Haute Ecole de Bruxelles-Brabant
Ecole Supérieure d'Informatique

Rue Royale, 67 – 1000 Bruxelles
02/219.15.46 – esi@he2b.be

Statistique – Exercices

Bachelor en Informatique

Cours enseigné par :

Patrick Bischop, Laurent Beeckmans, Christine Leignel (coordinatrice)

Chapitre 1 – Introduction au calcul des probabilités

1. On possède deux dés, un rouge et un bleu. Pour les différentes expériences aléatoires suivantes, décrivez l'ensemble des possibilités Ω et calculez son cardinal.

   a) on jette les deux dés et on note le nombre de deux chiffres formé par le dé rouge (chiffre des dizaines) et le dé bleu (chiffre des unités)
   b) on jette les deux dés et on note l'ensemble des points obtenus
   c) on jette les deux dés et on note la somme des points
   d) on jette les deux dés et on observe si les points sont identiques ou non

2. En lançant deux dés équilibrés, quelle est la probabilité que la somme des points soit égale à 7 ? Quelle est la probabilité que la somme des points soit supérieure ou égale à 10 ?

3. Un dé est truqué de sorte qu'en le lançant, la probabilité d'obtenir 6 vaut le triple de celle d'obtenir toute autre valeur. Avec ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un point pair ?

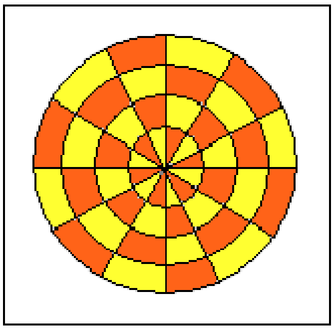
4. Trois chevaux sont en course. Le premier à 2 fois plus de chances de gagner que le deuxième, et celui-ci a aussi 2 fois plus de chances de gagner que le troisième. Quelles sont les probabilités de gagner de chacun des trois chevaux ?

5. Soit un jeu de 52 cartes dont on tire une carte au hasard. On définit les évènements aléatoires suivants : A : obtenir un as, B : obtenir une carte rouge, C : obtenir un cœur. Définissez les évènements suivants et calculez-en la probabilité :

   a) $A \cap B$
   b) $B \cap C$
   c) $A \cup C$
   d) $B \cup C$

6. André a rempli une grille du jeu de Lotto, il a donc coché 6 cases parmi 42 cases numérotées de 1 à 42. Le jour du tirage, 6 numéros sont choisis aléatoirement entre 1 et 42.
   a) Quelle est la probabilité qu'aucun des 6 numéros choisis par André ne soient parmi les 6 numéros du tirage ?
   b) Quelle est la probabilité qu'André soit un gagnant de rang 5, c'est-à-dire qu'exactement 3 cases cochées soient parmi les 6 numéros du tirage ?

7. Un joueur de fléchettes vise la cible esquissée ci-contre. Elle est formée de 4 zones circulaires concentriques d'une largeur de 5 cm chacune. Son diamètre est donc de 40 cm et elle est placée au centre d'un carré de 50 cm de coté. En supposant que le joueur envoie sa flèche au hasard dans le carré mais qu'elle ne sorte jamais de celui-ci,
   a) quelle est la probabilité que sa flèche atteigne la cible ?
   b) quelle est la probabilité que sa flèche parvienne dans le cercle le plus petit au centre de la cible ?
   c) quelle est la probabilité qu'elle atteigne le point central de la cible ?



8. On considère des événements aléatoires tels que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ et $P(A \cap B) = 0.2$. Calculez $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

9. Soit un groupe composé de 12 hommes dont la moitié a des lunettes et de 15 femmes dont le tiers a des lunettes. Si on choisit une personne au hasard dans ce groupe, quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ou porte des lunettes ?

10. Lors de vacances scolaires, deux activités sportives sont proposées : natation et vélo. On sait que 40% des participants se sont inscrits à la natation, 50% aux randonnées vélo et 25% se sont inscrits au deux. Quelle est la probabilité qu'un participant choisi au hasard ne fasse pas de sport ?

11. Un marchand d'électro-ménager a réalisé des statistiques sur les ventes de frigos tout au long du mois de décembre dernier. Les probabilités du nombre de frigos vendus par jour sont données dans le tableau suivant :

Nombre de frigos vendus par jour	Probabilité
0	0.2
1	0.4
2	0.3
au moins 3	0.1

   a) Quelle est la probabilité qu'il vende au moins un frigo ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il ne vende pas de frigos sur 2 jours consécutifs ?
   c) Quelle est la probabilité qu'il vende un et un seul frigo sur 3 jours consécutifs ?

12. On jette 3 fois un dé « normal ». Calculez :

   a) la probabilité d'obtenir le point 6 exactement une fois.
   b) la probabilité d'obtenir le point 6 au moins une fois.
   c) la probabilité d'obtenir 3 points différents.

13. On tire trois cartes avec remise intermédiaire dans un jeu de 52 cartes. Calculez :

   a) la probabilité que la deuxième carte soit un roi et la troisième différente d'un roi.
   b) la probabilité qu'exactement deux des cartes soient un roi.
   c) la probabilité de tirer trois fois la même carte.

14. A partir du théorème d'addition, démontrer le résultat équivalent pour trois événements aléatoires A, B et C :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

15. Pour la population d'un pays on considère les événements A : soutenir le président en place et B : habiter dans la partie Est du pays. On a observé :

	A	$\overline{A}$
B	7.8%	22.2%
$\overline{B}$	18.2%	51.8%

   Calculez $P(A)$ et $P(A/B)$. A est-il indépendant de B ?

16. On tire 2 cartes dans un jeu de 52 cartes sans remise intermédiaire.
   a) La première carte est un roi. Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit encore un roi ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux rois ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un roi ?

17. Trois personnes tirent sans remise un billet au hasard dans un ensemble de billets numérotés de 1 à 20. Quelle est la probabilité que les trois billets soient impairs ?

18. Un sac contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quatre personnes A, B, C et D tirent dans cet ordre une boule sans la remettre dans le sac. La première personne qui tire une boule blanche gagne le jeu. Calculez les probabilités de gagner le jeu pour chacune des personnes.

19. Soient deux événements aléatoires A et B tels que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/4$. Que valent $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(\overline{A} / \overline{B})$, $P(\overline{B} / \overline{A})$?

20. Soient les deux événements aléatoires A : le point du dé est pair et B : le point du dé est supérieur ou égal à 4. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

21. Dans un certain pays, la population en âge de travail est répartie de la manière suivante :
    - 51 % sont des hommes possédant un emploi
    - 3 % sont des hommes au chômage
    - 41 % sont des femmes possédant un emploi
    - 5 % sont des femmes au chômage.

    Calculez la probabilité :
    a) qu'une personne choisie au hasard soit un homme
    b) qu'une personne choisie au hasard soit un chômeur
    c) qu'un chômeur choisi au hasard soit un homme
    d) qu'un homme choisi au hasard soit un chômeur

22. On dispose de 2 urnes U_1 (5 boules rouges et 3 boules blanches) et U_2 (4 boules rouges et 6 boules blanches). Des tirages sont effectués suivant les règles suivantes : si une boule rouge a été tirée le tirage suivant se fait dans la même urne, si une boule blanche a été tirée le tirage suivant se fait dans l'autre urne. Le premier tirage se fait dans U_1. Si les tirages se font sans remise, quelles sont les probabilités d'obtenir :
    a) trois boules rouges en 3 tirages.
    b) trois boules blanches en 3 tirages.
    c) une boule blanche suivie de deux boules rouges en 3 tirages.
    d) une boule rouge en troisième sachant que les deux premières sont blanches.

