

TD11 - Interpolation de Lagrange et intégration

On représente les polynômes par des listes, les termes d'une liste représentant les coefficients par ordre de puissance croissante.

Exemple : `[1,-2,4]` représente le polynôme $1 - 2X + 4X^2$.

- 1 – Ecrire une fonction `somme` qui à deux polynômes renvoie leur somme.
- 2 – Ecrire une fonction `produit` qui à deux polynômes renvoie leur produit.
- 3 – Ecrire une fonction `prod_ext` qui à un nombre et un polynôme renvoie leur produit.
- 4 – Ecrire une fonction `eval_pol` qui à un polynôme P et un nombre x renvoie $P(x)$.
- 5 – Ecrire une fonction `pol_lag` qui à deux listes de même longueur `x` et `y` renvoie le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut `y[i]` aux `x[i]`.
Exemple : `pol_lag([2,1],[5,3])` doit renvoyer `[1.,2.]`.
- 6 – Avec le module `matplotlib.pyplot`, tracer les courbes caractéristiques de quelques polynômes d'interpolation.
- 7 – Ecrire une fonction `integ_pol` qui à un polynôme et à deux nombres `a` et `b` renvoie l'intégrale du polynôme entre `a` et `b`.
Indication : On pourra écrire une fonction `pol_prim` qui à un polynôme renvoie une primitive, puis utiliser `eval_pol`.
- 8 – Ecrire une fonction `approx_integ` qui à une fonction `f`, deux nombres `a` et `b` et un entier `n` renvoie l'intégrale entre `a` et `b` du polynôme d'interpolation de `f` qui coïncide avec `f` sur une subdivision à pas constant de l'intervalle $[a, b]$ constituée de $n + 1$ points.
- 9 – Faire de même avec une subdivision de $n + 1$ points basée sur les racines des polynômes de Tchebitchev.
Remarque : les racines du $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebitchev sont les $\cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right)$, $1 \leq m \leq n$.
- 10 – Comparer les deux subdivisions avec des fonctions dont on connaît l'intégrale et en faisant varier n .
- 11 – Comparer ensuite en coupant l'intervalle $[a, b]$ en m morceaux, et en appliquant les méthodes précédentes pour n faible sur chacun des sous-intervalles.
Exemple : on fixe $n = 1$ et on prend $m = 100$, puis on fixe $n = 2$, et on prend $m = 100$ ou $m = 50$, etc.