

Mathématiques

MAT1 - MAT

2020 - 2021

R. ABSIL
L. BEECKMANS
J. BELEHO
D. BOIGELOT
P. HAUWEELE
C. LEIGNEL
N. RICHARD
M. WAHID

Haute École Bruxelles-Brabant

École supérieure d'informatique



License



Ce document, et l'intégralité de son contenu, est sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) », à l'exception des logos de la haute-école Bruxelles - Brabant (HE2B) et de l'école supérieure d'informatique (ESI), ainsi que les contenus issus des références listées dans la bibliographie qui, sont la propriété de leurs détenteurs respectifs.

Le texte légal complet de cette licence peut être trouvé sur [le site de Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode)¹.

1. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

Première partie

Mathématiques discrètes

Algèbre booléenne

Propositions et opérateurs logiques

1.1 Propositions et opérateurs logiques

Définition 1.1

Une proposition est une affirmation qui possède une valeur de vérité qui peut être soit vraie, soit fausse.

A priori, cette définition n'a rien de « mathématique ». On peut l'utiliser dans tout contexte, comme en français dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1. Considérez les phrases suivantes :

1. « La carotte est un légume » est une proposition. Le légume est un concept clairement défini, et cette proposition est vraie.
2. « La carotte est un moyen de locomotion » est une proposition. Elle est fausse : personne ne se déplace à dos de carotte.
3. « La carotte a bon goût » n'est pas une proposition. En effet, la valeur de

vérité de cette affirmation dépend de qui mange la carotte. Cette affirmation est subjective.

4. « Arrache cette carotte ! » et « Qu'est-ce qu'une carotte ? » ne sont pas des propositions. Ces phrases ne déclarent pas un fait, et n'ont pas de valeur de vérité.
5. « Il existe de la vie ailleurs dans l'univers » est une proposition. Elle possède une valeur de vérité : soit vrai, soit faux. Le fait qu'on ne puisse pas décider laquelle de ces valeurs est la bonne est sans importance.



La suite de ce chapitre est dédiée à la complexification de ce modèle. En particulier, on verra comment composer une proposition à partir d'autres propositions, comment introduire des variables dans une proposition, comment restreindre les valeurs de ces variables, etc.

Ce modèle est très utilisé en logique propositionnelle, un formalisme utilisé dans de nombreuses disciplines mathématiques, telles que l'algèbre, l'analyse, l'arithmétique, etc. Dans cette logique, on raisonne la plupart du temps sur des compositions de propositions quelconques que l'on nomme $p, q, r \dots$. Comme on ne connaît pas *a priori* la valeur de vérité de la proposition originale, ni de celles des sous-propositions p, q, r , etc., on doit envisager tous les cas de valeurs possibles. Cette énumération requiert l'utilisation de *tables de vérité*.

Une table de vérité est simplement un tableau qui énumère toutes les possibilités de valeurs de vérité d'une proposition. Si une proposition p est composée de deux sous-propositions q et r , on y note les valeurs de vérité de q et r , et on en déduit la valeur de vérité de p . Ces valeurs sont notées V pour la valeur « vrai », et F pour la valeur « faux »¹.

Exemple 1.2. Considérez une personne disant « Ce poisson a des dents et est rouge² ». C'est une proposition, car elle peut être soit vraie, soit fausse. Notons-la p . Elle est composée de deux sous-propositions.

— Le poisson a des dents. Notons cette propriété q .

1. Notez que, parfois, « vrai » est noté comme le chiffre « 1 » et « faux » comme le chiffre « 0 ». Cette notation est souvent utilisée en électronique, notamment.

2. Les couleurs utilisées dans les exemples de ce cours sont considérées comme définies clairement à l'aide d'un code de 3 octets, comme dans la plupart des systèmes informatiques. En ce sens, elles ne sont pas sujettes à interprétation.

— Le poisson est rouge. Notons cette propriété r .

On peut illustrer la table de vérité de cette proposition avec la table 1.1.

q	r	p
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 1.1 – Table de vérité de p



Les tables de vérité sont très utiles pour décrire les opérateurs logiques de base, tels que le « ou », le « et », etc. On utilisera le même formalisme que dans l'exemple précédent pour les illustrer : un tableau à deux dimensions, avec un V signifiant vrai, et un F signifiant faux.

À ce titre, on définit les concepts de *tautologie* et d'*antilogie*.

Définition 1.2

Une tautologie (resp. antilogie ou une contradiction) est une proposition toujours vraie (resp. fausse).

Intuitivement, la valeur de vérité des tautologies (vrai) et des antilogie (faux) ne dépend pas des valeurs de vérité des propositions qui la composent. Visuellement, la dernière colonne de la table de vérité d'une tautologie ne contient que des V , celle d'une antilogie ne contient que des F .

Le très grand intérêt des tautologies est de fournir des méthodes de raisonnement sûres. Par exemple, lorsque l'on écrit $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, on définit en réalité une tautologie. Comme cette formule est toujours vraie quelle que soit la valeur de son contenu (en l'occurrence, les valeurs des variables a et b), développer le raisonnement de cette manière répond à la question originale (trouver a et b) de manière sûre.

Dans la suite de cette section, on définit divers opérateurs logiques de base,

avec leurs tables de vérité associées pour illustrer ces définitions.

1.1.1 Négation

Intuitivement, la négation d'une proposition échange sa valeur de vérité. En français, cela correspond au contraire.

Définition 1.3

La négation d'une proposition p est notée $\neg p$, et se lit « non p ». Si p est vrai, $\neg p$ est faux, et inversement.

La table 1.2 illustre la table de vérité de la négation d'une proposition p .

p	$\neg p$
V	F
F	V

TABLE 1.2 – Table de vérité de la négation

Exemple 1.3. Considérez la proposition « mon ordinateur a au moins 8GB de mémoire ». La négation de cette proposition est « *il est faux que* mon ordinateur a au moins 8GB de mémoire », ou mieux construit : « mon ordinateur a *moins* de 8GB de mémoire »³. ◀

1.1.2 Conjonction

La conjonction de deux propositions impose à deux propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond au « et ». Dans l'exemple 1.2, pour que le résultat soit vrai, il faut que le poisson ait des dents *et* qu'il soit rouge.

3. Notez qu'il est ambigu d'affirmer que la négation est « mon ordinateur a au *plus* 8GB de mémoire », dans la mesure où cette proposition inclut l'ordinateur avec exactement 8 GB de mémoire.

Définition 1.4

La conjonction de deux propositions p et q est notée $p \wedge q$ et se lit « p et q ». Elle n'est vraie que si à la fois p et q sont vraies, et est fausse dans tous les autres cas.

La table 1.3 illustre la table de vérité de la conjonction de deux propositions p et q .

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 1.3 – Table de vérité de la conjonction

Exemple 1.4. Soient les propositions p « il pleut » et q « le soleil brille ». La conjonction de ces deux propositions est, « il pleut et le soleil brille », ou encore « il pleut mais le soleil brille », ou même « le soleil brille mais il pleut ». ◀

1.1.3 Disjonction

La disjonction de deux propositions impose à au moins une de ces propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond *généralement* au « ou ».

Par exemple, quand on affirme « pendant les repas, je bois de l'eau ou du vin », le seul cas dans lequel on mentirait serait celui où on ne boirait ni eau, ni vin. En particulier, boire à la fois de l'eau et du vin n'est pas interdit par la proposition.

Notez néanmoins que, parfois, le contexte en français va parfois rendre cette disjonction comme exclusive. En effet, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, on ne s'attend pas à ce qu'elle se rende à ces deux activités. En mathématiques, elle pourrait très bien aller à la fois à la plage et à la piscine.

Définition 1.5

La disjonction de deux propositions p et q est notée $p \vee q$ et se lit « p ou q ». Elle est vraie si au moins un de ses opérandes est vrai.

L'opérateur \vee est également appelé le « ou inclusif ». La table 1.4 illustre la table de vérité de la disjonction.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 1.4 – Table de vérité de la disjonction

Exemple 1.5. Soit la proposition « seuls les étudiants qui ont réussi algorithmique ou mathématiques peuvent suivre ce cours ». Il est évident que les étudiants ayant réussi à la fois mathématiques et algorithmique peuvent suivre ce cours. Seuls les étudiants n'ayant réussi ni mathématiques ni algorithmique ne peuvent pas participer. ◀

1.1.4 Disjonction exclusive

La disjonction exclusive de deux propositions correspond en général à l'usage du « ou » en français : elle est vraie si exactement une de ces propositions est vraie. Par analogie avec la section précédente, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, elle ne se rend pas à ces deux activités.

Définition 1.6

La disjonction exclusive de deux propositions p et q est notée $p \underline{\vee} q$ et se lit « soit p , soit q ». Elle est vraie si exactement un de ses opérandes est vrai.

L'opérateur $\underline{\vee}$ est également appelé le « ou exclusif ». Parfois, il est noté \oplus . La table 1.5 illustre la table de vérité de cet opérateur.

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 1.5 – Table de vérité de la disjonction exclusive

Exemple 1.6. Dans la proposition « pour se rendre à l'école, vous devez tourner soit à droite, soit à gauche », il n'est pas permis de continuer par exemple tout droit, ni de tourner à la fois à droite et à gauche. ◀

1.1.5 Implication

L'implication mathématique est un opérateur logique permettant d'effectuer des affirmations conditionnelles. On la retrouve en français dans des phrases du type « si (...), alors (...) ».

Similairement à la disjonction, notez que l'implication fonctionne différemment en français qu'en mathématique. En effet, dans une phrase du type « s'il pleut, je prends mon parapluie », on ne s'attend pas à ce que la personne prenne son parapluie s'il ne pleut pas. En mathématique, si la proposition « je prends mon parapluie » est vraie, alors l'implication est vraie peu importe si il pleut.

Définition 1.7

L'implication d'une proposition q par une proposition p est notée $p \Rightarrow q$ et est lue « p implique q » ou « si p , alors q ». Elle est fausse uniquement quand p est vrai et q est faux.

La table 1.6 illustre la table de vérité de l'implication. Sur cette table, on remarque qu'en particulier, $p \Rightarrow q$ est toujours vrai

- lorsque p est faux, quelle que soit la valeur de vérité de q ;
- lorsque q est vrai, quelle que soit la valeur de vérité de p .

Dans l'expression $p \Rightarrow q$, on appelle p l'*antécédent*, la *prémisse* ou l'*hypothèse* tandis que q est le *conséquent* ou la *conclusion*.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 1.6 – Table de vérité de l'implication

L'implication joue un rôle central dans le raisonnement mathématique. Pour cette raison, la terminologie en français de cet opérateur est très variée. Par exemple, si p et q sont des propositions, $p \Rightarrow q$ peut être décrit en français comme

« Si p , alors q »	« p implique q »
« Si p , q »	« p seulement si q »
« p est suffisant pour q »	« p est une condition suffisante pour q »
« q si p »	« une condition nécessaire pour p est q »
« on déduit q de p »	« q à moins que $\neg p$ »
« q quand p »	

Les exemples suivants illustrent une interprétation de la table de vérité de l'implication mathématique. Bien que répétitifs, l'expérience montre que beaucoup d'étudiants se reposent trop sur le sens du « si (...) alors (...) » français au lieu de sa signification mathématique, ce qui est sujet aux erreurs.

Exemple 1.7. Soit la phrase « si je suis élu, je diminuerai les taxes », prononcée dans de nombreux discours politiques engagés. On peut modéliser cette affirmation sous forme propositionnelle de la façon suivante :

- soit p la proposition « je suis élu »,
- soit q la proposition « je diminuerai les taxes ».

La proposition « si je suis élu, alors je diminuerai les taxes » peut donc être modélisée mathématiquement comme $p \Rightarrow q$.

La table de vérité de l'implication exprime le fait que lorsque l'on affirme

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

le seul cas où le politicien ment est celui où il est élu mais où il *ne* diminue *pas* les taxes, c'est-à-dire quand p est vrai et q est faux. Évidemment, si le politicien

est élu et diminue les taxes, il n'a pas menti. Par ailleurs, si le politicien n'est pas élu, qu'il diminue ou non les taxes ne constitue pas non plus un mensonge car

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

ne représente un engagement *que* si le politicien est élu. ◀

Dans la mesure où l'implication est fréquemment utilisée dans l'argumentation en français (comme en mathématique), on lui associe diverses définitions et propriétés. Par exemple, la propriété suivante décrit comment définir une implication à l'aide uniquement d'opérateurs « ou », « et » et « non ».

Définition 1.8 ▶ Définition positive et négative de l'implication

Soient p et q deux propositions, la proposition $p \Rightarrow q$ est équivalente à

$$\neg p \vee q$$

et à

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Cette définition permet régulièrement de faciliter les calculs et de réduire l'écriture d'une implication afin de n'utiliser que des opérateurs « ou », « et » et « non ». Comme mentionné en section ??, ce type d'écriture a de nombreuses applications en informatique et en électronique.

De la même manière, on peut définir l'implication à l'aide de sa *contraposée*, à ne pas confondre avec sa *réciproque*.

Définition 1.9

Soient p et q deux propositions, la contraposée de $p \Rightarrow q$ est définie comme $\neg q \Rightarrow \neg p$. L'implication est équivalente à sa contraposée.

Définition 1.10

Soient p et q deux propositions, la réciproque de $p \Rightarrow q$ est définie comme $q \Rightarrow p$. L'implication n'est pas équivalente à sa réciproque.

Exemple 1.8. Considérez la proposition « si je saute du pont, je meurs ». Cette proposition est équivalente à « si je ne meurs pas, je ne saute pas du pont » (contraposée). Par contre, elle n'est pas équivalente à « si je meurs, je saute du pont » (réciproque). ◀

1.1.6 Équivalence

L'équivalence de deux propositions mathématiques fonctionne exactement comme en français : deux propositions sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité. La proposition « un gâteau pour quatre personnes nécessite 250g de farine » est donc équivalente à la proposition « un gâteau pour deux personnes nécessite 125g de farine ». En effet, aucune de ces propositions ne peut être vraie (resp. fausse) si l'autre ne l'est pas.

Cet opérateur est excessivement utilisé en mathématiques, notamment dans la résolution d'équations : chaque ligne est équivalente à la précédente.

Définition 1.11

L'équivalence de deux propositions p et q , notée $p \Leftrightarrow q$, se lit « p si et seulement si q ». Elle est vraie uniquement dans les cas où p et q ont la même valeur de vérité.

La table 1.7 illustre la table de vérité de l'équivalence.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 1.7 – Table de vérité de l'équivalence

Exemple 1.9. Soit la proposition « je peux m'inscrire en médecine si et seulement si je réussis le concours d'entrée ». Cette proposition est fausse si l'on s'inscrit sans réussir le concours, ou si on réussit le concours et qu'on ne s'inscrit pas. ◀

Exemple 1.10. Soit la proposition « un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés de la longueur de ses deux plus petits cotés est égale au

carré de la longueur de son grand côté ». Cette proposition est vraie quand les deux opérandes sont en même temps vraies (on a un triangle rectangle), ou en même temps fausses (le triangle n'est pas rectangle). Il n'est pas possible d'avoir un triangle rectangle qui ne valide pas la deuxième partie de la proposition, et inversement. ◀

1.1.7 Négation de disjonctions, de conjonction et d'implication

La conjonction, la disjonction (exclusive ou non) et la négation sont des opérateurs relativement simples. Toutefois, on remarque que calculer la négation d'une conjonction ou d'une disjonction est souvent source d'erreurs auprès des étudiants. Dans ce cadre, les *lois de De Morgan* permettent de les construire correctement. Elles ont été établies par Auguste De Morgan, un mathématicien britannique du XIX^e siècle.

Illustrons avant tout ces lois par un exemple. Considérons un vendeur d'informatique qui affirme « ce processeur est de la marque Intel et a une fréquence de 2.4Ghz ». À l'évidence, si le processeur n'est *pas* de la marque Intel *ou* s'il n'a *pas* une fréquence de 2.4Ghz, le vendeur a menti. On remarque donc ici que pour nier une conjonction de propositions, il faut construire la disjonction des négations des propositions.

On peut vérifier cette conclusion « mécaniquement » en construisant une table de vérité de la négation de cette proposition. Notons p la proposition « ce processeur est de la marque Intel » et q « ce processeur a une fréquence de 2.4Ghz ». Construisons la table de vérité de $\neg(p \wedge q)$ et de $(\neg p \vee \neg q)$, illustrée à la table 1.8.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

TABLE 1.8 – Table de vérité de la négation d'une conjonction

On constate que les valeurs de vérité de $\neg(p \wedge q)$ et de $(\neg p \vee \neg q)$ sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes.

On peut procéder de manière similaire pour construire la négation de disjonctions, et ainsi établir les lois de De Morgan.

Propriété 1.12 ▶ Lois de De Morgan

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

et

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Dans le cas d'une disjonction exclusive, on ne peut pas utiliser les lois de De Morgan. Néanmoins, si l'on affirme « ce soir, je mange soit de la pizza, soit un durum », les cas dans lesquels on mentirait sont soit celui où on mange *à la fois* de la pizza et un durum, soit celui où on ne mange *ni l'un, ni l'autre*.

Sur base de cette observation, on remarque donc qu'il est nécessaire, dans la négation d'une disjonction exclusive, que les deux opérandes aient la même valeur de vérité pour rendre la négation vraie. Ceci correspond exactement à l'équivalence des propositions.

On peut donc énoncer la propriété suivante.

Propriété 1.13

Soient p et q deux propositions, on a

$$(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

De la même manière que dans le cas de la négation d'une conjonction ou d'une disjonction, on peut vérifier cette propriété en construisant sa table de vérité.

Par ailleurs, similairement à la négation de conjonction et de disjonctions, on remarque que la négation d'une implication est également source d'erreurs pour les étudiants. Procédons comme précédemment, à l'aide d'un exemple.

Considérons un étudiant affirmant « si je bois douze bières, je serai ivre ». Le seul cas dans lequel cet étudiant se trompe est s'il boit douze bières *et* qu'il n'est *pas* ivre.

En répétant la démarche effectuée pour les lois de De Morgan, on peut également vérifier cette conclusion avec des tables de vérité, comme illustré à la table 1.9 où p dénote « je bois douze bières » et q « je suis ivre ».

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

TABLE 1.9 – Table de vérité de la négation d’une implication

On constate que les valeurs de vérité de $\neg(p \Rightarrow q)$ et de $p \wedge \neg q$ sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes. Ceci permet dès lors de construire correctement la négation d’une implication grâce à la propriété suivante.

Propriété 1.14

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Théorie des ensembles

Concepts de base • Définition en compréhension • Opérations ensemblistes

2.1 Concepts de base

L'un des concepts les plus simples en mathématiques est celui de la théorie éponyme, à savoir l'ensemble. Comme vous le constaterez, leur définition est formulée « en français ». Comme dans le cadre de la logique, il est en effet ardu de définir en mathématiques un concept sur lequel une grande partie des mathématiques est bâti.

Définition 2.1

Un ensemble est une collection d'objets distincts. Chacun de ces objets est appelé élément.

Notation 2.1. Soient S un ensemble et x un élément de S , on dit que x appartient à S , et on note cette relation $x \in S$.

Si x n'est pas un élément de S , on dit que x n'appartient pas à S , et on note

cette relation $x \notin S$. Réciproquement, si x est un élément de S , on dit que S comprend x , noté $S \ni x$. Sinon, on dit que S ne comprend pas x , noté $S \not\ni x$.

Au vu des notations ci-dessus, remarquez que les notations mathématiques utilisant « \in » peuvent se lire dans les deux sens, étant donné la symétrie entre « \in » et « \ni ».

Exemple 2.1. Soit M l'ensemble des mammifères. On a, entre autres, les propriétés suivantes :

- Humain $\in M$,
- $M \ni$ Chat,
- Canard $\notin M$.



Si l'ensemble S comprend un nombre fini d'éléments, on peut le définir en fournissant la liste de ses éléments. Une telle définition de S est dite *en extension*. Habituellement, on note les éléments de S entre accolades, et on les sépare par des virgules. Notez que, dans cette définition, chaque élément de S apparaît une *unique* fois. Remarquez également que dans cette définition, l'ordre dans lequel sont énumérés les éléments est sans importance.

Exemple 2.2. Soit *Saisons* l'ensemble des saisons en climat tempéré. On peut définir cet ensemble en extension comme

$$Saisons = \{ Printemps, Été, Automne, Hiver \}.$$

De même, si l'on considère les saisons météorologiques¹ boréales², on a :

$$\begin{aligned} Printemps &= \{ Mars, Avril, Mai \}, \\ Été &= \{ Juin, Juillet, Août \}, \\ Automne &= \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \\ Hiver &= \{ Décembre, Janvier, Février \}. \end{aligned}$$

1. Contrairement aux saisons astronomiques qui commencent aux équinoxes ou aux solstices, les saisons météorologiques commencent toujours un premier du mois

2. Dans l'hémisphère nord, le printemps météorologique va de mars à mai, l'été de juin à août, etc. Dans l'hémisphère sud, les saisons sont inversées. Ainsi, le printemps météorologique austral se déroule pendant l'automne météorologique de l'hémisphère boréal



2.1.1 Égalité d'ensembles

Définition 2.2

Deux ensembles S_1 et S_2 sont dits égaux, noté $S_1 = S_2$, s'ils comprennent les mêmes éléments.

Inversement, si S_1 et S_2 ne comprennent pas les mêmes éléments, on dit que S_1 et S_2 sont *différents*, noté $S_1 \neq S_2$.

Exemple 2.3. Soient les ensembles suivants, et leurs définitions à l'exemple 2.2 :

$$\begin{aligned} \text{Saisons} &= \{ \text{Printemps}, \text{Été}, \text{Automne}, \text{Hiver} \}, \\ S_1 &= \{ \text{Été}, \text{Automne}, \text{Hiver}, \text{Printemps} \}, \\ S_2 &= \{ \text{Automne}, \{ \text{Mars}, \text{Avril}, \text{Mai} \}, \text{Été}, \text{Hiver} \}. \end{aligned}$$

On a $\text{Saisons} = S_1 = S_2$. Notez que dans S_2 , $\{ \text{Mars}, \text{Avril}, \text{Mai} \} = \text{Printemps}$.



Remarque 2.4. Notez que le nom des ensembles considérés pour une égalité, ainsi que l'ordre de leur éléments spécifiés dans une définition en extension est sans importance pour le concept d'égalité. Seul le contenu importe.

2.1.2 Sous-ensemble

Définition 2.3

Soient S_1 et S_2 deux ensembles. On dit que S_1 est un sous-ensemble de S_2 , noté $S_1 \subseteq S_2$ si tous les éléments de S_1 appartiennent à S_2 .

Si $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *inclus* à S_2 ou que S_2 *contient* S_1 . On peut aussi noter cette relation $S_2 \supseteq S_1$.

De plus, si $S_1 \neq S_2$ et $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *strictement inclus* à S_2 , noté $S_1 \subset S_2$. Réciproquement, on dit que S_2 contient S_1 strictement (ou au sens strict), noté $S_2 \supset S_1$.

Exemple 2.5. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On a $A \subseteq B$: tous les éléments de A sont des éléments de B . ◀

Ces concepts sont également illustrés avec un diagramme sur la figure 2.1, avec deux ensembles S_1 et S_2 .

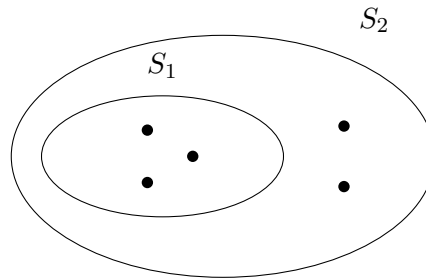


FIGURE 2.1 – Illustration de l'inclusion d'ensemble

La propriété suivante exploite les inclusions et est très utile pour montrer que deux ensembles sont égaux.

Propriété 2.4

Soient S_1 et S_2 deux ensembles. Si $S_1 \subseteq S_2$ et $S_2 \subseteq S_1$, alors $S_1 = S_2$.

Plus particulièrement, dans un contexte de preuve, pour montrer que deux ensembles sont égaux, il faut en général montrer que tous les éléments du premier ensemble sont compris dans le deuxième, et inversement.

Remarque 2.6. Ne confondez pas les concepts d'inclusion et d'appartenance. Un élément *appartient* à un ensemble, un (sous-)ensemble est *inclus* dans un ensemble.

Exemple 2.7. En reprenant les ensembles de l'exemple 2.2, on a donc, entre

autres, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 & Mars \in Printemps, \\
 & Octobre \notin \acute{E}t\acute{e}, \\
 & Juin \notin Saisons, \\
 & Printemps \in Saisons, \\
 & \{ Printemps \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Mars, Avril, Mai \} \in Saisons, \\
 & \{ \{ Mars, Avril, Mai \} \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Novembre, Mars \} \not\subseteq Printemps, \\
 & \{ Hiver, Automne \} \subseteq Saisons, \\
 & \{ Hiver, Automne \} \subset Saisons, \\
 & Saisons \supset \left\{ \{ Septembre, Octobre, Novembre \}, \right. \\
 & \quad \left. \{ Mars, Avril, Mai \} \right\}.
 \end{aligned}$$



2.1.3 Cardinal

Le cardinal d'un ensemble définit intuitivement sa taille, et permet de caractériser si un ensemble est « plus gros » qu'un autre.

Définition 2.5

Soit S un ensemble, le cardinal de S , noté $|S|$, est le nombre d'éléments de S .

Parfois, le cardinal de S est aussi appelé la *cardinalité* de S ou la *taille* de S , et est également parfois³ noté $\#S$. Ce document utilisera néanmoins systématiquement le terme « cardinal » ainsi que la notation précédente pour des raisons d'uniformisation.

Exemple 2.8. En reprenant les ensembles définis à l'exemple 2.2, on remarque que $|Saisons| = 4$ et $|Printemps| = |\acute{E}t\acute{e}| = |Automne| = |Hiver| = 3$. ◀

3. Il semblerait que cette notation ait été abandonnée dans les ouvrages mathématiques récents, raison pour laquelle la notation $|\cdot|$ est privilégiée dans ce document.

Les cardinaux d'ensembles sont souvent utilisés pour comparer des ensembles. En effet, si deux ensembles n'ont pas le même cardinal, ils ne peuvent pas être égaux.

Remarque 2.9. Comparer le cardinal d'ensembles infinis est plus compliqué que comparer deux nombres entiers, et requiert l'emploi de certaines précautions. De telles finesses seront abordées plus tard dans ce document, au chapitre 5.

On définit un ensemble particulier sur base du cardinal : l'*ensemble vide*, caractérisé formellement comme suit.

Définition 2.6

L'ensemble vide, noté \emptyset , est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément.

Cet ensemble est donc le seul ensemble de cardinal nul. En extension, on peut également le noter comme $\{ \}$.

De plus, quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\emptyset \subseteq S$. Si S est non vide, on a $\emptyset \subset S$. L'ensemble vide est donc contenu au sens strict dans n'importe quel ensemble non vide.

2.2 Définition en compréhension

Le début de la section 2.1 détaille, entre autres, comment définir en extension un ensemble, en énumérant simplement ses éléments. Dans certains cas, une telle définition est peu pratique, par exemple quand l'ensemble est de grande taille, et, *a fortiori*, quand son cardinal est infini.

Par exemple, même si l'on peut noter les naturels comme $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, cette définition est peu formelle. Par ailleurs, dans certains cas, une telle « définition par généralisation » est ardue, voire même impossible. Comment écrire succinctement en extension l'ensemble des mammifères ? Comment décrire en extension les réels ?

Pour parer à cette difficulté, on introduit la notion de *définition en compréhension*. Plutôt que de définir un ensemble en énumérant explicitement ses

éléments, on fournit une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble. Un ensemble défini comme tel est donc une collection d'objets distincts possédant une caractéristique commune.

Exemple 2.10. On peut définir les mammifères⁴ en compréhension comme

$$\{ x \mid x \text{ est un animal} \wedge x \text{ a des mamelles} \},$$

où le symbole « \mid » se lit « tel que ». ◀

Exemple 2.11. Soit $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. On peut définir cet ensemble en compréhension comme $S = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n < 7 \}$. ◀

Similairement, on peut par exemple⁵ définir l'ensemble vide en compréhension comme $\emptyset = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \neq x \}$ ou $\emptyset = \{ x \mid x \text{ est une vache} \wedge x \text{ sait voler} \}$.

De la même manière, on peut définir l'ensemble P des nombres pairs comme $P = \{ 2k \mid k \in \mathbb{Z} \}$, et l'ensemble I des nombres impairs comme $I = \{ 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2.3 Opérations ensemblistes

Les ensembles seraient de pauvres outils s'il n'était pas possible d'effectuer des manipulations entre eux. Ainsi, on définit plusieurs opérations entre les ensembles permettant d'effectuer des calculs, tels que de trouver « ce qui est commun ». De telles opérations sont très importantes en théorie des ensembles car elles permettent de « créer » des ensembles à partir d'autres.

On remarque également que la définition de ces opérateurs est très similaire à celle des connecteurs logiques du chapitre 1. Pour cette raison, chacune de ces définitions est formulée en ce sens, à l'aide desdits connecteurs logiques.

2.3.1 Parties d'un ensemble

Les parties d'un ensemble décrivent en quelque sorte tous les sous-ensembles que peut contenir un ensemble quelconque. Cet opérateur a plusieurs applications, notamment dans la classification des cardinaux d'ensembles infinis.

4. Le biologiste averti conviendra que cette définition des mammifères est incomplète. On s'en satisfera néanmoins dans ce document traitant avant tout de mathématiques.

5. Il existe une infinité de manières de définir l'ensemble vide en compréhension.

Plus formellement, on définit les parties d'un ensemble de la façon suivante.

Définition 2.7

Soit S un ensemble, on définit les parties de S , noté $\mathcal{P}(S)$, comme l'ensemble

$$\mathcal{P}(S) = \{ S' \mid S' \subseteq S \}.$$

En particulier, notez que quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ et $S \in \mathcal{P}(S)$. De plus, on a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$. Pour rappel, $\emptyset \neq \{ \emptyset \}$ (car $|\emptyset| = 0$ et $|\{ \emptyset \}| = 1$).

Exemple 2.12. Soit $S = \{ a, b, c \}$, on a

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}.$$



Enfin, notez que dans le cas général, si S est fini, on a $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

2.3.2 Complémentaire d'un ensemble

Le complémentaire d'un ensemble S décrit, intuitivement, les éléments qui n'appartiennent pas à S . Plus formellement, on le définit de la façon suivante.

Définition 2.8

Soient S et A deux ensembles, tels que $S \subseteq A$. On définit le complémentaire de S dans A , noté $\mathbb{C}_A(S)$, comme

$$\mathbb{C}_A(S) = \{ x \in A \mid x \notin S \}.$$

Quand le contexte est clair, on omettra A et on notera simplement ce complémentaire comme $\mathbb{C}(S)$ ou \overline{S} .

La figure 2.2 illustre cette définition à l'aide d'un *diagramme de Venn*. Sur cette figure, le complémentaire de S est colorié en gris.

Remarque 2.13. Notez que la notion de complémentaire de S dans un ensemble A est importante. En effet, si l'on ne précise pas dans quoi le complémentaire

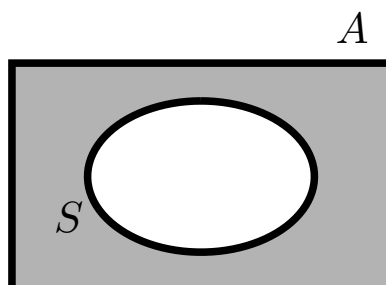


FIGURE 2.2 – Diagramme de Venn du complémentaire

est plongé, on peut trouver *n'importe quoi* dans \overline{S} . Ainsi, soit $S \subseteq \mathbb{Z}$, on aurait *vache* $\in \overline{S}$, ce qui n'est probablement pas ce qui nous intéresse, mais plutôt $\frac{1}{2} \in \overline{S}$.

2.3.3 Union de deux ensembles

L'union de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui sont dans l'un ou l'autre ensemble. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

Définition 2.9

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on définit l'union de S_1 et S_2 , notée $S_1 \cup S_2$, comme

$$S_1 \cup S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \}.$$

Notez que le « ou » qui apparaît dans l'intuition est le *ou inclusif* (cf. section 1.1.3). Une telle « ambiguïté » n'est pas présente dans la définition formelle. La figure 2.3 illustre l'union de deux ensembles en toute généralité.

2.3.4 Intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles considérés. On la définit formellement de la façon suivante.

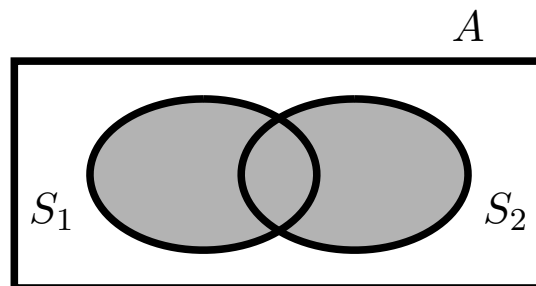


FIGURE 2.3 – Diagramme de Venn de l'union

Définition 2.10

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, l'intersection de S_1 et S_2 , notée $S_1 \cap S_2$, est définie comme

$$S_1 \cap S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \in S_2 \}.$$

La figure 2.4 illustre l'intersection de deux ensembles.

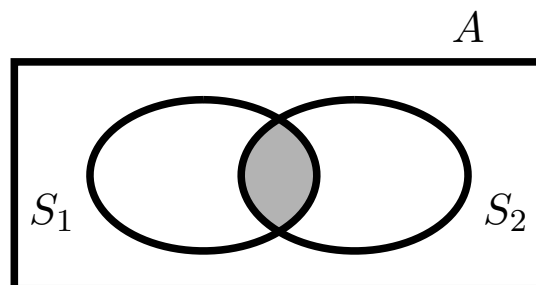


FIGURE 2.4 – Diagramme de Venn de l'intersection

2.3.5 Différence de deux ensembles

Intuitivement, la différence entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui sont dans le premier mais pas dans le second. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

Définition 2.11

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence entre S_1 et S_2 , notée $S_1 \setminus S_2$, est définie comme

$$S_1 \setminus S_2 = \{ x \mid x \in S_1 \wedge x \notin S_2 \}.$$

Parfois, on note la différence entre S_1 et S_2 comme $S_1 - S_2$. La figure 2.5 illustre la différence entre deux ensembles.

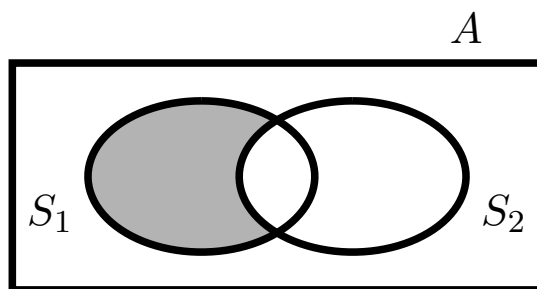


FIGURE 2.5 – Diagramme de Venn de la différence

Remarquez que si $S_1 = S_2$, alors $S_1 \setminus S_2 = S_2 \setminus S_1 = \emptyset$. De plus, si $S_2 \subseteq S_1$, alors $S_1 \setminus S_2 = \complement_{S_1}(S_2)$.

2.3.6 Différence symétrique de deux ensembles

Intuitivement, la différence symétrique entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à l'un, soit à l'autre. On la définit formellement de la façon suivante.

Définition 2.12

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence symétrique entre S_1 et S_2 , notée $S_1 \Delta S_2$ et lue « S_1 delta S_2 », est définie comme

$$\begin{aligned} S_1 \Delta S_2 &= \{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \} \\ &= (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2) \\ &= (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \end{aligned}$$

La figure 2.6 illustre la construction de la différence symétrique.

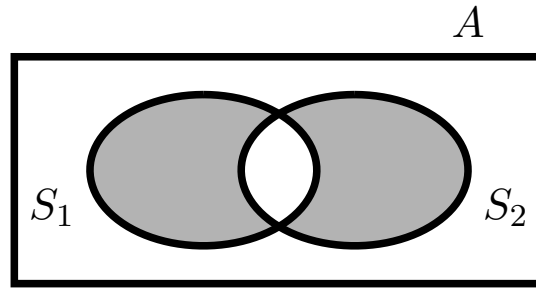


FIGURE 2.6 – Diagramme de Venn de la différence symétrique

2.3.7 Produit cartésien

Le produit cartésien est un opérateur particulier, sans le sens où il permet d'augmenter la « dimension » d'un ensemble. Le but de cet opérateur est de définir des éléments d'un ensemble comme deux éléments de deux ensembles différents. Pour cela, on définit d'abord la notion de *couple* et de *paire*.

Définition 2.13

Un couple est une séquence ordonnée de deux éléments. Une paire est un ensemble (non ordonné) de cardinal 2.

Les éléments d'un couple sont appelées *composantes*. Dépendant du contexte, la première composante est parfois appelée l'*origine* et sa deuxième *image*, dans

le cadre de fonctions, ou respectivement *abscisse* et *ordonnée* dans le cadre de points du plan.

Exemple 2.14. Les notations suivantes sont des couples d'éléments de \mathbb{Z} : $(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 4)$. Notez que dans cet exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$. En effet, les couples sont définis comme des séquences *ordonnées*. Dans le cas de paire, on aurait $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. ◀

Produit cartésien

Grace à la notion de couple, on peut à présent définir facilement le produit cartésien.

