第二讲 基本概念、公式和定理

本讲内容:

一、基本和常用逻辑运算

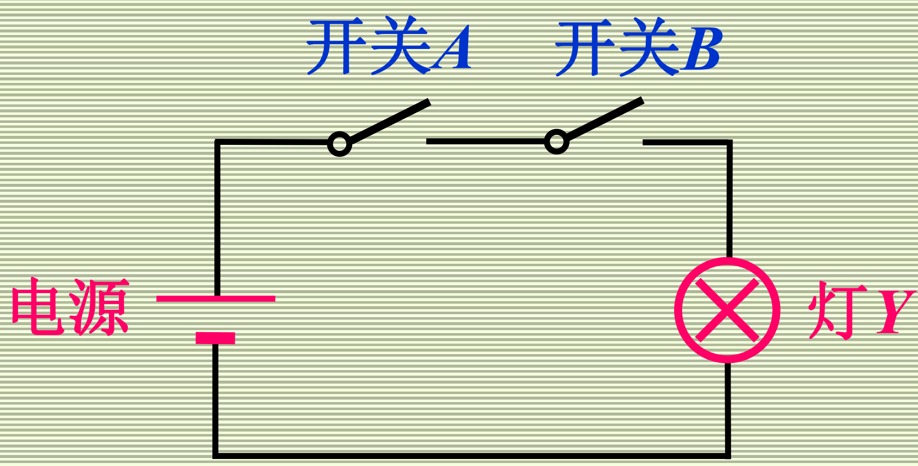
二、逻辑函数常用公式和定理

1.1 基本概念、公式和定理

1.1.1 基本和常用逻辑运算

一、三种基本逻辑运算

1. 与逻辑： 当决定一事件的所有条件都具备时，事件才发生的逻辑关系。



与逻辑关系

功能表

A	*B*	*Y*
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

与逻辑的表示方法：

真值表 （Truth table）

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

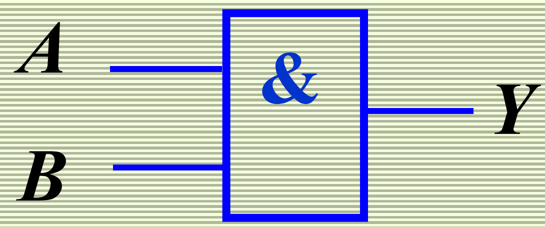
功能表

A	B	Y
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

逻辑函数式

$$Y = A \cdot B = AB$$

逻辑符号



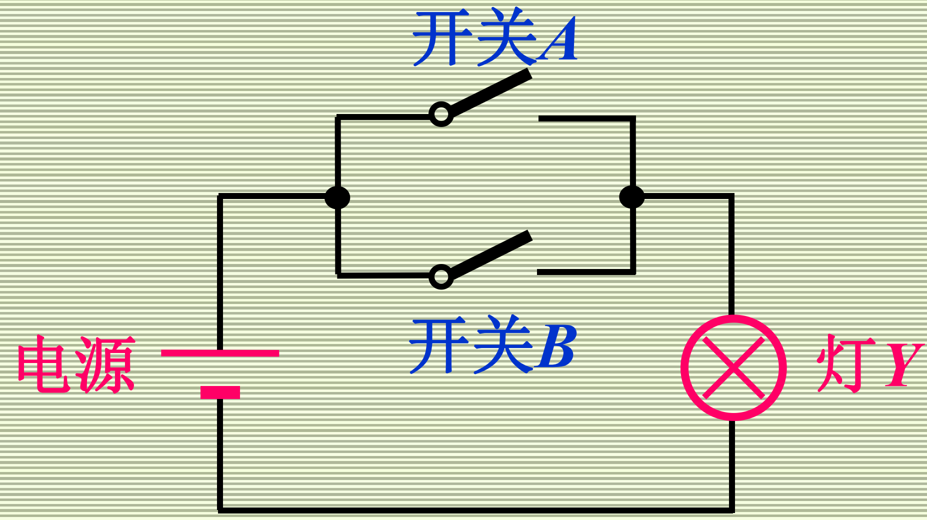
与门（AND gate)

