Rappel - Fonctions
Continuité et asymptotes

R. Absil

Année académique 2019 - 2020

Les fonctions peuvent être très diverses du point de vue de leur graphe, comme illustré par les nombreux exemples déjà présentés. On a vu, qu'en particulier, une fonction peut être croissante, ou décroissante.

De ce point de vue, on pourrait dire qu'une fonction est « très croissante » si un « petit » changement dans les abscisses résulte en un « grand » changement dans les ordonnées. Sur base de cette observation, on peut donc également se demander s'il est possible de caractériser les fonctions où la variation en ordonnée est contrôlée, dans le sens où elle n'est pas arbitrairement grande.

Intuitivement, cette caractérisation est celle de la *continuité*. Une fonction continue est telle qu'une variation suffisamment petite dans les abscisses résulte en une variation arbitrairement petite dans les ordonnées. Dans les autres cas, on parle de fonction non continue, ou discontinue.

Notez également que l'intuition populaire « une fonction est continue si on peut la tracer sans lever le crayon » est *fausse*[1], comme illustré dans plusieurs exemples de cette section et détaillé à la Remarque 2, en fin de cette section.

Formellement, on définit la continuité de la façon suivante.

Définition 1

Soit f une fonction réelle et $a \in \mathrm{Dom}(f)$, on dit que f est continue en a *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si l'on se rappelle de la définition formelle de limite d'une fonction f énoncée[2] comme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

1. Notez que néanmoins, si la réciproque de cette implication est vraie : « si une fonction peut être tracée d'un trait de crayon, alors elle est continue. Si ce n'est pas possible, on ne peut pas conclure sur la continuité de la fonction.
2. La manipulation de cette définition ne fait pas l'objet de ce cours, dans la mesure où elle est trop avancée pour le contexte dans lequel est donné ce cours. Elle est donnée à titre d'information, afin d'appuyer les illustrations en termes de « variations en abscisse / ordonnée ».

cela signifie que l'on impose qu'une variation suffisamment petite en abscisse ($|x - a| < \delta$) résulte une variation en ordonnée arbitrairement petite ($|f(x) - L| < \varepsilon$).

Remarque 1. L'étudiant doit bien garder à l'esprit que le fait que pour qu'une fonction soit continue en un point a de son domaine, la vérification de

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

implique que

- si f est définie « à gauche de a », alors on doit vérifier que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a),$$

- si f est définie « à droite de a », alors on doit vérifier que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Exemple 1. Considérez les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ illustrées à la figure 1. On remarque les points suivants.

- $f(x)$ est continue en a, en particulier.
- $g(x)$ est continue en les points a et a'. En a, on ne doit considérer que la limite « à gauche », en s'approchant de a par des valeurs plus petites que a. De la même manière, en a', on ne doit considérer que la limite « à droite », en s'approchant de a' par des valeurs plus grandes que a'.
  Notez que cela n'a pas de sens de considérer la continuité de g entre a et a', dans la mesure où les points de cet intervalle ne font pas partie du domaine de g.
- $h(x)$ n'est pas continue en a. En effet, la limite en a n'est pas définie, dans la mesure où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

Les définitions de continuité en un point permettent d'en construire de plus générales, en particulier la continuité au sein d'un intervalle.

