一、填空题

1、如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数为____________;如果 X 的概率密度为 $f(x)$, 则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为____________.

解 $\prod_{i=1}^{n}F(x_i),\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$

2、设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的样本,则 $Z=\sum_{i=1}^{5}X_i^2\sim$____________.

解 $Z\sim\chi^2(5)$

3、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本,则 $E(\bar{X})=$______, $D(\bar{X})=$______.

解 $\because$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本

$$\therefore\ E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=E(X)=\mu$$

$$D(X_1)=D(X_2)=\cdots=D(X_n)=D(X)=\sigma^2$$

$$\therefore\ E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right]=\mu$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\right]=\frac{\sigma^2}{n}$$

4、设 $X\sim P(\lambda)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本,则 $E(\bar{X})=$______, $D(\bar{X})=$______.

解 $\because$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本

$$\therefore\ E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=E(X)=\lambda$$

$$D(X_1)=D(X_2)=\cdots=D(X_n)=D(X)=\lambda$$

$$\therefore\ E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right]=\lambda$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\right]=\frac{\lambda}{n}$$

5、如果 $X\sim\chi^2(4),Y\sim\chi^2(5)$, 且它们相互独立,则 $X+Y\sim$____________.

解 $X+Y\sim\chi^2(9)$

6、如果 $X\sim\chi^2(10)$, 则 $E(X)=$________; $D(X)=$________.

解 $E(X)=10$, $D(X)=20$.

7、$\chi^2_{0.025}(30)=$________, $\chi^2_{0.05}(61)=$________.

解 查表得

$$\chi^2_{0.025}(30)=46.979$$

$$\chi^2_{0.05}(61)\approx\frac{1}{2}\left(z_{0.05}+\sqrt{2\times61-1}\right)^2=\frac{1}{2}(1.64+11)^2=79.8848.$$

8、设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(100)$, 且 X,Y 相互独立,则统计量 $t=\frac{10X}{\sqrt{Y}}\sim$________.

解 $t=\frac{10X}{\sqrt{Y}}=\frac{X}{\sqrt{Y/100}}\sim t(100)$

9、$t_{0.01}(20)=$________, $t_{0.25}(50)=$________.

解 $t_{0.01}(20)=2.5280$, $t_{0.25}(50)\approx z_{0.25}=0.67$.

10、设$U\sim\chi^2(20),V\sim\chi^2(30)$,且$U,V$相互独立,则统计量$F=\frac{3U}{2V}\sim$______.

解 $F=\frac{3U}{2V}=\frac{U/20}{V/30}\sim F(20,30)$.

11、$F_{0.05}(9,12)=$______,则$F_{0.95}(12,9)=$______.

解 $F_{0.05}(9,12)=2.80, F_{0.95}(12,9)=\frac{1}{F_{0.05}(9,12)}=\frac{1}{2.80}=0.357$.

12、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$,则$\eta=\sum_{i=1}^n a_iX_i\sim$______.

解 $\eta=\sum_{i=1}^n a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma^2\right)$

13、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,则$\bar{X}\sim$______,$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim$______.

解 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\sigma^2/n\right),\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

14、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,$X_i\sim N(0,1)$,则$T=\sum_{i=1}^n X_i^2\sim$______.

解 $T=\sum_{i=1}^n X_i^2\sim\chi^2(n)$

15、设两个随机变量X与Y相互独立,并且$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$,则$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim$______.

解 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

二、计算题

1、设总体$X\sim N\left(60,15^2\right)$,从总体$X$中抽取一个容量为100的样本,求样本均值与总体均值之差的绝对值大于3的概率.

解 由已知$\mu=60,\sigma^2=15^2,n=100$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\text{即}Z=\frac{\overline{X}-60}{15/10}\sim N(0,1)$$

$$P(|\overline{X}-60|>3)=P(|Z|>30/15)=1-P(|Z|<2)=2[1-\Phi(2)]=2(1-0.9772)=0.0456.$$

2、从一正态总体中抽取容量为10的样本，假定有2%的样本均值与总体均值之差的绝对值在4以上,求总体的标准差.

解 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,由$P(|\overline{X}-\mu|>4)=0.02$得$P|Z|>4(\sigma/n)=0.02$,故

$$2\left[1-\Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)\right]=0.02,\text{即}\Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=0.99.$$

查表得

$$\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}=2.33$$

所以$\sigma=\frac{4\sqrt{10}}{2.33}=5.43$