

第三讲 逻辑函数的化简方法

9

本讲内容:

- 一、逻辑函数的标准与或式和最简式
- 二、逻辑函数的公式化简法
- 三、逻辑函数的图形化简法
- 四、具有无关项的逻辑函数化简

1 1 1



1.2 逻辑函数的化简方法

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

$$\begin{aligned} Y = F(A, B, C) &= AB + \bar{A}C \\ &= AB(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) \\ &= \underline{ABC} + \underline{AB\bar{C}} + \underline{\bar{A}BC} + \underline{\bar{A}\bar{B}C} \end{aligned}$$

标准与
或式

最小项

标准与或式就是最小项之和的形式



1.2 逻辑函数的化简方法

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

1. 最小项的概念：

在 n 变量逻辑函数中，若 m 为包含 n 个因子的乘积项，而且这 n 个变量都以原变量或反变量的形式在 m 中出现，且仅出现一次，则这个乘积项 m 称为该函数的一个标准积项，通常称为**最小项**。

一、标准与或表达式

1. 最小项的概念:

$Y = F(A, B)$ (2 变量共有 4 个最小项)

$\overline{A}\overline{B} \quad \overline{A}B \quad A\overline{B} \quad AB$

$Y = F(A, B, C)$ (3 变量共有 8 个最小项)

$\overline{A}\overline{B}\overline{C} \quad \overline{A}\overline{B}C \quad \overline{A}B\overline{C} \quad \overline{A}BC \quad A\overline{B}\overline{C} \quad A\overline{B}C \quad AB\overline{C} \quad ABC$

$Y = F(A, B, C, D)$ (4 变量共有 16 个最小项)

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \quad \overline{A}\overline{B}\overline{C}D \quad \overline{A}\overline{B}C\overline{D} \quad \dots \quad \dots \quad ABC\overline{D} \quad ABCD$

(n 变量共有 2^n 个最小项)

2. 最小项的性质:

$A B C$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

- (1) 任一最小项，只有一组对应变量取值使其值为 1；
- (2) 任意两个最小项的乘积为 0；
- (3) 全体最小项之和为 1。

3. 最小项的编号:

把与最小项对应的变量取值当成二进制数，与之相应的十进制数，就是该最小项的编号，用 m_i 表示。

对应规律：原变量 $\Leftrightarrow 1$ 反变量 $\Leftrightarrow 0$

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0	1	2	3	4	5	6	7
m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

