

概念、性质、定理、公式必须清楚，解法必须熟练，计算必须准确

一、行列式与矩阵

行列式的定义
$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{t(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1, \cdots, i_n} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ 可逆} \\ r(A) = n \\ A \text{ 的列 (行) 向量线性无关} \\ A \text{ 的特征值全不为 } 0 \\ Ax = 0 \text{ 只有零解} \Leftrightarrow \forall x \neq 0, Ax \neq 0 \\ \forall b \in \mathbf{R}^n, Ax = b \text{ 总有唯一解} \\ A^T A \text{ 是正定矩阵} \\ A \cong E \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s \quad p_i \text{ 是初等阵} \\ \text{存在 } n \text{ 阶矩阵 } B, \text{ 使得 } AB = E \text{ 或 } BA = E \\ A \text{ 的列 (行) 向量是 } \mathbf{R}^n \text{ 的一组基} \\ A \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 的某两组基的过渡矩阵} \end{cases}$$

评注 全体 n 维实向量构成的集合 \mathbf{R}^n 叫做 n 维向量空间.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ 不可逆} \\ r(A) < n \\ A \text{ 的列 (行) 向量线性相关} \\ 0 \text{ 是 } A \text{ 的特征值} \\ Ax = 0 \text{ 有非零解, 其基础解系即为 } A \text{ 关于 } \lambda = 0 \text{ 的特征向量} \end{cases}$$

评注 $|aE + bA| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(aE + bA) < n \\ (aE + bA)x = 0 \text{ 有非零解} \\ \lambda = -\frac{a}{b}, \quad \lambda \text{ 为 } A \text{ 的特征值} \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{矩阵等价 } (\cong) \\ \text{矩阵相似 } (\sim) \\ \text{矩阵合同 } (\simeq) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于 e_1, e_2, \dots, e_n :

①称为 i^n 的标准基, i^n 中的自然基, 单位坐标向量 $p_{教材87}$;

② e_1, e_2, \dots, e_n 线性无关;

③ $|e_1, e_2, \dots, e_n| = 1$;

④ $\text{tr}E = \sum_{i=1}^n a_{ii} = n$; $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ (即主对角元素之和)

⑤任意一个 n 维向量都可以用 e_1, e_2, \dots, e_n 线性表示.

逆序数: 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,

逆序数为奇数叫做奇排列. 为偶数叫做偶排列. 奇排列变成偶排列对换次数为奇数. 反之相同一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性 (即 $t_2 = (-1)t_1$)

设排列为 $a_1 \mathbf{L} a_l a_b \mathbf{L} b_m b_c \mathbf{L} c_n$, 作 m 次相邻对换后, 变成 $a_1 \mathbf{L} a_l a b b_1 \mathbf{L} b_m c_1 \mathbf{L} c_n$, 再作 $m+1$ 次相邻对换后, 变成 $a_1 \mathbf{L} a_l b b_1 \mathbf{L} b_m a c_1 \mathbf{L} c_n$, 共经过 $2m+1$ 次相邻对换, 而对不同大小的两元素每次相邻对换逆序数要么增加 1, 要么减少 1, 相当于 $t_2 = (-1)t_1$, 也就是排列必改变改变奇偶性, $2m+1$ 次相邻对换后 $t_2 = (-1)^{2m+1} t_1 = (-1)t_1$, 故原命题成立.

n 阶行列式的 6 大性质 部分证明请看 $p_{教材9}$

性质 1: 行列式与它的转置行列式相等

性质 2: 互换任意行(列)式的两行列行列式变号. 推论: 如果有两行(列)相同, 行列式为 0

性质 3: 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k , 等于用 k 乘以行列式

推论: 行列式的某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

性质 4: 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式等于零.

性质 5: 任意行列式可按某行(列)分解为两个行列式之和.

性质 6: 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后再加到另一行(列)上, 行列式不变.

将 D 上、下翻转或左右翻转, 所得行列式为 D_1 , 则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$;

将 D 顺时针或逆时针旋转 90° , 所得行列式为 D_2 , 则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$

将 D 主副角线翻转后, 所得行列式为 D_3 , 则 $D_3 = D$ $p_{教材27}$

将 D 主对角线翻转后 (转置), 所得行列式为 D_4 , 则 $D_4 = D$

✓ 行列式的计算:

①行列式按行(列)展开定理:行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论:行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

②若 A 与 B 都是方阵(不必同阶), 则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B| \quad (\text{拉普拉斯展开式})$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

③上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

④关于副对角线:

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & \mathbf{N} & & \\ & & a_{2n-1} & \\ & & & O \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & \mathbf{N} & & \\ & & a_{2n-1} & \\ & & & O \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

(即:所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和)

⑤范德蒙德行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \left(\text{共有 } \frac{n(n-1)}{2} \text{ 个因子} \right) \quad p_{\text{教材18, 例12}}$$

七种常见的行列式计算问题:

ü 行和相等型行列式的计算方法

当行列式中每一行的元素之和相等(称为行和相等型)时,计算时把各列全部加到第一列,从第一列中提出公因式,然后,各行都减去第一行就可以降阶,

ü 爪形行列式的计算方法

爪形行列式 D_n 的计算一般方法是分三种情况分别讨论.假设主对角上的元素分别为 a_1, a_2, \dots, a_n .

