Haute École Bruxelles-Brabant
École Supérieure d'Informatique
Rue Royale, 67. 1000 Bruxelles
02/219.15.46 – esi@he2b.be

Physique

31 janvier 2021

Bachelor en Informatique et Systèmes
PHYIR2

D. P. Bischop (BIS)

Document produit avec LaTeX.
Version du 31 janvier 2021.

Table des matières

Première partie

Électronique analogique

Chapitre 1

Courant et tension électriques

1.1 La matière

À notre échelle, la matière telle que nous la connaissons est constituée d'atomes. Chaque atome est lui-même constitué d'un noyau contenant des protons et des neutrons. Ces particules sont fortement liées entre-elles via une des quatre forces (interactions) fondamentales de la nature : la force forte. Ce noyau est entouré d'un nuage d'électrons. Les électrons et les protons portent une charge électrique élémentaire de $1,6 \ . \ 10^{-19}$ Coulomb (C), positive dans le cas du proton et négative dans le cas de l'électron. Les neutrons sont quant à eux électriquement neutres. Les électrons interagissent électriquement avec les protons qui composent le noyau via la force de Coulomb. C'est cette force qui maintient les électrons autour du noyau. Dans des conditions ≪ normales ≫, l'atome contient un nombre identique de protons et d'électrons (nombre atomique) et est donc électriquement neutre. Le rapport de la taille de l'atome sur celle de son noyau est de l'ordre de 10^5, ce qui signifie que les atomes et la matière sont essentiellement composés de ≪ vide ≫ !
Nous distinguerons, du point de vue des composants des circuits électroniques, trois types de matériau :

- les **conducteurs**, dans lesquels les électrons périphériques (les plus éloignés du noyau) sont libres de se déplacer sous l'"effet d'un champ électrique (c'est-à-dire d'une tension ou d'une différence de potentiel) ;
- les **isolants ou diélectriques**, dans lesquels les électrons sont fortement liés aux noyaux et ont un déplacement limité ;
- les **semi-conducteurs** qui ont un caractère hybride. Dans certaines conditions ils se comportent comme des isolants et dans d'autres comme des conducteurs.

1.2 Courant électrique

Un courant électrique correspond à un mouvement d'ensemble de particules chargées (ex : ions positifs, ions négatifs, électrons).

Définition 1.2.1

L'intensité du courant électrique, à un instant t, qui traverse la section S d'un conducteur est définie comme la quantité de charges qui traverse cette section par unité de temps à cet instant :

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

L'intensité du courant électrique se mesure en ampère (A).
1 ampère = 1 coulomb/seconde.

La mesure de l'intensité d'un courant électrique s'effectue à l'aide d'un ampèremètre. Celui-ci se branche en série dans un circuit électrique (voir plus loin).

Définition 1.2.2

Par convention, le sens du courant correspond au sens de déplacement des charges positives. Dans un circuit électrique, ce sont les électrons qui se déplacent. Dans ce cas, le sens du courant est opposé à celui du déplacement des électrons.

1.3 Tension

Définition 1.3.1

La tension ou différence de potentiel électrique entre les points A et B d'un circuit électrique correspond au travail de la force électrique nécessaire pour déplacer une charge unité du point A au point B. La tension électrique se mesure en volt (V).
1 volt = 1 joule/coulomb.

La mesure d'une tension électrique s'effectue à l'aide d'un voltmètre. Celui-ci se branche en parallèle dans un circuit électrique (voir plus loin).
Cette définition, bien que fondamentale, nous sera de peu d'utilité pour la compréhension des circuits électroniques. Nous essayerons tout au long de ce chapitre de développer une compréhension intuitive de cette notion à l'aide d'analogies. Dans un premier temps, nous nous contenterons de la définition suivante :

Une tension ou différence de potentiel est ce qui est nécessaire pour qu'un courant traverse un conducteur.

1.4 Puissance électrique

Définition 1.4.1

La puissance électrique P correspond à un transfert d'énergie par unité de temps :

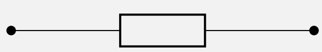
$$P = U \cdot I$$

La puissance électrique se mesure en watt (W).
1 watt = 1 joule/seconde.

1.5 Vocabulaire et conventions

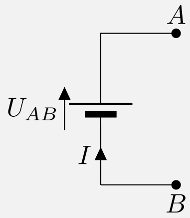
Définition 1.5.1

Un dipôle est un composant électronique à deux bornes.
Par exemple : un générateur, une résistance, un condensateur, une bobine, ...
Symbolisé dans les schémas électroniques par :



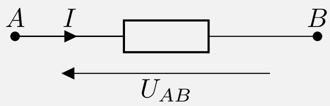
Définition 1.5.2

Un dipôle générateur est une source d'énergie électrique (source de courant ou source de tension). Le générateur transforme une autre forme d'énergie (par exemple énergie chimique dans le cas des piles) en énergie électrique. Dans un dipôle générateur, le courant électrique circule du du point de potentiel le plus bas (B) vers le point de potentiel le plus élevé (A).
Une source de tension continue (batterie, pile ou alimentation) sera symbolisée dans les schémas électroniques par :



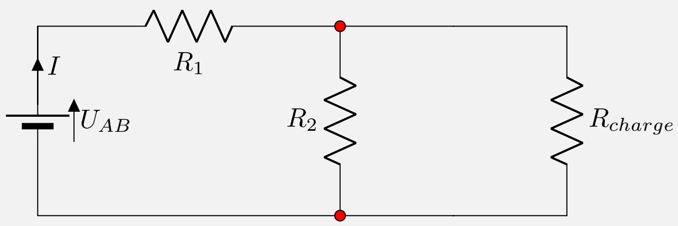
Définition 1.5.3

Un dipôle récepteur transforme l'énergie électrique reçue en une autre forme d'énergie (chaleur dans le cas d'une résistance, énergie mécanique dans le cas d'un moteur électrique, énergie lumineuse dans le cas d'une LED). Dans un dipôle récepteur, le courant électrique circule du point de potentiel le plus élevé (A) vers le point de potentiel le plus bas (B).



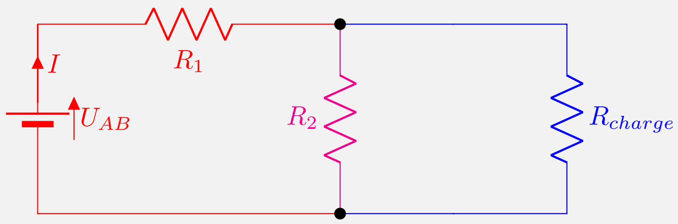
Définition 1.5.4

Un nœud, dans un circuit électronique, désigne la jonction entre plusieurs dipôles et/ou fils de connexion (généralement plus grand ou égal à 3).
Dans le circuit ci-dessous, les nœuds sont représentés en rouge.



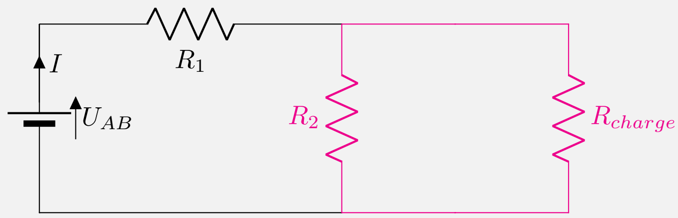
Définition 1.5.5

Une branche est un segment d'un circuit délimité par 2 nœuds.
Dans le circuit ci-dessous, il y a 3 branches (représentées dans des couleurs différentes).



