)_\phi$ ,  $\vec{\phi}_2 = (0, 1, 0)_\phi$  et  $\vec{\phi}_3 = (0, 0, 1)$  on sait que  $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3$ , et que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} & \phi_{3,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} & \phi_{3,y} \\ \phi_{1,z} & \phi_{2,z} & \phi_{3,z} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Calculons  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ . On échelonne la matrice de la manière suivante, en étendant par la matrice identité :

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2} \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) & \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}\end{aligned}$$



$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

On a donc  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ . On calcule donc  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  comme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a  $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2})$ . On peut le vérifier, car comme  $\vec{\phi}_1 = (1, 0, 0)_\phi$ ,  $\vec{\phi}_2 = (0, 1, 0)_\phi$  et  $\vec{\phi}_3 = (0, 0, 1)_\phi$ , et  $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 0)_\varepsilon + 3 \cdot (2, 2, 2)_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 6)_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0)_\phi + 3 \cdot (0, 1, 0)_\phi - \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 1)_\phi \\ &= \left( \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} \right)_\phi \end{aligned}$$



## 8.5 Vecteurs et valeurs propres

Dans le cadre des applications linéaires, un concept important est celui de *vecteurs propres*. Intuitivement, un vecteur propre est un vecteur dont la direction n'est pas modifiée par l'application linéaire ; mais elle peut modifier sa taille. Le multiplicateur de taille (positif ou négatif) est appelé une valeur propre.

**Exemple 8.13.** Considérons une symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$ . Cette situation est illustrée à la figure 8.9.

Les seuls vecteurs dont les directions sont inchangées sont

- les vecteurs perpendiculaires à l'axe de symétrie : tous ces vecteurs sont égaux à un facteur multiplicatif près (ce facteur est  $-1$ ),
- les vecteurs confondus à l'axe de symétrie : tous ces vecteurs sont égaux à un facteur multiplicatif près (ce facteur est  $1$ ).

En conséquence, le vecteur  $\vec{\Lambda}_1 = (1, 1)$  est un vecteur propre, de valeur propre  $\lambda_1 = -1$  (le vecteur résultant de l'application a été multiplié par le scalaire  $-1$ ). De la même manière, le vecteur  $\vec{\Lambda}_2 = (-1, 1)$  est un vecteur propre, de valeur propre  $\lambda_2 = -1$ .

On peut également vérifier que l'image  $f(\vec{\Lambda}_1)$  et  $f(\vec{\Lambda}_2)$  des vecteurs  $\vec{\Lambda}_1$  et  $\vec{\Lambda}_2$  est bien inchangée à un facteur multiplicatif près :

$$\begin{aligned} f(\vec{\Lambda}_1) &= -\vec{\Lambda}_1, \\ f(\vec{\Lambda}_2) &= \vec{\Lambda}_2. \end{aligned}$$

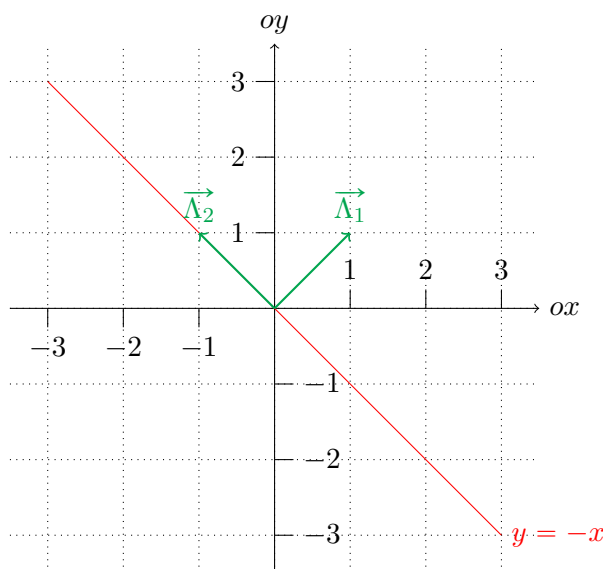


Par ailleurs, dans la section 8.4, on a montré diverses manières d'effectuer des changements de base. Entre autres, on a vu qu'effectuer un changement de base ne change pas les vecteurs en question, mais seulement leur expression. On peut donc se demander s'il existe des changements de base judicieux permettant d'exprimer simplement des applications linéaires? En particulier, existe-t-il des changements de base particuliers tels que la matrice associée à une application linéaire soit triangulaire, ou mieux, diagonale?

En pratique, les éléments diagonaux d'une telle matrice diagonale (s'il est possible de la trouver) sont également les valeurs propres de la matrice. Cette section détaille donc comment les calculer, ainsi que les vecteurs propres.

#### Définition 8.9

Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , le polynôme  $\det(A - \lambda \mathbb{1})$  est appelé le polynôme caractéristique de  $M$ .

FIGURE 8.9 – Illustration d'une symétrie orthogonale d'axe  $y = -x$ 

**Exemple 8.14.** Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ , le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, par l'application de la règle de Sarrus,

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) + 2 \cdot (-3) + 0 - 0 - 2(-2-\lambda) - 2 \cdot (-5) \cdot (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 4)(-2-\lambda) - 6 + 4 + 2\lambda + 10 - 10\lambda \\ &= -2\lambda^2 + 10\lambda - 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 8\lambda + 8 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$



Notez que, dans l'exemple ci-dessus, on a pris la peine de factoriser le polynôme ci-dessus, ce qui permet, entre autres, de facilement trouver ses racines.

En effet, les racines du polynôme caractéristique jouent un rôle crucial dans le calcul des vecteurs et valeurs propres d'une matrice. En pratique, ces racines *sont* les valeurs propres de la matrice considérée.

### Définition 8.10

Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les valeurs propres de  $M$  sont les racines du polynôme caractéristique de  $M$ .

### Définition 8.11

Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ , les vecteurs propres  $\vec{\lambda}$  associés à la valeur propre  $\lambda$  sont les solutions du système  $(M - \lambda \mathbb{1}) \vec{\lambda} = 0$ .

**Exemple 8.15.** Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(9 - \lambda) - 4 \cdot 4 \cdot (2 - \lambda) \\ = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22$$

Pour calculer les racines de ce polynôme  $P(\lambda)$ , on peut soit utiliser une formule complexe, soit tester d'autres critères, telle que la règle d'Horner. Dans ce cas précis, en testant les diviseurs entiers de 22, on remarque que

$$P(1) = -1 + 34 - 35 + 22 = 0,$$

et donc que  $P$  est divisible par  $\lambda - 1$ . Ainsi, on a  $P(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (a\lambda^2 + b\lambda + c)$ . Pour trouver  $a$ ,  $b$  et  $c$ , il faut, par exemple, effectuer la division euclidienne, tel qu'illustré en figure 8.10.

Ainsi, on a  $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 13\lambda + 22)$ . En calculant les racines du facteur de droite, on obtient finalement  $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 11)$ .

Les racines de ce polynôme sont donc  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  et  $\lambda_3 = 11$ . Ce sont les valeurs propres de  $M$ .

$$\begin{array}{r|l}
 -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 & \lambda - 1 \\
 \hline
 \lambda^3 - \lambda^2 & \\
 \hline
 13\lambda^2 - 35\lambda & \\
 -13\lambda^2 + 13\lambda & \\
 \hline
 -22\lambda + 22 & \\
 22\lambda - 22 & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \lambda^2 - 13\lambda + 22 &
 \end{array}$$

FIGURE 8.10 – Division euclidienne du polynôme caractéristique

Soit  $\Lambda_1 = (x_1, y_1, z_1)$  un vecteur propre associé à  $\lambda_1 = 1$ . On sait que ce vecteur est solution du système

$$\begin{aligned}
 & (M - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot \vec{\Lambda}_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2y_1 + 4z_1 = 0 \\ 4y_1 + 8z_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2z_1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est  $\{ (0, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$ . On peut par exemple choisir  $\vec{\Lambda}_1 = (0, -2, 1)$  comme solution.

Calculons à présent  $\vec{\Lambda}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  : un vecteur propre associé à  $\lambda_2 = 2$ . On

sait qu'un tel vecteur est solution du système

$$\begin{aligned} (M - \lambda_2 \mathbf{1}) \cdot \vec{\Lambda}_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} y_2 + 4z_2 = 0 \\ 4y_2 + 7z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est  $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . On peut par exemple choisir  $\vec{\Lambda}_2 = (1, 0, 0)$  comme solution.

Calculons finalement  $\vec{\Lambda}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  : un vecteur propre associé à  $\lambda_3 = 11$ . On sait que ces vecteurs sont solutions du système

$$\begin{aligned} (M - \lambda_3 \mathbf{1}) \cdot \vec{\Lambda}_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -8y_3 + 4z_3 = 0 \\ 4y_3 - 2z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = \frac{1}{2}z_3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est  $\{(0, \frac{1}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ . On peut par exemple choisir  $\vec{\Lambda}_2 = (0, \frac{1}{2}, 1)$  comme solution.

On peut donc conclure en affirmant que  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$  admet

- $(0, -2, 1)$  comme vecteur propre de valeur propre 1,
- $(1, 0, 0)$  comme vecteur propre de valeur propre 2,
- $(0, \frac{1}{2}, 1)$  comme vecteur propre de valeur propre 11.



**Remarque 8.16.** Sur l'exemple précédent, on note que l'on a fait plusieurs choix arbitraires dans la caractérisation des vecteurs propres. Toutefois, les vecteurs propres étant définis à un multiple près, les choix que l'on a fait n'ont pas d'importance : si  $\vec{\Lambda} \neq \vec{0}$  est un vecteur propre, alors  $k\vec{\Lambda}$  aussi, avec  $k \neq 0$ . Notons également que, par définition, un vecteur propre n'est pas nul, on ne peut donc pas faire des choix de valeurs qui vont conduire à cela.

Le théorème suivant permet de trouver une matrice  $A$  avec des vecteurs et valeurs propres donnés.

**Théorème 8.12**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et  $\vec{\Lambda}_1, \dots, \vec{\Lambda}_n$  les vecteurs propres de  $A$  de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors

$$A = LDL^{-1},$$

avec  $L$  la matrice définie en mettant en colonne les vecteurs  $\vec{\Lambda}_1, \dots, \vec{\Lambda}_n$ , et  $D$  la matrice diagonale composée des éléments  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**Exemple 8.17.** Construisons une matrice  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  admettant

- $(1, 0, 2)$  comme vecteur propre de valeur propre  $-1$ ,
- $(-1, 1, 0)$  comme vecteur propre de valeur propre  $0$ ,
- $(0, 0, 1)$  comme vecteur propre de valeur propre  $1$ .

On a  $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on peut construire  $L^{-1}$  par échelonnage pour obtenir

$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , et on a  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En conséquence, on calcule  $A$  comme

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Ceci conclut la section relative aux applications linéaires, vecteurs et valeurs propres, et le chapitre dédié aux matrices.

## 8.6 Exercices résolus

**Exercice 8.1.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

*Solution.* Procédons par élimination de Gauss-Jordan, en construisant la matrice augmentée  $[A|b]$  du système :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Échelonnons cette matrice.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

À partir de cette étape, on remarque que la matrice du système est triangulaire, et on peut donc procéder par substitution. En effet, cette matrice est équivalente au système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + 2z = 6 \\ -3z = -12 \end{cases},$$

d'où on peut déduire

$$\begin{cases} -3z = -12 \Leftrightarrow z = 4, \\ -y + 2z = 6 \Leftrightarrow -y + 8 = 6 \Leftrightarrow y = 2 \\ x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x + 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$$



On peut également continuer à échelonner la matrice comme suit.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array}$$

Ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$



**Exercice 8.2.** Résolvez en fonction de  $a \in \mathbb{R}$  le système

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + a^2z = a^2 \end{cases}$$

*Solution.* On procède par élimination de Gauss-Jordan, en construisant la matrice augmentée  $[A|b]$  du système :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a^2 & a^2 \end{array} \right).$$

Échelonons cette matrice.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array} \quad (8.7)$$

**PREMIER CAS :**  $a \neq 1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a & -a \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{L_2}{a-1} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{1-a} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & -a-1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad (8.8)$$

Si  $a \neq -2$ , on peut diviser la troisième ligne par  $a+2$ , et on obtient la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a+1}{a+2} \end{array} \right)$$

On tire de la troisième ligne que  $z = -\frac{a+1}{a+2}$ . En substituant  $z$  par sa valeur dans la deuxième ligne, on a  $y = 1 + z = \frac{1}{a+2}$ . Finalement, en substituant  $y$  et  $z$  par leur valeur dans la première ligne, on a  $x = 1 - y - az = \frac{(a+1)^2}{a+2}$ . Si  $a = 2$ , la matrice échelonnée de l'équation (8.8) devient

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

et le système est impossible (car la dernière ligne correspond à l'équation  $0 = 1$ ).

**SECOND CAS :**  $a = 1$  La matrice échelonnée de l'équation (8.7) devient

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ce système est réduit à l'équation  $x + y + z = 1$ . Tous les points de ce plan de sont solutions du système.



**Exercice 8.3.** Parmi les applications suivantes, indiquez lesquelles sont linéaires.

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$ ,
- $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (0, 2y - z, 0)$ ,

- $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$ ,
- $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $(x, y, z) \mapsto x^2 + 2x$ .

*Solution.* Il faut montrer que quels que soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ , et quels que soient un vecteur  $\vec{v}$  et un scalaire  $\lambda$  réel, on a  $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ . Dans les cas suivants, on pose  $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$  et  $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ . On remarque que

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v), \\ \lambda\vec{v} &= (\lambda x_v, \lambda y_v, \lambda z_v)\end{aligned}$$

1. On a

$$\begin{aligned}f_1(\vec{u} + \vec{v}) &= ((x_u + x_v) + 2(y_u + y_v) + 3(z_u + z_v), \\ &\quad 2(y_u + y_v) - (z_u + z_v), \\ &\quad (x_u + x_v) + (z_u + z_v)) \\ &= (x_u + 2y_u + 3z_u, 2y_u - z_u, x_u + z_u) \\ &\quad + (x_v + 2y_v + 3z_v, 2y_v - z_v, x_v + z_v) \\ &= f_1(\vec{u}) + f_1(\vec{v}), \\ f_1(\lambda\vec{v}) &= (\lambda x_v + 2\lambda y_v + 3\lambda z_v, 2\lambda y_v - \lambda z_v, \lambda x_v + \lambda z_v) \\ &= \lambda(x_v + 2y_v + 3z_v, 2y_v - z_v, x_v + z_v) \\ &= \lambda f_1(\vec{v}).\end{aligned}$$

Donc,  $f_1$  est bien une application linéaire.

2. On a

$$\begin{aligned}f_2(\vec{u} + \vec{v}) &= (0, 2(y_u + y_v) - (z_u + z_v), 0) \\ &= (0, 2y_u - z_u, 0) + (0, 2y_v - z_v, 0) \\ &= f_2(\vec{u}) + f_2(\vec{v}), \\ f_2(\lambda\vec{v}) &= (0, 2\lambda y_v - \lambda z_v, 0) \\ &= \lambda(0, 2y_v - z_v, 0) \\ &= \lambda f_2(\vec{v}).\end{aligned}$$

Donc,  $f_2$  est bien une application linéaire.

3. On a

$$\begin{aligned}
 f_3(\vec{u} + \vec{v}) &= ((x_u + x_v) + 2(y_u + y_v) + 3(z_u + z_v), \\
 &\quad 2(y_u + y_v) \cdot (z_u - z_v), \\
 &\quad (x_u + x_v) + (z_u + z_v)) \\
 &\neq (x_u + 2y_u + 3z_u, 2y_u \cdot z_u, x_u + z_u) \\
 &\quad + (x_v + 2y_v + 3z_v, 2y_v \cdot z_v, x_v + z_v) \\
 &= f_3(\vec{u}) + f_3(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

Donc,  $f_3$  n'est pas une application linéaire, car  $f_3(\vec{u} + \vec{v}) \neq f_3(\vec{u}) + f_3(\vec{v})$ .

4. On a

$$\begin{aligned}
 f_4(\vec{u} + \vec{v}) &= (x_u + x_v)^2 + 2(x_u + x_v) \\
 &= x_u^2 + x_v^2 + 2x_u x_v + 2x_u + 2x_v \\
 &\neq (x_u^2 + 2x_u) + (x_v^2 + 2x_v) \\
 &= f_4(\vec{u}) + f_4(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

Donc,  $f_4$  n'est pas une application linéaire, car  $f_4(\vec{u} + \vec{v}) \neq f_4(\vec{u}) + f_4(\vec{v})$ .



**Exercice 8.4.** Modélisez sous forme matricielle les applications linéaires

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$ ,
- $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (0, 2y - z, 0)$ ,
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, x - 2y - z)$ ,
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 3y)$ .

*Solution.* On construit les matrices associées aux applications linéaires de la manière suivante :

$$f_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$



**Exercice 8.5.** Décrivez géométriquement la transformation de  $\mathbb{R}^2$  réalisée par l'application linéaire  $f$  dont la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et calculez l'image du vecteur  $(2, 3)$  par cette application linéaire.

*Solution.* On remarque que

- $\varepsilon_1$  est envoyé sur  $(1, 1)$ , soit une rotation de  $\frac{\pi}{4}$  de centre  $O$  et une dilatation d'un facteur  $\sqrt{2}$ ,
- $\varepsilon_2$  est envoyé sur  $(-2, 2)$ , soit une rotation de  $\frac{\pi}{4}$  de centre  $O$  et une dilatation d'un facteur  $2\sqrt{2}$ .

Cette situation est illustrée à la figure 8.11.

On calcule l'image du vecteur  $(2, 3)$  en calculant

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Donc,  $f(2, 3) = (-4, 8)$ .



**Exercice 8.6.** Soit la base<sup>12</sup>  $\phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 \}$  avec

- $\vec{\phi}_1 = (2, -1, -2)_\varepsilon$ ,
- $\vec{\phi}_2 = (1, 0, -1)_\varepsilon$ ,
- $\vec{\phi}_3 = (-2, 1, 3)_\varepsilon$ ,

calculez les matrices de passage de  $\varepsilon$  vers  $\phi$  et inversement, et exprimez les vecteurs

---

12. Montrer que ces vecteurs forment une base sort du cadre du cours.

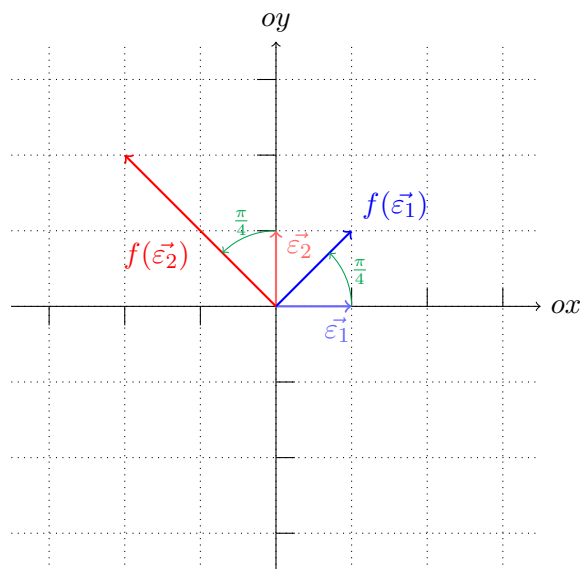


FIGURE 8.11 – Construction géométrique d'une application linéaire

- $(2, 2, -1)_\varepsilon$  dans la base  $\phi$ ,
- $(1, -1, 2)_\phi$  dans la base  $\varepsilon$ .

*Solution.* La matrice de passage de  $\phi$  vers  $\varepsilon$  est simplement la matrice composée des vecteurs colonne  $\vec{\phi}_1$ ,  $\vec{\phi}_2$  et  $\vec{\phi}_3$ , c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'expression de  $(1, -1, 2)_\phi$  dans la base  $\varepsilon$  comme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

donc  $(1, -1, 2)_\phi = (-1, 1, 5)_\varepsilon$ .

Pour calculer la matrice de passage de  $\varepsilon$  à  $\phi$ , il faut calculer l'inverse  $P^{-1}$  de

$P$ . On procède par échelonnage de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & & \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 & \\
 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 & \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow -2L_2 & \\
 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 & \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & 
 \end{array}$$

On peut donc conclure que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , et on peut calculer l'expression de  $(2, 2, -1)_\varepsilon$  dans la base  $\phi$  comme

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix},$$

donc  $(2, 2, -1)_\varepsilon = (-7, -6, -5)_\phi$ . ◀

**Exercice 8.7.** Déterminez les vecteurs propre et valeurs propres associées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

*Solution.* Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned}
 & (5 - \lambda)(-6 - \lambda) - (6 \cdot (-3)) \\
 & = -30 - 5\lambda + 6\lambda + \lambda^2 + 18 \\
 & = \lambda^2 + \lambda - 12
 \end{aligned}$$

Ce polynôme s'annule en  $\lambda_1 = -4$  et  $\lambda_2 = 3$ , qui sont les deux valeurs propres de  $A$ . Pour calculer le vecteur propre  $\vec{\Lambda}_1$  associé à  $\lambda_1$ , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 9x - 3y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont  $\{ (\frac{1}{3}y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ . On a donc, par exemple,  $\vec{\Lambda}_1 = (\frac{1}{3}, 1)$ . Finalement, pour calculer le vecteur propre  $\vec{\Lambda}_2$  associé à  $\lambda_2$ , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = y \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont  $\{ (\frac{3}{2}y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ . On a donc, par exemple,  $\vec{\Lambda}_2 = (\frac{3}{2}, 1)$ .