Définition 2.14

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on définit le produit cartésien de S_1 et S_2 , noté $S_1 \times S_2$, comme

$$S_1 \times S_2 = \{ (x, y) \mid x \in S_1 \wedge y \in S_2 \}.$$

Notez que pour construire le produit cartésien de deux ensembles, il faut donc construire toutes les combinaisons possibles de couples de deux éléments, la première composante appartenant au premier ensemble, la deuxième composante au deuxième ensemble.

Exemple 2.15. Soient $S_1 = \{ a, b, c \}$ et $S_2 = \{ a, b \}$. On a

$$S_1 \times S_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b) \}.$$

Exemple 2.16. Soient $S_1 = \{ Saucisse, Poulet, Porc \}$, $S_2 = \{ Frites, Purée \}$ et $S_3 = \{ Compote, Carottes \}$. On construit $S_1 \times S_2 \times S_3$ comme

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 \times S_3 = \{ & (Saucisse, Frites, Compote), (Saucisse, Frites, Carottes), \\ & (Saucisse, Purée, Compote), (Saucisse, Purée, Carottes), \\ & (Poulet, Frites, Compote), (Poulet, Frites, Carottes), \\ & (Poulet, Purée, Compote), (Poulet, Purée, Carottes), \\ & (Porc, Frites, Compote), (Porc, Frites, Carottes), \\ & (Porc, Purée, Compote), (Porc, Purée, Carottes) \}. \end{aligned}$$



Remarque 2.17. Remarquez que l'opérateur \times n'est pas *commutatif*, c'est à dire que

$$S_1 \neq S_2 \Rightarrow (S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1),$$

quels que soient deux ensembles S_1 et S_2 . Cela signifie qu'en toute généralité, on ne peut pas permuter les opérandes du produit cartésien.

Logique des prédicats

Concepts de base • Connexion entre prédicats et opérateurs ensemblistes

3.1 Concepts de base

Une variable est simplement un symbole dont la valeur, *a priori* inconnue, est comprise dans un certain ensemble de valeurs possibles. On peut par exemple restreindre une variable à des valeurs réelles, entières, booléennes, etc.

Définition 3.1

Un prédicat, une fonction propositionnelle ou une condition est une expression dont la valeur de vérité (vraie ou fausse) dépend d'une ou plusieurs variables.

Exemple 3.1. Les deux lignes suivantes illustrent des exemples de prédicats, l'un à une variable x , et l'autre à deux variables x et y .

$$p(x) : x \text{ est rouge}, \quad (3.1)$$

$$q(x, y) : x \text{ est jaune et } y \text{ a un noyau}. \quad (3.2)$$



Évidemment, construire la table de vérité de tels prédicats peut s'avérer difficile : il faut considérer toutes les valeurs possibles des variables, ce qui peut être fastidieux. En réalité, souvent, une telle énumération n'est pas possible, à cause du nombre de valeurs différentes que peuvent prendre ces variables. Pour cette raison, on utilise un concept similaire aux tables de vérité : les *classes de vérité*.

Afin de clairement définir un prédicat, il faut restreindre les valeurs possibles de ses variables. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces variables est appelé le *domaine de définition* du prédicat. L'ensemble des valeurs du domaine de définition qui donnent la valeur « vrai » au prédicat est appelé la *classe de vérité* du prédicat.

Plus formellement, on définit ces deux concepts de la façon suivante.

Définition 3.2

Soit P un prédicat, le domaine de définition de P , noté $\text{Dom}(P)$, est l'ensemble sur lequel le prédicat peut être défini.

Pour simplifier, on considérera toujours ce domaine comme non-vide.

Définition 3.3

Soit P un prédicat, la classe de vérité de P , notée $\mathcal{C}_V(P)$, est l'ensemble des éléments du domaine de définition qui vérifient P .

Exemple 3.2. Considérez le prédicat « x est rouge », noté $p(x)$. Posons son domaine de définition comme l'ensemble des fruits. Cela signifie que le prédicat n'a de sens uniquement que lorsqu'il est évalué sur un fruit : $p(\text{pomme})$ et $p(\text{banane})$ ont un sens mathématique, $p(\text{coquelicot})$ n'a pas de sens au vu de ce domaine de définition.

« Framboise » fait partie de la classe de vérité de ce prédicat. C'est en effet un fruit, qui est rouge. La classe de vérité $\mathcal{C}_V(P)$ est en fait l'ensemble des fruits rouges. Ce prédicat n'est évidemment pas une tautologie : certains fruits ne font pas partie de son domaine de définition. Par exemple, « banane » ne fait pas partie de la classe de vérité de ce prédicat, car une banane n'est pas rouge. Par ailleurs, se demander si « coquelicot » fait partie de la classe de vérité de P n'a

pas de sens, car « coquelicot » ne fait pas partir du domaine de définition de P . ◀

Exemple 3.3. Soient $p(x)$ et $q(x)$ deux prédicats définis comme

$$\begin{aligned} p(x) : 2 \leq x < 7, \\ q(x) : 5 < x < 9. \end{aligned}$$

Cherchons la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ en procédant de la manière suivante :

- on établit une table de vérité à partir d’une analyse de tout intervalle où les valeurs de vérité de $p(x)$ et $q(x)$ ne varient pas ;
- on dessine une droite et on y place les classes de vérité.

Dans la suite de cet exemple, on va considérer deux cas d’énoncé différents. Le premier, où le domaine de définition de $p(x)$ et de $q(x)$ sera \mathbb{R} , et le deuxième uniquement \mathbb{Z} .

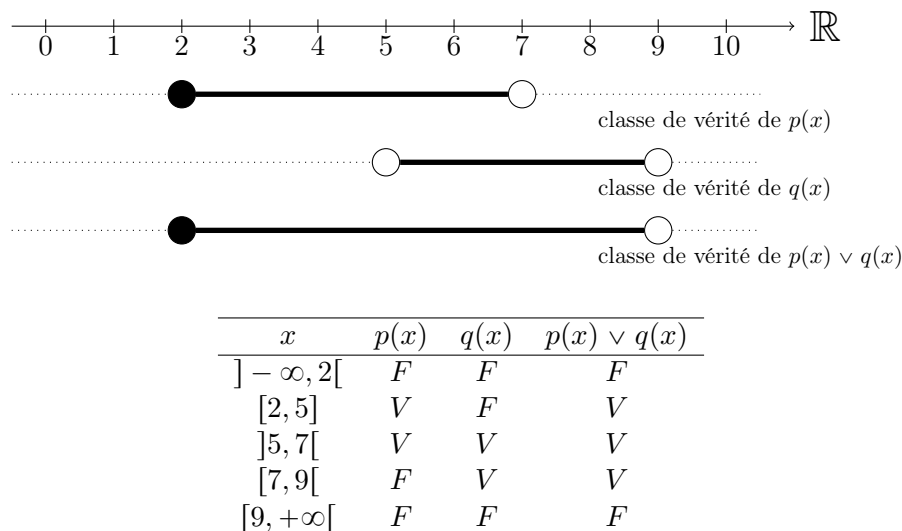
CAS 1 : considérons \mathbb{R} comme le domaine de définition de $p(x)$ et $q(x)$. Ainsi, aussi bien 2 que 5 appartiennent au domaine de définition de ces prédicats.

La classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ dans ce cas peut être construite comme à la figure 3.1. En résumé, cette classe de vérité est l’intervalle des nombres compris entre 2 (inclusivement) et 9 (exclusivement).

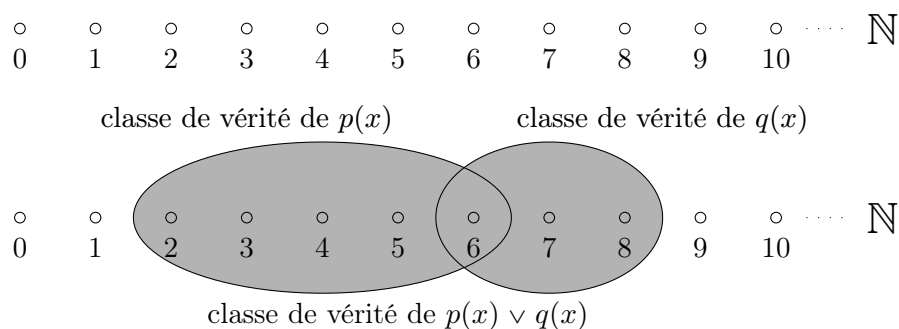
Remarque 3.4. Sur la figure 3.1, un gros point noir signifie que l’on prend l’élément considéré dans la classe de vérité, alors qu’un point blanc encerclé de noir signifie que l’on ne prend pas l’élément en question. Cette convention de représentation sera utilisée tout au long de ce document lors d’illustrations de concepts.

CAS 2 : considérons à présent uniquement \mathbb{N} comme le domaine de définition de ces prédicats. Ainsi, 2 appartient au domaine de définition de ces prédicats, mais pas 5 ni -1 .

La classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ peut être dans ce cas illustrée comme à la figure 3.2. Notez que cette fois-ci, on ne peut plus utiliser de droite « continue », on a donc opté pour de simples points.

FIGURE 3.1 – Illustration de la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ (cas 1)

En résumé, la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ est les nombres entiers allant de 2 à 8.

FIGURE 3.2 – Illustration de la classe de vérité de $p(x) \vee q(x)$ (cas 2)

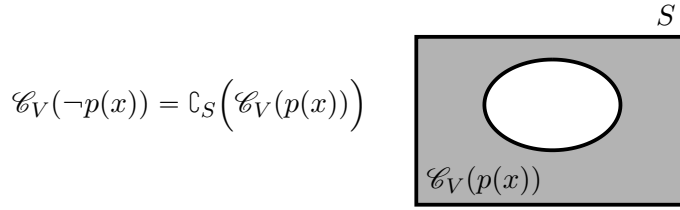
3.2 Connexion entre prédicats et opérateurs ensemblistes

On a déjà vu aux chapitres 1 et 2 que les connecteurs logiques et opérateurs ensemblistes sont très semblables de par leur fonctionnement. Du point de vue des classes de vérité de prédicats, ces similarités sont toujours très présentes. Cette section détaille ces similitudes à l'aide de diagrammes de Venn.

Soient $p(x)$ et $q(x)$ des prédicats dont le domaine de définition est S , on peut les connecter entre eux et la valeur de vérité de du résultat, également un prédicat, est obtenue en utilisant les tables de vérités.

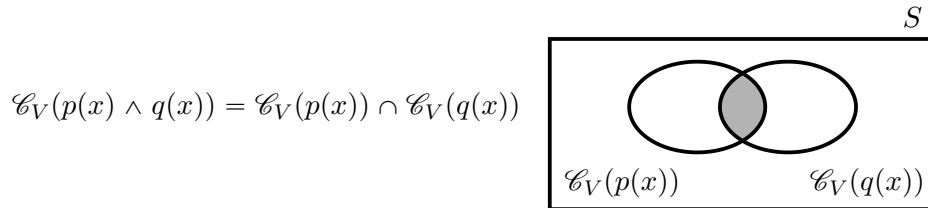
Pour chacun des opérateurs logiques présentés, on a donc les propriétés suivantes.

Négation



En d'autres termes, la classe de vérité de la négation d'un prédicat p est égale au complémentaire de la classe de vérité de p .

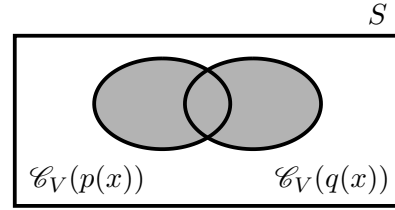
Conjonction



Autrement dit, la classe de vérité de la conjonction de deux prédicats est égale à l'intersection des classes de vérité de ces prédicats.

Disjonction

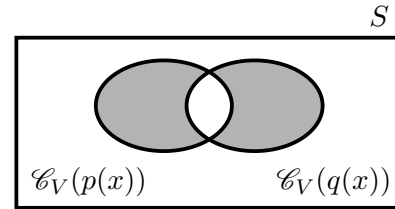
$$\mathcal{C}_V(p(x) \vee q(x)) = \mathcal{C}_V(p(x)) \cup \mathcal{C}_V(q(x))$$



Ceci signifie que la classe de vérité de la disjonction de deux prédicats est égale à l'union des classes de vérité de ces prédicats.

Disjonction exclusive

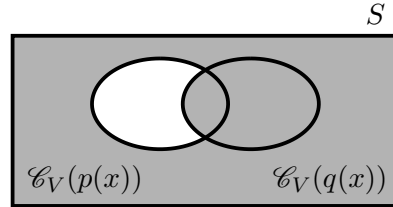
$$\mathcal{C}_V(p(x) \vee\!\!\!\wedge q(x)) = \mathcal{C}_V(p(x)) \triangle \mathcal{C}_V(q(x))$$



En d'autres termes, la classe de vérité de la disjonction exclusive de deux prédicats est la différence symétrique entre les classes de vérité de ces prédicats.

Implication

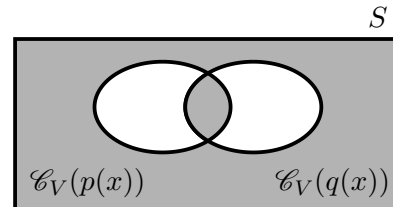
$$\mathcal{C}_V(p(x) \Rightarrow q(x)) = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_V(p(x))) \cup \mathcal{C}_V(q(x))$$



Ceci signifie que la classe de vérité de l'implication d'un prédicat q par un prédicat p est égale à l'union entre le complémentaire de la classe de vérité de p et la classe de vérité de q . Ceci peut-être facilement déduit des relations précédentes via la définition positive de l'implication.

Équivalence

$$\mathcal{C}_V(p(x) \Leftrightarrow q(x)) = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_V(p(x)) \triangle \mathcal{C}_V(q(x)))$$



Enfin, la classe de vérité de deux prédicats équivalents peut être construite comme le complémentaire de la différence symétrique entre les classes de

vérité des deux prédicats. Ceci est normal, étant donné que deux prédicats sont équivalents s'ils ont la même valeur de vérité, et que la différence symétrique définit les éléments qui sont soit dans un ensemble, soit dans un autre.

Éléments de la théorie des graphes

Concepts de base en théorie des graphes • Variantes du modèle de graphe • Chemins et connexité • Distances • Coloration de graphes

La théorie des graphes est une discipline des mathématiques discrètes consacrée à l'étude des graphes, souvent représentés comme un ensemble de cercles reliés par des lignes. Cette structure simple peut être utilisée pour modéliser beaucoup d'éléments et problèmes de la vie courante, ce qui motive leur étude théorique.

4.1 Concepts de base en théorie des graphes

Définition 4.1

Un graphe G non orienté est un couple (V, E) tel que

- V est un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets,
- E est un ensemble fini de paires^a de sommets de V appelées arêtes.

a. Une paire est un ensemble de taille 2.

On note un tel graphe $G = (V, E)$. Habituellement, un tel graphe est dit *simple* (maximum une arête par paire de sommets) et *sans boucles* (pas d'arête d'un sommet à lui-même). De plus, parfois, de tels graphes sont dits *non dirigés* plutôt que non orientés.

Définition 4.2

Soit $G = (V, E)$ un graphe, on dit que

- $|V|$ est l'ordre de G ,
- $|E|$ est la taille de G .

En d'autres termes, l'ordre et la taille d'un graphe dénotent respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de ce graphe.

Les graphes sont souvent visualisés comme un ensemble de cercles (les sommets) reliés par des lignes (les arêtes). L'exemple suivant illustre la définition de graphe non orienté ainsi qu'une représentation dans le plan de ce graphe.

Exemple 4.1. Sur la figure 4.1, on a $G = (V, E)$ avec

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

On remarque que l'arête $\{2, 1\}$ n'apparaît pas dans la liste des arêtes de G . En effet, comme les arêtes sont des paires, c'est-à-dire des sous-ensembles de taille 2, on a $\{2, 1\} = \{1, 2\}$. De plus, G est d'ordre 5 (il a 5 sommets) et de taille 7 (il a 7 arêtes). ◀

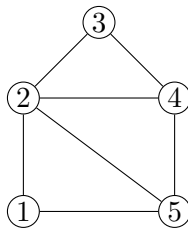


FIGURE 4.1 – Un graphe G non orienté

4.1.1 Adjacence

Le concept d'adjacence au sein d'un graphe permet de décrire la structure interne de ce graphe. On peut par exemple élaborer des concepts tels que « a est relié à b », « c est à côté de a », etc. On verra également dans la suite de cette section comment résumer l'information d'adjacence au sein d'une seule et même structure.

Définition 4.3

Soient $G = (V, E)$, et $u, v \in V$. On dit que u et v sont adjacents si $\{u, v\} \in E$. Si une arête $e = \{u, v\} \in E$, on dit que e est incidente à u et v . De plus, on définit le voisinage $N(v)$ d'un sommet v comme

$$N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\},$$

et le degré $d(v)$ de v comme $|N(v)|$.

Autrement dit, deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête. Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets adjacents à ce sommet, et le degré d'un sommet est égal à la taille du voisinage d'un sommet, ou encore égal au nombre d'arêtes incidentes à un sommet.

Exemple 4.2. Les voisinages et degrés de chacun des sommets du graphe de la figure 4.1 sont illustrés à la table 4.1.

Sommet	Degré	Voisinage
1	2	$\{2, 5\}$
2	4	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	2	$\{2, 4\}$
4	3	$\{2, 3, 5\}$
5	3	$\{1, 2, 4\}$

TABLE 4.1 – Voisinages et degrés de la figure 4.1



On remarque que la propriété suivante est vérifiée sur les degrés d'un graphe.

Propriété 4.4

Soit $G = (V, E)$ un graphe de taille m , on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

En d'autres termes, la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois la taille de ce graphe. Intuitivement, comme le degré d'un sommet représente le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, additionner les sommets revient à compter chaque arête deux fois (une fois pour chaque extrémité correspondant à un sommet). Cette propriété peut être vérifiée à l'aide du graphe de la figure 4.1 et de la table 4.1

Un point important dans la manipulation des graphes est souvent leur représentation, et leur codage en informatique. Nous présentons ici l'une de ces représentations courantes.

Considérez les sommets d'un graphe G d'ordre n comme étiquetés par les naturels de 1 à n . Le concept d'adjacence d'un graphe est souvent résumé dans une matrice $M \in \mathbb{N}^{n \times n} = (m_{ij})$ telle que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle une telle matrice la *matrice d'adjacence* de G .

Remarque 4.3. Comme les graphes que l'on considère sont sans boucles, on a toujours $m_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. De plus, la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. En effet, on a toujours $m_{ij} = m_{ji}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exemple 4.4. La table 4.2 illustre ma matrice d'adjacence de G . La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

Remarque 4.5. Parfois, la matrice d'adjacence est encodée sous format booléen, on y remplace ainsi 1 par « vrai » (V) et 0 par « faux » (F).

Il existe de nombreuses autres représentations de graphes, telles que la *liste d'adjacence*. Nous ne détaillerons néanmoins pas ces représentations ici. L'étudiant intéressé peut consulter plus d'informations dans le livre d'Aho *et al.* [1].

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

TABLE 4.2 – Matrice d’adjacence de G

4.2 Variantes du modèle de graphe

Les applications des graphes étant très larges, il existe divers variantes au modèle présenté dans les sections précédentes. Nous présentons ici quelques-unes de ces variantes.

4.2.1 Multigraphe

Un *multigraphe* est un graphe pouvant contenir des *boucles* et dans lequel deux sommets distincts peuvent être rejoints par *plusieurs arêtes*. Lorsque deux arêtes joignent la même paire de sommets, on les qualifie d’arêtes *parallèles*.

Dans un tel graphe, on note en indice (i, j) de la matrice d’adjacence le nombre d’arêtes entre un sommet i et un sommet j . Cette matrice n’est donc plus binaire, comme dans le cas des graphes simples. Elle est néanmoins toujours symétrique.

Exemple 4.6. La figure 4.2 illustre un exemple de multigraphe. Sur ce graphe G , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe G est un multigraphe. Il compte des arêtes parallèles.
- Les sommets s_2 et s_4 sont reliés par 2 arêtes parallèles. Il en est de même des sommets s_3 et s_4 .

La table 4.3 illustre la matrice d’adjacence de ce graphe. ◀

Notez que les graphes des figures ?? et ?? du problème des sept ponts de Königsberg correspondent à un multigraphe.

Dans la matrice d’adjacence d’un tel graphe, habituellement, on note un k à la case (i, j) s’il y a k arêtes entre les sommets i et j .

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0	1	1	1
s_2	1	0	0	2
s_3	1	0	0	1
s_4	1	2	1	0

TABLE 4.3 – matrice d'adjacence d'un multigraphe

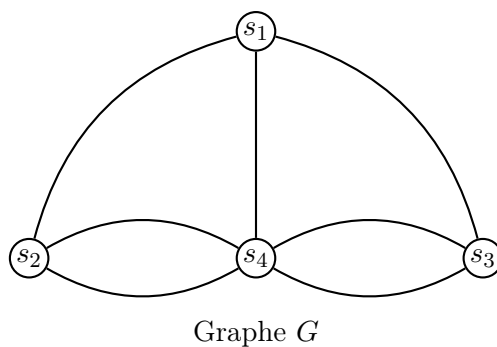


FIGURE 4.2 – Exemple de multigraphe.

4.2.2 Graphe dirigé

Les graphes dirigés sont des variantes du modèle non orienté vu précédemment dans lesquelles les relations modélisées ne sont pas nécessairement symétriques. On les définit comme suit.

Définition 4.5

Un graphe G dirigé est un couple (V, E) tel que

- V est un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets,
- $E \subseteq V \times V$ est un ensemble fini non vide de couples (ordonnés) de sommets disjoints de V appelés arcs ou flèches.

Notez que dans certaines références, les notions de graphe *dirigé* et de graphe *orienté* [6] sont incorrectement confondues. Ce sont des concepts différents. Dans un graphe orienté, on ne peut pas avoir une paire d'arcs (i, j) et (j, i) entre deux sommets i et j d'un graphe, ni de boucle. Ce détail de terminologie n'est toutefois nécessaire que si l'on travaille avec les deux modèles de façon précise, ce qui n'est pas le cas dans ce document.

Habituellement, on représente ces graphes de façon similaire aux graphes non orientés, les arcs étant ici représentés par des flèches dotées d'une origine et d'une extrémité. On les représente par une flèche allant du sommet origine au sommet extrémité.

On peut également envisager des variantes du modèle de graphe dirigé en le rendant « multigraphe ».

La figure 4.3 illustre un exemple de graphe dirigé.

Exemple 4.7. La figure 4.3 illustre un exemple de graphe dirigé. Sur ce graphe G , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe G est un graphe dirigé car « ses arêtes sont des arcs ».
- L'arc qui va du sommet s_1 vers le sommet s_2 est distinct de celui qui va de s_2 vers s_1 .



La matrice d'adjacence d'un graphe dirigé est construite de manière similaire à celle d'un graphe non orienté. Elle n'est néanmoins en général pas symétrique.

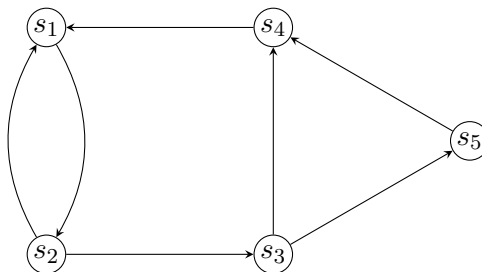
Graphe G

FIGURE 4.3 – Exemple de graphe dirigé.

4.2.3 Graphe étiqueté

Un graphe *étiqueté* est un graphe (non orienté, dirigé, multigraphe) dont chaque arête ou arc est étiqueté. Généralement, les étiquettes sont des nombres, dénotant, par exemple, ce que cela coûte pour se rendre d'un sommet à son voisin, combien rapporte la relation entre deux sommets, etc.

Parfois, de tels graphes sont dits *valués* ou *pondérés* si les étiquettes sont des nombres. Dans ce cas, on appelle de telles étiquettes des *poids*.

Exemple 4.8. La figure 4.4 illustre un exemple de graphe pondéré. Sur ce graphe G , on a entre autres les propriétés suivantes.

- Le graphe G est orienté car ses arêtes sont représentées par des flèches.
- C'est également un graphe étiqueté.
- L'arc (s_2, s_3) est de poids 2.



Les graphes étiquetés ont de nombreuses applications pratiques. Modélisons par exemple une ville en désignant les croisements de routes comme les sommets et en reliant deux sommets par un arc si une route joint les deux carrefours correspondants. Notez que ce modèle dirigé inclut les sens interdits. De plus, on peut par exemple étiqueter un arc par un nombre dénotant la distance entre deux carrefours. On peut ainsi résoudre des problèmes complexes tels que se demander quel est le plus court chemin entre deux carrefours en ville.

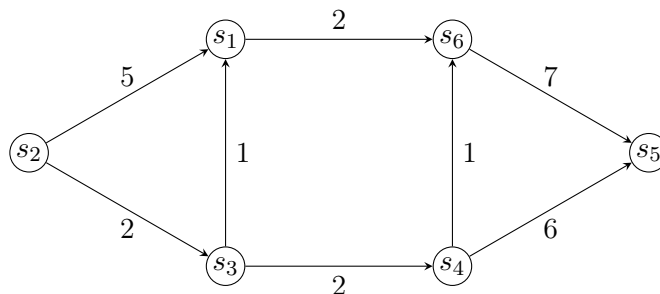
Graphe G

FIGURE 4.4 – Exemple de graphe étiqueté

4.3 Chemins et connexité

Les chemins et la connexité sont des concepts qui permettent, par exemple, « de dire combien de morceaux composent un graphe », de « savoir s'il est possible de se rendre d'un sommet à un autre », etc. Ces concepts décrivent la structure interne du graphe d'un point de vue topologique, ainsi que la structure de la matrice d'adjacence.

Définition 4.6

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un chemin de longueur k avec $k \geq 1$ dans G est une séquence de sommets v_1, v_2, \dots, v_{k+1} telle que

$$\forall i = 1, 2, \dots, k, \{v_i, v_{i+1}\} \in E.$$

Un tel chemin est noté $v_1 - v_2 - \dots - v_{k+1}$. De plus, si tous les sommets d'un chemin sont distincts, il est dit élémentaire.

Intuitivement, un chemin est une séquence de sommets joints deux à deux par des arêtes, et la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. Ce concept peut être étendu facilement dans le contexte de graphes dirigés, pondérés et de multigraphes.

Notez que dans le cadre de ce cours, on considérera systématiquement des chemins élémentaires, à l'unique exception du *chemin eulérien*, formellement in-

troduit à la définition 4.9.

Il existe des chemins particuliers : les cycles, qui sont intuitivement des chemins « qui se terminent au sommet où ils ont commencé ».

Définition 4.7

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $p = v_1 - v_2 - \dots - v_{k+1}$ un chemin de G , avec $k \geq 3$. On dit que p est un cycle si $v_{k+1} = v_1$.

Un cycle est dit élémentaire si les sommets v_1, \dots, v_k sont différents (le sommet v_{k+1} est forcément identique à v_1).

Définition 4.8

Un graphe non orienté G est connexe si, pour chaque paire de sommets distincts de G il existe un chemin allant de l'un à l'autre.

Exemple 4.9. Sur le graphe de la figure 4.5, on remarque, entre autres, que

- $1 - 2 - 3 - 4$ est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1 - 2 - 4 - 1 - 2 - 4 - 1$ est un cycle non élémentaire de longueur 6,
- $4 - 5 - 1 - 4 - 2$ est un chemin non élémentaire de longueur 4,
- $1 - 2 - 4 - 5$ est un chemin élémentaire de longueur 3,
- $1 - 2 - 4 - 5 - 1$ est un cycle élémentaire de longueur 4,
- le graphe est connexe : il est possible de relier toute paire de sommets par un chemin (le chemin $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ relie tous les sommets, par exemple).

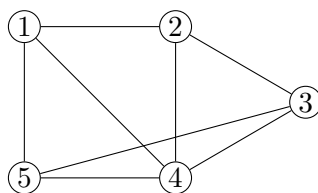


FIGURE 4.5 – Un exemple de graphe connexe

En pratique, on utilise des algorithmes dédiés pour déterminer si un graphe est connexe, tels que le *parcours en profondeur* [1, 9]. De tels algorithmes ne sont toutefois pas l'objet de ce cours.

Définition 4.9

Soit G un graphe, un chemin eulérien dans G est un chemin passant une unique fois par chaque arête de G . Un cycle eulérien dans G est un cycle passant une unique fois par chaque arête de G . Un graphe qui contient un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.

Notez que cette définition ne requiert *pas* que les chemins ou cycles recherchés au sein du graphe soient élémentaires. Il est donc tout à fait acceptable que ces chemins ou ces cycles passent plusieurs fois par un même sommet.

Pour savoir si un graphe est eulérien, une possibilité est de chercher un cycle eulérien, ou de montrer qu'il n'en existe pas. Une telle démarche peut être fastidieuse. Néanmoins, la propriété suivante est facile à vérifier et décrit les seuls cas dans lesquels un chemin ou un cycle eulérien peut exister au sein d'un graphe.

Propriété 4.10

Un graphe G est eulérien si et seulement si il est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair. Un graphe G contient un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est zéro ou deux.

Intuitivement, lorsque l'on parcourt un cycle eulérien, à chaque fois que l'on entre dans un sommet, il est nécessaire d'en ressortir, ce qui explique la nécessité d'avoir des sommets de degré pair. Dans le cas d'un chemin, les sommets potentiels de degré impair sont le sommet de début et de fin du chemin.

Définition 4.11

Soit G un graphe, un chemin hamiltonien dans G est un chemin élémentaire passant une unique fois par chaque sommet de G . Un cycle hamiltonien dans G est un cycle élémentaire passant par chaque sommet de G . Un graphe qui contient un cycle hamiltonien est appelé graphe hamiltonien.

Contrairement au cas eulérien, les mathématiciens pensent qu'il n'existe pas d'algorithme rapide pour décider si un graphe admet un cycle hamiltonien ou non [11]. Ce problème est appelé le *problème du cycle hamiltonien*, et est très étudié en théorie des graphes [4, 5, 8, 12, 16, 17].

Dès lors, pour montrer qu'un graphe admet un cycle hamiltonien, il faut l'exhiber. Dans le cas contraire, il faut montrer qu'un tel cycle n'existe pas.

Exemple 4.10. Soient les graphes G et H illustrés à la figure 4.6. On remarque que :

- G est hamiltonien, il contient un cycle (et donc un chemin) hamiltonien, par exemple $v_1 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$;
- G n'est pas eulérien : tous les sommets ne sont pas de degré pair (v_1 et v_4 , par exemple) ;
- G contient un chemin eulérien : $v_1 - v_4 - v_2 - v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_3 - v_4$, on remarque aussi que le nombre de sommets de degré impair est 2 (v_1 et v_4) ;
- H est eulérien, il contient donc un cycle (et un chemin) eulérien, par exemple $v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_4 - v_3 - v_1$, on note également que ce graphe est connexe et que le degré de tous les sommets est pair ;
- H n'est pas hamiltonien : en effet, pour passer de la partie droite à la partie gauche du graphe et y revenir, il est nécessaire de passer deux fois par v_4 , ce qui n'est pas permis.

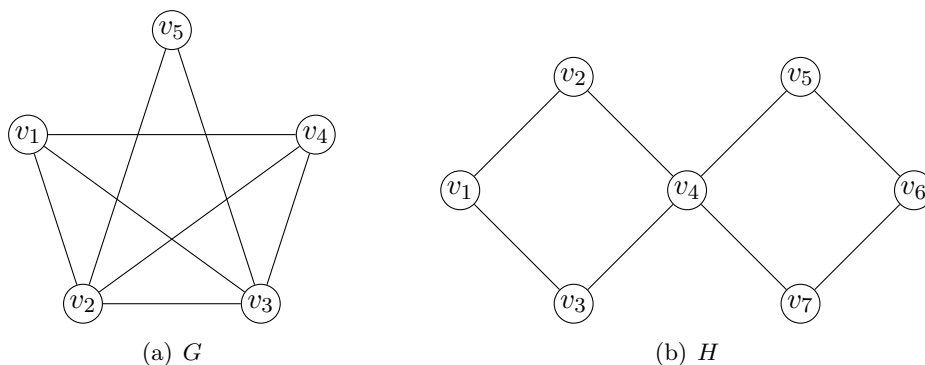


FIGURE 4.6 – Deux exemples de graphes G et H

Cette section aborde une dernière partie relative à la connexité, très utile en algorithmique : la structure d'arbre. Intuitivement, un arbre a la même structure qu'un arbre généalogique : pas de cycles (on ne se marie pas avec ses parents, ses enfants ou ses frères et sœurs), et connexe. Les arbres sont très utilisés en tant que structures de données, comme concept illustratif d'appels récurifs, etc.

La définition suivante définit formellement le concept d'arbre à l'aide de plusieurs propositions équivalentes.

Définition 4.12 ▶ [7]

Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geq 2$, on dit que G est un arbre si l'une des propositions suivantes équivalentes est vérifiée :

- G est connexe et acyclique,
- G est connexe et a $n - 1$ arêtes,
- G est acyclique et a $n - 1$ arêtes,
- G est acyclique et ajouter une arête crée exactement un cycle,
- G est connexe et supprimer une arête brise la connexité de G ,
- chaque paire de sommets de G est reliée par exactement un chemin.

Parfois, on nomme un sommet particulier du graphe qu'on appelle *racine*, à des fins de simple référencement.

Exemple 4.11. La figure 4.7 illustre un arbre de racine r . On remarque que chacune des propositions de la définition 4.12 est vérifiée. ◀

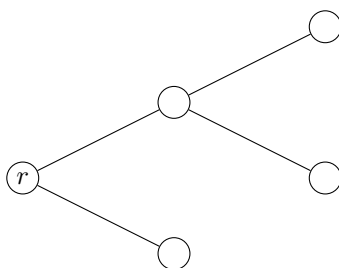


FIGURE 4.7 – Un exemple d'arbre de racine r

4.4 Distances

Les distances dans un graphe permettent de décrire l'éloignement d'un sommet par rapport à un autre, la distance moyenne pour se rendre d'un sommet arbitraire à un autre, le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe, etc.

Ce concept a de nombreuses applications pratiques, des algorithmes guidant une voiture à l'aide de son G.P.S., en passant par le routage de paquets au sein d'un réseau ou l'analyse d'images.

Formellement, on définit la notion de distance de la façon suivante :

Définition 4.13

Soit G un graphe connexe, on définit la distance entre deux sommets u et v de G , notée $|u, v|_G$, comme la longueur d'un plus court chemin entre u et v .

Quand le contexte est clair, on omettra G et on notera¹ cette distance simplement $|u, v|$. Par convention, on suppose que $|u, u| = 0$ quel que soit le sommet u considéré.

Notez qu'au vu de cette définition, on ne considère pas la distance au sein de graphes non connexes². En effet, dans un tel graphe, il est possible de trouver deux sommets qui ne sont pas reliés par un chemin. En particulier, ils ne sont donc pas reliés par un plus court chemin et la distance entre ces deux sommets ne peut être donc être calculée.

Par ailleurs, remarquez que dans le cas d'un graphe non orienté, on a toujours $|u, v| = |v, u|$, quel que soit les sommets u et v considérés. En effet, si $p = v - p_1 - \dots - p_{k-1} - u$ est un plus court chemin de longueur k entre u et v , alors $p' = u - p_{k-1} - \dots - p_1 - v$ est un plus court chemin de longueur k entre v et u .

Exemple 4.12. Sur le graphe G de la figure 4.8, on remarque, entre autres, que

- G est connexe,
- $|1, 1| = 0$,
- $|1, 3| = 1$,
- $|1, 5| = 2$, et il y a quatre plus courts chemins joignant les sommets 1 à 5 : $1 - 2 - 5$, $1 - 3 - 5$, $1 - 6 - 5$ et $1 - 4 - 5$.



1. Dans la littérature, la distance entre deux sommets u et v est souvent notée $d(x, y)$. Dans ce document, on s'écarte de cette notation à des fins de clarté car la lettre d est déjà utilisée pour dénoter le degré d'un sommet, une notation également standard.

2. Dans la littérature, cette hypothèse n'est pas systématiquement faite. Le cas échéant, on considère que $|u, v| = \infty$ si aucun chemin ne relie u et v .

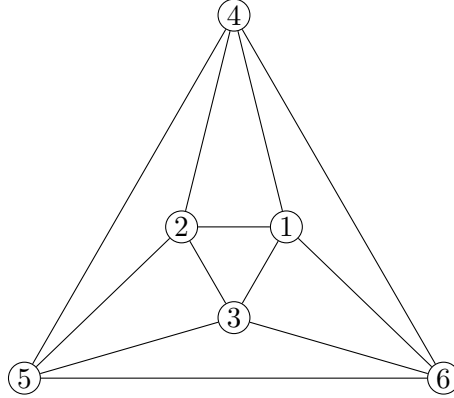


FIGURE 4.8 – Illustration du concept de distance

Il existe de nombreux algorithmes efficaces pour calculer les distances au sein d'un graphe [9]. Ces algorithmes ne seront néanmoins pas détaillés dans cette section, dans la mesure où les concepts ne sont présentés qu'à titre d'introduction. Aussi, lors d'exemples et d'exercices, les distances seront toujours calculées sur des graphes relativement petits.