Définition 1.5.6

Une maille est un ensemble de branches qui forment un circuit fermé. En parcourant ce circuit fermé, on ne passe qu'une seule fois par un même nœud.
Le circuit ci-dessous est constitué de 3 mailles (nous en avons représenté qu'une seule en couleur).



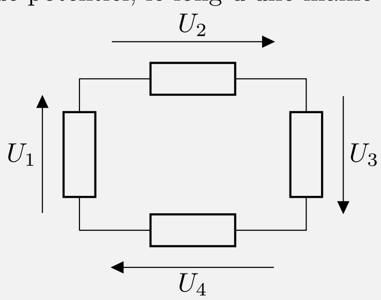
1.6 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff reformulent, dans le cadre des circuits électriques, deux grandes lois de conservation en physique :

- ▷ la loi de la conservation de l'énergie : loi des mailles ;
- ▷ la loi de la conservation de la charge : loi des nœuds.

Loi des mailles

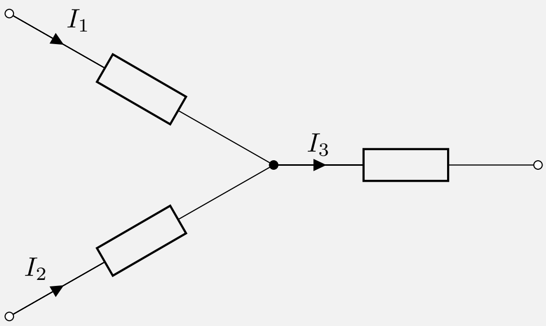
La somme des différences de potentiel, le long d'une maille dans un circuit, est nulle.



$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$

Loi des nœuds

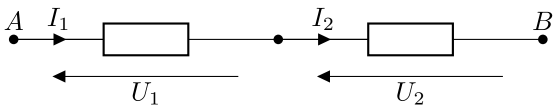
En un nœud d'un circuit, la somme des courants entrants par ce nœud doit être égale à la somme des courants sortants par ce nœud.



$I_1 + I_2 = I_3$

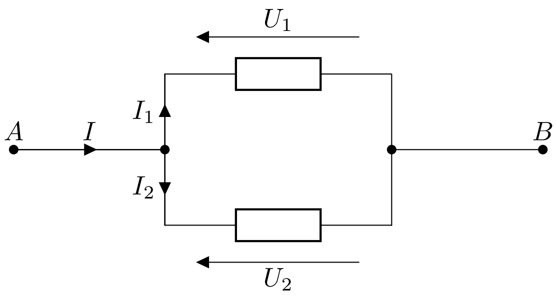
1.6.1 Application : montage en série

Dans un montage en série, les dipôles sont mis bout à bout. Le courant qui les traverse est le même $I \equiv I_1 = I_2$ (loi des nœuds) et les tensions s'additionnent : $U_{AB} = U_1 + U_2$ (loi des mailles).



1.6.2 Application : montage en parallèle

Dans un montage en parallèle, les dipôles ont en commun deux nœuds. Les tensions aux bornes de ces dipôles sont identiques $U_{AB} \equiv U_1 = U_2$ (loi des mailles) et les courants s'additionnent $I = I_1 + I_2$ (loi des nœuds).



1.7 Résisteurs et loi d'Ohm

Le but du jeu de l'électronique est de combiner, dans un circuit électronique, des composants qui présentent des caractéristiques courant-tension intéressantes du point de vue des applications souhaitées.

La caractéristique courant-tension d'un dipôle passif est la fonction qui relie la tension aux bornes du dipôle au courant qui le traverse :

$$I = f(U)$$

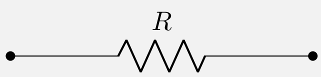
Parmi les composants électroniques que nous rencontrerons dans ce cours, il existe une classe de dipôles électriques omniprésente dans tous les circuits électroniques : les résisteurs (ou résistances dans le langage courant). Les résistances sont des conducteurs appelés ≪ ohmiques ≫ car ils obéissent à la loi d'Ohm (voir plus bas). Les résistances présentent une caractéristique courant-tension linéaire : lorsque un courant traverse une résistance la chute de potentiel (la tension) aux bornes de la résistance est proportionnelle à l'intensité du courant qui la traverse.

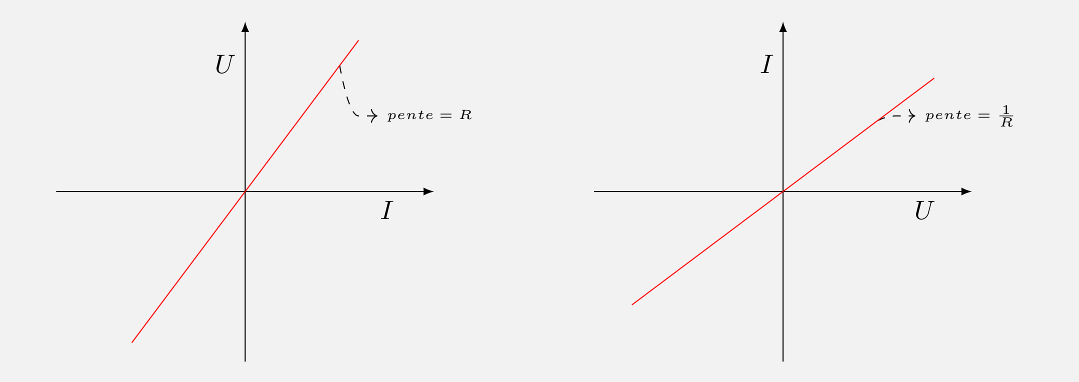
Définition 1.7.1

Pour un conducteur ohmique, la tension à ses bornes est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse et est donnée par la relation :

$$U = R \cdot I \tag{1.1}$$

où R est la résistance qu'oppose le conducteur au passage du courant. R est mesurée en ohm (Ω) : $1\ \Omega = 1\ V/1A$.
Dans les schémas électroniques les résistances sont symbolisées par :





La résistance d'un conducteur ohmique dépend de nombreux facteurs :

- matériau ;
- géométrie ;
- température ;

1.7.1 Effet Joule

Lorsqu'un résistance est traversée par un courant, elle s'échauffe. La résistance convertit l'énergie électrique en chaleur.

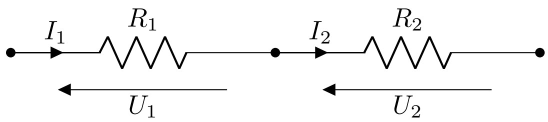
Définition 1.7.2

La puissance dissipée sous forme de chaleur par **effet Joule** dans une résistance est donnée par la relation :

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2 \tag{1.2}$$

1.7.2 Association de résisteurs en série

La résistance équivalente R_{eq} à plusieurs résisteurs montés en série est égale à la somme de leur résistance.

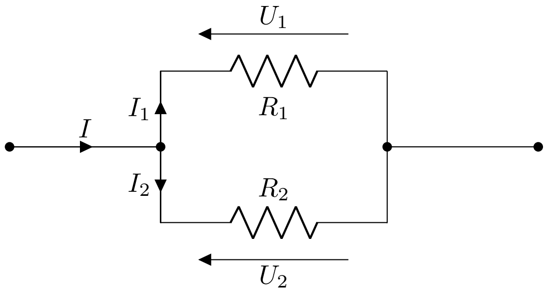


$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \tag{1.3}$$

Exercice 1.1

En utilisant les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm, démontrez la relation précédente dans le cas de 2 résisteurs montés en série.

