TD12 - Intégration - Formules de quadrature

Dans le TD 10, on a déjà étudié l'intégration numérique d'une fonction sur un segment par les sommes de Riemann (méthode des rectangles) et la méthode des trapèzes. On va présenter ces méthodes comme des cas particuliers de l'application d'une formule de quadrature aux sous-intervalles liés à une subdivision du segment.

Etude numérique des quadratures sur $[-1,1]$

On se place sur l'intervalle canonique $[-1,1]$. On choisit $x_1,\dots,x_n \in [-1,1]$ deux à deux distincts et on note, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $L_k = \prod_{i\neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$.

Pour $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, le polynôme d'interpolation de f basé sur $(x_1,\dots,x_n)$ est $P_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k$.

Donc la formule de quadrature correspondant à $(x_1,\dots,x_n)$ est $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ avec $\lambda_k = \int_{-1}^{1} L_k(t)\mathrm{d}t$. Il s'agit de l'approximation numérique de $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ correspondant à l'interpolation basée sur $(x_1,\dots,x_n)$.

1 – En utilisant les fonctions du TD 11, écrire une fonction `quadrature` qui à une liste `x` contenant les x_k renvoie la liste des λ_k.

2 – Ecrire une fonction `integ_cano` qui à une fonction `f`, deux listes `x` et `l` contenant les x_k et les λ_k ci-dessus renvoie $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

3 – Tester les fonctions précédentes avec différentes listes `x`.

4 – Tester les fonctions précédentes avec `x=[-1]`, `x=[1]`, `x=[-1,1]`, `x=[-1,0,1]`. Ecrire explicitement les λ_k et formules de quadrature correspondantes.

5 – A quoi correspondent les cas `x=[-1]`, et `x=[-1,1]` ?

Cas général $[a,b]$

On veut maintenant obtenir des formules de quadratures correspondantes sur $[a,b]$, en se basant sur le changement de variables affine :

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [a,b] \\ t & \mapsto & \frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2} \end{array} \right).$$

6 – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors $f \circ \phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ et on peut appliquer la formule de quadrature basée sur $(x_1,\dots,x_n) \in [-1,1]^n$ à $f \circ \phi$:

$$\int_{-1}^{1} f \circ \phi(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\phi(x_k)).$$

Déterminer la formule de quadrature correspondante (basée sur $(\phi(x_1),\dots,\phi(x_n)) \in [a,b]^n$) pour $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

7 – Ecrire une fonction `integ_quad` qui à une fonction `f`, deux float `a` et `b` et une liste `x` contenant les x_k renvoie la formule de quadrature ci-dessus.

Avec une subdivision de $[a, b]$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision régulière de $[a, b]$ $(y_0, \ldots, y_m)$ donnée par $y_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

On désire appliquer la formule de quadrature précédente à f sur chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$ (avec donc pour chaque k un changement de variable ϕ_k distinct) puis appliquer la relation de Chasles pour obtenir une approximation numérique de l'intégrale de f sur $[a, b]$.

8 – Ecrire une fonction `integ_subd` qui à une fonction f, deux float `a` et `b`, une liste `x` contenant les x_k et un entier m renvoie l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ avec la méthode décrite ci-dessus.

9 – Tester cette dernière avec `x=[-1]`, `x=[1]`, `x=[-1,1]`, `x=[-1,0,1]`.

10 – Dans le cas de `x=[-1]`, expliciter la formule de quadrature finale sur $[a, b]$ en la simplifiant au maximum. Quelle méthode retrouve-t-on ?

11 – Faire de même pour `x=[1]`.

12 – Faire de même pour `x=[-1,1]`. Quelle méthode retrouve-t-on ?

13 – Faire de même pour `x=[-1,0,1]`. La formule de quadrature trouvée correspond à ce qu'on appelle la méthode de Simpson.

14 – Comparer expérimentalement les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson pour évaluer leurs ordres respectifs.