

Impédance

- généralisation de la notion de résistance (peut dépendre de la fréquence)
- nombre complexe $\mathbf{Z} = R + jX$
- la partie réelle $R = \Re(\mathbf{Z})$ est appelée résistance. La partie résistive s'exprime en ohms (Ω).
- la partie imaginaire $X = \Im(\mathbf{Z})$ est appelée réactance. La partie réactive dépend de la fréquence et s'exprime en ohms (Ω).
- le module de \mathbf{Z} : $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$

Exemples :

- Pour une résistance $\mathbf{Z} = R$, élément purement résistif.
- Pour un condensateur $\mathbf{Z} = \frac{-j}{\omega C}$, élément purement réactif.
- Pour une bobine (inductance) $\mathbf{Z} = j\omega L$, élément purement réactif.

Loi d'Ohm généralisée

$$U = Z \cdot I$$

Attention U , Z et I sont des nombres complexes !

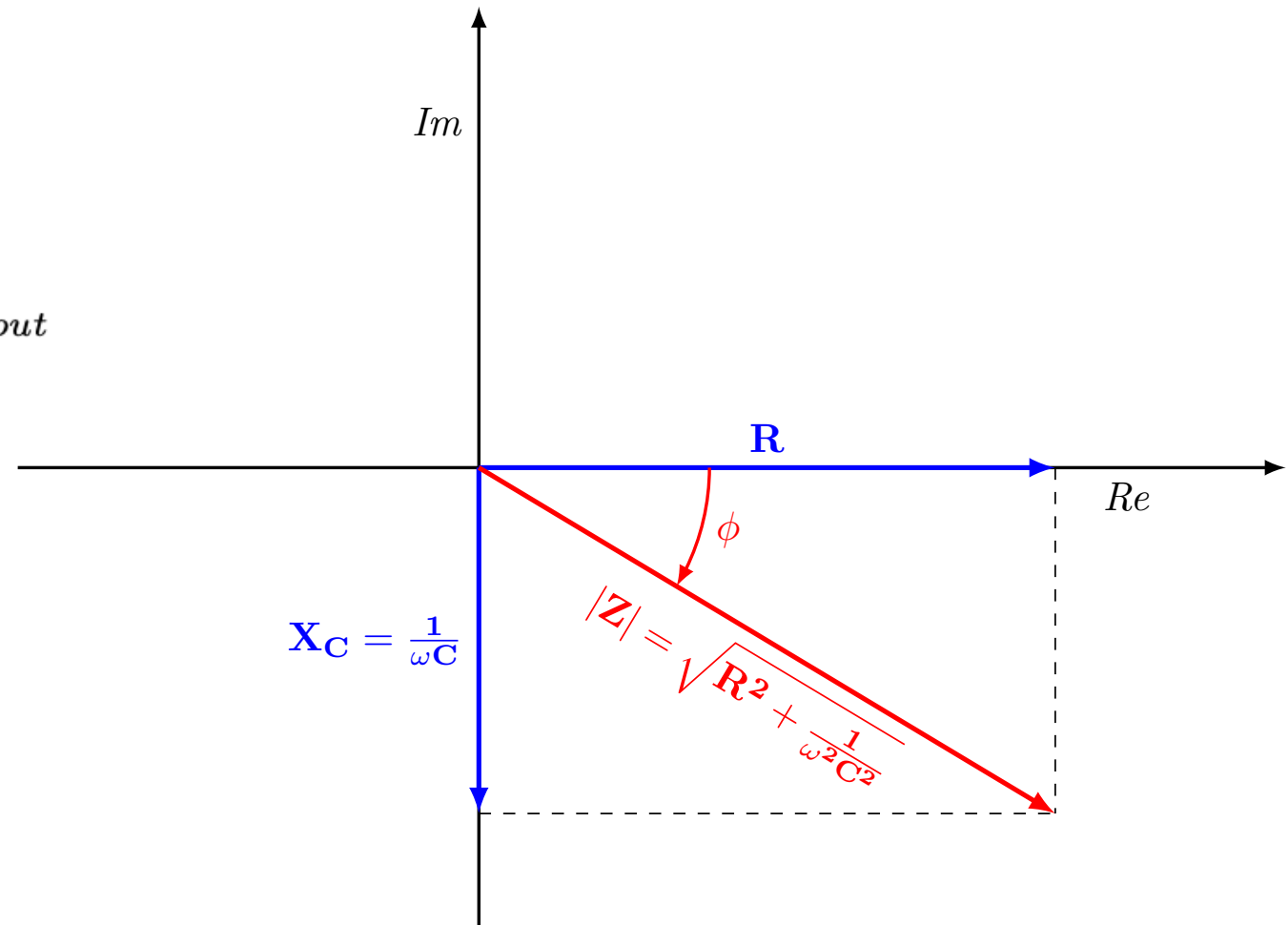
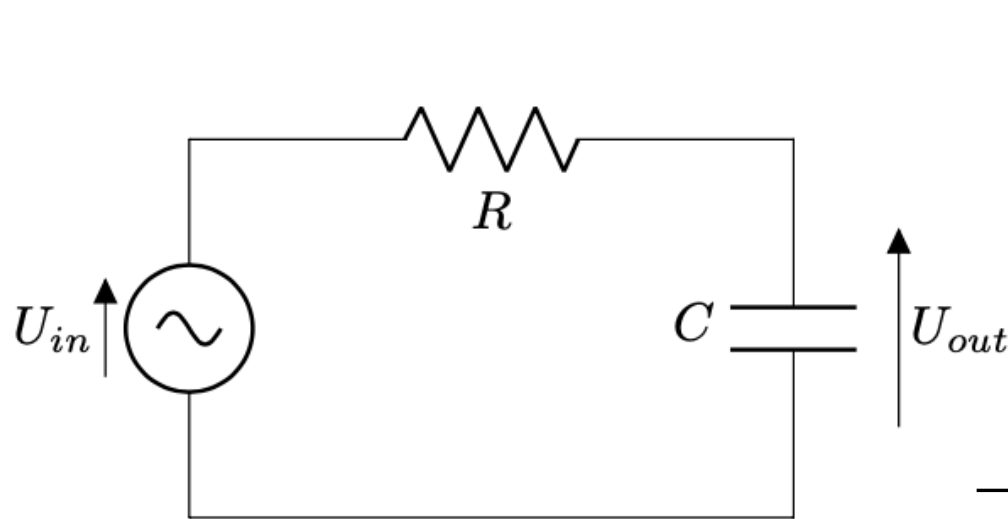
En module, nous avons : $|U| = |Z| \cdot |I|$

