TD14 - Suite de la méthode d'Euler - Le pendule oscillant amorti

L'équation du pendule oscillant amorti est :

(1) $$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta'_0$$

avec l la longueur du pendule, m sa masse, c le coefficient de frottement et g l'accélération de la gravité.

L'équation d'ordre 2 sur le scalaire θ peut se ramener à une équation d'ordre 1 sur le couple $\begin{pmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$:

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\theta} \\ -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{c}{m}\dot{\theta},\end{pmatrix}, \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0,$$

qui peut s'écrire

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y \\ -\frac{g}{l}\sin(x) - \frac{c}{m}y\end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} F\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}, x(0) = \theta_0, y(0) = \theta'_0$$

Méthode d'Euler

- On veut étudier la solution $u = \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$ de (3) pendant un temps t donné.
- On discrétise l'intervalle $[0, t]$ en prenant $n \in \mathbb{N}^*$ et en posant $t_k = k\frac{t}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On appelle $h = \frac{t}{n}$ le pas de temps, qui est ici constant. Ainsi, $t_0 = 0$, $t_n = t$, et $h = t_{k+1} - t_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- On approxime les valeurs des $u(t_k)$ par les $u_k = \begin{pmatrix}x_k \\ y_k\end{pmatrix}$ définis par récurrence par :

(4) $$\begin{cases} u_0 = u(t=0) = \begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix} \\ u_{k+1} = u_k + hF(u_k) \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$$

1 – Ecrire une fonction `evol` telle que `evol(x,y,h,g,m,l,c)` renvoie le couple $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} + hF\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$ avec les paramètres g, m, l, c décrits ci-dessus.

2 – Ecrire une fonction `sol_num` telle que `sol_num(pos0,vit0,t,n,g,m,l,c)` renvoie les liste des x_k et des y_k calculés par la méthode d'Euler, avec `pos0` et `vit0` la position et la vitesse initiales.
On écrira une version avec des listes remplies initialement de 0, dont on modifiera les termes au cours du calcul, puis une version avec des liste initialisées à `[pos0]` et `[vit0]`, qu'on remplira par append successifs, en se servant du fait que `l[-1]` est la dernière valeur de la liste `l`.

3 – Ecrire une fonction `sol_num_np` telle que `sol_num_np(pos0,vit0,t,n,g,m,l,c)` renvoie les x_k et les y_k dans des tableaux `numpy` (ceci afin de réviser les tableaux `numpy` qui apparaissent souvent à l'écrit des concours).

4 – Ecrire une fonction `pendule_TX` telle que `pendule_TX(pos0,vit0,t,n,g,m,l,c)` renvoie le graphique des (t_k, x_k).

5 – Ecrire une fonction `pendule_XY` telle que `pendule_XY(pos0,vit0,t,n,g,m,l,c)` renvoie le graphique des (x_k, y_k).

Espace des phases

L'état du système "pendule" est déterminé à un instant donné par la donnée du couple $(\theta, \dot{\theta})$. On appelle *phase* du système ce couple, et on appelle *espace des phases* le plan $\mathbb{R}^2 = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2\}$.

La fonction `pendule_XY` ci-dessus permet de représenter une solution dans l'espace des phases.

Pour représenter le comportement du *système dynamique continu* (1), on se propose de tracer plusieurs solutions de (1) dans l'espace des phases.

6 – Ecrire une fonction `espace_phases` telle que `espace_phases(posmin,posmax,p,vit0,t,n,g,m,l,c)` renvoie le graphe dans l'espace des phases de `p` solutions de (1) avec comme vitesse initiale `vit0` et comme position initiale `pos0` $\in$ [`posmin`, `posmax`].

Identification de paramètre

7 – On a $l = 1$m, $m = 1$kg, $g = 9,81$m.s^{-2}. Le coefficient de frottement est inconnu.
Quand on lâche le pendule avec $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta'_0 = 0$, il oscille et atteint quand il revient pour la première fois pour angle maximal $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer le coefficient de frottement c par dichotomie.

Test des valeurs de paramètres et de la discrétisation

8 – Tester les fonctions précédentes en jouant sur les paramètres physiques et la discrétisation.
Reconnaît-on certains types de comportement vus en cours de physique ?
L'énergie est-elle conservée pour $c > 0$? pour $c = 0$? dans l'équation (1) ? dans les résultats numériques obtenus ?