2. 或逻辑：

决定一事件结果的诸条件中，只要有一个或一个以上具备时，事件就会发生的逻辑关系。

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

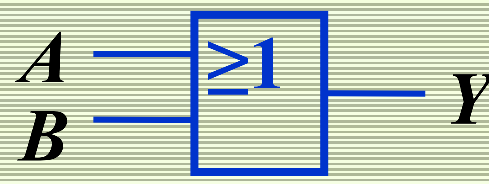


或逻辑关系

逻辑函数式

$$Y = A + B$$

逻辑符号



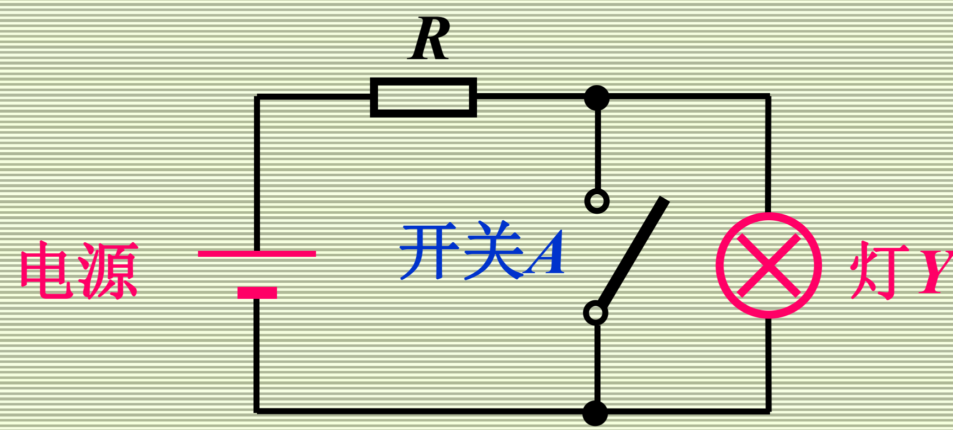
或门（OR gate）

3. 非逻辑：

只要条件具备，事件便不会发生；条件不具备，事件一定发生的逻辑关系。

真值表

A	Y
0	1
1	0

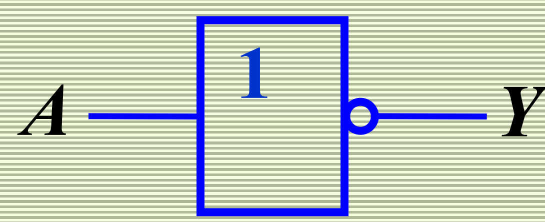


非逻辑关系

逻辑函数式

$$Y = \overline{A}$$

逻辑符号



非门（NOT gate)

二、逻辑变量与逻辑函数及常用复合逻辑运算

1. 逻辑变量与逻辑函数

逻辑变量： 在逻辑代数中，用英文字母表示的变量称为逻辑变量。在二值逻辑中，变量的取值不是 1 就是 0 。

原变量和反变量： 字母上面无反号的称为原变量，有反号的叫做反变量。

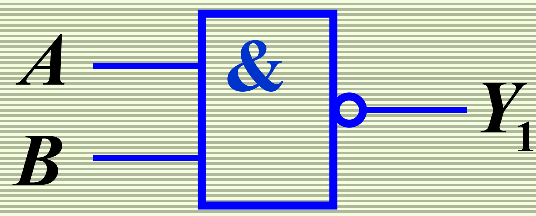
逻辑函数： 如果输入逻辑变量 A、B、$C\cdots$的取值确定之后，输出逻辑变量 Y 的值也被唯一确定，则称 Y 是 A、B、$C\cdots$的逻辑函数。并记作 $Y=F(A,B,C\cdots)$