Ø 如 a_1, a_2, \dots, a_n 中有两个或两个以上的元素为零,则必有两行成比例,故 $D_n = 0$;

Ø 如 a_1, a_2, \dots, a_n 中只有一个元素为零,例如 $a_k = 0$,则先按第 k 行展开,再按 $k-1$ 列展开,便得到一个主角行列式了;

Ø 如 a_1, a_2, \dots, a_n 中没有零元素,则从 a_{22} 开始逐一提出主对角元素,然后,上三角化,便得到一个上三角行列式了.

评 注	爪形行列式的通用公式:	a_0	b_1	b_2	\mathbf{L}	b_n	$= \left(\prod_{j=1}^n a_j \right) \cdot \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i b_i}{a_i} \right)$ 其中 $a_i \neq 0$
		c_1	a_1	0	\mathbf{L}	0	
		c_2	0	a_2	\mathbf{L}	0	
		\mathbf{L}	\mathbf{L}	\mathbf{L}	\mathbf{L}	\mathbf{L}	
		c_n	0	0	\mathbf{L}	a_n	

ü 三对角行列式的计算方法

先按第一列展开, 可得通用递推公式 $D_n = a_{11}D_{n-1} - a_{12}a_{21}D_{n-2}$

递推法常常要用到常系数二阶差分方程: 常系数二阶差分方程的一般式: $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ p, q 为常数

$$\Rightarrow l^2 - pl - q = 0 \Rightarrow l_1, l_2 \Rightarrow D_n = \begin{cases} c_1 l_1^n + c_2 l_2^n & (l_1 \neq l_2) \\ (c_1 + c_2 n) l^n & (l_1 = l_2 = l) \end{cases} \quad \text{其中: 系数 } c_1, c_2 \text{ 由 } D_1, D_2 \text{ 联立求得。}$$

ü 范德蒙型行列式和升阶技巧

- Ø 加边, 加边的原则是不改变原有行列式的值, 并使加边后的行列式能通过简单的加减行列变成爪形;
- Ø 加补, 即加上需要补的一行和需要补的一列, 使原有行列式符合范德蒙行列式, 再通过代数余子式反求原行列式。

ü 自相似型行列式的计算方法

分为行和(或列和)相等型和不等型。对相等型, 可用多行加和提出公因式, 再用三角降阶求之; 也可先按第一列展开, 得到递推公式。对不等型, 先需要分别从末到第二行和第二列逐一对换, 使之成为两类特殊的拉普拉斯型而求之。

ü 抽象型行列式的计算方法

ü 参数型行列式的计算方法

对特征参数型先看看是否具有行和相等的特点(其实大多数具备这个特点), 如果没有则要找使行列式为零的试探解 l_0 (一般以 $l_0 = \pm 1, \pm 2$ 试探原行列式是否为零。), 依之为出发点利用行列式性质凑出公因式 $(l - l_0)$ 。

矩阵的定义 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m \times n$ 矩阵. 记作: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $A_{m \times n}$

矩阵的乘法 $A = (a_{ij})_{m \times s}$; $B = (b_{ij})_{s \times n}$; $C = (c_{ij})$; $C = AB$ (A 的列数必须等于 B 的行数)

$$\Rightarrow c_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \mathbf{L} \ a_{is}) (b_{1j} \ b_{2j} \ \mathbf{L} \ b_{sj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \mathbf{L} + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$\Rightarrow C = AB = (c_{ij})_{m \times n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \right) \Rightarrow AB = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \right)$$

评注: 矩阵乘法虽然不满足交换律, 但仍满足结合律和分配律

矩阵乘法的几何意义:

投影: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{op} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, 相当于把向量 \vec{op} 投影到 x 轴上;

旋转: $A = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$, $\vec{op} = \begin{pmatrix} r \cos a \\ r \sin a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$

$= r \begin{pmatrix} \cos a \cos q - \sin a \sin q \\ \cos a \sin q + \sin a \cos q \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(a+q) \\ \sin(a+q) \end{pmatrix}$, 相当于把向量 \vec{op} 沿逆时针旋转 q 角,

$$\text{而} \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nq & -\sin nq \\ \sin nq & \cos nq \end{pmatrix}$$

矩阵的迹: $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (方阵的迹): $tr(AB) = tr(BA)$

评注: $tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik} = tr(BA)$

伴随矩阵 $A^* = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \mathbf{L} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \mathbf{L} & A_{n2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ A_{1n} & A_{2n} & \mathbf{L} & A_{nn} \end{pmatrix}$, A_{ij} 为 $|A|$ 中各个元素的代数余子式. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