$$\text{ou } \frac{|U|}{|I|} = |Z|$$

Exemples :

- Pour une résistance $\frac{|U|}{|I|} = R$
- Pour un condensateur $\frac{|U|}{|I|} = \frac{1}{\omega C}$
- Pour une bobine (inductance) $\frac{|U|}{|I|} = \omega L$

Exemple : circuit RC série



- $Z = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C}$

- $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

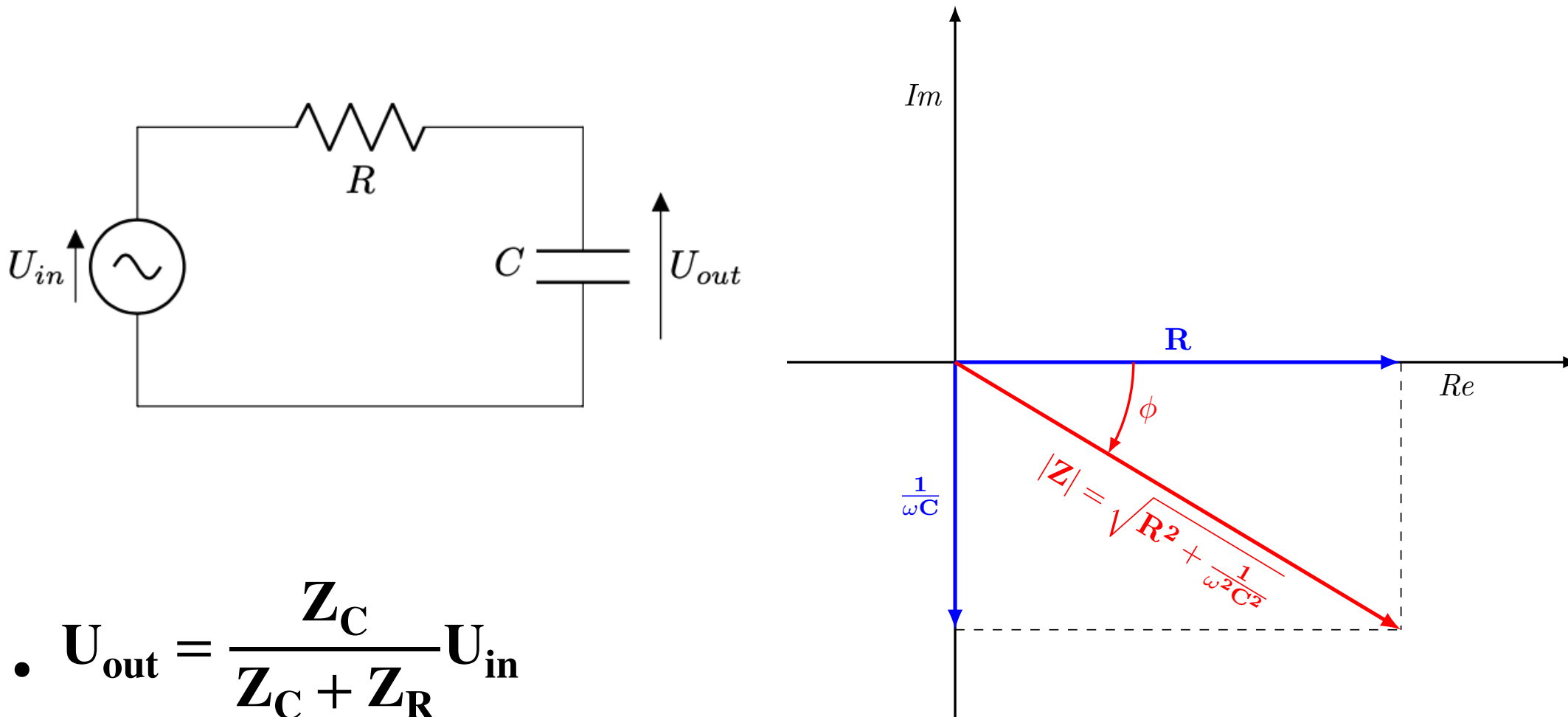
- $X = \frac{1}{\omega C}$

- $\tan(\phi) = -\frac{X}{R} = \frac{-1}{\omega RC}$

$$|Z| = \sqrt{(10^3)^2 + \frac{1}{(2\pi \cdot 100)^2 \cdot (10^{-8})^2}}$$

$R=1\text{k}\Omega$, $C=10\text{ nF}$ et $f = 100\text{ Hz}$

Exemple : diviseur de tension

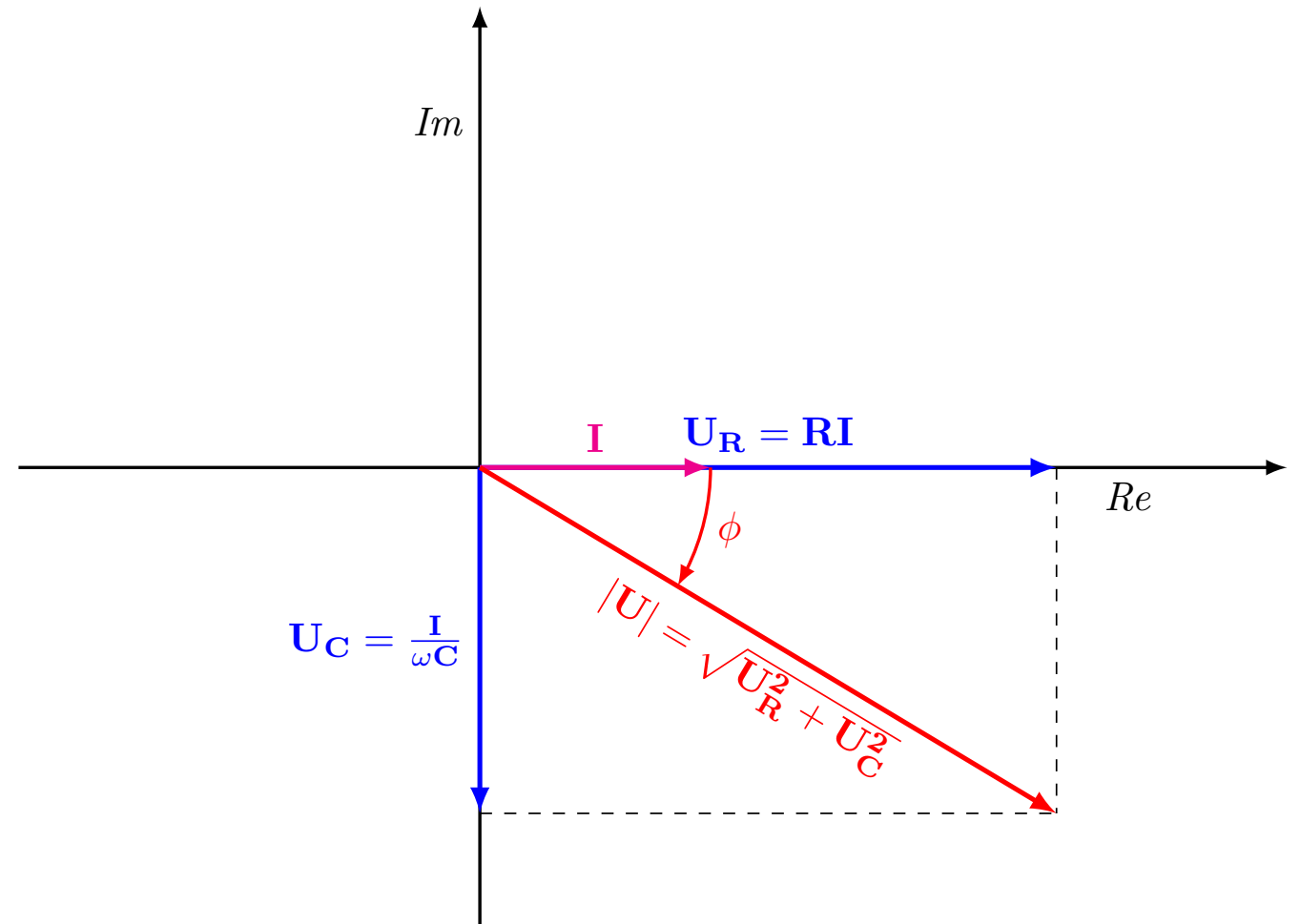
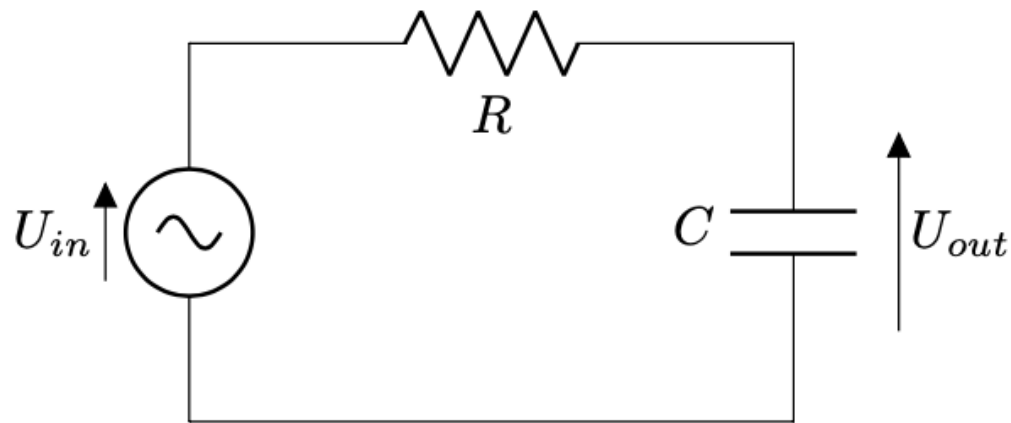