Dans le cadre de  $B$ , on calcule le polynôme caractéristique comme

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 & -7 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(-\lambda-3)(-\lambda-4) + 8 \cdot 2 \cdot 2 + (-7) \cdot (-2) \cdot 4 \\ &\quad - 2 \cdot (-\lambda-3)(-7) - 4 \cdot 2 \cdot (5-\lambda) - (-\lambda-4) \cdot (-2) \cdot 8 \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \end{aligned}$$

Par la règle d'Horner, en testant les diviseurs entiers de 2, on constate que ce polynôme s'annule en  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_3 = -2$ .

Pour calculer le vecteur propre  $\vec{\Lambda}_1$  associé à  $\lambda_1$ , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 6x + 8y - 7z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$



En écrivant ce système sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -7 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -7 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont  $\{ (\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$ . On a donc, par exemple,  $\vec{\Lambda}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ . Pour calculer  $\vec{\Lambda}_2$  associé à  $\lambda_2$ , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 4x + 8y - 7z = 0 \\ -2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

En écrivant ce système sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont  $\{ (-2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R} \}$ . On a donc, par exemple,  $\vec{\Lambda}_2 = (-2, 1, 0)$ . Finalement, pour calculer le vecteur propre  $\vec{\Lambda}_3$  associé à  $\lambda_3$ , il

faut résoudre le système

$$\begin{cases} 7x + 8y - 7z = 0 \\ -2x - 1y + 2z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

En écrivant ce système sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{7}L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont  $\{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ . On a donc, par exemple,  $\vec{\Lambda}_3 = (1, 0, 1)$ .

En conclusion, on a

- $\lambda_1 = -1$  et  $\vec{\Lambda}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ,
- $\lambda_2 = 1$  et  $\vec{\Lambda}_2 = (-2, 1, 0)$ ,
- $\lambda_3 = -2$  et  $\vec{\Lambda}_3 = (1, 0, 1)$ .



**Exercice 8.8.** Construisez une matrice  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  admettant

- $\lambda_1 = 1$  comme valeur propre de vecteur propre  $(1, 0, 1)$ ,
- $\lambda_2 = 2$  comme valeur propre de vecteur propre  $(0, \frac{1}{2}, 1)$ ,
- $\lambda_3 = 3$  comme valeur propre de vecteur propre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ .

*Solution.* On sait que  $A = LDL^{-1}$ , avec  $L$  la matrice définie en mettant en colonne les vecteurs  $(1, 0, 1)$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ , et  $D$  la matrice diagonale composée des éléments 1, 2 et 3. On a donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculons  $L^{-1}$  par échelonnage. On a

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}$$

Donc, on a  $L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , et en conclusion, on a

$$\begin{aligned} A &= LDL^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice recherchée est donc  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .



Troisième partie

Mathématiques continues



---

## Dérivation et intégration

*Dérivation • Intégration • Exercices résolus*

---

Le calcul infinitésimal (ou tout simplement, le calcul), est une discipline des mathématique étudiant les changements continus, tels que les variations dans l'image d'une fonction.

On divise habituellement le calcul en deux branches principales : le calcul différentiel et le calcul intégral. Intuitivement, le calcul différentiel dénote les changements instantanés dans les pentes de courbes, alors que le calcul intégral traite d'accumulations de quantités et de surfaces et volumes entre différentes courbes.

On note qu'en pratique, le calcul différentiel est souvent plus facile que le calcul intégral qui peut rarement être résolu symboliquement.

Ce chapitre présente une courte introduction à ces deux disciplines : en section 9.1, on présente une courte introduction à la notion de dérivée, et en section 9.2, on aborde deux techniques de calcul intégral. Comme d'habitude, ce chapitre se termine par des exercices résolus en section 9.3.

## 9.1 Dérivation

La dérivation et, *a fortiori*, le calcul différentiel, est la discipline des mathématiques qui étudie la vitesse à laquelle des quantités peuvent changer. Le concept principal étudié par cette discipline est la *dérivée de fonctions*, ainsi que leurs applications.

Le processus consistant à trouver la dérivée d'une fonction est appelé la *dérivation*. Géométriquement, comme détaillé à la section 9.1.1, la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de cette fonction en ce point. Par ailleurs, pour les fonctions réelles, la dérivée d'une fonction en un point est également la meilleure approximation linéaire de cette fonction en ce point.

Ce concept de dérivée au sens géométrique de tangente date de l'antiquité grecque, et a été étudiée par des scientifiques tels qu'Euclide, Archimède et Apollonios de Perga [2, 3, 13, 14]. Archimède a également introduit l'usage des infinitésimaux, précurseurs des limites et de la notation petit  $o$ , très utilisées en analyse.

Le développement moderne du calcul différentiel est néanmoins formellement introduit par Newton en 1693 et Leibniz en 1684 qui ont indépendamment fondé les bases du calcul différentiel et les dérivées<sup>1</sup>.

### 9.1.1 Définition géométrique

Comme mentionné précédemment, on peut interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.

#### Définition 9.1

*La dérivée d'une fonction en un point est égale à la pente de la droite tangente en ce point au graphe de la fonction.*

**Notation 9.1.** La dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $a$  est notée  $f'(a)$ .

1. On notera que bien qu'à l'heure actuelle, le crédit de cette découverte soit accordé aux deux auteurs, à l'époque, Newton et Leibniz se sont mutuellement accusés de plagiat, résultant en la division de la société mathématique du 18<sup>e</sup> siècle.



Sur base de ces définitions, on peut immédiatement déduire *l'équation de la tangente*  $t$  au graphe de  $f$  en le point  $(a, f(a))$  comme

$$t \equiv f'(a)(x - a) + f(a),$$

car la pente<sup>2</sup> de  $t$  est égale à la dérivée de  $f$  en  $a$ .

Cette représentation géométrique est illustrée à la figure 9.1.

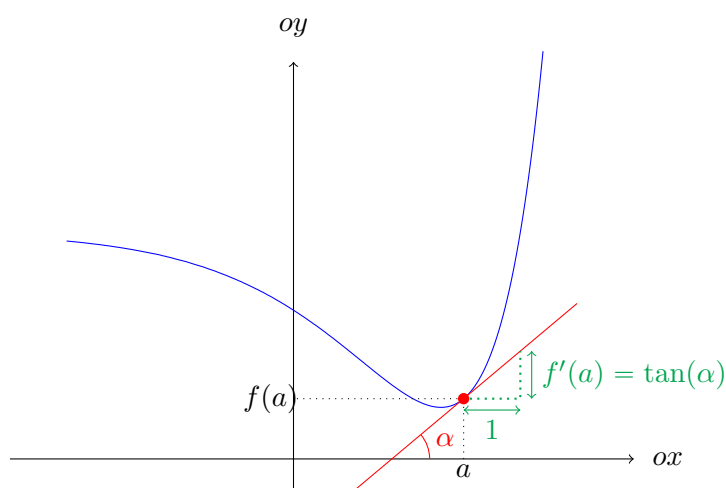


FIGURE 9.1 – Interprétation géométrique de la dérivée

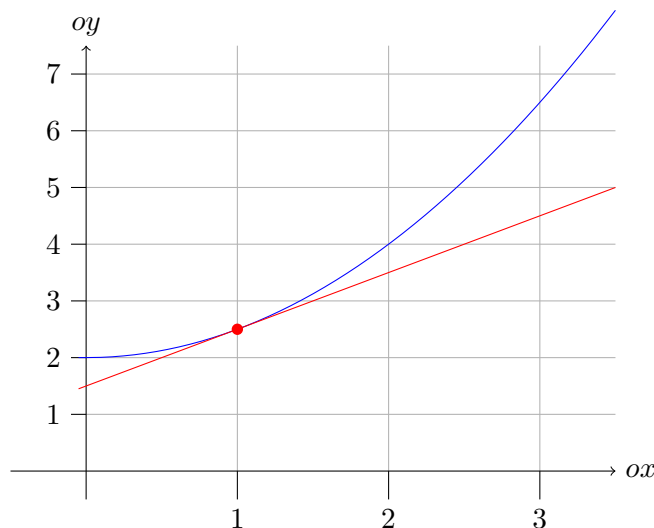
**Exemple 9.1.** Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ . Calculons sa dérivée en  $x = 1$ . Pour cela, traçons la tangente  $t$  au graphe de  $f$  en 1, comme illustré à la figure 9.2.

À l'aide d'un rapporteur, on peut mesurer l'angle de la tangente  $t$  par rapport à l'horizontale, on obtient  $45^\circ$ , c'est-à-dire  $\frac{\pi}{4}$  radians. La tangente de cet angle vaut exactement 1, on en conclut donc que  $f'(1) = 1$ .

On peut vérifier ce calcul à l'aide de l'équation de la tangente, ou de sa

---

2. Notons que cette équation n'est valide que si la tangente considérée n'est pas verticale.

FIGURE 9.2 – Construction de la tangente de  $\frac{1}{2}x^2 + 2$  en 1

construction via le repère cartésien :

$$\begin{aligned}
 t &\equiv 1 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \\
 &\equiv x - 1 + \frac{1}{2} + 2 \\
 &\equiv x + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$



La représentation géométrique de la dérivée permet de mieux comprendre la notion en elle-même et ses différentes propriétés. Elle permet également de comprendre la liaison entre la dérivée et la variation de la fonction, ce qui est sa principale application dans de nombreuses matières en dehors des mathématiques. Cette intuition sera formalisée à la section suivante.

### 9.1.2 Définition analytique

On remarque qu'en observant le graphe d'une fonction, on peut rapidement estimer à la fois le signe, la valeur ou l'ordre de grandeur de la dérivée. En effet,

par exemple, si une fonction est croissante sur un intervalle, la tangente sur cet intervalle est une droite croissante. Dès lors, le coefficient directeur de cette droite est positif, et en conséquence la dérivée aussi. Par ailleurs, « au plus une fonction est croissante », au plus grande sera la valeur de sa dérivée.

Toutefois, pour obtenir la valeur précise de la dérivée, il est nécessaire de recourir à un calcul analytique précis, en utilisant la notion de limite préalablement introduite.

Afin d'introduire cette définition, procédons par approximations successives de la tangente. On sait que la dérivée en  $a$  d'une fonction est la pente de la tangente en ce point. Supposons que l'on s'écarte d'une courte distance  $\Delta x$  de ce point sur l'axe  $ox$ . Ainsi,  $a + \Delta x$  représente une valeur « voisine » de  $a$ . À cet accroissement sur l'axe  $ox$  correspond un accroissement de  $f$  sur l'axe  $oy$ , noté  $\Delta f$ . On remarque que  $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ . Cette situation est illustrée à la figure 9.3.

La pente de la droite passant par les points  $(a, f(a))$  et  $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$  est égale à

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Le but étant d'approcher la tangente par des droites de ce type, supposons que l'on diminue  $\Delta x$  en le faisant tendre vers zéro. En procédant de cette manière, le point  $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$  se rapproche du point  $(a, f(a))$  jusqu'à ce que ces deux points soient confondus. En conséquence, la droite passant par les points  $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$  et  $(a, f(a))$  se rapproche de plus en plus de la tangente de  $f$  en  $a$ , jusqu'à ce que ces deux droites soient également confondues.

Comme la dérivée de  $f$  en  $a$  est précisément la pente de la tangente et que l'on approche la valeur de cette pente avec ces droites successives, on définit analytiquement la dérivée de  $f$  en  $a$  comme

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ou encore comme

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (9.1)$$

Si cette limite existe, on dit que  $f$  est *dérivable* en  $a$ . Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si la limite n'existe pas, par exemple si elle n'a pas la même valeur à gauche qu'à droite de  $a$ , on dit que la fonction  $f$  n'est *pas dérivable* en  $a$ .

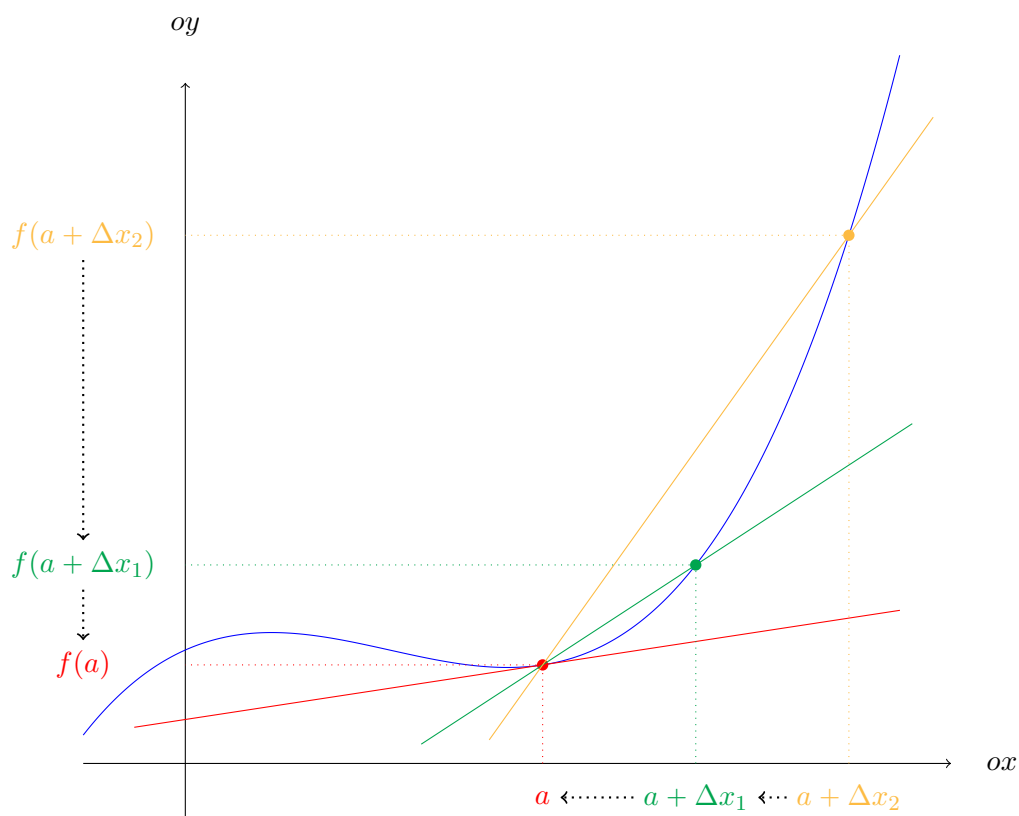


FIGURE 9.3 – Interprétation analytique de la dérivée

**Exemple 9.2.** Soit  $f(x) = x^2$ , calculons l'équation de la tangente en  $x = 1$ . En utilisant l'équation (9.1), on a

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 \\ &= 2, \end{aligned}$$

et la tangente à  $f$  en 1 est  $y = 2x - 1$ , tel qu'illustré à la figure 9.4. ◀

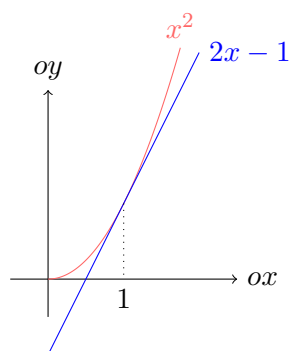


FIGURE 9.4 – Calcul analytique de  $f(x) = x^2$

**Exemple 9.3.** Aucune des fonctions

—  $f(x) = |e^x - 1|$ ,

—  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ,

n'est dérivable en zéro.

En effet, la limite définie à l'équation 9.1 n'existe pas :

$$\begin{aligned}
 \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{0^+} \frac{|e^x - 1| - |e^0 - 1|}{x - 0} \\
 &= \lim_{0^+} \frac{e^x - 1}{x} \\
 &= \ll \frac{0^+}{0^+} \gg \\
 &= \lim_{0^+} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \\
 &= \lim_{0^+} e^x \\
 &= 1^+ \\
 \\
 \lim_{0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{0^-} \frac{|e^x - 1| - |e^0 - 1|}{x - 0} \\
 &= \lim_{0^-} \frac{-e^x + 1}{x} \\
 &= \ll \frac{0^+}{0^-} \gg \\
 &= \lim_{0^-} \frac{(-e^x + 1)'}{(x)'} \\
 &= \lim_{0^-} -e^x \\
 &= -1^+
 \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0, car  $\lim_0 \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  n'existe pas (car les valeurs sont différentes à droite et à gauche). Géométriquement, cela signifie que  $f$  possède deux tangentes en  $x = 0$  : à droite, une tangente d'équation  $y = x$ , et à gauche, une tangente d'équation  $y = -x$ . Cette situation est illustrée à la figure 9.5(a).

Par ailleurs, dans le cas de  $g$ , on a

$$\begin{aligned}
 \lim_0 \frac{g(x) - g(a)}{x - a} &= \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} \\
 &= \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \\
 &= \ll \frac{0}{0} \gg \\
 &= \lim_0 \frac{(\sqrt[3]{x})'}{(x)'} \\
 &= \lim_0 \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Donc  $g$  n'est pas dérivable en 0, car  $\lim_0 \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$  n'existe pas (car elle est infinie). Géométriquement, cela signifie que  $g$  possède une tangente verticale d'équation  $x = 0$ . Cette situation est illustrée à la figure 9.5(b). ◀

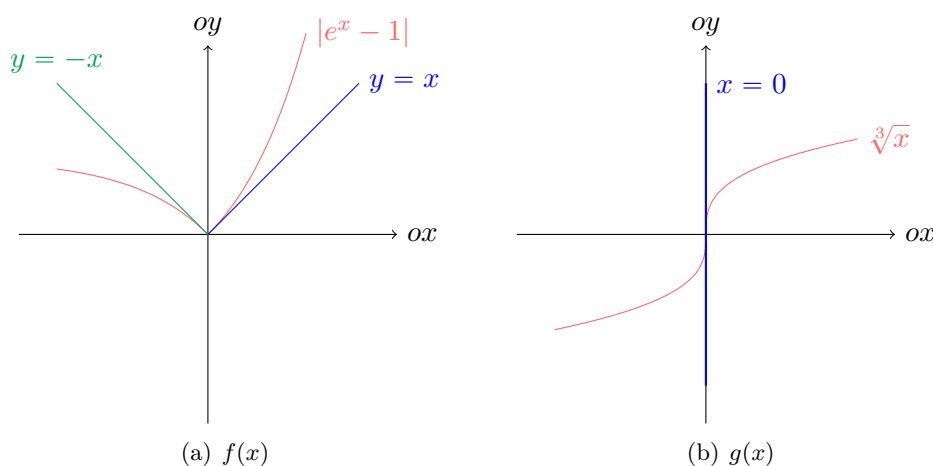


FIGURE 9.5 – Exemple de fonctions non dérivables

**Remarque 9.4.** Notez qu'une fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ , mais la réciproque n'est pas vraie dans le cas général. Par exemple, la fonction  $|x|$  est continue sur son domaine, et donc en particulier en zéro, mais n'est pas dérivable en zéro. En effet, en ce point, il y a deux tangentes au graphe de  $f$ , respectivement

$y = -x$  à gauche, et  $y = x$  à droite. Similairement, la fonction  $\sqrt[3]{x}$  est continue partout, mais n'est pas dérivable en zéro. En effet, en ce point, la tangente est verticale.

### 9.1.3 Fonction dérivée

Souvent, lors de la caractérisation d'une fonction, on est amené à définir la dérivée non pas ponctuellement en un point  $a$ , mais plus globalement sur un ensemble de valeur. Ainsi, on crée une fonction qui associe à chaque point sur lequel une fonction est dérivable la valeur de la dérivée de cette fonction ce point.

#### Définition 9.2

Soit  $f$  une fonction et  $S \subseteq \text{Dom}(f)$  l'ensemble des points sur lesquels  $f$  est dérivable. On définit la fonction dérivée de  $f$  comme

$$f' : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x).$$

Sur base de cette définition, on peut définir les fonctions dérivées de plusieurs fonctions élémentaires. La table 9.1 détaille les valeurs de ces fonctions.

$f(x)$	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$a$ (constante réelle)	$\mathbb{R}$	0
$x^n$ ( $n \neq 0$ )	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0 \\ \mathbb{R}_0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$	$n x^{n-1}$
$\sum_{i=0}^n a_i x^i$ (polynôme)	$\mathbb{R}$	$\sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$a^x$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$

TABLE 9.1 – Dérivées des fonctions élémentaires



Par ailleurs, il est possible de définir la dérivée de fonctions construites sur bases de « sous-fonctions » à l'aide de ces définitions. En particulier, soit  $f$  et  $g$  des fonctions dérivables et  $a \in \mathbb{R}$ , on a les formules suivantes :

— Dérivée d'une somme de fonctions :

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (9.2)$$

— Dérivée du multiple d'une fonction :

$$(a f(x))' = a f'(x) \quad (9.3)$$

— Dérivée d'un produit de fonctions :

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \quad (9.4)$$

— Dérivée d'un quotient de fonctions :

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (9.5)$$

— Dérivée des fonctions composées :

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x) \quad (9.6)$$

La dernière formule est particulièrement importante, et permet de dériver n'importe quelle combinaison de fonctions.