Souvent, lorsque de nombreuses distances au sein d'un graphe ont besoin d'être calculées, on les calcule exhaustivement et on rassemble cette information au sein d'un tableau. Considérez les sommets d'un graphe G d'ordre n comme étiquetés par les naturels de 1 à n . On peut résumer les distances au sein d'un graphe dans une matrice $D \in \mathbb{N}^{n \times n} = (m_{ij})$ telle que

$$m_{ij} = k \text{ si } |i, j|_G = k.$$

On appelle une telle matrice la *matrice des distances* de G .

Exemple 4.13. La table 4.4 illustre la matrice des distances du graphe de la figure 4.8. La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

Une fois calculée, cette matrice est très utile pour connaître rapidement la distance entre n'importe quelle paire de sommets. Elle permet également de repérer facilement les distances les plus longues entre deux sommets arbitraires, le sommet le plus éloigné d'un sommet donné, etc. En l'occurrence, elle permet de facilement calculer le *diamètre* d'un graphe, défini comme suit.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	2	1
2	1	0	1	1	1	2
3	1	1	0	2	1	1
4	1	1	2	0	1	1
5	2	1	1	1	0	1
6	1	2	1	1	1	0

TABLE 4.4 – Matrice des distances de G **Définition 4.14**

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, on définit le diamètre de G , noté $D(G)$ comme

$$D(G) = \max_{u, v \in V} |u, v|_G.$$

En d'autres termes, le diamètre est la distance la plus longue au sein d'un graphe, il décrit le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe.

Exemple 4.14. Considérez le graphe de la figure 4.9. Dans sa matrice des distances, on remarque que la plus grande distance est 3, atteinte entre les sommets 1 et 4. On a donc $D(G) = 3$. ◀

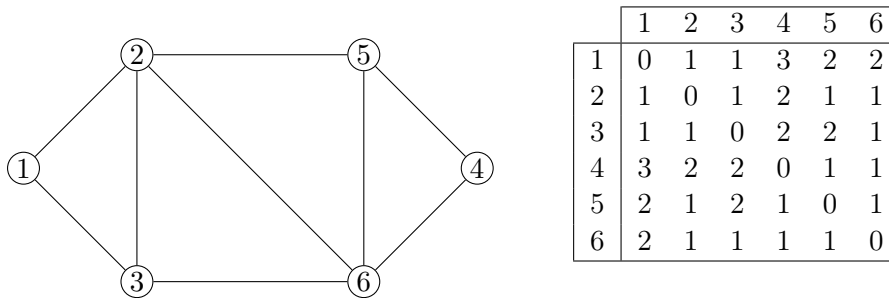


FIGURE 4.9 – Un graphe et sa matrice des distances

Finalement, notez que dans le cas de graphes pondérés, le concept de distance est facilement étendu en considérant la longueur d'un chemin comme étant la

somme des poids des arêtes qu'il traverse. Similairement, dans les graphes dirigés, on considère qu'un chemin ne peut être construit qu'en suivant le sens des arcs.

4.5 Coloration de graphes

Les colorations de graphes sont une autre partie de la théorie des graphes riche en applications et en résultats. Les colorations permettent de partitionner les sommets d'un graphe en classes, chaque élément d'une classe étant incompatible avec les autres éléments de cette classe.

Par exemple, si l'on veut colorier les pays d'une carte du monde de sorte à ce que deux pays ayant une frontière commune ne partagent pas la même couleur, on va classer ces pays en plusieurs ensembles : les pays coloriés en rouge, les pays coloriés en bleu, etc. Aucun pays colorié en rouge ne peut avoir de frontière commune avec un autre pays colorié en rouge.

Les colorations sont utilisées notamment dans la conception d'horaires, l'assignation de fréquences radio, la distribution de ressources non partageables, etc. Formellement, on définit la notion de coloration de la façon suivante.

Définition 4.15

Une coloration de graphe est une assignation de couleurs à chacun de ses sommets telle que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur.

Historiquement, le terme « coloration » trouve ses origines dans le problème de coloration des pays à une carte cité ci-dessus [10].

Exemple 4.15. La figure 4.10 illustre deux colorations. La première utilise 3 couleurs et la deuxième 4. On remarque que l'assignation de couleurs sur le graphe de droite n'est pas une coloration : les sommets v_2 et v_5 , ainsi que v_4 et v_5 ont la même couleur alors qu'ils sont adjacents. ◀

Souvent, dans le cadre de colorations, on est amené à chercher le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier un graphe. Ce concept est appelé le *nombre chromatique*.

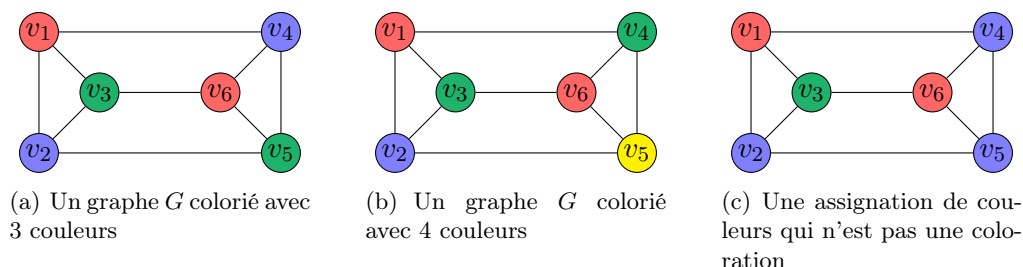


FIGURE 4.10 – Plusieurs assignations de couleurs aux sommets d'un graphe

Définition 4.16

Le nombre chromatique d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs utilisées au sein d'une coloration de G .

Exemple 4.16. Sur le graphe de la figure 4.10, on a $\chi(G) = 3$. En effet, on remarque que le graphe de gauche a été colorié avec 3 couleurs. De plus, il est impossible de le colorier avec 2 couleurs, car colorier uniquement les sommets v_1, v_2 et v_3 requiert déjà 3 couleurs (car ces sommets sont adjacents les uns aux autres). ◀

Notez qu'au vu de la définition de χ , il est important de justifier que la quantité avancée est bien le nombre de couleurs minimum nécessaire. Une façon de le faire est de trouver, comme dans l'exemple ci-dessus, une partie du graphe qui ne peut pas être coloriée avec un nombre inférieur de couleurs.

Remarque 4.17. Notez que l'hypothèse selon laquelle le nombre chromatique est le nombre *minimum* de couleurs nécessaires pour colorier un graphe est importante. En effet, sans cette contrainte de minimalité, on pourrait assigner une couleur à chaque sommet du graphe, ce qui n'est pas intéressant.

Notez qu'il n'existe à ce jour pas de technique *rapide* permettant de calculer rapidement le nombre chromatique d'un graphe. Par ailleurs, les mathématiciens pensent qu'un tel algorithme n'existe tout simplement pas [11].

De plus, à partir d'une coloration non optimale (qui n'utilise pas un nombre minimum de couleurs), il n'est pas toujours facile de la transformer en coloration optimale. Sur le graphe du milieu de la figure 4.10, par exemple, on a utilisé 4 couleurs, ce qui n'est pas optimal. Toutefois, on ne peut pas se contenter de

remplacer la couleur jaune de v_5 par la couleur rouge, bleue ou verte, car les sommets adjacents à v_5 sont coloriés dans ces couleurs.

Il existe néanmoins certains résultats donnant des bornes sur le nombre chromatique, comme le théorème suivant, célèbre.

Théorème 4.17 ▶ Théorème des 4 couleurs

Un graphe G peut être représenté dans le plan tel que ses arêtes ne se croisent pas^a si et seulement si $\chi(G) \leq 4$.

a. Un tel graphe est appelé un graphe *planaire*.

Ce théorème affirme donc, entre autre, que toute carte des provinces d'un pays ou des pays du monde peut être coloriée avec un maximum de quatre couleurs.

La preuve de ce théorème est excessivement complexe, et n'est pas vue ici entre autres pour cette raison. Notez que cette preuve a un sens historique, dans la mesure où c'est la première preuve assistée par ordinateur à avoir été acceptée par la communauté scientifique. Un ordinateur a en effet été utilisé pour énumérer des milliers de configurations, qui ont été ultérieurement analysées par des scientifiques.

Dénombrement

Un problème de modélisation • Outils de base du dénombrement • Deux grandes questions • Arrangements et permutations • Combinaisons

Parfois, en informatique, on est amené à compter le nombre de configurations possibles d'une structure. En effet, la résolution de nombreux problèmes consiste en l'énumération exhaustive des possibilités pour ensuite décider pour chacune si elle est une solution ou non au problème. Et avant d'énumérer, il est prudent de dénombrer, c'est-à-dire de compter.

5.1 Un problème de modélisation

Comme déjà mentionné dans les chapitres précédents, la modélisation mathématique est souvent une étape importante dans la résolution d'un problème, si ce n'est la plus importante. Dans ce chapitre, en l'occurrence, on verra que sans elle, on ne peut résoudre un problème à la fois correctement tout en justifiant son raisonnement sur des arguments formels.

En particulier, on expose deux principes de modélisation utilisés intensément

en combinatoire, à savoir la modélisation d'un problème sous la forme d'un *diagramme en arbre*, détaillée à la section 5.1.1, et le codage d'une solution d'un problème en section 5.1.2.

5.1.1 Diagrammes en arbre

De nombreux problèmes de comptage peuvent être modélisés et résolus en utilisant des *diagrammes en arbre*. La structure d'arbre est sensiblement la même que celle vue dans le chapitre 4 dédié aux graphes.

On considère ici qu'un arbre est constitué d'une *racine* de laquelle partent plusieurs *branches*, avec d'autres branches partant des extrémités d'autres branches. Les sommets de degré 1 sont appelés les *feuilles*. On utilise cette structure en modélisant chaque choix possible d'une configuration comme une branche. Pour compter le nombre de configurations possibles du problème original, il suffit de compter les feuilles de l'arbre.

Exemple 5.1. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne possèdent pas deux « 1 » consécutifs. ◀

Solution. Le diagramme de la figure 5.1 illustre cette situation. Sur cette figure, on remarque qu'il y a 8 telles chaînes de caractères. ◀

5.1.2 Encodage d'une solution d'un problème

Parfois, la modélisation en arbre ainsi ne suffit pas pour résoudre un problème combinatoire directement. Ceci peut arriver quand il existe un trop grand nombre de configurations (représenter en arbre devient fastidieux) ou quand le problème est trop complexe (les règles usuelles de comptage ne s'appliquent pas directement).

Dès lors, il convient d'utiliser une modélisation dédiée sur laquelle on pourra appliquer les outils vus précédemment.

Pour illustrer cette modélisation ainsi que les points importants à garder à l'esprit dans le reste de ce chapitre, introduisons deux exemples de problèmes

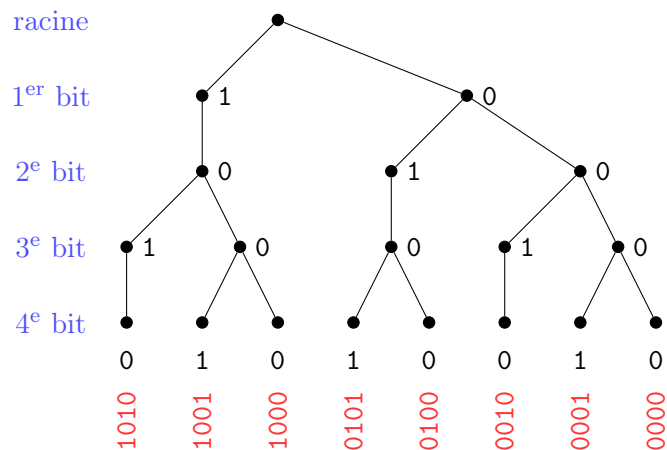


FIGURE 5.1 – Chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne contenant pas deux « 1 » consécutifs

simples, sans chercher à les résoudre¹.

Problèmes

- 5.1. Combien de code de vélos à quatre chiffres décimaux existe-t-il ?
- 5.2. Combien de mains poker à 5 cartes au sein d'un jeu de 52 existe-t-il ?

Modélisons ces problèmes de manière simple sous forme mathématique. En l'occurrence, on veut pouvoir décrire « ce qu'est un code de vélo » et « ce qu'est une main de poker ». On crée ainsi un « encodage » d'un code de vélo et d'une main de poker. Modéliser ces situations de cette manière permet de compter le nombre d'encodages différents possibles plutôt que de compter le nombre de situations originales, abstraites.

Dans le cas de des deux problèmes simples ci-dessus, on peut par exemple procéder de la façon suivante.

1. La résolution de ces problèmes sera effectuée plus loin dans le chapitre.

Encodage

Un code de vélo est un n-uple $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ tel que $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ avec $1 \leq i \leq 4$.

Cette petite définition décrit ce qu'est un code de vélo. Tous les codes de vélo peuvent être modélisés avec cette définition. Par exemple, le code « 2343 » est modélisé par le n-uple $(2, 3, 4, 3)$.

Dans le cas des mains de poker, on peut procéder comme suit. Dans cette définition, on note le valet comme 11, la reine comme 12, le roi comme 13 et l'as comme 1. Ainsi, le roi de trèfle est noté $13\clubsuit$.

Encodage

Une main de poker est un n-uple $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ tel que

$$m_i \in \{1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, 11\heartsuit, 12\heartsuit, 13\heartsuit, \\ 1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, 11\diamondsuit, 12\diamondsuit, 13\diamondsuit, \\ 1\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, 11\clubsuit, 12\clubsuit, 13\clubsuit, \\ 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, 11\spadesuit, 12\spadesuit, 13\spadesuit\},$$

avec $1 \leq i \leq 5$.

Cette définition décrit bien toutes les mains de poker possibles, comme des n-uples à 5 composantes. Par exemple, la main illustrée à la figure 5.2 est encodée comme $(11\spadesuit, 1\diamondsuit, 13\diamondsuit, 5\clubsuit, 12\heartsuit)$.

Bien que rébarbatives, ces deux définitions vont permettre de répondre très rapidement et avec une justification formelle à deux questions qu'il est *systématiquement* nécessaire de se poser dans les problèmes de comptage, à savoir « si l'ordre importe » et « si les répétitions sont autorisées ». Ces questions seront abordées plus loin, aux sections 5.3, 5.4 et 5.5.

Notons qu'en pratique, encoder une configuration dans le but d'effectuer un dénombrement sera parfois difficile, étant donné que les problèmes considérés incluent régulièrement des contraintes. Dans la mesure du possible, on essaiera d'introduire un maximum de ces contraintes dans l'encodage utilisé, afin de faciliter les calculs.

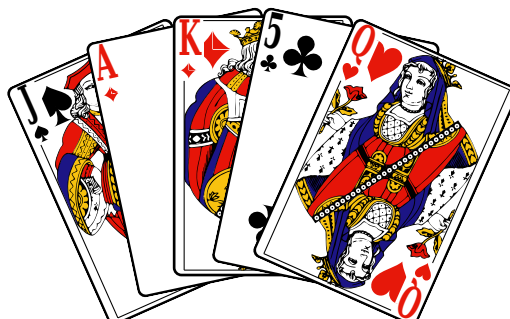


FIGURE 5.2 – Une main de cinq cartes

Par exemple, on peut compter un placement de 8 pions identiques sur un échiquier comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 64 (ces composantes dénotant la case à laquelle les pions se trouvent), mais si l'on veut les placer sur des lignes différentes, il est peut-être plus sage de modéliser ce placement comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 8 (la composante i étant à k si le pion de la i^{e} ligne se trouve à la colonne k).

5.2 Outils de base du dénombrement

Souvent, les problèmes de combinatoire ne peuvent être résolus directement par un encodage et des diagrammes en arbre. Ainsi, résoudre un problème combinatoire consiste avant tout à le décomposer en sous-problèmes plus faciles à résoudre, et à ensuite combiner les résultats de résolution de ces problèmes pour composer la solution du problème original.

Par exemple, si on doit assigner deux informaticiens sur des ordinateurs dans une salle qui en contient dix, on peut décomposer ce problème en assignant d'abord un ordinateur au premier informaticien, puis en assignant un ordinateur au second.

Cette section détaille donc comment analyser un problème complexe afin de choisir une bonne manière de le décomposer en sous-problèmes plus simples. De plus, elle explique comment recomposer la solution du problème original à partir des solutions de ces sous-problèmes, à l'aide d'opérateurs mathématiques simples

tels que le « + » et le « × ».

La structure de cette section ainsi que les exemples qui s'y trouvent sont largement inspirés du livre de Rosen [15], à l'exception de la fin consacrée au principe des tiroirs.

5.2.1 La règle du produit

Supposons que l'on se pose la question suivante : « combien de chaînes de caractères binaires de longueur 3 peut-on créer ? ». Procédons comme indiqué ci-dessus, c'est-à-dire en décomposant ce problème en sous-problèmes.

On peut encoder une telle chaîne comme un triplet (c_1, c_2, c_3) , où $c_i \in \{0, 1\}$. Pour composer un tel triplet, on peut commencer par assigner un caractère à la position 1. Il y a 2 tels premiers choix. On peut ensuite assigner un caractère à la position 2. Il y a également 2 tels choix. Finalement, on peut assigner un caractère à la position 3, il y a encore une fois deux tels choix.

On peut représenter cette construction sous forme d'arbre, tel qu'illustré à la figure 5.3.

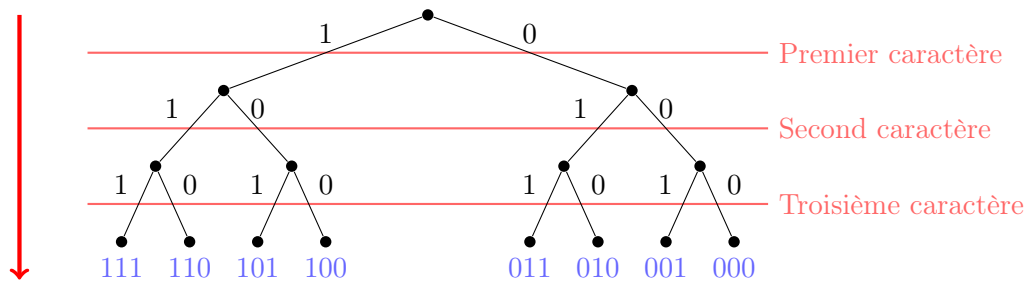


FIGURE 5.3 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 3

Ainsi, on remarque qu'à l'étape 1, on a 2 choix possibles. Pour chacun de ces deux choix, on en a deux suivants, ce qui résulte en 4 choix possibles ($2 \cdot 2$). Finalement, pour chacun de ces 4 choix, on a 2 choix possibles, ce qui résulte finalement en $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ chaînes de caractères possibles.

On peut généraliser cette démarche dans le cas du calcul de la taille d'un produit cartésien. Si l'on décompose la construction d'un couple, on doit sélectionner

indépendamment un élément de chaque ensemble qui constitue ce produit, et on a donc

$$|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|.$$

On peut finalement énoncer la « *la règle du produit* », très utilisée en combinatoire et utilisée quand une tâche est constituée d'une séquence de différentes sous-tâches.

Théorème 5.1 ▶ Règle du produit

Supposez qu'une procédure soit constituée d'une séquence de deux tâches. Si il y a n_1 façons de réaliser la première tâche et n_2 façons de réaliser la deuxième, alors il y a $n_1 n_2$ façons de réaliser la procédure originale.

Exemple 5.2. Les chaises d'un auditoire sont étiquetées par une lettre majuscule de l'alphabet et un naturel compris entre 1 et 100. Quel est le plus grand nombre de chaises qui peuvent être étiquetées différemment de cette façon ? ◀

Solution. La procédure d'étiquetage des chaises peut être séparée en deux tâches :

1. assigner une lettre majuscule de l'alphabet parmi les 26 lettres disponibles,
2. assigner l'un des 100 naturels disponibles.

La règle du produit affirme qu'il y a donc $26 \cdot 100$ façons d'étiqueter une chaise. ◀

Parfois, il est utile de généraliser la règle du produit en séparant une procédure en une séquence de k tâches. Dans ce cas, on multiplie le nombre de façons qu'il y a de réaliser chacune des k tâches pour achever la procédure originale.

Exemple 5.3. Combien de plaques de voitures peuvent être conçues si chaque plaque est constituée d'une séquence de trois lettres majuscules, suivie d'un tiret et d'une séquence de trois chiffres décimaux ? ◀

Solution. Comme illustré à la figure 5.4, il y a 26 choix possibles pour chacune des trois lettres majuscules constituant la première partie de la plaque, et 10 choix possibles de chiffres décimaux pour la seconde partie de la plaque.

Dès lors, la règle du produit affirme qu'il y a

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$$

différentes plaques de voitures possibles. ◀

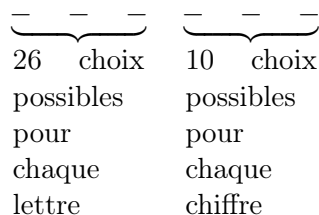


FIGURE 5.4 – Structure d'une plaque de voiture

5.2.2 Le principe d'inclusion-exclusion

Similairement au cas du produit, partons d'un problème simple : pour reformer la grille des sections « informatique : réseaux » et « informatique : systèmes », on réunit les professeurs donnant des cours dans ces deux sections. Combien de place faut-il prévoir ?

On peut représenter cette situation par un diagramme de Venn, tel qu'illustré à la figure 5.5.

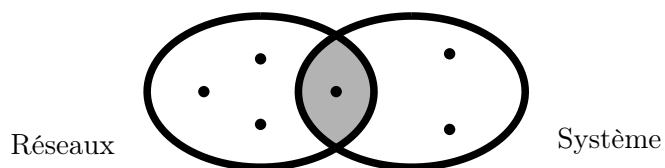


FIGURE 5.5 – Ensemble des professeurs de réseaux et de système

Sur cette figure, on remarque que bien qu'il y ait 4 professeurs de réseaux et 3 de systèmes, il ne faut pas prévoir $4 + 3$ places. En effet, il y a un des professeurs qui donne cours à la fois en réseaux et en systèmes. En conséquence, lorsque l'on

fait $4 + 3$, on compte ce professeur deux fois². La réponse est donnée par $4 + 3 - 1$, où 1 est le nombre de professeurs qui donnent cours à la fois en réseaux et en système.

On peut généraliser cette règle « addition / soustraction » de manière ensembliste comme suit.

Théorème 5.2 ▶ Principe d'inclusion-exclusion

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on a

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

En particulier, on remarque que si S_1 et S_2 sont disjoints, on a $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$.

Exemple 5.4. Un étudiant peut choisir un projet en informatique parmi deux listes, qui contiennent respectivement 23 et 15 projets possibles. Aucun projet n'est présent sur plus d'une liste. Combien de projets l'étudiant peut-il choisir ? ◀

Solution. L'étudiant peut choisir un projet soit en le sélectionnant dans la première liste, soit dans la deuxième. Comme un projet n'est présent que dans une seule liste, le principe d'inclusion-exclusion affirme qu'il y a $23 + 15$ choix de projets disponibles. ◀

Exemple 5.5. Chaque utilisateur d'un système possède un mot de passe, qui comporte de 6 à 8 caractères, où chaque caractère est soit une lettre majuscule, soit un chiffre. De plus, chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de mots de passe possible existe-t-il ? ◀

Solution. Soit P le nombre total de mots de passe possible. Ces mots de passe sont soit de longueur 6, soit de longueur 7, soit de longueur 8. Notons respectivement P_6 , P_7 et P_8 le nombre de mots de passe de chacune de ces longueurs. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que $P = P_6 + P_7 + P_8$. Cherchons à présent les valeurs de P_6 , P_7 et P_8 .

2. Remarquez que cette erreur : « compter deux fois plusieurs choses identiques » est très commune en combinatoire, il faut donc redoubler de vigilance dans la résolution de ces problèmes. Souvenez-vous que la section 5.1 détaille une manière de limiter ce risque, à savoir procéder par une étape de modélisation du problème à résoudre.

Trouver l'une de ces valeurs directement est difficile. Pour cette raison, pour calculer P_6 , comptons le nombre de chaînes de caractères de longueur 6 contenant des chiffres et des lettres majuscules (incluant celles ne contenant pas de chiffres), et soustrayons de cette quantité le nombre de chaînes de caractères ne contenant pas de chiffres. Par la règle du produit, le nombre de chaînes de longueur 6 est 36^6 (car il y a 26 lettres et 10 chiffres), et le nombre de chaînes de caractères sans chiffres est 26^6 . Dès lors, on a

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

On calcule les valeurs de P_7 et P_8 de manière similaire, et on obtient donc

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

et

$$\begin{aligned} P_8 &= 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 \\ &= 2\,612\,282\,842\,880. \end{aligned}$$

Dès lors, on en conclut que $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360$. ◀

Exemple 5.6. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 ? ◀

Solution. Notons \mathcal{I} l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 100 qui sont divisibles par 4 ou par 6. On remarque que le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 est égal à $100 - |\mathcal{I}|$.

Notons \mathcal{I}_4 l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 4, et \mathcal{I}_6 l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 6. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que

$$|\mathcal{I}| = |\mathcal{I}_4| + |\mathcal{I}_6| - |\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6|.$$

On remarque qu'il y a exactement $100 \div 4 = 25$ nombres entiers inférieurs à 100 divisibles par 4, et $100 \div 6 = 16$ nombres entiers divisibles par 6. Ces nombres caractérisent les cardinalités de respectivement \mathcal{I}_4 et \mathcal{I}_6 .

On remarque que \mathcal{I}_4 et \mathcal{I}_6 ne sont pas disjoints : les nombres entiers qui sont à la fois dans \mathcal{I}_4 et dans \mathcal{I}_6 sont des entiers à la fois divisibles par 4 et

par 6, c'est à dire des entiers divisibles par $PPCM(4, 6) = 12$. Dès lors, on a $|\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6| = 100 \div 12 = 8$.

Dès lors, on sait que $|\mathcal{I}| = 25 + 16 - 8 = 33$. Dans la question originale, on demande les entiers qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6, c'est-à-dire les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont pas dans $|\mathcal{I}|$. On a $100 - 33 = 67$ tels entiers. ◀

Exemple 5.7. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 » ? ◀

Solution. On peut construire une chaîne de caractères qui commence par « 1 » ou finit par « 00 » en construisant une chaîne de caractères qui commence par « 1 » ou en construisant une chaîne de caractères qui finit par « 00 ».

Par la règle du produit, on sait qu'il y a $2^7 = 128$ chaînes de caractères qui commencent par « 1 », car on fixe le premier bit de la chaîne et les 7 autres peuvent être choisis indépendamment parmi les choix « 0 » et « 1 ». De la même manière et toujours par la règle du produit, on a $2^6 = 64$ chaînes de caractères qui finissent par « 00 ».

Notons que certaines chaînes commençant par « 1 » finissent par « 00 ». Par la règle du produit, il y a exactement $2^5 = 32$ telles chaînes, car on fixe le premier bit ainsi que les deux derniers, laissant les 5 autres être choisis indépendamment. Ces trois constructions sont illustrées à la figure 5.6.

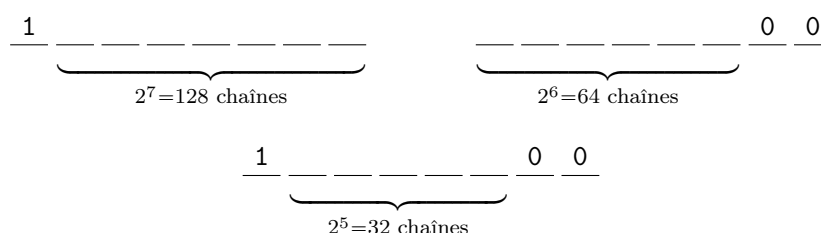


FIGURE 5.6 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commençant par « 1 » ou finissant par « 00 »

Dès lors, par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement $128 + 64 - 32 = 160$ chaînes de caractères binaires de longueur 8 commençant par « 1 » ou finissant

par « 00 ». ◀

5.2.3 La règle de la division

Enfin, la dernière règle « arithmétique » que l'on peut utiliser en combinatoire est la *règle de la division*. Celle-ci est utile lorsqu'une tâche peut être réalisée de diverses n façons, mais dont certaines façons sont équivalentes.

Exemple 5.8. Combien de façons y a-t-il d'asseoir quatre personnes autour d'une table circulaire, où deux configurations sont considérées équivalentes quand chaque personne a le même voisin de droite et le même voisin de gauche ? ◀

Solution. Comptons préalablement toutes les façons possibles d'asseoir dans l'ordre ces quatre personnes. Pour cela, on choisit au hasard un siège autour de la table qu'on étiquette par « 1 ». On numérote les autres sièges dans l'ordre, sans perdre de généralité dans le sens horloger.

On sélectionne arbitrairement la première personne et on l'assoit sur le siège « 1 ». Il y a quatre façons de sélectionner cette personne. On sélectionne ensuite la deuxième personne, il reste trois choix possibles, on l'assoit sur le siège « 2 ». De la même manière, il reste deux façons de sélectionner la troisième personne à asseoir sur le siège « 3 », et un unique choix pour la dernière personne qui s'assoit sur le siège « 4 ».

Par la règle du produit, il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons d'ordonner les quatre personnes autour de la table. Néanmoins, chacun des quatre choix possible du siège numéroté « 1 » conduit à une même configuration, car on considère deux configurations comme différentes si l'une des personnes a un voisin direct à droite ou à gauche différent.

Comme il y a quatre choix d'étiquettes pour le siège « 1 », on a $\frac{24}{4} = 6$ différentes configurations possibles d'asseoir les quatre personnes autour de la table. Ces configurations sont illustrées à la figure 5.7. ◀

D'un point de vue ensembliste, cette technique correspond à compter le nombre d'ensembles dans d'une union d'ensembles disjoints. Ainsi, on peut gé-

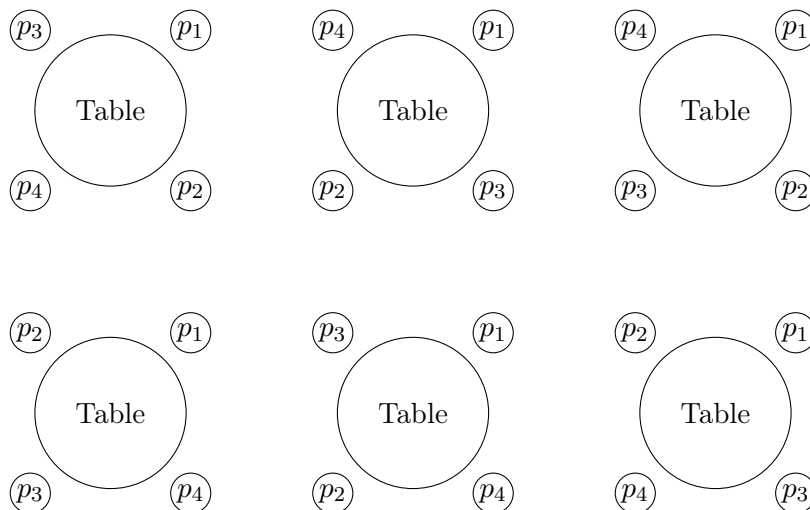


FIGURE 5.7 – Six différentes façons d’asseoir quatre personnes autour d’une table

généraliser cette technique de comptage de manière ensembliste comme suit : si un ensemble S est l’union de n ensembles disjoints de taille d , alors $n = \frac{|S|}{d}$.

Cette situation est illustrée à la figure 5.8, avec $|S| = 12$ et $d = 3$. On remarque que S est bien constitué de $\frac{|S|}{3} = 4$ ensembles disjoints.

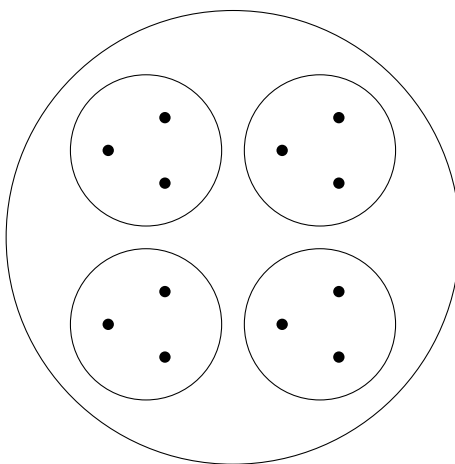


FIGURE 5.8 – Illustration de la règle de la division

Similairement aux cas précédents, on peut généraliser ce principe en termes de tâches, de la manière suivante.

Théorème 5.3 ▶ Règle de la division

Si une tâche peut être effectuée de n façons, mais pour chaque façon w , exactement d de ces n façons sont équivalentes à w , alors il y a $\frac{n}{d}$ façons de réaliser la tâche originale.

Intuitivement, on procède à un comptage avec cette règle de la manière suivante : on compte l'intégralité des façons par lesquelles une tâche peut être effectuée, et on divise ce nombre par le nombre de façons équivalentes à tous les cas comptés. Ceci permet d'éviter de compter deux fois deux façons équivalentes de réaliser la tâche originale.

5.2.4 Le principe des tiroirs

Comme on l'a vu dans le chapitre dédié aux ensembles, comparer les cardinalités d'ensembles peut s'avérer difficile. En effet, il y est affirmé que si deux ensembles sont finis, comparer leur taille est aisé car une simple énumération de leurs éléments suffit à montrer lequel d'entre eux possède le plus grand cardinal.

Néanmoins, une telle technique ne peut être utilisée dans le cadre d'ensembles infinis. Premièrement, une énumération exhaustive des éléments n'est en toute généralité pas possible. Deuxièmement, même si une énumération est possible, il n'est pas trivial de montrer que deux infinis ont le même ordre de grandeur.

On présente ici une technique, permettant de résoudre ce problème, illustrée par l'exemple suivant.

Supposez que l'on veuille ranger 13 chaussettes dans 12 tiroirs. Comme il n'y a que 12 tiroirs pour 13 chaussettes, il doit y avoir un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. En effet, si chaque tiroir contient au moins une chaussette, au moins 12 chaussettes (une par tiroir) peuvent être rangées. Ce principe est appelé le *principe des tiroirs* de Dirichlet³.

3. En anglais, ce principe est souvent appelé le « principe des trous de pigeon » ou *pigeonhole principle*, où n pigeons veulent nicher dans m nichoirs.

Théorème 5.4 ▶ Principe des tiroirs

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m > n$, si m objets sont placés dans n boîtes, alors au moins une boîte contient deux objets.

Ce principe est illustré sur base de l'exemple précédent à la figure 5.9.

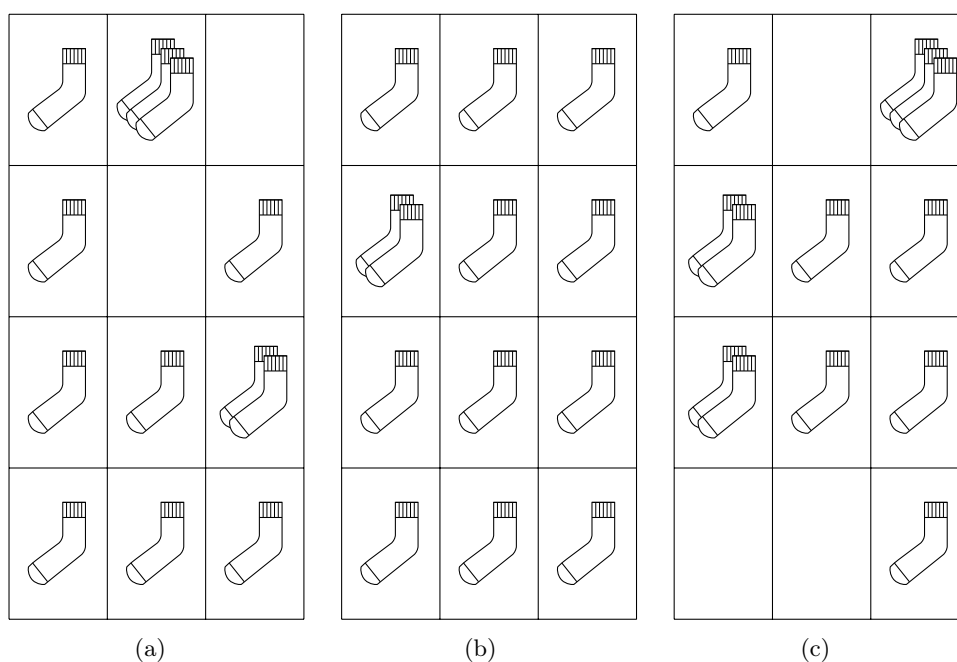


FIGURE 5.9 – Au moins une boîte contient deux chaussettes

Exemple 5.9. Combien de personnes doit-on placer dans une pièce afin qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire? ◀

Solution. Dans la mesure où il y a 366 dates d'anniversaire possibles (incluant le 29 février), par le principe des tiroirs, la pièce doit contenir au moins 367 personnes afin que deux d'entre elles aient le même anniversaire. ◀

Exemple 5.10. Combien de cartes doivent être piochées dans un jeu de 52 cartes afin que trois cartes de la même couleur soient sélectionnées? ◀

Solution. On dispose de quatre boîtes différentes, une pour chaque couleur, et chaque fois qu'une carte est piochée, on la place dans la boîte correspondant à sa couleur. Ainsi, par le principe des tiroirs, si n cartes sont sélectionnées, au moins une des boîtes contient $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ cartes, où $\lceil x \rceil$ dénote le plus entier supérieur à x .

