长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)　　　　试卷编号：15

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $\pm\sqrt{42}(4,1,5)$　2. $x^4-2x^2y^2+2y^4$　3. $(1/5,2/5,4/5)$　4. $\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(r^2)rdr$

5. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot y;\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'=xf_1'+f_2'.$ (2 分)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_1'+y\cdot(f_{11}''x+f_{12}'')=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}''$ (4 分)

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x(f_{11}''x+f_{12}'')+f_{21}''x+f_{22}''.$ (7 分)

2. 解 用极坐标形式表示原积分，得

$I=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^2\arctan(\tan\theta)\cdot rdr=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^2\theta\cdot rdr=\frac{3\pi^2}{64}.$ (3+3+1=7 分)

3. 解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x, G(x,y,z)=x-y+z-2$, 则 $F_x(M_0)=(2x-2)_{M_0}=0,$ $F_y(M_0)=2y_{M_0}=0, F_z(M_0)=2z_{M_0}=2.$ (1 分)

$G_x(M_0)=1, G_y(M_0)=-1, G_z(M_0)=1.$ (2 分)

$\left|\begin{array}{cc}F_y' & F_z'\\ G_y' & G_z'\end{array}\right|\Big|_{M_0}=2,\left|\begin{array}{cc}F_z' & F_x'\\ G_z' & G_x'\end{array}\right|\Big|_{M_0}=2,\left|\begin{array}{cc}F_x' & F_y'\\ G_x' & G_y'\end{array}\right|\Big|_{M_0}=0,$ (4 分)

故切线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}.$ (5 分)

法平面方程为：$x+y-1=0$ (7 分)

4. 解 Ω 向 xoy 面的投影域为三角形区域 $D_{xy}:0\le x\le 1,0\le y\le x.$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega xy^2zdv &=\int_0^1dx\int_0^xdy\int_0^{xy}xy^2zdz=\int_0^1xdx\int_0^xy^2\frac{1}{2}(xy)^2dy\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1x^3dx\int_0^xy^4dy=\frac{1}{10}\int_0^1x^8dx=\frac{1}{90}\end{aligned}$$ (4+3=7 分)

5. 解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关。 (2 分)

取折线 $(0,0)\longrightarrow(\pi/2,0)\longrightarrow(\pi/2,1)$

$$\begin{aligned}\text{所求}&=\int_0^{\pi/2}x^3dx+\int_0^1(\frac{\pi^3}{8}-\frac{3\pi}{2}y^2+y^3)dy\\ &=\frac{\pi^4}{64}+\frac{\pi^3}{8}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$ (7 分)

6. 解 令 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{1}{2}$, (4 分) 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$. 是收敛，即原级数绝对收敛。 (7 分)

三. 解 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n.(-1<x<1)$. (2 分)

因为 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},(-1<x<1)$. (8 分)

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})=s(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2},(-1<x<1)$. (10 分)

四. 解 将方程的两边分别对 x,y 求偏导, 得 $2x+2zz'_x-2-4z'_x=0$ (1), $2y+2zz'_y+2-4z'_y=0$ (2), 由极值的必要条件 $z'_x=0,z'_y=0$ 得 $x=1,y=-1$, $P(1,-1)$ 为驻点。 (3 分)

将 (1) 与 (2) 两个方程分别对 x,y 求偏导, 得 $A=z''_{xx}|_P=\frac{1}{2-z}; B=z''_{xy}|_P=0; C=z''_{yy}|_P=\frac{1}{2-z}$. (6 分)

因为 $B^2-AC=\frac{1}{(2-z)^2}<0\ (z\neq-2)$. (8 分)

所以 $z=f(x,y)|_P$ 取极值。

将 $x=1,y=-1$ 代入原方程得 $z_1=-1, z_2=5$.

将 $z_1=-1$ 代入 A, 得 $A=\frac{1}{3}>0$, 故 $z=f(1,-1)=-1$ 为极小值。 (9 分)

将 $z_2=5$ 代入 A, 得 $A=-\frac{1}{3}<0$, 故 $z=f(1,-1)=5$ 为极大值。 (10 分)

五. 解 由已知可得，直线 AB 的方程为 $\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ (3 分)

过直线 AB 的平面束方程为 $x+z-1+\lambda y=0$. (6 分)

令所求平面的法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n}=(1,\lambda,1)$, 由题意知 $(\widehat{\vec{n},\vec{k}})=\pi/3$, 从而有

$\frac{\pi}{3}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}$, 所以 $\lambda=\pm\sqrt{34}$. (9 分)

故所求方程为 $x\pm\sqrt{34}y+z-1=0$. (10 分)

六. 解 记 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$, 则在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\vec{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$, (3 分)

于是 M 处的切平面方程为：

$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

化简得：$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{a}$. (6 分)

化为截距式，则为 $\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$.

于是截距之和为 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a$. (8 分)