23. Idem que l'exercice précédent, en supposant que les tirages se font avec remise.

24. Soient deux dés A et B ayant respectivement 4 faces rouges et 2 blanches, 4 faces blanches et 2 rouges. On choisit un des deux dés avec une pièce tombant deux fois plus souvent sur pile que sur face : pile donne le dé A et face donne le dé B. Ensuite on jette le dé choisi et on regarde la couleur obtenue.

    a) Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge ?

    b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?

    c) On répète tout le processus 3 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir rouge aux 3 lancés si on a obtenu rouge aux 2 premiers lancés ?

25. Un fabricant de baromètres a testé un nouveau modèle très simple, et a constaté que celui-ci était de temps en temps inexact : pour 10% des jours où il pleuvait, il affichait "beau temps" et pour 30% des jours où il faisait beau, il affichait "pluie". Sachant que le baromètre a été vendu dans une région où il pleut en moyenne 1 jour sur 5,

    a) quelle est la probabilité que le baromètre indique 'pluie' ?
    b) quelle est la probabilité que l'indication du baromètre soit correcte ?

26. Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut périlleux que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10; sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas.

    a) Calculer la probabilité que le patineur réussisse le 2ème saut.
    b) Calculez la probabilité que le patineur rate le deuxième saut sachant que le 1er était réussi.
    c) Calculez la probabilité que le patineur réussisse les deux sauts.

27. Marcel travaille 5 jours par semaine. Chaque jour, il quitte habituellement son bureau vers 17 heures et se rend à pied à son domicile. Quand il passe devant le *Café des Sports*, il y aperçoit une fois sur deux son copain Antoine avec lequel il ne manque jamais de déguster une de ses bières préférées. Plus loin, au *Café de la Gare*, il rencontre également une fois sur deux son autre copain Emile, avec lequel il ne peut non plus refuser de faire la causette devant un autre verre. Evidemment, les rencontres avec Antoine ou Emile sont indépendantes les unes des autres ; parfois il rencontre les deux, parfois un seul, et parfois aucun des deux.

    Enfin, quand il arrive devant chez lui, il sort de sa poche un trousseau avec 3 clés, dont une seule ouvre la porte d'entrée. Quand Marcel n'a rien bu, ses pensées sont lucides, et il ouvre la porte immédiatement avec la bonne clé. Quand il a bu un verre de bière, il ne reconnaît pas directement la bonne clé, aussi il les essaye toutes les trois une par une jusqu'à ce que la porte s'ouvre. Enfin, quand il a bu deux bières, il ne réfléchit plus à ce qu'il fait, et après chaque essai de clé, il secoue chaque fois son trousseau et réessaye jusqu'à ce que la porte s'ouvre enfin (il peut donc réessayer plusieurs fois la même clé!)

    Calculez à partir de ces données les probabilités que:

    a) Marcel ouvre la porte du premier coup à la fin d'une journée de travail.
    b) Marcel ouvre la porte en deux essais à la fin d'une journée de travail.
    c) Marcel ouvre la porte en au plus deux essais à la fin d'une journée de travail.
    d) Marcel ouvre la porte en au moins trois essais à la fin d'une journée de travail.

28. Une boîte A contient 8 pièces détachées dont 3 sont défectueuses et une boite B contient 5 pièces détachées dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce détachée dans une des boîtes. Sachant qu'elle est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boite A ?

29. Une certaine forme de cancer affecte 3 personnes sur 1000. On a mis au point un test de dépistage précoce : les patients non atteints réagissent positivement au test dans 5% des cas. Seulement 2% des malades présentant cette forme de cancer à ses débuts réagissent négativement. En effectuant un dépistage systématique dans l'ensemble de la population, quelle serait la proportion d'individus effectivement atteints parmi ceux qui donneraient à penser qu'ils ont le cancer ?

30. Un joueur dispose de 9 dés : 2 dés du type A, 3 du type B et 4 du type C. Le tableau ci-dessous indique le nombre de faces portant le numéro i pour chaque type de dé.

i	1	2	3	4	5	6
A	**2**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
B	**2**	**2**	**0**	**1**	**0**	**1**
C	**2**	**2**	**0**	**2**	**0**	**0**

    Le joueur choisit au hasard un seul de ces dés et fait 421 en le lançant 3 fois (il a donc obtenu dans l'ordre 4, puis 2, puis 1). Quelles sont les probabilités respectives d'avoir joué avec un dé de type A, de type B, de type C ?

31. Une personne envisage d'acheter une voiture d'une certaine marque et apprend via un magazine spécialisé que 5% de ces véhicules ont un problème de transmission. Un mécanicien vient apporter son aide pour juger de l'état du véhicule : sur toutes les autos défectueuses qu'il a examinées dans le passé, il a décelé l'état défectueux dans 90% des cas. Pour les bonnes voitures son jugement est également bon : il les déclare « bonne » dans 80% des cas. Quelle est la probabilité que la voiture que la personne envisage d'acheter ait un problème de transmission :
    a) avant d'avoir l'avis du mécanicien ?
    b) si le mécanicien déclare le véhicule défectueux ?
    c) si le mécanicien déclare le véhicule en bon état ?

32. Dans une usine, 3 machines M1, M2, M3 fabriquent des stylos. Par jour, la machine M1 en fabrique 1000 dont 3% de défectueux, la machine M2 en fabrique 2000 dont 2% de défectueux et la machine M3 en fabrique 3000 dont 1% de défectueux.
    a) En fin de journée, on choisit un stylo au hasard parmi les 6000 stylos produits. Quelle est la probabilité de tirer un stylo défectueux ?
    b) On constate que le stylo choisi est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de M2 ?

33. En Syldavie, il pleut environ 1 jour sur 2 en hiver, 1 jour sur 3 au printemps et en automne et 1 jour sur 5 en été. (On peut considérer que toutes les saisons ont le même nombre de jours).
    a) Quelle est la probabilité qu'il pleuve en Syldavie un jour quelconque de l'année ?
    b) Sachant qu'il pleut sur une photo prise en Syldavie, quelle est la probabilité qu'elle ait été prise au printemps ?

34. Pour se rendre à l'école, Gontran utilise les transports en commun. Il prend le métro 2 fois plus souvent que le bus, et il prend le bus 2 fois plus souvent que le tram. Les probabilités respectives d'arriver en retard en prenant le bus, le tram et le métro sont de 0,3, 0,2 et 0,1.
    a) Quelle est la probabilité que Gontran arrive en retard ?
    b) Quelle est la probabilité que Gontran prenne le métro et n'arrive pas en retard ?
    c) Sachant que Gontran est arrivé en retard, quelle est la probabilité qu'il ait pris le tram ?
    d) Quelle est la probabilité que Gontran arrive en retard 2 jours de suite ?

Chapitre 2 – Variables aléatoires et grandes distributions théoriques

1. Donnez la distribution de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance mathématique et l'écart-type des variables aléatoires suivantes :
   a) On lance un dé bien équilibré : si le point est impair on gagne autant d'euros que le point indiqué, s'il est pair on perd autant d'euros que le point indiqué.
   b) Une urne contient 13 boules blanches et 7 boules noires. Si on tire une boule noire on gagne 20 €, sinon on perd 15 €.
   c) On joue à 'pile' ou 'face' avec 2 pièces bien équilibrées. Si les côtés sont 2 'pile' on gagne 10 €, sinon on perd 5 €.
   d) On tire successivement et avec remise 3 fruits d'une corbeille contenant 6 oranges et 3 pommes. Soit X le nombre de pommes tirées.