2. 几种常用复合逻辑运算

(1) 与非逻辑

(NAND)

$$Y_1 = \overline{AB}$$



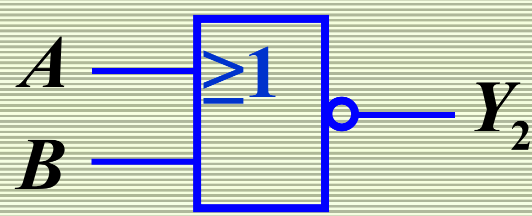
Y_1、Y_2 的真值表

A	B	Y_1	Y_2
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

(2) 或非逻辑

(NOR)

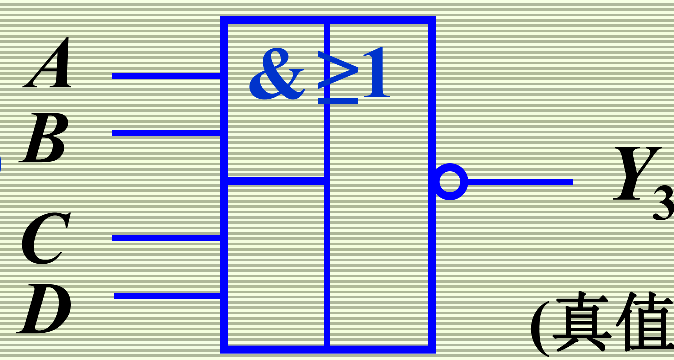
$$Y_2 = \overline{A + B}$$



(3) 与或非逻辑

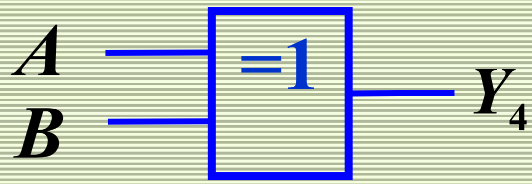
(AND – OR – INVERT)

$$Y_3 = \overline{AB + CD}$$



(真值表略)

(4) 异或逻辑
(Exclusive—OR)



A	B	Y_4
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

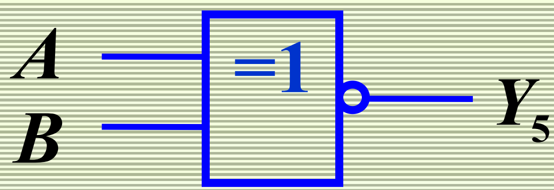
$$Y_4 = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

(5) 同或逻辑　(异或非)
(Exclusive—NOR)

$$Y_5 = \overline{A \oplus B}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