1.7.3 Association de résisteurs en parallèle



La résistance équivalente R_{eq} de plusieurs résisteurss montés en série est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \tag{1.4}$$

Exercice 1.2

En utilisant les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm, démontrez la relation précédente dans le cas de 2 résisteurs montés en parallèle.

1.8 Loi de Pouillet

Définition 1.8.1

La résistance R (exprimée en Ω), d'un fil conducteur cylindrique de longueur L et de section S est donné par la relation :

$$R = \frac{\rho L}{S}$$

où ρ est la résistivité spécifique du conducteur (exprimée en $\Omega \cdot \mathrm{m}$). La résistivité spécifique dépend du type de conducteur (exemples : $\rho_{Cu} = 1,72 \cdot 10^{-8}$, $\rho_{Al} = 2,75 \cdot 10^{-8}$, $\rho_{bois} = 10^8 - 10^{11}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$).

1.9 Application : le diviseur de tension

Le diviseur de tension (Fig. 1.1) (ou pont diviseur) est, comme son nom l'indique, un circuit qui a pour but de délivrer à sa sortie une fraction de sa tension d'entrée U_e. Il est, sous une forme ou sous une autre, omniprésent dans la plupart des circuits électroniques. En particulier, il est utilisé pour fixé la tension en un point d'un circuit. À l'aide de la loi d'Om (1.1) et des

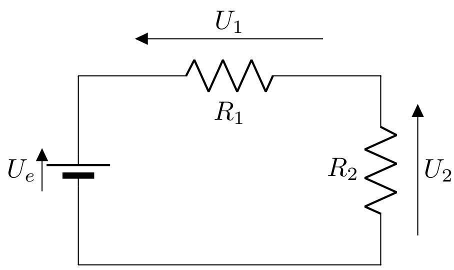


FIGURE 1.1 – Le circuit diviseur de tension fournit à sa sortie une fraction de sa tension à l'entrée.

lois de Kirchhoff, on peut démontrer les relations suivantes, selon que la sortie est prise aux bornes de la résistance R_1 ou R_2 :

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_e \quad (1.5)$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e \quad (1.6)$$

Observons ce qui se passe lorsque nous connectons une résistance R_{ch}, appelée **résistance de charge ou charge**, à notre diviseur de tension idéal (Fig. 1.2). La présence d'une résistance

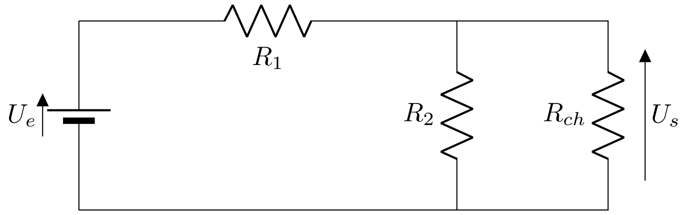


FIGURE 1.2 – La présence d'une résistance de charge R_{ch} modifie la tension de sortie U_s du diviseur de tension idéal.

de charge R_{ch} modifie la tension de sortie U_s du diviseur de tension idéal :

$$U_s = \frac{R_2 R_{ch}}{R_1 R_2 + R_1 R_{ch} + R_2 R_{ch}} U_e \quad (1.7)$$

Selon que $R_{ch} >> R_2$ ou $R_{ch} << R_2$, nous avons des comportements radicalement différents. Dans le premier cas, $R_{ch} >> R_2$, R_{ch} « ne prélèvera » que peu de courant et se comportera comme un interrupteur ouvert. La tension de sortie U_s sera « proche » de la tension à vide du diviseur de tension idéal.

$$U_s \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e \quad (1.8)$$

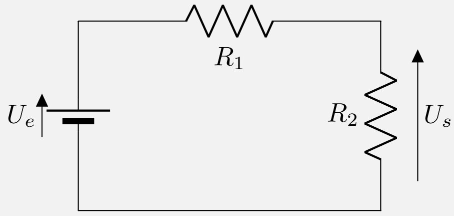
Dans le second cas, $R_{ch} << R_2$, tout le courant « passera par » R_{ch}. R_{ch} agira comme un court-circuit et se comportera comme un fil. Dans ce cas, on observe une chute dela tension de sortie U_s par rapport à la tension à vide :

$$U_s \approx \frac{R_{ch}}{R_1 + R_{ch}} U_e \quad (1.9)$$

Exercice 1.3

En utilisant les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm, démontrez que la tension de sortie à vide du diviseur de tension idéal est donnée par la relation :

$$U_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e$$

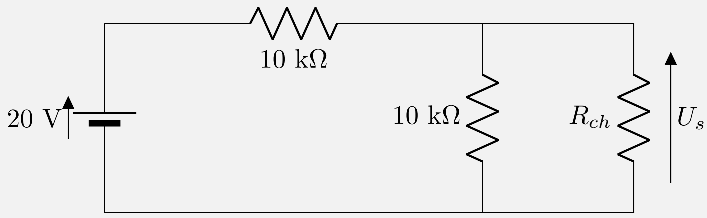


Exercice 1.4

Démontrez la relation 1.7

Exercice 1.5

Soit le diviseur de tension ci-dessous :

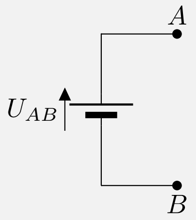


- ▷ Que vaut la tension de sortie U_s à vide c'est-à-dire lorsque le diviseur de tension n'est connecté à aucune résistance de charge R_{ch} ?
- ▷ Que vaut la tension de sortie U_s si on connecte au diviseur de tension une résistance de charge $R_{ch} = 1$ kΩ ?
- ▷ Que vaut la tension de sortie U_s si on connecte au diviseur de tension une résistance de charge $R_{ch} = 10$ kΩ ?
- ▷ Que vaut la tension de sortie U_s si on connecte au diviseur de tension une résistance de charge $R_{ch} = 100$ kΩ ?

1.10 Sources de tension réelles

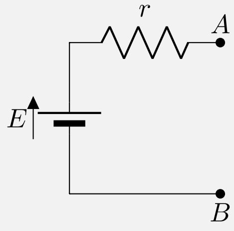
Définition 1.10.1

Un générateur de tension idéal est un générateur qui délivre une tension U constante quelque soit la résistance de charge R connectée à ses bornes. C'est-à-dire qu'il débite un courant $I = \frac{U}{R}$ quelque soit la valeur de la résistance connectée à ses bornes.



Définition 1.10.2

Un générateur de tension réel est équivalent à un générateur de tension idéal en série avec une résistance. L'intensité maximale du courant qu'il peut débiter est limitée.



$$U_{AB} = E - r \cdot I \tag{1.10}$$

La tension E, aussi appelée **force électromotrice (f.e.m)**, est la tension à vide du générateur. La f.e.m est constante quelle que soit l'intensité du courant I.

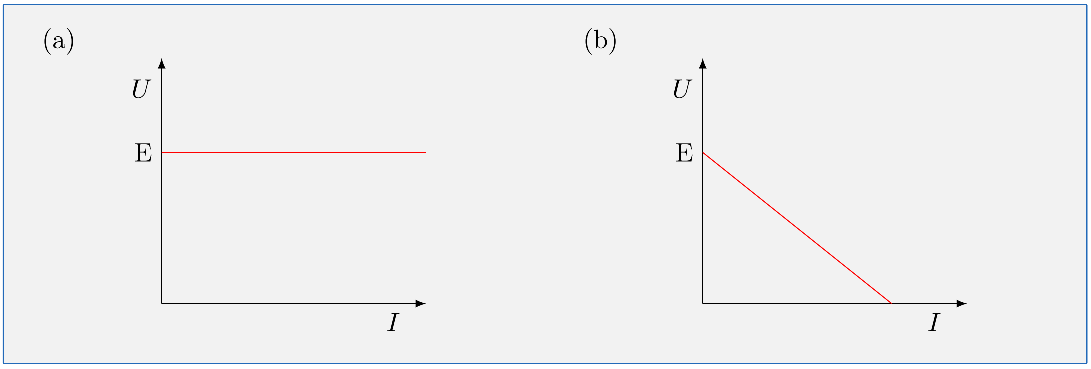


FIGURE 1.3 – (a) Caractéristique d'un générateur de tension idéal. (b) Caractéristique d'un générateur de tension réel.

