第三讲 逻辑函数的化简方法

9

本讲内容:

一、逻辑函数的标准与或式和最简式

二、逻辑函数的公式化简法

三、逻辑函数的图形化简法

四、具有无关项的逻辑函数化简

1 1 1

1.2 逻辑函数的化简方法

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

$$Y = F(A,B,C) = AB + \overline{A}C$$

$$= AB(C+\overline{C}) + \overline{A}C(B+\overline{B})$$

$$= \underline{ABC} + \underline{AB\overline{C}} + \underline{\overline{A}BC} + \underline{\overline{A}\,\overline{B}C}$$

标准与或式

最小项

标准与或式就是最小项之和的形式

1.2 逻辑函数的化简方法

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

1. 最小项的概念：

在n变量逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项，而且这n个变量都以原变量或反变量的形式在m 中出现，且仅出现一次，则这个乘积项m称为该函数的一个标准积项，通常称为最小项。

一、标准与或表达式

1. 最小项的概念：

$Y=F(A,B)$ （2 变量共有 4 个最小项）

$\bar{A}\bar{B}$ $\bar{A}B$ $A\bar{B}$ AB

$Y=F(A,B,C)$ （3 变量共有 8 个最小项）

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $\bar{A}\bar{B}C$ $\bar{A}B\bar{C}$ $\bar{A}BC$ $A\bar{B}\bar{C}$ $A\bar{B}C$ $AB\bar{C}$ ABC

$Y=F(A,B,C,D)$ （4 变量共有 16 个最小项）

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ … … $ABC\bar{D}$ $ABCD$

（n 变量共有 2^n 个最小项）

2. 最小项的性质：

ABC	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

(1) 任一最小项，只有一组对应变量取值使其值为 1 ；

(2) 任意两个最小项的乘积为 0 ；

(3) 全体最小项之和为 1 。

3. 最小项的编号：

把与最小项对应的变量取值当成二进制数，与之相应的十进制数，就是该最小项的编号，用 m_i 表示。

对应规律：原变量 ⇔ 1　　反变量 ⇔ 0

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0	1	2	3	4	5	6	7
m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

4. 逻辑函数标准与或表达式

任何逻辑函数都是由其变量的若干个最小项构成，都可以表示成为最小项之和的形式。

标准与或式就是最小项之和的形式。

$$Y = F(A,B,C) = AB + \overline{A}C$$

$$= AB(C + \overline{C}) + \overline{A}C(B + \overline{B})$$

$$= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$$

标准与或式

最小项

[例] 写出下列函数的标准与或式：

$$Y=\overline{AB+AD+\overline{B}C}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{D})(B+\overline{C})$$

$$=(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{D})(B+\overline{C})=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$=\overline{A}B(C+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{C}(B+\overline{B})+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}(A+\overline{A})$$

$$=\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$=\underset{m_7}{\overline{A}BCD}+\underset{m_6}{\overline{A}BC\overline{D}}+\underset{m_5}{\overline{A}B\overline{C}D}+\underset{m_4}{\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$+\underset{m_1}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D}+\underset{m_0}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}+\underset{m_8}{A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$$

与前面m_0相重

$$=m_7+m_6+m_5+m_4+m_1+m_0+m_8$$

$$=\sum m(0,1,4,5,6,7,8)$$

二、逻辑函数的最简表达式及相互转换

$$Y = AB + \bar{A}C$$ ← 最简与或式（核心）

最简与非-与非式

$$\overline{\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}C}}$$

最简或与非式

$$\overline{(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{C})}$$

最简与或非式

$$\overline{A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}}$$

最简或与式

$$\overline{\overline{(\bar{A}+B)\,(A+C)}}$$

$$\overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{\bar{A}C}}$$

$$\overline{\bar{A}+\bar{B}} + \overline{A+\bar{C}}$$

最简或非-或式

最简或非-或非式

$$\overline{\overline{\bar{A}+B} + \overline{A+C}}$$

1.2.2 逻辑函数的公式化简法

（与或式 $\xrightarrow[\text{定理}]{\text{公式}}$ 最简与或式）

一、并项法： $AB + A\overline{B} = A$

[例 1.2.7] $Y = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}B$

$= AB + \overline{A}B \quad = B$

[例] $Y = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C$

$= A\,(BC + \overline{B}\,\overline{C}) + A\,(B\overline{C} + \overline{B}C)$

$= A \cdot \overline{B \oplus C} + A(B \oplus C)$

$= A$

二、吸收法：

$$A + AB = A$$

[例 1.2.10] $Y = \overline{AB} + \overline{A}D + \overline{B}E$

$$= \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}E = \overline{A} + \overline{B}$$