4. 逻辑函数标准与或表达式

任何逻辑函数都是由其变量的若干个最小项构成，都可以表示成为最小项之和的形式。

标准与或式就是最小项之和的形式。

$$Y = F(A, B, C) = AB + \bar{A}C$$

$$= AB(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B})$$

$$= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$$

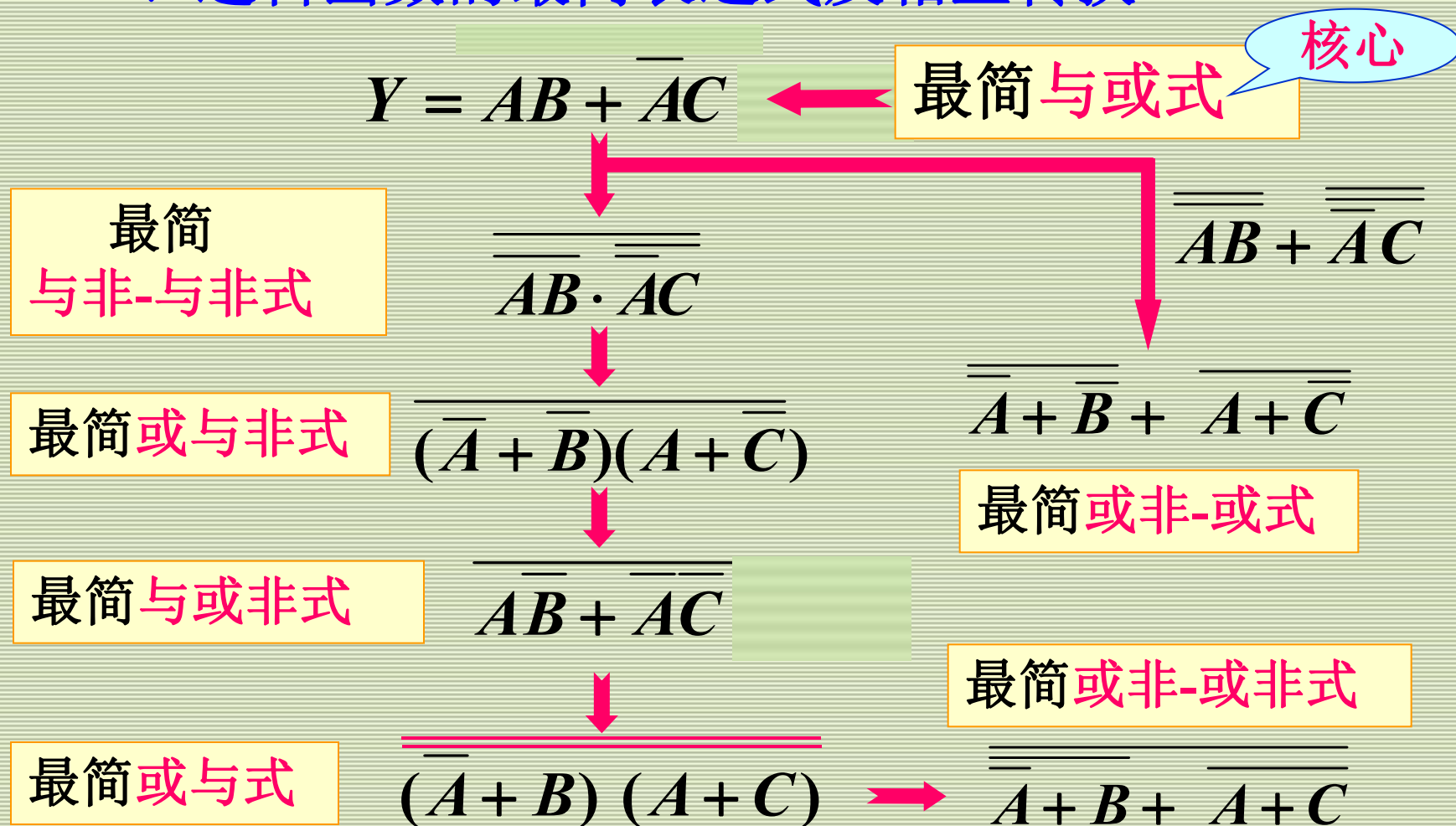
标准与
或式

最小项

$$\begin{aligned}
 Y &= AB + AD + BC = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{D})(B + C) \\
 &= (\overline{A} + \overline{B}\overline{D})(B + C) = \overline{A}B + \overline{A}C + \overline{BCD} \\
 &= \overline{A}B(C + \overline{C}) + \overline{A}C(B + \overline{B}) + \overline{BCD}(A + \overline{A}) \\
 &= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D \\
 &\quad + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD \\
 &= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_1 + m_0 + m_8 \\
 &= \sum_m(0, 1, 4, 5, 6, 7, 8)
 \end{aligned}$$

与前面 m_0
相重

二、逻辑函数的最简表达式及相互转换



1.2.2 逻辑函数的公式化简法

(与或式 $\xrightarrow[\text{定理}]{\text{公式}}$ 最简与或式)

一、并项法: $AB + A\bar{B} = A$

$$\begin{aligned} \text{[例 1.2.7]} \quad Y &= \underline{ABC} + \underline{ABC} + \bar{A}B \\ &= AB + \bar{A}B = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= \underline{ABC} + \underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \underline{A\bar{B}\bar{C}} + \underline{\bar{A}BC} \\ &= A(BC + \bar{B}\bar{C}) + A(\bar{B}\bar{C} + BC) \\ &= A \cdot \overline{B \oplus C} + A(B \oplus C) \\ &= A \end{aligned}$$



二、吸收法: $A + AB = A$

$$\begin{aligned}
 \text{[例 1.2.10]} \quad Y &= \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{B}E \\
 &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}E = \overline{A} + \overline{B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例 1.2.11]} \quad Y &= \overline{A}B + \overline{A}CD + \overline{B}CD \\
 &= \overline{A}B + (\overline{A} + \overline{B})CD \\
 &= \overline{A}B + \overline{A}B CD = \overline{A}B = \overline{A} + \overline{B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例]} \quad Y &= A + \overline{A} \cdot \overline{BC} (\overline{A} + \overline{B} \overline{C} + D) + \overline{BC} \\
 &= (A + BC) + (A + BC) (\overline{A} + \overline{B} \overline{C} + D) \\
 &= A + BC
 \end{aligned}$$