**Exemple 9.5.** Les lignes suivantes illustrent plusieurs fonctions ainsi que le calcul de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 4)' &= (x^2)' + (3x)' + (4)' \\ &= 2x + 3 \cdot (x)' + 0 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\sqrt{x})' &= \left( x^{\frac{3}{2}} \right)' \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 \cos(3x))' &= (x^2)' \cos(3x) + x^2 (\cos(3x))' \\
 &= 2x \cos(3x) + x^2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot (3x)' \\
 &= 2x \cos(3x) - 3x^2 \sin(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' &= \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{1(x-2) - (x+1)1}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} \\
 &= -\frac{3}{(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\right)' &= (e^{\frac{x}{2}})' \sin(3x) + e^{\frac{x}{2}} (\sin(3x))' \\
 &= e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \sin(3x) + e^{\frac{x}{2}} \cos(3x) \cdot (3x)' \\
 &= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sin(3x) + 3e^{\frac{x}{2}} \cos(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[3]{\cos(x^2+1)}\right)' &= -\frac{2x \sin(x^2+1)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^2+1)}} \\
 &= \left(\cos^{\frac{1}{3}}(x^2+1)\right)' \\
 &= \frac{1}{3} \cos^{\frac{1}{3}-1}(x^2+1) \cdot (\cos(x^2+1))' \\
 &= \frac{-\sin(x^2+1) \cdot (x^2+1)'}{3 \cos^{\frac{2}{3}}(x^2+1)} \\
 &= -\frac{2x \sin(x^2+1)}{3 \cos^{\frac{2}{3}}(x^2+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\ln(\sin(x^3)))' &= \frac{1}{\sin(x^3)} \cdot (\sin(x^3))' \\
 &= \frac{\cos(x^3) \cdot (x^3)'}{\sin(x^3)} \\
 &= \frac{x^2 \cos(x^3)}{\sin(x^3)}
 \end{aligned}$$



### 9.1.4 Dérivées d'ordre supérieurs et applications des dérivées

Outre les approximations linéaires, les dérivées ont de nombreuses applications, pratiques comme théoriques. De plus, parfois, il est nécessaire de dériver plusieurs fois une même fonction afin d'obtenir la caractéristique désirée.

Ainsi, on parle de dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction  $f$  la  $n^{\text{e}}$  dérivation successive d'une fonction  $f$ . En particulier, la dérivée d'ordre 1, aussi appelée *dérivée première*, est le résultat d'une unique étape de dérivation. C'est le concept avec lequel on a travaillé jusqu'à présent. De la même manière, la dérivée d'ordre 2 de  $f$ , aussi appelée la dérivée seconde de  $f$ , est le résultat de deux étapes de dérivation successives.

Notons que parfois, la littérature dévie de la notation  $f'$  pour désigner les dérivées. Ainsi, on rencontre des notations telles que

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)$$

Cette *notation différentielle* de la dérivée est utile dans le cas de fonctions de plusieurs variables, car elle indique explicitement par rapport à quelle variable on dérive. Pour cette raison, on parle souvent de *dérivée partielle*.

Pour les dérivées d'ordre supérieur, la notation différentielle est la suivante :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f(x)$$

Les sections suivantes détaillent les applications à la fois théoriques et pratiques de ces dérivées. Les dérivées d'ordre supérieur à deux ont principalement des applications dans les approximations de fonctions par des séries, telles que les séries de Taylor, de Fourier et de Maclaurin.

#### Dérivée première

Comme mentionné précédemment, la dérivée première est liée à la croissance et décroissance d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses extrema locaux. Pour rappel, un *extremum* est soit un *minimum* soit un *maximum*.

Soit  $f$  une fonction et  $I$  un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

- si, quel que soit  $x \in I$ ,  $f'(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  ;
- si, quel que soit  $x \in I$ ,  $f'(x) < 0$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  ;
- si  $f'(a) = 0$  et que  $f'(x)$  change de signe au voisinage de  $a$ , alors  $a$  est un extremum de  $f$ .

On comprend très bien ces propriétés en dessinant différents graphiques de fonctions et en regardant le comportement de la tangente à ces différentes courbes. Ces propriétés sont illustrées en mêmes temps que celles liées à la concavité dans des tableaux de variations à la table 9.2.

### Dérivée seconde

Si la dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  est elle-même dérivable, sa dérivée s'appelle dérivée seconde de  $f$  et est notée  $f''$ . La dérivée seconde est liée au *sens de concavité* d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses *points d'inflexion*. Pour rappel, un point d'inflexion est un point du graphique où celui-ci change de concavité.

Soit  $f$  une fonction et  $I$  un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

- si, quel que soit  $x \in I$ ,  $f''(x) > 0$ , alors le graphe de  $f$  tourne sa concavité vers le haut ;
- si, quel que soit  $x \in I$ ,  $f''(x) < 0$ , alors le graphe de  $f$  tourne sa concavité vers le bas ;
- si  $f''(a) = 0$  et  $f''(x)$  change de signe au voisinage de  $a$ , alors  $f$  a un point d'inflexion en  $a$ .

Pour comprendre ces propriétés, on procède comme précédemment en se rappelant que la dérivée seconde de  $f$  est la dérivée première de  $f'(x)$ . Les différents cas de figure sont résumés dans les *tableaux de variation* illustrés à la table 9.2.

**Exemple 9.6.** Étudions la fonction  $f(x) = x^3 - x$ , en caractérisant ses racines, sa croissante, ses maxima et minima, sa concavité et ses points d'inflexion.

$x$	$a$		
$f'(x)$	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	minimum en ( $a, f(a)$ )	↗

$x$	$a$		
$f'(x)$	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−
$f(x)$	↗	maximum en ( $a, f(a)$ )	↘

$x$	$a$		
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	point d'inflexion en ( $a, f(a)$ )	↗

$x$	$a$		
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	↗	point d'inflexion en ( $a, f(a)$ )	↗

$x$	$a$		
$f'(x)$	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↘	point d'inflexion en ( $a, f(a)$ )	↘

$x$	$a$		
$f'(x)$	−	−	−
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	point d'inflexion en ( $a, f(a)$ )	↘

TABLE 9.2 – Différents cas de tableaux de variations

Cette fonction admet une racine quand

$$\begin{aligned}
 x^3 - x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

et donc quand  $x = 0$ , ou  $x = 1$ , ou  $x = -1$ . Elle admet donc trois racines réelles.

En ce qui concerne sa croissance, il caractérise le signe de la dérivée. La fonction possède un extremum quand  $f'(x) = 0$ . On a

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

De plus, on remarque que comme  $f'(x)$  décrit le graphe d'une parabole  $y = ax^2 + bx + c$  avec  $a > 0$ , on a

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ f'(x) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en conclut que  $f(x)$  est décroissante quand  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , et croissante sinon, et qu'elle admet un maximum en  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , et un minimum en  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Dans le cadre de la concavité, il faut caractériser le signe de la dérivée seconde. La fonction possède un point d'inflexion quand  $f''(x) = 0$ . On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $f''(x)$  décrit le coefficient d'une droite au coefficient directeur positif, on a  $f''(x) > 0$  quand  $x > 0$ , et  $f''(x) < 0$  quand  $x < 0$ . On en conclut que  $f(x)$  a une concavité tournée vers le bas<sup>3</sup> quand  $x < 0$ , et une concavité tournée vers le haut<sup>4</sup> quand  $x > 0$ , et qu'elle admet un point d'inflexion en  $x = 0$ .

On peut résumer ces informations dans le tableau de variation illustré à la table 9.3. La fonction est quand à elle illustrée à la figure 9.6. ◀

$x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	Max	↘	Pt. Infl.	↘	Min	↗

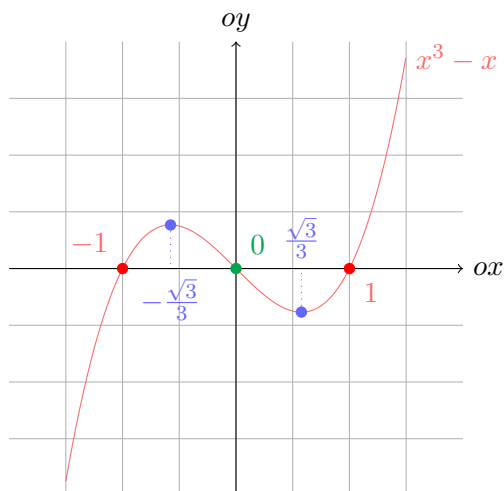
TABLE 9.3 – Tableau de variation de  $f(x) = x^3 - x$

### Exemples d'applications pratiques

Au vu de ce qui a été présenté précédemment, on remarque que la dérivée première permet de trouver exhaustivement l'ensemble des extrema locaux d'une fonction, sous réserve que l'on soit capable d'en calculer ses racines. Cet état de fait permet de résoudre des problèmes d'optimisation simples basés sur des fonctions dérivables.

Le principe de base d'un tel problème est de trouver une solution à profit maximum, ou à coût minimum, sur base de la maximisation ou minimisation d'une fonction dérivable.

- 
3. Dans le sens contraire de l'axe  $oy$
  4. Dans le sens de l'axe  $oy$

FIGURE 9.6 – Graphe de  $f(x) = x^3 - x$ 

Notons qu'en général, les problèmes d'optimisation sont plus complexes que ceux que présentés ici, dans le sens où ils ne s'appliquent pas nécessairement à des fonctions dérivables, qu'ils sont soumis à des contraintes, qu'ils sont multivariés et que ces variables sont parfois discrètes. Ces problèmes font partie de ce qu'on appelle *l'optimisation combinatoire*, qui est une discipline mathématique à part entière.

Ainsi, on se restreindra dans le cadre de ce cours à des problèmes simples monovariés continus, sans contraintes, appliqués à des fonctions dérivables.

**Exemple 9.7.** Un paysagiste dispose d'une bâche rectangulaire de largeur  $l$  et de longueur  $L$ , et souhaite l'utiliser pour étanchéifier le fond d'un étang parallélogrammique. Pour cela, il décide de découper quatre carrés isométriques aux coins de sa bâche, et de former le fond par pliage. Quelle longueur de côté doit-il choisir pour les carrés afin de maximiser le volume de l'étang ? ◀

*Solution.* Avant tout, représentons la situation à l'aide d'un dessin, comme illustré à la figure 9.7.

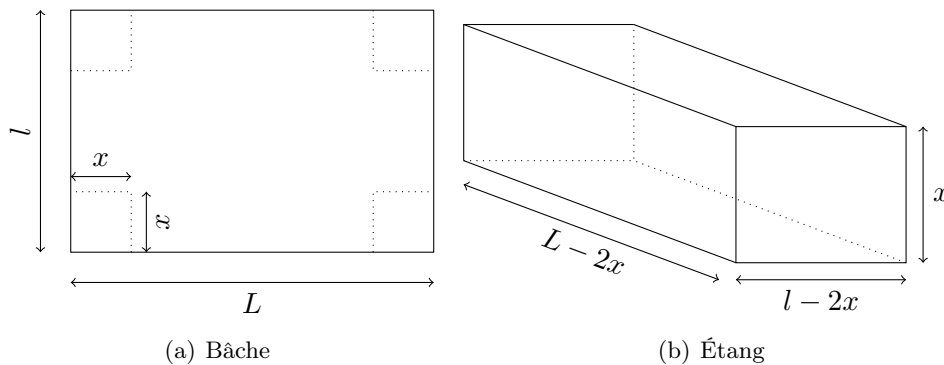


FIGURE 9.7 – Illustration de la construction de l'étang

On remarque que le volume  $V$  de cet étang est défini comme

$$\begin{aligned}
 V &= x(l - 2x)(L - 2x) \\
 &= (xl - 2x^2)(L - 2x) \\
 &= xlL - 2x^2l - 2x^2L + 4x^3 \\
 &= 4x^3 - (2l + 2L)x^2 + (lL)x
 \end{aligned}$$

On cherche la valeur à donner à  $x$  afin de maximiser  $V$ . On remarque que  $V(x)$  est une fonction dérivable, et donc que calculer les racines de sa dérivée première va fournir une liste des extrema de  $V$ . Si l'un de ces extrema correspond à un maximum, on aura trouvé la valeur à donner à  $x$ .

La dérivée  $V'(x)$  de  $V(x)$  est définie comme

$$\begin{aligned}
 V'(x) &= 12x^2 - 2(2l + 2L)x + lL \\
 &= 12x^2 - (4l + 4L)x + lL
 \end{aligned}$$

Cette équation décrit un polynôme de degré deux, dont on est capable de



calculer les racines. On a

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (4l + 4L)^2 - 4 \cdot 12 \cdot lL \\
 &= 16l^2 + 16L^2 + 32lL - 48lL \\
 &= 16l^2 + 16L^2 - 16lL \\
 &= 16(l^2 + L^2 - lL)
 \end{aligned}$$

On remarque que comme  $\Delta > 0$ ,  $V'(x)$  admet systématiquement deux racines. Ces racines sont décrites comme

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{4l + 4L + 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24} \\
 x_2 &= \frac{4l + 4L - 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24}
 \end{aligned}$$

Ce sont ces valeurs de  $x$  qui permettent de maximiser le volume de l'étang. Comme  $x_1 > x_2 > 0$ , on peut établir le tableau de variation illustré à la table 9.4 sur base de  $V'(x)$ .

$x$	$x_2$		$x_1$	
$V'(x)$	+	0	-	0
$V(x)$	↗	Max	↘	Min

TABLE 9.4 – tableau de variation de  $V(x)$



En considérant ce tableau de variation, on remarque qu'on doit poser

$$x = x_2 = \frac{4l + 4L - 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24}.$$

**Exemple 9.8.** Un étudiant assoiffé mais prudent aperçoit un bar à 20 mètres de l'autre côté de la route large de 6m sur laquelle il se situe. Sachant qu'il traverse la route à une vitesse de 0.2 Dm/s et qu'il court sur le trottoir à une vitesse de 0.25 Dm/s, à quel endroit doit-il rejoindre l'autre bord de la route pour pouvoir obtenir une bière bien fraîche au plus vite, et combien de temps cela lui prend-il ?



*Solution.* Commençons avant tout par représenter la situation par un dessin, comme illustré à la figure 9.8. Au vu de ce problème, on doit minimiser le temps nécessaire à l'étudiant pour se désaltérer.

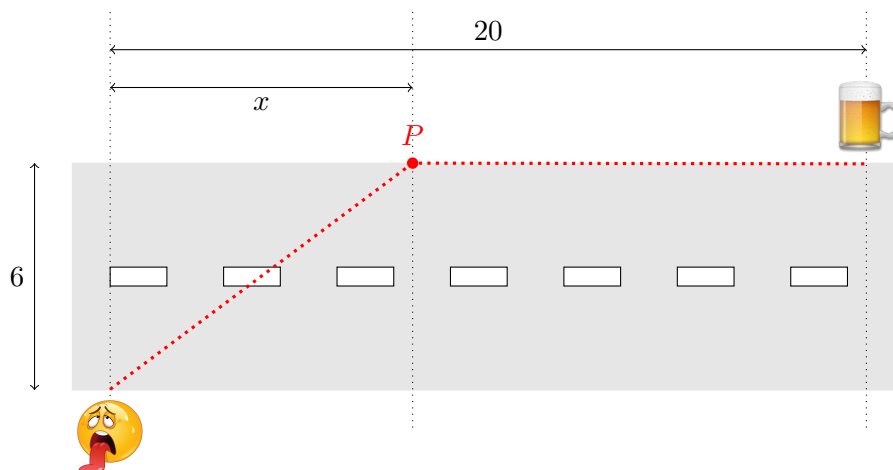


FIGURE 9.8 – Un étudiant assoiffé au bord d'une route aperçoit un bar

Ce temps est égal au temps nécessaire pour rejoindre  $P$ , l'endroit où il a atteint l'autre bord de la route, plus le temps nécessaire pour rejoindre le bar depuis  $P$ . Comme les vitesses de traversée de la route  $v_T$  et de course sur le trottoir  $v_R$  sont constantes, on sait que le temps  $t$  mis pour parcourir une distance  $d$  à une vitesse  $v$  est égal à  $\frac{d}{v}$ .

Il faut donc caractériser la distance  $|PS|$  entre l'étudiant et  $P$ , ainsi que la distance  $|PB|$  entre  $P$  et le bar afin de pouvoir définir le temps mis par l'étudiant pour atteindre le bar. Clairement, la distance entre  $P$  et le bar est égale à  $20 - x$ . Par ailleurs, par application du théorème de Pythagore, la distance entre l'étudiant et  $P$  est égale à  $\sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2}$ .

Dès lors, le temps  $t(x)$  nécessaire pour atteindre le bar pour l'étudiant est égal à

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{|PS|}{v_T} + \frac{|PB|}{v_R} \\ &= 5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x) \end{aligned}$$

Il faut donc trouver à présent quelle valeur donner à  $x$  afin de minimiser  $t(x)$ . Utilisons la dérivée de  $t(x)$  pour cela, et tentons de l'annuler. Ainsi, on aura une caractérisation des points pour lesquels  $t(x)$  admet un extremum.

On a

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{5}{2}(36 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 \\ &= \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4 \end{aligned}$$

Cette fonction admet un extremum potentiel quand elle s'annule, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned} t'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36 + x^2} \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 16(36 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 576 + 16x^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 = 576 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

On ne doit pas considérer la racine  $x = -8$  car  $x$  est une grandeur positive.

En construisant le tableau de variation de  $t(x)$  comme illustré à la table 9.5, on remarque que le temps est bel et bien minimum quand l'étudiant traverse en diagonale à huit mètres en face de la route, en direction du bar.

$x$	8		
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

TABLE 9.5 – tableau de variation de  $V(x)$

Par ailleurs, il met exactement

$$t(8) = 5\sqrt{36 + 64} + 4 \cdot 12 = 50 + 48 = 98$$

dixièmes<sup>5</sup> de secondes pour atteindre le bar. ◀

## 9.2 Intégration

L'intégration est l'étude et la détermination des *intégrales*, des fonctions permettant de calculer des déplacements, des aires, des volumes et autres concepts nécessitant l'intervention de quantités infinitésimales. L'intégration est l'une des deux composantes principales du calcul fonctionnel, avec la dérivation vue précédemment.

Les intégrales ont une part prépondérante en physique, en probabilités, en économie, etc. Au même titre que la dérivation, les principes des intégrales ont été posés par Newton et Leibniz au XVII<sup>e</sup> siècle, qui ont introduits les intégrales comme la somme des rectangles de largeur infinitésimales situés entre le graphe d'une fonction et l'axe  $ox$ , comme illustré à la figure 9.9.

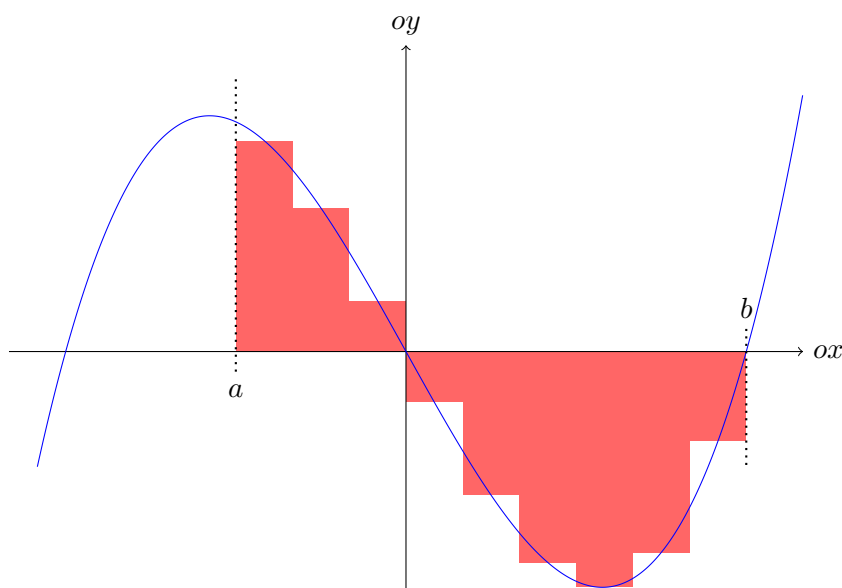


FIGURE 9.9 – Concept d'intégrales tel qu'introduit par Newton et Leibniz

---

5. En effet, n'oubliez pas que la vitesse est exprimée en Dm/s.

La première définition mathématique rigoureuse de ce concept d'intégration fut apportée par Riemann, au XIX<sup>e</sup> siècle, à l'aide de la notion de limite.

Intuitivement, l'intégration, vue comme opérateur sur l'ensemble des fonctions, est, en un certain sens, l'opération inverse de la dérivation. Ainsi, on définit le concept de *primitive* de la façon suivante.

**Définition 9.3**

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions, on dit que  $F$  est une primitive de  $f$  si  $F'(x) = f(x)$ .

**Exemple 9.9.** Soit  $f(x) = x^2$ . Alors,  $\frac{x^3}{3}$  est une primitive de  $f(x)$  car  $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ . ◀

Notez qu'une primitive n'est jamais unique, dans la mesure où les constantes sont perdues par dérivation. Ainsi, si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ , alors quel que soit  $c \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) + c$  est également une primitive de  $f(x)$ .

L'intégration consiste à trouver une primitive d'une fonction quelconque  $f$ . Les intégrales sont les ensembles de fonctions qui sont primitives d'une fonction  $f$ .

Par abus de langage, on dira que ces intégrales peuvent être définies, c'est-à-dire avoir une valeur réelle, soit être indéfinies (et être des fonctions elles-mêmes). Les sections suivantes détaillent ces concepts.

