一、填空题

1、设事件 A,B 满足：$P(B\mid A)=P(\bar{B}\mid\bar{A})=\dfrac{1}{3}, P(A)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(B)=$____________.

解 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}, P(A)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(AB)=\dfrac{1}{3}P(A)=\dfrac{1}{9}$

$$P(\bar{B}\mid\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{1}{3}\Rightarrow P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{3}P(\bar{A})=\frac{2}{9}$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]\Rightarrow$$

$$P(B)=1-P(A)+P(AB)-P(\bar{A}\bar{B})=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

2、设 $P(A)=\dfrac{2}{5}, P(A|B)=\dfrac{2}{3}, P(B|A)=\dfrac{1}{2}$,则 $P(A\cup B)=$____________.

解 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}, P(A)=\dfrac{2}{5}\Rightarrow P(AB)=\dfrac{1}{2}P(A)=\dfrac{1}{5}$

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}\Rightarrow P(B)=\frac{3P(AB)}{2}=\frac{3}{10}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$

3、设随机事件 A,B 满足 $P(A)=0.6, P(A\cup B)=0.9, P(B\mid A)=0.5$,则 $P(B)=$____________.

解
$$\begin{cases}P(A)=0.6\\ P(A\cup B)=0.9\\ P(B\mid A)=0.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(A)=0.6\\ P(A)+P(B)-P(AB)=0.9\Rightarrow P(B)=0.6\\ \dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5\end{cases}$$

4、设事件 A,B,C 两两独立,且 $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}, P(A\cup B\cup C)=9/16$,则

$P(A)=$__________.

解
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(A)P(C)\\&=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

$$3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}\Rightarrow P^2(A)-P(A)+\frac{3}{16}=0\Rightarrow P(A)=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times\frac{3}{16}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\text{或}P(A)=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}.$$

5、设在一次试验中,事件 A 发生的概率为 p. 现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为________,而事件 A 至多发生一次的概率为_________.

解 A 至少发生一次的概率为:$1-p_n(0)=1-C_n^0\cdot p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$

A 至多发生一次的概率为 $p_n(0)+p_n(1)=C_n^0\cdot p^0(1-p)^n+C_n^1\cdot p^1(1-p)^{n-1}=(1-p+np)(1-p)^{n-1}$.

二、计算题

1、某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率是 1/2,第一次落下未打破,第二次落下打破的概率为 7/10,若前两次落下还未打破,第三次落下被打破的概率为 9/10,试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 设 A_i 表示第 i 次落下时透镜被打破,(i =1,2,3), B 表示透镜三次落下而未破,则 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,故

$$P(B)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_3}\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

$$=\left(1\text{-}\frac{1}{2}\right)\left(1\text{-}\frac{7}{10}\right)\left(1\text{-}\frac{9}{10}\right)$$

$$=0.015$$

2、将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 2:1.问

(1) 接收站收到信息 A 的概率是多少?

(2) 若接收站收到的信息是 A,试问原发信息是 A 的概率是多少？

解 (1) 设 $A=\{$原发信息是 $A\}$,则 $\bar{A}=\{$原发信息是 $B\}$,又设 $C=\{$收到信息是 $A\}$,则 $\bar{C}=\{$收到信息是 $B\}$,则

$$P(A)=\frac{2}{3},P(\bar{A})=\frac{1}{3},P(C\,|\,A)=0.98,P(C\,|\,\bar{A})=0.01$$

于是由全概率公式得

$$P(C)=P(A)P(C\,|\,A)+P(\bar{A})P(C\,|\,\bar{A})=\frac{2}{3}\times0.98+\frac{1}{3}\times0.01=\frac{197}{300}\approx0.6567$$

(2) 若接收站收到的信息是 A,由贝叶斯公式,原发信息是 A 的概率是

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{3}\times0.98}{\frac{197}{300}}=\frac{196}{197}\approx0.9949$$

3、加工某一零件需要经过四道工序,设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02,0.03,0.05,0.03,假定各道工序是相互独立的,求加工出来的零件的次品率.

解 设 A_i={第 i 道工序出次品}(i=1,2,3,4).则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4}A_i\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97=0.124$$

4、掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止.

(1)问正好在第 6 次停止的概率;

(2)问正好在第 6 次停止的情况下,第 5 次也是出现正面的概率.

解 (1)设 $A=$"正好在第6次停止",事件 A 发生说明第6次出现正面且前五次中出现2次正面,3次反面",于是所求的概率为

$$P(A)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

(2) 设 $B=$"第 5 次出现正面",则事件 AB 表示前四次中出现 1 次正面,3 次反面,而第 5,6 次出现正面这一事件,于是 $P(AB)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$,由条件概率计算公式得

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}.$$