一、填空题

1、设随机变量 X,Y,Z 相互独立,且 $E(X)=5,E(Y)=11,E(Z)=8$,则 $E(2X+3Y+1)=$________;
$E(YZ-4X)=$________.

解 $E(2X+3Y+1)=2E(X)+3E(Y)+1=2\times5+3\times11+1=44$
$E(YZ-4X)=E(YZ)-4E(X)=E(Y)\cdot E(Z)-4E(X)=11\times8-4\times5=68$

2、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

且已知 $E(X)=0.1,E(X^2)=0.9$,则 $p_1=$________; $p_2=$________; $p_3=$________.

解 由已知得

$$\begin{cases} E(X)=-1\times p_1+0\times p_2+1\times p_3=-p_1+p_3=0.1 \\ E(X^2)=(-1)^2\times p_1+0^2\times p_2+1^2\times p_3=p_1+p_3=0.9 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}\Rightarrow p_1=0.4,p_2=0.1,p_3=0.5$$

3、设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $E(XY)=$________.

解 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x 2y\mathrm{d}y=0.25$.

4、已知 $E(X)=1.4,D(X)=0.24$,则 $E(X^2)=$__________.

解 由 $D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$ 得

$E(X^2)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=0.24+1.4^2=2.2$

5、已知随机变量 $X\sim P(2)$,且 $Z=2X-2$,则 $E(Z)=$ _________, $D(Z)=$ _________.

解 由于 $X\sim P(2)$,故 $E(X)=2,D(X)=2$. 于是
$E(Z)=E(2X-2)=2E(X)-2=2$
$D(Z)=D(2X-2)=4D(X)=8$

6、设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}\ (-\infty<x<+\infty)$$

则 $D(X)=$_______.

解 由于

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

故 $X\sim N\left(1,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$,于是 $D(X)=\sigma^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

7、设随机变量 $X\sim U(a,b)$,且 $E(X)=3$, $D(X)=\frac{4}{3}$,则 $a=$_______, $b=$________.

解 由于 $X\sim U(a,b)$,故

$$\begin{cases} E(X)=\dfrac{a+b}{2}=3 \\ D(X)=\dfrac{1}{12}(b-a)^2=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ b-a=4 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=5.$$

8、已知随机变量 $X\sim b(n,p), E(X)=12, D(X)=8$,则 $p=$______; $n=$________.

解 由于 $X\sim b(n,p)$,故

$$\begin{cases} E(X)=np=12 \\ D(X)=np(1-p)=8 \end{cases} \Rightarrow n=36, p=\frac{1}{3}.$$

9、设 $X\sim N(1,9), Y\sim N(2,4)$ 且 X,Y 相互独立,则 $E(2X-3Y)=$_____, $D(2X-3Y)=$_____.

解 由于 $X\sim N(1,9), Y\sim N(2,4)$,故

$$E(X)=1, D(X)=9, E(Y)=2, D(Y)=4$$

于是

$$E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)=2\times1-3\times2=-4$$

$$D(2X-3Y)=2^2D(X)+(-3)^2D(Y)=2^2\times9+(-3)^2\times4=72$$

10、已知 $D(X)=2, D(Y)=3, \operatorname{cov}(X,Y)=-1$,则 $\operatorname{cov}(3X-2Y+1, X+4Y-2)=$_________.

解
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(3X-2Y+1, X+4Y-2)&=3\operatorname{cov}(X,X)+10\operatorname{cov}(X,Y)-8\operatorname{cov}(Y,Y)\\&=3D(X)+10\operatorname{cov}(X,Y)-8D(Y)\\&=3\times2+10\times(-1)-8\times3\\&=-28\end{aligned}$$

二、计算题

1、设 (X,Y) 的分布律为

$X\setminus Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 $E(X), E(Y), E\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

解 $X, Y, \dfrac{X}{Y}$ 的分布律如下

X	1	2	3
1	0.4	0.2	0.4

Y	-1	0	1
1	0.3	0.4	0.3

$\frac{Y}{X}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2$; $E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0$;

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times0.1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times0+0\times0.4+\frac{1}{3}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+1\times0.1=-\frac{1}{15}.$$

2、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求$E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=1.$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}.$$

3、设随机变量 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases} 4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

求$E(X+Y),E(2X-3Y^2)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx=[-xe^{-2x}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}.$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^{+\infty}2x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}4ye^{-4y}dy=\frac{1}{4}.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}4y^2e^{-4y}dy=\frac{1}{8}.$$

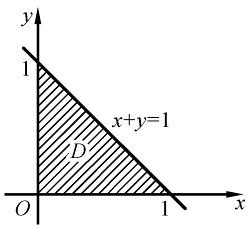
从而

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

$$E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

4、设二维随机变量(X,Y)在以$(0,0),(0,1),(1,0)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,求$\mathrm{cov}(X,Y)$和ρ_{XY}.

解 如图 S_D= $S_D=\frac{1}{2}$，故(X,Y)的概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in D \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$E(X)=\iint_D xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2xdy=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=\iint_D x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2x^2dy=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

同理

$$E(Y)=\frac{1}{3},D(Y)=\frac{1}{18}.$$

$$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{12}.$$

所以

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\times\sqrt{\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}$$