2016-2017 学年第一学期

高等数学 B1（B 卷）

考试时间：2017 年 2 月 17 日 15:00-17:00

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

1、$\underline{(-5, 2)}$ ； 2、$\underline{-1}$； 3、$\underline{[0,+\infty)}$ ；

4、$\underline{e^{-2x}(1-2x)}$； 5、$\underline{2x\sin(t^4+2)}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

1、A；2、C；3、A；4、B；5、C.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、**解：** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)} \text{............}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(x-4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)} \text{..................}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{1+2x}+3} \quad \text{.....................}$$

$$=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\left(\sqrt{1+2\times 4}+3\right)} \text{...................................}$$

$$=\frac{4}{3}. \qquad \text{.................................}$$

注：用其他方法求解视具体情况给分。

2、**解：** $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+2}{2x+1})^x$

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x+1})^x \text{.................}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}} \text{................}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{(2x+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\ldots\ldots.4'$

$$=e^{\frac{1}{2}}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} \text{.........................}$$

$$=e^{\frac{1}{2}} \text{..................}$$

注：用其他方法求解视具体情况给分。

四、计算题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、**解：** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x^2+\ln(x+\sqrt{1+x^2}+)\right)'$ ....

$$=\left(x^2\right)'+\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' \text{............}$$

$$=2x+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' \text{.........}$$

$$=2x+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \text{...........}$$

$$=2x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ………... …..……....…}$$

2、**解：** 方程两边同时求微分得：

$$d\left(ye^x\right)=d\left(1-\ln y\right) \text{............}$$

$$e^x dy+yde^x=-\frac{1}{y}dy \text{..........}$$

$$\left(e^x+\frac{1}{y}\right)dy=-ye^x dx \text{...........}$$

$$dy=-\frac{ye^x}{\left(e^x+\frac{1}{y}\right)}dx=-\frac{y^2e^x}{e^x y+1}dx \text{ ....…}$$

3、**解：**

切线的斜率为 k_1：$k_1=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\dfrac{3t^2}{2t}\right|_{t=2}=3$.....

法线的斜率为 k_2：$k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{1}{3}$ ....

当 $t=2$ 时，$x=5$，$y=8$. .... $4'$

∴切线方程为 $y-8=3(x-5)$ ………...…

法线方程为 $y-8=-\dfrac{1}{3}(x-5)$ ....

五、计算下列积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1、**解**： 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2, dx=2tdt$ ……

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t^2 \text{……}$$

$$=\int \frac{1}{1+t}2t\mathrm{d}t=\int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t \text{……....}$$

$$=\int \frac{2t+2-2}{1+t}\mathrm{d}t=2\int 1-\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \text{……........}$$

$$=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+C \text{...}$$

2、**解**： $\int_0^1 (x^2+1)e^x \mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{d}e^x \text{.................}$$

$$=(x^2+1)e^x|_0^1-\int_0^1 e^x \mathrm{d}(x^2+1) \text{.............}$$

$$=(x^2+1)e^x|_0^1-2\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x \text{………….. ..}$$

$$=(x^2+1)e^x|_0^1-2(xe^x|_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x) \text{….. ..}$$

$$=(x^2+1)e^x|_0^1-2(xe^x|_0^1-e^x|_0^1) \text{…… …....}$$

$$=(2e-1)-2(e-(e+1))=2e-3 \text{…..}$$

3、**解**： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+2\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x \text{....}$$

$=0+\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\sin^3 x$ （ **由 奇 偶 性 知** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$ **=0**）.... ..

$$=\frac{2}{3}\sin^3 x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{.... ....}$$

$$=\frac{2}{3}(1-(-1))=\frac{4}{3} \text{.....}$$

注：用其他方法求解视具体情况给分。

六（8 分）：**解**：函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

∵ $y'=3x^2-8x-3$ ....

令 $y'=0$ 得 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=3$ ....

列表讨论：

x	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	极大值	↓	极小值	↑

....…………….........

极大值为 $y(-\frac{1}{3})=6\frac{14}{27}$ ....

极小值为 $y(3)=-12$ ....

七（8 分）：**解**： 面积为

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^2+2x+3\right)\mathrm{d}x \text{.....................}$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x|_{-2}^{1}=9 \text{.......................}$$

体积为

$$V=\int_{-2}^{1}\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\pi\left(x^2+2x+3\right)^2\mathrm{d}x \text{.....}$$

$$==\int_{-2}^{1}\pi\left((x+1)^2+2\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}(x+1)^5+4x+\frac{4}{3}(x+1)^3|_{-2}^{1}\right)=30\frac{3}{5}\pi \text{...}$$

八（**6** 分）：**证明**：设 $f(x)=x^5+5x+1$，则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续 ………....

$\because f(-1)=-5<0, f(0)=1>0$ ………..

根据零点定理，$f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内至少有一根......3′

又 $\forall x\in(-1, 0),\ f'(x)=5x^4+5>0$

∴ $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调增加，即 $f(x)$ 与 x 轴至多有一个交点。 ....

故方程 $x^5+5x+1=0$ 在 $(-1, 0)$ 内有且只有一个实根。 ....