评注: $a_{ij} = A_{ij}$ 即有 $A^T = (a_{ij})^T = (A_{ij})^T = A^*$, 故 $A^* = A^T$

✓ 逆矩阵的求法:

评注: 逆矩阵具有唯一性: 设 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则有 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$

$$\textcircled{1} \ A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \quad \textcircled{2}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{主} \mathbf{L} \text{ 换位} \\ \text{副} \mathbf{L} \text{ 变号} \end{matrix}$$

② $(A\mathbf{M}\mathbf{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E\mathbf{M}^{-1})$

③
$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & a_1 & \\ & & a_2 \\ a_3 & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$$

逆矩阵概念的推广:

P 教材87, 例3

对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在矩阵 $Q_{n \times m}$, 使得 $AQ = E_m$ 的充分必要条件是 $R(A) = m$; Q 的列向量线性无关;

对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在矩阵 $P_{n \times m}$, 使得 $PA = E_n$ 的充分必要条件是 $R(A) = n$; P 的行向量线性无关;

√ 方阵的幂的性质: $A^m A^n = A^{m+n}$ $(A^m)^n = (A)^{mn}$ (只有方阵, 幂才有意义)

矩阵 A 的两个多项式 $j(A)$ 和 $f(A)$ 总是可以交换, 即总有 $j(A)f(A) = f(A)j(A)$

从而 A 的几个多项式可以像数 x 一样相乘或分解因式,

$$(E+A)(2E+A) = 2E+A-A^2 \quad (E+A)^3 = E-3A+3A^2-A^3$$

设 $A^k = O$ (k 为正整数), 则有: $(E-A)^{-1} = E+A+A^2+\mathbf{L}+A^{k-1}$ P 教材55, 14

$$(E-A)(E+A+A^2+\mathbf{L}+A^{k-1}) = E+A+A^2+\mathbf{L}+A^{k-1} - (A+A^2+\mathbf{L}+A^{k-1}+A^k) = E-A^k = E \text{ 得证;}$$

√ 二项展开式: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \mathbf{L} + C_n^m a^{n-m} b^m + \mathbf{L} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$

评注:	$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项; $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n \quad rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$
-----	---

√ 设 $A_{m \times n}, B_{n \times s}$, A 的列向量为 a_1, a_2, \dots, a_n , B 的列向量为 b_1, b_2, \dots, b_s ,

$$\text{则 } AB = C_{m \times s} \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \mathbf{L} & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \mathbf{L} & b_{2s} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ b_{n1} & b_{n2} & \mathbf{L} & b_{ns} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \mathbf{L}, c_s) \Leftrightarrow Ab_i = c_i, (i=1, 2, \mathbf{L}, s) \Leftrightarrow b_i \text{ 为}$$

$$Ax = c_i \text{ 的解} \Leftrightarrow A(b_1, b_2, \dots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s) = (c_1, c_2, \mathbf{L}, c_s) \Leftrightarrow c_1, c_2, \mathbf{L}, c_s \text{ 可由 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 线性}$$

表示. 即: C 的列向量能由 A 的列向量线性表示, B 为系数矩阵.

同理: C 的行向量能由 B 的行向量线性表示, A^T 为系数矩阵.

$$\text{即: } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathbf{M} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{M} \\ c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \mathbf{L} + a_{1n}b_n = c_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \mathbf{L} + a_{2n}b_n = c_2 \\ \mathbf{L} \quad \mathbf{L} \quad \mathbf{L} \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \mathbf{L} + a_{mn}b_n = c_m \end{cases}$$

√ 用对角矩阵 Λ 左乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量;

用对角矩阵 Λ 右乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

$$\sqrt{\text{分块矩阵的转置矩阵: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}}$$

$$\text{分块矩阵的逆矩阵: } \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{分块对角阵相乘: } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} A_{11}^n & \\ & A_{22}^n \end{pmatrix}$$

$$\text{分块对角阵的伴随矩阵: } \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} BA^* & \\ & AB^* \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} & (-1)^{mn} |A| B^* \\ (-1)^{mn} |B| A^* & \end{pmatrix}$$

$$\text{评注: } \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = |A| |B| \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = |A| |B| \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| |B| A^{-1} & \\ & |A| |B| B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* = |B| |A| \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = (-1)^{m \times n} |A| |B| \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & (-1)^{m \times n} |A| |B| B^{-1} \\ (-1)^{m \times n} |A| |B| A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

√ 矩阵方程的解法 ($|A| \neq 0$): 设法化成 (I) $AX = B$ 或 (II) $XA = B$ (III) $AXB = C$

(I) 的解法: 构造 $(\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\mathbf{E} \mathbf{M} \mathbf{K})$