Dès lors, on sait que 3 cartes de la même couleur sont sélectionnées si $\lceil \frac{n}{4} \rceil \geq 3$. Le plus petit entier tel que $\lceil \frac{n}{4} \rceil \geq 3$ est $2 \cdot 4 + 1 = 9$. Ainsi, piocher 9 cartes suffit pour en piocher trois de la même couleur.

Remarquons que si l'on pioche 8 cartes, on pourrait malencontreusement en piocher 2 de chaque couleur, ainsi au moins 9 cartes doivent être piochées. Ce cas arrive si on pioche par exemple les quatre as (aucune carte n'a la même couleur), puis les quatre rois (chaque couleur est représentée par deux cartes). La carte suivante que l'on piochera sera forcément d'une couleur déjà présente. ◀

Les deux corollaires suivants sur les bijections sont en particulier très utiles dans le cadre des cardinalités d'ensemble, comme mentionné plus haut.

Corollaire 5.5

Une application f d'un ensemble de taille $n + 1$ vers un ensemble de taille n ne peut pas être une bijection.

En effet, par le principe des tiroirs, au moins deux éléments de l'ensemble de départ doivent être envoyés sur un même élément de l'ensemble d'arrivée. Ceci empêche f d'être injective, et donc d'être une bijection.

De plus, on remarque que la réciproque de ce corollaire est également vraie, ce qui peut être démontré avec des arguments similaires à ceux du paragraphe précédent.

Exemple 5.11. Sur la figure 5.10, les trois applications de S_1 vers S_2 ne sont pas des bijections. En effet, on remarque que $S_1 = 4$ et $S_2 = 3$. De la même manière, les inverses de ces trois fonctions ne peuvent également pas être des bijections. ◀

Néanmoins, toute la puissance du principe des tiroirs et de l'application des bijections ne réside pas dans les ensembles finis, mais bien dans les ensembles infinis. En effet, l'existence ou l'absence d'une bijection entre deux ensembles, finis

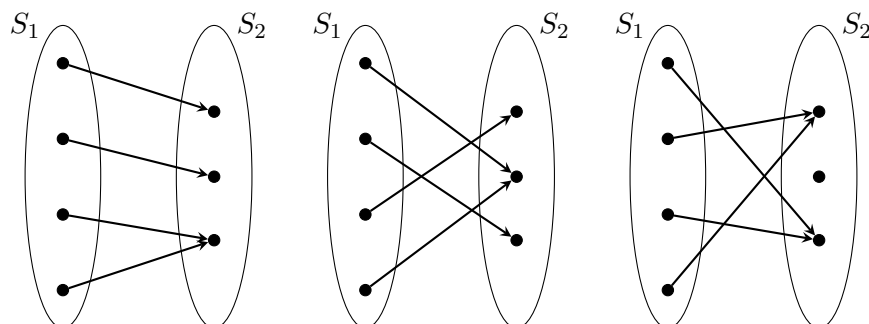


FIGURE 5.10 – Trois fonctions qui ne peuvent être des bijections

ou non, permet de comparer leurs cardinalités. Ceci est exprimé par le corollaire suivant.

Corollaire 5.6

Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont la même cardinalité.

Avec ce corollaire, on peut prouver certains résultats *a priori* contre-intuitifs relatifs aux ensembles de taille infinis.

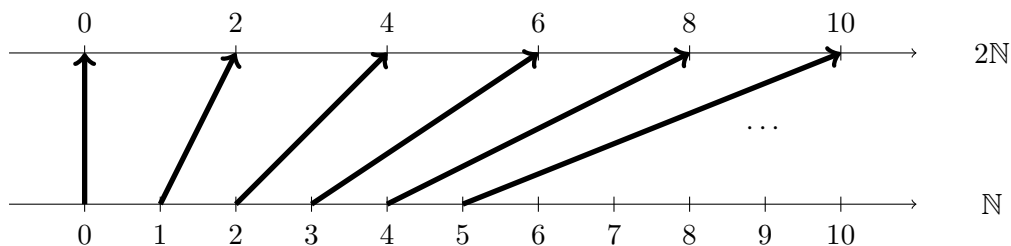
Exemple 5.12. Montrons qu'il existe autant de nombres naturels pairs que de nombres naturels. L'intuition voudrait qu'il y en ait deux fois moins.

On va construire $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ de la façon suivante (avec $2\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres pairs) :

- on associe 0 à 0 ;
- on associe le premier nombre naturel (1) au premier nombre naturel (2). Ainsi, $f(1) = 2$;
- on associe le deuxième nombre naturel (2) au deuxième nombre naturel (4). Ainsi, $f(2) = 4$;
- on procède de manière similaire pour les autres naturels.

On a donc construit l'application $f(n) = 2n$, illustrée sur la figure 5.11.

On remarque que cette application est une bijection. Elle est en effet injective (tous les éléments de $2\mathbb{N}$ sont l'image de maximum un élément de \mathbb{N}) et surjective (tous les éléments de $2\mathbb{N}$ sont l'image d'au moins un élément de \mathbb{N}). Donc, on a $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$. On a associé chaque nombre entier à un nombre pair, et inversement.

FIGURE 5.11 – Bijection entre \mathbb{N} et $2\mathbb{N}$ 

Avec des arguments similaires, on peut montrer que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$, que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$, que $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$, etc. Notez qu'il est possible de montrer que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

5.3 Deux grandes questions

Parfois, les diagrammes en arbre et les règles vues à la section ne suffisent pas pour résoudre un problème de combinatoire, dans la mesure où il n'est pas toujours possible d'encoder toutes les contraintes d'un problème au sein du codage d'une configuration à compter.

En effet, une fois un problème de comptage modélisé, afin d'appliquer un raisonnement correct, il est souvent nécessaire de répondre à deux questions fondamentales, posées sur cette modélisation même.

Questions

1. L'ordre des composantes au sein de la modélisation a-t-il de l'importance ?
2. Des répétitions des composantes au sein de la modélisation sont-elles autorisées ?

On peut répondre à chacune de ces questions positivement ou négativement, ce qui laisse 4 choix de raisonnement possibles dans tous les cas de figure.

Dans le cas du problème 5.1 comptant les codes de vélo, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage a de l'importance. En effet, le vecteur $(2, 3, 4, 5)$ décrit le code « 2345 », qui est différent du code décrit par le vecteur $(3, 2, 4, 5)$, correspondant au code « 3245 ». Permuter les deux premières composantes du vecteur change le code.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage sont autorisées. En effet, le vecteur $(2, 3, 4, 3)$ décrit le code « 2343 » qui est tout à fait légal. Les deuxième et quatrième composantes sont répétées, et ce code peut exister pour un vélo.

Dans le cas du problème 5.2 comptant les mains de bridge, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage n'a pas d'importance. En effet, le vecteur $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$ décrit la main illustrée à la figure 5.12(a), qui est la même main que celle décrite par le vecteur $(3\diamondsuit, 10\clubsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$, illustrée à la figure 5.12(b). Ces deux mains sont les mêmes pour les joueurs, qui d'ailleurs trient habituellement les cartes dans leur main.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage ne sont pas autorisées. En effet, le vecteur $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 10\clubsuit)$ décrit une main qui n'est pas légale, illustrée à la figure 5.13. Il n'y a en effet qu'un exemplaire de chaque carte au sein du paquet, on ne peut donc pas avoir deux 10 de trèfle.

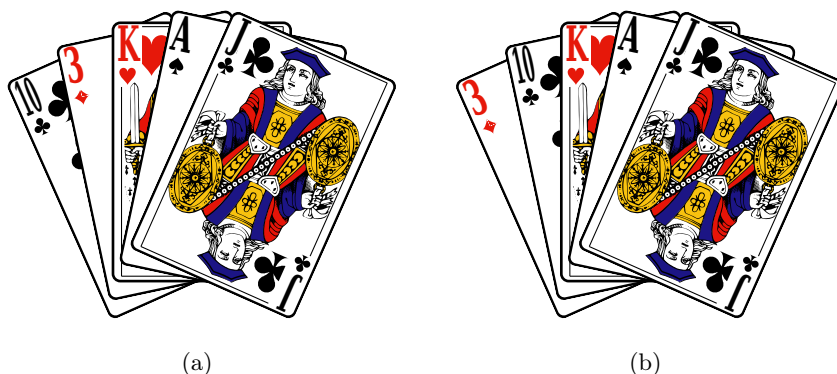


FIGURE 5.12 – Deux mains identiques

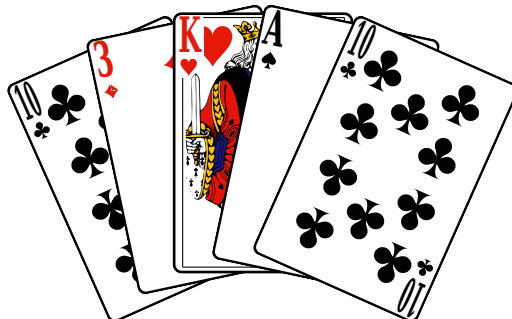


FIGURE 5.13 – Une main illégale

Ces deux questions seront omniprésentes dans la suite de ce chapitre, et on axera tous les raisonnements présentés en fonction des réponses à ses questions.

Notez également que bien que la modélisation des problèmes puisse parfois sembler rébarbative (comme dans le cas ci-dessus), sans elle on ne pourrait pas formellement justifier les réponses à ces deux questions.

Notez toutefois que les formules vues dans les chapitres ne peuvent pas être utilisées en toute généralité en répondant aux deux questions posées ci-dessus. On sera très souvent confronté à des cas particuliers, et il faudra alors adapter les calculs en fonctions de la situation.

Les techniques et raisonnements vus dans les sections suivantes peuvent toutefois être adaptés, en fonction des particularités des problèmes rencontrés.

5.4 Arrangements et permutations

Les arrangements sont le type de structure sur laquelle on appuie un raisonnement dans le cas où l'ordre des composantes au sein d'un codage importe, où l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments importe. On les rencontre par exemple dans la structure des codes de cadenas, les lettres d'un mot de passe, les caractères d'une plaque de voiture, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments a de l'importance.

Plus formellement, on les définit comme suit.

Définition 5.7

Soit S un ensemble, un arrangement de k éléments de S est une séquence ordonnée de k éléments de S .

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre d'arrangements possibles de k éléments pris parmi les n éléments d'un ensemble. Dès lors, comme annoncé, on est amené à distinguer deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

5.4.1 Arrangements sans répétitions

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle d'arrangements sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

Définition 5.8

Soit S un ensemble de n éléments, un arrangement sans répétitions de k éléments de E est une séquence ordonnée de k éléments distincts de E .

Parfois, on qualifie ces arrangements d'arrangements *simples*, d'arrangements de k objets pris parmi n , ou d'arrangements de n objets pris k à k .

Exemple 5.13. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6 :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, d) \quad (a, b, c, e) \quad (b, d, c, e) \quad (e, a, f, d).$$

Comme mentionné dans l'introduction, ce chapitre se concentre sur le comptage de structures, en l'occurrence au sein de cette section le comptage d'arrangements sans répétitions.

Comptons donc à présent *tous* les arrangements de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4 différents. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme dans certaines loteries.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités : a, b, c, d, e ou f . Pour le second objet, nous n'avons plus que 5 possibilités car une possibilité a déjà été prise pour le premier objet. Pour le troisième objet, nous avons 4 possibilités. Et enfin, pour le quatrième objet, il reste 3 possibilités. Ceci donne donc par la règle du produit $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ arrangements sans répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 5.14 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre.

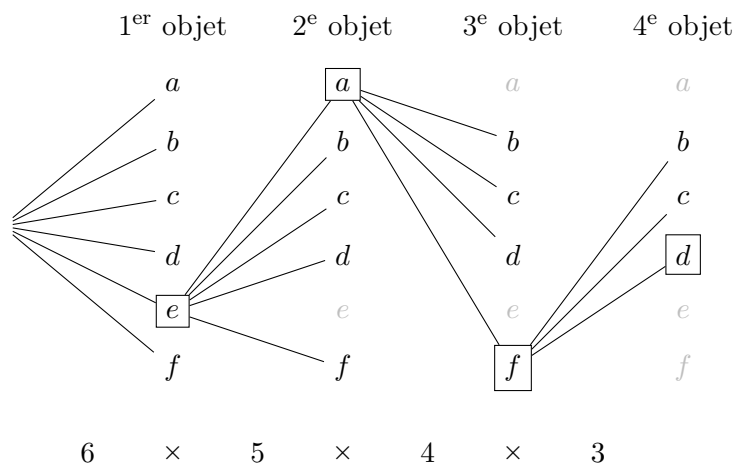


FIGURE 5.14 – Construction du nombre d'arrangements sans répétitions

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements sans répétitions* d'éléments.

Définition 5.9

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements sans répétitions de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté A_n^k et est défini comme

$$\begin{aligned} A_n^k &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

avec $k \leq n$.

La fonction $n!$ est appelée la *factorielle* de n et est définie comme

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par récurrence, on peut également définir A_n^k comme

$$A_n^k = \begin{cases} n \cdot A_{n-1}^{k-1} & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Exemple 5.14. Dix voitures sont au départ d'un rallye. Combien de podiums de trois pilotes est-il possible d'obtenir une fois la course finie, sachant que les *ex-æquo* sont départagés via les tours d'essai. ◀

Solution. Le fait que les *ex-æquo* soient départagés signifie que l'on n'a pas à se soucier du fait que deux pilotes pourraient finir la course en même temps et se retrouver à la même place du podium.

Ainsi, on remarque qu'on doit sélectionner, dans l'ordre, trois pilotes pour un podium. Sachant qu'il y a douze pilotes de voiture, on a donc

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

podiums possibles. ◀

5.4.2 Permutations

On remarque en particulier avec la définition 5.9 que $A_n^n = n!$. Ceci correspond, au vu de la notation, à ordonner n éléments sélectionnés par n éléments. Un tel ordonnancement s'appelle une *permutation*, définie formellement comme suit.

Définition 5.10

Une permutation d'éléments d'un ensemble est une séquence ordonnée d'éléments distincts de cet ensemble.

On remarque qu'une permutation est simplement un cas particulier d'arrangement de n objets pris parmi n objets.

Exemple 5.15. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, les trois n-uples suivants sont des exemples de permutations des éléments de E :

$$(a, b, c, d, e, f) \quad (a, c, b, d, e, f) \quad (a, b, c, e, d, f).$$



Comme les permutations sont un cas particulier d'arrangement, on peut caractériser leur nombre de la façon suivante.

Définition 5.11

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de permutations des n éléments de S est noté P_n et est défini comme

$$P_n = n!,$$

ou encore par récurrence comme

$$P_n = \begin{cases} n \cdot P_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 5.16. Il y a 8 coureurs au départ d'une course d'athlétisme. Combien de classements possibles des coureurs (sans *ex-æquo*) y a-t-il à l'issue de cette course ?



Solution. Le nombre de classements de coureurs possibles est le nombre de permutations de 8 éléments. On a donc $8! = 40\,320$ tels classements possibles. ◀

5.4.3 Arrangement avec répétitions

Dans le cas où l'ordre dans lequel des éléments sont sélectionnés a de l'importance, mais où des répétitions peuvent apparaître, on parle d'*arrangements avec répétitions*. On les définit formellement comme suit.

Définition 5.12

Soit S un ensemble de n éléments, un arrangement avec répétitions de k éléments de S est une séquence ordonnée de k éléments de S .

Remarquez que comparée à la définition 5.9 des arrangements sans répétition, on ne force pas ici les éléments à être distincts, ce qui permet d'avoir des répétitions au sein de la sélection.

Exemple 5.17. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6, avec répétitions potentielles :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, a) \quad (a, b, b, e) \quad (b, e, e, e) \quad (a, a, a, a).$$

Comptons à présent *tous* les arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme par exemple lors de 4 lancers consécutifs de dés à 6 faces.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités : a, b, c, d, e ou f . Pour le second objet, on a toujours 6 choix possibles, car les répétitions sont autorisées. Pour les mêmes raisons, on a également 6 choix possibles pour chacun des tirages restants. Ceci donne donc par la règle du produit $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 5.15 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre. ◀

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements* d'éléments.

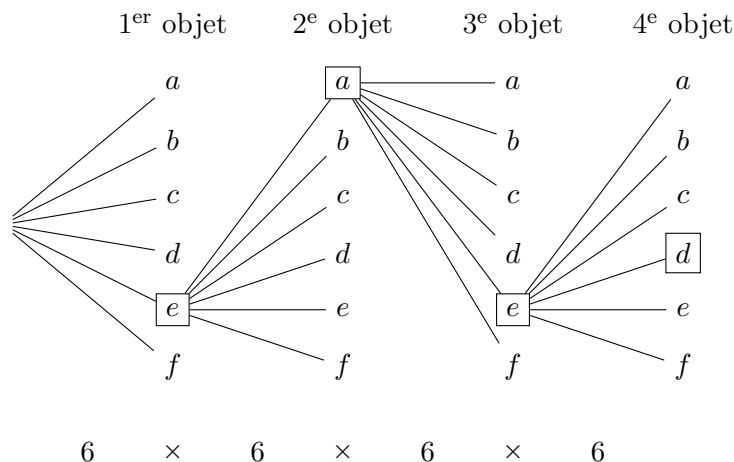


FIGURE 5.15 – Construction du nombre d'arrangements avec répétitions

Définition 5.13

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements avec répétitions de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté α_n^k et est défini comme

$$\alpha_n^k = n^k.$$

Par récurrence, on les définit comme suit :

$$\alpha_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ n \alpha_n^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut à présent résoudre le problème 5.1, demandant de calculer le nombre de codes de vélo à quatre chiffres décimaux.

Solution du problème 5.1 (page 61). Modélisons ce problème sous forme d'un vecteur c à quatre composantes, comme effectué en section 5.1.2. Compter le nombre de codes à quatre chiffres décimaux correspond à compter le nombre de vecteurs $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ tel que $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ avec $1 \leq i \leq 4$. Ce nombre est égal au nombre d'arrangements avec répétitions de 4 éléments sélectionnés parmi 10, c'est à dire $\alpha_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$. \square

5.5 Combinaisons

On a à présent vu tous les cas de figure dans lesquels l'ordre de sélection des éléments pour un tirage importe, et on utilise les arrangements pour ces problèmes. Dans les autres cas, on utilise les *combinaisons*. Plus précisément, on les utilise quand l'ordre des composantes au sein d'un codage n'importe pas, quand l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments dans un tirage est sans importance.

On les rencontre par exemple dans la structure des mains de jeu de cartes, des positions assises autour d'une table ronde, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments n'a pas d'importance.

Plus formellement, on les définit comme suit.

Définition 5.14

Soit S un ensemble, une combinaison de k éléments de S est une séquence non ordonnée de k éléments de S .

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre de combinaisons possibles de k éléments pris parmi les n éléments d'un ensemble. On procédera comme annoncé dans l'introduction et similairement à la section consacrée aux arrangements, c'est-à-dire en distinguant deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

5.5.1 Combinaisons sans répétition

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle de combinaisons sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

Définition 5.15

Soit S un ensemble de n éléments, une combinaison sans répétitions de k éléments de S est une séquence non ordonnée de k éléments distincts de S .

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter toutes les combinaisons

de k objets pris parmi n . On basera le raisonnement permettant de trouver cette quantité sur le problème 5.2, tentant de déterminer le nombre de mains possibles de poker. Basons ce raisonnement sur la modélisation dégagée en section 5.1.

Solution du problème 5.2 (page 61). On doit sélectionner 5 cartes parmi les 52 disponibles. On remarque que l'ordre dans lequel ces cartes sont piochées est sans importance, car la main résultante est la même, comme illustré précédemment à la figure 5.12(b).

Procédons par étapes : supposons que l'ordre importe, il y a donc A_{52}^5 telles pioches possibles. Toutefois, comme l'ordre importe bel et bien, on a compté certaines pioches plusieurs fois. En l'occurrence, pour chaque pioche p de 5 cartes, exactement $5!$ pioches sont équivalentes à p : toutes les permutations de cartes au sein de la main sont équivalentes.

Par exemple, les mains des figures 5.12(a) et 5.12(b) sont équivalentes, on peut obtenir l'une en permutant certaines cartes de l'autre (le dix de trèfle et le trois de carreau).

Dès lors, avec la règle de la division, on a exactement

$$\frac{A_{52}^5}{P_5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = 2\,598\,960$$

mains différentes possibles. □

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle de la division, on peut caractériser le *nombre de combinaisons sans répétitions*.

Définition 5.16

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de combinaisons sans répétitions de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté C_n^k et est défini comme

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

avec $k \leq n$. Par récurrence, on les définit comme suit :

$$C_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \vee k = n \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notez également que ce nombre de combinaison sans répétitions donne en fait le nombre de sous-ensembles de k éléments dans un ensemble de n éléments.

Par ailleurs, parfois, on nomme C_n^k le *coefficient binomial*, et on le note $\binom{n}{k}$.

Exemple 5.18. Combien de délégations différentes de 4 personnes sélectionnées parmi un groupe 50 peut-on constituer ? ◀

Solution. Encodons une délégation comme un vecteur $d = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, où $v_i \in \{1, 2, \dots, 50\}$.

On voit que les répétitions sont interdites dans ce codage, en effet, par exemple, la délégation $(4, 3, 5, 4)$ sélectionnerait la personne numéro 4 deux fois. De plus, l'ordre ici n'importe pas. Par exemple, la délégation $(2, 3, 4, 5)$ est la même que la délégation $(3, 2, 4, 5)$.

On calcule donc le nombre de délégations de 4 personnes sélectionnées parmi 50 comme le nombre de combinaisons sans répétitions $C_{50}^4 = 230\,300$. ◀

On remarque la propriété de symétrie suivante sur les combinaisons.

Propriété 5.17

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

En effet, calculer le nombre de combinaisons possibles pour k objets choisis est équivalent à calculer le nombre de combinaisons pour $n - k$ éléments non choisis.

5.5.2 Binôme de Newton et triangle de Pascal

On peut se servir de la définition par récurrence des combinaisons afin de construire le *triangle de Pascal*. Ce triangle illustre cette construction récursive, en construisant chaque étage sur base de somme d'éléments de l'étage inférieur.

La construction complète de ce triangle est illustrée à la figure 5.16 pour C_n^k , avec n et k allant de 0 à 10.

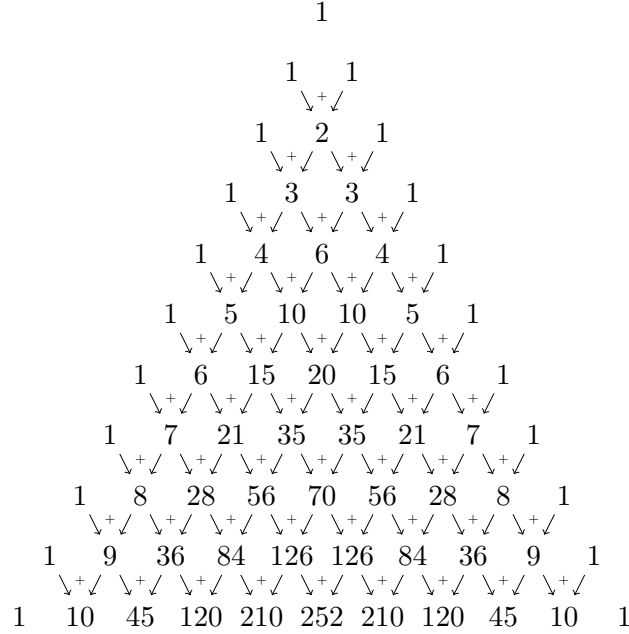


FIGURE 5.16 – Triangle de Pascal

Par ailleurs, le terme *coefficient binomial* vient en mathématiques de l'expression $(a + b)^n$ appelée le *binôme de Newton*. Ils tirent leur nom du fait que leur valeur décrit exactement les coefficients du polynôme $(a + b)^n$, comme illustré par le théorème suivant.

Théorème 5.18 ▶ Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}, \\
 &= b^n + nab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^3 a^3 b^{n-3} + \dots \\
 &\quad + C_n^{n-3} a^{n-3} b^3 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + na^{n-1} b + a^n
 \end{aligned}$$

Cette formule est particulièrement utile lorsqu'on doit calculer la puissance entière positive d'une somme de deux termes. Ainsi, avec $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve immédiatement les formules bien connues

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= b^2 + 2ab^{2-1} + a^2 \\ &= b^2 + 2ab + a^2, \\ (a+b)^3 &= b^3 + 3ab^{3-1} + 3a^{3-1}b + a^3 \\ &= b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3,\end{aligned}$$

en se référant aux 3^e et 4^e lignes du triangle de Pascal de la figure 5.16.

La table 5.1 résume tous les cas vus dans ce documents de sélections de k éléments choisis parmi n éléments, selon que l'ordre dans lequel ces éléments sont sélectionnés importe ou non, et s'il est permis de sélectionner plusieurs fois un même élément.

Type	Répétitions autorisées ?	Ordre importe ?	Formule
Arrangement	Non	Oui	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Combinaison	Non	Non	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Arrangement	Oui	Oui	n^k

TABLE 5.1 – Nombre d'arrangements et de combinaisons avec et sans répétitions

Deuxième partie

Algèbre linéaire

Vecteurs

Concepts de base • Opérations sur les vecteurs

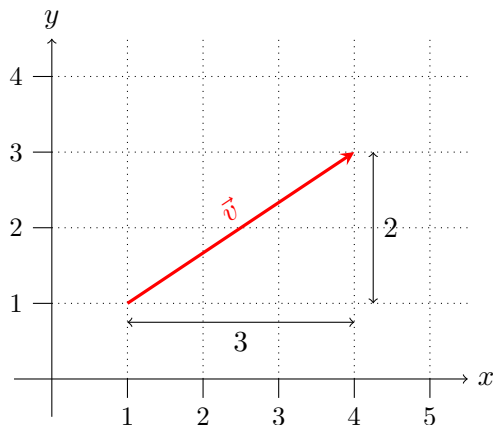
6.1 Concepts de base

Définition 6.1

Un vecteur \vec{v} à n composantes est un n -uplet $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Quand $n = 2$, on représente habituellement un vecteur v dans un plan cartésien comme un segment de droite muni d'une flèche. Dans la suite de ce document, toutes les définitions, propositions et exemples seront énoncés pour $n = 2$, mais peuvent être facilement étendues pour n arbitraire.

Exemple 6.1. Soit $v = (3, 2)$. On peut représenter \vec{v} comme à la figure 6.1. Sur cette figure, on remarque que la première composante décrit un déplacement sur l'axe ox , et la deuxième un déplacement sur l'axe oy .

FIGURE 6.1 – Illustration de $v = (3, 2)$

Notons que, parfois, on note un vecteur en nommant explicitement ses deux extrémités.

Notation 6.1. Soient $A = (a_x, a_y)$ et $B = (b_x, b_y)$, le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

est le vecteur joignant A à B .

Exemple 6.2. Soient $A = (1, 2)$ et $B = (3, 5)$, on a $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 5 - 2) = (2, 3)$.

Propriété 6.2

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on dit que \vec{u} et \vec{v} sont égaux, noté $\vec{u} = \vec{v}$, si et seulement si $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.

En particulier, on remarque que cette définition d'égalité de vecteurs fait abstraction du « départ » d'un vecteur. Par exemple, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^2 illustrés à la figure 6.2 sont égaux. En physique, souvent, la définition de vecteur est étendue pour tenir compte du point d'application d'un vecteur. Ce n'est pas le cas en mathématiques.

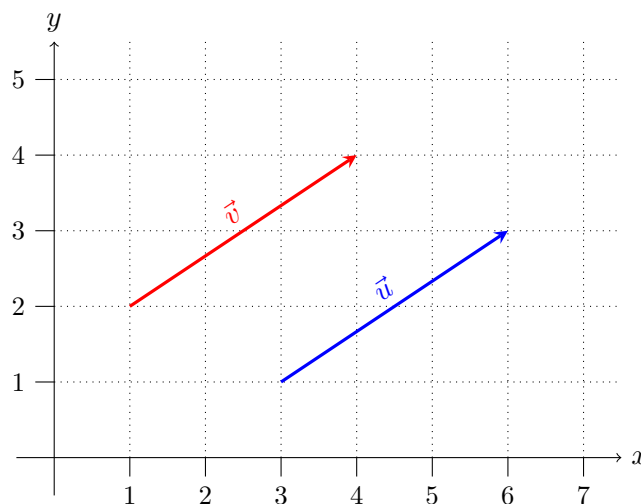


FIGURE 6.2 – Deux vecteurs égaux

Souvent, en plus des composantes d'un vecteur, on veut souvent exprimer sa « magnitude ». Dans \mathbb{R}^2 , cela correspond à trouver la longueur du segment joignant les deux extrémités du vecteur considéré. Par application du théorème de Pythagore, on définit en conséquence la *norme* d'un vecteur comme suit.

Définition 6.3

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit la norme de \vec{v} , notée $\|\vec{v}\|$, comme

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Exemple 6.3. Sur la figure 6.1, on a $\vec{v} = (2, 3)$ et, en conséquence, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. ◀

Notation 6.2. Le *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles. Sa norme est également nulle.

6.2 Opérations sur les vecteurs

Diverses opérations sont définies sur les vecteurs. En particulier, il est possible de les additionner et soustraire. Ainsi, on peut par exemple dire que si des

bûcherons écossais s'entraînent au tir de corde et que l'une équipe tire avec une force de 4 000N et l'autre avec une force de 5 000N, la tension totale dans la corde est de 9 000N, et la résultante de la force est de 1 000N en faveur de la deuxième équipe.

6.2.1 Multiplication par un scalaire

Une opération couramment utilisée dans le cas de calculs vectoriels est la multiplication par un scalaire. Intuitivement, cette opération permet d'augmenter la norme d'un vecteur (sa « grandeur »), sans en modifier la direction¹.

Définition 6.4

Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

En d'autres termes, multiplier un vecteur \vec{v} par un scalaire λ consiste à multiplier chaque composante de \vec{v} par λ .

Exemple 6.4. Soit $\vec{v} = (2, 1)$, on a $3\vec{v} = (2 \cdot 3, 1 \cdot 3) = (6, 3)$. Cette situation est illustrée à la figure 6.3. Similairement, $-\vec{v} = (-2, -1)$. ◀

Par ailleurs, la multiplication scalaire permet de définir la notion de vecteurs « parallèles ». En effet, si deux vecteurs sont parallèles, l'un de ces vecteurs est multiple de l'autre. On dit que de tels vecteurs sont *colinéaires*.

Définition 6.5

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on dit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_0$.

Les vecteurs colinéaires ont une certaine importance dans le cadre de résolution de systèmes. En effet, la notion de linéarité généralise la notion de parallélisme pour des droites. Dans la mesure où des systèmes incluant des droites

1. Par direction, on entend ici le coefficient angulaire de la droite support d'un vecteur, pas le sens de la flèche de la représentation dans le plan.

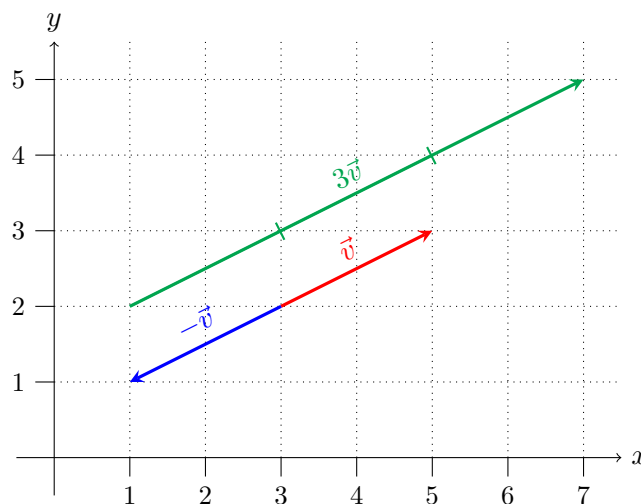


FIGURE 6.3 – Multiplication par un scalaire

parallèles ont rarement une solution, ces configurations sont généralement écartées.

6.2.2 Addition et soustraction

Une autre opération couramment utilisée est l'addition et la soustraction de vecteurs. Ces opérations ont de nombreuses applications, comme en physique où elles permettent, par exemple, de calculer la résultante de forces.

Définition 6.6

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2).$$

Intuitivement, l'addition et la soustraction de vecteurs est effectuée composante par composante. En conséquence, on remarque que la somme de vecteurs est commutative, mais pas la différence.

Exemple 6.5. Soient $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 3)$. On a

- $\vec{u} + \vec{v} = (1 - 1, 2 + 3) = (0, 5),$
- $\vec{u} - \vec{v} = (1 + 1, 2 - 3) = (2, -1).$



Relation de Chasles

Dans le cas des vecteurs de \mathbb{R}^2 , on peut construire géométriquement la somme ou de la différence de deux vecteurs en utilisant la *relation de Chasles*, aussi appelée « règle du parallélogramme ».

L'utilisation de cette règle est illustrée à la figure 6.4. Sur cette figure, on remarque que l'on peut reporter le vecteur \vec{u} à l'extrémité du vecteur \vec{v} , et inversement, afin de former un parallélogramme. L'addition dénote l'une des diagonales, et la différence l'autre diagonale.

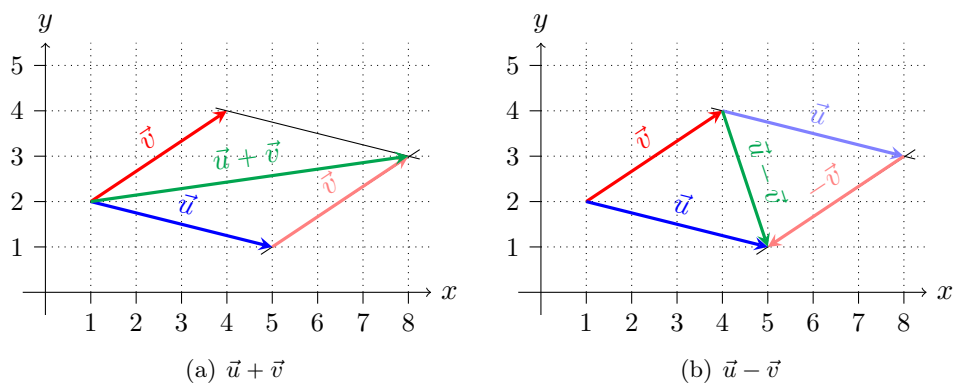


FIGURE 6.4 – Addition et soustraction de vecteurs

On remarque que souvent, en mathématiques, on définit un vecteur comme le résultat de l'addition et multiplication scalaire d'autres vecteurs, par exemple, on peut écrire $\vec{u} = 3\vec{v} - 4\vec{w}$. Une telle écriture est appelée une *combinaison linéaire*.

Définition 6.7

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$, tout vecteur \vec{u} de la forme

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

On dit aussi que \vec{u} dépend linéairement de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. De plus amples informations au sujet de la dépendance et de l'indépendance linéaire seront fournis en section 8.2 du chapitre 7.

6.2.3 Produit scalaire

Finalement, un dernier opérateur de calcul vectoriel est le *produit scalaire*. Cet opérateur a de nombreuses applications en physique et en infographie, entre autres. Contrairement au cas de l'addition, soustraction et multiplication par un scalaire, le résultat d'un produit scalaire n'est pas un vecteur, mais un nombre réel.

Formellement, on définit le produit scalaire comme suit.

Définition 6.8

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et θ l'angle formé entre \vec{u} et \vec{v} , le produit scalaire entre \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini comme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\theta) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Notez ici que l'opérateur « \cdot » entre \vec{u} et \vec{v} , à gauche, n'est pas le même opérateur que le « \cdot » entre $||u||$, $||v||$ et $\cos(\theta)$, à droite. Le premier est un opérateur entre vecteurs, le second entre réels.

Géométriquement, on peut construire le produit scalaire par un système de projection, tel qu'illustré à la figure 6.5.

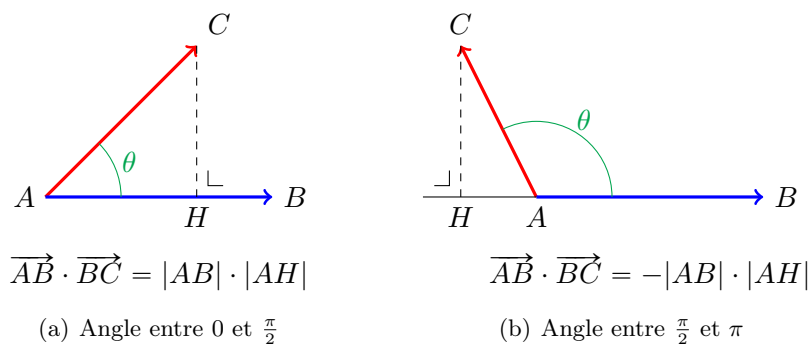


FIGURE 6.5 – Construction géométrique du produit scalaire

Exemple 6.6. Soient $\vec{u} = (0, 3)$ et $\vec{v} = (4, 4)$, illustrés la figure 6.6. On remarque avant tout que l'angle entre \vec{u} et \vec{v} est de $45^\circ = \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 3 \cdot \sqrt{32} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

Similairement, on peut calculer ce produit scalaire comme

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

Cette situation est illustrée à la figure 6.6.