### 9.2.1 Intégrales définies et indéfinies

On caractérise formellement les intégrales indéfinies de la façon suivante.

**Définition 9.4**

Soit  $f(x)$  une fonction, on appelle intégrale indéfinie de  $f(x)$  l'ensemble

$$\{ F(x) \mid F(x) \text{ est une primitive de } f(x) \}.$$

On note cet ensemble comme

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

où  $\int$  est le signe d'intégration,  $f(x)$  est l'intégrande (c'est-à-dire la fonction dont on recherche une primitive) et  $dx$  est l'élément différentiel (qui indique entre autres la variable par rapport à laquelle on intègre).

Souvent, dans cette notation, on appelle  $C$  la constante d'intégration, qui peut prendre des valeurs réelles arbitraires.

**Exemple 9.10.** Les lignes suivantes sont des exemples d'intégrales simples :

- $\int 6x^2 + 1 \, dx = 2x^3 + x + C;$
- $\int \cos(3x) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C;$
- $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$



Notez qu'au même titre que certaines fonctions ne sont pas dérivables, certaines fonctions peuvent également ne pas être intégrables.

Par ailleurs, comme mentionné dans l'introduction de cette section, les intégrales peuvent être utilisées pour calculer les aires, les volumes, etc. Dans le cadre de ce chapitre, on peut montrer qu'une intégrale permet de calculer l'aire située entre le graphe d'une fonction et l'axe  $ox$ .

On utilise pour cela la notion d'intégrale définie.

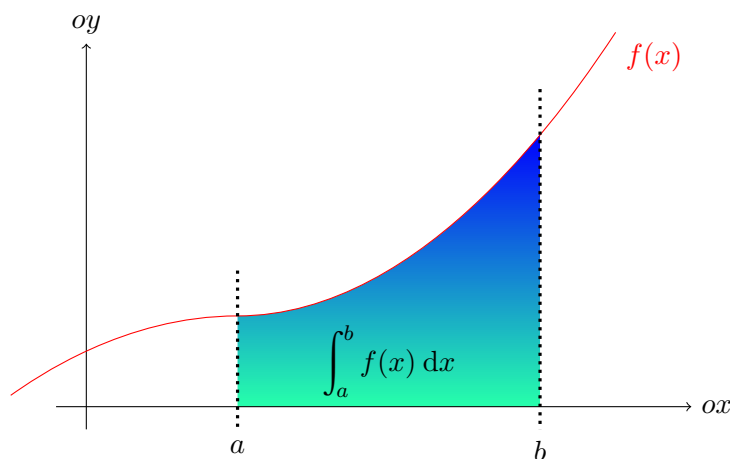


FIGURE 9.10 – Intégrale définie et calcul d'aire

**Définition 9.5**

Soient  $f(x)$  une fonction et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ , l'intégrale définie de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est notée et définie comme

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

où  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ .

De plus,  $\int_a^b f(x) \, dx$  décrit précisément l'aire de la surface comprise entre la courbe d'équation  $y = f(x)$ , l'axe  $ox$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ , comme illustré à la figure 9.10.

Sur ce dessin,  $\int_a^b f(x) \, dx$  est décrite par la zone ombrée en bleu vert, située entre le graphe de  $f(x)$  en rouge, l'axe horizontal  $ox$  ainsi que les deux droites en pointillés.

### 9.2.2 Calcul intégral

Le calcul d'intégration n'est pas aussi immédiat et automatique que le calcul de dérivées. Une intégrale peut être très compliquée, parfois même insoluble analytiquement. En réalité, dans le cas général, des ordinateurs sont utilisés pour approcher la valeur de ces intégrales dans la mesure où une technique exacte n'existe pas.

On se limitera néanmoins dans le cadre de ce cours aux intégrales simples, c'est à dire qui peuvent être résolues directement, ou à l'aide de techniques de résolution analytiques.

Ainsi, l'approche de base afin de résoudre un calcul intégral consiste à examiner l'intégrale et à « deviner » la méthode la plus adaptée. Bien que l'expérience et l'exercice priment sur la hâte, dans le doute, on utilise d'abord les méthodes les plus simples pour finalement utiliser des techniques graduellement plus complexes. Si une méthode échoue, on en choisit une autre.

Bien que cette approche semble peu intelligente, l'étudiant doit bien garder à l'esprit qu'il n'existe pas de technique générale et automatisée pour le calcul intégral, *a contrario* de la dérivation, et que seul un bon entraînement et une bonne maîtrise des outils permet de gagner du temps dans la résolution de ces calculs.

#### Primitives élémentaires

Bien que dans le cas général, le calcul intégral puisse être complexe, il existe des fonctions pour lesquelles il est aisé. Ainsi, au même titre que dans le cas de la dérivation on dispose d'une liste de dérivées élémentaires, on a dans le cas présent une liste des primitives élémentaires construites sur base de fonctions simples.

Dans la table 9.6,  $f(x)$  désigne une fonction réelle,  $F(x)$  une primitive de  $f(x)$ ,  $c$  est la constante d'intégration et  $a$  et  $n$  sont des réels non nuls. Ces primitives peuvent être établies sur base des formules de dérivation.

Par ailleurs, également sur base des formules de dérivation, on peut déduire les propriétés d'intégration suivantes relatives à l'intégrale d'une somme et l'intégrale d'un multiple d'une fonction, où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions et  $a$  une constante



$f(x)$	$F(x)$
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + C$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a} \sin(ax) + C$
$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) + C$
$e^{ax}$	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$
$a^x \ (a > 0)$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$

TABLE 9.6 – Liste des primitives élémentaires

réelle :

$$\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

**Remarque 9.11.** Il n'y a pas d'équivalent de la dernière formule pour l'intégration d'un produit de fonction. Dans presque tous les cas,

$$\int (f(x) g(x)) \, dx$$

donne un résultat différent de

$$\int f(x) \, dx \int g(x) \, dx$$

Pour traiter l'intégration d'un produit, il faut en général recourir à la formule d'intégration par partie, détaillée dans la suite de ce document.

## Intégration par partie

De la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions on peut déduire la formule de base pour l'intégration par partie :

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Si la nouvelle intégrale à calculer a une forme similaire au membre de gauche, on peut appliquer cette formule, éventuellement à plusieurs reprises, pour obtenir les primitives de l'intégrande, le but étant évidemment que l'intégrale dans le membre de droite soit plus simple que celle de départ. . .

La table 9.7 donne quelques indices pour faire le bon choix des fonctions  $f$  et  $g$  lors de l'intégration par partie. Dans cette table,  $P(x)$  représente un polynôme de degré quelconque.

Si l'intégrale a la forme. . .	on pose. . .
$\int P(x)e^{ax} dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = e^{ax}$
$\int P(x) \ln(x) dx$	$f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = P(x)$
$\int P(x) \sin(ax) dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = \sin(ax)$
$\int P(x) \cos(ax) dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = \cos(ax)$
$\int e^{ax} \sin(bx) dx$	on a le choix
$\int e^{ax} \cos(bx) dx$	on a le choix

TABLE 9.7 – Exemples d'utilisation de l'intégration par partie

**Exemple 9.12.** Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int x e^{2x} dx$$

Comme suggéré par la table 9.7, posons  $f(x) = x$  et  $g'(x) = e^{2x}$ . On en déduit que  $f'(x) = 1$  et  $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ .

La formule d'intégration par partie donne donc

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$



**Exemple 9.13.** Calculons  $\int x^2 \sin(x) \, dx$ .

La table 9.7 suggère de poser  $f(x) = x^2$  et  $g'(x) = \sin(x)$ . On en déduit que  $f'(x) = 2x$  et  $g(x) = -\cos(x)$ .

La formule d'intégration par partie donne donc

$$\int x e^{2x} \, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx.$$

On est de nouveau amené à calculer une intégrale décrite par la table 9.7, en posant  $f(x) = x$  et  $g'(x) = \cos(x)$ . On en déduit que  $f'(x) = 1$  et  $g(x) = \sin(x)$ , et on obtient donc, finalement

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x) \, dx &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) - 2 \int \sin(x) \, dx \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C \\ &= 2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x) + C \end{aligned}$$



### Intégration par substitution

Parfois, la formulation d'une fonction à intégrer est complexe, et on peut être amené à la simplifier en substituant une sous-expression de cette fonction par une variable.

Poser une telle variable à des fins de simplifications est particulièrement utile si l'on reconnaît dans l'intégrale une fonction et sa dérivée, afin de pouvoir ramener l'intégrale à une intégrale élémentaire après une opération de substitution.

**Exemple 9.14.** Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int (x^3 + 1)^7 3x^2 \, dx$$

On reconnaît dans l'intégrande la fonction  $x^3 + 1$  et sa dérivée  $3x^2$ . On pose alors  $u = x^3 + 1$  d'où on déduit sa *différentielle*  $du = u'(x) \, dx = 3x^2 \, dx$ .

L'intégrale de départ peut donc s'écrire à présent

$$\int u^7 \, du$$

Par application de la formule élémentaire d'intégrale d'une puissance, et en remplaçant finalement  $u$  en fonction de  $x$ , on trouve finalement

$$I = \int u^7 \, du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{8} (x^3 + 1)^8 + C.$$



### 9.3 Exercices résolus

**Exercice 9.1.** Considérez le graphe de la fonction  $f$  illustré à la figure 9.11. Parmi les graphes illustrés à la figure 9.12, lequel décrit la dérivée première de  $f$  ?

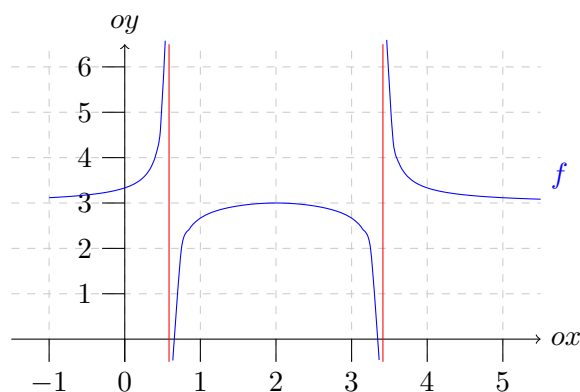
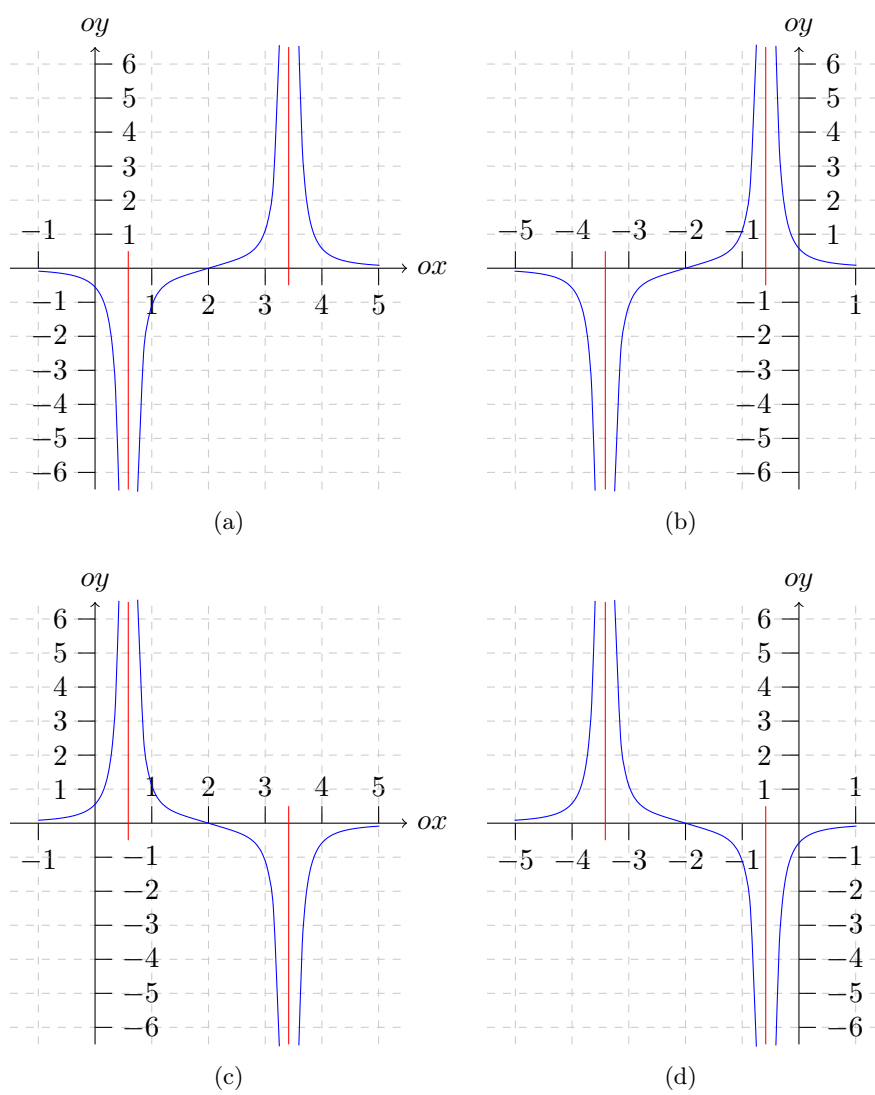



FIGURE 9.11 – Esquisse du graphe d'une fonction

*Solution.* On remarque qu'indépendamment des deux asymptotes verticales, la fonction est croissante jusque 2, et décroissante ensuite. Ceci implique que la dérivée de  $f$  doit être positive avant 2, et négative après. De plus, comme la fonction admet un maximum local en 2, la dérivée de  $f$  doit admettre une racine en 2.

FIGURE 9.12 – Dérivées possibles pour  $f$

Au vu de ces observations, seule la fonction dont le graphe est illustré à la figure 9.12(c) convient. 

**Exercice 9.2.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt[3]{3x^3 - 7} \\ f_2(x) &= \frac{6}{x} + \frac{7}{x^3} + \frac{1}{2x^5} \\ f_3(x) &= 3x^2 \cos(2x + 7) \\ f_4(x) &= \left( \frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+5} \\ f_5(x) &= \sqrt[5]{\frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5}} \end{aligned}$$

*Solution.* On calcule les dérivées de la manière suivante.

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left( (3x^3 - 7)^{\frac{1}{3}} \right)' \\ &= \frac{1}{3} (3x^3 - 7)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 9x^2 \\ &= 3x^2 (3x^3 - 7)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3x^2}{(\sqrt[3]{3x^3 - 7})^2} \\ f_2'(x) &= -1 \cdot 6x^{-1-1} - 3 \cdot 7x^{-3-1} - 5 \left( \frac{1}{2} \right) x^{-5-1} \\ &= -6x^{-1} - 21x^{-4} + \frac{5}{2}x^{-6} \\ &= -\frac{6}{x^2} - \frac{21}{x^4} - \frac{5}{2x^6} \end{aligned}$$

Pour  $f_3$ , on remarque la présence d'un produit de fonctions. On a donc

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 6x \cdot \cos(2x + 7) + 3x^2 \cdot (-2 \sin(2x + 7)) \\ &= 6x \cos(2x + 7) - 6x^2 \sin(2x + 7) \end{aligned}$$

Dans le cadre de  $f_4$ , on remarque une composition de fonction. Dès lors,

$$f_4'(x) = (2x + 5) \cdot \left( \frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+4} \cdot \left( \frac{4}{3}x \right) + \left( \frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+5} \cdot \ln \left( \frac{2x^2 + 4}{3} \right) \cdot 2$$

Finalement, dans le cadre de  $f_5$ , on remarque la composition d'un quotient de fonctions. Posons

$$g(x) = \frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5},$$

on peut calculer la dérivée  $g'(x)$  de  $g$  comme suit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos(x^2) \cdot 2 \cdot x \cdot (-3x + e^5) - \sin(x^2) \cdot (-3)}{(-3x + e^5)^2} \\ &= \frac{2x \cos(x^2)(-3x + e^5) + 3 \sin(x^2)}{(-3x + e^5)^2}. \end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant la formule de dérivation d'une puissance, on a

$$f'_5(x) = \frac{1}{5} \left( \frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5} \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2x \cos(x^2)(-3x + e^5) + 3 \sin(x^2)}{(-3x + e^5)^2}$$



**Exercice 9.3.** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , une fonction dont le graphe correspond à une parabole. Déterminez  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que :

1.  $\frac{3}{2}$  est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 2 ;
2.  $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{5}$  est l'équation de la perpendiculaire à la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 3.

*Solution.* Avant toute chose, on peut calculer que

$$f'(x) = 2ax + b. \quad (9.7)$$

De plus, comme  $\frac{3}{2}$  est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 2, on sait que

$$f'(2) = \frac{3}{2}. \quad (9.8)$$

Dès lors, en substituant  $x$  par 2 dans l'équation (9.7) et en égalant à équation (9.8), on obtient

$$f'(2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 4a + b. \quad (9.9)$$

Le coefficient angulaire de la perpendiculaire à la tangente en 3 est égal à  $-\frac{1}{3}$ . Le coefficient angulaire de cette tangente est donc de 3 puisque le produit des coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires est égal à  $-1$ .

En conséquence, en substituant  $x$  par 3 dans l'équation (9.7), on a

$$f'(3) = 3 \Leftrightarrow 3 = 6a + b \quad (9.10)$$

Soustrayant (9.10) de (9.9), on obtient

$$2a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

et donc

$$b = -\frac{3}{2}$$

Pour déterminer  $c$ , on peut calculer  $f(3) = -1 + 3/5 = -2/5$  puisque ce point doit vérifier l'équation de la tangente. En reportant dans l'équation de  $f(x)$ , on obtient

$$-\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 + c$$

ce qui donne

$$c = -\frac{53}{20}$$

En conclusion, on a donc

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{53}{20}$$



**Exercice 9.4.** Soit  $f = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ .

1. Déterminez le domaine de  $f$ .
2. Déterminez si  $f$  est continue.
3. Calculez les racines de  $f$ .
4. Calculez les asymptotes verticales et horizontales de  $f$ , si elles existent.
5. Étudiez la croissance de  $f$ .
6. Étudiez la concavité de  $f$ .



7. Esquissez le graphe de  $f$ .

*Solution.* Cette question utilise l'intégralité du chapitre sur les fonctions.

1. Une fraction est définie si son dénominateur est non-nul.  $f$  est donc définie si et seulement si  $x + 2 \neq 0$ , c'est à dire si et seulement si  $x \neq -2$ . On a donc  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .
2. Une fonction  $f$  est continue si et seulement si elle est continue en tout point  $a \in \text{Dom}(f)$ , c'est à dire si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (9.11)$$

On remarque facilement que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \frac{a^2 - 1}{a + 2} \\ &= f(a). \end{aligned}$$

On peut donc conclure que  $f$  est continue.

3. Les racines d'une fonction  $f$  sont les points où  $f$  s'annule. Une fraction s'annule quand son numérateur s'annule.  $f$  s'annule donc quand

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

4. Une fonction  $f$  admet une asymptote verticale en un point  $a \notin \text{Dom}(f)$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

On remarque que  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ . La fonction  $f$  admet donc une asymptote verticale en  $-2$ .

De la même manière, une fonction  $f$  admet une asymptote horizontale  $H \equiv y = a$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a.$$

On remarque que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ . La fonction  $f$  n'admet donc pas d'asymptote horizontale.

5. Une fonction dérivable  $f$  est croissante sur un intervalle  $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$  si et seulement si  $\forall x \in [a, b], f'(x) \geq 0$ . On calcule la dérivée d'ordre 1 de  $f$  par rapport à  $x$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)2x - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule quand son numérateur s'annule, c'est-à-dire quand

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} & \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \\ \Leftrightarrow x &= -2 + \sqrt{3} \vee x = -2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Établissons le tableau de variation de cette fonction, à partir des valeurs des racines de sa dérivée, comme illustré à la table 9.8. Notons également que  $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

$x$	$-2 - \sqrt{3}$		$-2$		$-2 + \sqrt{3}$		
$f'(x)$	+	0	-	$\emptyset$	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	$\emptyset$	+	+	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	Max	$\curvearrowleft$	$\emptyset$	$\curvearrowright$	Min	$\curvearrowleft$

TABLE 9.8 – tableau de variation de  $f(x)$

On remarque donc que  $f$  est croissante sur  $] -\infty, -2 - \sqrt{3}]$ , elle admet un maximum local en  $-2 - \sqrt{3}$ , et décroît sur  $[-2 - \sqrt{3}, 2[$ . Similairement,  $f$  est décroissante sur  $] -2, -2 + \sqrt{3}]$ , elle admet un minimum local en  $-2 + \sqrt{3}$ , et croît sur  $[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$ .

6. Une fonction dérivable  $f$  est « concave vers le haut » sur un intervalle  $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$  si et seulement si  $\forall x \in [a, b], f''(x) \geq 0$ . On calcule la

dérivée d'ordre 2 de  $f$  par rapport à  $x$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(x+2)^2(2x+4) - (x^2+4x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x + 4x^2 + 16x + 16 - 2x^3 - 8x^2 - 2x - 4x^2 - 16x - 4}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6x + 12}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6(x+2)}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6}{(x+2)^3} \quad \text{car } x \neq -2.
 \end{aligned}$$

On remarque que  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ . On en conclut donc que  $f$  a une concavité vers le bas sur  $] -\infty, -2[$ , une concavité vers le haut sur  $] -2, +\infty[$ . Comme  $f''$  n'est pas définie en  $-2$ , elle n'y admet évidemment pas de point d'inflexion. Ces informations sont résumées dans le tableau de variation illustré à la table 9.8.