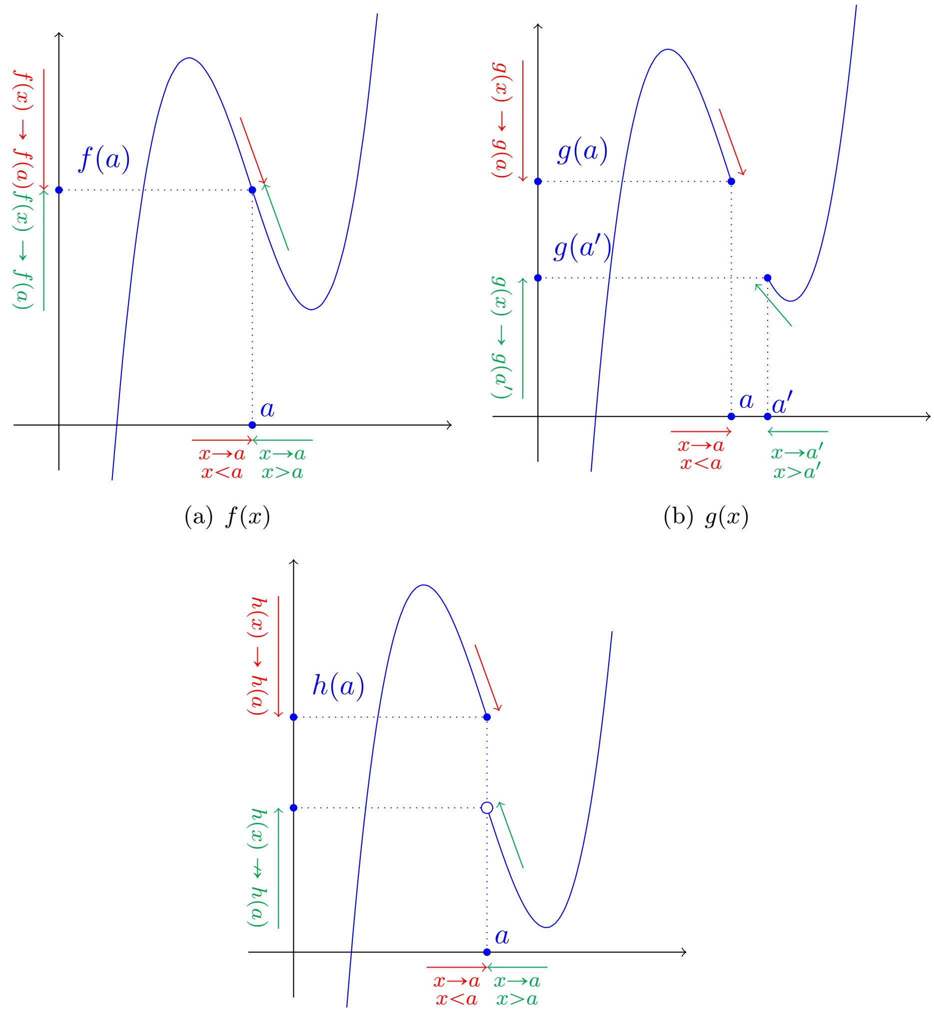
Définition 2

Une fonction f est dite continue sur un intervalle $[a, b]$ *si elle est continue en tout point de cet intervalle.*

De plus, on dit qu'une fonction est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Exemple 2. Considérez les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ illustrées à la figure 1. On remarque les points suivants.

- $f(x)$ et $g(x)$ sont continues.
- $h(x)$ est continue sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$, mais pas en a. Dès lors, comme $a \in \mathrm{Dom}\,(h)$, cette fonction n'est pas continue.



(a) $f(x)$ (b) $g(x)$ (c) $h(x)$

FIGURE 1 – Illustration de la continuité de fonctions

Exemple 3. Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \tag{1}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

On remarque avant toute chose que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \backslash \{ -1 \}$ et que $\mathrm{Dom}\,(g) = \mathbb{R}$. De plus, on a que

— f est continue, car elle est continue en tout point a de son domaine, car

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \frac{a}{a+1} \\ &= f(a); \end{aligned}$$

Notez encore une fois ici que cela n'a pas de sens de considérer la continuité de f en -1, car $-1 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$.

— g n'est pas continue, car elle n'est pas continue en 3, car

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} g(x) &= 1 \\ &\neq \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} g(x) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Remarque 2. Notez que l'intuition « une fonction continue est traçable d'un seul trait de crayon, sans lever la main » est *fausse*, comme illustré à la figure 1(b) par le graphe de la fonction $g(x)$. Cette fonction ne peut être tracée sans lever la main, mais elle est pourtant bel et bien continue.