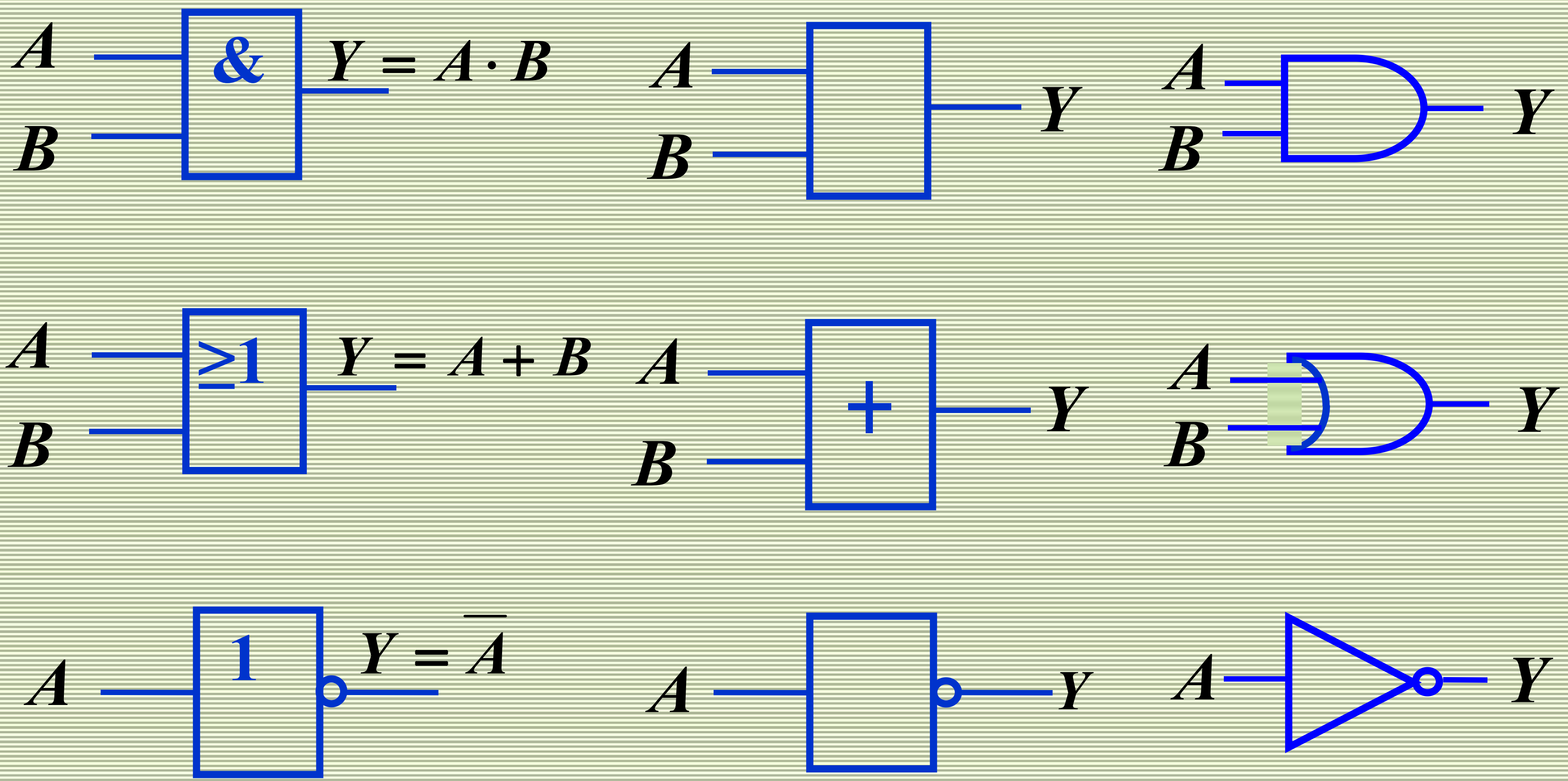
$$= A \odot B$$



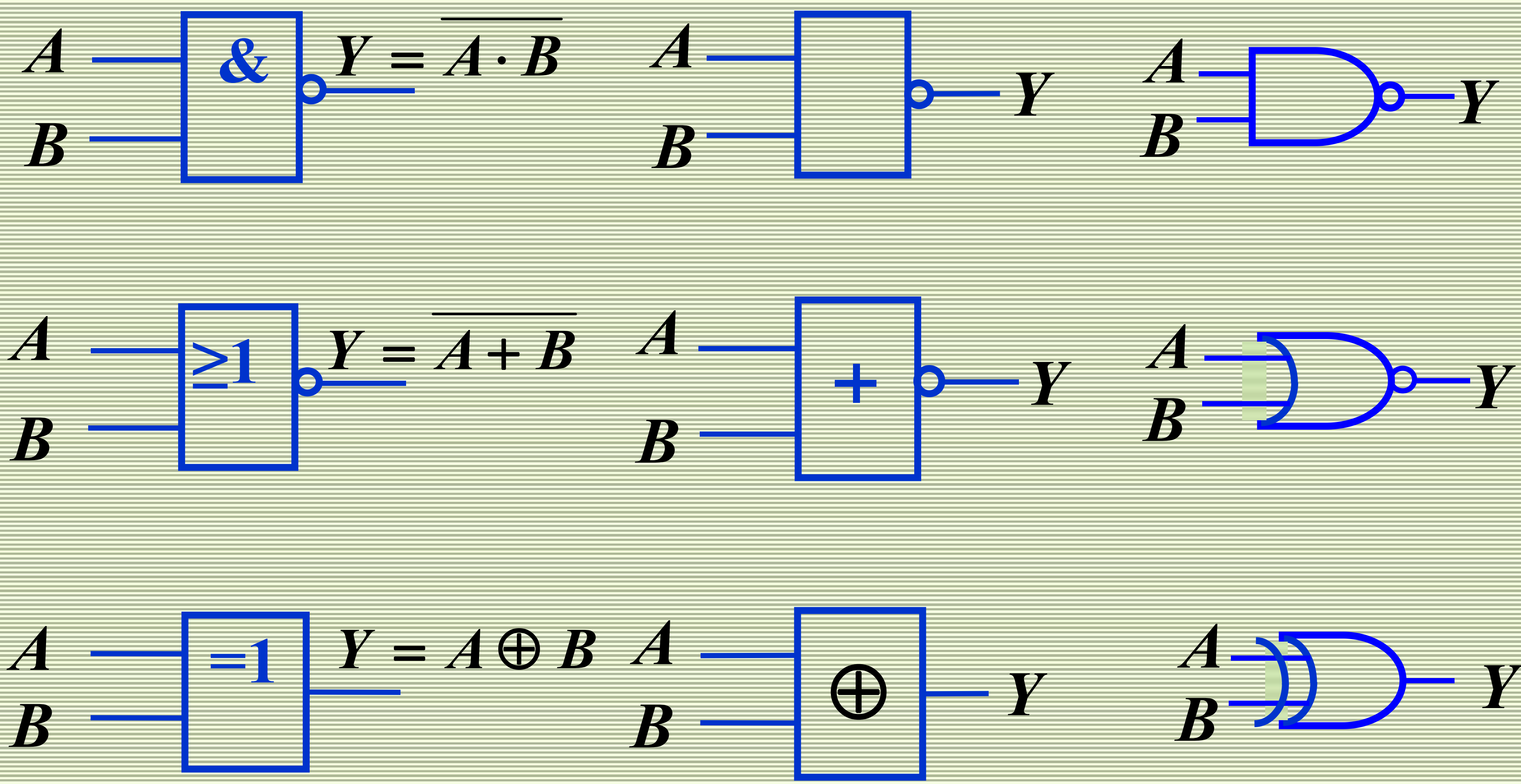
A	B	Y_5
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. 逻辑符号对照

国标符号 曾用符号 国际符号



国标符号 曾用符号 国际符号



1.1.2 公式和定理

一、 常量之间的关系(常量：0 和 1)

与： $0 \cdot 0 = 0$ 或： $1 + 1 = 1$ 非： $\overline{0} = 1$

$0 \cdot 1 = 0$ $1 + 0 = 1$ $\overline{1} = 0$

$1 \cdot 1 = 1$ $0 + 0 = 0$

二、变量和常量的关系(变量：*A*、*B*、*C*...)

与： $A \cdot 1 = A$ 或： $A + 0 = A$ 非： $A \cdot \overline{A} = 0$

$A \cdot 0 = 0$ $A + 1 = 1$ $A + \overline{A} = 1$

三、与普通代数相似的定理

交换律 $A \cdot B = B \cdot A$ $\quad A + B = B + A$

结合律 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

分配律 $A(B + C) = AB + AC$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

[例 1. 1. 1] 证明公式 $A + BC = (A + B)(A + C)$

[解] 方法一：公式法

$$右式 = (A + B)(A + C) = A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C$$

$$= A + AC + AB + BC = A(1 + C + B) + BC$$

$$= A + BC = 左式$$

证明公式 $A+BC=(A+B)(A+C)$

方法二：真值表法(将变量的各种取值代入等式两边，进行计算并填入表中)