7. On esquisse le graphe de  $f$  sur base des racines, de l'asymptote, et des informations tirées du tableau de variation illustré à la table 9.8. Le graphe de cette fonction est illustré à la figure 9.13.



**Exercice 9.5.** Un industriel de boîtes en aluminium souhaite fabriquer des boîtes de conserves cylindriques pouvant contenir 1.5l de liquide. Quelles dimensions doit-il donner à la boîte pour utiliser un minimum d'aluminium ?

*Solution.* Avant tout, représentons la situation sous forme d'un dessin, comme illustré à la figure 9.14.

On a besoin ici de minimiser la quantité d'aluminium utilisée pour construire une boîte, ce qui revient à minimiser la surface occupée par les parois de la boîte (un rectangle), ainsi que par le fond et le couvercle de la boîte (des cercles).

L'aire d'un rectangle est donnée par la formule « largeur  $\times$  hauteur ». Dans le cas présent, la largeur du rectangle en question est égale à la circonférence de la base de la boîte, c'est-à-dire à  $2\pi r$ . Au final, on doit donc minimiser l'aire  $A$  définie comme

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad (9.12)$$

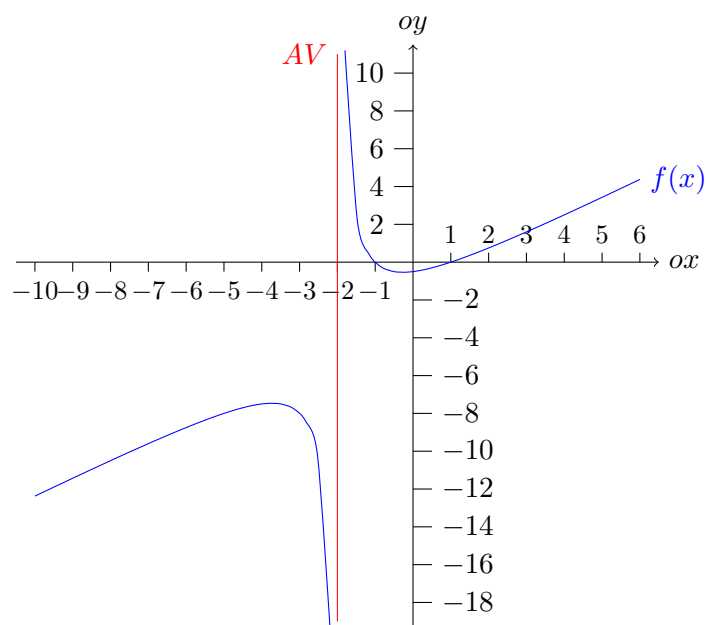
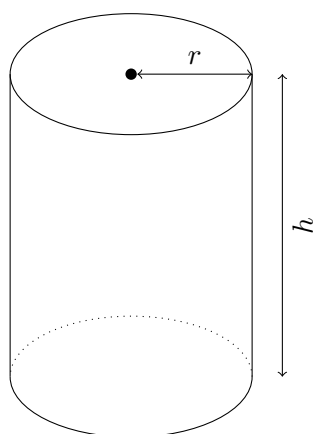
FIGURE 9.13 – Graphe de la fonction  $f$ 

FIGURE 9.14 – Représentation d'une boîte de conserve cylindrique

De plus, on sait que le volume de la boîte est de 1.5l, c'est à dire  $1500\text{cm}^3$ . Ainsi, comme le volume d'un cylindre est donné par la formule  $\pi r^2 h$ , on a

$$\pi r^2 h = 1500,$$

c'est à dire

$$h = \frac{1500}{\pi r^2}. \quad (9.13)$$

En remplaçant  $h$  par sa valeur dans l'équation (9.12), on obtient donc la fonction  $A(r)$  à minimiser suivante :

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r \left( \frac{1500}{\pi r^2} \right) + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}. \end{aligned}$$

On remarque que cette définition de  $A$  impose que  $r \neq 0$ , ce qui n'est pas contraignant vu que  $r$  est une distance strictement positive.

Pour minimiser  $A'(r)$ , une fonction dérivable, il suffit d'en rechercher le minimum via un changement de croissance décrit par la dérivée première de  $A$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} A'(r) &= 4\pi r - \frac{3000}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2}. \end{aligned}$$

Afin de trouver un minimum, il faut ici vérifier quand  $A'(r) = 0$ , c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\pi r^3 &= 3000 \\ \Leftrightarrow r^3 &= \frac{750}{\pi} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire quand  $r \approx 6.2035\text{cm}$ . Comme  $A'(r) < 0$  quand  $r < \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$  et  $A'(r) > 0$  quand  $r > \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$ , on a bel et bien un maximum en  $r = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$ .

Ainsi, en remplaçant  $r$  par sa valeur dans l'équation (9.13), on trouve la valeur de  $h$  :

$$h = \frac{1500}{\pi \left( \sqrt[3]{\frac{750}{\pi i}} \right)^2},$$

c'est-à-dire  $h \approx 12.4070$ .

Ainsi, l'industriel doit prévoir de fabriquer des boîtes de rayon environ 6.2035cm et de hauteur environ 12.4070cm. On remarque que cela correspond à des boîtes « carrées », dont le rayon est identique à la hauteur. ◀

**Exercice 9.6.** Calculez les intégrales suivantes, définies ou non.

$$I_1 = \int e^x \sin(x) \, dx$$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} \, dx$$

$$I_3 = \int_0^{1/2} (1 + e^{-2x}) \, dx$$

$$I_4 = \int x^2 \ln(x) \, dx$$

$$I_5 = \int_{-4}^4 \frac{\cos(x)}{x^2(x-3)} \, dx$$

$$I_6 = \int (x+3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} dy$$

*Solution.* On calcule les intégrales demandées de la façon suivante. Dans les notations suivantes, on a  $c \in \mathbb{R}$ .

Pour  $I_1$ , procédons par partie en posant  $f(x) = \sin(x)$  et  $g'(x) = e^x$ . On a donc

$$I_1 = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) \, dx$$

Une seconde intégrale apparaît. Afin de résoudre cette nouvelle intégrale, utilisons encore une fois la méthode d'intégration par partie, en posant  $f(x) = \cos(x)$  et

$g(x) = e^x$ . On a donc

$$\begin{aligned} I_1 &= e^x \sin(x) - \left( e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx \right) + c \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) \, dx + c \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I_1 + c \\ &= \frac{1}{2} (e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) + c \end{aligned}$$

Dans le cadre de  $I_2$ , on procède par changement de variable après un bref artifice de calcul :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{(x^2+2x)^3} \, dx \end{aligned}$$

Posons  $u(x) = (x^2 + 2x)$ , on a  $du = 2x + 2 \, dx$ . Dès lors, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2u^2} \right) + c \\ &= -\frac{1}{4x^2(x+2)^2} + c \end{aligned}$$

L'intégrale  $I_3$  somme peut se décomposer en une somme de deux intégrales. On a donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{1/2} (1) \, dx + \int_0^{1/2} (e^{-2x}) \, dx \\ &= [x]_0^{1/2} + \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{1/2} \\ &= [x]_0^{1/2} - \frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} - e^{2 \cdot 0}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-1} - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-1}. \end{aligned}$$

Pour résoudre  $I_4$ , on procède par partie, en posant  $f(x) = \ln(x)$  et  $g'(x) = x^2$ . Dès lors, on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \left( \ln x - \frac{1}{3} \right) + c, \end{aligned}$$

Dans le cas de  $I_5$ , on remarque que l'on doit intégrer une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à zéro. Le résultat d'un tel calcul d'intégration est systématiquement nul.

Enfin, pour  $I_6$ , on remarque que l'on doit intégrer par rapport à la variable  $y$ , absente. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int (x + 3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} dy \\ &= (x + 3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} \int 1 dy \\ &= (x + 3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} y + c \end{aligned}$$





---

## Nombres complexes

*Introduction • Concepts de base • Forme trigonométrique • Opérations sur les complexes • Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$  • Exercices résolus*

---

Les nombres complexes sont des nombres qui, *a priori*, semblent avoir peu de sens pratique dans la vie de tous les jours. En effet, ils sont construits sur le postulat « soit un nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$  ». À l'évidence, un tel nombre *réel* n'existe pas.

Néanmoins, ces nombres ont de nombreuses applications, notamment en physique ondulatoire, en traitement du signal et d'image, etc. Ce chapitre présente ce concept dans ce cadre.

Plus particulièrement, la section 10.1 présente le contexte applicatif et historique des nombres complexes, la section 10.2 se chargeant d'en définir les concepts de base associés. Ensuite, la section 10.3 introduit une représentation alternative des nombres complexes, la *forme trigonométrique*. Diverses opérations sont ensuite définies entre les nombres complexes à la section 10.4. Des techniques de résolution d'équations complexes particulières sont finalement présentées en section 10.4, avant une série d'exercices résolus en section 10.6.

## 10.1 Introduction

Les nombres négatifs semblent complètement naturels de nos jours. Bien qu'il semble incongru de dire « tu me dois -5 euros », il sont souvent utilisés pour marquer un écart dans une direction ou une autre d'un équilibre : le zéro. Ainsi, on peut dire « il fait  $-5^{\circ}\text{C}$ . » ou encore « dans le repère considéré, la vitesse du mobile est de  $-5\text{m/s}$  ». Ainsi, bien que les grecs ne considéraient pas les nombres négatifs, les mathématiciens étendirent les nombres considérés à l'époque pour modéliser des concepts plus puissants.

Les nombres complexes trouvent leur origine dans un phénomène similaire. L'époque de la renaissance fut le berceau de nombreux progrès scientifiques, mathématiques incluses. Leur première nécessité apparut lors de la découverte de formules analytiques pour résoudre des équations polynomiales de degré 3 et 4 par le mathématicien italien du XVI<sup>e</sup> s. Niccolò Fontana Tartaglia.

Dans la résolution d'équations de la forme  $x^3 = mx + p$ , il avance les solutions non triviales de  $x^3 = x$  comme

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( (\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}} \right). \quad (10.1)$$

À l'époque, de tels calculs semblent absurdes. Néanmoins, les mathématiques modernes montrent que l'équation  $z^3 = i$  a pour solutions  $-i$ ,  $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$  et  $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ . Si l'on substitue ces valeurs pour  $\sqrt{-1}$  dans l'équation (10.1), on obtient 0, 1 et  $-1$  comme solutions de  $x^3 = x$ .

À l'évidence, cette équation peut être résolue facilement sans l'usage de nombres complexes, mais elle illustre le fait que quand une formule générale est utilisée pour résoudre des équations polynomiales de degré 3, les complexes sont indispensables.

Le terme *imaginaire* fut introduit plus tard par Descartes en 1637, précisément pour décrire des solutions de telles équations, mais ne correspondant à aucune quantité que l'on peut imaginer. De nombreuses confusions apparaissaient alors, notamment car, pour des nombres réels positifs, on a  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , alors que l'écriture  $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$  est absurde. D'autres problèmes arithmétiques conduisirent ainsi à l'introduction d'une notation  $i$  comme une solution de  $x^2 = -1$  à la place des écritures  $\sqrt{-1}$  pour éviter toute forme de confusion,

de la même manière que  $\sqrt{2}$  fut défini comme la solution positive de l'équation  $x^2 = 2$ .

L'usage des nombres complexes se généralisa dans le courant du XVII<sup>e</sup> s., notamment par De Moivre qui mit en relation les puissances de fonctions trigonométriques d'un angle grâce à la formule

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta),$$

et par Euler qui posa les premières pierres de l'analyse complexe en montrant que

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

Les nombres complexes ont de nos jours énormément d'application, en physique des matériaux, en thermodynamique, en traitement du signal, etc.

## 10.2 Concepts de base

### Définition 10.1

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , un nombre complexe est un nombre  $a + bi$ , avec  $i$  défini comme  $i^2 = -1$ . L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .

Soit  $z = a + bi$ , on appelle  $a$  la *partie réelle* de  $z$ , et  $b$  la *partie imaginaire* de  $z$ . La notation  $a + bi$  est également appelée la *forme algébrique* de  $z$ . Par ailleurs, le complexe  $a - bi$  est appelé le complexe *conjugué* de  $z$ .

**Remarque 10.1.** Bien que l'on définisse  $i$  comme une solution de l'équation  $x^2 = -1$ , on ne peut pas écrire  $\sqrt{-1} = i$ . En effet, cela conduit à une contradiction, car on aurait  $-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = 1$ . Pour rappel,  $\sqrt{a}$  est une *notation* définie comme la solution positive de l'équation  $x^2 = a$  avec  $a \geq 0$ , et ne peut être utilisée *que* sous cette hypothèse.

Habituellement, on représente les nombres complexes dans le *plan complexe*, un plan normé où l'axe des abscisses décrit la partie réelle et l'axe des ordonnées la partie imaginaire. Ainsi, on remarque que si  $b = 0$ , alors  $z \in \mathbb{R}$ .

Cette représentation a été introduite par W. R. Hamilton au 19<sup>e</sup> siècle. Parfois, le plan complexe représenté sous cette forme est appelé d'Argand. Notons qu'il existe d'autres représentations courantes des nombres complexes, dépendant de l'application la motivant.

**Exemple 10.2.** Le nombre  $z$  illustré à la figure 10.1 est le complexe  $2 + 3i$ , la partie réelle de  $z$  est 2 et sa partie imaginaire 3. ◀

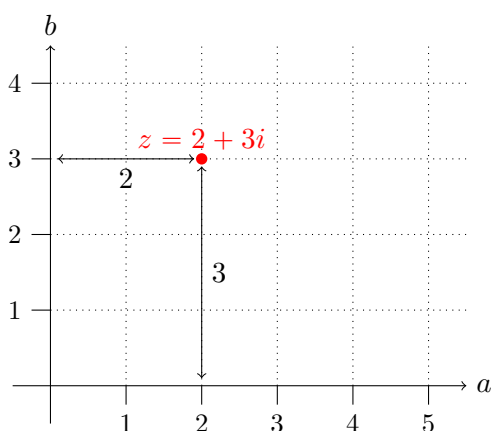


FIGURE 10.1 – Exemple de nombre complexe

À l'aide d'une telle représentation, on remarque que deux complexes  $z_1 = a_1 + b_1i$  et  $z_2 = a_2 + b_2i$  sont égaux, noté  $z_1 = z_2$ , si et seulement si  $a_1 = a_2$  et  $b_1 = b_2$ .

Par ailleurs, on définit le *module* d'un complexe similairement à la norme d'un vecteur, de la manière suivante.

**Définition 10.2**

Soit  $z = a + bi$ , on définit le module de  $z$ , noté  $|z|$ , comme

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par application du théorème de Pythagore, on remarque que le module d'un nombre complexe  $z$  est la longueur du segment de droite joignant la représentation de  $z$  dans le plan complexe à l'origine du repère.

**Exemple 10.3.** Sur la figure 10.1, on a  $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ . C'est la longueur du segment joignant  $z$  au point  $(0, 0) = 0 + 0i$ . ◀

## 10.3 Forme trigonométrique

Une autre manière de définir un nombre  $z = a + bi$  dans le plan complexe est de considérer la distance  $\rho$  par rapport à l'origine du repère, et l'angle  $\theta$  entre la droite joignant cette origine à  $z$  et l'axe horizontal du repère. Cette situation est illustrée à la figure 10.2.

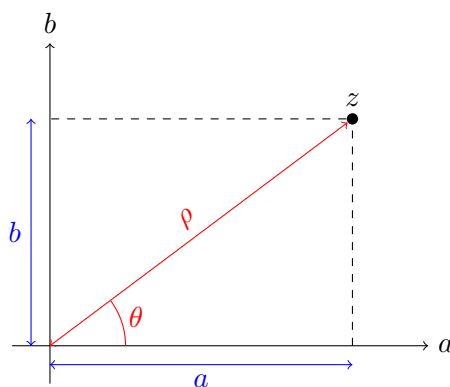


FIGURE 10.2 – Forme trigonométrique d'un complexe  $z$

Cette représentation d'un complexe  $z$  est appelée la *forme trigonométrique* de  $z$ . On remarque que  $\rho$  est le module de  $z$ , et on appelle  $\theta$  l'*argument* de  $z$ .

Souvent, on note  $z$  sous forme trigonométrique comme  $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Parfois, cette notation est abrégée comme  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ . Alternativement, un complexe noté sous forme trigonométrique est également noté  $z = \rho e^{i\theta}$ .

Il est possible de transformer la forme algébrique d'un complexe  $z$  en sa forme trigonométrique et inversement de la manière suivante, par application du théorème de Pythagore et de trigonométrie dans le triangle rectangle.

**Formules de conversion**

Soit  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ , on a  $z = a + bi$  avec

$$a = \rho \cos(\theta),$$

$$b = \rho \sin(\theta).$$

Soit  $z = a + bi$  avec  $a, b \geq 0$ , on a  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  avec

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

À l'évidence, l'utilisation de coordonnées trigonométriques n'est possible que si le complexe considéré  $z \neq 0$ , auquel cas la définition en termes de  $\rho$  et  $\theta$  n'a pas de sens. De plus, dans les formules ci-dessus, diviser par  $\rho$  provoque une indétermination.

Notons toutefois que la formule de passage sous forme trigonométrique ci-dessus n'est valide que si le complexe considéré est dans le premier quadrant. Dans les autres cas, il faut utiliser un peu de trigonométrie élémentaire.

**Exemple 10.4.** Soit  $z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ , peut écrire  $z_1$  sous forme trigonométrique comme  $z_1 = a + bi$ , avec

$$— a = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$— b = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

En conclusion,  $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ . ◀

**Exemple 10.5.** Soient les complexes

$$— z_1 = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$— z_2 = 1 - \sqrt{3}i,$$

$$— z_3 = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$— z_4 = -1 - \sqrt{3}i,$$

on peut écrire  $z_1$  sous forme trigonométrique comme  $z_1 = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ , avec

$$— \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$— \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Par ailleurs, on remarque que  $z_2$ ,  $z_3$  et  $z_4$  ne sont pas dans le premier quadrant. Néanmoins, on peut les écrire sous forme trigonométrique comme

- $z_2 = 2 \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{3} \right)$ , car  $z_2$  est dans le 4<sup>e</sup> quadrant,
- $z_3 = 2 \operatorname{cis} \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi}{3} \right)$ , car  $z_3$  est dans le 2<sup>e</sup> quadrant,
- $z_4 = 2 \operatorname{cis} \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{4\pi}{3} \right)$ , car  $z_4$  est dans le 3<sup>e</sup> quadrant.

Cette situation est illustrée à la figure 10.3. ◀

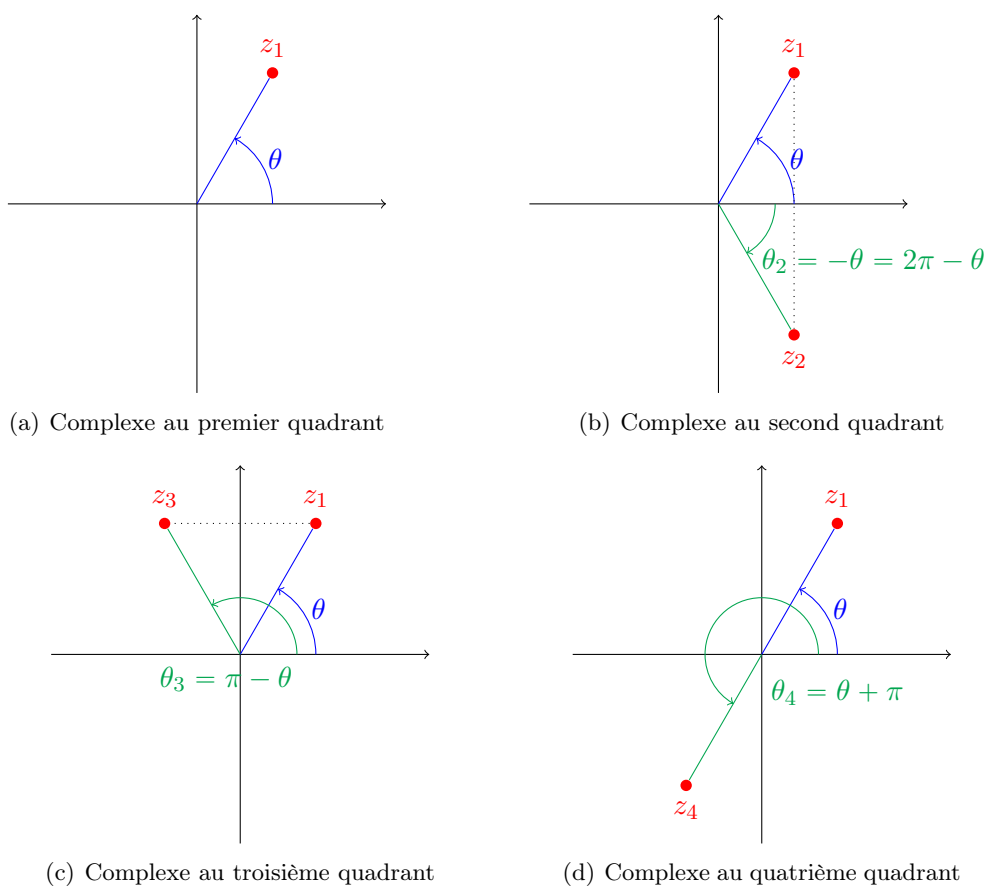


FIGURE 10.3 – Quatre complexes

En général, l'application que l'on considère des nombres complexes privilégie l'une ou l'autre application. En traitement de signal, électromagnétisme et physique ondulatoire, par exemple, on privilégie souvent la forme trigonométrique étant donné les similitudes entre les concepts étudiés et les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

## Coordonnées polaires

La plupart des gens sont familiers avec le système de *coordonnées cartésiennes* : un point  $(a, b)$  est défini comme décalé horizontalement de  $a$  unités sur l'axe  $ox$ , et de  $b$  unités sur l'axe  $oy$ . Ce système de coordonnées permet d'identifier uniquement chaque point du plan.