2. Un représentant d'un grand laboratoire pharmaceutique téléphone à une pharmacie 3 fois par an. Au premier appel, il a 8 chances sur 10 de réaliser une vente. Ensuite, la probabilité de réaliser une vente dépend de ce qui a précédé : si l'appel suit une vente, la probabilité d'une nouvelle vente est de 0.9, sinon elle est de 0.4. Soit la variable aléatoire du nombre total de ventes par an. Fournissez la distribution de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance mathématique et l'écart-type. Quelle est la probabilité de réaliser au moins 2 ventes ?

3. Kevin ne mange que des sandwiches au thon mayonnaise ou au poulet curry. Selon son humeur, il se rend soit au *C'est trop bon* (1 fois sur 2), au *Sandwich Royal* (1 fois sur 3) ou chez *Jean Bombeur* (1 fois sur 6). Les prix de ses sandwiches favoris sont les suivants :

	C'est trop bon	Sandwich Royal	Jean Bombeur
thon mayonnaise	2.3 €	2.7 €	2.3 €
poulet curry	2.5 €	2.5 €	2 €

Arrivé chez le marchand de son choix, Kevin opte deux fois plus souvent pour le sandwich le moins cher que pour l'autre. Soit X la variable aléatoire égale au prix du sandwich acheté par Kevin. Donnez la distribution de X, calculez son espérance mathématique et son écart-type (arrondis au centime d'euro le plus proche).

4. Un installateur de frigos en commande 3 nouveaux qui sont garantis par le vendeur. Chaque réfrigérateur a une probabilité de 0.2 d'être défectueux. Soit X la variable aléatoire du nombre total de réfrigérateurs défectueux.

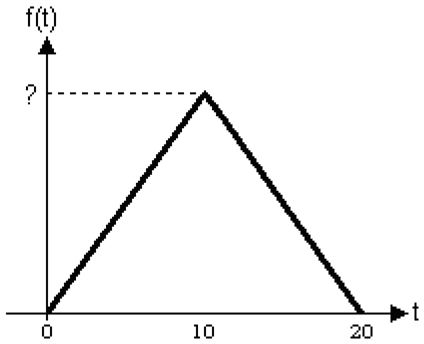
   a) Fournissez (valeurs et graphique) la distribution de probabilité de X
   b) Fournissez (valeurs et graphique) la fonction de répartition de X
   c) Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de X
   d) Le contrat de garantie stipule que les frais de réparation comportent une partie fixe de 25 € et une composante variable de 35 € par réfrigérateur à réparer. Quelle est l'espérance des frais de réparation dans le cas de la commande de 3 frigos ?

5. Un jeu très simple consiste à lancer 2 dés. Un gain est associé au lancé de la façon suivante : si on obtient un double 6, on gagne 5 € ; si obtient un seul 6, on gagne 2 €. Dans tout les autres cas, on perd 1 €.

   a) Donnez la distribution de probabilité de la variable aléatoire représentant le gain associé à ce jeu.
   b) Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de cette variable aléatoire. Ce jeu vous semble-t-il équitable ? Pourquoi ? Combien doit-on s'attendre à gagner à ce jeu si on joue 20 fois de suite ?

c) Marc Naqueur, le célèbre tricheur professionnel, a fabriqué un dé truqué : la probabilité que ce dé tombe sur 6 est 3 fois plus élevée que la probabilité qu'il tombe sur n'importe quel autre point. Pour camoufler sa fraude, il l'utilise avec un dé normal dans le jeu décrit ci-dessus. Quelle est alors l'espérance de gain de Marc Naqueur ? Combien de fois en moyenne doit-il jouer à ce jeu pour espérer gagner 50 € ?

6. Le graphique ci-dessous donne la fonction de densité de probabilité pour le temps d'attente d'un bus qui est prévu toutes les 20 minutes.



a) Déterminez l'ordonnée manquante pour que ce graphique soit correct ?
b) Donnez l'équation de $f(t)$
c) Calculez $P[7 \leq X \leq 10]$
d) Calculez μ et σ

7. L'angle de tir d'un canon est distribué de façon « sinusoïdale ». Les valeurs possibles sont comprises entre 0° et 180° (0 et π en radians) et la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x\,.$$

a) Vérifiez que la distribution de probabilité est correcte
b) Déterminer la fonction de répartition et dessiner son graphe
c) Calculez son espérance mathématique et son écart-type
d) Calculez la probabilité que l'angle de tir soit compris entre 60° et 120°

8. Une variable aléatoire traduisant la longueur en minutes des appels téléphoniques donnés par les employés d'une firme admet une distribution appelée « exponentielle négative ». Les valeurs possibles de cette variable sont tous les réels positifs. Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$$

a) Vérifiez qu'il s'agit bien d'une distribution de probabilité
b) Calculez la moyenne des durées des appels
c) Quelle est la probabilité qu'un appel dure au moins 2 minutes ?
d) Quelle est la probabilité qu'un appel dure au maximum 6 minutes ?
e) Quelle est la probabilité qu'un appel de 2 minutes dure encore 2 minutes ?

9. Pour être certain d'obtenir au moins un garçon, un couple décide d'avoir 5 enfants. Quelles sont ses chances de succès si la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52 ?

10. La probabilité d'obtenir son diplôme dans une école technique est de 0.4. Déterminez la probabilité :
    a) qu'il n'y ait aucun diplômé
    b) qu'il n'y ait qu'un seul diplômé
    c) qu'il y ait au moins un diplômé

11. En jetant 6 fois une paire de dés quelle est la probabilité d'avoir un total de 9 à 2 reprises ? A au moins 2 reprises ?

12. Soit un grand lot de pièces contenant 5% de pièces défectueuses. On prend un échantillon au hasard d'effectif 10 avec remise. Quelle est la probabilité que l'échantillon comporte au maximum 2 pièces défectueuses ?

13. Combien de fois doit-on jeter un dé pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6 soit plus grande que 0.9 ?

14. Considérons le jeu de la roulette dans un cadre simplifié. Sur la roulette il y a 37 cases numérotées de 0 à 36. Les numéros ont, **à l'exception du 0**, trois caractéristiques :

    - un numéro est **manque** s'il est inférieur à 19 et **passe** dans le cas contraire
    - un numéro est **pair** ou **impair** (dans ce contexte-ci, 0 n'est donc ni pair ou impair)
    - un numéro est **rouge** ou **noir** (18 de chaque couleur)

    A chaque partie une bille après rotation va tomber au hasard dans l'une des 37 cases. Les joueurs auront auparavant parié sur un numéro ou un type de case où ils pensent que la bille va s'arrêter. Une personne va jouer plusieurs fois de suite et miser à chaque fois sur **impair et passe**.

    a) Quelle est la probabilité d'obtenir impair et passe lors d'une partie ?
    b) Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'un seul impair et passe lors de 10 parties ?
    c) quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 et au maximum 7 impair et passe lors de 10 parties ?
    d) combien de fois au minimum faut-il jouer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois impair et passe dépasse 0.9 ?

15. L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les patients ont une et une seule dent malade parmi les 32 dents qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien.
    a) Si l'arracheur de dents arrache une et une seule dent à chaque patient, calculez la probabilité qu'aucun des 10 premiers patients ne reparte avec la dent malade.
    b) Combien de patients doit-il traiter pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0.6 (toujours en arrachant une seule dent à chaque patient)?
    c) Le dernier patient se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. Quelle est la probabilité qu'il reparte entièrement édenté ?