1.11 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Un dipôle électrique composé d'une ou plusieurs sources de tension et de résistances est équivalent à un un dipôle composé d'une source de tension V_{th} en série avec une résistance R_{th} (Figure 1.4). La tension de Thévenin U_{Th} est la tension du circuit ouvert, lorsqu'aucune

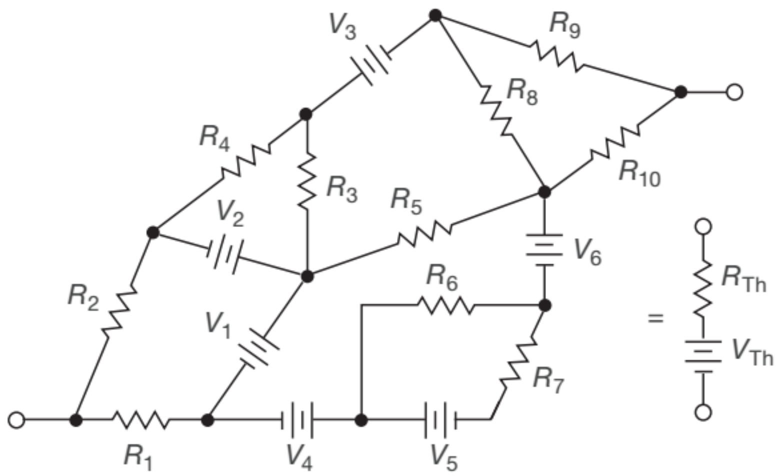


FIGURE 1.4 – Circuit équivalent de Thévenin d'un dipôle électrique composé d'une ou plusieurs sources de tension et de résistances.

charge est connectée à ses bornes.

$$U_{th} \quad = \quad U_{circuit\ ouvert} \tag{1.11}$$

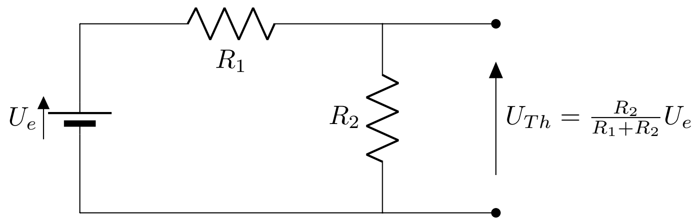
La résistance de Thévenin R_{Th} s'obtient en divisant la tension de Thévenin U_{Th} par le courant de court-circuit $I_{court-circuit}$. Le courant de court-circuit s'obtient en reliant les bornes du dipôles par un fil conducteur. Le courant qui circule dans ce fil est le courant de court-circuit.

$$R_{th} = \frac{U_{th}}{I_{court-circuit}} \tag{1.12}$$

1.11.1 Exemple : équivalent de Thévenin d'un diviseur de tension idéal

La tension de Thévenin U_{Th} est la tension du circuit ouvert. Dans le cas du diviseur de tension idéal :

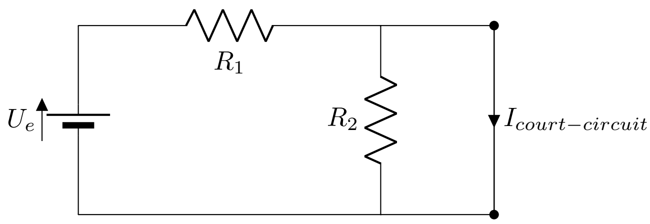
$$U_{Th} \quad = \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e \tag{1.13}$$



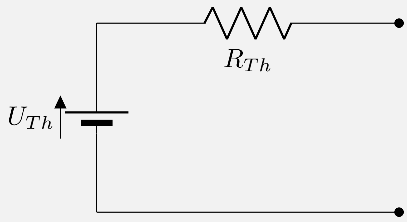
La résistance de Thévenin R_{Th} s'obtient à partir du courant de court-circuit. Dans notre cas :

$$I_{court-circuit} = \frac{U_e}{R_1} \tag{1.14}$$

$$R_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_{court-circuit}} \tag{1.15}$$



Le circuit équivalent de Thévenin du diviseur de tension idéal est représenté ci-dessous :



$$U_{Th} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_e \tag{1.16}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \tag{1.17}$$

1.12 Exercices

1. Dans un circuit **R-C**, la quantité de charges $Q(t)$ portée par les armatures du condensateurs évolue au cours du temps suivant la relation :

   $$Q(t) = Q_{max}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

   Quelle est l'expression de l'intensité $I(t)$ du courant électrique qui circule dans la branche du condensateur ? (**indice** : utilisez la définition de l'intensité du courant électrique)

2. Je possède deux résistances ($5\ k\Omega$ et $10\ k\Omega$). Quelle est la valeur de la résistance équivalente :
   (a) lorsque je les associe en série ;
   (b) lorsque je les associe en parallèle.

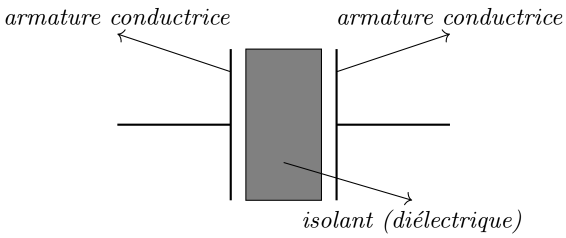
Chapitre 2 Condensateurs et circuits RC

2.1 Introduction

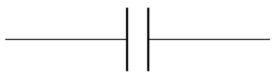
Nous abordons, dans ce chapitre, l'étude d'un nouveau composant : **le condensateur**. Ce dipôle est capable de stocker de l'énergie électrostatique et de la restituer ultérieurement. Cette propriété lui confère la capacité de se souvenir de son histoire récente (HOROWITZ et HILL 2015) et nous permet de construire une grande variété de circuits utiles dans de nombreuses applications électroniques. Pour n'en citer que quelques unes :

- les mémoires Flash, EEPROM et EPROM utilisent des millions de très petits condensateurs pour stocker l'information ;
- des oscillateurs : des circuits qui nous fournissent une base de temps, un signal d'horloge ;
- des filtres : des circuits qui conservent dans un signal les composantes d'intérêt et suppriment ou atténuent les autres (par exemple : le bruit).

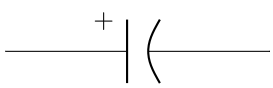
Sous sa forme la plus simple, le condensateur plan, il est constitué de deux plaques conductrices parallèles (ses armatures), très rapprochées et séparées par un matériel diélectrique (isolant).