A	B	C	$B\cdot C$	$A+BC$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

相等

四、逻辑代数的一些特殊定理

同一律 $A \cdot A = A$ $A + A = A$

德·摩根定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

还原律 $\overline{\overline{A}} = A$

[例 1.1.2] 证明：德·摩根定理

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

相等 相等

五、关于等式的三个规则

1. 代入规则： 等式中某一变量都代之以一个逻辑函数，则等式仍然成立。

例如，已知 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ （用函数 $A+C$ 代替 A）

则 $\overline{(A+C)+B}=\overline{A+C}\cdot\overline{B}=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}$

2. 反演规则：

将 Y 式中“.”换成“+”,“+”换成“.”
“0”换成“1”,“1”换成“0”
原变量换成反变量，反变量换成原变量

$\Rightarrow \overline{Y}$

注意：
- 运算顺序：括号 → 乘 → 加
- 不属于单个变量上的反号应保留不变

反演规则的应用：求逻辑函数的反函数

将 Y 式中“.”换成“+”,“+”换成“.”
“0”换成“1”,“1”换成“0”
原变量换成反变量，反变量换成原变量

$\Rightarrow \overline{Y}$

例如：已知 $Y_1 = A(B+C)+CD$

则 $\overline{Y_1} = (\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C})(\overline{C}+\overline{D})$

运算顺序：
括号→与→或

已知 $Y_2 = \overline{\overline{A\overline{B}+C}+D}+C$

则 $\overline{Y_2} = \overline{\overline{(\overline{A}+B)\cdot\overline{C}}\cdot\overline{D}}\cdot\overline{C}$

不属于单个变量上的反号应保留不变

3. 对偶规则： 如果两个表达式相等，则它们的对偶式也一定相等。

将 Y 中 “.”换成 “+”,“+”换成 “.”
“0” 换成 “1”,“1”换成 “0”

$\Rightarrow Y^D$

（对偶式）

例如 $Y_1 = A(B+C)+CD \longrightarrow Y_1^D = (A+BC)\,(C+D)$

$Y_2 = \overline{\overline{A\overline{B}+C}+D}+C \longrightarrow Y_2^D = \overline{\overline{(A+\overline{B})\,C}\cdot D}\cdot C$

运算顺序：
括号→与→或

对偶规则的应用：证明等式成立

$0\cdot 0 = 0 \longrightarrow 1+1=1$

$A\cdot \overline{A} = 0 \longrightarrow A+\overline{A}=1$

六、若干常用公式

(1) $AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$

(2) $A + AB = A(1 + B) = A$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $A + A(\quad\quad) = A$

(3) $A + \overline{A}B = (A + \overline{A})(A + B) = A + B$

(4) $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

(5) $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB$

(6) $\overline{AB + \overline{A}C} = (\overline{A} + \overline{B})(A + \overline{C}) = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$

公式 (4) 证明: $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

左 $=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})\,BC$

$A+AB=A$

$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$

推论 $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$

公式 (5) 证明: $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A}\,\overline{B}+AB$

左 $=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)\,(A+\overline{B})$

$=\overline{A}\cdot A+\overline{A}\,\overline{B}+AB+B\cdot\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}+AB$

即 $\overline{A\oplus B}=A\odot B$ 同理可证 $\overline{A\odot B}=A\oplus B$

七、关于异或运算的一些公式

异或 $A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$

同或 $A \odot B = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

$$\begin{cases} \overline{A \oplus B} = A \odot B \\ \overline{A \odot B} = A \oplus B \end{cases}$$

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(3) 分配律 $A \cdot (B \oplus C) = AB \oplus AC$

(4) 常量和变量的异或运算 $A \oplus 1 = \overline{A}$ $A \oplus 0 = A$

$A \oplus A = 0$ $A \oplus \overline{A} = 1$

(5) 因果互换律

如果 $A \oplus B = C$ 则有 $\begin{cases} A \oplus C = B \\ B \oplus C = A \end{cases}$