16. On réalise une expérience de calcul de probabilité *à posteriori* pour estimer la probabilité théorique qu'une pièce tombe sur *pile*. Si on suppose que cette probabilité est égale à 1/2, quelle est la probabilité qu'après 20 lancers, la pièce tombe entre 9 et 11 fois sur *pile* ?

17. Quels sont l'espérance mathématique et l'écart-type
    a) du nombre de « face » pour le jet de 100 pièces de monnaie ?
    b) du nombre d'as obtenus lors du jet de 30 dés de poker ?

c) du nombre de réponses correctes à 50 questions de « VRAI ou FAUX », les réponses étant données au hasard ?

18. Une compagnie pétrolière doit sous peine de banqueroute trouver au moins 3 puits de pétrole. Elle réussit à financer 12 forages et pour chacun d'eux, elle a 20% de chances d'aboutir. Quelle est la probabilité de ne pas être en faillite ?

19. On considère un questionnaire à choix multiples de 10 questions à 5 propositions chacune. Une seule proposition par question est correcte. Il y a réussite si les réponses à 7 questions au moins sont correctes. Quelle est la probabilité de réussite si :

a) on n'a pas étudié et on fournit les réponses au hasard ?
b) on a travaillé de telle manière qu'on peut éliminer 3 réponses à chaque question et on choisit au hasard entre les 2 restantes ?

20. Un navire tire sur une cible à 10 reprises. Il lui faut au moins 4 tirs pour couler la cible. L'expérience a montré qu'il atteint la cible dans 20% des cas. Quelle est la probabilité qu'il coule la cible ?

21. On veut extraire au hasard un échantillon de 5 électeurs d'une population très grande où la proportion des démocrates est de 60%. Soit X la variable aléatoire du nombre de démocrates de l'échantillon.

a) Fournissez la distribution de probabilité de X
b) Calculez μ et σ
c) Calculez la probabilité qu'il y ait exactement 3 démocrates choisis
d) Calculez la probabilité qu'il y ait au moins 3 démocrates choisis

22. On fait une enquête auprès de 500 familles ayant 4 enfants.

a) Quel est le nombre espéré de familles ayant au moins un garçon ?
b) Quel est le nombre espéré de familles ayant 1 ou 2 filles ?

23. 95% des pièces produites par une machine sont en bon état. On choisit au hasard 20 pièces (avec remise) parmi toute la production.

a) Quelle est la probabilité que le nombre de pièces en bon état soit supérieur à 17 ?
b) Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type du nombre de pièces en bon état.

24. Un poissonnier passionné de probabilités étudie les possibilités de ventes de sa marchandise. Cette semaine, il observe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de filets de merlan qu'il vend quotidiennement.

a) Quelles sont les valeurs possibles de X ? Quelle est la distribution théorique qui s'adapte le mieux à cette variable aléatoire ?
b) Sachant que l'espérance du nombre de filets de merlan vendus quotidiennement vaut 9, quelle est la probabilité qu'il en vende moins de 5 sur une journée ? Que vaut l'écart-type de cette distribution ?
c) S'il vend moins de 5 filets de merlan sur une journée, notre poissonnier considère qu'il s'agit d'une « mauvaise journée ». Et si une semaine de travail (5 jours ouvrables) contient 3 mauvaises journées (ou plus), il considère qu'il s'agit d'une « mauvaise semaine ». Quelle est la probabilité qu'une semaine soit « mauvaise » ?

25. Dessinez sur un même graphique les gaussiennes des distributions $N(8,2)$ et $N(12, 2)$. A quel point correspond leur intersection ?

26. Dessinez sur un même graphique les gaussiennes des distributions $N(5,2)$ et $N(5, 1)$. Ces deux courbes ont-elles une (des) intersection(s) ?

27. Pour la distribution normale réduite, calculez :
    a) P[Z < 1,34]
    b) P[0,57 < Z < 1,63]
    c) P[–0,68 < Z < 1,04]
    d) P[Z > –0,5]

28. Pour une normale $X \sim N(70, 25)$, calculez :
    a) P[56 < X < 83]
    b) P[X > 89]
    c) P[40 < X < 67]
    d) P[X = 82]

29. Une certaine marque de pneus permet en moyenne de parcourir 60000 kilomètres avec un écart type de 10000 kilomètres. On suppose la distribution normale. Quelle est la probabilité qu'un pneu soit usé avant 50000 kilomètres ?

30. La vitesse des véhicules passant sur une nationale donnée est distribuée par une normale de moyenne 90 km/h et d'écart-type 16 km/h.
    a) Quelle est la proportion de véhicules roulant à plus de 110 km/h ?
    b) Quelle est la proportion de véhicules roulant entre 70 km/h et 102 km/h ?
    c) On veut diviser les véhicules en trois catégories d'effectif égal, les « lents », les « modérés » et les « rapides ». Quels sont les intervalles de vitesse qui les délimitent ?

31. Le temps nécessaire aux étudiants pour terminer une interrogation est une variable normale de moyenne 90 minutes et d'écart type 15 minutes.
    a) Quelle est la proportion d'étudiants qui terminent en moins de 2 heures ?
    b) Quelle devrait être la durée de l'épreuve si on souhaite que 90% des étudiants puissent la terminer ?

32. On suppose que la taille des individus d'une population est distribuée normalement. Quels sont les paramètres de la distribution sachant que :
    - 58% des individus ont une taille < 1,75m
    - 38% des individus ont une taille comprise entre 1,75m et 1,8m

33. On a mesuré la durée de vie d'une grande quantité d'ampoules électriques : 20% de celles-ci ont expiré après 1191 heures de fonctionnement, et après 1300 heures, il ne restait plus que 9% d'ampoules qui fonctionnaient encore. En admettant que la durée de vie des ampoules suive une distribution normale :
    a) Déterminez les paramètres de cette distribution
    b) Quelle est la durée de vie séparant les 40% d'ampoules les plus fragiles des 60% les plus résistantes ?

34. Le désert de l'Arizona est célèbre par une espèce géante de cactus (le *Saguaro*) qui peut atteindre jusqu'à 15 mètres de hauteur. Des botanistes ont mesuré la taille d'un grand nombre de ces cactus. D'après leurs statistiques, 10% des cactus dépassent 12 mètres de hauteur et 39% dépassent 10 mètres de hauteur.

a) En supposant que la distribution de la hauteur des cactus est normale, donnez les paramètres de la distribution de la taille des cactus.

b) Calculez la proportion de cactus qui dépassent

14 mètres de hauteur.

35. On lance 400 fois une pièce de monnaie. Estimez la probabilité que le nombre de « pile » soit compris entre 180 et 220 inclus.

36. Soit une binomiale B(20000, 1/3). Estimez :

a) P[$6600 \leq X \leq 6800$]
b) P[$X > 6750$]

37. Au jeu de la roulette (37 numéros dont 18 noirs), une personne mise toujours sur un numéro noir et ceci 100 fois de suite.

a) Calculez l'espérance mathématique du nombre de « noir » ainsi que l'écart type
b) Estimez la probabilité que le nombre de noir soit compris entre 50 et 60 inclus

38. La nuit du nouvel an, 400 personnes ont été contrôlées à un point stratégique du réseau autoroutier. L'expérience a montré que la probabilité d'être contrôlé positif à l'alcool à cette occasion est de 0.1.

a) Donnez la distribution de probabilité du nombre de conducteurs positifs à ce point de contrôle.
b) Quelles sont la moyenne et l'écart type de cette distribution ?
c) Estimez la probabilité d'avoir plus de 30 conducteurs positifs à cet endroit.