三、消去法: $A + \overline{A}B = A + B$

[例]
$$\begin{aligned} Y &= AB + \overline{A}C + \overline{B}C \\ &= AB + (\overline{A} + \overline{B})C \\ &= AB + \overline{AB} C = AB + C \end{aligned}$$

[例 1.2.13]
$$\begin{aligned} Y &= \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC \\ &= \overline{A}(B + \overline{B}C) + \overline{A}(\overline{B} + BC) \\ &= \overline{A}(B + C) + \overline{A}(\overline{B} + C) \\ &= \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}C \\ &= \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + C \end{aligned}$$

四、配项消项法: $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

[例]

$$Y = \overline{B}\overline{C} + \overline{A}C + \overline{A}\overline{C} + BC + AB$$

$$= \overline{B}\overline{C} + \overline{A}C + AB$$

冗余项

或 $= \overline{B}\overline{C} + \overline{A}C + \overline{A}\overline{C} + BC + \overline{A}B$

$$= \overline{A}B + \overline{A}\overline{C} + BC$$

[例 1.2.15] $Y = \overline{A}B + AC + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + BC$

$$= \overline{A}B + AC + \overline{B}\overline{C}$$

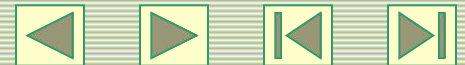
或 $= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + BC$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + BC$$



综合练习:

$$\begin{aligned}
 Y &= ACE + \overline{A}BE + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + BE\overline{C} + DE\overline{C} + \overline{A}E \\
 &= E (AC + \overline{A}B + B\overline{C} + D\overline{C} + \overline{A}) + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= E (C + B + D + \overline{A}) + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= CE + BE + DE + \overline{A}E + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= E (B + C + D) + \overline{A}E + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= E \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}E + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= E + \overline{A}E + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\
 &= E + \overline{B}\overline{C}\overline{D}
 \end{aligned}$$



1.2.3 逻辑函数的图形化简法

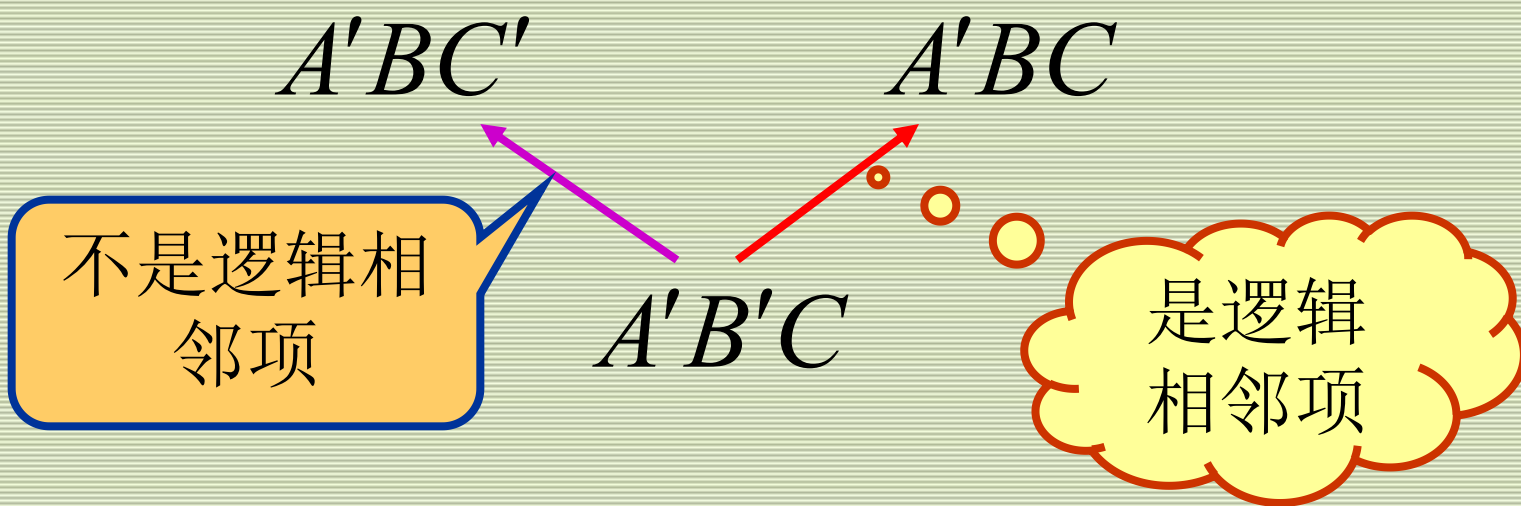
一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

