TD13 - Méthode d'Euler

1 Equation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle (1) suivante, où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t, y), t \geqslant t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'inconnue de cette équation est la fonction dérivable y.

1.1 Calcul de primitive

Si f ne dépend pas de y, on dit que l'équation (1) est dégénérée et elle s'écrit

$$(2) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t), t \geqslant t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Il sera montré en cours de mathématiques que si f est continue, alors (2) admet une unique solution, qui est l'unique primitive de f qui vaut y_0 en t_0, qu'on peut écrire

$$(3) \qquad y : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s$$

Supposons t donné. Pour calculer une intégrale, on a notamment vu deux méthodes, qui seront étudiées également en cours de mathématiques, celle des rectangles (de Riemann) et celle des trapèzes. Elles consistent toutes les deux, à découper l'intervalle $[t_0, t]$ en morceaux sur lesquels on approxime la fonction f (et donc y') par une fonction constante (Riemann) ou affine (trapèzes).

1 – Ecrire une fonction `primitive` qui à une fonction `f`, et trois `float t0`, `t` et `y0` renvoie la valeur de $y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}$ approchée par la méthode des rectangles.

2 – Ecrire une fonction `primitive` qui à une fonction `f`, trois `float t0`, `tmax`, `y0` et un `int n` renvoie une liste contenant les valeurs approchées (3) calculées aux points de la subdivision de $[t_0, t_{\max}]$ de taille n.

3 – Ecrire une fonction `fonction_et_derivee` qui à une fonction `f`, trois `float t0`, `tmax` et `y0`, renvoie le graphe de la fonction f, et de l'approximation de sa primitive sur l'intervalle $[t_0, t_{\max}]$.

4 – Comparer, pour des fonctions dont vous connaissez analytiquement la primitive, les graphes de cette primitive exacte et de l'approximation numérique. Jouez sur la taille n de la subdivision si nécessaire.

1.2 Equation autonome

Si f ne dépend pas de t, on dit que l'équation (1) est autonome, on peut se ramener à $y_0 = 0$ et l'équation s'écrit

$$(4) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(y), t \geqslant 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si f est de classe C^1, alors cette équation admet une unique solution y.

Cherchons à reproduire l'idée de la partie précédente.
Supposons $t > 0$ donné. On veut connaître $y(t)$. Pour cela, on découpe l'intervalle $[0, t]$ en morceaux sur lesquels on approxime y' par une fonction constante, c'est-à-dire y par une fonction affine.
Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \dfrac{t}{n}$ le pas constant, et on pose une fonction $\tilde{y}$ telle que

$$\text{pour } k \in [\![0, n-1]\!], \text{ et } s \in [kh, (k+1)h], \ \tilde{y}(s) = \tilde{y}(kh) + (s - kh)f(\tilde{y}(kh)).$$

On note $(\tilde{y}_0, \dots \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\tilde{y}_k = \tilde{y}(kh)$. On a alors

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(\tilde{y}_k).$$

On approxime alors $f(t)$ par $\tilde{y}_n$.

5 – Ecrire une fonction `sol_autonome` qui à une fonction `f`, deux `float t` et `y0` et un `int n` renvoie $\tilde{y}_n$ décrit ci-dessus.

6 – Ecrire une fonction `evol_et_sol_auto` qui à une fonction `f` et deux `float t1` et `y0`, renvoie le graphe de la fonction f, et de l'approximation de la solution de (4) sur l'intervalle $[0, t_1]$.

7 – Comparer, avec des fonctions pour lesquelles vous connaissez la solution de (4), les graphes de cette solution exacte et de l'approximation numérique.

1.3 Cas général

8 – Traiter de la même manière la forme générale de (1).
On pourra vérifier les résultats avec par exemple $y : t \mapsto \exp(\sin t)$ qui est solution de (1) avec $f : (t, z) \mapsto \cos t \times z$.

2 Equation différentielle d'ordre 2

On a vu l'équation du pendule oscillant amorti :

$$(5) \qquad ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0, \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0$$

avec l la longueur du pendule, m sa masse, c le coefficient de frottement et g l'accélération de la gravité.

10 – Procéder comme précédemment en se ramenant à une équation d'ordre 1 sur le couple $\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

11 – Tracé dans l'espace des phases
Tracer la trajectoire de $\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ dans le plan pour différentes conditions initiales θ_0, θ'_0.

12 – Identification de paramètre
On a $l = 1$m, $m = 1$kg, $g = 9,81$m.s^{-2}. Quand on lâche le pendule avec $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta'_0 = 0$, il oscille et atteint quand il revient pour la première fois pour angle maximal $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer le coefficient de frottement c par dichotomie.