39. On estime que chaque jour, environ 1000 pirates informatiques essayent de s'introduire dans une base de données hautement sécurisée. La probabilité qu'un pirate donné réussisse son coup est de 0.004.

a) Donnez la distribution du nombre de pirates s'introduisant chaque jour dans la base de données. Quels sont sa moyenne et son écart-type ?
b) Estimez la probabilité que plus de 5 pirates arrivent à s'introduire dans le système par jour ?

Chapitre 3 – Distributions à deux dimensions

1. Sachant que le tableau ci-dessous contient les valeurs d'une distribution à deux dimensions d'un couple de variables aléatoires discrètes et indépendantes, complétez les cases vides.

$X \quad Y$	100	150	200	$p_{i.}$
20		0.3		
30		0.1	0.12	
$p_{.j}$	0.12			

Calculez les espérances mathématiques de X et de Y, la covariance de ces variables aléatoires, leur coefficient de corrélation. Calculez $P[X = 20$ et $Y \geq 150]$.

2. On veut comparer dans une classe de 20 élèves les cotes de mathématique et de physique. Les couples de points obtenus pour ces interrogations sont les suivants :

(5,7), (8, 12), (14, 13), (10, 15), (17, 18), (14, 16), (9, 9), (12, 7), (3, 0), (5, 9),
(14, 12), (10, 14), (10, 7), (15, 18), (20, 17), (6, 10), (10, 9), (12, 14), (8, 12), (14, 15)

Calculez l'équation de la droite de régression des deux cotes, et représentez-la dans un graphique. Quelle est la cote de physique la plus probable d'un étudiant qui obtient 11 en mathématique ?

3. On a gardé uniquement les cartes « images » (4 rois, 4 dames, 4 valets) d'un jeu de 52 cartes : on dispose donc de 12 cartes. De ce jeu, on tire 2 fois une carte avec remise intermédiaire entre ces 2 tirages. A chacun des 2 tirages est associé un 'gain' (qui peut être une perte) permettant de définir les deux variables aléatoires suivantes :

X_1 : gain de la 1ère carte tirée

X_2 : gain de la 2ème carte tirée

Les gains sont définis comme suit :

- Pour X_1 : un roi rapporte 3 €, une dame ne rapporte rien et un valet fait perdre 5 €.
- Pour X_2 : un roi rapporte 5 € à la suite d'un 1er roi et 3 € autrement, une dame rapporte 1 € à la suite d'une 1ère dame et 0 € autrement, un valet fait toujours perdre 5 €.

a) Donnez les distributions de probabilité de ces 2 variables.

b) Calculez les espérances mathématiques de ces 2 variables.

c) Calculez les écart-types de ces 2 variables.

d) Donnez la distribution de probabilité à 2 dimensions du couple de variables aléatoires (X_1, X_2).

e) Calculez le coefficient de corrélation de X_1 et X_2.

Chapitre 4 – Inférence statistique

1. Un magasin de meubles étudie les dépenses de ses clients au cours de leurs achats. Les statistiques réalisées durant les 24 derniers mois indiquent qu'un client dépense en moyenne 236 € avec un écart-type de 48 €.

a) Donnez la distribution de la moyenne des dépenses pour un échantillon aléatoire de 36 clients qui ont fait des achats durant cette période
b) Quelle est la probabilité que pour cet échantillon de 36 clients, la moyenne de leurs achats ait été inférieure à 220 € ?
c) Quelle est la probabilité qu'un client ait dépensé moins de 220 € ?

2. Les étudiants d'une grande université ont obtenu une moyenne de 72 points à un test d'aptitude, avec un écart-type de 16 points. Quelle est la probabilité que la moyenne d'un échantillon aléatoire de 100 étudiants soit supérieure à 74 points?

3. Une firme de transport dispose de 5 camions. En moyenne, 3 de ces camions tombent en panne chaque mois et ce dans un ordre aléatoire. Sachant que les frais de réparation des 5 camions s'élèvent respectivement à 150, 125, 130, 175 et 140 €,
a) calculez la moyenne et l'écart-type du prix moyen des frais de réparations mensuels des camions
b) quelle est la probabilité que le total des frais de réparations pour un mois donné soit supérieur à 480 € ?

4. Le montant des commandes faites à une grosse compagnie est donné par une distribution normale de moyenne 3600 € et d'écart-type 750 €. On extrait de l'ensemble des commandes un échantillon aléatoire de 100 commandes. Quelle est la probabilité que la moyenne de l'échantillon soit comprise entre 3500 € et 3700 € ?

5. Soit une population de moyenne 200 et d'écart-type 15. Dans quels intervalles de valeurs centrées sur μ la moyenne d'échantillonnage a-t-elle 95.44% de chance de se situer pour un échantillon de taille 36 ? pour un échantillon de taille 49 ? pour un échantillon de taille 64 ?

6. Les données suivantes représentent un échantillon aléatoire simple de températures relevées dans un groupe de 24 villes du sud des Etats-Unis, le même jour et à la même heure.

40	36	39	31	35	38	30	44
37	33	37	34	34	30	39	39
39	42	35	34	32	35	39	38

a) Donnez une estimation ponctuelle de la véritable température moyenne.
b) Calculez l'écart-type de l'échantillon.
c) Construisez un intervalle de confiance pour la température moyenne avec un niveau de confiance de 99% .

7. Les données suivantes représentent un échantillon aléatoire simple des résultats obtenus par 32 étudiants d'une université lors d'un test de QI.

137	141	128	132	129	122	140	119
126	133	121	138	111	124	121	116
120	127	129	122	113	125	126	131
117	132	124	116	135	123	126	131

a) Calculez une estimation ponctuelle du QI moyen des étudiants de l'université.
b) Calculez l'écart-type de l'échantillon.

c) Construisez un intervalle de confiance pour le QI moyen à un niveau de confiance de 95%.

8. Une étudiante veut déterminer la somme moyenne qu'elle a dépensé par jour durant le mois de septembre. Pour un échantillon de 10 jours, la somme moyenne dépensée était de 6.24€ par jour avec un écart-type s' de 1.20 €. Estimez la moyenne des dépenses par un intervalle de confiance de 90%.

9. Le service de répondeurs téléphoniques d'une firme veut estimer le nombre moyen d'appels reçus par jour. La moyenne d'un échantillon de 50 jours est de 326 appels par jour avec s' = 48.

a) Calculez une estimation de l'écart type de la distribution d'échantillonnage.
b) Quel est l'intervalle de confiance à 90% pour le nombre moyen d’appels ?

10. La taille moyenne de 20 élèves d'une école est de 1.65 m avec un écart type de 20 cm. Construisez un intervalle de confiance pour la taille moyenne de tous les élèves avec un risque d'erreur de seulement 5%.

11. Une personne désire acquérir un magasin de jouets situé dans un aérogare. A partir de données calculées dans un très grand nombre de magasins comparables, elle parvient à estimer l'écart-type des dépenses de clients dans ce type de magasin : σ = 120 €. Quelle taille d'échantillon faut-il prendre pour estimer la dépense moyenne des clients à 40 € près avec une erreur de 1%, à 60 € près avec une erreur de 5%?

12. Un agent d'assurances affirme que le montant moyen payé pour indemniser les personnes ayant subi des blessures corporelles lors d'accidents de voiture est de 8500 €. Un détenteur de police a examiné 36 cas d'indemnisation pour blessures corporelles et a obtenu une moyenne de 9315 €. En supposant que σ = 2600 €, testez l'affirmation de l'agent au niveau de confiance de 95%.

