Rappel - Puissances

R. Absil

3 octobre 2017

Les puissances décrivent intuitivement une manière condensée de noter des multiplications successives par un même nombre. Ainsi, de la même manière que d'autres opérateurs mathématiques, elles possèdent une arithmétique particulière. Ce document rappelle aux étudiants les règles de base associées à leur manipulation.

Plus formellement, on les définit dans le cas suivant.

Définition 1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on a*

$$a^b = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ fois}} & \text{si } b > 0, \\ \dfrac{1}{a^{-b}} & \text{si } b < 0. \\ 1 & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

Dans une telle notation, a est appelé la base *et b l'*exposant.

Exemple 1. Dans les calculs suivants, on remarque donc que

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$,
- $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,
- $7^0 = 1$,
- $5^{-4} = \dfrac{1}{5^{-(-4)}} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$,
- $4^{-2} = \dfrac{1}{4^{-(-2)}} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{4 \cdot 4}$.

Avec la définition ci-dessus, on remarque que si $b = 1$, on a donc que $a^b = a^1 = a$. Dès lors, on peut par exemple écrire les lignes suivantes

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \\ &= 2^{1+1+1} \\ &= 2^2 \cdot 2^1 \\ &= 2^{2+1} \end{aligned}$$

Notez que l'on ne peut écrire les lignes suivantes uniquement parce que la base 2 est identique dans tous les calculs. En généralisant ce principe, on peut donc énoncer la propriété suivante sur les puissances.

Propriété 2. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b, c \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} a^b.a^c &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{b \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{c \text{ fois}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{b+c \text{ fois}} \\ &= a^{b+c}. \end{aligned}$$

Cette propriété est vérifiée quels que soient les nombres a quelconques, et les nombres b et c entiers. Il est néanmoins nécessaire que la base a soit la même à chaque fois. On ne peut par exemple rien dire d'une expression telle que $a^2.b^3$ si $a \neq b$.

Exemple 2. Dans les calculs suivants, sur base de la propriété ci-dessus, on a donc que

— $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$,
— $3^4 \cdot 3 = 3^4 \cdot 3^1 = 3^5$,
— $5^2 \cdot 5^{-3} = 5^{2+(-3)} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$,
— $4^3 \cdot 4^{-3} = 4^{3+(-3)} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$,
— $\dfrac{2^3}{2^2} = 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3-2} = 2$,
— $5^2 \cdot 2^5 = 5^2 \cdot 2^5$ (on ne peut rien faire ici),
— $a^2 \cdot b^3 \cdot a^4 \cdot b^{-1} \cdot c = a^2 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot b^{-1} \cdot c = a^{2+4} \cdot b^{3-1} \cdot c = a^6 \cdot b^2 \cdot c$.

Notez que cette formule simple permet également de calculer les puissances de produits aisément.

Propriété 3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} (ab)^c &= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \ldots (ab) \cdot (ab)}_{c \text{ fois}} \\ &= (\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{c \text{ fois}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b \cdot b}_{c \text{ fois}}) \\ &= a^c.b^c. \end{aligned}$$

Notons que, comme mentionné précédemment, si $a \neq b$, on ne peut pas développer le calcul ci-dessus plus profondément.

Exemple 3. On peut calculer les puissances de produits suivantes :

— $(12 \cdot 15)^3 = 12^3 \cdot 15^3$,
— $(7 \cdot 11)^{-4} = 7^{-4} \cdot 11^{-4} = \frac{1}{7^4} \cdot \frac{1}{11^4}$.

De plus, avec la Propriété 2, on peut par exemple décomposer le calcul ci-dessous de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
2^{3^4} &= \left(2^3\right)^4 \\
&= \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \\
&= 2^{3+3+3+3} \\
&= 2^{3 \cdot 4} \\
&= 2^{12}
\end{aligned}$$

On peut généraliser ce principe pour décomposer les puissances de puissances de la manière suivante.

Propriété 4. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b, c \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$\begin{aligned}
a^{b^c} &= \left(a^b\right)^c \\
&= \underbrace{\left(a^b\right) \cdot \left(a^b\right) \dots \left(a^b\right)}_{c \text{ fois}} \\
&= \underbrace{\Bigg(\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{b \text{ fois}}\Bigg) \cdot \Bigg(\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{b \text{ fois}}\Bigg) \dots \Bigg(\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{b \text{ fois}}\Bigg)}_{c \text{ fois}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{bc \text{ fois}} \\
&= a^{bc}.
\end{aligned}$$

Exemple 4. On peut calculer le résultat des puissances ci-dessous sur base de la propriété ci-dessus de la façon suivante.

— $4^{3^3} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9$,

— $2^{3^{-2}} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6}$,

— $\left(\dfrac{3^4}{2^5}\right)^3 = \dfrac{3^{4^3}}{2^{5^3}} = \dfrac{3^12}{2^{15}}$

Enfin, notons que les exposants dans une notation de puissance ne sont pas limités aux entiers. On peut en effet élever n'importe quel nombre à n'importe quelle puissance écrite sous forme de fraction. Dans ce cas, on a alors besoin de la notion de *racine*, comme ci-dessous.

Propriété 5. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b, c \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, on a*

$$\begin{aligned} a^{\frac{b}{c}} &= a^{b \cdot \frac{1}{c}} \\ &= \left(a^b\right)^{\frac{1}{c}} \\ &= \sqrt[c]{a^b} && \textit{car } \sqrt[x]{y} = y^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Exemple 5. On peut donc calculer le résultat des puissances suivantes.
- $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$,
- $2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.