卡诺图的定义：

将 n 变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上相邻排列，得到的图形叫做 n 变量最小项的卡诺图。

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

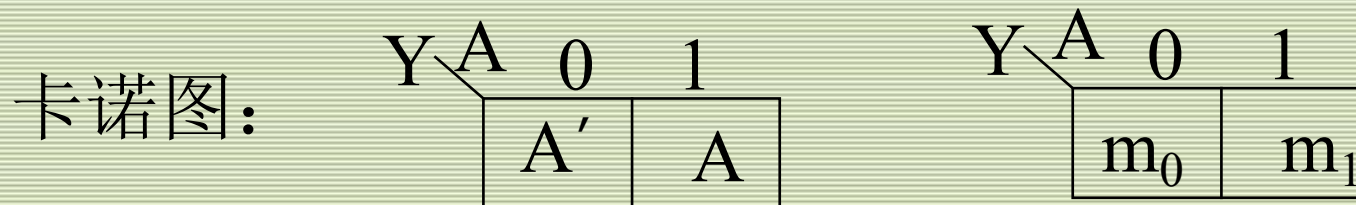
逻辑相邻项： 仅有一个变量不同其余变量均相同的两个最小项，称为逻辑相邻项。



一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

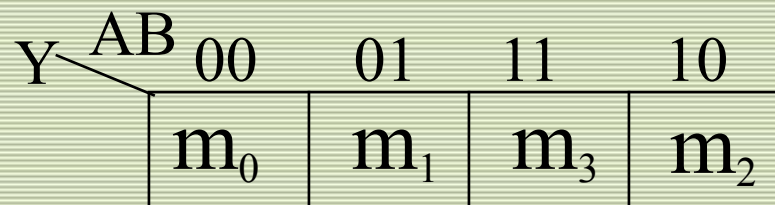
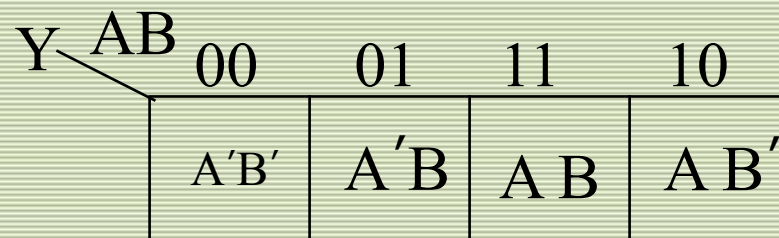
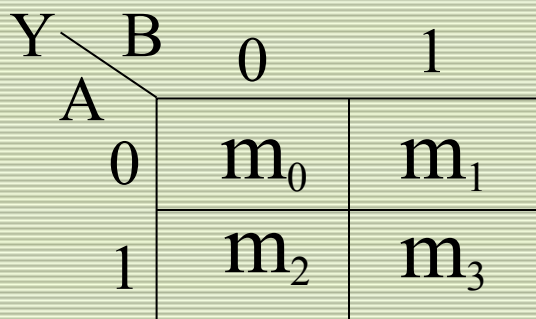
1、一变量全部最小项的卡诺图

一变量 $Y=F(A)$ 全部最小项: A, A'



2、二变量全部最小项的卡诺图

$Y=F(A, B)$



一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

3、三变量全部最小项的卡诺图

$$Y=F(A, B, C)$$

Y \ BC					
		00	01	11	10
A	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

Y \ C		0	1
AB	00	m_0	m_1
	01	m_2	m_3
	11	m_6	m_7
	10	m_4	m_5



一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

4、四变量全部最小项的卡诺图

$$Y = F(A, B, C, D)$$

Y \ CD					
		00	01	11	10
AB	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Y \ D		0	1
ABC	000	m_0	m_1
	001	m_2	m_3
	011	m_6	m_7
	010	m_4	m_5
	110	m_{12}	m_{13}
	111	m_{14}	m_{15}
	101	m_{10}	m_{11}
	100	m_8	m_9