(II) 的解法: 将等式两边转置化为 $A^T X^T = B^T$,

用 (I) 的方法求出 X^T , 再转置得 X ; $(A^T \mathbf{M} B^T) \sim (\mathbf{E} \mathbf{M} A^T)^{-1} B^T$: $X^T = (A^{-1})^T B^T = (A^T)^{-1} B^T$

(III) 的解法: $X = A^{-1}CB^{-1}$

二、 向量与矩阵的秩 需要反复揣摩

- ① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.
- ② 单个零向量线性相关; 单个非零向量线性无关.
- ③ $A: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m$ 为 $B: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}$ 的部分组, 如果一个向量组线性无关, 则其部分组必无关; 如果部分组相关, 则向量组必相关. 部分相关, 整体必相关; 整体无关, 部分必无关. (向量个数变动)

评 注:	记 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m)$, $B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}) \Rightarrow R(B) \leq R(A) + 1$
	$\xrightarrow{A \text{ 线性相关 }} R(A) < m \Rightarrow R(B) \leq R(A) + 1 < m$
	故 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$ 线性相关。
	$\xrightarrow{B \text{ 线性无关 }} R(B) = m + 1 \Rightarrow R(A) \geq R(B) - 1 = m$
	故 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_m)$ 线性无关。

- ④ 原向量组无关, 接长向量组无关; 接长向量组相关, 原向量组相关. (向量维数变动不影响相关性)

评 注:	设 n 维向量组 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_n)$, $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \mathbf{M} \\ x_{ri} \end{pmatrix}$ 为 r 维;	n 维向量组
------	--	----------

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{L}, \mathbf{b}_r) \text{ 为增加 } \mathbf{a}_i \text{ 的维数得到的 (称为导出组), 即 } \mathbf{b}_i = (x_1, x_2, x_r, x_{r+1} \mathbf{L} x_s)^T, \text{ 则}$$

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_n) \text{ 无关} \Rightarrow \text{导出组 } B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{L}, \mathbf{b}_r) \text{ 无关};$$

$$\text{导出组 } B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{L}, \mathbf{b}_r) \text{ 相关} \Rightarrow A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{L}, \mathbf{a}_n) \text{ 相关}.$$

- ⑤ 两个向量线性相关 \Leftrightarrow 对应元素成比例; 两两正交的非零向量组线性无关 $p_{\text{教材114}}$.

评 注:	设有 $l_1, l_2, l_3, \mathbf{L}, l_n$, 使 $l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3 + \mathbf{L} + l_n \mathbf{a}_n = 0$
	以 \mathbf{a}_1^T 左乘上式两端, 得 $l_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 = 0$; 因 $\mathbf{a}_1 \neq 0$, 故 $\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 = \ \mathbf{a}_1\ ^2 \neq 0$, 从而必有 $l_1 = 0$
	类似可证明 $l_1 = 0, l_2 = 0, \mathbf{L}, l_n = 0$; 于是向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{L}, \mathbf{a}_n$ 线性无关。

- ⑥ 向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 中任一向量 \mathbf{a}_i ($1 \leq i \leq n$) 都是此向量组的最大无关组的线性组合.
- ⑦ 向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性相关 \Leftrightarrow 向量组中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关 \Leftrightarrow 向量组中每一个向量 \mathbf{a}_i 都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

评 注: 注意线性相关与线性无关的细微差别

- ⑧ m 个 n 维向量组成的向量组, 如果维数 n 小于向量的个数 m 时一定线性相关。特别地: $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

评注:	m 个 n 维向量 (a_1, a_2, \dots, a_m) 构成矩阵 $A_{n \times m} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ $A_{n \times m} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ $\Rightarrow R(A) \leq n \xrightarrow{n < m} R(A) < m \Rightarrow m$ 个向量 (a_1, a_2, \dots, a_m) 线性相关。
-----	---

m 个 n 维列向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < m$;

m 个 n 维列向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = m$ 。

- ⑨ 若 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关, 而 a_1, a_2, \dots, a_n, b 线性相关, 则 b 可由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 且表示法唯一。

评注:	设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 设 $B = (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$, 有 $R(A) \leq R(B)$, 因为 A 组线性无关, 有 $R(A) = n$; 因为 B 组线性相关, 有 $R(B) < n+1$; 所以 $n \leq R(B) < n+1$, 即有 $R(B) = n$; 由 $R(A) = R(B) = n$, 方程 $Ax = B$ 有唯一解, 即是向量 b 能由向量 A 线性表示, 且表示式唯一。
-----	---

- ⑩ 矩阵的行向量组的秩 = 列向量组的秩 = 矩阵的秩。行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数。

评注:	设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $R(A) = r$. 并设 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 由 $D_r \neq 0$, 知 D_r 所在的 r 列向量线性无关, 因此 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组; 所以列向量的秩等于 r 类似可证明行向量的秩也等于 $R(A)$; 即若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在 r 列即是 A 的列向量组的一个最大无关组。 D_r 所在 r 行即是 A 的行向量组的一个最大无关组。
-----	--