Il est représenté dans les schémas de circuits électriques par le symbole suivant :



ou dans le cas de condensateurs polarisés (aussi appelés électrolytiques) par :



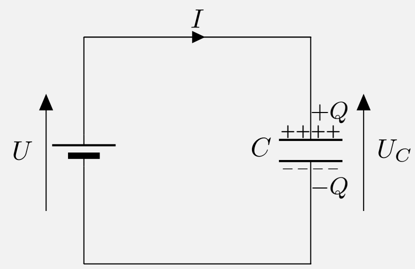
2.2 Capacité d'un condensateur

Définition 2.2.1

La **capacité C** d'un condensateur caractérise sa capacité à accumuler une quantité Q de charges sur ses armatures lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel U :

$$Q(t) = CU(t) \tag{2.1}$$

La capacité d'un condensateur se mesure en Farad (F). Un condensateur de 1 F, lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel de 1 V accumule une charge $+Q$ de 1 C sur une de ses armatures et une charge $-Q$ de -1 C sur l'autre. 1 F est une unité énorme, dans la majorité des cas nous manipulerons des condensateurs qui ont des capacités de l'ordre du µF(10^{-6}F), nF (10^{-9} F) ou pF (10^{-12} F).



Attention à ne pas confondre le symbole C **qui représente le coulomb de celui utilisé pour la capacité d'un condensateur. Dans tous les cas, le contexte de leurs utilisations permettra de les différencier.**

La capacité d'un condensateur dépend de sa géométrie et de la nature de l'isolant placé entre ses armatures. Pour le **condensateur plan** :

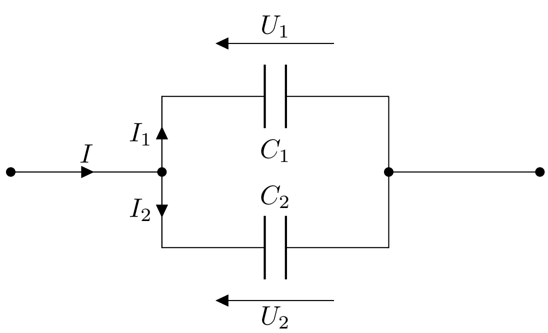
$$C = \frac{\epsilon A}{d} \tag{2.2}$$

où ϵ est la permittivité électrique du diélectrique qui caractérise ses propriétés électriques. A est l'aire des armatures et d la distance qui les sépare.

Il existe une très grande variétés de condensateurs (voir figure 2.1). Ceux-ci diffèrent aussi bien par leur capacité, les matériaux utilisés et leur géométrie.

2.2.1 Association de condensateurs en parallèle

La capacité équivalente C_{eq} de plusieurs condensateurs montés en parallèle est égale à la somme de leur capacités.



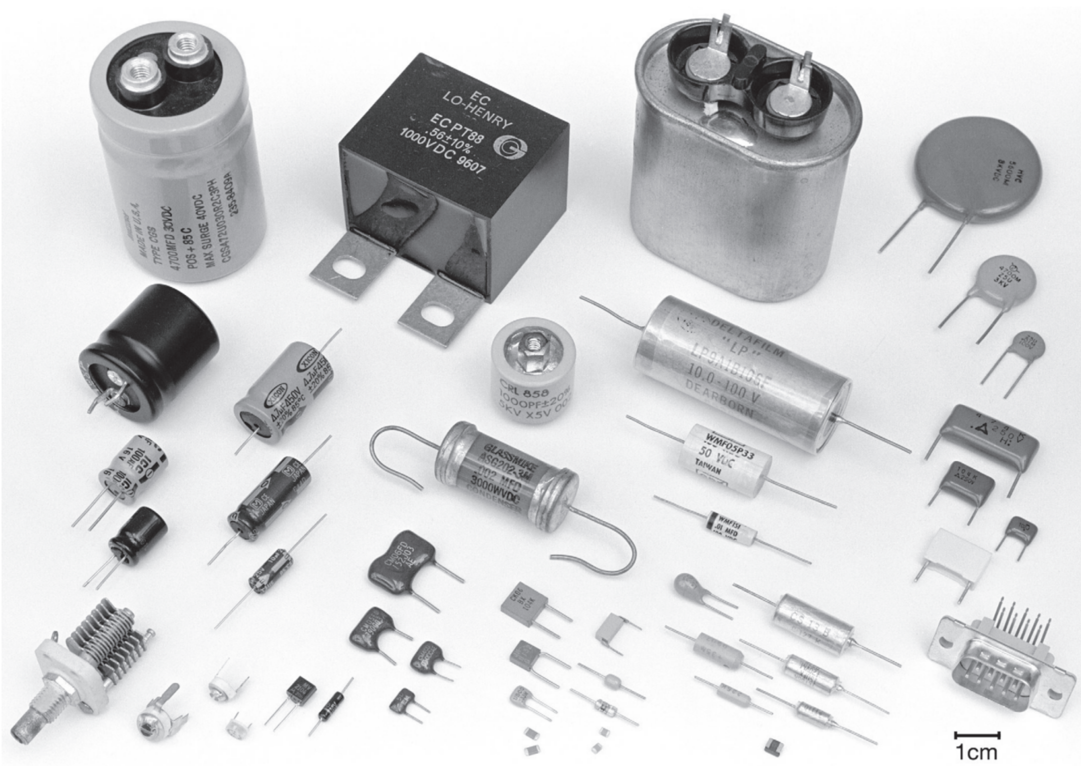


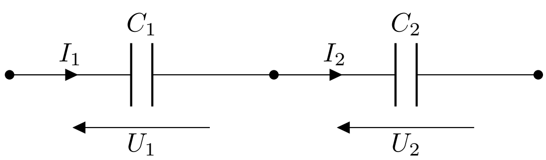
FIGURE 2.1 – Il existe une grande variétés de condensateurs (HOROWITZ et HILL 2015).

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \tag{2.3}$$

Exercice 2.1

Démontrez la relation précédente dans le cas de 2 condensateurs montés en parallèle.

2.2.2 Association de condensateurs en série



La capacité équivalente C_{eq} de plusieurs condensateurs montés en série est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \tag{2.4}$$

Exercice 2.2

Démontrez la relation précédente dans le cas de 2 condensateurs montés en série.

2.3 Énergie stockée dans un condensateur

Définition 2.3.1

L'énergie E emmagasinée dans un condensateur de capacité C et soumis à une différence de potentiel U est donnée par les relations :

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q^2/C \tag{2.5}$$

2.4 Caractéristique courant-tension

Jusqu'à présent, nous avons décrit le comportement d'un condensateur en termes de charges et de tension. Pourtant nous savons depuis le premier chapitre que les grandeurs fondamentales dans les circuits électroniques sont les courants et les tensions. Qu'en est-il du condensateur ? En dérivant la relation (2.1), nous obtenons :

$$I(t) = C\frac{dU}{dt}(t) \tag{2.6}$$

Ou encore :

$$U(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt \tag{2.7}$$

Que nous apprend ces 2 dernières équations ? Le courant $I(t)$ qui traverse le condensateur est proportionnel au taux de variation de la tension $U(t)$ entre ces armatures. Si un courant constant $I = 1$ mA traverse, durant 1 ms, un condensateur de 1 µF, la tension à ses bornes augmente de 1 V.

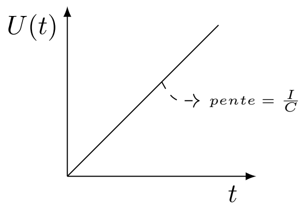


FIGURE 2.2 – Pour un condensateur, $I(t)$ est proportionnel aux taux de variation de $U(t)$.

2.5 Aspects temporels

2.5.1 Charge du condensateur

Nous allons étudier le comportement d'un circuit RC composé d'une batterie, d'un interrupteur, d'une résistance et d'un condensateur disposés en série (voir figure 2.3). À l'instant initial ($t = 0$), on ferme l'interrupteur. C'est équivalent à soumettre notre circuit RC à un échelon de tension. D'après la seconde loi de Kirchhoff (loi des mailles), on dot avoir à chaque instant $U_e = U_R + U_C$.