Un des avantages principaux de ce système de coordonnées est qu'il est facile d'effectuer une translation sur un point. En effet, si  $P = (a, b)$  est un point du plan à traduire selon un vecteur  $(a', b')$ , il suffit d'ajouter  $a'$  unités à l'abscisse de  $P$ , et  $b'$  unités à l'ordonnée de  $P$ . Cette situation est illustrée à la figure 10.4.

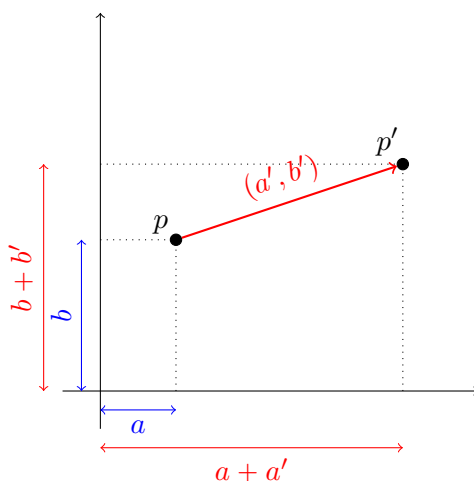


FIGURE 10.4 – Translation d'un point

Néanmoins, le calcul des nouvelles coordonnées est significativement plus difficile si l'on souhaite effectuer une rotation de  $P$  autour d'un certain point. Pour ce faire, on peut utiliser le système de *coordonnées polaires*, qui a l'avantage de simplifier le calcul des rotations, au détriment du calcul des translations. Ce système de coordonnées est sensiblement identique à la notation trigonométrique des nombres complexes.

Dans le système de coordonnées polaires, un point  $p = (\rho, \theta)$  est identifié par deux composantes :

- son *module*  $\rho$  : la distance qui sépare  $p$  de l'origine du repère,
- son *angle*  $\theta$  : la pente de la droite joignant l'origine du repère à  $p$ .



De la même manière que pour les coordonnées cartésiennes, ce système permet d'identifier sans ambiguïté chaque point du plan. Par ailleurs, si l'on souhaite effectuer une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'origine d'un point  $p = (\rho, \theta)$  exprimé en coordonnées polaires, il suffit d'ajouter  $\alpha$  à l'angle de  $p$ . Cette situation est illustrée à la figure 10.5.

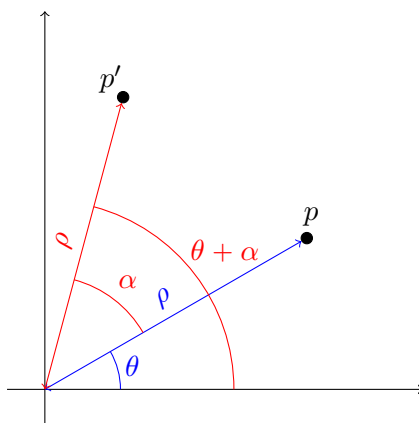


FIGURE 10.5 – Rotation d'un point autour de l'origine

Notez que cette brève introduction ne couvre pas exhaustivement toutes les informations liées aux coordonnées polaires. En effet, entre autres, elles n'expliquent pas directement comment effectuer une rotation autour d'un point quelconque.

## 10.4 Opérations sur les complexes

Il est possible d'effectuer diverses opérations arithmétiques sur les complexes. En particulier, il est possible de les additionner, multiplier et diviser, au même titre que les nombres réels. Chaque une de ces opérations se comporte naturellement, comme si l'imaginaire  $i$  était une variable.

### 10.4.1 Addition et soustraction

Pour effectuer une addition ou soustraction de nombre complexes sous forme algébrique, on procède « composante par composante », similairement à la somme de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Propriété 10.3

Soient  $z_1 = a_1 + b_1 i$  et  $z_2 = a_2 + b_2 i$ , on a

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i.$$

Similairement au cas vectoriel, on peut construire géométriquement l'addition de complexes à l'aide d'un diagramme en parallélogramme, tel qu'illustré à la figure 10.6 avec  $(1 + 3i) + (4 + i)$ .

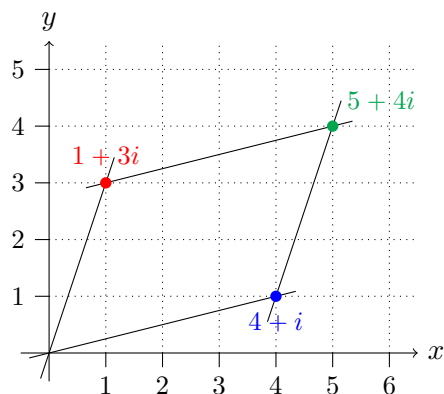


FIGURE 10.6 – Addition de deux complexes

Il est assez difficile d'effectuer l'addition ou la soustraction quand les complexes en question sont sous forme trigonométrique. Aussi, on préférera presque systématiquement<sup>1</sup> effectuer une conversion sous forme algébrique avant d'effectuer l'addition.

1. En l'absence de variables, on peut directement calculer les sinus et cosinus de la forme trigonométrique.

**Exemple 10.6.** On a

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i) + (1 - 2i) &= (2 + 1) + (3 - 2)i \\
 &= 3 + i \\
 (5 - 4i) - (3 + 2i) &= (5 - 3) + (-4 - 2)i \\
 &= 2 - 6i \\
 2 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} \right) + 4 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{6} \right) &= 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) + 4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
 &= 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) + 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 &= (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) + (\sqrt{2} + 2)i
 \end{aligned}$$



### 10.4.2 Multiplication

Pour effectuer une multiplication entre nombres complexes, on procède en distribuant les termes du produit :

$$\begin{aligned}
 (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 \\
 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la formule suivante :

#### Propriété 10.4

Soient  $z_1 = a_1 + b_1i = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$  et  $z_2 = a_2 + b_2i = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ , on a

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i \\
 &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

On peut montrer ces égalités facilement sous forme algébrique en se souvenant que  $i^2 = -1$ , et sous forme trigonométrique car

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \\
 \sin(a + b) &= \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b).
 \end{aligned}$$

Notez qu'on peut construire géométriquement la multiplication de deux  $z_1$  et  $z_2$  représentés sous forme trigonométrique. Pour cela, il suffit d'effectuer une rotation de  $z_2$  autour de l'origine de  $\theta_1$  radians, et de multiplier le module du résultat de la rotation par  $\rho_1$ . Cette construction est illustrée à la figure 10.7.

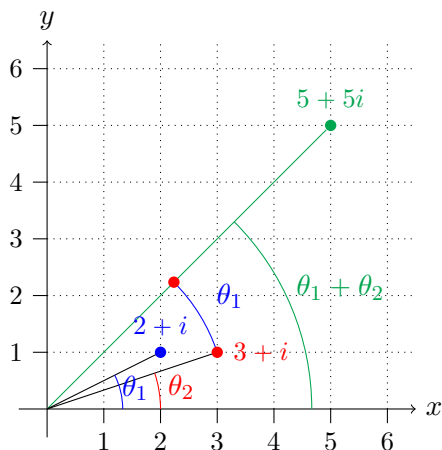


FIGURE 10.7 – Illustration de la multiplication de complexes

**Exemple 10.7.** On a

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i) \cdot (1 - 2i) &= (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2)i \\
 &= 8 - i \\
 4 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{12} \right) \cdot 3 \operatorname{cis} \left( \frac{23\pi}{12} \right) &= 4 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{12} \right) \cdot 3 \operatorname{cis} \left( \frac{-\pi}{12} \right) \\
 &= 4 \cdot 3 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 12 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$



Notons que le calcul d'un complexe élevé à une puissance entière est une conséquence directe de la propriété 10.4 détaillant la multiplication.

#### Corollaire 10.5

Soit  $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ .

## 10.4.3 Inverse et division

On remarque que pour inverser un complexe  $z = a + bi$ , il n'est pas satisfaisant d'écrire le résultat comme  $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$ . En effet, un complexe est un nombre écrit sous la forme  $x + yi$ , ce qui n'est pas le cas de  $z^{-1}$ . Néanmoins, on peut multiplier  $z^{-1}$  par  $\frac{a - bi}{a - bi}$ , ce qui donne le résultat d'écriture attendu étant donné que  $i^2 = -1$ .

Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} \\ &= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \end{aligned}$$

On remarque qu'inverser un complexe est analytiquement plus simple sous forme trigonométrique, en appliquant le principe vu dans le cadre de la multiplication. On obtient donc la généralisation suivante.

**Propriété 10.6**

Soit  $z = a + bi = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ , on a

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \\ &= \frac{1}{\rho} \operatorname{cis}(-\theta) \end{aligned}$$

On peut construire géométriquement l'inverse d'un complexe  $z$  écrit sous forme trigonométrique de la manière suivante : il suffit de substituer le module de  $z$  par son inverse, et d'effectuer une symétrie orthogonale d'axe  $ox$  pour obtenir le résultat. Cette situation est illustrée à la figure 10.8.

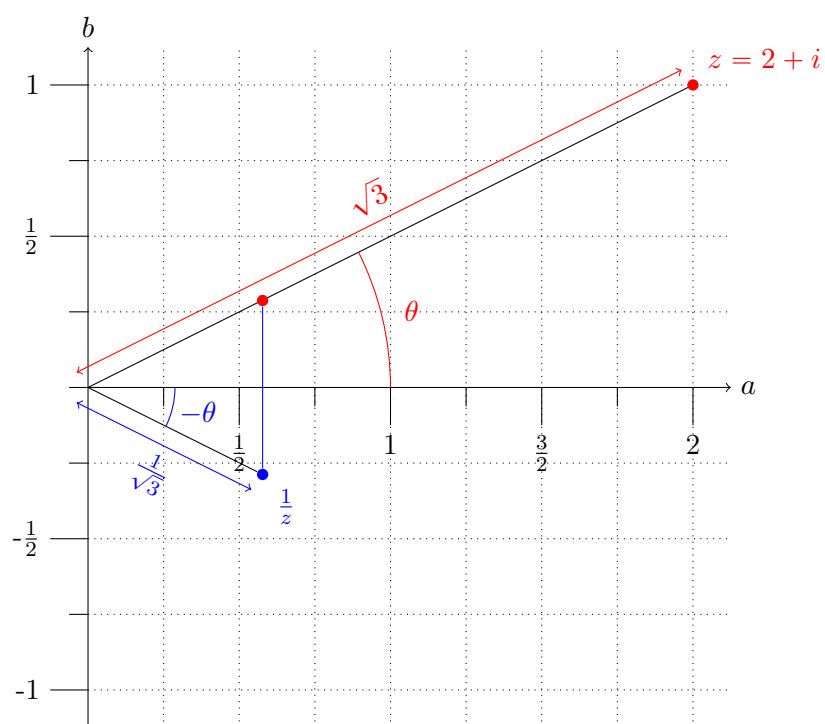


FIGURE 10.8 – Construction de l'inverse d'un complexe

**Exemple 10.8.** On a

$$\begin{aligned}
 (3 + 2i)^{-1} &= \frac{1}{3 + 2i} \\
 &= \frac{1}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} \\
 &= \frac{3}{3^2 + 2^2} - \frac{2}{3^2 + 2^2}i \\
 &= \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \\
 \left(4 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1} &= \frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$



Notons que comme diviser  $z_1 = a_1 + b_1i$  par un complexe  $z_2 = a_2 + b_2i$  correspond à multiplier  $z_1$  par  $z_2^{-1}$ , on obtient directement les formules de quotient, en calculant arithmétiquement comme précédemment le résultat en multipliant le quotient par le complexe conjugué sur lui-même :

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \cdot \frac{a_2 - b_2i}{a_2 - b_2i} \\
 &= \frac{a_1a_2 - a_1b_2i + a_2b_1i - b_1b_2i^2}{a_2^2 - a_2b_2i + a_2b_2i - b_2^2i^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i
 \end{aligned}$$

On remarque également que, similairement au cas multiplicatif, il est plus simple d'effectuer une division quand les complexes considérés sont écrits sous forme trigonométrique. Ceci nous donne la généralisation suivante.

#### Propriété 10.7

Soient  $z_1 = a_1 + b_1i = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$  et  $z_2 = a_2 + b_2i = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \\
 &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)
 \end{aligned}$$

## 10.5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Grâce à l'extension de  $\mathbb{R}$  en l'ensemble  $\mathbb{C}$ , il est possible de calculer résoudre des équations qui auparavant n'admettaient pas de solution. Par exemple, on sait que, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $x^2 = -1$  n'admet pas de solution. Or, dans  $\mathbb{C}$ , on sait que  $i$  est solution de cette équation, car  $i^2 = -1$ . De la même manière,  $-i$  est également solution de cette équation.

Le but de cette section est d'étendre la résolution d'équations familières dans  $\mathbb{C}$ .

### Polynômes de degré 1

Toutes les équations de type  $ax + b = 0$  admettent une unique solution réelle :  $x = -\frac{b}{a}$ , si  $a \neq 0$ . Pour les équations de droite, donc, la résolution est sensiblement la même que dans le cas réel.

**Exemple 10.9.** On a

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$



**Exemple 10.10.** On a

$$\begin{aligned} (2 + 3i)x + (4 - i) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4 - i}{2 + 3i} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4 - i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{8 - 12i - 2i - 3}{4 + 9} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i \end{aligned}$$





## Polynômes de degré 2

On sait que les solutions *réelles* d'une équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0 \quad (10.2)$$

sont données par  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  si  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ . Si  $\Delta < 0$ , dans  $\mathbb{R}$ , il n'est pas possible d'en extraire une racine réelle.

Toutefois, on peut quand même généraliser cette formule. En effet,  $\sqrt{a}$  est défini comme la solution positive de l'équation  $x^2 - a = 0$ . Ici, on est amené à résoudre le même type d'équation, dans le cas complexe, avec  $x^2 = \Delta$ .

Or, dans  $\mathbb{C}$ , on sait que  $i^2 = -1$ , et donc, si  $\Delta < 0$ , on peut écrire

$$\Delta = i^2 \cdot (-\Delta),$$

et il est facile de voir que  $i\sqrt{-\Delta}$  et  $-i\sqrt{-\Delta}$  sont racines de  $x^2 = \Delta$ .

Ainsi, si  $\Delta < 0$ , l'équation (10.2) admet pour solutions

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

**Exemple 10.11.** Soit l'équation  $x^2 - 2x + 4 = 0$ . On a  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12$ . Les solutions de cette équation sont donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{12} i}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{3} i \end{aligned}$$



Ce type de raisonnement peut être appliqué pour les polynômes de degré 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . En effet, le polynôme  $az^2 + bz + c$  admet pour racines

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + r_1}{2a} \\ z_2 &= \frac{-b + r_2}{2a}, \end{aligned}$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les solutions de  $z^2 = b^2 - 4ac$ .

**Exemple 10.12.** Calculons les solutions de l'équation

$$(-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i = 0$$

et factorisons ce polynôme. Avant toutes choses, on note que

$$\begin{aligned} (-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i &= (-1 + i) \left( z^2 + \frac{4 - 2i}{-1 + i}z + \frac{-7 + 9i}{-1 + i} \right) \\ &= (-1 + i) (z^2 + (-3 - i)z + (8 - i)), \end{aligned}$$

en écrivant le terme indépendant et le terme en  $z$  sous forme algébrique grâce aux multiplications par les conjugués, tels qu'utilisés dans le quotient de complexes. Notons  $\mathbb{P} = z^2 + (-3 - i)z + (8 - i)$ , et calculons ses racines.

On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3 - i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - i) \\ &= 9 - 1 + 6i - 32 + 4i \\ &= -24 + 10i \end{aligned}$$

Les solutions de  $z^2 = \Delta$  sont <sup>2</sup>  $1 + 5i$  et  $-1 - 5i$ , dès lors, les racines  $z_1$  et  $z_2$  de  $\mathbb{P}$  sont calculées comme

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 + i + 1 + 5i}{2} \\ &= 2 + 3i, \\ z_2 &= \frac{3 + i - 1 - 5i}{2} \\ &= 1 - 2i. \end{aligned}$$

En conséquence,  $z_1$  et  $z_2$  sont solutions de  $(-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i = 0$  et ce polynôme peut s'écrire sous la forme

$$(-1 + i)(z - (2 + 3i))(z - (1 - 2i))$$




---

2. On peut en effet vérifier que  $(1 + 5i)^2 = (-1 - 5i)^2 = -24 + 10i$ . On verra à la section une technique permettant de résoudre des équations  $z^n = a + bi$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b$  arbitraires.

### Polynômes de degré 3 à coefficients réels

Les polynômes à coefficients réels de degré impair (et donc, en particulier de degré 3) étant des fonctions  $p(x)$  continues telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$ , on sait que  $p(x)$  admet une racine<sup>3</sup>  $r \in \mathbb{R}$ .

En effectuant la division d'un polynôme  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  par  $x - r$ , on peut donc écrire une équation  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  comme  $(x - r)(a'x^2 + b'x + c') = 0$ , pour certains  $a', b', c' \in \mathbb{R}$ . Cette équation admet deux solutions de plus dans  $\mathbb{C}$ , celles de  $a'x^2 + b'x + c' = 0$ . Pour les trouver, il suffit d'utiliser la procédure de résolution des polynômes de degré 2.

**Exemple 10.13.** Soit le polynôme  $p(x) = \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 - 15x - 20$ . En testant les diviseurs entiers de 20, on remarque que  $x = 4$  est racine de ce polynôme. On peut donc écrire  $p(x) = 0$  sous la forme  $(x - 4)(ax^2 + bx + c) = 0$ . En effectuant la division de  $p(x)$  par  $x - 4$ , on obtient  $p(x) = (x - 4)(\frac{5}{2}x^2 + 5x + 5)$ .

On calcule  $\Delta = 5^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = -25$ . Dès lors, on obtient deux nouvelles racines :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25} i}{5} \\ &= -1 \pm i \end{aligned}$$

Les trois racines de  $p(x)$  sont donc  $x = 4$ ,  $x = -1 + i$  et  $x = -1 - i$ . ◀

#### 10.5.1 Racines de l'unité

Il est clair que, dans  $\mathbb{R}$  comme dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation  $x^2 = 1$  sont  $x = 1$  et  $x = -1$ . On peut généraliser cette équation en  $z^n = 1$ , et tenter de la résoudre. On peut montrer que cette équation admet exactement  $n$  solutions dans  $\mathbb{C}$ , appelées les *racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité*.

Considérons par exemple l'équation

$$z^3 = 1. \tag{10.3}$$

---

3. On peut trouver systématiquement cette racine soit par approximation numérique, soit parfois analytiquement en testant les diviseurs rationnels du terme indépendant.

Une solution  $r = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  de cette équation *vérifie* l'équation, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\rho \operatorname{cis}(\theta))^3 &= \operatorname{cis}(0) \\ \Leftrightarrow \rho^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) &= 1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) \end{aligned}$$

On peut conclure immédiatement que  $\rho = 1$ . On remarque également que  $x = 1$  est une solution de cette équation, car  $1^3 = 1$ . Néanmoins, il reste deux solutions complexes à trouver. De plus, pour chacune de ces solutions, on a  $3\theta = 0 = 2\pi$ . On remarque les angles

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_2 &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

répondent à cette contrainte. En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}(0) \end{aligned}$$

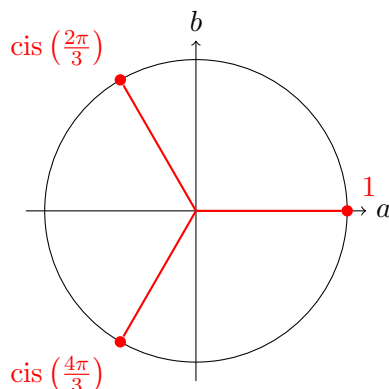
On peut effectuer les mêmes vérifications avec  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ .

Dès lors, l'ensemble des solutions de l'équation (10.3) est l'ensemble

$$R_3 = \left\{ 1, \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\}.$$

Ces solutions sont illustrées à la figure 10.9.

On remarque par extension du raisonnement précédent avec  $n = 3$  que chacune des solutions de cette équation est obtenue par rotation de 1 de  $\frac{2\pi}{n}$  radians.

FIGURE 10.9 – Solutions de l'équation  $z^3 = 1$ 

En généralisant ce raisonnement, on peut donc décrire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  d'une équation  $z^n = 1$  de la manière suivante.

**Propriété 10.8**

L'ensemble  $R_n$  des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  est défini comme

$$R_n = \left\{ \text{cis} \left( \frac{k \cdot 2\pi}{n} \right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Comme prévu, on remarque qu'en particulier, 1 est un élément de  $R_n$  quand  $k = 0$ .