- ⑪ 任何 $R > 0$ 的矩阵必可分解为两个满秩矩阵之积。特别地, 当 $r(A) = 1$ 时, 必有分解形式: $A = a^T b$ 其中 a, b 是单行或单列矩阵。

行阶梯形矩阵 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0; 每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行的行数, 阶梯线的竖线后面的第一个元素非零. 当非零行的第一个非零元为 1, 且这些非零元所在列的其他元素都是 0 时, 称为 **行最简形矩阵**

- ⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系;

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系。

即: 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

✓ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系:

一般初等矩阵指初等行矩阵。因为初等列矩阵变换的集合与初等行矩阵变换的集合相等, 这是关键。

对 A 施行一次初等行变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵左乘 A ;

对 A 施行一次初等列变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵右乘 A 。

在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq m, k \leq n$) 位于这些行列交叉处的 k^2 元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式. $m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个。

矩阵的定义 如果矩阵 A 存在不为零的 r 阶子式, 且任意 $r+1$ 阶子式均为零, 则称矩阵 A 的秩为 r . 记作 $r(A) = r$

向量组的秩 向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 的极大无关组所含向量的个数, 称为这个向量组的秩. 记作 $r(a_1, a_2, \dots, a_n)$

矩阵等价 A 经过有限次初等变换化为 B . 记作: $A \sim B$

向量组等价 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 可以相互线性表示. 记作: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \sim (b_1, b_2, \dots, b_n)$

⑬ 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow PAQ = B$, P, Q 可逆 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$, A, B 为同型矩阵 $\Rightarrow A, B$ 作为向量组等价, 即:

秩相等的向量组不一定等价。

评注:

先证明: 若 A 经一次初等行变换变为 B , 则 $R(A) \leq R(B)$. 设 $R(A) = r$, 且 A 的某个 r 阶子式 $D_r \neq 0$. 当 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$ 或 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$ 时, 在 B 中总能找到与 D_r 相对应的子式 \overline{D}_r .

由于 $\overline{D}_r = D_r$ 或 $\overline{D}_r = -D_r$ 或 $\overline{D}_r = kD_r$, 因此 $\overline{D}_r \neq 0$, 从而 $R(B) \geq r$.

当 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$ 时, 分三种情况讨论:

(1) D_r 中不含第 i 行; (2) D_r 中同时含第 i 行和第 j 行; (3) D_r 中含第 i 行但不含第 j 行;

对 (1), (2) 两种情形, 显然 B 中与 D_r 对应的子式 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$, 故 $R(B) \geq r$.

对情形 (3), $\overline{D}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ r_i + kr_j \\ \mathbf{M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ r_i \\ \mathbf{M} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ r_j \\ \mathbf{M} \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r$, 若 $\hat{D}_r \neq 0$,

因 \hat{D}_r 中不含第 i 行知 A 中有不含第 i 行的 r 阶非零子式, $\therefore R(B) \geq r$.

若 $\hat{D}_r = 0$, 则 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$, 也有 $R(B) \geq r$. 若 A 经一次初等行变换变为 B , 则 $R(A) = R(B)$.

又由于 B 也可经一次初等变换变为 A , 故也有 $R(B) \leq R(A)$. 因此 $R(A) = R(B)$.

设 A 经初等列变换变为 B , 也有 $R(A) = R(B)$.

设 A 经初等列变换变为 B , 则 A^T 经初等行变换变为 B^T ,

Q $R(A^T) = R(B^T)$, 且 $R(A) = R(A^T)$, $R(B) = R(B^T)$, $\therefore R(A) = R(B)$.

综上, 若 A 经有限次初等变换变为 B (即 $A \sim B$), 则 $R(A) = R(B)$.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow r(a_1, a_2, \dots, a_n) = r(b_1, b_2, \dots, b_n) = r(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \Rightarrow$

矩阵 A 与 B 等价.

评注: 设向量组 A 与向量组 B 的秩依次为 s 和 r , 因两个向量组等价, 即两个向量组能相互线性表示, 故 $s \leq r$ 与 $r \leq s$, 所以 $s = r$

⑭ 向量组 b_1, b_2, \dots, b_s 可由向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示 $\Leftrightarrow AX = B$ 有解

$$\Leftrightarrow r(a_1, a_2, \dots, a_n) = r(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_s) \Rightarrow r(b_1, b_2, \dots, b_s) \leq r(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

评注: 记 $A = (a_1, \mathbf{L}, a_n), B = (b_1, \mathbf{L}, b_s)$, 有 $R(A) = R(A, B)$
又 $R(B) \leq R(A, B)$ 故 $R(B) \leq R(A)$

⑮ 向量组 b_1, b_2, \dots, b_s 可由向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 且 $s > n$, 则 b_1, b_2, \dots, b_s 线性相关.