Par ailleurs, on peut dégager une propriété importante de vecteurs *orthogonaux*, c'est-à-dire de vecteurs dont les droites support sont perpendiculaires.

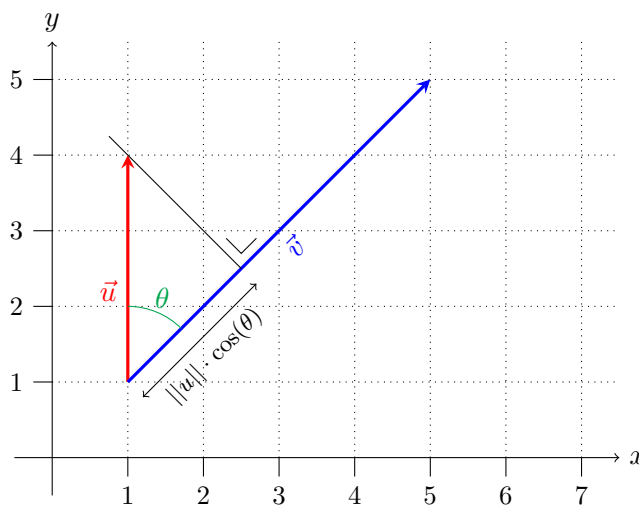


FIGURE 6.6 – Produit scalaire de deux vecteurs

Propriété 6.9

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ orthogonaux, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

En effet, par définition, si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, l'angle formé par ces deux vecteurs est égal à $\frac{\pi}{2}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Matrices

Concepts de base • Opérations matricielles • Déterminant • Inverse de matrice

7.1 Concepts de base

Définition 7.1

Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes.

Les éléments d'une matrice sont souvent des nombres d'un ensemble classique, tel que \mathbb{R} . Le cas échéant, on dit qu'une matrice m de taille $m \times n$ appartient à l'ensemble $\mathbb{R}^{m \times n}$, noté $m \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Notation 7.1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est représentée comme une « boîte » entourées de crochets ou de parenthèses.

On note $A = (a_{ij})$, où a_{ij} dénote l'élément situé à la ligne i et colonne j .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Les éléments a_{ii} sont appelés la *diagonale* de la matrice.

Exemple 7.1. La matrice A illustrée ci-dessous est un exemple de matrice de $\mathbb{R}^{4 \times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 13 & 15 \\ 2 & 11 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 13 & 15 \\ 2 & 11 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$



Dans la suite du cours, on favorise (arbitrairement) la représentation à l'aide de parenthèses.

Notez qu'on donne souvent une appellation spécifique aux matrices aux dimensions particulières :

- une *matrice carrée* est une matrice à n lignes et n colonnes,
- une *matrice ligne* est une matrice à une ligne et n colonnes,
- une *matrice colonne* est une matrice à n lignes et une colonne.

Exemple 7.2. La matrice A est une matrice carrée de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. La matrice B est une matrice ligne de $\mathbb{R}^{1 \times 3}$. La matrice C est une matrice colonne de $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = (\begin{matrix} 7 & 1 & 4 \end{matrix}) \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



La matrice identité est une autre matrice particulière, très importante dans toutes les opérations liées à la multiplication matricielle et aux déterminants, tels que la résolution de systèmes. Elle est définie comme suit.

Définition 7.2

La matrice identité, notée $\mathbf{1}_n$, est la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette matrice est définie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Quand le contexte est clair, on la nomme simplement $\mathbf{1}$.

Exemple 7.3. La matrice ci-dessous est la matrice identité de taille 3×3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La *matrice nulle*, simplement notée 0 , est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Une *matrice diagonale* est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls à l'exception de la diagonale. Une *matrice triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) est une matrice dont tous les éléments inférieurs (resp. supérieurs) à la diagonale sont nuls.

7.2 Opérations matricielles

Il est possible d'effectuer diverses opérations sur les matrices, telles que la somme, la différence, le produit, etc.

7.2.1 Transposition

La transposition d'une matrice est une opération qui effectue une symétrie des éléments par rapport à la diagonale.

Définition 7.3

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la transposée de A , note A^T , est la matrice $(t_{ij}) \in \mathbb{R}$ telle que $t_{ij} = a_{ji}$.

Intuitivement, cette opération peut être obtenue en

- effectuer une symétrie de A sur sa diagonale,
- écrire les lignes de A comme les colonnes de A^T ,
- écrire les colonnes de A comme les lignes de A^T .

Exemple 7.4. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad L^T = (-1 \quad 3 \quad 5)$$



On remarque la propriété suivante sur la transposée des matrices.

Propriété 7.4

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, on a $(A^T)^T = A$.

En effet, échanger deux fois de suite les lignes et colonnes d'une matrice revient à restituer la matrice originale.

7.2.2 Addition, soustraction et multiplication scalaire

L'addition, soustraction et multiplication scalaire de matrices est effectuée naturellement. Dans le cas d'addition (resp. de soustraction), chaque élément de la somme (resp. de la différence) est obtenu en additionnant (resp. en soustrayant) deux à deux les éléments des matrices opérands. Dans le cas de multiplication par un scalaire, on multiplie chaque élément de la matrice par le scalaire considéré.

Définition 7.5

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$A + B = (s_{ij}) \text{ avec } s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A - B = (d_{ij}) \text{ avec } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

$$\lambda A = (p_{ij}) \text{ avec } p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

En remarque en particulier que l'addition et la multiplication par un scalaire de matrices sont des opérations commutatives.

Exemple 7.5. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 8 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+2 & -2+1 & 5-2 \\ -2-2 & 2+1 & 1-4 & -4+8 \\ -6+7 & 7+3 & 9+0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 0-2 & -2-1 & 5+2 \\ -2+2 & 2-1 & 1+4 & -4-8 \\ -6-7 & 7-3 & 9-0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -12 \\ -13 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-6) & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 9 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 10 \\ -4 & 4 & 2 & -8 \\ -12 & 14 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$



7.2.3 Multiplication

Contrairement à l'addition et soustraction, la multiplication matricielle *n'est pas* commutative, et n'est pas effectuée par l'application directe d'une opération entre chaque éléments des termes du produit.

On la définit comme suit.

Définition 7.6

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, le produit matriciel AB est une matrice $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telle que

$$p_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} \cdot b_{qj}.$$

Formulé autrement, l'élément ij du produit AB est égal au produit scalaire entre la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B . Cette situation est illustrée à la figure 7.1. On a, par exemple,

$$p_{12} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \cdot (b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}).$$

Ainsi, si l'on nomme la i^{e} ligne de A comme \vec{l}_i et la j^{e} colonne de B comme \vec{c}_j , on a $p_{ij} = \vec{l}_i \cdot \vec{c}_j$.

Exemple 7.6. Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ et $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a $AB \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ telle que

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ -7 & -15 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}$$



On remarque que la matrice identité est *neutre* pour le produit matriciel, c'est-à-dire que $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A$. Néanmoins, dans le cas général, le produit matriciel *n'est pas* commutatif.

Exemple 7.7. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

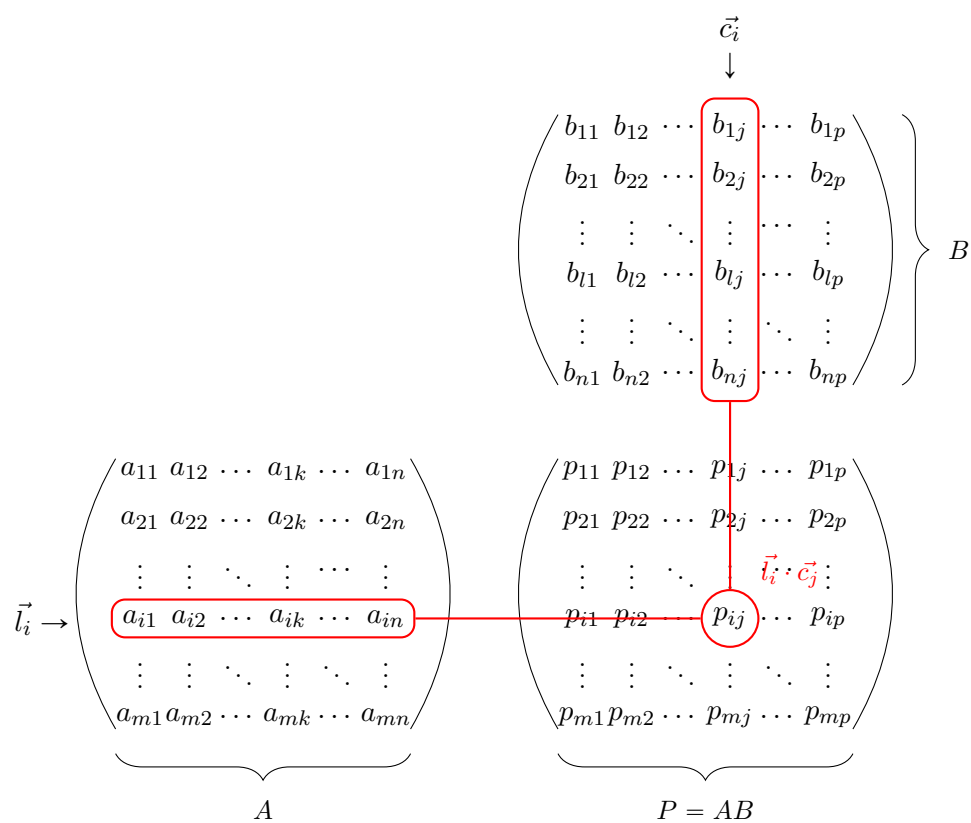


FIGURE 7.1 – Illustration de la multiplication matricielle

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et on remarque clairement que $AB \neq BA$. ◀

7.3 Déterminant

Le *déterminant* d'une matrice carrée est une valeur réelle qui peut être calculée à partir de ses éléments. Les déterminants ont de nombreuses applications en algèbre linéaire, notamment en matière de résolution de systèmes.

Notation 7.2. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det A$ ou $\det(A)$.

On peut également directement noter le déterminant en terme de matrices en substituant les parenthèses par des barres verticales, comme ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ on note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Une définition formelle de déterminant a été formulée par Leibniz et utilise la notion de *permutation* d'un ensemble. Dans la mesure où elle sort du cadre de ce cours, elle n'est pas abordée ici.

On présente néanmoins deux méthodes de calcul de déterminant, l'une immédiate pour les matrices 2×2 et 3×3 , et une récursive pour les matrices de taille supérieure.

7.3.1 Matrices 2×2 et 3×3

Une technique immédiate pour calculer les déterminants de « petites » matrices est d'utiliser la *règle de Sarrus*, un mathématicien français du XIX^e siècle qui présenta ce moyen mnémotechnique.

Définition 7.7 ▶ Règle de Sarrus

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

on a

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{aligned} \det(B) = & b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} \\ & - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

Cette définition est illustrée à la figure 7.2. Sur cette figure, les produits précédés de « + » sont barrés en rouge, ceux précédés de « - » sont barrés en bleu.

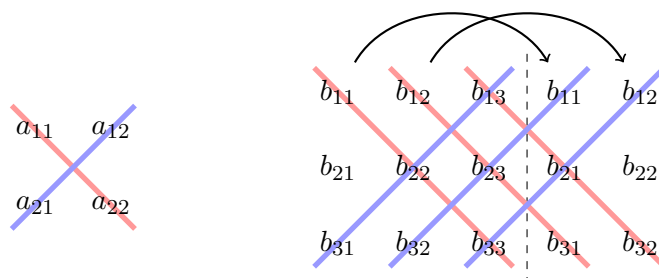


FIGURE 7.2 – Illustration de la règle de Sarrus

7.3.2 Matrices d'ordre supérieur

Les formules présentées dans le cadre des matrices 2×2 et 3×3 ne peuvent pas être « visuellement » étendues aux matrices d'ordre supérieur. Par contre, il est possible de ramener le problème du calcul de déterminant pour des matrices plus grandes aux matrices 3×3 .

Il existe diverses techniques pour cela, tels que *la décomposition de Laplace*, par l'intermédiaire des *mineurs* de la matrice considérée. On peut aussi utiliser *l'élimination de Gauss-Jordan*, qui exploite des propriétés relatives aux déter-

minants pour faciliter le calcul. C'est cette technique qui est privilégiée dans ce cours.

En effet, il est possible de décomposer le calcul de déterminant d'une matrice en calculant le déterminant d'autres matrices. En particulier, les propriétés suivantes sont vérifiées.

Propriété 7.8

Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(A^T), \\ \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B), \\ \det(\lambda A) &= \lambda^n \det(A), \\ \det(A) &= \prod_{i=1}^n a_{ii} \text{ si } A \text{ est triangulaire}\end{aligned}$$

La propriété sur le produit matriciel est particulièrement utile, car elle permet de calculer le déterminant d'un produit sans avoir à calculer le produit en tant que tel.

On note également que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux de cette matrice. En particulier, on remarque donc que $\det(\mathbf{1}) = 1$.

Cette dernière propriété sur le déterminants des matrices triangulaires est particulièrement utile en pratique. En effet, si l'on possède une technique permettant de « transformer » une matrice carrée quelconque en matrice triangulaire, et qu'on l'on peut tracer l'évolution du déterminant à chaque étape, alors il est facile d'obtenir la valeur du déterminant de la matrice d'origine.

Cette technique s'appelle *l'élimination de Gauss-Jordan*. En pratique, la mécanique de cette méthode consiste à chaque étape à additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne. Le déterminant de la matrice résultante est alors affecté comme suit.

Propriété 7.9 ▶ Élimination de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- *permuter deux lignes ou deux colonnes de A multiplie le déterminant par -1 ,*
- *si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$,*
- *ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne ne change pas $\det(A)$,*
- *multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ .*

Chacune de ces transformations peut également être formulée sur les colonnes de A . Notons qu'en pratique, cette technique est *significativement*¹ plus rapide que l'utilisation de la formule de Laplace.

L'objectif de l'élimination de Gauss-Jordan, dans le cadre du calcul de déterminants², est, par une suite d'opérations, de « transformer » la matrice considérée en matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Le déterminant peut ensuite être calculé en multipliant les éléments diagonaux de la matrice.

1. Laplace prend un temps « proportionnel » à $n!$, et l'élimination gaussienne à n^3 .

2. Cette technique a également de nombreuses autres applications en algèbre linéaire.

Exemple 7.8. On a

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{array} \right| & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{array} \\
 &= \left| \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{array} \\
 &= \left| \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{array} \right| & L_4 \leftarrow L_4 + 25L_3 \\
 &= 2 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 29 & \text{car matrice triangulaire} \\
 &= -116
 \end{aligned}$$



Exemple 7.9. On a

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{ccc} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{array} \right| & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{array} \\
 &= \left| \begin{array}{ccc} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 &= 3 \cdot 2 \cdot (-1) & \text{car matrice triangulaire} \\
 &= -6
 \end{aligned}$$



En pratique, transformer une matrice en amenant un maximum de zéros en dessous de la diagonale est appelé *échelonner* une matrice, et la matrice résultante est dite *échelonnée*.

Dans l'exécution de la méthode de Gauss-Jordan, on réfère souvent les éléments que l'on a utilisés comme « repères » et en dessous desquels on a amené des zéros comme des *pivots*. Plus formellement, si une matrice est échelonnée, le premier élément non nul de chaque ligne est appelé un *pivot*, et les colonnes dans lesquelles ces pivots apparaissent sont appelées des *colonnes pivots*.

7.4 Inverse de matrice

Il n'y a pas d'opération de division définie sur les matrices. On parle plutôt d'*inverse* de matrice.

Définition 7.10

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'inverse de A , noté A^{-1} , est l'unique matrice telle que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$$

Seules les matrices A telles que $\det A \neq 0$ possèdent un inverse.

Si une matrice A possède un inverse, on dit que A est *invertible*.

Calculer l'inverse d'une matrice n'est pas aussi immédiat que de calculer une somme ou un produit. Plusieurs méthodes efficaces existent, telles que la méthode de Newton, la décomposition LU, etc. L'élimination de Gauss-Jordan, bien que non optimale, permet également de construire l'inverse de matrice.

Pour cela, on étend une matrice A à droite avec la matrice identité, noté $(A|\mathbb{1})$. On utilise ensuite cette méthode pour « transformer » A en la matrice identité. L'extension du résultat après cette manipulation est A^{-1} (c'est-à-dire, on a obtenu $(\mathbb{1}|A^{-1})$). Cette méthode est souvent appelée *méthode de la matrice adjointe*.

Exemple 7.10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

on calcule A^{-1} de la manière suivante.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_2 & \leftarrow L_2 - 2L_1 & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 - 2 \cdot 1 & 7 - 2 \cdot 3 & 0 - 2 \cdot 1 & 1 - 2 \cdot 0 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ L_1 & \leftarrow L_1 - 3L_2 & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 - 3 \cdot 0 & 3 - 3 \cdot 1 & 1 - 3 \cdot (-2) & 0 - 3 \cdot 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$



On remarque que, comme attendu, cette méthode ne fonctionne pas avec une matrice non inversible (dont le déterminant est nul), comme illustré ci-dessous.

Exemple 7.11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\det A = 6 - 6 = 0$, donc A n'est pas inversible. Si l'on utilise

la méthode de la matrice adjointe, on « est coincé » :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 + 2 \cdot 1 & 6 + 2 \cdot (-3) & 0 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 0 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Comme on a obtenu une ligne nulle par Gauss-Jordan, il n'est plus possible d'obtenir une ligne de la matrice identité (l'objectif à atteindre). La matrice considérée n'est donc pas inversible. ◀

On procède de manière similaire pour les matrices carrées de taille supérieure. En particulier, dans le cadre des matrices 3×3 , on procède de la manière suivante.

Exemple 7.12. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

on calcule A^{-1} de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 & L_3 \leftarrow -L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \\
 & L_1 = L_1 - 2L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$



Ceci conclut la théorie de base relative aux matrices.

Diagonalisation

Résolution de systèmes • Indépendance linéaire • Applications linéaires • Bases et changements de bases • Vecteurs et valeurs propres

Les matrices sont un objet couramment utilisées pour trouver des valeurs satisfaisant un ensemble de contraintes, appelé *système*. Elles sont aussi couramment utilisées en mathématiques, en physique, en infographie, etc., pour modéliser des diverses transformations du plan telles que des translations, des rotations, des dilatations d'un objet.

Ce chapitre présente ces applications au sein d'un concept central, celui de *diagonalisation*. Intuitivement, l'idée de base est de transformer une matrice en un équivalent plus simple, diagonal.

8.1 Résolution de systèmes

Les systèmes d'équations linéaires ont de nombreuses applications pratiques, comme en ingénierie, en optimisation combinatoire, en économie, etc. Ces nombreuses applications motivent les études extensives qui ont été réalisées pour leur

résolution.

Formellement, une *équation linéaire* est une équation d'une ou plusieurs variables qui ne sont pas multiples les unes des autres. Ainsi, un terme x^2 ou xy n'est pas linéaire, et ce genre de cas n'est pas considéré dans cette section. Un *système d'équation linéaires* est une collection d'au moins deux équations linéaires au même ensemble de variables.

Exemple 8.1. Dans une petite fête de village, le tarif d'inscription pour un enfant est de 1,5€, et de 4€ pour un adulte. Sur une journée, 2 200 personnes sont entrées et 5 050€ ont été récoltés. Combien d'adultes et d'enfants sont venus ?

Posons a comme le nombre d'adultes venus à la fête, et e le nombre d'enfants. On sait que comme 2 200 personnes sont venues, on a

$$a + e = 2\,200. \quad (8.1)$$

De plus, chaque adulte rapporte 4€ et chaque enfant 1,5€, comme 5 050€ ont été récoltés, on a

$$4a + \frac{3}{2}e = 5\,050. \quad (8.2)$$

En mettant les informations modélisées dans les équations (8.1) et (8.2), on obtient le système

$$\begin{cases} a + e = 2\,200 \\ 4a + \frac{3}{2}e = 5\,050 \end{cases}$$

Une manière simple de résoudre des systèmes d'équations avec peu de variables est la *substitution* : successivement écrire une variable comme une fonction des autres, et remplacer sa valeur les autres équations du système.

Dans le cas présent, on peut écrire l'équation (8.1) comme $e = 2\,200 - a$.

Ainsi, en substituant la valeur de e dans l'équation 8.2, on a

$$\begin{aligned}
 4a + \frac{3}{2}(2\,200 - a) &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow 4a + \frac{3 \cdot 2\,200}{2} - \frac{3}{2}a &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2}a + 3\,300 &= 5\,050 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2}a &= 1\,750 \\
 \Leftrightarrow a &= 1\,750 \cdot \frac{2}{5} \\
 \Leftrightarrow a &= 700
 \end{aligned}$$

Ainsi, en substituant a par sa valeur dans l'équation (8.1), on a

$$\begin{aligned}
 700 + e &= 2\,200 \\
 \Leftrightarrow e &= 1\,500
 \end{aligned}$$

Et donc 700 adultes et 1 500 enfants sont venus à la fête de village. 

Cette technique de substitution correspond en réalité à l'élimination de Gauss Jordan utilisée dans le cas du calcul de déterminant. En pratique, il est possible de modéliser un système d'équations comme un produit matriciel. Considérons en effet le système

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

On peut écrire les coefficients des variables x et y de ce système sous la forme de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, et ainsi écrire la partie gauche de ce système comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En effet, calculer ce produit résulte en la matrice $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$, et l'égaliser à la matrice des termes indépendants $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ correspond exactement au système original.

Dans le cas du système formé des équations (8.1) et (8.2), on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\,200 \\ 5\,500 \end{pmatrix}}_B$$

Pour procéder par élimination de Gauss-Jordan, augmentons la matrice A du vecteur colonne B , pour obtenir $[A|B]$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 4 & \frac{3}{2} & 5\,500 \end{array} \right)$$

Le but ici est d'obtenir par Gauss-Jordan une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. On a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -3\,750 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\,200 \\ 0 & 1 & 1\,500 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -\frac{2}{5}L_2$$

La dernière ligne de cette matrice donne $e = 1\,500$. En substituant e par sa valeur dans la première ligne, on a $a = 2\,200 - e = 700$. Ces solutions correspondent exactement à la substitution effectuée « à la main » en début de cette section.

8.2 Indépendance linéaire

En pratique, tout système de n équations à n inconnues¹ peut être modélisé comme un tel produit matriciel² $AX = B$ sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

1. On considérera à la fin de cette section les cas de systèmes « non carrés ».

2. Notez que si l'on connaît l'inverse de la matrice A , on peut calculer la solution X de ce système comme $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

On note que, à l'évidence, si deux lignes de ce système sont identiques, le système n'admettra pas une unique solution réelle, dans la mesure où il sera réduit à un système à $n - 1$ équations et à n inconnues. De la même manière, si deux colonnes sont identiques, résoudre le système est souvent impossible dans la mesure où il est réduit à un système à n équations et $n - 1$ inconnues. D'un point de vue théorique, cette remarque implique que deux lignes ou colonnes de A soient identiques, et en conséquence, que $\det A = 0$.

Cette caractérisation des systèmes « impossibles » à résoudre en fonction de la forme de leurs équations sous-jacentes, ou des matrices en fonction de leur déterminant est souvent appelée *l'indépendance linéaire*. Pour rappel, la définition 6.5 (p. 96) introduit le concept de vecteurs *colinéaires*, c'est-à-dire de vecteurs multiples l'un de l'autre. On peut étendre cette définition pour décrire un ensemble de vecteurs comme *linéairement dépendant*.

Définition 8.1

Soit $S = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \subseteq \mathbb{R}^n$, S est dit linéairement dépendant s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}. \quad (8.3)$$

Si une telle écriture n'est pas possible, les vecteurs sont dits linéairement indépendants.

Notons que si au moins l'un de ces scalaires λ n'est pas nul (sans perte de généralité, supposons λ_1), on peut écrire l'équation (8.3) comme

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{v}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{v}_n,$$

c'est-à-dire exprimer \vec{v}_1 comme une combinaison linéaire de $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$.

En conséquence, si l'on considère un système comme une écriture matricielle $AX = B$, et les lignes de la matrice A comme un ensemble de vecteurs appelés *vecteurs lignes*, on peut déduire le théorème suivant.

Théorème 8.2

Soit un système d'équations linéaires $AX = B$ à variables réelles, ce système possède une unique solution si et seulement si

- l'ensemble des vecteurs lignes de A est linéairement indépendant,
- $\det A \neq 0$.

Ces deux propositions sont équivalentes.

Exemple 8.2. Soit le système

$$\begin{cases} x & +3y & -z & = & 2 \\ -2x & +2y & +3z & = & 3 \\ -3x & +7y & +5z & = & 1 \end{cases}$$

Ce système peut être écrit comme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et en notant les lignes A comme \vec{l}_1 , \vec{l}_2 et \vec{l}_3 , on remarque que

$$\begin{aligned} \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 &= (1, 3, -1) + 2 \cdot (-2, 2, 3) \\ &= (-3, 7, 5) \\ &= \vec{l}_3, \end{aligned}$$

et donc, on a pu exprimer l_3 comme une combinaison linéaire de l_1 et l_2 , et donc, par le théorème 8.2, ce système ne possède pas de solution unique.

Alternativement, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 7 \cdot (-1) \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= 10 - 27 + 14 - 6 + 30 - 21 \\ &= 54 - 54 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc, toujours par le théorème 8.2, ce système ne possède pas de solution unique.

Si l'on essaie de résoudre ce système par substitution, par exemple, en isolant x dans la première équation pour obtenir

$$x = 2 - 3y + z. \quad (8.4)$$

En substituant x par sa valeur dans la deuxième et troisième équation, on a

$$\begin{cases} -2(2 - 3y + z) + 2y + 3z = 3 \\ -3(2 - 3y + z) + 7y + 5z = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 8y + z = 7 \\ 16y + 2z = 7 \end{cases}$$

On peut continuer la substitution, mais on remarque que ces équations décrivent les graphes de deux droites parallèles. Elles n'ont donc pas d'intersection, et en conséquence, le système n'admet pas de solution. ◀

Exemple 8.3. Soit le système

$$\begin{cases} x & +3y & -z & = & 2 \\ -2x & +2y & +3z & = & 3 \\ -3x & +7y & +5z & = & 8 \end{cases}$$

Ce système est identique à celui du système de l'exemple 8.2, à l'exception du terme indépendant de la troisième équation. Ainsi, en reprenant les notations de l'exemple 8.2, on a toujours $\vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 = \vec{l}_3$ et $\det(A) = 0$, et donc ce système ne possède pas de solution unique.

En résolvant ce système par substitution, par exemple, en isolant x dans la première équation pour obtenir

$$x = 2 - 3y + z. \quad (8.5)$$

En substituant x par sa valeur dans la deuxième et troisième équation, on a

$$\begin{cases} -2(2 - 3y + z) + 2y + 3z = 3 \\ -3(2 - 3y + z) + 7y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 8y + z = 7 \\ 16y + 2z = 14 \end{cases}$$

On peut continuer la substitution, mais on remarque que ces équations décrivent les graphes de deux droites confondues. La solution de ce système est donc l'ensemble des points de la droite de \mathbb{R}^3 d'équation $8y + z = 7$ (cette droite est parallèle à l'axe ox). Comme annoncé, la solution n'est donc pas unique. ◀

Ce dernier exemple justifie également l'hypothèse de systèmes matriciels de $\mathbb{R}^{n \times n}$. En effet, si la matrice engendrée par le système n'est pas carrée,

- soit il y a plus de variables que d'équations linéairement indépendantes,
- soit il y a plus d'équations linéairement indépendantes que de variables.

Dans le premier cas, deux situations peuvent se produire, illustrées par les exemples 8.2 et 8.3 exprimant un vecteur ligne comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs lignes :

- soit le système n'admet pas de solution, car il se réduit à des équations de courbes sans intersection,
- soit le système possède une infinité de solutions, car il se réduit aux équations de courbes confondues.

Le second cas est illustré ci-dessous.

Exemple 8.4. Soit le système

$$\begin{cases} x & +4y & = & 16 \\ -2x & +y & = & 1 \\ -x & +3y & = & 2 \end{cases}$$

Comme on peut le constater à la figure 8.1, ce système est impossible. En effet, les trois équations du système décrivent le graphe de trois droites, qui ne se coupent pas en un point. Le système n'a donc pas de solution.

Analytiquement, on note que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 4)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1)$ et $\vec{v}_3 = (-1, 3)$ sont linéairement dépendants, car $-5\vec{v}_1 + -7\vec{v}_2 + 9\vec{v}_3 = \vec{0}$. Par le théorème 8.2, le système n'admet pas de solution. ◀

En relation avec le concept d'indépendance linéaire, on introduit le concept de *rang* d'une matrice.

Définition 8.3

Le rang d'une matrice A , noté $\text{rang}(A)$, est le nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants de cette matrice.

À titre de conclusion, on peut donc reformuler le théorème 8.2 de la manière suivante.

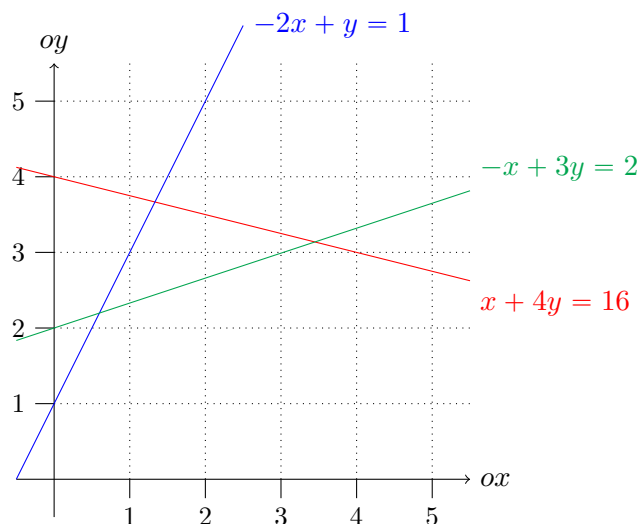


FIGURE 8.1 – Illustration géométrique d'un système

Corollaire 8.4

Soit un système d'équations linéaires $AX = B$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ce système possède une unique solution si et seulement si $\text{rang}(A) = n$.

Les exemples 8.2, 8.3 et 8.4 illustrent le cas où $\text{rang}(A) < n$.

Notez que pour trouver le rang d'une matrice, on peut utiliser la méthode de Gauss-Jordan.

Propriété 8.5

Soit une matrice A échelonnée par la méthode de Gauss-Jordan, le rang de A est égal au nombre de pivots de A .

Exemple 8.5. Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

de l'exemple 8.2. On peut l'échelonner comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 16 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux pivots : le 1 de la première colonne, et le 8 de la deuxième colonne (il n'y a pas de pivot sur la troisième colonne, car la troisième ligne ne contient pas d'élément non nul). On en conclut donc que le rang de A est égal à 2. ◀

Exemple 8.6. Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

de l'exemple 8.2. On peut l'échelonner comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{9}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux pivots : le 1 de la première colonne, et le 9 de la deuxième colonne. On en conclut donc que le rang de A est égal à 2. ◀

8.3 Applications linéaires

Intuitivement, une application linéaire est une transformation d'espace qui fixe l'origine (l'origine ne bouge pas) et préserve les droites (une droite, avant la transformation, est toujours une droite après la transformation). Par exemple, les trois points $(2, 1)$, $(4, 2)$ et $(8, 4)$ sont alignés. Si l'on construit l'image de ces trois points par une symétrie centrale de centre $(0, 0)$, ces trois points sont envoyés respectivement sur $(-2, -1)$, $(-4, -2)$ et $(-8, -4)$: ils sont toujours alignés. Ceci étant vrai pour n'importe quels trois points alignés, c'est donc une application linéaire.

Plus formellement, on définit le concept d'application linéaire comme suit.

Définition 8.6

Une application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n telle que

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^n$,
- quels que soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$,
- quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$.

Ainsi, les application linéaires sont considérées comme des fonctions prenant en paramètre un vecteur et retournant un autre vecteur. Toutefois, on utilisera rarement une notation telle que $f((2, 3))$ pour dénoter l'image du vecteur $(2, 3)$, et on condensera la notation en $f(2, 3)$.

Exemple 8.7. Considérons f définie comme la symétrie centrale de centre $O = (0, 0)$, telle qu'illustrée à la figure 8.2. Par exemple, on a $f(0, 1) = (0, -1)$ et $f(1, 0) = (-1, 0)$. On remarque que $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$, et que

$$f(1, 1) = f((0, 1) + (1, 0)) = (0, -1) + (-1, 0) = (-1, -1).$$

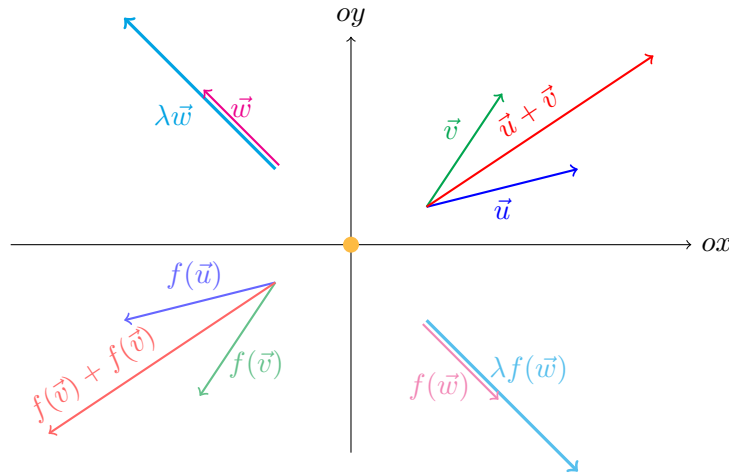


FIGURE 8.2 – Illustration d'une symétrie centrale de centre O


Plus généralement, l'image d'un vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y)$ par cette symétrie est égale à $(-v_x, -v_y)$. De la même manière, l'image de $\vec{u} = (u_x, u_y)$ est égale à

$(-u_x, -u_y)$. Vérifions que $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$. On a

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f((u_x, u_y) + (v_x, v_y)) \\ &= f((u_x + v_x, u_y + v_y)) \\ &= (-u_x - v_x, -u_y - v_y) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

De la même manière, vérifions que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda\vec{w}) = \lambda f(\vec{w})$, pour tout $\vec{w} = (w_x, w_y)$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{w}) &= f(\lambda(w_x, w_y)) \\ &= f((\lambda w_x, \lambda w_y)) \\ &= (-\lambda w_x, -\lambda w_y) \\ &= \lambda f(\vec{w}) \end{aligned}$$

Ces deux points démontrent donc que la symétrie centrale de centre 0 est une application linéaire. 

En pratique, on peut représenter une application linéaire³ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n par une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

En effet, on remarque que lors de lorsque l'on utilise la notation $\vec{v} = (2, 3)$, on exprime \vec{v} comme une combinaison linéaire des vecteurs⁴ $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0)$ et $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)$, sous la forme

$$\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1).$$

En conséquence, on peut également définir une application linéaire⁵ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 en définissant l'image des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$.

Exemple 8.8. Considérons la symétrie orthogonale d'axe $y = -x$. C'est une application linéaire, définie sous forme matricielle comme

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. En toute généralité, on peut représenter une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m par une matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$. Toutefois, dans le cadre de ce cours, on se limitera aux applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , représentées par des matrices carrées.

4. On dit que ces vecteurs forment *une base*. Ce concept est détaillé à la section 8.4.

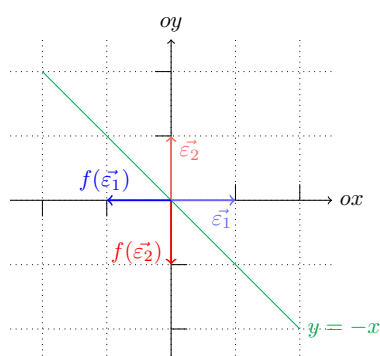
5. Dans le cadre de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , on la définira en fonction de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Calculons les images des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ par cette symétrie. On a

$$f(1, 0) = (0, -1),$$

$$f(0, 1) = (-1, 0),$$

tel qu'illustré à la figure 8.3.



(a) Illustration graphique

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

↓ ↓
 $f(\vec{\varepsilon}_1)$ $f(\vec{\varepsilon}_2)$

(b) Forme matricielle

FIGURE 8.3 – Illustration de la symétrie orthogonale d'axe $y = -x$

On remarque que la matrice S décrit exactement les images des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$, respectivement dans les colonnes 1 et 2. ◀

Sur base de l'exemple ci-dessus, on remarque les points suivants.

Propriété 8.7

Soit une application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n ,

1. on peut en toute généralité définir f sous forme matricielle A en exprimant en colonne l'image des vecteurs $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, etc.,
2. le produit matriciel $A \cdot \vec{v}$ permet de calculer $f(\vec{v})$.

Exemple 8.9. Considérons les applications linéaires suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 :

- A_1 : la symétrie orthogonale d'axe oy ,
- A_2 : la symétrie centrale de centre $(1, 1)$,
- A_3 : la dilatation⁶ de facteur $(2, 3)$,

6. Ces transformations sont aussi appelées rétrécissements, agrandissements ou encore homothéties.

- A_4 : la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (rad) autour de l'origine.

Ces quatre applications linéaires peuvent être exprimées sous forme matricielles comme suit.