13. Une machine doit fabriquer à l'heure des milliers de boulons dont le diamètre devrait être de 14mm. L'expérience montre que σ = 0.15mm et que les diamètres des boulons se distribuent suivant la loi normale. Chaque heure on prélève un échantillon aléatoire de 6 boulons. La dernière vérification a donné (en mm):

14.15 13.85 13.95 14.20 14.30 14.35

Avec un risque d’erreur de 0.01, peut-on conclure que la machine est bien réglée?

14. Un propriétaire de bar pense qu'il vend quotidiennement en moyenne 17 litres d'une certaine boisson. Son associé n'y croit pas. Un échantillon de 36 jours a donné 15 litres avec un écart type de 4 litres. L'estimation du propriétaire est-elle crédible au seuil de 10%?

15. Le directeur d'une compagnie de livraison de gravier estime que la masse moyenne des livraisons est de 2000 kg. Un des actionnaires de la compagnie pense que cette estimation est exagérée. Il prélève au hasard un échantillon de 25 livraisons et lui trouve une moyenne de 1980 kg avec un écart type de 110 kg. L'actionnaire peut-il rejeter l'estimation du directeur avec un seuil de signification de 5%?

16. Le propriétaire d'une ferme d’élevage prétend que le poids moyen de ses poulets est de 1.6 kg. Un grossiste pense que la moyenne est en réalité inférieure à ce que prétend le fermier. La moyenne d'un échantillon de 24 poulets est de 1.5 kg avec s’ = 100 g. Testez avec un risque d’erreur de 5%.

17. Un négociant en vin s’intéresse à la contenance des bouteilles d’un cru déterminé. Il se demande si la contenance moyenne n’est pas inférieure à la contenance légale de 75 cl. A cet effet, il mesure le contenu de 10 bouteilles prises au hasard et obtient les valeurs suivantes :

73.2 – 72.6 – 74.5 – 75 – 75 – 73.7 – 74.1 – 75.1 – 74.8 – 74

D’après ces données, peut-il en conclure que le contenu moyen est inférieur à 75 cl avec un risque d’erreur de 5%?

Solutions des exercices

Chapitre 1 – Introduction au calcul des probabilités

1. a) Ω = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66} – # Ω = 36
   b) Ω = {{1,1}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,2}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,3}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,4}, {4,5}, {4,6}, {5,5}, {5,6}, {6,6}} – # Ω = 21
   c) Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} – # Ω = 11
   d) Ω = {oui, non} – # Ω = 2

2. P(somme = 7) = 6/36 = 1/6
   P(somme ≥ 10) = 1/6

3. P(point pair) = 5/8

4. P(le premier gagne) = 4/7 ; P(le deuxième gagne) = 2/7 ; P(le troisième gagne) = 1/7

5. a) P(A ∩ B) = P(obtenir un as rouge) = 2/52 = 1/26
   b) P(B ∩ C) = P(obtenir un coeur) = 13/52 = 1/4
   c) P(A U C) = P(obtenir un as ou un coeur) = 16/52 = 4/13
   d) P(B U C) = P(obtenir une carte rouge) = 26/52 = 1/2

6. a) P(aucun des numéros choisis au tirage) = C(36, 6)/C(42,6) = 0.3713…
   b) P(gagner au rang 5) = C(6,3)*C(36,3)/C(42,6) = 0.027…

7. a) surface cible/surface du carré = 400π / 2500 = 0.502…
   b) surface cercle au centre/surface du carré = 25π / 2500 = 0.0314…
   c) 0

8. P(A U B) = 0.6, P($\overline{A}$) = 0.7, P($\overline{B}$) = 0.5, P(A ∩ $\overline{B}$) = 0.1, P(B ∩ $\overline{A}$) = 0.3, P($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$) = 0.4, P($\overline{A}$ U $\overline{B}$) = 0.8.

9. 17/27 = 0.6296...

10. 0.35

11. a) 0.8 b) 0.04 c) 0.048

12. a) 25/72 = 0.3472...
    b) 1 – $(5/6)^3$ = 91/216 = 0.4213
    c) 20/36 = 0.5555….

13. a) 12/169 = 0.071 b) $36/13^3$ = 0.0164 c) 1/2704 = 0.0003698

14. $$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C)\\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)\\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))\\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C))\\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

15. P(A) = 0.26

P(A/B) = P(A ∩ B) / P(B) = 0.078/0.3 = 0.26 → A et B sont indépendants

16. a) 3/51 = 0.0588
    b) 4/52 * 3/51 = 0.0045
    c) 1 – 48/52 * 47/51 = 0.1493
17. 10/20 * 9/19 * 8/18 = 0.105…

18. P(A gagne) = 3/10 = 0.3
    P(B gagne) = 7/10 * 3/9 = 0.233…
    P(C gagne) = 7/10 * 6/9 * 3/8 = 0.175…
    P(D gagne) = 7/10 * 6/9 * 5/8 * 3/7 = 0.125…

19. P(A/B) = 3/4 P(B/A) = 1/2 $P(\overline{A}/\overline{B}) = 5/8$ $P(\overline{B}/\overline{A}) = 5/6$

20. P(A) = 1/2 P(B) = 1/2 P(A/B) = 2/3 P(B/A) = 2/3

21. a) 0.54 b) 0.08 c) 0.375 d) 0.0555…

22. a) 5/8 * 4/7 * 3/6 = 0.1786
    b) 3/8 * 6/10 * 2/7 = 0.06429
    c) 3/8 * 4/10 * 3/9 = 0.05
    d) 5/7 = 0.7143

23. a) $(5/8)^3 = 0.2441$
    b) $(3/8)^2 * 6/10 = 0.08437$
    c) $3/8 * (4/10)^2 = 0.06$
    d) 5/8 = 0.625

24. a) 5/9 b) 4/9 c) 5/9

25. a) 0.42 b) 0.74

26. a) 0.89 b) 0.1 c) 0.855

27. a) 1/2 b) 2/9 c) 13/18 d) 5/18

28. 15/31 = 0.48387…

29. 0.05569…

30. P(faire 421 avec le dé A) = 2/216
    P(faire 421 avec le dé B) = 4/216
    P(faire 421 avec le dé C) = 8/216

    On en déduit : P(A/421) = 1/12
    P(B/421) = 1/4
    P(C/421) = 2/3

31. a) 0.05 b) 0.19… c) 0.0065…

32. a) 0.01666… b) 0.4

33. a) 0.3417 b) 0.2439

34. a) 0.1714 b) 0.5149 c) 0.1667 d) 0.0294

Chapitre 2 – Variables aléatoires et grandes distributions théoriques

1. a)

x_i	p_i
–6	1/6
–4	1/6
–2	1/6
1	1/6
3	1/6
5	1/6

E[X] = –0.5 ; σ = 3.8622…

b)

x_i	p_i
–15	13/20
20	7/20

E[X] = –2.75 € ; σ = 16.69 €

c)

x_i	p_i
–5	0.75
10	0.25

E[X] = –1.25 € ; σ = 6.50 €

d)

x_i	p_i
0	8/27
1	4/9
2	2/9
3	1/27

E[X] = 1 ; σ = 0.8164…

2.

x_i	p_i
0	0.072
1	0.104
2	0.176
3	0.648

E[X] = 2.4 ; σ = 0.938...
P[X ≥ 2] = 0.176 + 0.648 = 0.824

3.

x_i	p_i
2	1/9
2.3	7/18
2.5	7/18
2.7	1/9

E[X] = 2.39 € ; σ = 0.17 €

4. a)

x_i	p_i
0	0.512
1	0.384
2	0.096
3	0.008

c) E[X] = 0.6 ; σ = 0.6928…
d) Frais de réparation : c'est une autre variable aléatoire Y de valeurs {0, 60, 95, 130} (probabilités identiques à X)
E[Y] = 33.20 €

5. a)

x_i	p_i
–1	25/36
2	10/36
5	1/36

b) E[X] = 0 € ; σ = 1.58 €
Le jeu est équitable. En jouant 20 fois de suite, l'espérance de gain est toujours 0 €

c) P[6 avec dé truqué] = 3/8, P[i avec dé truqué] = 1/8 pour i = 1, 2, 3, 4, 5

x_i	p_i
–1	25/48
2	5/12
5	1/16

Dans ce cas, E[X] = 0.625 € → il doit jouer 80 fois pour espérer gagner 50 €.