注意：在卡诺图中，

左右、上下；
 每一行的首尾；
 每一列的首尾；

的最小项都是逻辑相邻的。

二、用卡诺图表示逻辑函数

方法一： 1、把已知逻辑函数式化为最小项之和形式。

2、将函数式中包含的最小项在卡诺图对应的方格中填 1，其余方格中填 0。

例：

$$Y = AC' + A'C + BC' + B'C \quad \text{用卡诺图表示之。}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} Y &= A(B+B')C' + A'(B+B')C + (A+A')BC' + (A+A')B'C \\ &= \sum(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) \end{aligned}$$

卡诺图：

Y \ BC		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

方法二：

根据函数式直接填卡诺图

对于 AC' 有： 对于 $A'C$ 有：

对于 BC' 有： 对于 $B'C$ 有：

Y \ BC		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

二、用卡诺图表示逻辑函数

例 用卡诺图表示逻辑函数

$$Y = A'B'C'D + A'BD' + A$$

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	00		1		
	01	1			1
11	11			1	
	10	1	1	1	1

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	00		1		
	01	1			1
11	11			1	
	10	1	1	1	1

$$D + AB'C'D'$$

$$= m_1 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15}$$

三、用卡诺图化简逻辑函数

化简依据：逻辑相邻性的最小项可以合并，并消去因子。

化简规则：能够合并在一起的最小项是 2^n 个（画矩形圈）。

如何最简：圈的数目越少越简；圈内的最小项越多越简。

特别注意：卡诺图中所有的1都必须圈到，
不能合并的1必须单独画圈。

例：将 $Y_1 = AC' + A'C + BC' + B'C$ 化简为最简与或式。

Y \ BC		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

$$Y_1 = AB' + A'C + BC'$$

Y \ BC		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

$$Y_1 = AC' + B'C + AB$$

上两式的内容不相同，但函数值一定相同。

此例说明，一逻辑函数的化简结果可能不唯一。

合并最小项的原则

(2) 任何4个 (2^2 个) 相邻的最小项, 可以合并为一项, 并消去2个变量。

		BC				
		00	01	11	10	
A	0	1	1	1	1	$= A'$
	1	0	1	1	0	

$= C$

		CD				
		00	01	11	10	
AB	00	0	0	0	0	$= B'D$
	01	1	0	0	0	
	11	1	0	0	1	
	10	0	1	1	0	

此例说明, 为了使化简结果最简, 可以重复利用最小项

合并最小项的原则

(3) 任何8个 (2^3 个) 相邻最小项, 可以合并为一项, 并消去3个变量。

$AB \backslash CD$		CD			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	0
01	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0

$$= B$$

$AB \backslash CD$		CD			
		00	01	11	10
00	1	0	0	0	1
01	1	0	0	0	1
11	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	1

$$= D'$$

合并最小项的原则

利用 $AB+AB'=A$

2个最小项合并，消去1个变量；

4个最小项合并，消去2个变量；

8个最小项合并，消去3个变量；

...

2^n 个最小项合并，消去 n 个变量；

卡诺图化简法的步骤

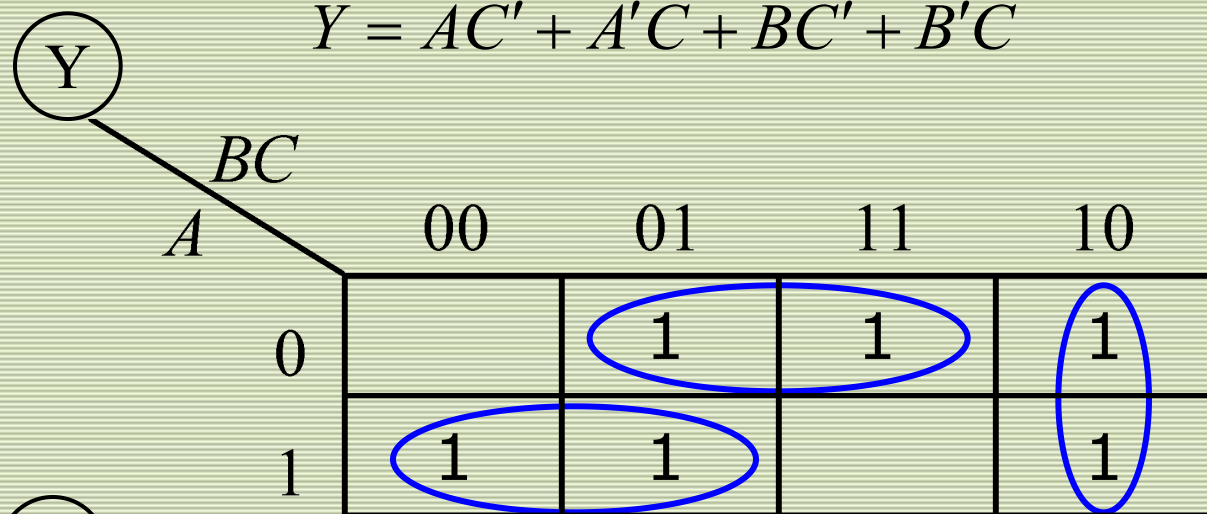
- ★ 画出变量的卡诺图;
- ★ 作出函数的卡诺图;
- ★ 画圈;
- ★ 写出最简与或表达式。