- $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $f(1, 0) = (-1, 0)$ et $f(0, 1) = (0, 1)$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ car $f(1, 0) = (-1, 0)$ et $f(0, 1) = (0, -1)$,
- $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ car $f(1, 0) = (2, 0)$ et $f(0, 1) = (0, 3)$,
- $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $f(1, 0) = (0, 1)$ et $f(0, 1) = (-1, 0)$.

Ces applications linéaires sont illustrées à la figure 8.4. ◀

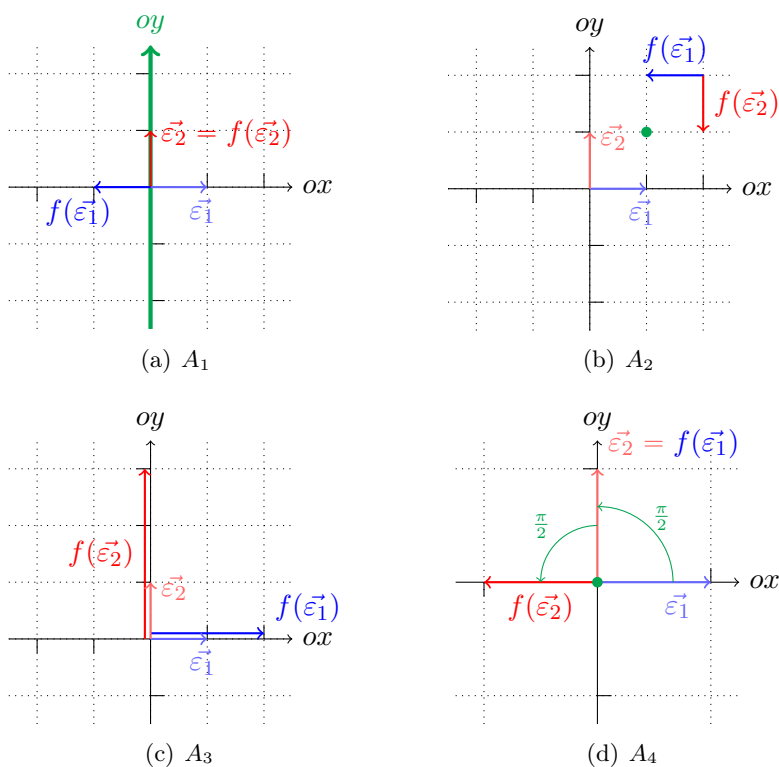


FIGURE 8.4 – Illustration d'applications linéaires

8.4 Bases et changements de bases

On a vu dans la section précédente qu'il était possible de modéliser une application linéaire sous forme matricielle en exprimant en colonne les images des vecteurs $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$. En pratique, cet ensemble de vecteurs est appelé une *base*.

Intuitivement, une base est un ensemble d'éléments permettant de décrire un objet. Par exemple, on utilise souvent la base décimale (la base 10) pour exprimer les nombres. Ainsi, le nombre 2 347 peut être écrit comme

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Dans le cadre concret de \mathbb{R}^2 , on peut exprimer n'importe quel vecteur en fonction des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0)$ et $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)$. Par exemple, le vecteur $\vec{v} = (3, 2)$ peut être défini comme

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 3 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) \\ &= 3\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2.\end{aligned}$$

Cette situation est illustrée à la figure 8.5.

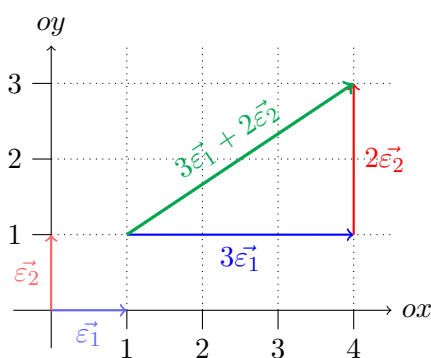


FIGURE 8.5 – Illustration d'une base vectorielle

Formellement, une *base* est un ensemble de vecteurs $\vec{\varepsilon}_i$ linéairement indépendants⁷ qui permet d'exprimer n'importe quel vecteur comme une combinaison linéaire⁸ des $\vec{\varepsilon}_i$. La base particulière de \mathbb{R}^n définie comme $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ où les composantes

7. On dit qu'une base est libre

8. On dit qu'une base est génératrice

de $\vec{\varepsilon}_i$ sont toutes nulles à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ est appelée la *base canonique*. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_1 &= (1, 0, 0), \\ \vec{\varepsilon}_2 &= (0, 1, 0), \\ \vec{\varepsilon}_3 &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Notez que bien que l'écriture d'un vecteur comme une combinaison linéaire d'une base donnée est *unique*, on peut trouver plusieurs bases pour un même espace de vecteurs. Par exemple, les peintres composent souvent leurs couleurs comme une combinaison de magenta, de jaune et de bleu, alors qu'en informatique, il est courant de les exprimer comme une combinaison de rouge, de vert et de bleu.

Notation 8.1. On note ε la base canonique de \mathbb{R}^n .

Ainsi, parfois, il est pratique de changer l'écriture d'un vecteur d'une base vers une autre. En toute généralité, cela signifie que l'on dispose d'un vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ écrit dans la base canonique, que l'on souhaite écrire dans une base ϕ arbitraire.

Notation 8.2. Soit $\phi = \{ \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n \}$ une base de \mathbb{R}^n , on note \vec{v}_ε l'écriture d'un vecteur \vec{v} dans la base canonique et \vec{v}_ϕ l'écriture de \vec{v} dans la base ϕ . Quand le contexte est clair, on notera simplement \vec{v}_ε comme \vec{v} .

Exprimer ainsi un vecteur \vec{v} depuis la base ε vers une base ϕ est effectuer un *changement de base*. Cette opération est une application linéaire, que l'on applique comme suit.

Dans le cadre de \mathbb{R}^2 , supposons que l'on dispose d'un vecteur \vec{v} que l'on souhaite l'écrire dans une base $\phi = \{ \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2 \}$, avec $\vec{\phi}_1 = (\phi_{1,x}, \phi_{1,y})_\varepsilon$ et $\vec{\phi}_2 = (\phi_{2,x}, \phi_{2,y})_\varepsilon$, tel qu'illustré à la figure 8.6.

On sait que l'on pourra écrire $\vec{v} = (v_x, v_y)_\varepsilon$ comme

$$\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2, \tag{8.6}$$

pour certains coefficients λ_1 et λ_2 réels. Cette dernière ligne correspond à l'écriture de \vec{v} dans la base ϕ , au même titre que $\vec{v} = (2, 3)_\varepsilon = 2 \cdot \vec{\varepsilon}_1 + 3 \cdot \vec{\varepsilon}_2$. L'objectif d'un changement de base est de trouver ces coefficients λ_1 et λ_2 .

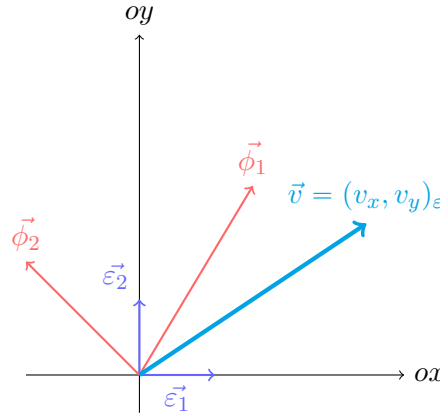


FIGURE 8.6 – Illustration d'un changement de base

On peut poursuivre l'écriture de l'équation (8.6) comme

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \\
 &= (\lambda_1 \phi_{1,x}, \lambda_1 \phi_{1,y}) + (\lambda_2 \phi_{2,x}, \lambda_2 \phi_{2,y}) \\
 &= (\lambda_1 \phi_{1,x} + \lambda_2 \phi_{2,x}, \lambda_1 \phi_{1,y} + \lambda_2 \phi_{2,y}),
 \end{aligned}$$

On peut trouver les inconnues λ_1 et λ_2 par exemple en écrivant cette dernière équation sous forme matricielle, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour trouver λ_1 et λ_2 , il suffit de calculer la matrice inverse de $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}$, tel qu'illustré en section 7.4.

Définition 8.8

On appelle matrice de passage de ϕ à ε la matrice $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}$ et la matrice de passage de ε à ϕ la matrice $\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1}$. Cette définition s'étend facilement aux matrices d'ordre supérieur.

En effet, ces matrices permettent d'exprimer des vecteurs depuis ε vers ϕ , et inversement. Par exemple, soit $\vec{v} = (v_x, v_y)_\varepsilon = (v'_x, v'_y)_\phi$, on a

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Notons que cette définition de matrice de passage dans \mathbb{R}^2 est facilement extensible à \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 , etc.

Exemple 8.10. Considérons le vecteur $\vec{v} = (1, 3)_\varepsilon$, exprimons ce vecteur en fonction de la base⁹ $\phi = \{ (1, 1), (-2, 2) \}$. Cette situation est illustrée à la figure 8.7.

Dans la base ϕ , en posant $\vec{\phi}_1 = (1, 0)_\phi$ et $\vec{\phi}_2 = (0, 1)_\phi$ on sait que $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$, et que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. On échelonne la matrice de la manière suivante, en

9. On ne montrera pas ici que ϕ est une base.

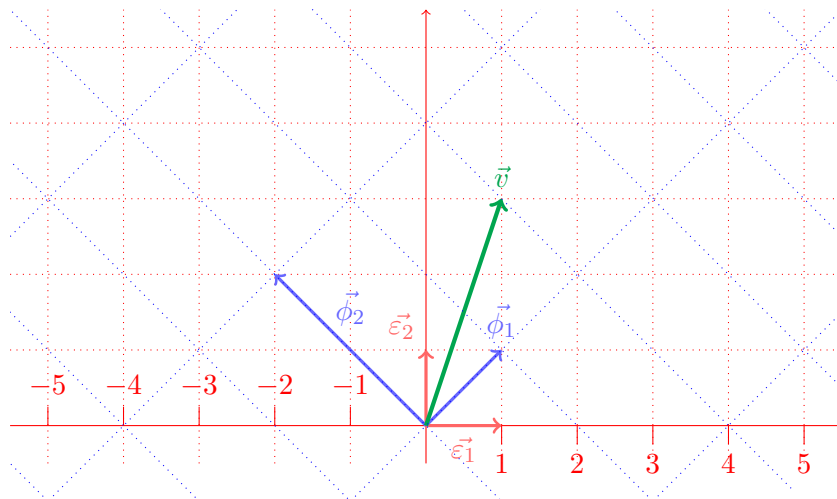


FIGURE 8.7 – Changement de base en pratique

étendant par la matrice identité :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \longrightarrow \frac{1}{4}L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

On a donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On calcule donc λ_1 et λ_2 comme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\vec{\phi}_1 = (1, 0)_\phi$ et $\vec{\phi}_2 = (0, 1)_\phi$ et $\vec{v} = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, on a

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2 \cdot (1, 1)_\varepsilon + \frac{1}{2} \cdot (-2, 2)_\varepsilon \\ &= 2 \cdot (1, 0)_\phi + \frac{1}{2} \cdot (0, 1)_\phi \\ &= \left(2, \frac{1}{2}\right)_\phi\end{aligned}$$

On remarque que cela correspond bien à la construction géométrique illustrée à la figure 8.7.

Par ailleurs, on constate que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est bien la matrice de passage de ε à ϕ : elle permet de calculer l'expression de vecteurs depuis ε vers ϕ , comme on l'a montré avec \vec{v} . À titre d'exemple additionnel, on a

$$\vec{w} = (0, 4)_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1)_\phi,$$

ce qui correspond à la construction géométrique illustrée à la figure 8.7. De la même manière, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est bien la matrice de passage de ϕ à ε : elle permet de calculer l'expression de vecteurs depuis ϕ vers ε , par exemple,

$$\vec{w} = (2, 1)_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = (0, 4)_\varepsilon,$$

comme attendu. ◀

Exemple 8.11. Soit $\vec{v} = (6, 6, 3)_\varepsilon$, exprimons ce vecteur dans la base $\phi = \{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3\}$ telle que

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_1 &= (1, 2, 0)_\varepsilon, \\ \vec{\phi}_2 &= (2, 2, 2)_\varepsilon, \\ \vec{\phi}_3 &= (1, 2, 6)_\varepsilon.\end{aligned}$$

Dans la base ϕ , en posant $\vec{\phi}_1 = (1, 0, 0)_\phi$, $\vec{\phi}_2 = (0, 1, 0)_\phi$ et $\vec{\phi}_3 = (0, 0, 1)_\phi$ on sait que $\vec{v} = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3$, et que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} & \phi_{3,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} & \phi_{3,y} \\ \phi_{1,z} & \phi_{2,z} & \phi_{3,z} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$. On échelonne la matrice de la manière suivante, en étendant par la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

On a donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. On calcule donc λ_1 , λ_2 et λ_3

comme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2})$. On peut le vérifier, car comme $\vec{\phi}_1 = (1, 0, 0)_\phi$, $\vec{\phi}_2 = (0, 1, 0)_\phi$ et $\vec{\phi}_3 = (0, 0, 1)_\phi$, et $\vec{v} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3$, on a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 0)_\varepsilon + 3 \cdot (2, 2, 2)_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 6)_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0)_\phi + 3 \cdot (0, 1, 0)_\phi - \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 1)_\phi \\ &= \left(\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)_\phi \end{aligned}$$



8.5 Vecteurs et valeurs propres

Dans le cadre des applications linéaires, un concept important est celui de *vecteurs propres*. Intuitivement, un vecteur propre est un vecteur dont la direction n'est pas modifiée par l'application linéaire ; mais elle peut modifier sa taille. Le multiplicateur de taille (positif ou négatif) est appelé une valeur propre.

Par ailleurs, dans la section 8.4, on a montré diverses manières d'effectuer des changements de base. Entre autres, on a vu qu'effectuer un changement de base ne change pas les vecteurs en question, mais seulement leur expression. On peut donc se demander s'il existe des changements de base judicieux permettant d'exprimer simplement des applications linéaires ? En particulier, existe-t-il des changements de base particuliers tels que la matrice associée à une application linéaire soit triangulaire, ou mieux, diagonale ?

En pratique, les éléments diagonaux d'une telle matrice diagonale (s'il est possible de la trouver) sont également les valeurs propres de la matrice. Cette section détaille donc comment les calculer, ainsi que les vecteurs propres.

Définition 8.9

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le polynôme $\det(A - \lambda \mathbb{1})$ est appelé le polynôme caractéristique de M .

Exemple 8.12. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, par l'application de la règle de Sarrus,

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) + 2 \cdot (-3) + 0 - 0 - 2(-2-\lambda) - 2 \cdot (-5) \cdot (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 4)(-2-\lambda) - 6 + 4 + 2\lambda + 10 - 10\lambda \\ &= -2\lambda^2 + 10\lambda - 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 8\lambda + 8 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$



Notez que, dans l'exemple ci-dessus, on a pris la peine de factoriser le polynôme ci-dessus, ce qui permet, entre autres, de facilement trouver ses racines.

En effet, les racines du polynôme caractéristique jouent un rôle crucial dans le calcul des vecteurs et valeurs propres d'une matrice. En pratique, ces racines sont les valeurs propres de la matrice considérée.

Définition 8.10

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique de M .

Définition 8.11

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et λ une valeur propre de M , les vecteurs propres $\vec{\lambda}$ associés à la valeur propre λ sont les solutions du système $(M - \lambda \mathbb{1})\vec{\lambda} = 0$.

Exemple 8.13. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(9 - \lambda) - 4 \cdot 4 \cdot (2 - \lambda) \\ = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22$$

Pour calculer les racines de ce polynôme $P(\lambda)$, on peut soit utiliser une formule complexe, soit tester d'autres critères, telle que la règle d'Horner. Dans ce cas précis, en testant les diviseurs entiers de 22, on remarque que

$$P(1) = -1 + 34 - 35 + 22 = 0,$$

et donc que P est divisible par $\lambda - 1$. Ainsi, on a $P(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (a\lambda^2 + b\lambda + c)$. Pour trouver a , b et c , il faut, par exemple, effectuer la division euclidienne, tel qu'illustré en figure 8.8.

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \hline \hline 13\lambda^2 - 35\lambda & \lambda^2 - 13\lambda + 22 \\ -13\lambda^2 + 13\lambda & \hline \hline -22\lambda + 22 & \\ 22\lambda - 22 & \hline \hline 0 & \end{array}$$

FIGURE 8.8 – Division euclidienne du polynôme caractéristique

Ainsi, on a $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 13\lambda + 22)$. En calculant les racines du facteur de droite, on obtient finalement $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 11)$.

Les racines de ce polynôme sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 11$. Ce sont les valeurs propres de M .

Soit $\Lambda_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$. On sait que ce vecteur est solution du système

$$\begin{aligned} (M - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot \vec{\Lambda}_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2y_1 + 4z_1 = 0 \\ 4y_1 + 8z_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2z_1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est $\{ (0, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$. On peut par exemple choisir $\vec{\Lambda}_1 = (0, -2, 1)$ comme solution.

Calculons à présent $\vec{\Lambda}_2 = (x_2, y_2, z_2)$: un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. On sait qu'un tel vecteur est solution du système

$$\begin{aligned} (M - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdot \vec{\Lambda}_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} y_2 + 4z_2 = 0 \\ 4y_2 + 7z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est $\{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$. On peut par exemple choisir $\vec{\Lambda}_2 = (1, 0, 0)$ comme solution.

Calculons finalement $\vec{\Lambda}_3 = (x_3, y_3, z_3)$: un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 11$. On sait que ces vecteurs sont solutions du système

$$\begin{aligned} (M - \lambda_3 \mathbf{1}) \cdot \vec{\Lambda}_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -8y_3 + 4z_3 = 0 \\ 4y_3 - 2z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = \frac{1}{2}z_3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est $\{ (0, \frac{1}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$. On peut par exemple choisir $\vec{\Lambda}_2 = (0, \frac{1}{2}, 1)$ comme solution.

On peut donc conclure en affirmant que $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ admet

- $(0, -2, 1)$ comme vecteur propre de valeur propre 1,
- $(1, 0, 0)$ comme vecteur propre de valeur propre 2,
- $(0, \frac{1}{2}, 1)$ comme vecteur propre de valeur propre 11.



Remarque 8.14. Sur l'exemple précédent, on note que l'on a fait plusieurs choix arbitraires dans la caractérisation des vecteurs propres. Toutefois, les vecteurs propres étant définis à un multiple près, les choix que l'on a fait n'ont pas d'importance : si $\vec{\Lambda} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre, alors $k\vec{\Lambda}$ aussi, avec $k \neq 0$. Notons également que, par définition, un vecteur propre n'est pas nul, on ne peut donc pas faire des choix de valeurs qui vont conduire à cela.

Le théorème suivant permet de trouver une matrice A avec des vecteurs et valeurs propres donnés.

Théorème 8.12

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\vec{\Lambda}_1, \dots, \vec{\Lambda}_n$ les vecteurs propres de A de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$A = LDL^{-1},$$

avec L la matrice définie en mettant en colonne les vecteurs $\vec{\Lambda}_1, \dots, \vec{\Lambda}_n$, et D la matrice diagonale composée des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exemple 8.15. Construisons une matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ admettant

- $(1, 0, 2)$ comme vecteur propre de valeur propre -1 ,
- $(-1, 1, 0)$ comme vecteur propre de valeur propre 0 ,
- $(0, 0, 1)$ comme vecteur propre de valeur propre 1 .

On a $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut construire L^{-1} par échelonnage pour obtenir

$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et on a $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En conséquence, on calcule A comme

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Ceci conclut la section relative aux applications linéaires, vecteurs et valeurs propres, et le chapitre dédié aux matrices.

Troisième partie

Mathématiques continues

Dérivation et intégration

Dérivation • Intégration • Exercices résolus

Le calcul infinitésimal (ou tout simplement, le calcul), est une discipline des mathématique étudiant les changements continus, tels que les variations dans l'image d'une fonction.

On divise habituellement le calcul en deux branches principales : le calcul différentiel et le calcul intégral. Intuitivement, le calcul différentiel dénote les changements instantanés dans les pentes de courbes, alors que le calcul intégral traite d'accumulations de quantités et de surfaces et volumes entre différentes courbes.

On note qu'en pratique, le calcul différentiel est souvent plus facile que le calcul intégral qui peut rarement être résolu symboliquement.

Ce chapitre présente une courte introduction à ces deux disciplines : en section 9.1, on présente une courte introduction à la notion de dérivée, et en section 9.2, on aborde deux techniques de calcul intégral. Comme d'habitude, ce chapitre se termine par des exercices résolus en section 9.3.

9.1 Dérivation

La dérivation et, *a fortiori*, le calcul différentiel, est la discipline des mathématiques qui étudie la vitesse à laquelle des quantités peuvent changer. Le concept principal étudié par cette discipline est la *dérivée de fonctions*, ainsi que leurs applications.

Le processus consistant à trouver la dérivée d'une fonction est appelé la *dérivation*. Géométriquement, comme détaillé à la section 9.1.1, la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de cette fonction en ce point. Par ailleurs, pour les fonctions réelles, la dérivée d'une fonction en un point est également la meilleure approximation linéaire de cette fonction en ce point.

Ce concept de dérivée au sens géométrique de tangente date de l'antiquité grecque, et a été étudiée par des scientifiques tels qu'Euclide, Archimède et Apollonios de Perga [2, 3, 13, 14]. Archimède a également introduit l'usage des infinitésimaux, précurseurs des limites et de la notation petit o , très utilisées en analyse.

Le développement moderne du calcul différentiel est néanmoins formellement introduit par Newton en 1693 et Leibniz en 1684 qui ont indépendamment fondé les bases du calcul différentiel et les dérivées¹.

9.1.1 Définition géométrique

Comme mentionné précédemment, on peut interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.

Définition 9.1

La dérivée d'une fonction en un point est égale à la pente de la droite tangente en ce point au graphe de la fonction.

Notation 9.1. La dérivée d'une fonction f en un point a est notée $f'(a)$.

1. On notera que bien qu'à l'heure actuelle, le crédit de cette découverte soit accordé aux deux auteurs, à l'époque, Newton et Leibniz se sont mutuellement accusés de plagiat, résultant en la division de la société mathématique du 18^e siècle.

Sur base de ces définitions, on peut immédiatement déduire *l'équation de la tangente t* au graphe de f en le point $(a, f(a))$ comme

$$t \equiv f'(a)(x - a) + f(a),$$

car la pente² de t est égale à la dérivée de f en a .

Cette représentation géométrique est illustrée à la figure 9.1.

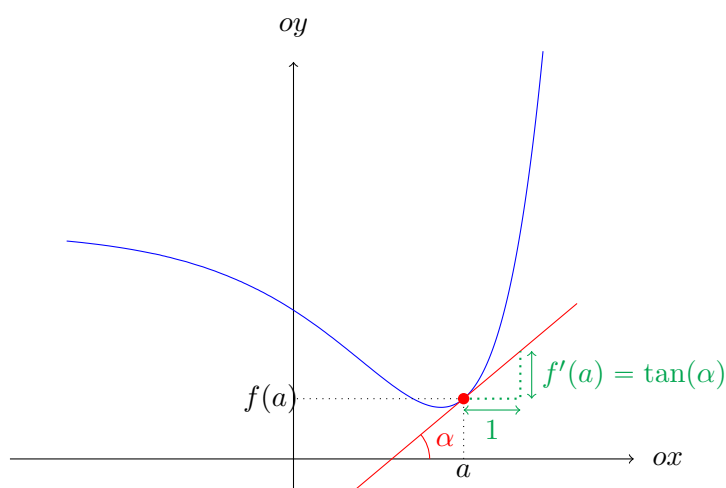


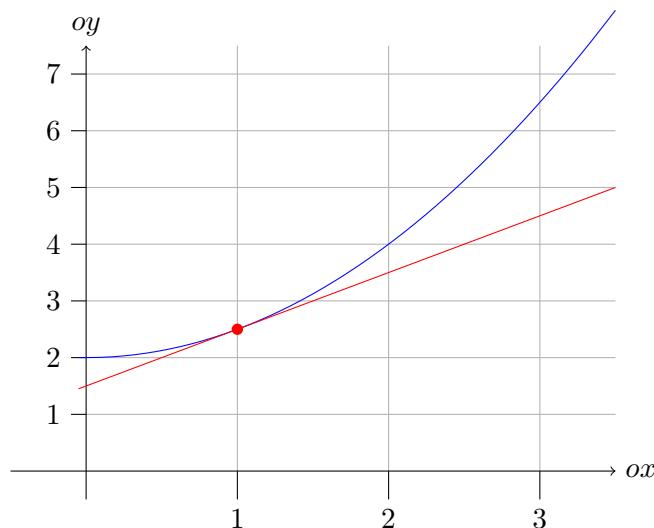
FIGURE 9.1 – Interprétation géométrique de la dérivée

Exemple 9.1. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Calculons sa dérivée en $x = 1$. Pour cela, traçons la tangente t au graphe de f en 1, comme illustré à la figure 9.2.

À l'aide d'un rapporteur, on peut mesurer l'angle de la tangente t par rapport à l'horizontale, on obtient 45° , c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ radians. La tangente de cet angle vaut exactement 1, on en conclut donc que $f'(1) = 1$.

On peut vérifier ce calcul à l'aide de l'équation de la tangente, ou de sa

2. Notons que cette équation n'est valide que si la tangente considérée n'est pas verticale.

FIGURE 9.2 – Construction de la tangente de $\frac{1}{2}x^2 + 2$ en 1

construction via le repère cartésien :

$$\begin{aligned}
 t &\equiv 1 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \\
 &\equiv x - 1 + \frac{1}{2} + 2 \\
 &\equiv x + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$



La représentation géométrique de la dérivée permet de mieux comprendre la notion en elle-même et ses différentes propriétés. Elle permet également de comprendre la liaison entre la dérivée et la variation de la fonction, ce qui est sa principale application dans de nombreuses matières en dehors des mathématiques. Cette intuition sera formalisée à la section suivante.

9.1.2 Définition analytique

On remarque qu'en observant le graphe d'une fonction, on peut rapidement estimer à la fois le signe, la valeur ou l'ordre de grandeur de la dérivée. En effet,

par exemple, si une fonction est croissante sur un intervalle, la tangente sur cet intervalle est une droite croissante. Dès lors, le coefficient directeur de cette droite est positif, et en conséquence la dérivée aussi. Par ailleurs, « au plus une fonction est croissante », au plus grande sera la valeur de sa dérivée.

Toutefois, pour obtenir la valeur précise de la dérivée, il est nécessaire de recourir à un calcul analytique précis, en utilisant la notion de limite préalablement introduite.

Afin d'introduire cette définition, procédons par approximations successives de la tangente. On sait que la dérivée en a d'une fonction est la pente de la tangente en ce point. Supposons que l'on s'écarte d'une courte distance Δx de ce point sur l'axe ox . Ainsi, $a + \Delta x$ représente une valeur « voisine » de a . À cet accroissement sur l'axe ox correspond un accroissement de f sur l'axe oy , noté Δf . On remarque que $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$. Cette situation est illustrée à la figure 9.3.

La pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ est égale à

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Le but étant d'approcher la tangente par des droites de ce type, supposons que l'on diminue Δx en le faisant tendre vers zéro. En procédant de cette manière, le point $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ se rapproche du point $(a, f(a))$ jusqu'à ce que ces deux points soient confondus. En conséquence, la droite passant par les points $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ et $(a, f(a))$ se rapproche de plus en plus de la tangente de f en a , jusqu'à ce que ces deux droites soient également confondues.

Comme la dérivée de f en a est précisément la pente de la tangente et que l'on approche la valeur de cette pente avec ces droites successives, on définit analytiquement la dérivée de f en a comme

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ou encore comme

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (9.1)$$

Si cette limite existe, on dit que f est *dérivable* en a . Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si la limite n'existe pas, par exemple si elle n'a pas la même valeur à gauche qu'à droite de a , on dit que la fonction f n'est *pas dérivable* en a .

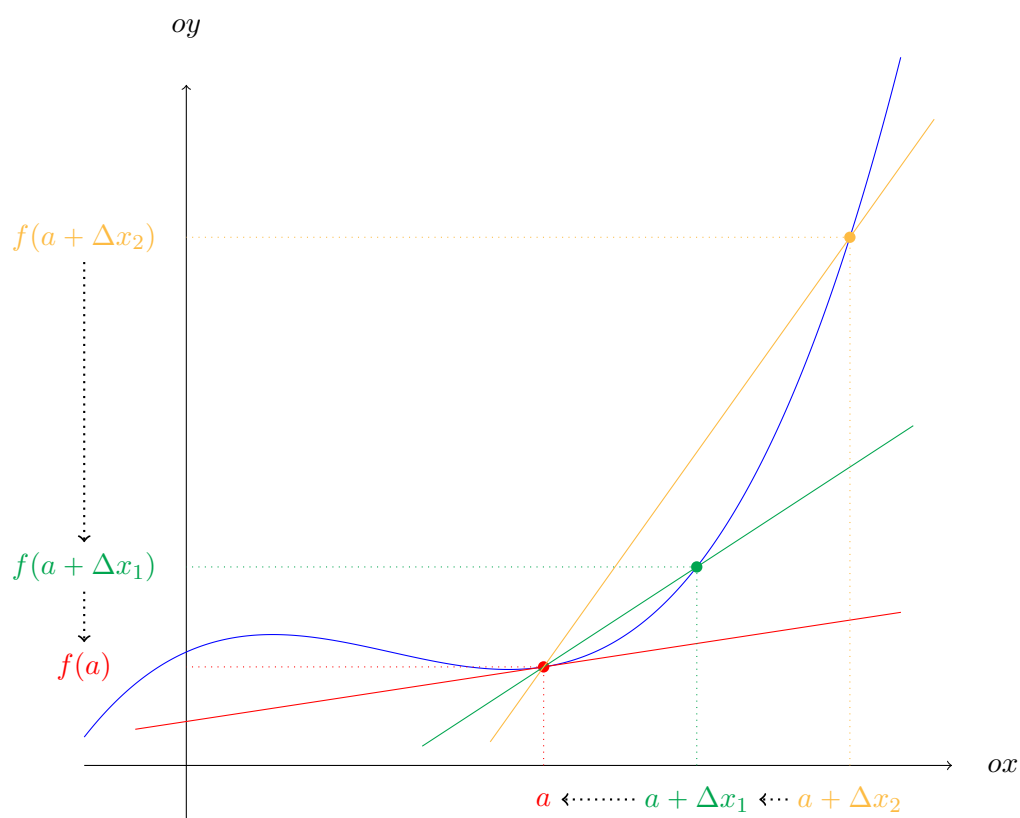


FIGURE 9.3 – Interprétation analytique de la dérivée

Remarque 9.2. Notez qu'une fonction dérivable en a est continue en a , mais la réciproque n'est pas vraie dans le cas général. Par exemple, la fonction $|x|$ est continue sur son domaine, et donc en particulier en zéro, mais n'est pas dérivable en zéro. En effet, en ce point, il y a deux tangentes au graphe de f , respectivement $y = -x$ à gauche, et $y = x$ à droite. Similairement, la fonction $\sqrt[3]{x}$ est continue partout, mais n'est pas dérivable en zéro. En effet, en ce point, la tangente est verticale.

9.1.3 Fonction dérivée

Souvent, lors de la caractérisation d'une fonction, on est amené à définir la dérivée non pas ponctuellement en un point a , mais plus globalement sur un ensemble de valeur. Ainsi, on crée une fonction qui associe à chaque point sur lequel une fonction est dérivable la valeur de la dérivée de cette fonction ce point.

Définition 9.2

Soit f une fonction et $S \subseteq \text{Dom}(f)$ l'ensemble des points sur lesquels f est dérivable. On définit la fonction dérivée de f comme

$$f' : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x).$$

Sur base de cette définition, on peut définir les fonctions dérivées de plusieurs fonctions élémentaires. La table 9.1 détaille les valeurs de ces fonctions.

Par ailleurs, il est possible de définir la dérivée de fonctions construites sur bases de « sous-fonctions » à l'aide de ces définitions. En particulier, soit f et g des fonctions dérivables et $a \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :

— Dérivée d'une somme de fonctions :

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (9.2)$$

— Dérivée du multiple d'une fonction :

$$(a f(x))' = a f'(x) \quad (9.3)$$

— Dérivée d'un produit de fonctions :

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \quad (9.4)$$

$f(x)$	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
a (constante réelle)	\mathbb{R}	0
x^n ($n \neq 0$)	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0 \\ \mathbb{R}_0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$	$n x^{n-1}$
$\sum_{i=0}^n a_i x^i$ (polynôme)	\mathbb{R}	$\sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1}$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$\cos(x)$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	\mathbb{R}^+	$\frac{1}{x}$
e^x	\mathbb{R}	e^x
a^x	\mathbb{R}	$\ln(a) \cdot a^x$

TABLE 9.1 – Dérivées des fonctions élémentaires

— Dérivée d'un quotient de fonctions :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (9.5)$$

— Dérivée des fonctions composées :

$$\left(g(f(x)) \right)' = g'(f(x)) f'(x) \quad (9.6)$$

La dernière formule est particulièrement importante, et permet de dériver n'importe quelle combinaison de fonctions.

Exemple 9.3. Les lignes suivantes illustrent plusieurs fonctions ainsi que le calcul de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 4)' &= (x^2)' + (3x)' + (4)' \\ &= 2x + 3 \cdot (x)' + 0 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \\
 &= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 \cos(3x))' &= (x^2)' \cos(3x) + x^2 (\cos(3x))' \\
 &= 2x \cos(3x) + x^2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot (3x)' \\
 &= 2x \cos(3x) - 3x^2 \sin(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' &= \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{1(x-2) - (x+1)1}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} \\
 &= -\frac{3}{(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\right)' &= (e^{\frac{x}{2}})' \sin(3x) + e^{\frac{x}{2}} (\sin(3x))' \\
 &= e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \sin(3x) + e^{\frac{x}{2}} \cos(3x) \cdot (3x)' \\
 &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \sin(3x) + 3e^{\frac{x}{2}} \cos(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[3]{\cos(x^2+1)}\right)' &= -\frac{2x \sin(x^2+1)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^2+1)}} \\
 &= \left(\cos^{\frac{1}{3}}(x^2+1)\right)' \\
 &= \frac{1}{3} \cos^{\frac{1}{3}-1}(x^2+1) \cdot (\cos(x^2+1))' \\
 &= \frac{-\sin(x^2+1) \cdot (x^2+1)'}{3 \cos^{\frac{2}{3}}(x^2+1)} \\
 &= -\frac{2x \sin(x^2+1)}{3 \cos^{\frac{2}{3}}(x^2+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\ln(\sin(x^3)))' &= \frac{1}{\sin(x^3)} \cdot (\sin(x^3))' \\
 &= \frac{\cos(x^3) \cdot (x^3)'}{\sin(x^3)} \\
 &= \frac{x^2 \cos(x^3)}{\sin(x^3)}
 \end{aligned}$$



9.1.4 Dérivées d'ordre supérieurs et applications des dérivées

Outre les approximations linéaires, les dérivées ont de nombreuses applications, pratiques comme théoriques. De plus, parfois, il est nécessaire de dériver plusieurs fois une même fonction afin d'obtenir la caractéristique désirée.

Ainsi, on parle de dérivée d'ordre n d'une fonction f la n^{e} dérivation successive d'une fonction f . En particulier, la dérivée d'ordre 1, aussi appelée *dérivée première*, est le résultat d'une unique étape de dérivation. C'est le concept avec lequel on a travaillé jusqu'à présent. De la même manière, la dérivée d'ordre 2 de f , aussi appelée la dérivée seconde de f , est le résultat de deux étapes de dérivation successives.

Notons que parfois, la littérature dévie de la notation f' pour désigner les dérivées. Ainsi, on rencontre des notations telles que

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)$$

Cette *notation différentielle* de la dérivée est utile dans le cas de fonctions de plusieurs variables, car elle indique explicitement par rapport à quelle variable on dérive. Pour cette raison, on parle souvent de *dérivée partielle*.

Pour les dérivées d'ordre supérieur, la notation différentielle est la suivante :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f(x)$$

Les sections suivantes détaillent les applications à la fois théoriques et pratiques de ces dérivées. Les dérivées d'ordre supérieur à deux ont principalement des applications dans les approximations de fonctions par des séries, telles que les séries de Taylor, de Fourier et de Maclaurin.

Dérivée première

Comme mentionné précédemment, la dérivée première est liée à la croissance et décroissance d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses extrema locaux. Pour rappel, un *extremum* est soit un *minimum* soit un *maximum*.

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

- si, quel que soit $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I ;
- si, quel que soit $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I ;
- si $f'(a) = 0$ et que $f'(x)$ change de signe au voisinage de a , alors a est un extremum de f .

On comprend très bien ces propriétés en dessinant différents graphiques de fonctions et en regardant le comportement de la tangente à ces différentes courbes. Ces propriétés sont illustrées en mêmes temps que celles liées à la concavité dans des tableaux de variations à la table 9.2.

Dérivée seconde

Si la dérivée f' d'une fonction f est elle-même dérivable, sa dérivée s'appelle dérivée seconde de f et est notée f'' . La dérivée seconde est liée au *sens de concavité* d'une fonction, ainsi qu'à la détermination de ses *points d'inflexion*. Pour rappel, un point d'inflexion est un point du graphique où celui-ci change de concavité.