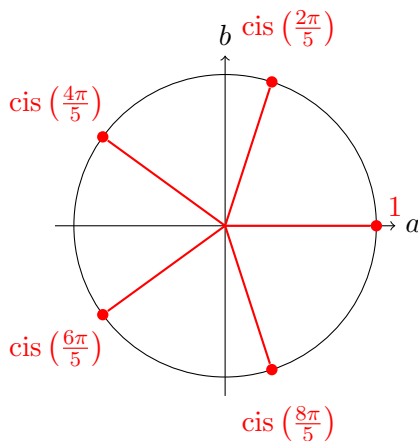
**Exemple 10.14.** L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  de  $z^5 = 1$  est  $R_5$  défini comme

$$R_5 = \left\{ 1, \text{cis} \left( \frac{2\pi}{5} \right), \text{cis} \left( \frac{4\pi}{5} \right), \text{cis} \left( \frac{6\pi}{5} \right), \text{cis} \left( \frac{8\pi}{5} \right) \right\}.$$

Ces solutions sont illustrées à la figure 10.10. ◀

On remarque qu'on peut adapter le raisonnement de résolution de  $z^n = 1$  pour résoudre  $z^n = \rho \text{cis}(\theta)$ . En effet, on peut déduire les points suivants.

1. Le module de chaque solution  $r$  est  $\sqrt[n]{\rho}$ . Si ce n'était pas le cas, le module de  $r^5$  ne serait pas  $\rho$ .

FIGURE 10.10 – Solutions de l'équation  $z^5 = 1$ 

2.  $r_0 = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$  est une solution, car  $r_0^n = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} \cdot n\right) = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ .
3. Chaque solution de cette équation peut être obtenue en effectuant une rotation de  $r_0$  de  $\frac{k \cdot 2\pi}{n}$  radians un nombre entier de fois.

Ainsi, on remarque qu'on peut obtenir les solutions d'une équation de type  $z^n = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  en trouvant en premier lieu  $r_0$ , et ensuite en effectuant une rotation de cette solution de  $n^e$  de tours autour de l'origine.

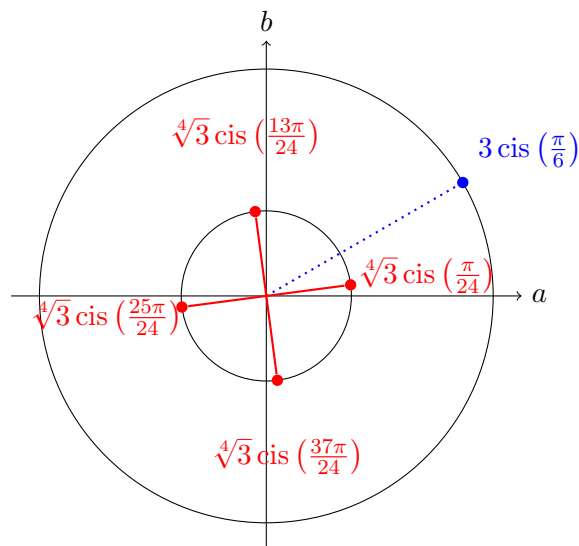
**Exemple 10.15.** L'ensemble des solutions de  $z^4 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$  est

$$\left\{ \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + 2 \cdot \frac{2\pi}{4}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + 3 \cdot \frac{2\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{37\pi}{24}\right) \right\}$$

Ici, on a  $r_0 = \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right)$ , car  $\frac{\theta}{n} = \frac{\pi}{6 \cdot 4}$ . On obtient les autres solutions en effectuant à chaque fois un quart de tour, c'est-à-dire en ajoutant  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{12\pi}{24}$  à l'argument de  $r_0$ . Ces solutions sont représentées à la figure 10.11. ◀

On peut dès lors dégager la propriété suivante.

FIGURE 10.11 – Solutions de  $z^4 = 3 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{6})$ **Propriété 10.9**

L'ensemble  $R_n$  des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = \rho \operatorname{cis}(\theta)$  est défini comme

$$R_n = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Notons que, dans le cas où  $z$  n'est pas écrit sous forme trigonométrique, il convient de le convertir sous cette forme afin de se servir de la formule ci-dessus.

## 10.6 Exercices résolus

**Exercice 10.1.** Représentez dans les complexes suivants dans le plan complexe

- |               |  |
|---------------|--|
| — $2 + i$ ,   | — $3 \operatorname{cis}(\frac{7\pi}{6})$ ,         |
| — $4 - 2i$ ,  | — $4 \operatorname{cis}(\frac{9\pi}{5})$ ,         |
| — $-3 + 3i$ , | — $2\sqrt{2} \operatorname{cis}(\frac{3\pi}{4})$ . |

*Solution.* Les complexes sont représentés à la figure 10.12. ◀

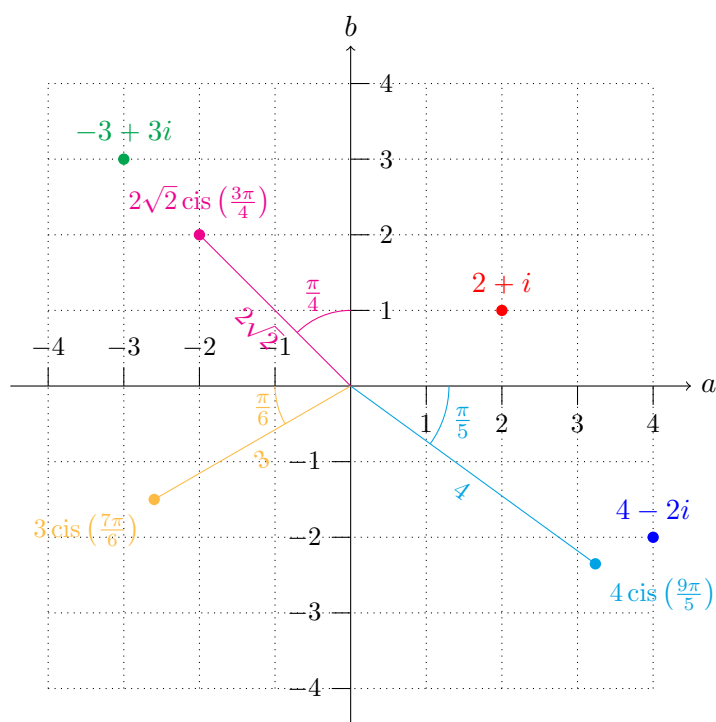


FIGURE 10.12 – Représentation de complexes

**Exercice 10.2.** Représentez les complexes suivants sous forme trigonométrique.

- $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ,
- $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ ,
- $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .



*Solution.* On a

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{8+8} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{9+27} \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_3 &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \arccos\left(\frac{3}{6}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

En conclusion,

$$z_1 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = 6 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right).$$



**Exercice 10.3.** Représentez les complexes suivants sous forme algébrique.

- $2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right),$
- $3 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),$
- $4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right).$

*Solution.* On a

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_1 &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= 3 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2 &= 3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= -4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -4 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i$$

$$z_3 = -2 + 2\sqrt{3} i$$



**Exercice 10.4.** Soient les complexes suivants :

$$— z_1 = 2 + 3i,$$

$$— z_3 = -3 - 4i,$$

$$— z_5 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$— z_2 = 1 - 2i,$$

$$— z_4 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$— z_6 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Calculez les complexes suivants :

$$— z_1 + z_2,$$

$$— z_1 \cdot z_3,$$

$$— \frac{1}{z_6},$$

$$— z_4 + z_5,$$

$$— z_4 \cdot z_6,$$

$$— \frac{z_2}{z_1},$$

$$— z_2 - z_3,$$

$$— \frac{1}{z_2},$$

$$— \frac{z_6}{z_5}.$$

$$— z_6 - z_5,$$

*Solution.* Avant tout, remarquons que la forme algébrique de  $z_4, z_5$  et  $z_6$  est calculée à l'exercice 10.3. Dans le cas d'addition et de soustraction, on les écrira donc sous cette forme. On a

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= (2 + 1) + (3 - 2)i \\
 &= 3 + i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_4 + z_5 &= (\sqrt{2} + \sqrt{2} i) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i\right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2} - 3}{2} i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 - z_3 &= (1 - (-3)) + (-2 - (-3))i \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6 - z_5 &= (-2 + 2\sqrt{3}i) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ &= -\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3} + 3}{2}i \end{aligned}$$

Dans le cadre des multiplications et divisions, on travaillera directement sur la forme fournie des complexes.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_3 &= (2 + 3i) \cdot (-3 - 4i) \\ &= 6 - 8i - 9i + 12 \\ &= 18 - 17i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 \cdot z_6 &= 2 \cdot 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 8 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{1^2 + (-2)^2} + \frac{2}{1^2 + (-2)^2}i \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ \frac{1}{z_6} &= \frac{1}{4} \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= z_2 \cdot \frac{1}{z_1} \\ &= (1 - 2i) \cdot \left(\frac{2}{2^2 + 3^2} - \frac{3}{2^2 + 3^2}i\right) \\ &= (1 - 2i) \cdot \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) \\ &= \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i - \frac{4}{13}i - \frac{6}{13} \\ &= -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_6}{z_5} &= \frac{4}{3} \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \operatorname{cis} \left( \frac{11\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$



**Exercice 10.5.** Calculez

- le module des solutions complexes de l'équation  $z^3 = 8$ ,
- les arguments des solutions complexes de l'équation  $z^6 = \sqrt{123456}$ , sans calculer les solutions.

*Solution.* Comme  $|z^3| = |z|^3$ , le module des solutions de  $z^3 = 8$  est la solution dans  $\mathbb{R}^+$  de  $x^3 = 8$ , c'est-à-dire 2.

Les arguments des solutions complexes de  $z^6 = \sqrt{123456}$  sont les solutions dans  $\mathbb{R}$  de  $6x = 0 \pmod{2\pi}$ , c'est-à-dire  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$ .



**Exercice 10.6.** Soit  $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ . Calculez et représentez  $z^n$ .

*Solution.* Avant toutes choses, on remarque que

$$|z^n| = |z|^n = \left| \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right|^n = \left( \sqrt{\frac{1+3}{4}} \right)^n = 1^n = 1.$$

De plus, on remarque que

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \frac{1}{4} (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2) \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^3 &= \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4}(-1^2 + (\sqrt{3}i)^2) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 - 3) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

De plus,  $z^4 = z^3 z = -z$ ,  $z^5 = z^3 z^2 = -z^2$  et  $z^6 = (z^3)^2 = 1$ . Par ailleurs, on remarque que  $z^7 = z^6 z = z$ ,  $z^8 = z^6 z^2 = z^2$ , etc. Comme  $z^6 = 1$ , cette séquence est périodique<sup>4</sup>. Plus précisément,  $z^n = z^{6k+n \bmod 6}$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ , et donc  $z^n = (z^6)^k \cdot z^{n \bmod 6} = z^{n \bmod 6}$ .

En conséquence, pour représenter l'ensemble des  $z^n$ , il suffit de représenter  $z^0, z, z^2, z^3, z^4$  et  $z^5$ . Ces complexes sont illustrés à la figure 10.13.

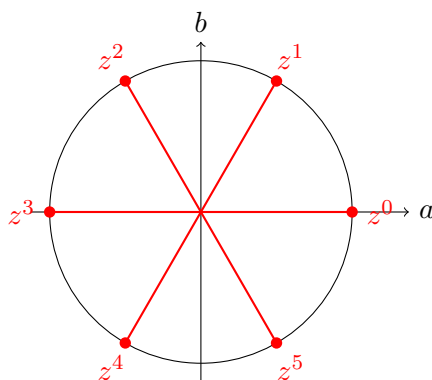


FIGURE 10.13 – Illustration de  $z^n$



**Exercice 10.7.** Calculez les solutions complexes de l'équation  $z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , écrivez-les sous forme algébrique et représentez-les dans le plan complexe.

4. En toute rigueur, cette affirmation requiert une preuve, qui n'est pas détaillée ici.

*Solution.* Écrivons  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  sous forme trigonométrique. On a

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}}{\rho}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Dès lors,  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .

En conséquence, les solutions de cette équation sont  $z_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ . Ces solutions sont illustrées à la figure 10.14.

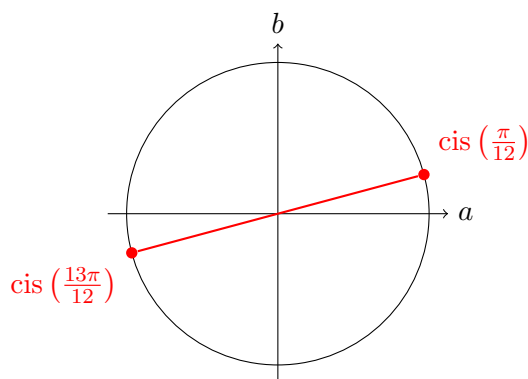


FIGURE 10.14 – Solutions de  $z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Par ailleurs, comme  $z_2 = -z_1$ , on a  $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ . ◀

**Exercice 10.8.** Soit  $z \in \mathbb{C}_0$ ,

— représentez dans le plan complexe les nombres

$$z, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)z, \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right)z, -z, \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right)z, \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)z.$$

— de quelle équation polynomiale du sixième degré ces complexes sont-ils solution ?

*Solution.* Les complexes sont illustrés à la figure 10.15.

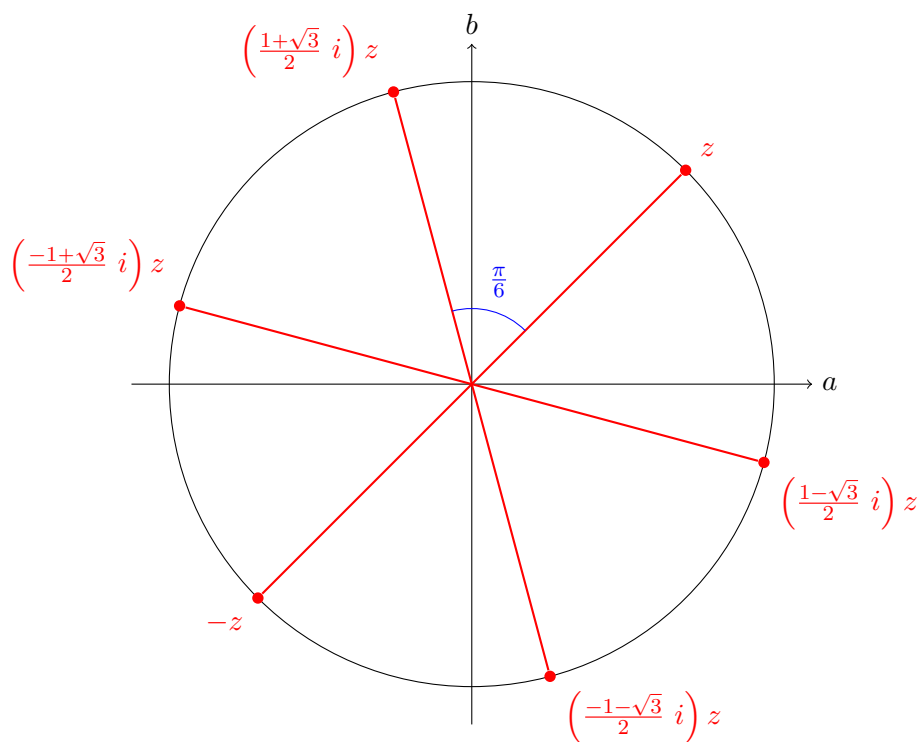


FIGURE 10.15 – Illustration de six solutions

On les obtient par rotation de  $z$  d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$ , car chacun de ces complexes est de la forme  $z_6 \cdot u$ , avec  $u$  une racine sixième de l'unité. En conséquence, ces complexes sont solutions de l'équation  $X^6 = z$ .



**Exercice 10.9.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

$$(2 + i)x - 4 + 2i = 0, \quad (10.4)$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0, \quad (10.5)$$

$$x^4 - 2x^2 + 2 = 0, \quad (10.6)$$

$$x^2 + (2 + 2i)x - 6i = 0, \quad (10.7)$$

$$x^4 + (2 + 2i)x^2 - 6i = 0. \quad (10.8)$$

*Solution.* Chaque de ces équations demande de trouver les racines d'un polynôme, et on procède comme suit.

Dans le cadre de l'équation (10.4), on a

$$\begin{aligned} (2 + i)x - 4 + 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4 - 2i}{2 + i} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4 - 2i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{6 - 8i}{4 + 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \end{aligned}$$

L'équation (10.5) est une équation du second degré, que l'on résout comme d'habitude avec la « technique du  $\Delta$  ». Dans ce cas-ci, on a  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$ . Pour poursuivre, il faut trouver quels sont les complexes  $z$  tels que  $z^2 = -4$ . Ce sont les complexes  $2i$  et  $-2i$ . Ainsi, on a

$$x = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

L'équation (10.6) est similaire à l'équation (10.5). En effet, en posant  $X = x^2$ , on peut réécrire la troisième équation comme

$$X^2 - 2X + 2 = 0.$$

Au vu des calculs ci-dessus, on sait que  $X = -1 \pm i$ , et donc que  $x^2 = -1 \pm i$ . Il faut donc à présent trouver les complexes  $x$  tels que



1.  $x^2 = -1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{4} \right)$  et
2.  $x^2 = -1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{4} \right)$ .

Dans le premier cas, on a  $x_1 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{8} \right)$  et  $x_2 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{8} + \pi \right) = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{11\pi}{8} \right)$ .

Dans le deuxième cas, on a  $x_3 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{8} \right)$  et  $x_4 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( -\frac{\pi}{8} + \pi \right) = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{7\pi}{8} \right)$ .

Ainsi, les solutions de l'équation (10.6) sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{8} \right), \\ x_2 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{11\pi}{8} \right), \\ x_3 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{-\pi}{8} \right), \\ x_4 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{7\pi}{8} \right). \end{aligned}$$

L'équation (10.7) est une équation du second degré à coefficients complexes. La technique de résolution d'une telle équation est très similaire à celle utilisée dans le cadre d'une équation à coefficients réels. On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (2 + 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6i) \\ &= 4 - 4 + 8i + 24i \\ &= 32i \end{aligned}$$

Pour poursuivre, il faut trouver les complexes  $z$  tels que  $z^2 = \Delta = 32i = 32 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ . Ces complexes sont  $z_1 = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 4 + 4i$  et  $z_2 = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{4} \right) = -4 - 4i$ .

Ainsi, l'équation (10.7) admet pour solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(2 + 2i) + (4 + 4i)}{2} = 1 + i \\ x_2 &= \frac{-(2 + 2i) + (-4 - 4i)}{2} = -3 - 3i \end{aligned}$$

Finalement, on remarque que l'équation (10.8) est très similaire à celle ci-dessus. En effet, en posant  $X = x^2$ , on est amenés à résoudre

$$X^2 + (2 + 2i)X - 6i = 0,$$

et l'on sait que  $X_1 = 1 + i$  et  $X_2 = -3 - 3i$  sont solutions de cette équation. Il reste donc à trouver les complexes  $x$  tels que

1.  $x^2 = 1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} \right)$  et
2.  $x^2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{4} \right)$ .

Dans le premier cas, on a  $x_1 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{8} \right)$  et  $x_2 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{8} + \pi \right) = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{9\pi}{8} \right)$ .

Dans le second cas, on a  $x_3 = \sqrt{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{8} \right)$  et  $x_4 = \sqrt{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{8} + \pi \right) = \sqrt{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( \frac{13\pi}{8} \right)$ .

Ainsi, les solutions de l'équation (10.8) sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{8} \right) \\ x_2 &= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left( \frac{9\pi}{8} \right) \\ x_3 &= \sqrt{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{8} \right) \\ x_4 &= \sqrt{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( \frac{13\pi}{8} \right). \end{aligned}$$



## Quatrième partie

### Annexes



---

## Exemples de raisonnements erronés classiques

---

Ce chapitre illustre des solutions délibérément erronées de plusieurs exercices de ce document. Ces raisonnements faux sont fournis à titre pédagogique, car ils illustrent des exemples classiques d'erreurs commises par les étudiants.

L'erreur ci-dessous illustre les raisonnements incorrects habituellement suivis par les étudiants dans la compréhension de la disjonction (le « ou ») et de l'implication.

**Erreur A.1.** Construisez la table de vérité de la proposition  $(p \vee q) \Rightarrow r$ .

On construit la table de vérité de cette proposition comme suit.

Plusieurs erreurs, en rouge, apparaissent dans la construction de cette table :

- souvent, les étudiants pensent que  $V \vee V$  est faux, or ce n'est pas le cas,
- souvent, les étudiants pensent que  $F \Rightarrow V$  est faux, ainsi que  $F \Rightarrow F$ , or ce n'est pas le cas.

Pour rappel,

- une disjonction (« ou », noté  $\vee$ ) est fausse uniquement quand ses deux opérandes sont fausses,
- une implication est fausse uniquement si le premier opérande est vrai et le second faux.

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$

TABLE A.1 – Table de vérité de  $(p \vee q) \Rightarrow r$ 

Souvent, les étudiants ont du mal à nier des conjonctions, des disjonctions et des implications. L'erreur ci-dessous illustre les fautes couramment commises dans la négation de ces propositions.

**Erreur A.2.** Nier en français

1. « un brasseur achète de l'orge et du houblon »,
2. « je vais m'entraîner le mardi ou le vendredi »,
3. « si je mange trop de frites, alors je vais grossir ».

Procédons au cas par cas.