Analyse qualitative. À l'instant initial, le courant s'établit dans le circuit, le condensateur n'est pas chargé et la tension U_C entre ses bornes est nulle. Le condensateur se comporte comme un **court-circuit** (c'est-à-dire équivalent à un fil). Le courant initial est égal à U_R/R. Au fur et à mesure que les charges s'accumulent sur les armatures du condensateur, celui-ci développe une tension $U_C = Q/C$ qui augmente avec la quantité de charges Q accumulées. La tension U_R aux bornes de la résistance diminue (après tout, il faut bien respecter la seconde loi de Kirchhoff). D'après la loi d'Ohm, le courant $I(t) = U_R(t)/R$ diminue lui-aussi. Ce

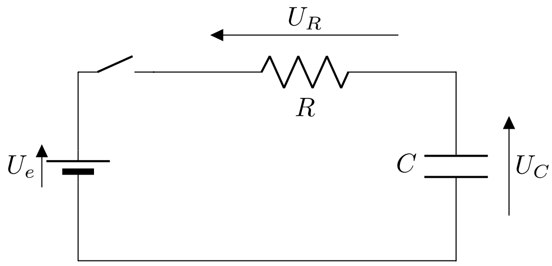


FIGURE 2.3 – Circuit RC. Charge du condensateur. À linstant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

phénomène se poursuit jusqu'à ce que la tension U_C aux bornes du condensateur soit égale à celle de la batterie. À cet instant $U_C = U_e$, $U_R = 0$ et $I = 0$ et nous dirons que le condensateur est chargé. Le condensateur se comporte alors comme un **circuit ouvert**.

Analyse quantitative. Nous avons vu dans l'analyse précédente que lors de la charge du condensateur, la tension à ses bornes augmente jusqu'à atteindre celle du générateur. Mais à quelle vitesse se font ses variations (augmentations et diminutions) ? Est-elle la même pour toutes les grandeurs du circuit RC ? Est-elle constante ? Essayons maintenant d'être un peu plus précis et décrivons quantitativement l'évolution temporelle des différentes grandeurs du circuit :

- ▷ $Q(t)$: la quantité de charge qui s'accumule sur les armatures du condensateur ;
- ▷ $I(t)$: l'intensité du courant qui circule dans le circuit (rappel : le courant qui traverse chaque dipôle est le même puisque les éléments sont associés en série) ;
- ▷ $U_R(t)$: la tension aux bornes de la résistance ;
- ▷ $U_C(t)$: la tension aux bornes du condensateur.

Reprenons la seconde loi de Kirchhoff, nous avons écrit plus haut $U_e(t) = U_R(t) + U_C(t)$. Nous savons aussi d'après la définition de la capacité d'un condensateur que $Q(t) = CU_C(t)$, d'après la loi d'Ohm que $U_R(t) = RI(t)$ et d'après la définition de l'intensité du courant que $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$. En combinant ces différentes équations nous obtenons la relation suivante :

$$U_e = R\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{Q(t)}{C} \tag{2.8}$$

En réarrangeant les termes de l'équation précédente :

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{CU_e - Q(t)}{RC} \tag{2.9}$$

L'équation est un exemple d'une classe d'équations appelées équations différentielles linéaires du premier ordre. Notre but n'est pas ici de proposer une théorie générale de cette classe d'équations (existence et propriétés des solutions, méthodes de résolution, ...). Nous souhaitons néanmoins mettre en lumière certaines de leurs caractéristiques. Pour faciliter la discussion, nous réécrivons notre équation sous la forme canonique suivante (appelée aussi **équation de relaxation**) :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{y_\infty - y(t)}{\tau} \tag{2.10}$$

Dans le cas qui nous occupe, $y(t) = Q(t)$, $y_\infty = CU_e$ et $\tau = RC$. Il s'agit d'une équation différentielle car elle met en relation une variable dépendante du temps et sa dérivée temporelle du premier ordre. Cette équation décrit comment évolue la variable dépendante $y(t)$ au cours du temps. Elle est linéaire car elle obéit au **principe de superposition** :

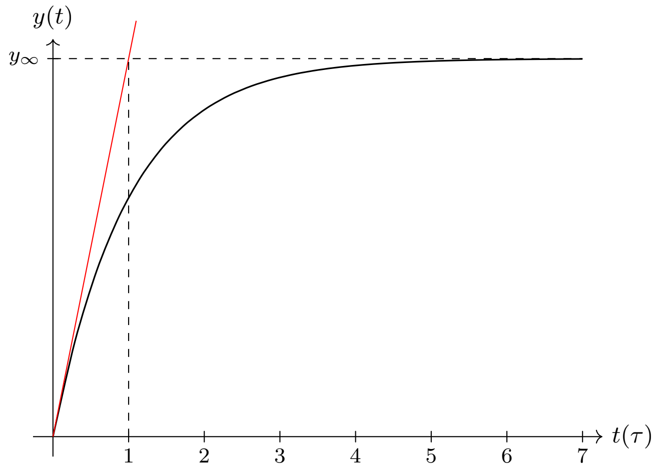


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la solution de l'équation de relaxation 2.10.

- ▷ si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont 2 solutions de notre équation différentielle, toute combinaison linéaire $ay_1(t)+by_2(t)$, où a et b sont des nombres réels, est encore une solution de notre équation.

Cette propriété de linéarité a pour conséquence que si l'on modifie légèrement notre signal d'entrée (la "cause"), le signal de sortie (l'effet) sera lui aussi que légèrement modifié. Cette propriété nous permettra aussi d'analyser la réponse de notre système à un signal d'entrée complexe en termes de réponses à des signaux élémentaires plus simples (voir à ce sujet **l'analyse de Fourier**).

Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut préciser d'où l'on part, c'est-à-dire préciser **la condition initiale**, la valeur de la variable y à l'instant initial t_0 : $y(t_0) = y_0$ où y_0 est un nombre réel. Dans ce cas la solution générale de notre équation est :

$$y(t) \quad = \quad y_\infty + (y_0 - y_\infty)e^{-(t-t_0)/\tau} \tag{2.11}$$

Dans le cas où $t_0 = 0$ et $y(0) = 0$, la solution s'écrit :

$$y(t) \quad = \quad y_\infty(1 - e^{-t/\tau}) \tag{2.12}$$

Exercice 2.3

Vérifier que 2.11 et 2.12 sont bien des solutions de 2.10.

Nous pouvons représenter la solution graphiquement :

Essayons de donner du sens à cette dernière équation en analysant 2 cas limites :

- ▷ Que se passe-t'il à l'instant initial $t = 0$?
- ▷ Que se passe-t'il à $t = \infty$ ou lorsque $t >> \tau$?