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son domaine de définition et de dérivabilité. Alors :

- si, quel que soit $x \in I$, $f''(x) > 0$, alors le graphe de f tourne sa concavité vers le haut ;
- si, quel que soit $x \in I$, $f''(x) < 0$, alors le graphe de f tourne sa concavité vers le bas ;
- si $f''(a) = 0$ et $f''(x)$ change de signe au voisinage de a , alors f a un point d'inflexion en a .

Pour comprendre ces propriétés, on procède comme précédemment en se rappelant que la dérivée seconde de f est la dérivée première de $f'(x)$. Les différents

cas de figure sont résumés dans les *tableaux de variation* illustrés à la table 9.2.

x	a		
$f'(x)$	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	minimum en $(a, f(a))$	↗

x	a		
$f'(x)$	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−
$f(x)$	↗	maximum en $(a, f(a))$	↘

x	a		
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	point d'inflexion en $(a, f(a))$	↗

x	a		
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	↗	point d'inflexion en $(a, f(a))$	↗

x	a		
$f'(x)$	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↘	point d'inflexion en $(a, f(a))$	↘

x	a		
$f'(x)$	−	−	−
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	point d'inflexion en $(a, f(a))$	↘

TABLE 9.2 – Différents cas de tableaux de variations

Exemple 9.4. Étudions la fonction $f(x) = x^3 - x$, en caractérisant ses racines, sa croissante, ses maxima et minima, sa concavité et ses points d'inflexion.

Cette fonction admet une racine quand

$$\begin{aligned}
 x^3 - x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

et donc quand $x = 0$, ou $x = 1$, ou $x = -1$. Elle admet donc trois racines réelles.

En ce qui concerne sa croissante, il caractériser le signe de la dérivée. La fonction possède un extremum quand $f'(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

De plus, on remarque que comme $f'(x)$ décrit le graphe d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$, on a

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ f'(x) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en conclut que $f(x)$ est décroissante quand $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, et croissante sinon, et qu'elle admet un maximum en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, et un minimum en $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dans le cadre de la concavité, il faut caractériser le signe de la dérivée seconde. La fonction possède un point d'inflexion quand $f''(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Comme $f''(x)$ décrit le coefficient d'une droite au coefficient directeur positif, on a $f''(x) > 0$ quand $x > 0$, et $f''(x) < 0$ quand $x < 0$. On en conclut que $f(x)$ a une concavité tournée vers le bas³ quand $x < 0$, et une concavité tournée vers le haut⁴ quand $x > 0$, et qu'elle admet un point d'inflexion en $x = 0$.

On peut résumer ces informations dans le tableau de variation illustré à la table 9.3. La fonction est quand à elle illustrée à la figure 9.4. ◀

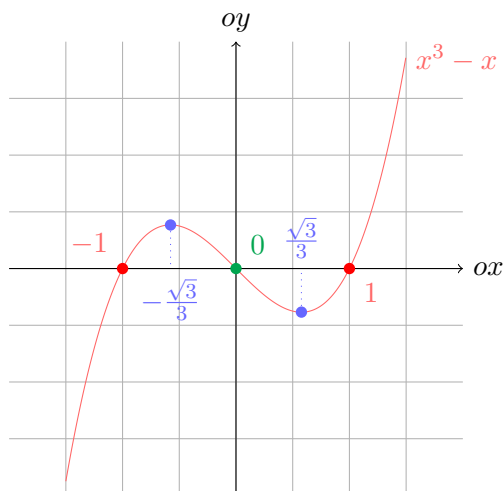
x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	Max	↘	Pt. Infl.	↘	Min	↗

TABLE 9.3 – Tableau de variation de $f(x) = x^3 - x$

Exemples d'applications pratiques

Au vu de ce qui a été présenté précédemment, on remarque que la dérivée première permet de trouver exhaustivement l'ensemble des extrema locaux d'une

3. Dans le sens contraire de l'axe oy
 4. Dans le sens de l'axe oy

FIGURE 9.4 – Graphe de $f(x) = x^3 - x$

fonction, sous réserve que l'on soit capable d'en calculer ses racines. Cet état de fait permet de résoudre des problèmes d'optimisation simples basés sur des fonctions dérivables.

Le principe de base d'un tel problème est de trouver une solution à profit maximum, ou à coût minimum, sur base de la maximisation ou minimisation d'une fonction dérivable.

Notons qu'en général, les problèmes d'optimisation sont plus complexes que ceux que présentés ici, dans le sens où ils ne s'appliquent pas nécessairement à des fonctions dérivables, qu'ils sont soumis à des contraintes, qu'ils sont multivariés et que ces variables sont parfois discrètes. Ces problèmes font partie de ce qu'on appelle *l'optimisation combinatoire*, qui est une discipline mathématique à part entière.

Ainsi, on se restreindra dans le cadre de ce cours à des problèmes simples monovariés continus, sans contraintes, appliqués à des fonctions dérivables.

Exemple 9.5. Un paysagiste dispose d'une bâche rectangulaire de largeur l et de longueur L , et souhaite l'utiliser pour étanchéifier le fond d'un étang parallélogrammique. Pour cela, il décide de découper quatre carrés isométriques aux coins de sa bâche, et de former le fond par pliage. Quelle longueur de côté doit-il choisir pour les carrés afin de maximiser le volume de l'étang ? ◀

Solution. Avant tout, représentons la situations à l'aide d'un dessin, comme illustré à la figure 9.5.

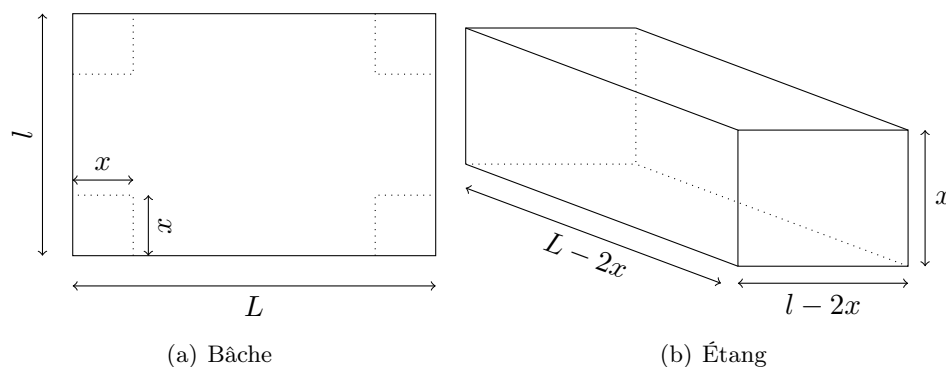


FIGURE 9.5 – Illustration de la construction de l'étang

On remarque que le volume V de cet étang est défini comme

$$\begin{aligned}
 V &= x(l - 2x)(L - 2x) \\
 &= (xl - 2x^2)(L - 2x) \\
 &= xlL - 2x^2l - 2x^2L + 4x^3 \\
 &= 4x^3 - (2l + 2L)x^2 + (lL)x
 \end{aligned}$$

On cherche la valeur à donner à x afin de maximiser V . On remarque que $V(x)$ est une fonction dérivable, et donc que calculer les racines de sa dérivée première va fournir une liste des extrema de V . Si l'un de ces extrema correspond à un maximum, on aura trouvé la valeur à donner à x .

La dérivée $V'(x)$ de $V(x)$ est définie comme

$$\begin{aligned}
 V'(x) &= 12x^2 - 2(2l + 2L)x + lL \\
 &= 12x^2 - (4l + 4L)x + lL
 \end{aligned}$$

Cette équation décrit un polynôme de degré deux, dont on est capable de

calculer les racines. On a

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (4l + 4L)^2 - 4 \cdot 12 \cdot lL \\
 &= 16l^2 + 16L^2 + 32lL - 48lL \\
 &= 16l^2 + 16L^2 - 16lL \\
 &= 16(l^2 + L^2 - lL)
 \end{aligned}$$

On remarque que comme $\Delta > 0$, $V'(x)$ admet systématiquement deux racines. Ces racines sont décrites comme

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{4l + 4L + 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24} \\
 x_2 &= \frac{4l + 4L - 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24}
 \end{aligned}$$

Ce sont ces valeurs de x qui permettent de maximiser le volume de l'étang. Comme $x_1 > x_2 > 0$, on peut établir le tableau de variation illustré à la table 9.4 sur base de $V'(x)$.

x	x_2		x_1	
$V'(x)$	+	0	-	0
$V(x)$	↗	Max	↘	Min

TABLE 9.4 – tableau de variation de $V(x)$



En considérant ce tableau de variation, on remarque qu'on doit poser

$$x = x_2 = \frac{4l + 4L - 4\sqrt{l^2 + L^2 - lL}}{24}.$$

Exemple 9.6. Un étudiant assoiffé mais prudent aperçoit un bar à 20 mètres de l'autre côté de la route large de 6m sur laquelle il se situe. Sachant qu'il traverse la route à une vitesse de 0.2 Dm/s et qu'il court sur le trottoir à une vitesse de 0.25 Dm/s, à quel endroit doit-il rejoindre l'autre bord de la route pour pouvoir obtenir une bière bien fraîche au plus vite, et combien de temps cela lui prend-il ?



Solution. Commençons avant tout par représenter la situation par un dessin, comme illustré à la figure 9.6. Au vu de ce problème, on doit minimiser le temps nécessaire à l'étudiant pour se désaltérer.

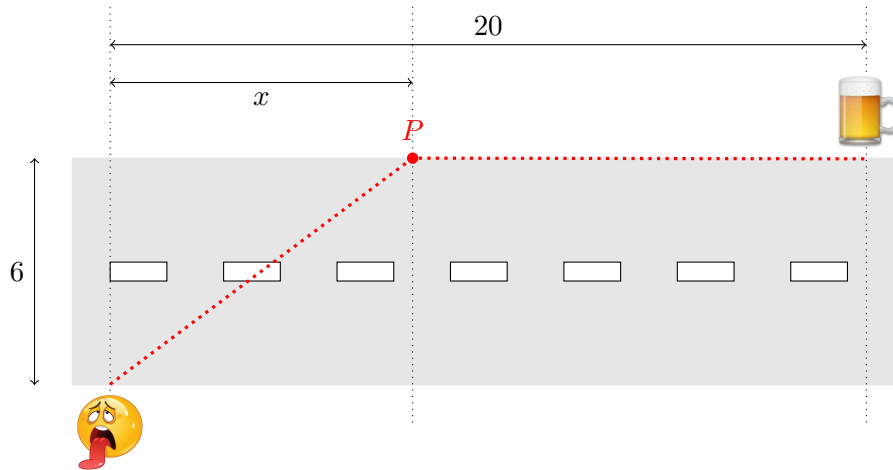


FIGURE 9.6 – Un étudiant assoiffé au bord d'une route aperçoit un bar

Ce temps est égal au temps nécessaire pour rejoindre P , l'endroit où il a atteint l'autre bord de la route, plus le temps nécessaire pour rejoindre le bar depuis P . Comme les vitesses de traversée de la route v_T et de course sur le trottoir v_R sont constantes, on sait que le temps t mis pour parcourir une distance d à une vitesse v est égal à $\frac{d}{v}$.

Il faut donc caractériser la distance $|PS|$ entre l'étudiant et P , ainsi que la distance $|PB|$ entre P et le bar afin de pouvoir définir le temps mis par l'étudiant pour atteindre le bar. Clairement, la distance entre P et le bar est égale à $20 - x$. Par ailleurs, par application du théorème de Pythagore, la distance entre l'étudiant et P est égale à $\sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2}$.

Dès lors, le temps $t(x)$ nécessaire pour atteindre le bar pour l'étudiant est égal à

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{|PS|}{v_T} + \frac{|PB|}{v_R} \\ &= 5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x) \end{aligned}$$

Il faut donc trouver à présent quelle valeur donner à x afin de minimiser $t(x)$. Utilisons la dérivée de $t(x)$ pour cela, et tentons de l'annuler. Ainsi, on aura une caractérisation des points pour lesquels $t(x)$ admet un extremum.

On a

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{5}{2}(36 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 \\ &= \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4 \end{aligned}$$

Cette fonction admet un extremum potentiel quand elle s'annule, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned} t'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36 + x^2} \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 16(36 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 25x^2 = 576 + 16x^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 = 576 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

On ne doit pas considérer la racine $x = -8$ car x est une grandeur positive.

En construisant le tableau de variation de $t(x)$ comme illustré à la table 9.5, on remarque que le temps est bel et bien minimum quand l'étudiant traverse en diagonale à huit mètres en face de la route, en direction du bar.

x	8		
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	\searrow	Min	\nearrow

TABLE 9.5 – tableau de variation de $V(x)$

Par ailleurs, il met exactement

$$t(8) = 5\sqrt{36 + 64} + 4 \cdot 12 = 50 + 48 = 98$$

dixièmes⁵ de secondes pour atteindre le bar. ◀

9.2 Intégration

L'intégration est l'étude et la détermination des *intégrales*, des fonctions permettant de calculer des déplacements, des aires, des volumes et autres concepts nécessitant l'intervention de quantités infinitésimales. L'intégration est l'une des deux composantes principales du calcul fonctionnel, avec la dérivation vue précédemment.

Les intégrales ont une part prépondérante en physique, en probabilités, en économie, etc. Au même titre que la dérivation, les principes des intégrales ont été posés par Newton et Leibniz au XVII^e siècle, qui ont introduits les intégrales comme la somme des rectangles de largeur infinitésimales situés entre le graphe d'une fonction et l'axe ox , comme illustré à la figure 9.7.

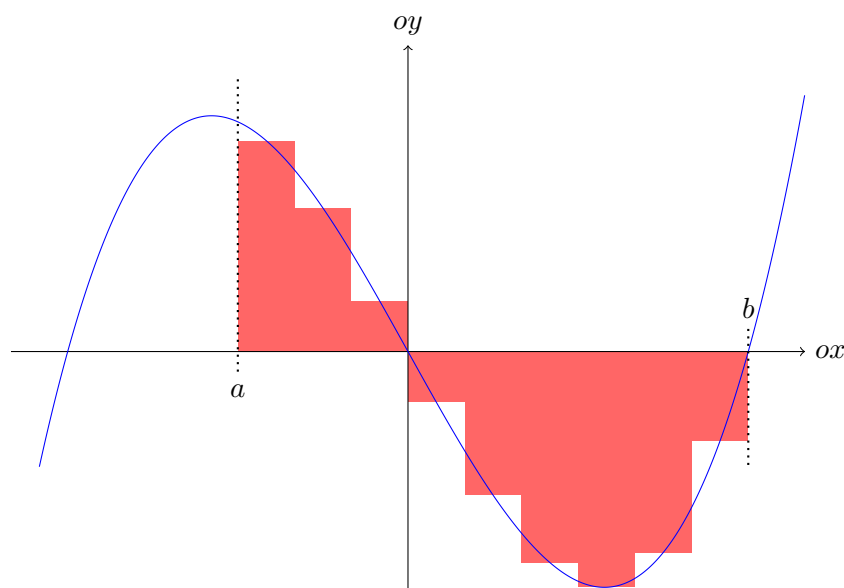


FIGURE 9.7 – Concept d'intégrales tel qu'introduit par Newton et Leibniz

5. En effet, n'oubliez pas que la vitesse est exprimée en Dm/s.

La première définition mathématique rigoureuse de ce concept d'intégration fut apportée par Riemann, au XIX^e siècle, à l'aide de la notion de limite.

Intuitivement, l'intégration, vue comme opérateur sur l'ensemble des fonctions, est, en un certain sens, l'opération inverse de la dérivation. Ainsi, on définit le concept de *primitive* de la façon suivante.

Définition 9.3

Soient f et F deux fonctions, on dit que F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$.

Exemple 9.7. Soit $f(x) = x^2$. Alors, $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x)$ car $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. ◀

Notez qu'une primitive n'est jamais unique, dans la mesure où les constantes sont perdues par dérivation. Ainsi, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors quel que soit $c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ est également une primitive de $f(x)$.

L'intégration consiste à trouver une primitive d'une fonction quelconque f . Les intégrales sont les ensembles de fonctions qui sont primitives d'une fonction f .

Par abus de langage, on dira que ces intégrales peuvent être définies, c'est-à-dire avoir une valeur réelle, soit être indéfinies (et être des fonctions elles-mêmes). Les sections suivantes détaillent ces concepts.

9.2.1 Intégrales définies et indéfinies

On caractérise formellement les intégrales indéfinies de la façon suivante.

Définition 9.4

Soit $f(x)$ une fonction, on appelle intégrale indéfinie de $f(x)$ l'ensemble

$$\{ F(x) \mid F(x) \text{ est une primitive de } f(x) \}.$$

On note cet ensemble comme

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

où \int est le signe d'intégration, $f(x)$ est l'intégrande (c'est-à-dire la fonction dont on recherche une primitive) et dx est l'élément différentiel (qui indique entre autres la variable par rapport à laquelle on intègre).

Souvent, dans cette notation, on appelle C la constante d'intégration, qui peut prendre des valeurs réelles arbitraires.

Exemple 9.8. Les lignes suivantes sont des exemples d'intégrales simples :

- $\int 6x^2 + 1 \, dx = 2x^3 + x + C;$
- $\int \cos(3x) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C;$
- $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$



Notez qu'au même titre que certaines fonctions ne sont pas dérivables, certaines fonctions peuvent également ne pas être intégrables.

Par ailleurs, comme mentionné dans l'introduction de cette section, les intégrales peuvent être utilisées pour calculer les aires, les volumes, etc. Dans le cadre de ce chapitre, on peut montrer qu'une intégrale permet de calculer l'aire située entre le graphe d'une fonction et l'axe ox .

On utilise pour cela la notion d'intégrale définie.

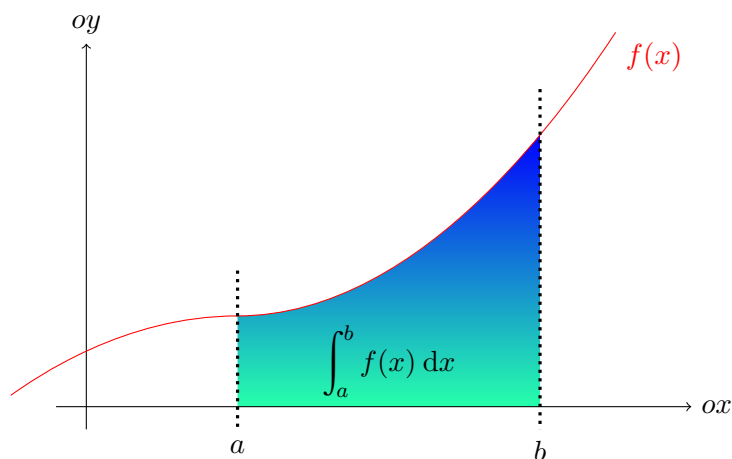


FIGURE 9.8 – Intégrale définie et calcul d'aire

Définition 9.5

Soient $f(x)$ une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'intégrale définie de f entre a et b est notée et définie comme

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

De plus, $\int_a^b f(x) \, dx$ décrit précisément l'aire de la surface comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe ox et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, comme illustré à la figure 9.8.

Sur ce dessin, $\int_a^b f(x) \, dx$ est décrite par la zone ombrée en bleu vert, située entre le graphe de $f(x)$ en rouge, l'axe horizontal ox ainsi que les deux droites en pointillés.

9.2.2 Calcul intégral

Le calcul d'intégration n'est pas aussi immédiat et automatique que le calcul de dérivées. Une intégrale peut être très compliquée, parfois même insoluble analytiquement. En réalité, dans le cas général, des ordinateurs sont utilisés pour approcher la valeur de ces intégrales dans la mesure où une technique exacte n'existe pas.

On se limitera néanmoins dans le cadre de ce cours aux intégrales simples, c'est à dire qui peuvent être résolues directement, ou à l'aide de techniques de résolution analytiques.

Ainsi, l'approche de base afin de résoudre un calcul intégral consiste à examiner l'intégrale et à « deviner » la méthode la plus adaptée. Bien que l'expérience et l'exercice priment sur la hâte, dans le doute, on utilise d'abord les méthodes les plus simples pour finalement utiliser des techniques graduellement plus complexes. Si une méthode échoue, on en choisit une autre.

Bien que cette approche semble peu intelligente, l'étudiant doit bien garder à l'esprit qu'il n'existe pas de technique générale et automatisée pour le calcul intégral, *a contrario* de la dérivation, et que seul un bon entraînement et une bonne maîtrise des outils permet de gagner du temps dans la résolution de ces calculs.

Primitives élémentaires

Bien que dans le cas général, le calcul intégral puisse être complexe, il existe des fonctions pour lesquelles il est aisé. Ainsi, au même titre que dans le cas de la dérivation on dispose d'une liste de dérivées élémentaires, on a dans le cas présent une liste des primitives élémentaires construites sur base de fonctions simples.

Dans la table 9.6, $f(x)$ désigne une fonction réelle, $F(x)$ une primitive de $f(x)$, c est la constante d'intégration et a et n sont des réels non nuls. Ces primitives peuvent être établies sur base des formules de dérivation.

Par ailleurs, également sur base des formules de dérivation, on peut déduire les propriétés d'intégration suivantes relatives à l'intégrale d'une somme et l'intégrale d'un multiple d'une fonction, où f et g sont deux fonctions et a une constante

$f(x)$	$F(x)$
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a} \sin(ax) + C$
$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$
$a^x \ (a > 0)$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$

TABLE 9.6 – Liste des primitives élémentaires

réelle :

$$\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Remarque 9.9. Il n'y a pas d'équivalent de la dernière formule pour l'intégration d'un produit de fonction. Dans presque tous les cas,

$$\int (f(x) g(x)) \, dx$$

donne un résultat différent de

$$\int f(x) \, dx \int g(x) \, dx$$

Pour traiter l'intégration d'un produit, il faut en général recourir à la formule d'intégration par partie, détaillée dans la suite de ce document.

Intégration par partie

De la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions on peut déduire la formule de base pour l'intégration par partie :

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Si la nouvelle intégrale à calculer a une forme similaire au membre de gauche, on peut appliquer cette formule, éventuellement à plusieurs reprises, pour obtenir les primitives de l'intégrande, le but étant évidemment que l'intégrale dans le membre de droite soit plus simple que celle de départ. . .

La table 9.7 donne quelques indices pour faire le bon choix des fonctions f et g lors de l'intégration par partie. Dans cette table, $P(x)$ représente un polynôme de degré quelconque.

Si l'intégrale a la forme. . .	on pose. . .
$\int P(x)e^{ax} dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = e^{ax}$
$\int P(x) \ln(x) dx$	$f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = P(x)$
$\int P(x) \sin(ax) dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = \sin(ax)$
$\int P(x) \cos(ax) dx$	$f(x) = P(x)$ et $g'(x) = \cos(ax)$
$\int e^{ax} \sin(bx) dx$	on a le choix
$\int e^{ax} \cos(bx) dx$	on a le choix

TABLE 9.7 – Exemples d'utilisation de l'intégration par partie

Exemple 9.10. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int x e^{2x} dx$$

Comme suggéré par la table 9.7, posons $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{2x}$. On en déduit que $f'(x) = 1$ et $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

La formule d'intégration par partie donne donc

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$



Intégration par substitution

Parfois, la formulation d'une fonction à intégrer est complexe, et on peut être amené à la simplifier en substituant une sous-expression de cette fonction par une variable.

Poser une telle variable à des fins de simplifications est particulièrement utile si l'on reconnaît dans l'intégrale une fonction et sa dérivée, afin de pouvoir ramener l'intégrale à une intégrale élémentaire après une opération de substitution.

Exemple 9.11. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int (x^3 + 1)^7 3x^2 dx$$

On reconnaît dans l'intégrande la fonction $x^3 + 1$ et sa dérivée $3x^2$. On pose alors $u = x^3 + 1$ d'où on déduit sa *différentielle* $du = u'(x) dx = 3x^2 dx$.

L'intégrale de départ peut donc s'écrire à présent

$$\int u^7 du$$

Par application de la formule élémentaire d'intégrale d'une puissance, et en remplaçant finalement u en fonction de x , on trouve finalement

$$I = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{8} (x^3 + 1)^8 + C.$$



9.3 Exercices résolus

Exercice 9.1. Considérez le graphe de la fonction f illustré à la figure 9.9. Parmi les graphes illustrés à la figure 9.10, lequel décrit la dérivée première de f ?

Solution. On remarque qu'indépendamment des deux asymptotes verticales, la fonction est croissante jusque 2, et décroissante ensuite. Ceci implique que la

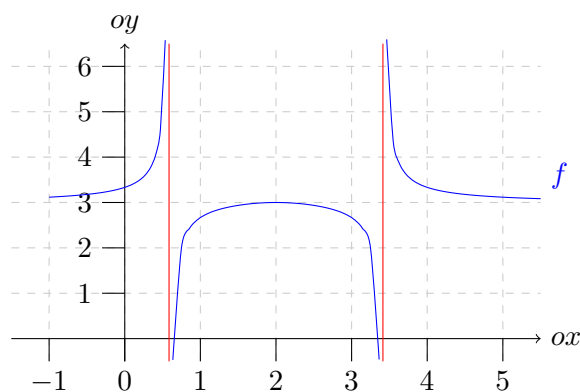


FIGURE 9.9 – Esquisse du graphe d'une fonction

dérivée de f doit être positive avant 2, et négative après. De plus, comme la fonction admet un maximum local en 2, la dérivée de f doit admettre une racine en 2.

Au vu de ces observations, seule la fonction dont le graphe est illustré à la figure 9.10(c) convient. ◀

Exercice 9.2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

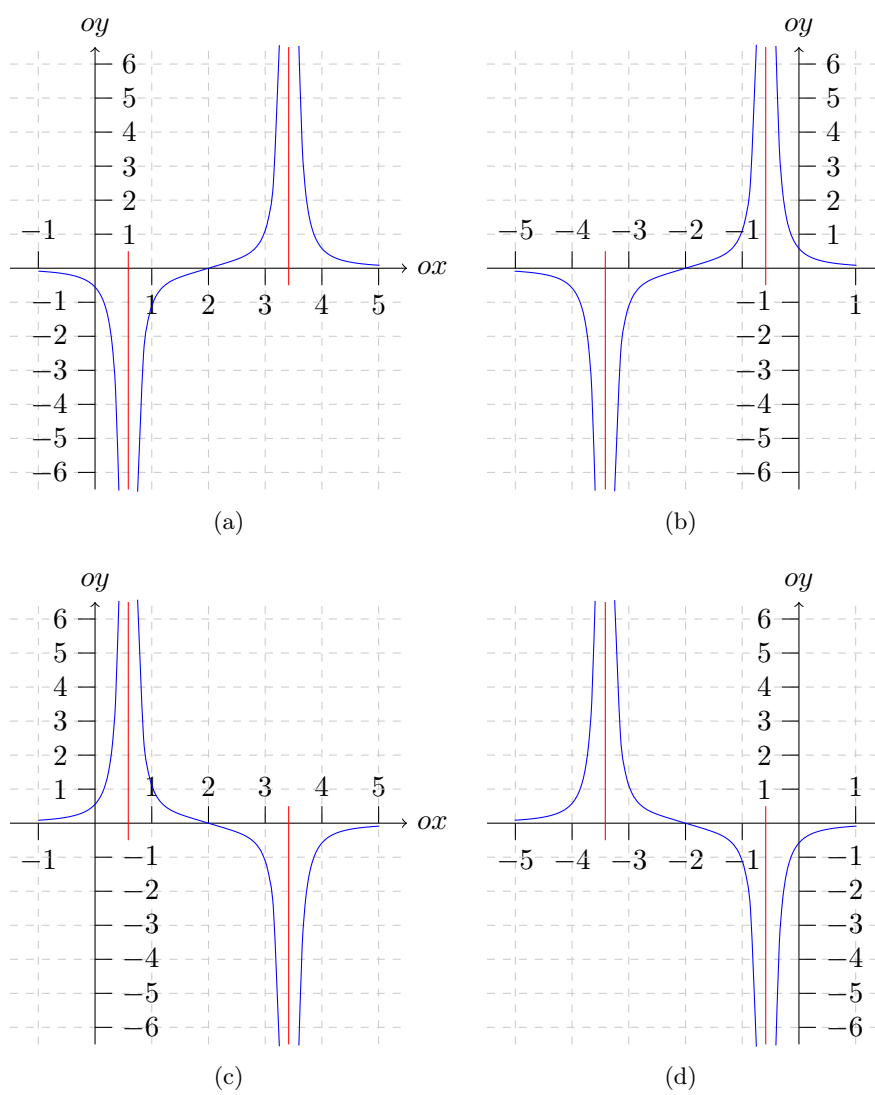
$$f_1(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 7}$$

$$f_2(x) = \frac{6}{x} + \frac{7}{x^3} + \frac{1}{2x^5}$$

$$f_3(x) = 3x^2 \cos(2x + 7)$$

$$f_4(x) = \left(\frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+5}$$

$$f_5(x) = \sqrt[5]{\frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5}}$$

FIGURE 9.10 – Dérivées possibles pour f

Solution. On calcule les dérivées de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= \left((3x^3 - 7)^{\frac{1}{3}} \right)' \\
 &= \frac{1}{3} (3x^3 - 7)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 9x^2 \\
 &= 3x^2 (3x^3 - 7)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{3x^2}{(\sqrt[3]{3x^3 - 7})^2} \\
 f_2'(x) &= -1 \cdot 6x^{-1-1} - 3 \cdot 7x^{-3-1} - 5 \left(\frac{1}{2} \right) x^{-5-1} \\
 &= -6x^{-1} - 21x^{-4} + \frac{5}{2}x^{-6} \\
 &= -\frac{6}{x^2} - \frac{21}{x^4} - \frac{5}{2x^6}
 \end{aligned}$$

Pour f_3 , on remarque la présence d'un produit de fonctions. On a donc

$$\begin{aligned}
 f_3'(x) &= 6x \cdot \cos(2x + 7) + 3x^2 \cdot (-2 \sin(2x + 7)) \\
 &= 6x \cos(2x + 7) - 6x^2 \sin(2x + 7)
 \end{aligned}$$

Dans le cadre de f_4 , on remarque une composition de fonction. Dès lors,

$$f_4'(x) = (2x + 5) \cdot \left(\frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+4} \cdot \left(\frac{4}{3}x \right) + \left(\frac{2x^2 + 4}{3} \right)^{2x+5} \cdot \ln \left(\frac{2x^2 + 4}{3} \right) \cdot 2$$

Finalement, dans le cadre de f_5 , on remarque la composition d'un quotient de fonctions. Posons

$$g(x) = \frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5},$$

on peut calculer la dérivée $g'(x)$ de g comme suit :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{\cos(x^2) \cdot 2 \cdot x \cdot (-3x + e^5) - \sin(x^2) \cdot (-3)}{(-3x + e^5)^2} \\
 &= \frac{2x \cos(x^2)(-3x + e^5) + 3 \sin(x^2)}{(-3x + e^5)^2}.
 \end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant la formule de dérivation d'une puissance, on a

$$f'_5(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{\sin(x^2)}{-3x + e^5} \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2x \cos(x^2)(-3x + e^5) + 3 \sin(x^2)}{(-3x + e^5)^2}$$



Exercice 9.3. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, une fonction dont le graphe correspond à une parabole. Déterminez a , b et c sachant que :

1. $\frac{3}{2}$ est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 2 ;
2. $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{5}$ est l'équation de la perpendiculaire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse 3.

Solution. Avant toute chose, on peut calculer que

$$f'(x) = 2ax + b. \quad (9.7)$$

De plus, comme $\frac{3}{2}$ est le coefficient angulaire de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 2, on sait que

$$f'(2) = \frac{3}{2}. \quad (9.8)$$

Dès lors, en substituant x par 2 dans l'équation (9.7) et en égalant à équation (9.8), on obtient

$$f'(2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 4a + b. \quad (9.9)$$

Le coefficient angulaire de la perpendiculaire à la tangente en 3 est égal à $-\frac{1}{3}$. Le coefficient angulaire de cette tangente est donc de 3 puisque le produit des coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires est égal à -1 .

En conséquence, en substituant x par 3 dans l'équation (9.7), on a

$$f'(3) = 3 \Leftrightarrow 3 = 6a + b \quad (9.10)$$

Soustrayant (9.10) de (9.9), on obtient

$$2a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

et donc

$$b = -\frac{3}{2}$$

Pour déterminer c , on peut calculer $f(3) = -1 + 3/5 = -2/5$ puisque ce point doit vérifier l'équation de la tangente. En reportant dans l'équation de $f(x)$, on obtient

$$-\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 + c$$

ce qui donne

$$c = -\frac{53}{20}$$

En conclusion, on a donc

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{53}{20}$$



Exercice 9.4. Soit $f = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.

1. Déterminez le domaine de f .
2. Déterminez si f est continue.
3. Calculez les racines de f .
4. Calculez les asymptotes verticales et horizontales de f , si elles existent.
5. Étudiez la croissance de f .
6. Étudiez la concavité de f .
7. Esquissez le graphe de f .

Solution. Cette question utilise l'intégralité du chapitre sur les fonctions.

1. Une fraction est définie si son dénominateur est non-nul. f est donc définie si et seulement si $x + 2 \neq 0$, c'est à dire si et seulement si $x \neq -2$. On a donc $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Une fonction f est continue si et seulement si elle est continue en tout point $a \in \text{Dom}(f)$, c'est à dire si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (9.11)$$

On remarque facilement que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \frac{a^2 - 1}{a + 2} \\ &= f(a).\end{aligned}$$

On peut donc conclure que f est continue.

3. Les racines d'une fonction f sont les points où f s'annule. Une fraction s'annule quand son numérateur s'annule. f s'annule donc quand

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.\end{aligned}$$

4. Une fonction f admet une asymptote verticale en un point $a \notin \text{Dom}(f)$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow -2} = \pm\infty$. La fonction f admet donc une asymptote verticale en -2 .

De la même manière, une fonction f admet une asymptote horizontale $H \equiv y = a$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a.$$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'admet donc pas d'asymptote horizontale.

5. Une fonction dérivable f est croissante sur un intervalle $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$ si et seulement si $\forall x \in [a, b], f'(x) \geq 0$. On calcule la dérivée d'ordre 1 de f par rapport à x de la façon suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x+2)2x - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}.\end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule quand son numérateur s'annule, c'est-à-dire quand

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} & \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \\
 \Leftrightarrow x &= -2 + \sqrt{3} \vee x = -2 - \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Établissons le tableau de variation de cette fonction, à partir des valeurs des racines de sa dérivée, comme illustré à la table 9.8. Notons également que $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	\emptyset	$-$	0
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	\emptyset	$+$	$+$
$f(x)$	\curvearrowright	Max	\curvearrowleft	\emptyset	\curvearrowright	Min

TABLE 9.8 – tableau de variation de $f(x)$

On remarque donc que f est croissante sur $] -\infty, -2 - \sqrt{3}]$, elle admet un maximum local en $-2 - \sqrt{3}$, et décroît sur $[-2 - \sqrt{3}, 2[$. Similairement, f est décroissante sur $] -2, -2 + \sqrt{3}]$, elle admet un minimum local en $-2 + \sqrt{3}$, et croît sur $[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

6. Une fonction dérivable f est « concave vers le haut » sur un intervalle $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$ si et seulement si $\forall x \in [a, b], f''(x) \geq 0$. On calcule la dérivée d'ordre 2 de f par rapport à x de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(x+2)^2(2x+4) - (x^2+4x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x + 4x^2 + 16x + 16 - 2x^3 - 8x^2 - 2x - 4x^2 - 16x - 4}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6x + 12}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6(x+2)}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{6}{(x+2)^3} \quad \text{car } x \neq -2.
 \end{aligned}$$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. On en conclut donc que f a une concavité vers le bas sur $] -\infty, -2[$, une concavité

vers le haut sur $] -2, +\infty[$. Comme f'' n'est pas définie en -2 , elle n'y admet évidemment pas de point d'inflexion. Ces informations sont résumées dans le tableau de variation illustré à la table 9.8.

7. On esquisse le graphe de f sur base des racines, de l'asymptote, et des informations tirées du tableau de variation illustré à la table 9.8. Le graphe de cette fonction est illustré à la figure 9.11.

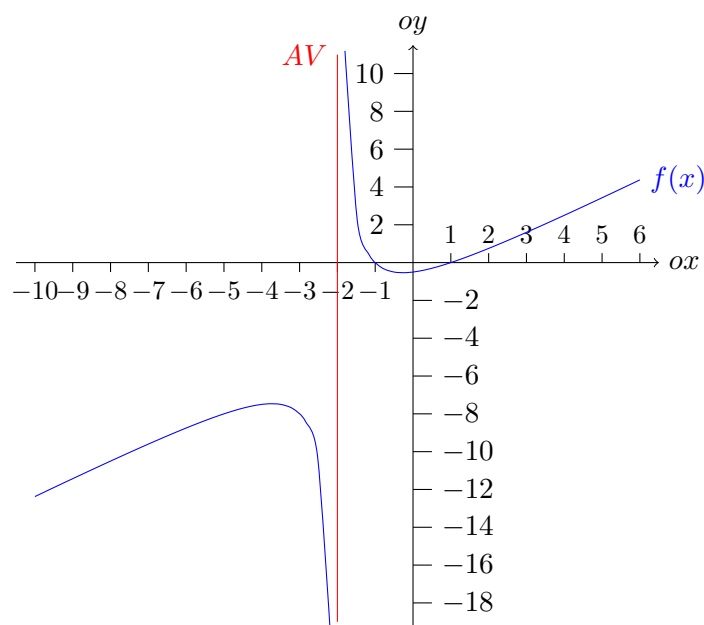


FIGURE 9.11 – Graphe de la fonction f

Exercice 9.5. Un industriel de boîtes en aluminium souhaite fabriquer des boîtes de conserves cylindriques pouvant contenir 1.5l de liquide. Quelles dimensions doit-il donner à la boîte pour utiliser un minimum d'aluminium ?