1. On peut modéliser cette proposition comme  $p \wedge q$ , avec  $p$  : « un brasseur achète de l'orge » et  $q$  : « un brasseur achète du houblon ». La négation de cette proposition est donc  $\neg p \wedge \neg q$ , c'est-à-dire « le brasseur n'achète pas d'orge et pas de houblon ».

Or, si l'on réfléchit, si un brasseur doit acheter à la fois de l'orge et du houblon, les cas dans lesquels il est en défaut sont celui où au moins l'un des deux ingrédient est manquants, c'est-à-dire s'il n'achète *pas* de bière *ou pas* de houblon, comme décrit par les lois de De Morgan :

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

En français, la négation correcte est donc « le brasseur n'achète pas d'orge ou pas de houblon ».

2. On peut modéliser cette proposition comme  $p \vee q$ , avec  $p$  : « je vais m'entraîner le mardi » et  $q$  : « je vais m'entraîner le vendredi ». La négation de cette proposition est donc  $\neg p \vee \neg q$ , c'est-à-dire « je ne vais pas m'entraîner le mardi ou pas le vendredi ».

Notons que cette solution interdit de s'entraîner l'un des deux jours. Or, de nouveau, si l'on réfléchit, si l'on affirme s'entraîner le mardi ou le vendredi, l'unique cas où l'on ment est celui où on ne va ni s'entraîner le mardi, ni le vendredi, comme décrit par les lois de De Morgan :

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

En français, la négation correcte est donc « je vais pas m'entraîner le mardi, et pas le vendredi non plus » (ou encore, « je ne vais m'entraîner ni le mardi, ni le vendredi »).

On peut modéliser cette proposition comme  $p \Rightarrow q$ , avec  $p$  : « je mange trop de frites » et  $q$  : « je vais grossir ». La négation de cette proposition est donc  $\neg p \Rightarrow \neg q$ , c'est-à-dire « si je ne mange pas trop de frites, alors je ne vais pas grossir ».

Or, le seul cas dans lequel on ment dans cette proposition originale est si l'on mange trop de frites *et* qu'on ne grossit pas, ce qui a un sens différent de la solution exprimée ci-dessus. Pour rappel,

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

En français, la négation correcte est donc « je mange trop de frites et je ne vais pas grossir ».

L'erreur ci-dessous est souvent commise dans le calcul de domaine de fonctions.

**Erreur A.3.** Calculez le domaine et l'image de  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ .

Clairement,  $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}^+$ , car aucun carré ne peut être négatif. Par ailleurs, comme  $x^2$  est évaluable sur tout  $\mathbb{R}$ , on a  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .

Néanmoins, le réflexe de considérer le domaine comme un ensemble d'entrées que l'on a le droit de mathématiquement introduire dans une formule est erroné. Il est bel et bien possible de calculer  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ , qui donne  $\frac{9}{4}$ , néanmoins  $\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$  ! Pour rappel, le domaine est l'ensemble des points de l'ensemble de départ qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée, et  $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$  n'a pas d'image dans  $\mathbb{Z}$ .

Comme seuls les entiers peuvent avoir une image entière, le domaine de  $f$  est  $\mathbb{Z}$ , et non  $\mathbb{R}$ .

L'erreur ci-dessous illustre des fautes classiques de modélisation de prédicat quantifié.

**Erreur A.4.** Nier et modélisez en français la proposition « tous les serpents ne sont pas venimeux ».

Soient  $s$  la variable modélisant un serpent, et  $v(s)$  le prédicat « le serpent  $s$  est venimeux », défini sur l'ensemble des serpents. La proposition ci-dessus peut-être modélisée comme  $\forall s, \neg v(s)$ .

Dès lors, sa négation mathématique est  $\exists s, v(s)$ , c'est-à-dire « il existe un serpent venimeux ». Ce n'est, à l'évidence pas le contraire de la proposition originale.

L'erreur provient du fait que lorsque que l'on modélise cette proposition comme  $\forall s, \neg v(s)$ , on ne dit pas « tous les serpents ne sont pas venimeux », mais « quel que soit le serpent que je considère, ce serpent n'est pas venimeux », ou en d'autres termes « aucun serpent n'est venimeux ». Cette dernière proposition n'a clairement pas le sens de la proposition originale.

On peut modéliser correctement cette proposition par  $\exists s, \neg v(s)$ , c'est-à-dire « il existe un serpent qui n'est pas venimeux », ou en d'autres termes « tous les serpents ne sont pas venimeux ». Dès lors, la négation de cette proposition est construite comme  $\forall s, v(s)$ , c'est-à-dire « tous les serpents sont venimeux ».

L'erreur ci-dessous illustre les problèmes de calculs qui peuvent découler d'une modélisation incorrecte dans le cas de comptage.

**Erreur A.5** (Exercice 5.2, pt. 1). Comptons le nombre de placements de 8 pions possibles sur un échiquier de 64 cases. Modélisons un placement de pions comme un vecteur

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_{64}),$$

avec

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si la case } i \text{ est occupée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette modélisation, on remarque que l'ordre importe, sans la mesure où  $(1, 0, \dots) \neq (0, 1, \dots)$ . Dans le premier cas, on aurait un pion à la case 1 et pas à la case 2, et l'inverse dans le second cas. De la même manière, on ne peut placer qu'un pion par case, les répétitions sont donc interdites, et on a  $A_{64}^8$  possibilités de placement possibles.



L'erreur dans ce type de raisonnement est que considérer les arrangements de cette manière distingue l'ordre dans lequel les pions sont placés, ce qui est sans importance pour le problème. Aussi, à chaque tel positionnement, il y a exactement  $8!$  positionnements similaires : les  $8!$  réarrangements de l'ordre dans lequel les pions ont été placés. Par la règle de la division, on a donc  $\frac{A_{64}^8}{8!} = C_{64}^8$  placements possibles, ce qui correspond à la réponse attendue.

L'erreur ci-dessous illustre un problème classique en combinatoire : le surcomptage.

**Erreur A.6** (Exercice 5.13 - 4). Reprenons au calcul du nombre de chaînes qui contiennent un bloc de trois « 0 » consécutifs et un bloc de quatre « 1 » consécutifs. La construction détaillée ci-après est illustrée à la Figure A.1.

Il y a initialement 8 positions possibles pour le bloc de trois « 0 ». Ensuite, le bloc de quatre « 1 » peut se positionner à maximum quatre indices possibles.

Plus particulièrement, si le bloc « 000 » se trouve à la position

- 1, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 4, 5, 6 et 7 ;
- 2, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 5, 6 et 7 ;
- 3, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 6 et 7 ;
- 4, les blocs « 1111 » peuvent se placer uniquement à la position 7 ;
- 5, les blocs « 1111 » peuvent se placer uniquement à la position 1 ;
- 6, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 1 et 2 ;
- 7, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 1, 2, 3 ;
- 8, les blocs « 1111 » peuvent se placer aux positions 1, 2, 3 et 4.

Enfin, les trois positions libres dans la chaîne peuvent prendre des valeurs arbitraires. Il y a  $\alpha_2^3 = 2^3 = 8$  telles possibilités pour ces caractères.

Ainsi, en s'aidant de la Figure A.1 pour compter le nombre de chaînes qui contiennent un bloc de trois « 0 » consécutifs et un bloc de quatre « 1 » consécutifs, on remarque qu'on a exactement

$$4 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 160$$

telles chaînes. Ainsi, par la règle de la soustraction, on a  $1028 + 252 - 160 - 160 = 960$  chaînes de caractères binaires de longueur 10 qui contiennent soit trois « 0 » consécutifs, soit quatre « 1 » consécutifs.

Cette décomposition semble « simple » et intuitive, mais est erronée, à cause d'une erreur de surcomptage. En effet, si l'on considère la première bulle de la

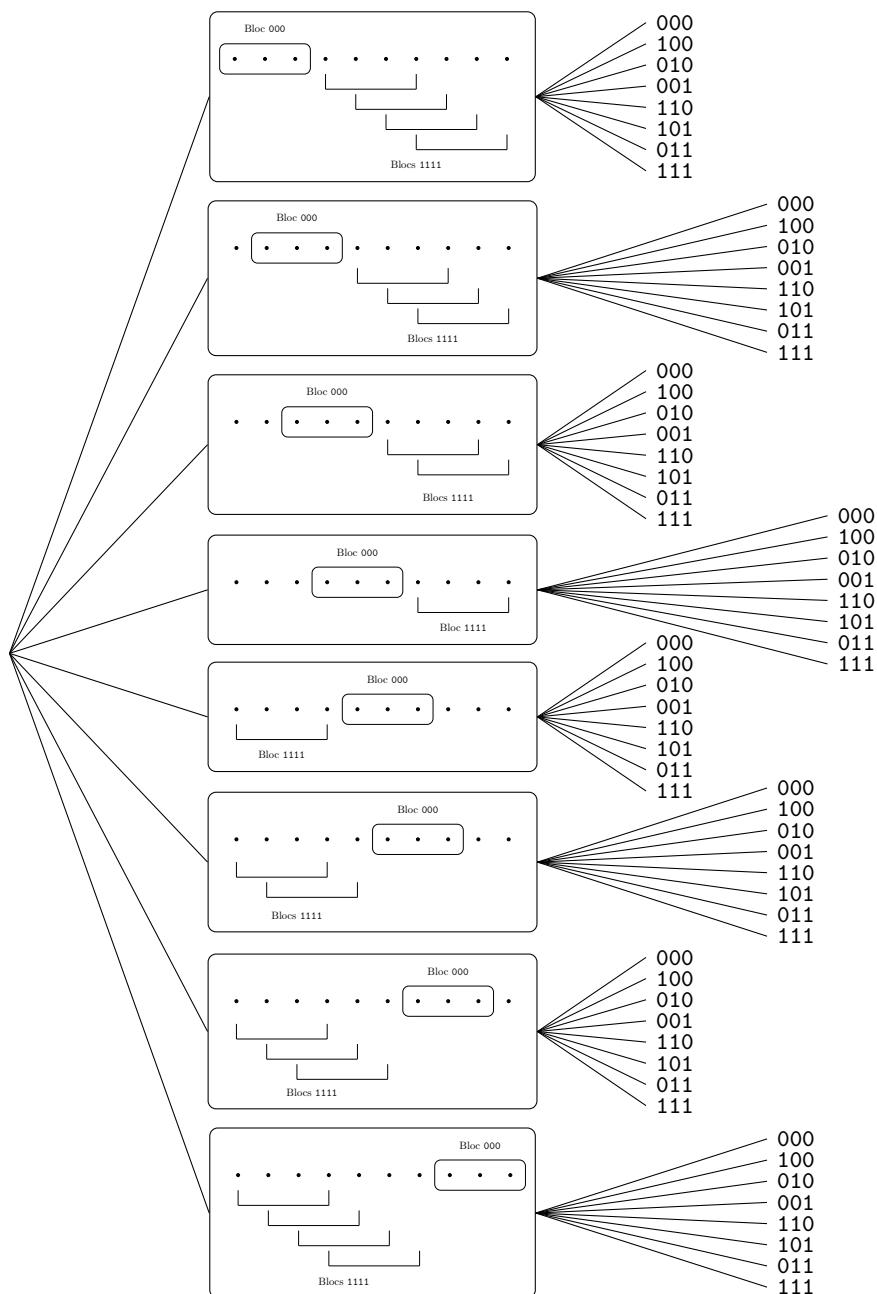


FIGURE A.1 – Construction des chaînes qui contiennent trois « 0 » consécutifs et quatre « 1 » consécutifs

Figure A.1, la première ligne compte entre autres la chaîne « 0001111100 », et la deuxième ligne compte également entre autres cette chaîne.

L'erreur ci-dessous illustre le genre de problèmes que l'on peut rencontrer en manipulant de manière imprudente une notation travaillant avec des quantités « infinies ».



---

## Bibliographie

---

- [1] A. Aho, J. Ullman, and X. Cazin. *Concepts fondamentaux de l'informatique*. Sciences sup. Dunod, 1996.
- [2] Archimède de Syracuse. *The Archimedes Palimpsest*, volume 1. Cambridge University Press, 2011.
- [3] Archimède de Syracuse. *The Archimedes Palimpsest*, volume 2. Cambridge University Press, 2011.
- [4] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Alternating paths and cycles in edge-coloured multigraphs : a survey. *Discrete Mathematics*, 165-166 :39–60, 1997.
- [5] J. Bang-Jensen and G. Gutin. On the complexity of hamiltonian path and cycle problem in certain classes of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 95 :41–60, 1999.
- [6] J. Bang-Jensen and G. Gutin, editors. *Digraphs : Theory, Algorithms and Applications*. Springer, New York, 2001.
- [7] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [8] J. A. Bondy. Basic graph theory : paths and circuits. In *Handbook of combinatorics*, volume 1-2, pages 3–110. Elsevier, 1995.
- [9] T. H. Cormen, C. Stein, R. L. Rivest, and C. E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education, 2nd edition, 2001.
- [10] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, second edition edition, 2000.
- [11] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman and Company, 1979.
- [12] G. Gutin. Cycles and paths in semicomplete multipartite digraphs, theorems and algorithms : a survey. *Journal of Graph Theory*, 19 :481–505, 1995.

- [13] T. L. Heath and Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2*. Dover Publications, Incorporated, 1956.
- [14] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. Apollonius of perga. *MacTutor History of Mathematics archive*, 1999.
- [15] G. A. Petsko and G. Ringe. *Structure et fonction des protéines*. De Boeck, 2009.
- [16] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. Mc Graw Hill, 2012.
- [17] C. Troestler. Introduction à la logique du premier ordre et à la théorie naïve des ensembles, 2006. <http://math.umons.ac.be/an/fr/enseignement/mathelem/>.
- [18] L. Volkmann. Longuest paths in semicomplete multipartite digraphs. *Discrete Mathematics*, 199 :279–284, 1999.
- [19] L. Volkmann. Cycles in multipartite tournaments : results and problems. *Discrete Mathematics*, 245 :19–53, 2002.

---

# Index

---

## Notations

$\vec{0}$ (Vecteur nul), 152	$\text{Dom}(P)$ (Domaine de définition), 58
$\mathbb{1}$ (Matrice identité), 166	$\wedge$ (Conjonction), 8
$A_n^k$ (Nombre d'arrangements sans répétitions), 123	$F$ (Faux), 5
$\alpha_n^k$ (Nombre d'arrangements avec répétitions), 126	$\times$ (Produit cartésien), 51
$ S $ (Cardinal), 39	$f'(a)$ (Dérivée de $f$ en $a$ ), 232
$ u, v _G$ (Distance), 83	$G = (V, E)$ (Graphe non orienté), 70
$ z $ (Module), 276	$i$ (Nombre imaginaire), 275
$\ \vec{v}\ $ (Norme (vecteur)), 152	$\in, \ni$ (Appartenance), 34
$\overline{S}$ (Complémentaire), 44	$\notin, \nexists$ (Non appartenance), 34
$ $ (tel que (ensembles)), 40	$\cap$ (Intersection), 45
$\int$ (Intégrale), 254	$N(v)$ (Voisinage), 72
$\mathbb{C}$ (Nombres complexes), 275	$n!$ (Factorielle de $n$ ), 123
$\varepsilon$ (Base canonique de $\mathbb{R}^n$ ), 203	$\binom{n}{k}$ (Coefficient binomial), 129
$\chi(G)$ (Nombre chromatique), 87	$\neg$ (Négation), 7
$\text{cis}(\theta)$ ( $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ), 277	$\vee$ (Disjonction), 9
$\rho e^{i\theta}$ ( $\rho \text{cis}(\theta)$ ), 277	$\veebar$ (Disjonction exclusive), 10
$C_n^k$ (Nombre de combinaisons sans répétitions), 128	$\mathcal{P}(S)$ (Parties d'un ensemble), 43
$\mathbb{C}_A(S)$ (Complémentaire), 44	$\mathbb{R}^{m \times n}$ (Matrices réelles), 165
$\mathcal{C}_V(P)$ (Classe de vérité), 59	$\Rightarrow$ (Implication), 11
$d(v)$ (Degré), 72	$S^n$ (Produit cartésien), 51
$\det(A)$ (Déterminant), 171	$\Leftrightarrow$ (Équivalence), 14
$S_1 \setminus S_2$ (Différence (ensembles)), 46	$\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ (Sous-ensemble), 37
$S_1 \triangle S_2$ (Différence symétrique), 47	$A^T$ (Transposée), 167
	$\cup$ (Union), 45
	$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (Produit scalaire), 156

- $\vec{v}$  (Vecteur), 150
- $\emptyset$  (Ensemble vide), 39
- $V$  (Vrai), 5
- $\oplus$  (Disjonction exclusive), 10
- Terminologie**
  - Abscisse, 50
  - Adjacence, 72
  - Antilogie, 6
  - Antécédent, 11
  - Appartenance, 34
  - Application linéaire, 196
  - Arbre, 82
  - Arc, 76
  - Argument, 277
  - Arrangement, 121
    - avec répétitions, 125
    - sans répétition, 121
  - Arête, 70
  - Arête parallèle, 74
  - Base, 203
  - Base canonique, 203
  - Base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , 203
  - Binôme de Newton, 130
  - Cardinal, 39
  - Changement de base, 203
  - Chemin
    - définition, 78
    - eulérien, 80
    - hamiltonien, 80
    - longueur, 78
    - élémentaire, 78
  - Classe de vérité, 59
  - Coefficient binomial, 129
  - Colinéaire, 153
  - Coloration, 87
  - Combinaison, 127
    - sans répétitions, 127
  - Combinaison linéaire, 155
  - Complexe
    - Définition, 275
    - Forme algébrique, 275
    - Forme trigonométrique, 277
  - Complémentaire, 44
  - Conclusion, 11
  - Conjonction, 8
  - Conjugué, 275
  - Conséquent, 11
  - Contradiction, 6
  - Contraposée, 14
  - Couple, 50
  - Cycle
    - définition, 79
    - eulérien, 80
    - hamiltonien, 80
    - longueur, 79
    - élémentaire, 79
  - Degré, 72
  - Diagonale, 165
  - Différence (ensembles), 46
  - Différence symétrique, 47
  - Disjonction, 9
  - Disjonction exclusive, 10
  - Distance, 83
  - Domaine de définition, 58
  - Définition en compréhension, 40
  - Définition en extension, 35
  - Dérivable, 235
  - Dérivée, 232, 235
  - Dérivée (fonction), 240
  - Déterminant, 171
  - Ensemble, 34
  - Ensemble vide, 39
  - Factorielle de  $n$ , 123
  - Faux, 5
  - Flèche, 76
  - Forme normale
    - conjonctive, 23
    - disjonctive, 23



- 
- Graphe
    - connexe, 79
    - dirigé, 76
    - eulérien, 80
    - hamiltonien, 80
    - non orienté, 70
    - planaire, 88
    - pondéré, 77
    - valué, 77
    - étiqueté, 77
  - Hypothèse, 11
  - Image, 50
  - Implication, 11
  - Incidence, 72
  - Inclusion, 37
  - Intersection, 45
  - Intégrale définie, 254
  - Intégration par partie, 258
  - Inverse, 176
  - Linéairement (in)dépendant, 191
  - Lois de De Morgan, 16
  - Matrice
    - carrée, 165
    - colonne, 165
    - diagonale, 166
    - définition, 165
    - identité, 166
    - ligne, 165
    - nulle, 166
    - triangulaire, 166
  - Matrice d'adjacence, 73
  - Matrice de passage, 205
  - Matrice des distances, 84
  - Module, 276, 277
  - Multigraphe, 74
  - Méthode de la matrice adjointe, 176
  - Nombre chromatique, 87
  - Nombre d'arrangements
    - sans répétitions, 123
  - Nombre de combinaisons
    - sans répétitions, 128
  - Nombre imaginaire, 275
  - Non appartenance, 34
  - Notation polonaise, 18
  - Négation, 7
  - Ordonnée, 50
  - Ordre, 71
  - Origine, 50
  - Paire, 50, 70
  - Partie imaginaire, 275
  - Partie réelle, 275
  - Parties d'un ensemble, 43
  - Permutation, 124
  - Pigeonhole principle, 115
  - Pivot, 176
  - Plan complexe, 275
  - Polynôme caractéristique, 210
  - Primitive, 253
  - Principe d'inclusion-exclusion, 109
  - Principe des tiroirs, 115
  - Problème du cycle hamiltonien, 80
  - Produit cartésien, 51
  - Produit scalaire, 156
  - Proposition, 4
  - Prédicat, 58
  - Prémisse, 11
  - Racines de l'unité, 291
  - Relation de Chasles, 154
  - Règle
    - de la division, 114
    - du produit, 106
  - Règle de Sarrus, 172
  - Règle du parallélogramme, 154
  - Réciproque, 14
  - Sommet, 70, 76
  - Sous-ensemble, 37
  - Table de vérité, 5

- Taille, 71
  - Tangente, 233
  - Tautologie, 6
  - Théorème des quatre couleurs, 88
  - Transposée, 167
  - Triangle de Pascal, 129
  - Union, 45
  - Valeur propre, 209, 212
  - Vecteur
    - différence, 154
    - définition, 150
    - norme, 152
    - somme, 154
    - égalité, 151
  - Vecteur ligne, 191
  - Vecteur propre, 209, 212
  - Voisinage, 72
  - Vrai, 5
  - Élimination de Gauss-Jordan, 174
  - Élément, 34
  - Équation linéaire, 188
  - Équivalence, 14
- Échelonner, 175