TD10 - Calcul d'intégrale

Préliminaires

Avant de commencer l'étude de l'intégration numérique qui suit :

1 – Coder la méthode de la sécante.

2 – Coder la méthode de la fausse position.

3 – Les tester pour l'évaluation de la racine carrée de 2, et comparer les vitesses de convergence graphiquement, avec un graphique regroupant les graphes pour les méthodes de dichotomie, de Newton, de la sécante et de la fausse position.

Il existe des algorithmes pour l'intégration numérique d'une fonction donnée, notamment dans la bibliothèque SciPy. On importe tout d'abord la sous-bibliothèque `integrate` de la bibliothèque `scipy`, et pour éviter de retaper son nom à chaque appel de fonction, on l'importe avec la commande `as` :

```
>>> import scipy.integrate as si
>>> help(si)
```

La fonction `quad` trouve l'intégrale d'une fonction entre deux points. Pour intégrer la fonction sin entre 0 et π, on a

```
>>> import math
>>> I = si.quad(math.sin, 0, math.pi)
(2.0, 2.220446049250313e-14)
```

La première valeur indique la valeur estimée de l'intégrale, et la deuxième une majoration de l'erreur commise par rapport à la valeur exacte de l'intégrale.

Dans la suite du TD, on va programmer deux algorithmes de calcul d'intégrale, la méthode de Riemann (ou des rectangles) et la méthode des trapèzes.

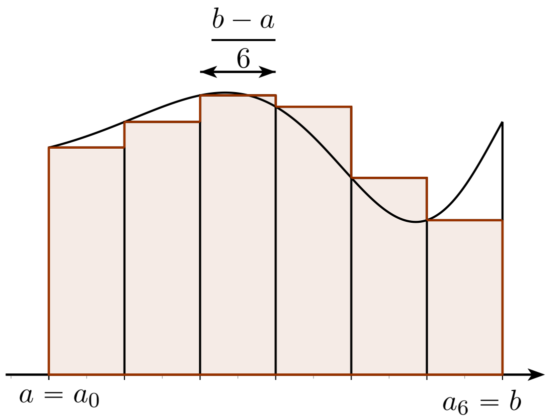
Méthode de Riemann

On approxime la fonction par une fonction constante par morceaux, avec la taille des "morceaux" qui tend vers 0. L'intégrale de cette fonction est alors juste la somme d'aires de rectangles.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $(a_0,\dots,a_n)$ la subdivision de $[a,b]$ telle que $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ (subdivision régulière ou à pas constant). On appelle *somme de Riemann* de f la somme

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(a_j).$$



Il sera montré en cours de mathématiques que pour f k-lipschitzienne, $R_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$.

1 – Ecrire une fonction `riemann` qui à une fonction f, à deux flottants a et b et à un entier n associe le flottant $R_n(f)$.

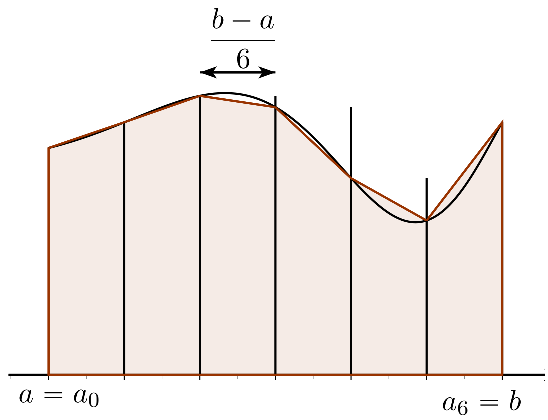
2 – En utilisant une fonction d'intégrale connue (par exemple $\int_0^\pi \sin t dt = 2$), évaluer expérimentalement en fonction de n l'erreur $e_n(f) = \left| R_n(f) - \int f \right|$.

Méthode des trapèzes

On cherche à approcher l'intégrale de f par l'intégrale de la fonction affine par morceaux égale à f aux points a_j. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_0,\dots,a_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$. On définit

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(a_j)+f(a_{j+1})}{2}.$$

Il sera également montré en cours de mathématiques que $\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f$.



1 – Ecrire une fonction `trapeze` qui à une fonction f, à deux flottants a et b et à un entier n associe le flottant $T_n(f)$.

2 – Evaluer expérimentalement en fonction de n l'erreur $\varepsilon_n(f) = \left| T_n(f) - \int f \right|$.