一、填空题

1、设二维离散型随机变量(X,Y)具有概率分布律

$X\backslash Y$	3	6	9	12	15	18
1	0.01	0.03	0.02	0.01	0.05	0.06
2	0.02	0.02	0.01	0.05	0.03	0.07
3	0.05	0.04	0.03	0.01	0.02	0.03
4	0.03	0.09	0.06	0.15	0.09	0.02

解 X和Y的边缘分布律分别为

X	1	2	3	4
P	0.18	0.20	0.18	0.44

和

Y	3	6	9	12	15	18
P	0.11	0.18	0.12	0.22	0.19	0.18

.

2、设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为____________________.

解 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}8\mathrm{e}^{-(4x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3、设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则$P\left\{0<x\le\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}<y\le\dfrac{\pi}{3}\right\}=$____________________.

解 $$P\left\{0<x\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}<y\le\frac{\pi}{3}\right\}=F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)-F\left(0,\frac{\pi}{3}\right)+F\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

4、设随机变量X,Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ e^{-y}, & y\ge 0\end{cases}$$

且X,Y相互独立,则二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为____________________.

解 $\because$ X,Y相互独立

$\therefore$ (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{其他}\\ e^{-(x+y)}, & x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$$

5、设随机变量X,Y相互独立,且$X\sim b(100,0.2),Y\sim b(50,0.2)$,则$Z=X+Y\sim$____________.

解 $Z=X+Y\sim b(150,0.2)$

二、计算题

1、设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1)确定常数k;(2)求$P\{X\le 1, Y\le 3\}$;(3)求$P\{X\le 1.5\}$;(4)求$P\{X+Y\le 4\}$;(5)求边缘概率密度.

解 (1)由密度函数的性质有

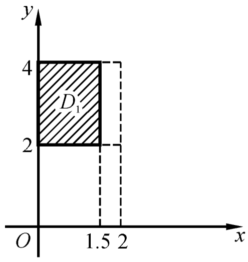
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=8k=1$$

故$R=\dfrac{1}{8}$.

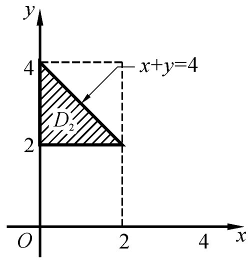
(2) $P\{X<1, Y<3\}=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}k(6-x-y)dydx=\frac{3}{8}$

(3) $P\{X<1.5\}=\iint\limits_{x<1.5} f(x,y)dxdy=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$.(图 a)

(4) $P\{X+Y\le 4\}=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$. (图 b)



(a)



(b)

(5) 如果$x\le 0$或$x\ge 2$,则$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$;如果$0<x<2$,则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{4}(3-x)$$

故关于X的边缘密度数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(3-x) & ,0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

如果$y\le 2$或$y\ge 4$,则$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=0$;如果$2<y<4$,则

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^2\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{4}(5-y)$$

故关于X的边缘密度数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(5-y), & 2<y<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2、袋中有五个号码$1,2,3,4,5$.从中任取三个,记其中最小的号码为X,最大的号码为Y.

(1)求X与Y的联合概率分布;(2) X与Y是否相互独立?

解 (1) X与Y的联合分布律如下表

$X \backslash Y$	3	4	5	$P\{X=x_i\}$
1	0.1	0.2	0.3	0.6
2	0	0.1	0.2	0.3
3	0	0	0.1	0.1
$P\{Y=y_i\}$	0.1	0.3	0.6	

(2)因 $P\{X=1\}\cdot P\{Y=3\}=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{6}{100}\neq\dfrac{1}{10}=P\{X=1,Y=3\}$, 故 X 与 Y 不独立.

3、设某种型号的电子管的寿命(以小时计)近似地服从 $N(160,400)$.随机地选取 4 只,求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

解 设这四只电子管的寿命为 $X_i(i=1,2,3,4)$,则 $X_i\sim N(160,400)\ (i=1,2,3,4)$,且 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,从而

$$
\begin{aligned}
&P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)\geq 180\}\\
&\quad=P\{X_3\geq 180\}\cdot P\{X_4\geq 180\}\cdot P\{X_1\geq 180\}\cdot P\{X_2\geq 180\}\\
&\quad=[1-P\{X_1<180\}]\cdot[1-P\{X_2<180\}]\cdot[1-P\{X_3<180\}]\cdot[1-P\{X_4<180\}]\\
&\quad=[1-P\{X_1<180\}]^4=\left[1-\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)\right]^4\\
&\quad=[1-\Phi(1)]^4=(0.158)^4=0.00063.
\end{aligned}
$$