- $$U_{out} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} U_{in}$$

- $$|U_{out}| = \frac{|Z_C|}{|Z_C + Z_R|} |U_{in}| = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} |U_{in}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_{in}|$$

- $$|U_{out}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_{in}|$$

Exemple : diviseur de tension



$$U = U_R + U_C$$

$$\bullet \quad |U_{out}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_{in}|$$

$$\bullet \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |U_{out}| = |U_{in}|$$

$$\bullet \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |U_{out}| = 0$$

$$\text{Gain } G = \frac{|U_{out}|}{|U_{in}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G = 0$$

Exercice : diviseur de tension

Un condensateur et une résistance de 30 ohms sont montés en série et connecté à une source de tension alternative de 220 V. La réactance du condensateur est égale à 40 ohms. Trouver :

1. le courant dans le circuit ;

$$\text{réactance du condensateur } X_C = \frac{1}{\omega C} = 40 \, \Omega$$

$$|U| = |Z| |I| \text{ et } |Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \, \Omega$$

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{220}{50} \approx 4,4 \, \text{A}$$

2. le déphasage entre le courant et la tension appliquée.

Exercice : diviseur de tension

Un condensateur et une résistance de 30 ohms sont montés en série et connecté à une source de tension alternative de 220 V. La réactance du condensateur est égale à 40 ohms. Trouver :

$$\text{réactance du condensateur } X_C = \frac{1}{\omega C} = 40 \, \Omega$$

$$|U| = |Z| |I| \text{ et } |Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \, \Omega$$

1. le déphasage entre le courant et la tension appliquée.

$$\tan(\phi) = -\frac{X_C}{R} = -\frac{40}{30} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \phi \approx -51,3^\circ$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\tan(\phi) = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1/\omega C}{R} = -\frac{1/\omega C}{R/1} = -\frac{1}{\omega RC}$$

Exercice : diviseur de tension

Un condensateur de $10 \mu\text{F}$ est monté en série avec une résistance de 40Ω et le tout est connecté à une source de 110 V et de 60 Hz .

Trouver :

1. la réactance du condensateur ;

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \approx 265,26 \Omega$$

2. l'impédance du circuit ;

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2} \approx \sqrt{40^2 + (265,26)^2} = 268,26 \Omega$$

3. le courant dans le circuit ;

4. le déphasage entre le courant et la tension

Exercice : diviseur de tension

Un condensateur de $10 \mu\text{F}$ est monté en série avec une résistance de 40Ω et le tout est connecté à une source de 110 V et de 60 Hz .

Trouver :

1. la réactance du condensateur ;
2. l'impédance du circuit ;
3. le courant dans le circuit ;

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} \approx \frac{110}{268,26} = 0,41 \text{ A}$$

4. le déphasage entre le courant et la tension

$$\tan(\phi) = -\frac{X_C}{R} = -\frac{265,26}{40} \Leftrightarrow \phi \approx -81,4^\circ$$

Exercice : diviseur de tension

1. Pour quelle valeur de la fréquence de la tension d'entrée, le gain

$$G = \frac{|U_{out}|}{|U_{in}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} ?$$

$$G = \frac{|U_{out}|}{|U_{in}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega^2 R^2 C^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}$$

2. Quelle est le déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie à cette fréquence ?

3. Calculer la valeur du gain en décibel (dB) à cette fréquence.

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{|U_{out}|}{|U_{in}|}$$