画圈的原则

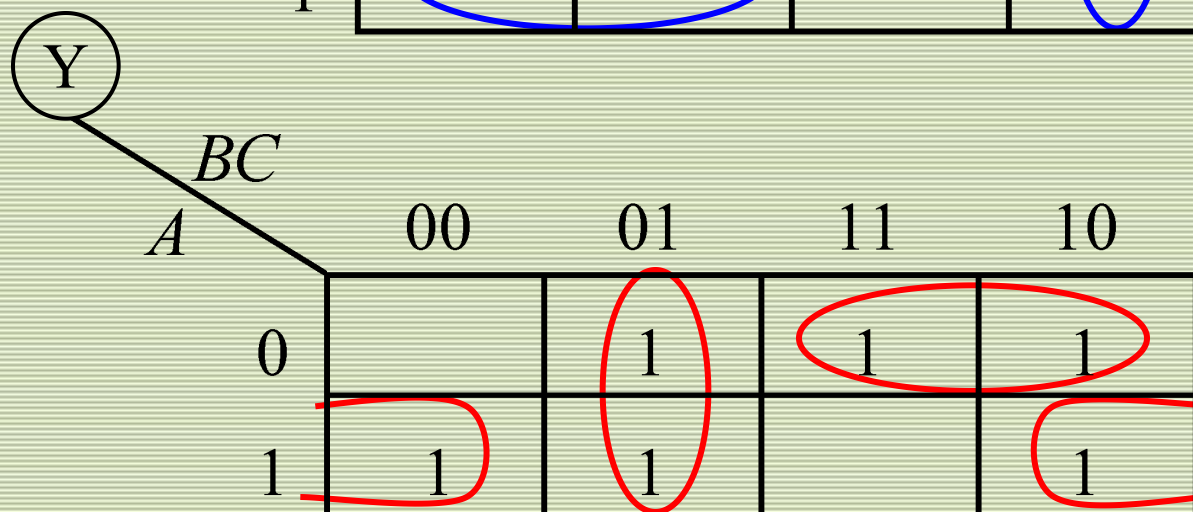
- ◆ 合并个数为 2^n ;
- ◆ 圈尽可能大---乘积项中含因子数最少;
- ◆ 圈尽可能少---乘积项个数最少;
- ◆ 每个圈中至少有一个最小项仅被圈过一次, 以免出现多余项。