评注: 因 B_0 组能由 B 组线性表示, B 组能由 A 组线性表示, A 组能由 A_0 组线性表示. 故 B_0 组能由 A_0 组线性表示. 即存在系数矩阵 $K_{sr} = (k_{ij})$, 使得

$$(b_1, \mathbf{L}, b_r) = (a_1, \mathbf{L}, a_s) \begin{pmatrix} k_{11} & \mathbf{L} & k_{1r} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ k_{s1} & \mathbf{L} & k_{sr} \end{pmatrix}; \text{ 如果 } r > s, \text{ 则方程组 } K_{sr} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_r \end{pmatrix} = 0 \text{ (简记为 } Kx = 0)$$

有非零解 (因 $R(K) \leq s < r$),

从而方程组 $(a_1, \mathbf{L}, a_s)Kx = 0$ 有非零解, 这与 B_0 组线性无关矛盾, 因此 $r > s$ 不能成立, 所以 $r \leq s$.

向量组 b_1, b_2, \dots, b_s 线性无关, 且可由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 则 $s \leq n$.

⑯ 向量组 b_1, b_2, \dots, b_s 可由向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 且 $r(b_1, b_2, \dots, b_s) = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则两向量组等

价; $P_{\text{教材94, 例10}}$

评注: 只要证明向量组 A 能由向量组 B 线性表示. 设两个向量组的秩都为 r , 并设 A 组和 B 组的最大无关组依次为 $A_0: a_1, \mathbf{L}, a_r$ 和 $B_0: b_1, \mathbf{L}, b_r$, 因 B 组能由 A 组线性表示, 故 B_0 组能由 A_0 组线性表示, 即有 r 阶方阵 K_r 使 $(b_1, \mathbf{L}, b_r) = (a_1, \mathbf{L}, a_r)K_r$; 因 B_0 组线性无关, 故 $R(b_1, \mathbf{L}, b_r) = r$. 有 $R(K_r) \geq R(b_1, \mathbf{L}, b_r) = r$, 但 $R(K_r) \leq r$, 因此 $R(K_r) = r$. 于是矩阵 K_r 可逆, 并有 $(a_1, \mathbf{L}, a_r) = (b_1, \mathbf{L}, b_r)K_r^{-1}$, 即 A_0 组能由 B_0 组线性表示. 从而 A 组能由 B 组线性表示.

设向量组 A 和 B 的秩都为 r . 因 B 组能由 A 组线性表示, 故 A 组和 B 组合并而成的向量组 (A, B) 能由 A 组线性表示. 而 A 组是 (A, B) 组的部分组, 故 A 组总能由 (A, B) 组线性表示. 所以 (A, B) 组与 A 组等价, 因此 (A, B) 组的秩也为 r . 又 B 组的秩为 r , 故 B 组的最大无关组 B_0 含 r 个向量, 因此 B_0 组也是 (A, B) 组的最大无关组, 故 (A, B) 组与 B_0 组等价. 从而 A 组与 B 组等价.

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

评注: 极大无关组与向量组可相互线性表示, 于是等价. 由等价的传递性, 两个极大无关组等价

⑱ 向量组的极大无关组不唯一, 但极大无关组所含向量个数唯一确定.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

评注: 如果向量组(I) $a_{i1}, a_{i2}, \sim a_{ir}$ 与向量组(II)都是向量组 $a_1, a_2, \sim a_s$ 的极大线性无关组
因为 $a_{i1}, a_{i2}, \sim a_{ir}$ 是 $a_1, a_2, \sim a_s$ 的极大线性无关组, 所以 $a_{i1}, a_{i2}, \sim a_{ir}, a_{ik} (k=1, 2 \sim n)$
于是 a_{ik} 可由 $a_{i1}, a_{i2}, \sim a_{ir}$ 线性表示; 从而向量组(II)可由向量组(I)线性表示
又因向量组(II)是极大线性无关组, 所以 $s \leq t$; 同理有 $t \leq s$, 所以 $s = t$

⑳ 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $AX = E_m$ 有解的充分必要条件是 $r(A) = m$, A 的行向量线性无关; $P_{\text{教材81, 19}}$

$YA = E_n$ 有解的必要条件是若 $r(A) = n$, A 的列向量线性无关, 即 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关.