6. a) Pour avoir une aire de 1, le sommet est à hauteur 0.1
b) f(t) = 0.01t si $0 \le t \le 10$
–0.01t + 0.2 si $10 \le t \le 20$

c) μ = 10 et σ = 4.082

7. a) $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1$

b) F(x) = ½ - ½ cos x

c) par symétrie, E[X] = $\frac{\pi}{2}$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$, d'où σ = 0.6836… = 39.17…°

d) 1/2

8. a) $\int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 1$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{4} x e^{-x/4} dx = 4$

c) $P[X \geq 2] = \int_2^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 0.6065...$

d) $P[X \leq 6] = \int_0^6 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 0.7768...$

e) $P[X \geq 4 \mid X \geq 2] = \frac{P[X \geq 4]}{P[X \geq 2]} = 0.6065...$

9. $1 – (0.48)^5 = 0.9745…$

10. a) $(0.6)^5 = 0.07776$ b) $5*0.4*(0.6)^4 = 0.2592$ c) $1 – (0.6)^5 = 0.92224$

11. a) 0.1156 b) 0.1368

12. 0.9884…

13. $1 – (5/6)^n > 0.1 \rightarrow n \geq 13$

14. a) 9/37 = 0.2432 b) $10*(9/37)*(28/37)^9 = 0.198$

c) 0.74 d) $1 – (28/37)^n > 0.9 \rightarrow n = 9$

15. a) $(1/32)^{10}$ b) $1 – (31/32)^n > 0.6 \rightarrow n \geq 29$ c) 1/32

16. $0.5^{20} *(C_{20}^9 + C_{20}^{10} + C_{20}^{11}) = 0.4966$

17. a) X ≡ nombre de « faces » ~ B(100, 0.5) ; E[X] = 50 ; $\sigma = 5$
b) X ≡ nombre d'as ~ B(30, 1/6) ; E[X] = 5 ; $\sigma = 2.041…$
c) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(50, 1/2) ; E[X] = 25 ; $\sigma = 3.535…$

18. X ≡ nombre de puits trouvés ~ B(12, 0.2)
P[de ne pas être en faillite] = $P[X \geq 3] = 1 – P[X=0] – P[X=1] – P[X=2] = 0.44165…$

19. a) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(10, 0.2)

$$P[X \geq 7] = \sum_{k=7}^{10} C_{10}^{k} 0.2^{k} 0.8^{10-k} = 0.001577$$

b) X ≡ nombre de réponses correctes ~ B(10, 0.5)

$$P[X \geq 7] = \sum_{k=7}^{10} C_{10}^{k} 0.5^{k} 0.5^{10-k} = 0.333$$

20. X ≡ nombre de tirs atteignant la cible ~ B(10, 0.2)

P[couler la cible] = P[X ≥ 4] = 1 – P[X=0] – P[X=1] – P[X=2] – P[X=3] = 0.12

21. a) Population grande → X ~ B(5, 0.6)
b) μ = 3 ; σ = 1.095…
c) P[X = 3] = 0.3456
d) P[X ≥ 3]= 0.6826

22. X ≡ nombre de garçons dans une famille de 4 enfants ~ B(4, 0.5)

a) Nombre espéré de familles ayant au moins un garçon : 500 * P[X ≥ 1] ≅ 469
b) Nombre espéré de familles ayant 1 ou 2 filles : 500 * P[2 ≤ X ≤ 3] ≅ 313

23. X ≡ nombre de pièces en bon état ~ B(20, 0.95)

$$P[X > 17] = \sum_{k=18}^{20} C_{20}^{k} 0.95^{k} 0.05^{20-k} = 0.9246...$$

E[X] = 19 ; σ = 0.9746...

24. a) valeurs possibles : tout entier positif ou nul → distribution de Poisson

b) m = 9 d'où $P[X < 5] = \sum_{k=0}^{4} e^{-9} \frac{9^k}{k!}$ = 0.0549… ; σ = 3

c) le nombre X de mauvaises journées sur une semaine est une B(5, 0.0549)

$$P[X \geq 3] = \sum_{k=3}^{5} C_{5}^{k} 0.0549^{k} 0.945^{5-k} = 0.001526...$$

25. Elles se croisent au point d'abscisse 10 (point d'inflexion)

26. Oui car la N(5,1) étant plus resserrée, son sommet est plus haut que celui de la N(5, 2) au profil plus étalé

27. a) P[Z < 1.34] = 0.9099
b) P[0.57 < Z < 1.63] = 0.2327
c) P[–0.68 < Z < 1.04] = 0.6026

d) $P[Z > -0.5] = 0.6915$

28. a) $P[56 < X < 83] = P[-0.56 < Z < 0.52] = 0.4108$
b) $P[X > 89] = P[Z > 0.76] = 0.2236$
c) $P[40 < X < 67] = P[-1.2 < Z < -0.12] = 0.3371$
d) $P[X = 82] = 0$
29. $P[X \leq 50000] = 0.1587$

30. a) $P[X > 110] = P[Z > 1.25] = 0.1056$
b) $P[70 < X < 102] = P[-1.25 < Z < 0.75] = 0.6678$
c) on cherche z tel que $F(z) = 2/3 \rightarrow z = 0.43$
Les valeurs délimitant les intervalles sont $90 \pm z*16$, c'est-à-dire 83.12 km/h et 96.88 km/h

31. $P[X \leq 120] = 0.9772 \rightarrow 97.72\%$
$P[X \leq d] = 0.9$ d'où d = 109.2min. Donc, la durée de l'épreuve devrait être de l'ordre de 109 minutes pour que 90% des étudiants puissent la terminer.

32. Mise en équation : $P[X \leq 1.75] = 0.58$ et $P[X \leq 1.8] = 0.96$
$\rightarrow \mu = 1.743$m et $\sigma = 0.032$m

33. a) $X \sim N(1233, 50)$ b) 1220.5

34. a) $X \sim N(9.44, 2)$ b) 0.0113

35. $X \sim B(400, 0.5)$. On approxime avec une $N(200, 10)$

$P[180 \leq X_B \leq 220] = P[179.5 \leq X_N \leq 220.5] = P[-2.05 \leq Z \leq 2.05] = 0.9596$

36. $X \sim B(20000, 1/3)$. On approxime avec une $N(6666.66\ldots, 66.66\ldots)$

a) $P[6600 \leq X \leq 6800] \sim P[6599.5 \leq X_N \leq 6800.5] = P[-1.01 \leq Z \leq 2.01] = 0.8216$
b) $P[X > 6750] \sim P[X_N \geq 6750{,}5] = P[Z \geq 1.26] = 0.1038$

37. $X \sim B(100, 18/37)$.
a) $\mu = 48.648\ldots$ et $\sigma = 4.998\ldots$
b) On approxime avec une $N(48.65, 4.998)$. $P[49.5 \leq X \leq 60.5] = P[0.17 \leq Z \leq 2.37] = 0.4236$

38. a) $X \sim B(400, 0.1)$
b) $\mu = 40$ et $\sigma = 6$
c) On approxime avec une $N(40, 6)$. $P[X_B > 30] = P[X_N \geq 30.5] = P[Z \geq -1.58] = 0.9429$

39. a) $X \sim B(1000, 0.004)$; $\mu = 4$ et $\sigma = 1.995\ldots$
b) $P[X_B > 5] = P[X_N > 5.5] = P[Z > 0.75] = 0.2266$

Chapitre 3 – Distributions à deux dimensions

1.

