一、填空题

1、设总体 $X\sim b(1,p)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体 X 中抽取的一个样本,则参数 p 的矩估计量为 $\hat{p}=$__________.

解 由于 $X\sim b(1,p), A_1=\overline{X}, \mu_1=E(X)=p$,故由 $A_1=\mu_1$ 得参数 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\overline{X}$.

2、设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$0<\theta<1$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从中抽取的一个样本,则参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$_______.

解 由于 $A_1=\overline{X}, \mu_1=E(X)=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$,故由 $A_1=\mu_1$ 得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}$.

3、设 $X\sim E(\lambda)$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 X 的一组样本观察值,则 θ 的最大似然估计为____________.

解 $L(x_1,x_2,\cdots,x_{n;}\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$, $\ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$,令

$$\frac{d\ln \mathrm{L}}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

得 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\overline{x}}$.

4、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的样本,设 $0.1X_1+\alpha X_2+0.3X_3+0.2X_4$ 是 $\mu(\mu\neq 0)$ 的无偏估计,则 $\alpha=$______________.

解 $\because$ X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的样本

$\therefore$ $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=E(X_4)=\mu$

$\because$ $0.1X_1+\alpha X_2+0.3X_3+0.2X_4$ 是总体期望 μ 的无偏估计

$\therefore$ $E(0.1X_1+\alpha X_2+0.3X_3+0.2X_4)=\mu$

$\because$ $E(0.1X_1+\alpha X_2+0.3X_3+0.2X_4)=0.1E(X_1)+\alpha E(X_2)+0.3E(X_3)+0.2E(X_4)$
$=0.1\mu+\alpha\mu+0.3\mu+0.2\mu=\mu$

$\therefore$ $\alpha=0.4$

5、设总体 $X\sim N(\mu,0.04^2)$,根据来自 X 的容量为 16 的样本,测得样本均值为 $\overline{x}=10.05$,则总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为____________________.

解 $\because$ $\overline{x}-\dfrac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sigma=10.05-\dfrac{1.96}{\sqrt{16}}\times 0.04=10.0304$

$\overline{x}+\dfrac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sigma=10.05-\dfrac{1.96}{\sqrt{16}}\times 0.04=10.0696$

$\therefore$ 总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (10.0304,10.0696)

二、计算题

1、设总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中 $\theta>-1$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本,求 θ 的矩估计量及极大似然估计量.

解 (1) 由于

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},\ A_1 = \bar{X} = E(X) = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

故由 $A_1 = \mu_1$ 得

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

所以 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$.

(2) 似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta}, (0 < x_i < 1).$$

取对数

$$\ln L = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \quad (0 < x_i < 1)$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -1 - \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} = -1 - \dfrac{1}{\bar{x}}$.

2、设某种砖头的抗压强度 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$,今随机抽取 20 块砖头,测得数据如下(kg.cm^{-2}):

64	69	49	92	55	97	41	84	88	99
84	66	100	98	72	74	87	84	48	81

(1)求 μ 的置信概率为 0.95 的置信区间.

(2)求 σ^2 的置信概率为 0.95 的置信区间.

解 $\bar{x} = 76.6, s = 18.14, \alpha = 1-0.95 = 0.05, n = 20,$

$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(19) = 2.093,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(19) = 32.852, \chi^2_{0.975}(19) = 8.907$

(1) μ 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \left(76.6 \pm \frac{18.14}{\sqrt{20}} \times 2.093\right) = (68.11, 85.089)$$

(2) σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{19}{32.852} \times 18.14^2, \frac{19}{8.907} \times 18.14^2\right) = (190.33, 702.01)$$

三、证明题

设 X_1，X_2 是从正态总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 中抽取的样本

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2; \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2; \hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2;$$

试证 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量,并求出每一估计量的方差.

证明 $E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) = \frac{2}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu$

$$E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\mu$$

所以 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 均是 μ 的无偏估计量.

$$D(\hat{\mu}_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2 D(X_1)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 D(X_2)=\frac{4}{9}X\sigma^2=\frac{5\sigma^2}{9}$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2 D(X_1)+\left(\frac{3}{4}\right)^2 D(X_2)=\frac{5\sigma^2}{8}$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(D(X_1)+D(X_2)\right)=\frac{\sigma^2}{2}$$