$AX = E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, E_m)$, A 是 $m \times n$ 矩阵 $R(A) \leq m$ 由秩的性质有

$m \leq R(E_m) \leq R(A, E_m) = R(A)$; 所以 $R(A) = m$

对 $YA = E_n$ 两边转置, 有 $A^T Y^T = E_n^T$, A^T 是 $n \times m$ 矩阵. 有上的证明有 $YA = E_n$ 有解的充要条件是 $r(A) = n$

✓ 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $AX = AY$, 且 $R(A) = n$, 则 $X = Y$

由 $AX = AY$, 有 $A(X - Y) = 0$, 由 $R(A) = n$, 则矩阵方程 $A(X - Y) = 0$ 只有零解 $X - Y = 0$, 即 $X = Y$

✓ 从矩阵 A 划去一行 (列) 得 B 问 A, B 的秩的关系 (任意矩阵每减少一行或一列, 其秩减少不超过 1)

不妨改为从矩阵 A 中划去一列得 B , 记划去的一列为 a : (B, a) 从而 $R(A) = R(B, a)$

由秩的性质有: $R(B) \leq R(B, a) \leq R(B) + 1$, 所以有 $R(B) \leq R(A) \leq R(B) + 1$

✓ $R(A) = 1$ 的充要条件是存在非零列向量 a 及非零行向量 b^T , 使得 $A = ab^T$

充分性: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 由于 a, b^T 非零, 故 $A = ab^T = (a_i b_j) \neq 0$,

且 $R(a) = R(b^T) = 1$, 从而 $1 \leq R(A) = R(ab^T) \leq \min(R(a), R(b^T)) = 1$; $R(A) = 1$

必要性: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 因 $R(A) = 1$, 故存在 m, n 阶可逆矩阵 P, Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0 \mathbf{L} 0) Q = (p_1, p_2 \mathbf{L} p_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0 \mathbf{L} 0) \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \mathbf{M} \\ q_n^T \end{pmatrix} = p_1 q_1^T$$

令 $a = p_1, b = q_1^T$, 注意到 P, Q 是可逆矩阵, 从而不可能有全为零的行与列

从而 a, b^T 就是满足条件的非零向量

√ 设向量组 $B: (b_1, b_2, \dots, b_r)$ 能由向量组 $A: (a_1, a_2, \dots, a_s)$ 线性表示为: $(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K$ 其中 K 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关。证明 B 组线性无关的充要条件是: $R(K) = r$

必要性: 设 B 组线性无关记 $B = (b_1, b_2, \dots, b_r)$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ 则有 $B = AK$, 由秩的性质有 $R(B) = R(AK) \leq R(K)$, 由 B 组线性无关, 则 $R(B) = r$, 故 $R(K) \geq r$ 又 K 为 $s \times r$ 矩阵。

$R(K) \leq \min(s, r) \leq r$. 故 $R(K) = r$

充分性: $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_r b_r = 0$. 记方程为 $Bx = 0$. 代入 $B = AK$, 则 $AKx = 0$; A 组线性无关. $R(A) = s$ 方程 $AKx = 0$ 只有零解. 则 $Kx = 0$, $R(K) = r$, 方程 $Kx = 0$ 只有零解. 则 $x = 0$. 所以 B 组线性无关

√ 矩阵 $A_{m \times n}$ $B_{l \times n}$ 的行向量组等价的充分必要条件是: 齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解。 p教材101, 例14

也可表述为 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 可互推的充分必要条件是它们同解

条件的必要性是显然的, 下证明充分性: 设方程 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 从而也与方程

评注 $\begin{cases} Ax = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 同解, 设解集 S 的秩为 t , 则三个系数矩阵的秩都为 $n - t$, 故

$R(A) = R(B) = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 即 $R(A^T) = R(B^T) = R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$, 所以 A 与 B 的列向量等价, 即 A 与 B 的行向量等价

✓ 矩阵的秩的性质:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1 \quad \text{若 } A = O \Leftrightarrow r(A) = 0 \quad 0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$$

$$\textcircled{2} r(A) = r(A^T) = r(A^T A) \quad P_{\text{教材101, 例15}} \quad \text{若 } A^T A = 0, \text{ 则 } A = 0 \quad P_{\text{教材51, 例16}}$$

评注: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量
 若 x 满足 $Ax = 0$, 则有 $A^T(Ax) = 0$, 即 $(A^T A)x = 0$
 若 x 满足 $(A^T A)x = 0$, 则有 $x^T(A^T A)x = 0$, 即 $(Ax)^T Ax = 0$; 从而可推知 $Ax = 0$
 综上所述可知 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解, 因此 $r(A^T A) = r(A^T)$

$$\textcircled{3} r(kA) = r(A) \quad \text{若 } k \neq 0$$

$$\textcircled{4} \text{ 若 } A_{m \times n}, B_{n \times s}, \text{ 若 } r(AB) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(B) \leq n \\ B \text{ 的列向量全部是 } Ax = 0 \text{ 的解} \end{cases} \quad P_{\text{教材101例13 及附(5)}}$$

