

# 长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)

试卷编号：13

一、填空题 (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1.  $5/4$     2.  $2\sqrt{6}$     3.  $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \cos \theta}}^1 f(r) r dr$     4.  $\frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$     5.  $(1+y)dx + xdy$

二、计算题 (本题总分 42 分, 每小题 7 分)

1. 解 由  $\phi(x^2, e^y, z) = 0$  可得  $\phi'_1 \cdot 2x + \phi'_2 \cdot e^y \cos x + \phi'_3 \frac{dz}{dx} = 0$ . (2 分)

所以  $\frac{dz}{dx} = \frac{-2x\phi'_1 - \phi'_2 e^y \cos x}{\phi'_3}$ . (4 分)

$\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cos x - f'_3 \frac{dz}{dx} = f'_1 + f'_2 \cos x - f'_3 \frac{2x\phi'_1 + \phi'_2 e^y \cos x}{\phi'_3}$ . (7 分)

2. 解  $I = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{8}{3}$  (3+3+1=7 分)

3. 解 设  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 56$ , 则  $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z, \vec{n} = (4, 8, 12)$ . (4 分)

所以切平面方程为:  $(x - 2) + 2(y - 4) + 3(z - 6) = 0$ . (5 分)

法线:  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{3}$  (7 分)

4. 解 由格林公式可得, 原积分 =  $\iint_D (3+1) dx dy = 12$ . (7 分)

5. 解

$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_1^2 z dz \iint_{D(z)} dx dy = \pi \int_1^2 z^3 dz = \frac{15}{4}\pi \quad (7 \text{ 分})$$

6. 解 因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$ . (5 分)

故原级数收敛. (7 分)

三、解 易求得原级数在  $(-1, 1)$  时收敛. (2 分)

设和函数为  $S(x)$ , 则  $S(0) = 0$ .

因为  $S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}, (-1 < x < 1)$ . (7 分)

所以  $S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, (-1 < x < 1)$ . (10 分)

四. 解  $z_x = 2x - y + 9, z_y = 2y - x - 6$ , 由  $z_x = 0, z_y = 0$  得驻点  $(-4, 1)$  (5 分)

$z_{xx} = 2, z_{xy} = -1, z_{yy} = 2$ .  $AC - B^2 = 3 > 0, A > 0$ , 所以  $(-4, 1)$  为极小值点 (8 分)

$f_{\min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$ . (10 分)

五. 解 由已知可得, 两直线的方向向量分别为:  $\vec{v}_1 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = (1, -2, -3)$ ,  
 $\vec{v}_2 = (2, -1, 1) \times (1, -1, 1) = (0, -1, -1)$  (4 分)

所以平面的法向量可取:  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 1, -1)$  (8 分)

所以所得平面方程为  $-(x-2)+(y-2)-z=0$ , 即  $x-y+z=0$ . (10 分)

六. 解  $P = x+y$ ,  $Q = x-y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则该曲线积分与路径无关, 取路径为折线

$(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 3)$ , (3 分)

$$\begin{aligned}& \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy \\&= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy \\&= (\frac{1}{2}x^2 + x)|_1^2 + (2y - \frac{1}{2}y^2)|_1^3 = \frac{5}{2}\end{aligned}\quad (8 \text{ 分})$$