En particulier, affirmer que la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas continue (car elle n'est pas continue en zéro) est faux. Cette fonction est bel et bien continue, et cela n'a pas de sens de considérer sa continuité en zéro, car zéro n'appartient pas au domaine de $\frac{1}{x}$, et ceci indépendamment du fait que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Notez également qu'il existe des fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$ et qui ne sont pas continues, telles que la fonction $g(x)$ décrite à l'équation (2). Il est également possible de construire des fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$ et qui ne sont continues nulle part, comme la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

On insiste donc sur le fait que bien qu'intuitive, l'idée « une fonction continue est traçable d'un seul trait de crayon, sans lever la main » est trompeuse.

1 Asymptotes

Intuitivement, une asymptote est une droite vers laquelle le graphe d'une fonction tend à se rapprocher à mesure que l'abscisse ou l'ordonnée tend(ent) vers l'infini.

Trois types sont généralement étudiés : l'*asymptote verticale*, l'*asymptote horizontale* et l'*asymptote oblique*. Nous ne reverrons que les deux premiers cas dans le cadre de ce cours.

1.1 Asymptote verticale

Lorsque les valeurs d'une fonction f tendent vers l'infini en s'approchant d'un point a (que ce soit par la gauche ou par la droite), on dit que le graphe de f admet une asymptote verticale au point a.

Définition 3

Une fonction f possède une asymptote verticale *d'équation $x = a$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

L'exemplee 4, à la section suivante, illustre l'utilisation de cette définition pour la caractérisation d'une asymptote verticale.

Classiquement, les asymptotes verticales apparaissent en des points n'appartenant pas au domaine d'une fonction, comme dans le cas de dénominateurs de fractions nuls.

1.2 Asymptote horizontale

Lorsque les valeurs d'une fonction f tendent vers un réel a lorsque x tend vers l'infini, on dit que le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

Définition 4

Une fonction f possède une asymptote horizontale *d'équation $y = a$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Exemple 4. Soit la fonction $f(x) = 2+\dfrac{1}{5(x-3)}$. Avant toute chose, on remarque que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash\{\,3\,\}$. Cette fonction admet deux asymptotes, l'une verticale, et l'autre horizontale.

— Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ car

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= 2 + \frac{1}{5(\pm\infty - 3)} \\ &= 2 + \frac{1}{\pm\infty} \\ &= 2 + 0^{\pm} \\ &= 2.\end{aligned}$$

— Asymptote verticale d'équation $x = 3$ car

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} f(x) &= 2 + \frac{1}{5(3-3)} \\ &= 2 + \frac{1}{0^{\mp}} \\ &= \mp\infty.\end{aligned}$$

Le graphe de cette fonction est illustré en bleu à la figure 2, et ses asymptotes en rouge.

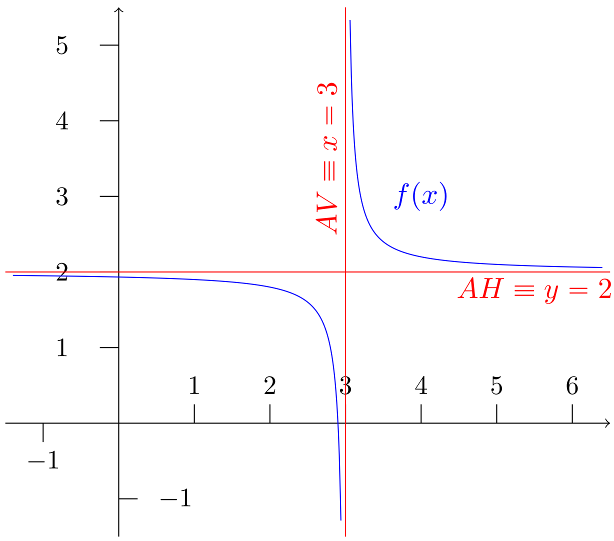


FIGURE 2 – Illustrations des asymptotes d'une fonction

Remarque 3. Une fonction peut posséder un nombre arbitraire d'asymptotes verticales, et au plus 2 asymptotes horizontales (c'est le cas lorsque les limites en $-\infty$ et $+\infty$ donnent deux valeurs réelles distinctes).