[例 1.2.11] $Y = \overline{AB} + \overline{A}CD + \overline{B}CD$

$$= \overline{AB} + (\overline{A} + \overline{B})CD$$

$$= \overline{AB} + \overline{AB}CD = \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

[例] $Y = A + \overline{\overline{A} \cdot \overline{BC}}\,(\overline{A} + \overline{\overline{B}\,\overline{C} + D}) + BC$

$$= (A + BC) + (A + BC)\,(\overline{A} + \overline{\overline{B}\,\overline{C} + D})$$

$$= A + BC$$

三、消去法： $A + \bar{A}B = A + B$

[例]
$$Y = AB + \bar{A}C + \bar{B}C$$
$$= AB + (\bar{A} + \bar{B})C$$
$$= AB + \overline{AB}\,C = AB + C$$

[例 1. 2. 13]
$$Y = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}C + ABC$$
$$= \bar{A}\,(B + \bar{B}\,C) + A\,(\bar{B} + BC)$$
$$= \bar{A}\,(B + C) + A\,(\bar{B} + C)$$
$$= \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}C + AC$$
$$= \bar{A}B + A\bar{B} + C$$

四、配项消项法：

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

[例]

$$Y=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+A\overline{C}+BC+AB$$

$$=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+AB$$

或

$$=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+A\overline{C}+BC+\overline{A}\,\overline{B}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{C}+BC$$

冗余项

[例 1. 2. 15]

$$Y=\overline{A}B+AC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+BC$$

$$=\overline{A}B+AC+\overline{B}\,\overline{C}$$

或

$$=\overline{A}B+AC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+BC$$

$$=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+BC$$

综合练习：

$$Y = ACE + \bar{A}BE + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + BE\bar{C} + DE\bar{C} + \bar{A}E$$

$$= E(AC + \bar{A}B + B\bar{C} + D\bar{C} + \bar{A}) + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= E(C + B + D + \bar{A}) + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= CE + BE + DE + \bar{A}E + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= E(B + C + D) + \bar{A}E + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= E\,\overline{\bar{B}\bar{C}\bar{D}} + \bar{A}E + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= E + \bar{A}E + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$= E + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

1.2.3 逻辑函数的图形化简法

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

卡诺图的定义：

将n变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上相邻排列，得到的图形叫做n变量最小项的卡诺图。

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

逻辑相邻项：仅有一个变量不同其余变量均相同的两个最小项，称为逻辑相邻项。

$A'BC'$ $A'BC$

不是逻辑相邻项

$A'B'C$

是逻辑相邻项

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

1、一变量全部最小项的卡诺图

一变量Y=F（A）全部最小项：A， A′

卡诺图：

Y \ A	0	1
	A′	A

Y \ A	0	1
	m_0	m_1

2、二变量全部最小项的卡诺图

Y= F（A、B）

Y \ AB	00	01	11	10
	A′B′	A′B	A B	A B′

Y: A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

Y \ AB	00	01	11	10
	m_0	m_1	m_3	m_2

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

3、三变量全部最小项的卡诺图

Y=F（A、B、C）

Y A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Y AB \ C	0	1
00	m_0	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

4、四变量全部最小项的卡诺图

Y= F（A、B、C、D）

Y \ CD AB	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Y \ D ABC	0	1
000	m_0	m_1
001	m_2	m_3
011	m_6	m_7
010	m_4	m_5
110	m_{12}	m_{13}
111	m_{14}	m_{15}
101	m_{10}	m_{11}
100	m_8	m_9

注意：

在卡诺图中，

左右、上下；
每一行的首尾；
每一列的首尾；

的最小项都是逻辑相邻的。

二、用卡诺图表示逻辑函数

方法一：1、把已知逻辑函数式化为最小项之和形式。

2、将函数式中包含的最小项在卡诺图对应的方格中填 1，其余方格中填 0。

例：

$$Y = AC' + A'C + BC' + B'C$$

用卡诺图表示之。

解：$Y = A(B+B')C' + A'(B+B')C + (A+A')BC' + (A+A')B'C$

$= \sum(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$

卡诺图：

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

方法二：

根据函数式直接填卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

对于AC'有：　对于$A'C$有：

对于BC'有：　对于$B'C$有：

二、用卡诺图表示逻辑函数

例 用卡诺图表示逻辑函数

$$Y = A'B'C'D + A'BD' + A \ldots$$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

$$\ldots D + AB'C'D'$$

$$= m_1 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15}$$

三、用卡诺图化简逻辑函数

化简依据：逻辑相邻性的最小项可以合并，并消去因子。

化简规则：能够合并在一起的最小项是2^n个（画矩形圈）。

如何最简： 圈的数目越少越简；圈内的最小项越多越简。

特别注意：卡诺图中所有的 1 都必须圈到，
不能合并的 1 必须单独画 圈。

例： 将$Y1=AC'+A'C+BC'+B'C$ 化简为最简与或式。

Y \ A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$Y_1 = AB' + A'C + BC'$

