Ch. 1 - Arithmétique entière
Écriture rationnelle

R. Absil (abs)

3 octobre 2017

Les rationnels sont des nombres très courants en informatique. En l'occurrence, ce sont les seuls nombres que l'on peut *précisément* représenter à laide d'un ordinateur. En effet, même si le nombre π est clairement défini mathématiquement, il est ardu de le représenter à l'aide d'un codage informatique, dans la mesure où ce nombre possède une partie fractionnaire *a priori* non répétitive, infinie, et aléatoire [1], et qu'un ordinateur ne possède qu'une quantité finie de mémoire.

Ainsi, il convient d'être capable d'écrire un nombre, représenté dans une base quelconque (en particulier en base 10) comme un rationnel, c'est-à-dire comme une fraction de deux entiers, au dénominateur non nul.

À cette fin, il existe une technique relativement simple, un *algorithme*, permettant de répondre à cette exigence. Un algorithme est en quelque sorte une recette de cuisine : sur base d'un ensemble d'ingrédients (les entrées), il résout le problème que l'on se pose [2] (ici : écrire un nombre sous forme de fraction).

Cet algorithme permet notamment d'affirmer que $0,999\cdots = 1$. Notez que cette affirmation est une égalité véritable, et que l'on n'écrit pas $0,999\cdots \simeq 1$ ou $0,999\cdots = \pm 1$. Ces deux représentations d'une quantité désignent *le même* nombre. La représentation des nombres sous la forme décimale [3] est simplement « maladroite » par certains aspects, notamment le fait que deux représentations différentes d'un nombre représentent parfois la même quantité.

L'algorithme peut être exprimé « simplement » sous la forme suivante.

1. Le fait que π ait les propriétés énoncées ci-avant tient parfois du domaine de la conjecture, bien que cela soit globalement accepté par la communauté scientifique.
2. Notez que dans la notion d'algorithme, les entrées sont souvent contraintes comme finies, au même titre que les sorties et que le temps d'exécution.
3. En réalité, ce genre de problème apparaît indépendamment de la base.

Algorithme 1 ▸ *Algorithme d'écriture rationnelle*

Étant donné un nombre n à écrire sous la forme d'une fraction

- *si n est entier, l'écrire sous la forme $\frac{n}{1}$;*
- *sinon si n a une partie fractionnaire finie de longueur k, l'écrire sous la forme $\dfrac{n \times 10^k}{10^k}$;*
- *sinon*
  1. *choisir* deux *multiples m_1 et m_2 de n tels que*
     (a) *seules les périodes*[a] *de m_1 et m_2 sont présentes dans leurs parties fractionnaires,*
     (b) *les périodes de m_1 et m_2 sont identiques ;*
  2. *soustraire m_1 et m_2 afin de faire « disparaître » leurs périodes dans leur différence d ;*
  3. *déduire l'écriture de n à partir de d, classiquement par division.*

[a] La période d'un nombre dans sa partie fractionnaire est la partie qui se répète au sein de sa représentation. Par exemple, la période de $1,2343434\ldots$ est « 34 ».

On note ici que l'on ne se soucie pas ici du signe de n, dans ma mesure où il n'intervient pas dans l'algorithme énoncé. On se contente simplement de le recopier.

Exemple 1. Soit $n = 42$. On peut écrire 42 comme $\frac{42}{1}$ (premier cas de figure).

Exemple 2. Soit $n = 3,375$. Ce nombre a une partie fractionnaire finie de longueur 3. On peut donc l'écrire (deuxième cas de figure) comme

$$3,375 = \frac{3,375 \times 10^3}{10^3} = \frac{3\,375}{1\,000}.$$

Exemple 3. Soit le nombre $n = 1,222\ldots$ Ce nombre n une partie fractionnaire infinie dans sa représentation. Cherchons deux multiples de n répondant aux propriétés énoncées (troisième cas de figure).

1. $n = 1,222\ldots$ est un candidat valide : seule la partie fractionnaire répétée (la période) se trouve à gauche de la virgule.
2. $10n = 12,222\ldots$ est également un candidat valide : seule la partie fractionnaire répétée se trouve à gauche de la virgule.

De plus, les périodes de n et $10n$ sont identiques. Soustrayons-les. On a donc

$$\begin{aligned} 10n - n = 9n &= 12,222\cdots - 1,222\ldots \\ &= 11. \end{aligned}$$

En conclusion, comme $9n = 11$, on a $n = \frac{9}{11}$.

Exemple 4. Soit le nombre $n = 1,23456456456\ldots$ Ce nombre n une partie fractionnaire infinie dans sa représentation. Cherchons deux multiples de n répondant aux propriétés énoncées (troisième cas de figure).

1. $n = 1,23456456456\ldots$ *n'est pas* un candidat valide : il n'y a pas *uniquement* la partie fractionnaire répétée (la période) à gauche de la virgule.
2. $100n = 123,456456456\ldots$ est un candidat valide : seule la partie fractionnaire répétée se trouve à gauche de la virgule.
3. $100\,000n = 123\,456,456456\ldots$ est également un candidat valide : seule la partie fractionnaire répétée se trouve à gauche de la virgule.

De plus, les périodes de $100n$ et $100\,000n$ sont identiques. Soustrayons-les. On a donc

$$\begin{aligned} 100\,000n - 100n = 99\,900n &= 123\,456,456456\cdots - 123,456456\ldots \\ &= 123\,333, \end{aligned}$$

En conclusion, comme $99\,900n = 123\,333$, on a $n = \frac{123\,333}{99\,900}$.

Notons que sur l'exemple précédent, choisir comme premier candidat $100n = 123,456456\ldots$ et comme deuxième candidat $1\,000n = 1\,234,564564\ldots$ ne convient pas. En effet, bien que les représentations de $100n$ et $1\,000n$ ne comportent que la période à gauche de la virgule, ces périodes ne sont *pas* les mêmes. Ceci ne correspond pas à la démarche décrite par l'algorithme 1 (cf. sous-point (b)).