X \ Y	100	150	200	$p_{i.}$
20	0.09	0.3	0.36	0.75
30	0.03	0.1	0.12	0.25
$p_{.j}$	0.12	0.4	0.48	1

E[X] = 168, E[Y] = 22.5
$P[X = 20 \text{ et } Y \geq 150] = 0.36$

2. $E[X] = 10.8$, $E[Y] = 11.7$, $\sigma_X = 4.2261$, $\sigma_Y = 4.4057$, $\sigma_{XY} = 14.39$, $r = 0.77$
   Equation de la droite de régression : $y = 0.8x + 3$
   11 en math : cote la plus probable en physique 11.8

3. a) Distribution de X : $P[X = –5] = 1/3$, $P[X = 0] = 1/3$, $P[X = 3] = 1/3$
   Distribution de Y : $P[Y = –5] = 1/3$, $P[Y = 0] = 2/9$, $P[Y = 1] = 1/9$, $P[Y = 3] = 2/9$, $P[Y = 5] = 1/9$
   b) $E[X] = –2/3$, $E[Y] = –1/3$
   c) $\sigma_X = 3.3$, $\sigma_Y = 3.62$
   d)

X Y	–5	0	1	3	5
–5	1/9	1/9	0	1/9	0
0	1/9	0	1/9	1/9	0
3	1/9	1/9	0	0	1/9

   e) $\sigma_{XY} = 8/9$, $r = 0.0744$

Chapitre 4 – Inférence statistique

1. a) $\overline{X} \sim N(236, 8)$ b) $P[\overline{X} \le 220] = 0.0228$ c) $P[X \le 220] = 0.3707$

2. $\overline{X} \sim N(72, 1.6)$ $P[\overline{X} > 74] = 0.1056$

3. a) $\mu_{\bar{x}} = 144$ € ; $\sigma_{\bar{x}} = 7.23$ € ($\sigma = 17.72$ €)
   b) $P[\overline{X} > 160] = 0.0136$

4. $\overline{X} \sim N(3600, 75)$
   $P[3500 < \overline{X} < 3700] = 0.8164$

5. Si n = 36, $\overline{X} \sim N(200, 2.5)$. On cherche z tel que $P[200 – z^*2.5, 200 + z^*2.5] = 0.9544$; z = 2 d'où l'intervalle cherché est [195, 205]
   Pour n = 49, on trouve [195.71, 204.29]
   Pour n = 64, on trouve [196.25, 203.75]
6. a) estimation de $\mu = \bar{x} = 36.25$
   b) s = 3.57
   c) la distribution de $\overline{X}$ est une Student à 23 d.l., avec $\mu_{\bar{x}} = 36.25$ et $\sigma_{\bar{x}} = 0.744$
   t = 2.807 ; IC = [34.16, 38.33]

7. a) estimation du QI moyen = $\bar{x} = 126.09$
   b) s = 7.543
   c) $\overline{X} \sim N(126.09, 1.35)$; IC = [123.435, 128.745]

8. n = 10 $\bar{x} = 6.24$ € s' = 1.20 € $\sigma_{\bar{x}} = 0.38$ € t = 1.833

   IC = [5.54, 6.94]

9. n = 50 $\bar{x} = 326$ s' = 48 $\sigma_{\bar{x}} = 6.79$ z = 1.64

   IC = [314.8, 337.2]

10. n = 20 $\bar{x} = 1.65$m s = 0.2m $\sigma_{\bar{x}} = 0.0459$m t = 2.093

    IC = [1.554m, 1.746m]

11. a) z * 120/ $\sqrt{n}$ = 40 avec z = 2.58 → n = 60
    b) z * 120/ $\sqrt{n}$ = 60 avec z = 1.96 → n = 16

12. H_0 : μ = 8500 € (test bilatéral)

    n = 36 $\bar{x}$ = 9315 € σ = 2600 € $\sigma_{\bar{x}}$ = 433.33 € z = 1.96

    IC = [8465, 10164] → l'hypothèse est acceptée

13. H_0 : μ = 14 mm (test bilatéral)

    n = 6 $\bar{x}$ = 14.13 mm σ = 0.15 mm $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.061237 mm z = 2.58

    IC = [13.97, 14.29] → l'hypothèse est acceptée

14. H_0 : μ < 17 l (test unilatéral)

    n = 36 $\bar{x}$ = 15 l s' = 4.0567 l $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.676 l z = 1.28

    IC =] – ∞, 15.865] → l'hypothèse est acceptée (ou autrement dit, l'hypothèse de départ, à savoir que μ = 17 l, est rejetée)

15. H_0 : μ < 2000 kg (test unilatéral)

    n = 25 $\bar{x}$ = 1980 kg s' = 112.27 kg $\sigma_{\bar{x}}$ = 22.45 kg t = 1.711

    IC =] – ∞, 2018.41] → l'hypothèse est rejetée (autrement dit, il est possible que la vraie moyenne μ soit égale à 2000 kg)

17. H_0 : μ < 75 cl (test unilatéral)

    n = 10 $\bar{x}$ = 74.2 cl s' = 0.84 cl $\sigma_{\bar{x}}$ = 0.26 cl t = 1.833

    IC =] – ∞, 74.67] → l'hypothèse est rejetée (il est donc possible que la vraie moyenne μ soit égale à 75 cl)

Aide-mémoire

Distribution binomiale $P[X=k]=C_n^k p^k q^{n-k}$

Distribution de Poisson $P[X=k]=e^{-m}\frac{m^k}{k!}$

Distribution normale $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Table de la distribution normale réduite

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,5	0,9998									
4,0	1									

Distributions à deux dimensions $\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y$ $\quad r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Droite de régression $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ $\quad b = \mu_y - a\mu_x$

Moyenne échantillonnée $\mu_{\bar{x}} = \mu$ $\quad \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ $\quad \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$

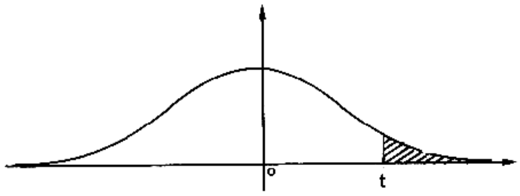
Intervalles de confiance

σ connu : $[\, \bar{x} - z\,\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x} + z\,\sigma_{\bar{x}} \,]$

σ inconnu : $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{s'}{\sqrt{n}}$ $\quad s' = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\, s$

$n \geq 30$: $[\, \bar{x} - z\,\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x} + z\,\sigma_{\bar{x}} \,]$ $\quad n < 30$: $[\, \bar{x} - t\,\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x} + t\,\sigma_{\bar{x}} \,]$

Table de la distribution de Student



d.l.	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	d.l.	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.65	18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	23	1.319	1.714	2.068	2.500	2.807
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	27	1.314	1.793	2.052	2.473	2.771
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
16	1.337	1.746	2.210	2.583	2.921	120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	–	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576