À l'instant $t = 0$. En remplaçant t par 0 dans notre équation, on trouve que $y(0) = 0$. Mais ça, on le savait déjà puisqu'il s'agit de notre condition initiale ! Essayons de voir comment évolue le système à cet instant là et calculons $\frac{dy}{dt}(0)$:

$$\frac{dy}{dt}(0) = y_\infty/\tau \tag{2.13}$$

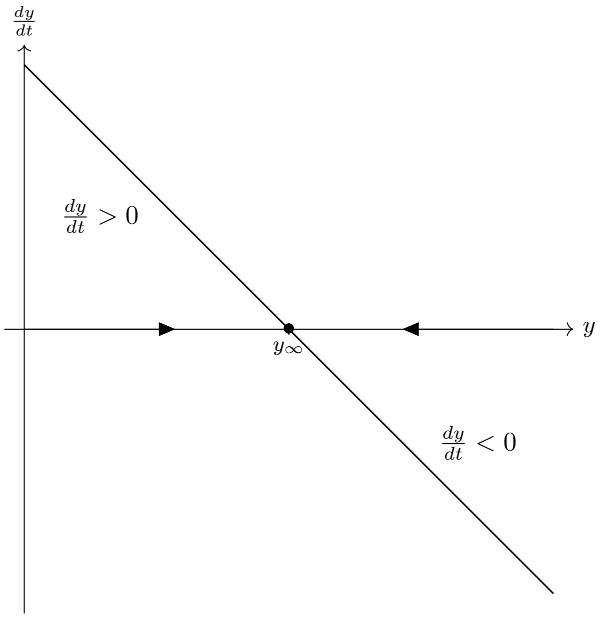


FIGURE 2.5 – Graphique de la dépendance de la solution de l'équation 2.10 en fonction de l'état initial y_0.

À l'instant $t = \infty$. Par la même opération, on aboutit aux résultats suivants :

$$y(t = \infty) = y_\infty \tag{2.14}$$

$$\frac{dy}{dt}(t = \infty) = 0 \tag{2.15}$$

Analysons maintenant la dépendance de la solution à la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sur le graphique de la Figure 2.5, nous représentons dy/dt en fonction de y. Il s'agit d'une droite décroissante, d'équation $f(y) = (y_\infty - y)/\tau$. Un point sur l'axe des abscisses, $y(t)$, représente l'état de notre système à l'instant t. y_0 correspond à l'état initial et y_∞ à l'état final (asymptotique). À gauche de y_∞, le taux de variation de $y(t)$ (**sa vitesse**) est positif, $dy/dt > 0$. La variable $y(t)$ augmente et l'état du système évolue vers la droite sur l'axe des abscisses. À droite de y_∞, $dy/dt < 0$, $y(t)$ diminue et l'état du système évolue vers la gauche sur l'axe des abscisses. Au point y_∞, $dy/dt = 0$, l'état du système n'évolue plus. Peu importe, la condition initiale y_0, le système évolue toujours vers le même état final y_∞ (on parle parfois de **point fixe** ou d'**état d'équilibre stable**).

Si nous appliquons les résultats de la discussion précédente au circuit RC de la figure 2.3 et à l'équation 2.9, nous obtenons pour l'équation de l'évolution de la quantité de charge aux bornes du condensateur lorsque $Q(0) = 0$:

$$Q(t) \quad = \quad Q_{max}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{2.16}$$

où $Q_{max} = CU_e$ et $\tau = RC$.

Nous avons représenté sur le graphique de la figure 2.6 l'évolution de la quantité de charges $Q(t)$ sur les armatures du condensateur en fonction du temps t (pour la condition initiale $Q(0) = 0$). Pour déterminer la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur, nous faisons appel à la relation 2.1 qui relie la tension à la quantité de charges. En divisant chaque membre de l'équation 2.16 par C nous obtenons :

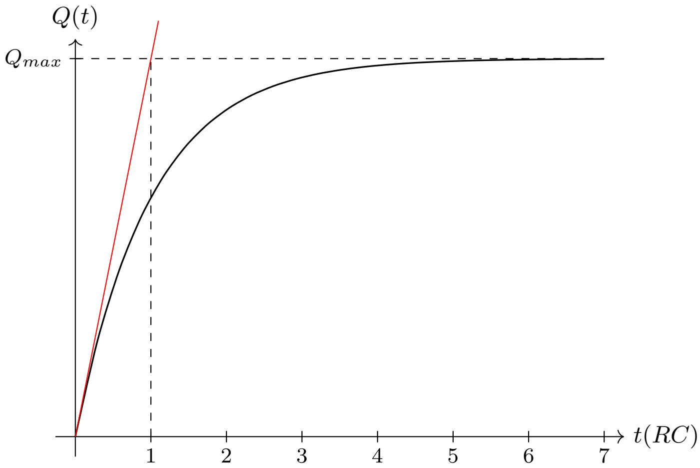


FIGURE 2.6 – Charge du condensateur. Représentation graphique de l'évolution de la charge $Q(t)$ sur les armatures du condensateur en fonction du temps t.

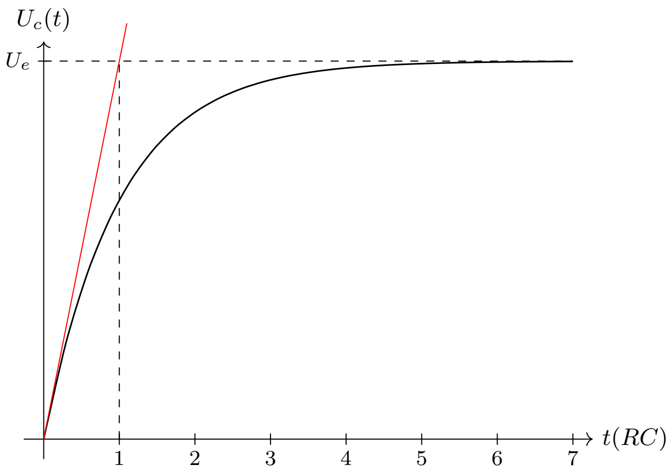


FIGURE 2.7 – Charge du condensateur. Représentation graphique de l'évolution de la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps t.

$$U_c(t) \quad = \quad U_e(1 - e^{-t/\tau}) \tag{2.17}$$

où $\tau = RC$.

L'allure du graphique de la tension $U_c(t)$ (figure 2.7) est semblable à celle de $Q(t)$. Qu'en est-il de l'intensité $I(t)$ du courant qui circule dans le circuit lorsqu'on ferme l'interrupteur ? En partant de la définition du courant et en dérivant chaque membre de l'équation 2.16 par rapport au temps nous obtenons :

$$I(t) \quad = \quad I_{max}\, e^{-t/\tau} \tag{2.18}$$

où $I_{max} = U_e/R$ et $\tau = RC$.

L'intensité du courant décroît de manière exponentielle (figure 2.8). Comme nous l'avons vu plus haut, initialement lorsque le condensateur n'est pas chargé, il se comporte comme un fil et le courant $I = U_e/R$ est maximum. À l'état stationnaire lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un circuit ouvert et l'intensité du courant est nulle.

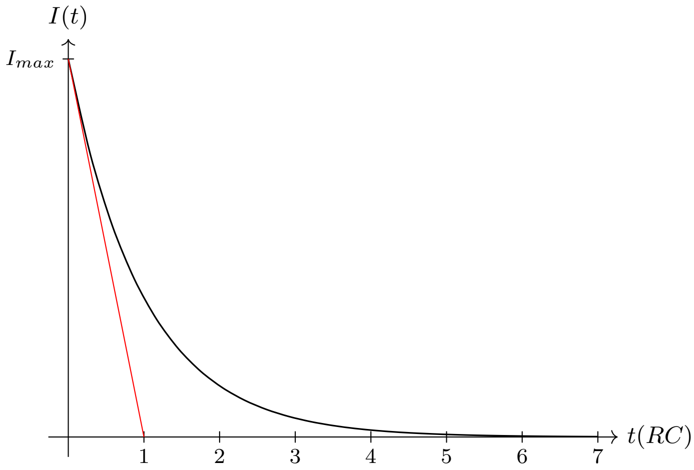
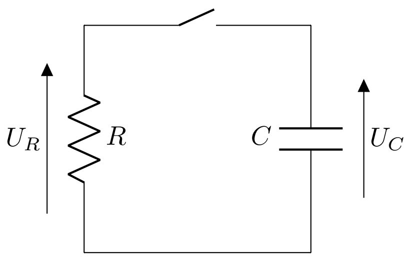


FIGURE 2.8 – Charge du condensateur. Représentation graphique de l'intensité du courant $I(t)$ dans le circuit RC en fonction du temps t.