Y \ A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$Y_1 = AC' + B'C + A'B$

上两式的内容不相同，但函数值一定相同。

此例说明，一逻辑函数的化简结果可能不唯一。

三、用卡诺图化简逻辑函数

合并最小项的原则

（1）任何两个（2^1个）相邻最小项，可以合并为一项，并消去一个变量。

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$= A'C'$

$= AC$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	1	0	0

$= BCD'$

$= B'C'D$

合并最小项的原则

（2）任何4个（2^2个）相邻的最小项，可以合并为一项，并消去2个变量。

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$= A'$

$= C$

AB \ CD	00	01	[illegible]	10
00	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
01	1	0	[illegible]	[illegible]
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$= B'D$

此例说明，为了使化简结果最简，可以重复利用最小项

合并最小项的原则

（3）任何8个（2^3个）相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$= B$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$= D'$

合并最小项的原则

利用 $AB+AB'=A$

2个最小项合并，消去1个变量；

4个最小项合并，消去2个变量；

8个最小项合并，消去3个变量；

… …

2^n个最小项合并，消去n个变量；

卡诺图化简法的步骤

- ★ 画出变量的卡诺图;
- ★ 作出函数的卡诺图;
- ★ 画圈;
- ★ 写出最简与或表达式。

画圈的原则

- ◆ 合并个数为2^n;
- ◆ 圈尽可能大---乘积项中含因子数最少;
- ◆ 圈尽可能少---乘积项个数最少;
- ◆ 每个圈中至少有一个最小项仅被圈过一次，以免出现多余项。

例： 用卡诺图将下式化简为最简与一或函数式

$$Y = AC' + A'C + BC' + B'C$$

Y

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = AB' + A'C + BC'$$

Y

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = AC' + A'B + B'C$$

例： 用卡诺图将下式化简为最简与一或函数式

$$Y = ABC + ABD + AC'D + C'D' + AB'C + A'CD'$$

Y: AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$Y = A + D'$$

Y $\quad AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$Y' = A'D$$

$$Y = (Y')' = (A'D)' = A + D'$$

1.2.4 具有无关项的逻辑函数化简

约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

无关项

约束项:当限制某些输入变量的取值不能出现时，用它们对应的最小项恒等于0来表示。

任意项:在输入变量的某些取值下函数值是1还是0皆可，并不影响电路的功能。在这些变量的取值下，其值等于1的那些最小项称为任意项。

在卡诺图中用符号“φ”、“×”或“d”表示无关项。在化简函数时即可以认为它是1，也可以认为它是0。

例： 化简逻辑函数 $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

已知约束条件为

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC'D' + AB'C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	X	0
01	0	X	1	0
11	X	0	X	X
10	1	X	0	X

$$Y = A'D + AD'$$

例：判断一位十进制数是否为偶数。

A B C D	Y	A B C D	Y	说　明
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	1 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	1 0 1 0	×	不会出现
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×	不会出现
0 1 0 0	1	1 1 0 0	×	不会出现
0 1 0 1	0	1 1 0 1	×	不会出现
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×	不会出现
0 1 1 1	0	1 1 1 1	×	不会出现

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

输入变量A，B，C，D取值为0000～1001时，逻辑函数Y有确定的值，根据题意，偶数时为1，奇数时为0。

$$Y(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)$$

无关项： $\Sigma d(10,11,12,13,14,15)=0$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$Y(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)+\Sigma d(10,11,12,13,14,15)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

不利用无关项的化简结果为：

$$Y = A'D' + B'C'D'$$

利用无关项的化简结果为：

$$Y = D'$$

逻辑函数化简小结

逻辑函数的化简有公式法和图形法等。公式法是利用逻辑代数的公式、定理和规则来对逻辑函数化简，这种方法适用于各种复杂的逻辑函数，但需要熟练地运用公式和定理，且具有一定的运算技巧。图形法就是利用函数的卡诺图来对逻辑函数化简，这种方法简单直观，容易掌握，但变量太多时卡诺图太复杂，图形法已不适用。在对逻辑函数化简时，充分利用无关项可以得到十分简单的结果。