例：用卡诺图将下式化简为最简与-或函数式

$$Y = AC' + A'C + BC' + B'C$$



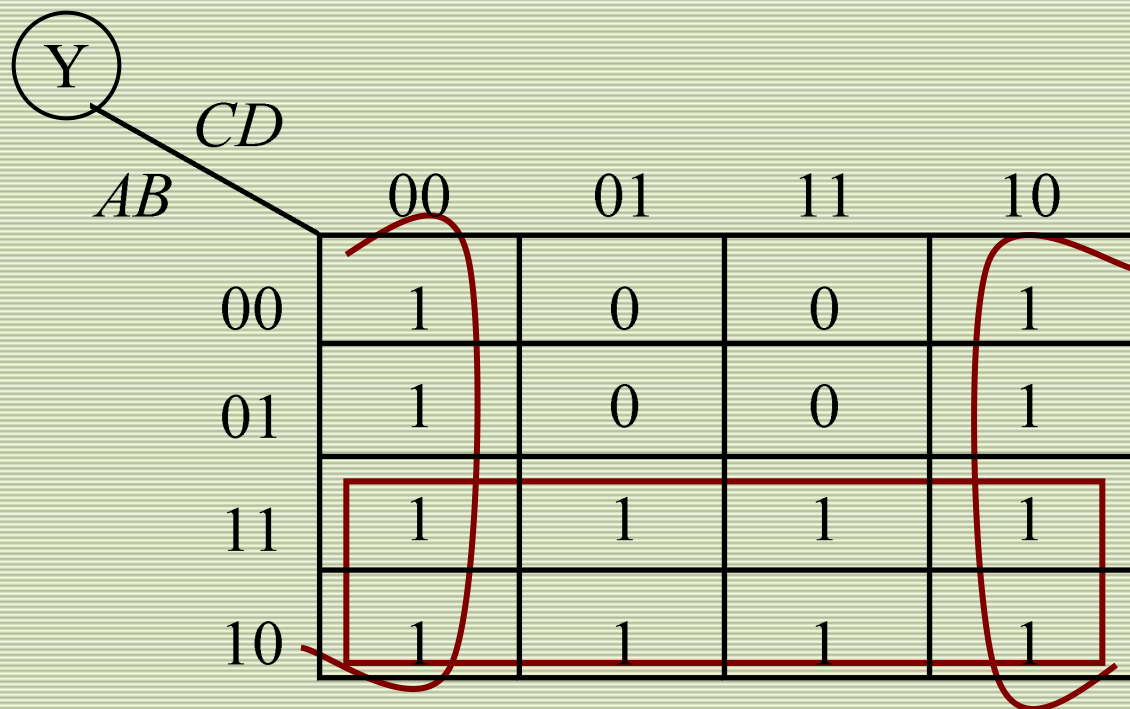
$$Y = AB' + A'C + BC'$$



$$Y = AC' + A'B + B'C$$

例：用卡诺图将下式化简为最简与-或函数式

$$Y = ABC + ABD + AC'D + C'D' + AB'C + A'CD'$$



$$Y = A + D'$$

Y

		CD			
AB		00	01	11	10
		00	01	11	10
00		1	0	0	1
01		1	0	0	1
11		1	1	1	1
10		1	1	1	1

$$Y' = A'D$$

$$Y = (Y')' = (A'D)' = A + D'$$

1.2.4 具有无关项的逻辑函数化简

约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

无关项

约束项: 当限制某些输入变量的取值不能出现时, 用它们对应的最小项恒等于0来表示。

任意项: 在输入变量的某些取值下函数值是1还是0皆可, 并不影响电路的功能。在这些变量的取值下, 其值等于1的那些最小项称为任意项。

在卡诺图中用符号“ ϕ ”、“ \times ”或“d”表示无关项。在化简函数时即可以认为它是1, 也可以认为它是0。

例：化简逻辑函数 $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

已知约束条件为

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC'D' + AB'C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

$\begin{array}{c} C D \\ \swarrow \searrow \\ A B \end{array}$		$C D$			
		00	01	11	10
00	0	0	1	X	0
01	0	0	X	1	0
11	X	X	0	X	X
10	1	X	X	0	X

$$Y = A'D + AD'$$

例：判断一位十进制数是否为偶数。

A B C D	Y	A B C D	Y	说 明
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	1 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	1 0 1 0	×	不会出现
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×	不会出现
0 1 0 0	1	1 1 0 0	×	不会出现
0 1 0 1	0	1 1 0 1	×	不会出现
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×	不会出现
0 1 1 1	0	1 1 1 1	×	不会出现

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	×	×	×	×
	10	1	0	×	×

输入变量A, B, C, D取值为0000~1001时, 逻辑函数Y有确定的值, 根据题意, 偶数时为1, 奇数时为0。

$$Y(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8)$$

无关项:

$$\sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15) = 0$$

$AB \backslash CD$		CD			
		00	01	11	10
00	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
11	11	×	×	×	×
10	10	1	0	×	×

$$Y(A, B, C, D) = \Sigma m(0, 2, 4, 6, 8) + \Sigma d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

AB \ *CD*

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

不利用无关项的
化简结果为:

$$Y = A'D' + B'C'D'$$

利用无关项的
化简结果为:

$$Y = D'$$

逻辑函数化简小结

逻辑函数的化简有公式法和图形法等。公式法是利用逻辑代数的公式、定理和规则来对逻辑函数化简，这种方法适用于各种复杂的逻辑函数，但需要熟练地运用公式和定理，且具有一定的运算技巧。图形法就是利用函数的卡诺图来对逻辑函数化简，这种方法简单直观，容易掌握，但变量太多时卡诺图太复杂，图形法已不适用。在对逻辑函数化简时，充分利用无关项可以得到十分简单的结果。