2.5.2 Décharge du condensateur

Lorsqu'on connecte un condensateur chargé en série avec une résistance dans un circuit fermé, le condensateur « se décharge » dans la résistance en convertissant l'énergie électrostatique emmagasinée entre ses armatures en énergie électrique. Dans le circuit ci-dessous, à l'instant $t = 0$ le condensateur est chargé et on ferme l'interrupteur.



Analyse qualitative. À l'instant initial, le condensateur est chargé et la tension entre ses bornes est $U_C = Q(0)/C$, le courant s'établit dans le circuit suite à la décharge du condensateur dans la résistance. D'après la loi des mailles, $U_C(t) = U_R(t)$ à chaque instant (pour $t > 0$). Le courant initial est égal à $Q(0)/RC$. Au fur et à mesure que la quantité de charges diminue sur les armatures du condensateur, la tension à ses bornes $U_C = Q(t)/C$ et la tension U_R aux bornes de la résistance diminuent aussi (après tout, il faut bien respecter la seconde loi de Kirchhoff). D'après la loi d'Ohm (1.1), le courant $I(t) = U_R(t)/R$ diminue lui-aussi. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que la tension U_C aux bornes du condensateur soit nulle. À cet instant $U_C = 0$, $U_R = 0$ et $I = 0$.

Analyse quantitative. D'après la première loi de Kirchhoff, nous pouvons écrire qu'à chaque instant $I_R = I_C$. En utilisant la loi d'Ohm (1.1) et la relation 2.6, nous obtenons :

$$\frac{U(t)}{R} = -C\frac{dU(t)}{dt}$$

Le signe moins provient du fait que $dU(t)/dt$ est négatif car la tension aux bornes du condensateur diminue. Il s'agit d'une équation différentielle semblable à celle que nous avons rencontrée dans la section 2.5.1. Nous pouvons la réécrire sous la forme canonique suivante :

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_\infty - U(t)}{\tau}$$

où U est la tension aux bornes du condensateur et de la résistance, $U_\infty = 0$ est la tension à l'état stationnaire et $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

La solution de cette équation dépend de la condition initiale $U(0) = Q(0)/C)$ où $Q(0)$ est la charge initiale portée par les armatures du condensateur. Dans ce cas, nous obtenons comme solution pour l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur et de la résistance :

$$U(t) \quad = \quad U_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{2.19}$$

où $U_0 = Q(0)/C$ et $\tau = RC$.

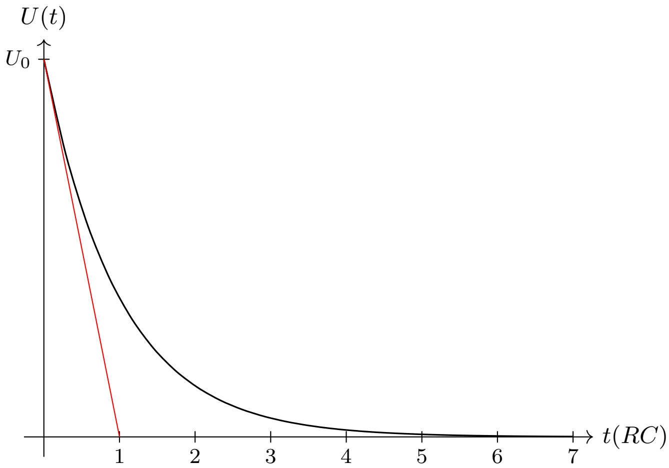


FIGURE 2.9 – Décharge du condensateur. Représentation graphique de la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur et de la résistance dans le circuit RC.

En utilisant la loi d'Ohm (1.1), nous pouvons déterminer l'évolution de l'intensité du courant $I(t)$ dans le circuit :

$$I(t) \quad = \quad I_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{2.20}$$

où $I_0 = Q(0)/RC$ et $\tau = RC$.

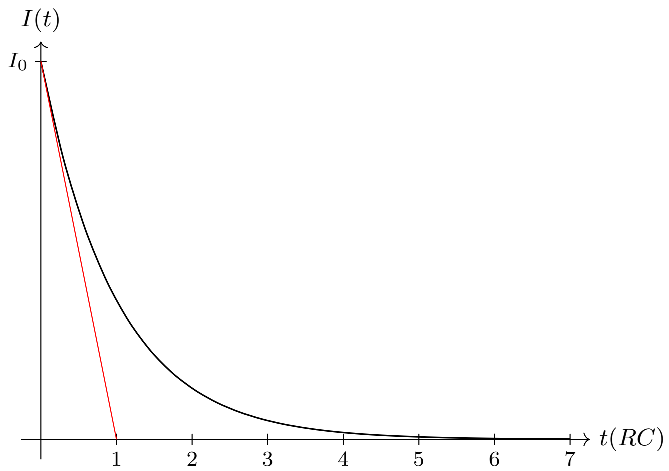


FIGURE 2.10 – Décharge du condensateur. Représentation graphique de l'intensité du courant $I(t)$ dans le circuit RC en fonction du temps t.

En utilisant la relation 2.1, nous obtenons pour l'évolution de la quantité de charges portées par les armatures du condensateur la relation suivante :

$$Q(t) \quad = \quad Q_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{2.21}$$

où $\tau = RC$.

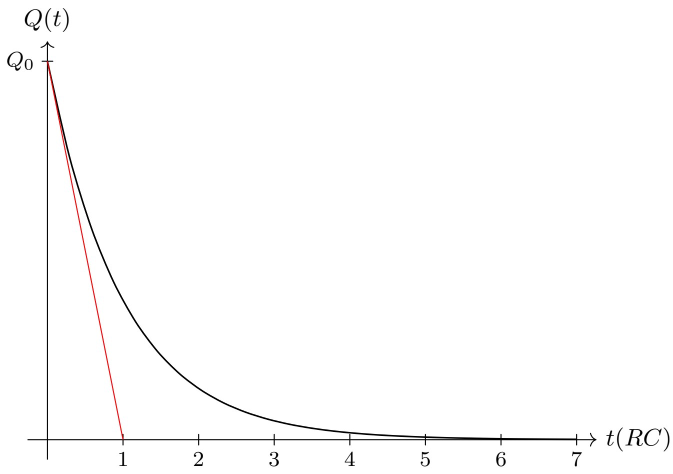


FIGURE 2.11 – Décharge du condensateur. Évolution de la quantité de charges $Q(t)$ portée sur les armatures du condensateur dans le circuit RC en fonction du temps t.

Bibliographie

BIRGLEN, Lionel (2018). *Mécatronique*. 2ème. Paris : Dunod.

GERVAIS, Thierry (2018a). *Systèmes numériques 1*. 4ème. Paris : Vuibert.

– (2018b). *Systèmes numériques 2*. 4ème. Paris : Vuibert.

HAYES, Thomas C et Paul HOROWITZ (2016). *Learning the Art of Electronics : A Hands-On Lab Course*. 3rd. Cambridge, UK : Cambridge University Press.

HOROWITZ, Paul et Winfield HILL (2015). *The Art of Electronics*. 3rd. New York, NY, USA : Cambridge University Press.