一、填空题

1、设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{a}{N},k=1,2,\cdots,N$,则 $a=$______.

解 由 $1=\sum_{k=1}^{N}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{a}{N}=a$ 知 $a=1$.

2、设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ A-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

则 $A=$_______; $P\{1<X\leq 2\}=$_________.

解 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(A-e^{-x}\right)=A$,分布函数的性质知 $A=1$;

$$P\{1<X\leq 2\}=F(2)-F(1)=\left(1-e^{-2}\right)-\left(1-e^{-1}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$$

3、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) & 1\leq x\leq 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则 X 的分布函数 $F(x)=$____________________.

解 当 $x\leq 1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$;

当 $1<x\leq 2$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{x}2\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)dt=2\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)$;

当 $x>2$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{2}2\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)dt=1$.

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1\\ 2\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right), & 1<x\leq 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

4、设 $X\sim P(\lambda)$,且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,则 $P\{X\geq 1\}=$________, $P\left\{0<X^2<3\right\}=$__________.

解 $\because\ X\sim P(\lambda)$

$\therefore\ P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,其中 $\lambda>0$

$\because\ P\{X=1\}=P\{X=2\}$

$\therefore\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$

$\therefore\ \lambda=2$

$\therefore\ P\{X\geq 1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-2}$

$$P\left\{0<X^2<3\right\}=P\left\{0<X<\sqrt{3}\right\}=P\{X=1\}=\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=2e^{-2}.$$

5、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.1	0.3	0.4

则随机变量 $Y=X^2$ 的分布律为________________________.

解 随机变量 $Y=X^2$ 的分布律为

X^2	0	1	4
p_k	0.1	0.5	0.4

6、设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

则 X 的分布律为________________________________.

解 由于连续型随机变量的分布函数是连续函数,而由已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $X=-1,1,3$ 处间断,故可确定 X 为离散型随机变量,且其所有可能的取值为 $-1,1,3$ 且

$$P\{X=-1\}=P\{X\le -1\}=F(-1)=0.4$$

$$P\{X=1\}=P\{0<X\le 1\}=F(1)-F(0)=0.8-0.4=0.4$$

$$P\{X=3\}=P\{1<X\le 3\}=F(3)-F(1)=1-0.8=0.2$$

故 X 的分布律为

X	-1	1	3
p_k	0.4	0.4	0.2

二、计算题

1、设在 15 只同类型零件中有 2 只为次品,在其中取 3 次,每次任取 1 只,作不放回抽样,以 X 表示取出的次品个数,求:

(1) X 的分布律;

(2) X 的分布函数;

(3) $P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\},P\left\{1<X\le\frac{3}{2}\right\},P\left\{1\le X\le\frac{3}{2}\right\},P\{1<X<2\}$.

解 (1)由于

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35},P\{X=1\}=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35},P\{X=2\}=\frac{C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}.$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(2)当 $x<0$ 时, $F(x)=P\{X\le x\}=0$;

当 $0\le x<1$ 时, $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=\frac{22}{35}$;

当 $1\le x<2$ 时, $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{34}{35}$;

当 $x \ge 2$ 时, $F(x)=P\{X \le x\}=1$.

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{22}{35}, & 0 \le x<1 \\ \dfrac{34}{35}, & 1 \le x<2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(3) $P\left\{X \le \dfrac{1}{2}\right\}=F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{22}{35}$,

$$P\left\{1<X \le \frac{3}{2}\right\}=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{34}{35}-\frac{34}{35}=0,$$

$$P\left\{1 \le X \le \frac{3}{2}\right\}=P\{X=1\}+P\left\{1<X \le \frac{3}{2}\right\}=P\{X=1\}+F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{12}{35},$$

$$P\{1<X<2\}=P\{1<X \le 2\}-P\{X=2\}=F(2)-F(1)-P\{X=2\}=1-\frac{34}{35}-\frac{1}{35}=0.$$

2、有一繁忙的汽车站,每天有大量汽车通过,设每辆车在一天的某时段出事故的概率为 0.0001,在某天的该时段内有 1000 辆汽车通过,问出事故的次数不小于 2 的概率是多少?

解 设 X 表示出事故的次数,则 X~$b(1000,0.0001)$.由于 $n=1000$ 较大,而 $p=0.0001$较小,故可用参数为 $\lambda=np=0.1$的泊松分布逼近.于是

$$\begin{aligned} P\{X \ge 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\} \\ &=1-C_{1000}^{0}\times 0.9999^{1000}-C_{1000}^{1}\times 0.0001\times 0.9999^{999} \\ &\approx 1-e^{-0.1}-0.1\times e^{-0.1} \\ &=1-1.1e^{-0.1} \\ &\approx 0.22 \end{aligned}$$

3、已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

求:(1) A 值;(2) $P\{0<X<1\}$;(3) $F(x)$.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 得 $1=\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty} A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A$, 故 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $P\{0<X<1\}=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}dx=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3)当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{x}dx=\dfrac{1}{2}e^{x}$

当 $x \ge 0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-x}dx=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

故随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0 \\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

4、设 $X \sim N\left(3,2^{2}\right)$

(1)求 $P\{2<X\le 5\}, P\{-4<X\le 10\}, P\{|X|>2\}, P\{X>3\}$;

(2)确定 c 使 $P\{X>c\}=P\{X\le c\}$.

解 (1) $P\{2<X\le 5\}=P\left\{\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{5-3}{2}\right\}$

$$=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi(1)-1+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=0.8413-1+0.6915=0.5328$$

$$P\{-4<X\le 10\}=P\left\{\frac{-4-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{10-3}{2}\right\}=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{7}{2}\right)=0.9996$$

$$P\{|X|>2\}=P\{X>2\}+P\{X<-2\}$$

$$=P\left\{\frac{X-3}{2}>\frac{2-3}{2}\right\}+P\left\{\frac{X-3}{2}<\frac{-2-3}{2}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)+\Phi\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)+1-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=0.6915+1-0.9938=0.6977$$

$$P\{X>3\}=P\left\{\frac{X-3}{2}>\frac{3-3}{2}\right\}=1-\Phi(0)=0.5$$

(2)由 $P\{X>c\}=P\{X\le c\}$ 得 $1-P\{X\le c\}=P\{X\le c\}$,即 $P\{X\le c\}=\frac{1}{2}$,故 $c=3$.

5、设 $X\sim N(0,1)$

(1)求 $Y=e^X$ 的概率密度;

(2)求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度.

解 (1)函数 $Y=e^X$ 的值域为 $(0,+\infty)$.

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$,此时 $f_Y(y)=0$.

当 $y>0$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^x\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$,此时

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{y}f_x(\ln y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

于是 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & ,y>0\\ 0 & ,y\le 0\end{cases}$$

(2) 函数 $Y=2X^2+1$ 的值域为 $[1,+\infty)$.

当 $y\le 1$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$,此时 $f_Y(y)=0$.

当 $y>1$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}$

$$=P\left\{X^2\le\frac{y-1}{2}\right\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}=\int_{-\sqrt{(y-1)/2}}^{\sqrt{(y-1)/2}} f_X(x)dx$$

此时

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-1)/4}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-(y-1)/4}$$

于是

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-(y-1)/4} & ,y>1\\ 0 & ,y\le 1\end{cases}$$