Solution. Avant tout, représentons la situation sous forme d'un dessin, comme illustré à la figure 9.12.

On a besoin ici de minimiser la quantité d'aluminium utilisée pour construire une boîte, ce qui revient à minimiser la surface occupée par les parois de la boîte (un rectangle), ainsi que par le fond et le couvercle de la boîte (des cercles).

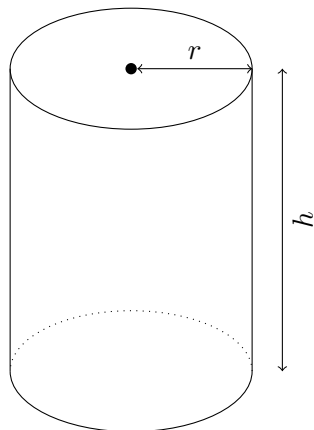


FIGURE 9.12 – Représentation d’une boîte de conserve cylindrique

L’aire d’un rectangle est donnée par la formule « largeur \times hauteur ». Dans le cas présent, la largeur du rectangle en question est égale à la circonférence de la base de la boîte, c’est-à-dire à $2\pi r$. Au final, on doit donc minimiser l’aire A définie comme

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad (9.12)$$

De plus, on sait que le volume de la boîte est de 1.5l, c’est à dire 1500cm^3 . Ainsi, comme le volume d’un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$, on a

$$\pi r^2 h = 1500,$$

c’est à dire

$$h = \frac{1500}{\pi r^2}. \quad (9.13)$$

En remplaçant h par sa valeur dans l’équation (9.12), on obtient donc la fonction $A(r)$ à minimiser suivante :

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r \left(\frac{1500}{\pi r^2} \right) + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}. \end{aligned}$$

On remarque que cette définition de A impose que $r \neq 0$, ce qui n’est pas contraignant vu que r est une distance strictement positive.

Pour minimiser $A'(r)$, une fonction dérivable, il suffit d'en rechercher le minimum via un changement de croissance décrit par la dérivée première de A . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} A'(r) &= 4\pi r - \frac{3000}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2}. \end{aligned}$$

Afin de trouver un minimum, il faut ici vérifier quand $A'(r) = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\pi r^3 &= 3000 \\ \Leftrightarrow r^3 &= \frac{750}{\pi} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire quand $r \approx 6.2035\text{cm}$. Comme $A'(r) < 0$ quand $r < \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$ et $A'(r) > 0$ quand $r > \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$, on a bel et bien un maximum en $r = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$.

Ainsi, en remplaçant r par sa valeur dans l'équation (9.13), on trouve la valeur de h :

$$h = \frac{1500}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} \right)^2},$$

c'est-à-dire $h \approx 12.4070$.

Ainsi, l'industriel doit prévoir de fabriquer des boîtes de rayon environ 6.2035cm et de hauteur environ 12.4070cm. On remarque que cela correspond à des boîtes « carrées », dont le rayon est identique à la hauteur. ◀

Exercice 9.6. Calculez les intégrales suivantes, définies ou non.

$$I_1 = \int e^x \sin(x) \, dx$$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} \, dx$$

$$I_3 = \int_0^{1/2} (1 + e^{-2x}) \, dx$$

$$I_4 = \int x^2 \ln(x) \, dx$$

$$I_5 = \int_{-4}^4 \frac{\cos(x)}{x^2(x-3)} \, dx$$

$$I_6 = \int (x+3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} \, dy$$

Solution. On calcule les intégrales demandées de la façon suivante. Dans les notations suivantes, on a $c \in \mathbb{R}$.

Pour I_1 , procédons par partie en posant $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$. On a donc

$$I_1 = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) \, dx$$

Une seconde intégrale apparaît. Afin de résoudre cette nouvelle intégrale, utilisons encore une fois la méthode d'intégration par partie, en posant $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^x$. On a donc

$$\begin{aligned} I_1 &= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx \right) + c \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) \, dx + c \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I_1 + c \\ &= \frac{1}{2} (e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) + c \end{aligned}$$

Dans le cadre de I_2 , on procède par changement de variable après un bref

artifice de calcul :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{(x^2+2x)^3} dx \end{aligned}$$

Posons $u(x) = (x^2 + 2x)$, on a $du = 2x + 2 dx$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2u^2} \right) + c \\ &= -\frac{1}{4x^2(x+2)^2} + c \end{aligned}$$

L'intégrale I_3 somme peut se décomposer en une somme de deux intégrales. On a donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{1/2} (1) dx + \int_0^{1/2} (e^{-2x}) dx \\ &= [x]_0^{1/2} + \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_0^{1/2} \\ &= [x]_0^{1/2} - \frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} - e^{2 \cdot 0}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-1} - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-1}. \end{aligned}$$

Pour résoudre I_4 , on procède par partie, en posant $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^2$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c, \end{aligned}$$

Dans le cas de I_5 , on remarque que l'on doit intégrer une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à zéro. Le résultat d'un tel calcul d'intégration est systématiquement nul.

Enfin, pour I_6 , on remarque que l'on doit intégrer par rapport à la variable y , absente. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int (x+3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} dy \\ &= (x+3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} \int 1 dy \\ &= (x+3)^{\sin(\cos(3x^2+5))} y + c \end{aligned}$$



Nombres complexes

Concepts de base • Forme trigonométrique • Opérations sur les complexes • Résolution d'équations dans \mathbb{C}

Les nombres complexes sont des nombres qui, *a priori*, semblent avoir peu de sens pratique dans la vie de tous les jours. En effet, ils sont construits sur le postulat « soit un nombre i tel que $i^2 = -1$ ». À l'évidence, un tel nombre *réel* n'existe pas.

Néanmoins, ces nombres ont de nombreuses applications, notamment en physique ondulatoire, en traitement du signal et d'image, etc. Ce chapitre présente ce concept dans ce cadre.

10.1 Concepts de base

Définition 10.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, un nombre complexe est un nombre $a + bi$, avec i défini comme $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

Soit $z = a + bi$, on appelle a la *partie réelle* de z , et b la *partie imaginaire* de z . La notation $a + bi$ est également appelée la *forme algébrique* de z . Par ailleurs, le complexe $a - bi$ est appelé le complexe *conjugué* de z .

Remarque 10.1. Bien que l'on définisse i comme une solution de l'équation $x^2 = -1$, on ne peut pas écrire $\sqrt{-1} = i$. En effet, cela conduit à une contradiction, car on aurait $-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = 1$. Pour rappel, \sqrt{a} est une *notation* définie comme la solution positive de l'équation $x^2 = a$ avec $a \geq 0$, et ne peut être utilisée *que* sous cette hypothèse.

Habituellement, on représente les nombres complexes dans le *plan complexe*, un plan normé où l'axe des abscisses décrit la partie réelle et l'axe des ordonnées la partie imaginaire. Ainsi, on remarque que si $b = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$.

Exemple 10.2. Le nombre z illustré à la figure 10.1 est le complexe $2 + 3i$, la partie réelle de z est 2 et sa partie imaginaire 3. ◀

À l'aide d'une telle représentation, on remarque que deux complexes $z_1 = a_1 + b_1i$ et $z_2 = a_2 + b_2i$ sont égaux, noté $z_1 = z_2$, si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Par ailleurs, on définit le *module* d'un complexe similairement à la norme d'un vecteur, de la manière suivante.

Définition 10.2

Soit $z = a + bi$, on définit le module de z , noté $|z|$, comme

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par application du théorème de Pythagore, on remarque que le module d'un

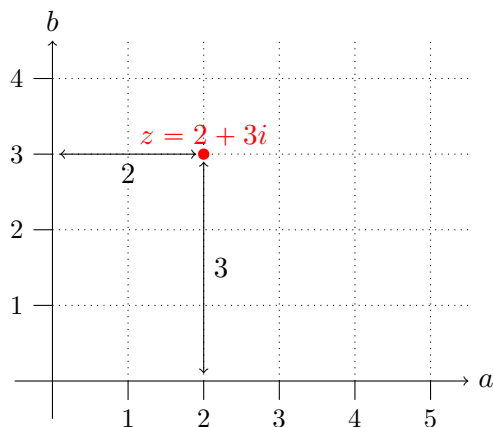


FIGURE 10.1 – Exemple de nombre complexe

nombre complexe z est la longueur du segment de droite joignant la représentation de z dans le plan complexe à l'origine du repère.

Exemple 10.3. Sur la figure 10.1, on a $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. C'est la longueur du segment joignant z au point $(0, 0) = 0 + 0i$. ◀

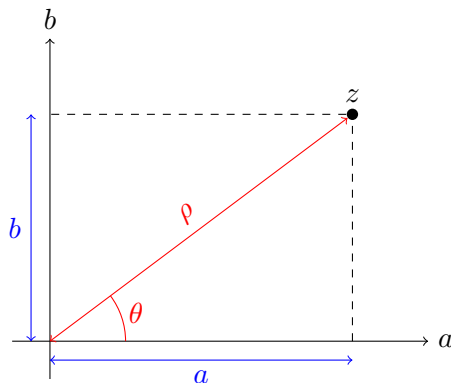
10.2 Forme trigonométrique

Une autre manière de définir un nombre $z = a + bi$ dans le plan complexe est de considérer la distance ρ par rapport à l'origine du repère, et l'angle θ entre la droite joignant cette origine à z et l'axe horizontal du repère. Cette situation est illustrée à la figure 10.2.

Cette représentation d'un complexe z est appelée la *forme trigonométrique* de z . On remarque que ρ est le module de z , et on appelle θ l'*argument* de z .

Souvent, on note z sous forme trigonométrique comme $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Parfois, cette notation est abrégée comme $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Alternativement, un complexe noté sous forme trigonométrique est également noté $z = \rho e^{i\theta}$.

Il est possible de transformer la forme algébrique d'un complexe z en sa forme trigonométrique et inversement de la manière suivante, par application du théorème de Pythagore et de trigonométrie dans le triangle rectangle.

FIGURE 10.2 – Forme trigonométrique d'un complexe z

Formules de conversion

Soit $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$, on a $z = a + bi$ avec

$$a = \rho \cos(\theta),$$

$$b = \rho \sin(\theta).$$

Soit $z = a + bi$ avec $a, b \geq 0$, on a $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ avec

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

À l'évidence, l'utilisation de coordonnées trigonométriques n'est possible que si le complexe considéré $z \neq 0$, auquel cas la définition en termes de ρ et θ n'a pas de sens. De plus, dans les formules ci-dessus, diviser par ρ provoque une indétermination.

Notons toutefois que la formule de passage sous forme trigonométrique ci-dessus n'est valide que si le complexe considéré est dans le premier quadrant. Dans les autres cas, il faut utiliser un peu de trigonométrie élémentaire.

Exemple 10.4. Soit $z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, peut écrire z_1 sous forme trigonométrique comme $z_1 = a + bi$, avec

- $a = 2 \cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$
- $b = 2 \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) = -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$

En conclusion, $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$. ◀

Exemple 10.5. Soient les complexes

- $z_1 = 1 + \sqrt{3} i,$
- $z_2 = 1 - \sqrt{3} i,$
- $z_3 = -1 + \sqrt{3} i,$
- $z_4 = -1 - \sqrt{3} i,$

on peut écrire z_1 sous forme trigonométrique comme $z_1 = \rho \operatorname{cis}(\theta)$, avec

- $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$
- $\theta = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}.$

Par ailleurs, on remarque que z_2, z_3 et z_4 ne sont pas dans le premier quadrant.

Néanmoins, on peut les écrire sous forme trigonométrique comme

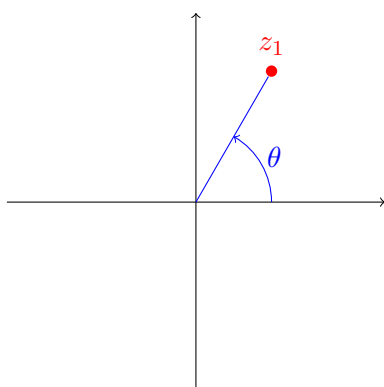
- $z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{3} \right),$ car z_2 est dans le 4^e quadrant,
- $z_3 = 2 \operatorname{cis} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right),$ car z_3 est dans le 2^e quadrant,
- $z_4 = 2 \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right),$ car z_4 est dans le 3^e quadrant.

Cette situation est illustrée à la figure 10.3. ◀

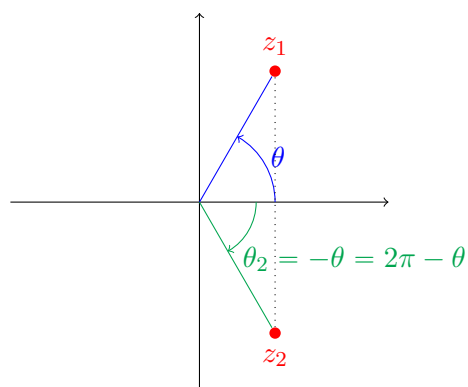
En général, l'application que l'on considère des nombres complexes privilégie l'une ou l'autre application. En traitement de signal, électromagnétisme et physique ondulatoire, par exemple, on privilégie souvent la forme trigonométrique étant donné les similitudes entre les concepts étudiés et les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

10.3 Opérations sur les complexes

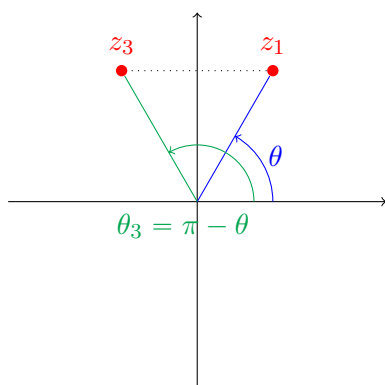
Il est possible d'effectuer diverses opérations arithmétiques sur les complexes. En particulier, il est possible de les additionner, multiplier et diviser, au même titre que les nombres réels. Chaque une de ces opérations se comporte naturellement, comme si l'imaginaire i était une variable.



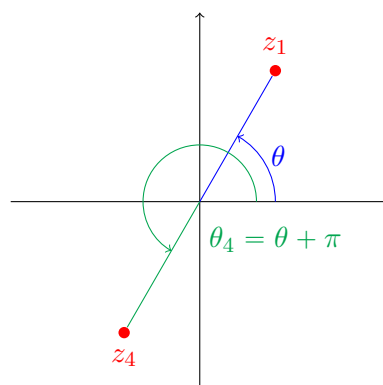
(a) Complexe au premier quadrant



(b) Complexe au second quadrant



(c) Complexe au troisième quadrant



(d) Complexe au quatrième quadrant

FIGURE 10.3 – Quatre complexes

10.3.1 Addition et soustraction

Pour effectuer une addition ou soustraction de nombre complexes sous forme algébrique, on procède « composante par composante », similairement à la somme de vecteurs de \mathbb{R}^2 .

Propriété 10.3

Soient $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, on a

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i.$$

Similairement au cas vectoriel, on peut construire géométriquement l'addition de complexes à l'aide d'un diagramme en parallélogramme, tel qu'illustré à la figure 10.4 avec $(1 + 3i) + (4 + i)$.

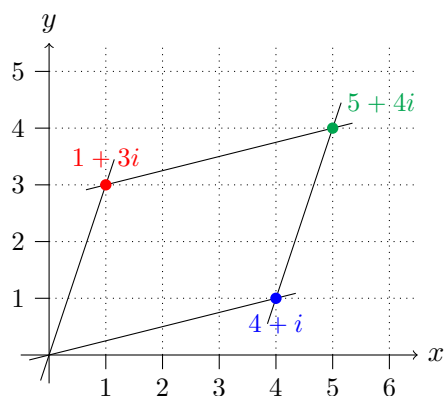


FIGURE 10.4 – Addition de deux complexes

Il est assez difficile d'effectuer l'addition ou la soustraction quand les complexes en question sont sous forme trigonométrique. Aussi, on préférera presque systématiquement¹ effectuer une conversion sous forme algébrique avant d'effectuer l'addition.

1. En l'absence de variables, on peut directement calculer les sinus et cosinus de la forme trigonométrique.

Exemple 10.6. On a

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i) + (1 - 2i) &= (2 + 1) + (3 - 2)i \\
 &= 3 + i \\
 (5 - 4i) - (3 + 2i) &= (5 - 3) + (-4 - 2)i \\
 &= 2 - 6i \\
 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
 &= (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) + (\sqrt{2} + 2)i
 \end{aligned}$$



10.3.2 Multiplication

Pour effectuer une multiplication entre nombres complexes, on procède en distribuant les termes du produit :

$$\begin{aligned}
 (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 \\
 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la formule suivante :

Propriété 10.4

Soient $z_1 = a_1 + b_1i = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ et $z_2 = a_2 + b_2i = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$, on a

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i \\
 &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

On peut montrer ces égalités facilement sous forme algébrique en se souvenant que $i^2 = -1$, et sous forme trigonométrique car

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \\
 \sin(a + b) &= \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b).
 \end{aligned}$$

Notez qu'on peut construire géométriquement la multiplication de deux z_1 et z_2 représentés sous forme trigonométrique. Pour cela, il suffit d'effectuer une rotation de z_2 autour de l'origine de θ_1 radians, et de multiplier le module du résultat de la rotation par ρ_1 . Cette construction est illustrée à la figure 10.5.

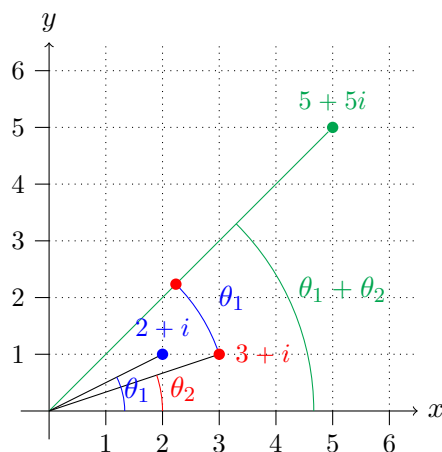


FIGURE 10.5 – Illustration de la multiplication de complexes

Exemple 10.7. On a

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i) \cdot (1 - 2i) &= (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2)i \\
 &= 8 - i \\
 4 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{12} \right) \cdot 3 \operatorname{cis} \left(\frac{23\pi}{12} \right) &= 4 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{12} \right) \cdot 3 \operatorname{cis} \left(\frac{-\pi}{12} \right) \\
 &= 4 \cdot 3 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 12 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$



Notons que le calcul d'un complexe élevé à une puissance entière est une conséquence directe de la propriété 10.4 détaillant la multiplication.

Corollaire 10.5

Soit $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

10.3.3 Inverse et division

On remarque que pour inverser un complexe $z = a + bi$, il n'est pas satisfaisant d'écrire le résultat comme $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$. En effet, un complexe est un nombre écrit sous la forme $x + yi$, ce qui n'est pas le cas de z^{-1} . Néanmoins, on peut multiplier z^{-1} par $\frac{a - bi}{a - bi}$, ce qui donne le résultat d'écriture attendu étant donné que $i^2 = -1$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} \\ &= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \end{aligned}$$

On remarque qu'inverser un complexe est analytiquement plus simple sous forme trigonométrique, en appliquant le principe vu dans le cadre de la multiplication. On obtient donc la généralisation suivante.

Propriété 10.6

Soit $z = a + bi = \rho \operatorname{cis}(\theta)$, on a

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \\ &= \frac{1}{\rho} \operatorname{cis}(-\theta) \end{aligned}$$

On peut construire géométriquement l'inverse d'un complexe z écrit sous forme trigonométrique de la manière suivante : il suffit de substituer le module de z par son inverse, et d'effectuer une symétrie orthogonale d'axe ox pour obtenir le résultat. Cette situation est illustrée à la figure 10.6.

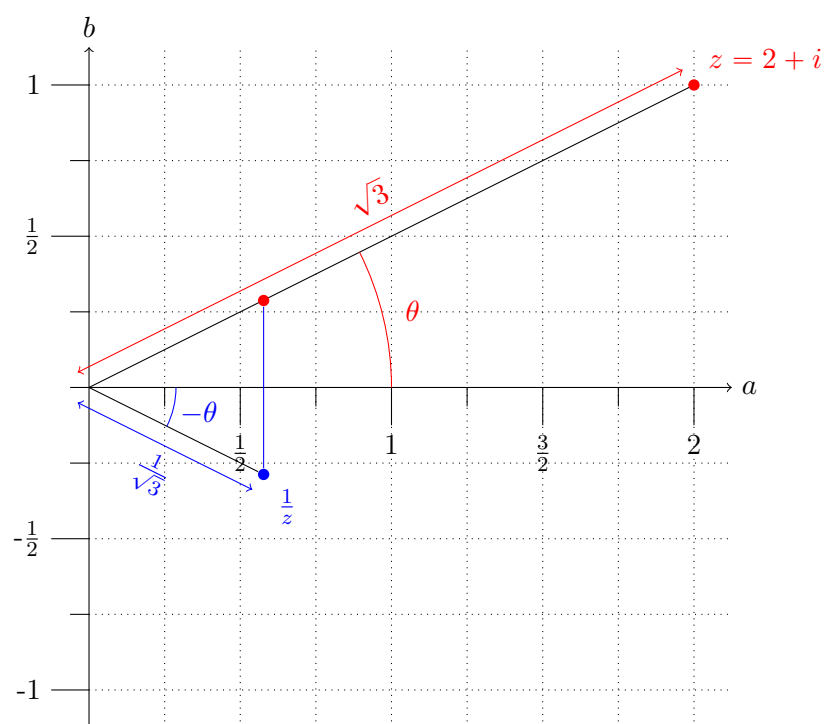


FIGURE 10.6 – Construction de l'inverse d'un complexe

Exemple 10.8. On a

$$\begin{aligned}
 (3 + 2i)^{-1} &= \frac{1}{3 + 2i} \\
 &= \frac{1}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} \\
 &= \frac{3}{3^2 + 2^2} - \frac{2}{3^2 + 2^2}i \\
 &= \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \\
 \left(4 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1} &= \frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$



Notons que comme diviser $z_1 = a_1 + b_1i$ par un complexe $z_2 = a_2 + b_2i$ correspond à multiplier z_1 par z_2^{-1} , on obtient directement les formules de quotient, en calculant arithmétiquement comme précédemment le résultat en multipliant le quotient par le complexe conjugué sur lui-même :

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \cdot \frac{a_2 - b_2i}{a_2 - b_2i} \\
 &= \frac{a_1a_2 - a_1b_2i + a_2b_1i - b_1b_2i^2}{a_2^2 - a_2b_2i + a_2b_2i - b_2^2i^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i
 \end{aligned}$$

On remarque également que, similairement au cas multiplicatif, il est plus simple d'effectuer une division quand les complexes considérés sont écrits sous forme trigonométrique. Ceci nous donne la généralisation suivante.

Propriété 10.7

Soient $z_1 = a_1 + b_1i = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ et $z_2 = a_2 + b_2i = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \\
 &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)
 \end{aligned}$$

10.4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}

Grâce à l'extension de \mathbb{R} en l'ensemble \mathbb{C} , il est possible de calculer résoudre des équations qui auparavant n'admettaient pas de solution. Par exemple, on sait que, dans \mathbb{R} , l'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution. Or, dans \mathbb{C} , on sait que i est solution de cette équation, car $i^2 = -1$. De la même manière, $-i$ est également solution de cette équation.

Le but de cette section est d'étendre la résolution d'équations familières dans \mathbb{C} .

Polynômes de degré 1

Toutes les équations de type $ax + b = 0$ admettent une unique solution réelle : $x = -\frac{b}{a}$, si $a \neq 0$. Pour les équations de droite, donc, la résolution est sensiblement la même que dans le cas réel.

Exemple 10.9. On a

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$



Exemple 10.10. On a

$$\begin{aligned} (2 + 3i)x + (4 - i) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4 - i}{2 + 3i} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4 - i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{8 - 12i - 2i - 3}{4 + 9} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i \end{aligned}$$



Polynômes de degré 2

On sait que les solutions *réelles* d'une équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0 \quad (10.1)$$

sont données par $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Si $\Delta < 0$, dans \mathbb{R} , il n'est pas possible d'en extraire une racine réelle.

Toutefois, on peut quand même généraliser cette formule. En effet, \sqrt{a} est défini comme la solution positive de l'équation $x^2 - a = 0$. Ici, on est amené à résoudre le même type d'équation, dans le cas complexe, avec $x^2 = \Delta$.

Or, dans \mathbb{C} , on sait que $i^2 = -1$, et donc, si $\Delta < 0$, on peut écrire

$$\Delta = i^2 \cdot (-\Delta),$$

et il est facile de voir que $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$ sont racines de $x^2 = \Delta$.

Ainsi, si $\Delta < 0$, l'équation (10.1) admet pour solutions

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 10.11. Soit l'équation $x^2 - 2x + 4 = 0$. On a $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12$. Les solutions de cette équation sont donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{12} i}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{3} i \end{aligned}$$



Ce type de raisonnement peut être appliqué pour les polynômes de degré 2 à coefficients dans \mathbb{C} . En effet, le polynôme $az^2 + bz + c$ admet pour racines

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + r_1}{2a} \\ z_2 &= \frac{-b + r_2}{2a}, \end{aligned}$$

où r_1 et r_2 sont les solutions de $z^2 = b^2 - 4ac$.

Exemple 10.12. Calculons les solutions de l'équation

$$(-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i = 0$$

et factorisons ce polynôme. Avant toutes choses, on note que

$$\begin{aligned} (-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i &= (-1 + i) \left(z^2 + \frac{4 - 2i}{-1 + i}z + \frac{-7 + 9i}{-1 + i} \right) \\ &= (-1 + i) (z^2 + (-3 - i)z + (8 - i)), \end{aligned}$$

en écrivant le terme indépendant et le terme en z sous forme algébrique grâce aux multiplications par les conjugués, tels qu'utilisés dans le quotient de complexes. Notons $\mathbb{P} = z^2 + (-3 - i)z + (8 - i)$, et calculons ses racines.

On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3 - i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - i) \\ &= 9 - 1 + 6i - 32 + 4i \\ &= -24 + 10i \end{aligned}$$

Les solutions de $z^2 = \Delta$ sont ² $1 + 5i$ et $-1 - 5i$, dès lors, les racines z_1 et z_2 de \mathbb{P} sont calculées comme

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 + i + 1 + 5i}{2} \\ &= 2 + 3i, \\ z_2 &= \frac{3 + i - 1 - 5i}{2} \\ &= 1 - 2i. \end{aligned}$$

En conséquence, z_1 et z_2 sont solutions de $(-1 + i)z^2 + (4 - 2i)x - 7 + 9i = 0$ et ce polynôme peut s'écrire sous la forme

$$(-1 + i) \left(z - (2 + 3i) \right) \left(z - (1 - 2i) \right)$$



2. On peut en effet vérifier que $(1 + 5i)^2 = (-1 - 5i)^2 = -24 + 10i$. On verra à la section une technique permettant de résoudre des équations $z^n = a + bi$ pour $n \in \mathbb{N}$ et a, b arbitraires.

Polynômes de degré 3 à coefficients réels

Les polynômes à coefficients réels de degré impair (et donc, en particulier de degré 3) étant des fonctions $p(x)$ continues telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$, on sait que $p(x)$ admet une racine³ $r \in \mathbb{R}$.

En effectuant la division d'un polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ par $x - r$, on peut donc écrire une équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ comme $(x - r)(a'x^2 + b'x + c')$, pour certains $a', b', c' \in \mathbb{R}$. Cette équation admet deux solutions de plus dans \mathbb{C} , celles de $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Pour les trouver, il suffit d'utiliser la procédure de résolution des polynômes de degré 2.

Exemple 10.13. Soit le polynôme $p(x) = \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 - 15x - 20$. En testant les diviseurs entiers de 20, on remarque que $x = 4$ est racine de ce polynôme. On peut donc écrire $p(x) = 0$ sous la forme $(x - 4)(ax^2 + bx + c) = 0$. En effectuant la division de $p(x)$ par $x - 4$, on obtient $p(x) = (x - 4)(\frac{5}{2}x^2 + 5x + 5)$.

On calcule $\Delta = 5^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = -25$. Dès lors, on obtient deux nouvelles racines :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25} i}{5} \\ &= -1 \pm i \end{aligned}$$

Les trois racines de $p(x)$ sont donc $x = 4$, $x = -1 + i$ et $x = -1 - i$. ◀

10.4.1 Racines de l'unité

Il est clair que, dans \mathbb{R} comme dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation $x^2 = 1$ sont $x = 1$ et $x = -1$. On peut généraliser cette équation en $z^n = 1$, et tenter de la résoudre. On peut montrer que cette équation admet exactement n solutions dans \mathbb{C} , appelées les *racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité*.

Considérons par exemple l'équation

$$z^3 = 1. \tag{10.2}$$

3. On peut trouver systématiquement cette racine soit par approximation numérique, soit parfois analytiquement en testant les diviseurs rationnels du terme indépendant.

Une solution $r = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ de cette équation *vérifie* l'équation, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\rho \operatorname{cis}(\theta))^3 &= \operatorname{cis}(0) \\ \Leftrightarrow \rho^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) &= 1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) \end{aligned}$$

On peut conclure immédiatement que $\rho = 1$. On remarque également que $x = 1$ est une solution de cette équation, car $1^3 = 1$. Néanmoins, il reste deux solutions complexes à trouver. De plus, pour chacune de ces solutions, on a $3\theta = 0 = 2\pi$. On remarque les angles

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_2 &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

répondent à cette contrainte. En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{cis}(0) \end{aligned}$$

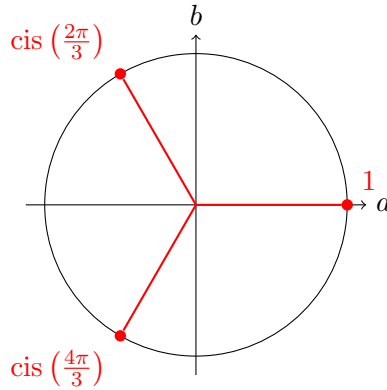
On peut effectuer les mêmes vérifications avec $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Dès lors, l'ensemble des solutions de l'équation (10.2) est l'ensemble

$$R_3 = \left\{ 1, \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\}.$$

Ces solutions sont illustrées à la figure 10.7.

On remarque par extension du raisonnement précédent avec $n = 3$ que chacune des solutions de cette équation est obtenue par rotation de 1 de $\frac{2\pi}{n}$ radians.

FIGURE 10.7 – Solutions de l'équation $z^3 = 1$

En généralisant ce raisonnement, on peut donc décrire l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} d'une équation $z^n = 1$ de la manière suivante.

Propriété 10.8

L'ensemble R_n des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$ est défini comme

$$R_n = \left\{ \text{cis} \left(\frac{k \cdot 2\pi}{n} \right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Comme prévu, on remarque qu'en particulier, 1 est un élément de R_n quand $k = 0$.

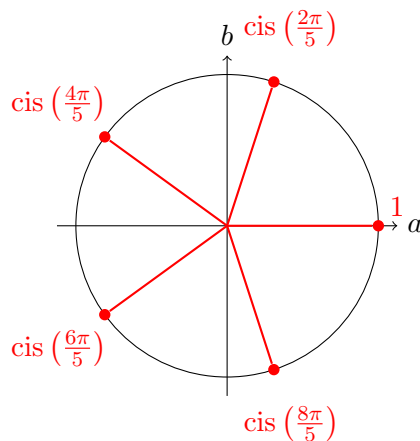
Exemple 10.14. L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de $z^5 = 1$ est R_5 défini comme

$$R_5 = \left\{ 1, \text{cis} \left(\frac{2\pi}{5} \right), \text{cis} \left(\frac{4\pi}{5} \right), \text{cis} \left(\frac{6\pi}{5} \right), \text{cis} \left(\frac{8\pi}{5} \right) \right\}.$$

Ces solutions sont illustrées à la figure 10.8. ◀

On remarque qu'on peut adapter le raisonnement de résolution de $z^n = 1$ pour résoudre $z^n = \rho \text{cis}(\theta)$. En effet, on peut déduire les points suivants.

1. Le module de chaque solution r est $\sqrt[n]{\rho}$. Si ce n'était pas le cas, le module de r^5 ne serait pas ρ .

FIGURE 10.8 – Solutions de l'équation $z^5 = 1$

2. $r_0 = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$ est une solution, car $r_0^n = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} \cdot n\right) = \rho \operatorname{cis}(\theta)$.
3. Chaque solution de cette équation peut être obtenue en effectuant une rotation de r_0 de $\frac{k \cdot 2\pi}{n}$ radians un nombre entier de fois.

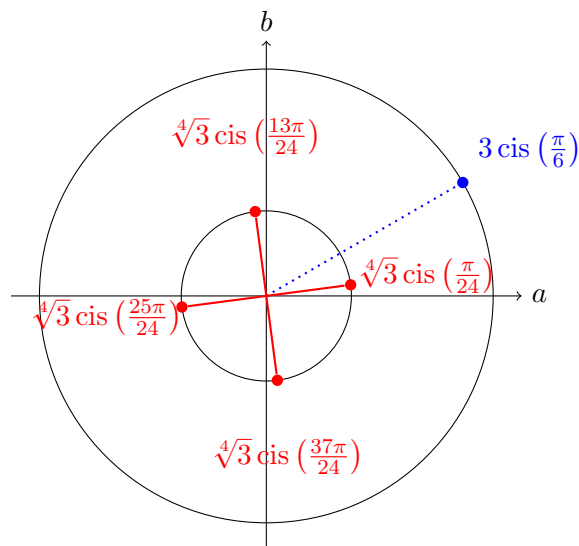
Ainsi, on remarque qu'on peut obtenir les solutions d'une équation de type $z^n = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ en trouvant en premier lieu r_0 , et ensuite en effectuant une rotation de cette solution de n^e de tours autour de l'origine.

Exemple 10.15. L'ensemble des solutions de $z^4 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + 2 \cdot \frac{2\pi}{4}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24} + 3 \cdot \frac{2\pi}{4}\right) \right\} \\ &= \left\{ \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{24}\right), \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{37\pi}{24}\right) \right\} \end{aligned}$$

Ici, on a $r_0 = \sqrt[4]{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right)$, car $\frac{\theta}{n} = \frac{\pi}{6 \cdot 4}$. On obtient les autres solutions en effectuant à chaque fois un quart de tour, c'est-à-dire en ajoutant $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{12\pi}{24}$ à l'argument de r_0 . Ces solutions sont représentées à la figure 10.9. ◀

On peut dès lors dégager la propriété suivante.

FIGURE 10.9 – Solutions de $z^4 = 3 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{6})$ **Propriété 10.9**

L'ensemble R_n des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ est défini comme

$$R_n = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Notons que, dans le cas où z n'est pas écrit sous forme trigonométrique, il convient de le convertir sous cette forme afin de se servir de la formule ci-dessus.

Quatrième partie

Annexes

Bibliographie

- [1] A. Aho, J. Ullman, and X. Cazin. *Concepts fondamentaux de l'informatique*. Sciences sup. Dunod, 1996.
- [2] Archimède de Syracuse. *The Archimedes Palimpsest*, volume 1. Cambridge University Press, 2011.
- [3] Archimède de Syracuse. *The Archimedes Palimpsest*, volume 2. Cambridge University Press, 2011.
- [4] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Alternating paths and cycles in edge-coloured multigraphs : a survey. *Discrete Mathematics*, 165-166 :39–60, 1997.
- [5] J. Bang-Jensen and G. Gutin. On the complexity of hamiltonian path and cycle problem in certain classes of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 95 :41–60, 1999.
- [6] J. Bang-Jensen and G. Gutin, editors. *Digraphs : Theory, Algorithms and Applications*. Springer, New York, 2001.
- [7] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [8] J. A. Bondy. Basic graph theory : paths and circuits. In *Handbook of combinatorics*, volume 1-2, pages 3–110. Elsevier, 1995.
- [9] T. H. Cormen, C. Stein, R. L. Rivest, and C. E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education, 2nd edition, 2001.
- [10] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, second edition edition, 2000.
- [11] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman and Company, 1979.
- [12] G. Gutin. Cycles and paths in semicomplete multipartite digraphs, theorems and algorithms : a survey. *Journal of Graph Theory*, 19 :481–505, 1995.

- [13] T. L. Heath and Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2*. Dover Publications, Incorporated, 1956.
- [14] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. Apollonius of perga. *MacTutor History of Mathematics archive*, 1999.
- [15] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. Mc Graw Hill, 2012.
- [16] L. Volkmann. Longuest paths in semicomplete multipartite digraphs. *Discrete Mathematics*, 199 :279–284, 1999.
- [17] L. Volkmann. Cycles in multipartite tournaments : results and problems. *Discrete Mathematics*, 245 :19–53, 2002.