评注: 记 $B = (b_1, b_2, \sim b_l)$ 则 $A(b_1, b_2, \sim b_l) = 0$, 即 $Ab_i = 0 (i = 1, 2, \sim l)$
 表明矩阵 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax = 0$ 的解; 记方程 $Ax = 0$ 的解集为 S
 $b_i \in S$, 知有 $R(b_1, b_2, \sim b_l) \leq R_S$, 即 $R(B) \leq R_S$. 又 $R(A) + R_S = n$. 故有 $R(A) + R(B) \leq n$

$$\textcircled{5} r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \quad P_{\text{教材78定理8}} \quad \text{若 } AB \text{ 均为 } n \text{ 阶方阵 } R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$$

$$\textcircled{6} \begin{aligned} &\text{若 } A \text{ 可逆} \Rightarrow r(AB) = r(B) \\ &\text{若 } B \text{ 可逆} \Rightarrow r(AB) = r(A) \end{aligned} \quad \text{即: 可逆矩阵不影响矩阵的秩. 可逆矩阵为满秩矩阵}$$

$$G \text{ 为列满秩; } H \text{ 为行满秩} \Rightarrow r(GA) = r(AH) = r(A)$$

$$\textcircled{7} \text{ 若 } r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow \begin{cases} \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ \Rightarrow \begin{cases} r(AB) = r(B) \\ A \text{ 在矩阵乘法中有左消去律} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} AB = O \Rightarrow B = O \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{cases} \quad P_{\text{教材81, 20}}$$

$$\text{若 } r(B_{n \times s}) = n \Rightarrow \begin{cases} r(AB) = r(B) \\ B \text{ 在矩阵乘法中有右消去律} \end{cases} \quad \begin{cases} AB = O \Rightarrow A = O \\ AB = CB \Rightarrow A = C \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \text{ 若 } r(A) = r \Rightarrow A \text{ 与唯一的 } \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ 等价, 称 } \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ 为矩阵 } A \text{ 的等价标准型.}$$

$$\textcircled{9} r(A \pm B) \leq r(A) + r(B) \quad \max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B) \quad P_{\text{教材70}} \quad P_{\text{教材71}} \leftarrow$$

$$\textcircled{10} r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \quad r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \neq r(A) + r(B) \quad R(A+E) + R(A-E) = n$$

$$b \text{ 可由 } a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n \text{ 线性表示 } \Leftrightarrow Ax = b \text{ 有解 } \Leftrightarrow r(A) = r(\mathbf{A}b) \left\{ \begin{array}{l} < n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = b \text{ 有无穷多解 } \xrightarrow{\text{当A为方阵时}} |A| = 0 \\ \Leftrightarrow \text{表示法不唯一} \\ \Rightarrow a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n \text{ 线性相关 } \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 有非零解} \end{array} \right. \\ = n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = b \text{ 有唯一组解 } \xrightarrow{\text{当A为方阵时}} |A| \neq 0 \Rightarrow \text{克莱姆法则} \\ \Leftrightarrow \text{表示法唯一} \\ \Rightarrow a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n \text{ 线性无关 } \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$b \text{ 不可由 } a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n \text{ 线性表示 } \Leftrightarrow Ax = b \text{ 无解 } \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow r(A) \neq r(\mathbf{A}b) \\ \Leftrightarrow r(A) < r(\mathbf{A}b) \\ \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\mathbf{A}b) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{证明看教材72} \\ \text{讲义87} \end{array}$$

$$\textcircled{11}: \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \text{ 有无穷多解 } \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ < \neq \end{array} \right\rangle \text{ 其导出组有非零解} \\ Ax = b \text{ 有唯一解 } \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ < \neq \end{array} \right\rangle \text{ 其导出组只有零解} \end{array} \right.$$

线性方程组的矩阵式 $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathbf{M} \\ b_m \end{pmatrix}$$

向量式 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \mathbf{L} + x_n a_n = b$

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \mathbf{M} \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \mathbf{L}, n$$

$$(a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

矩阵转置的性质:	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^T A^T$	$(kA)^T = kA^T$	$ A^T = A $	$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	$(A^T)^* = (A^*)^T$
矩阵可逆的性质:	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$	$ A^{-1} = A ^{-1}$	$(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$	$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1} = A^{-k}$	
伴随矩阵的性质:	$(A^*)^* = A ^{n-2} A$	$(AB)^* = B^* A^*$	$(kA)^* = k^{n-1} A^*$	$ A^* = A ^{n-1}$	$(A \pm B)^* \neq A^* \pm B^*$	$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{ A }$	$(A^k)^* = (A^*)^k$
$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \text{ 重要定理} \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$		$ AB = A B $	$ kA = k^n A $	$ A^k = A ^k$	$ A \pm B \neq A \pm B $	$AA^* = A^*A = A E$ (无条件恒成立)	

评注: 自己动手证明下

1) $(A^T)^T = A$ 根据转置的定义即可得出

2) $(AB)^T = B^T A^T$ 教材 39

设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 记 $AB = C = (c_{ij})_{m \times n}$,
 $B^T A^T = D = (d_{ij})_{n \times m}$
 $c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{js}b_{si}$; $d_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{si}a_{js}$
 $\therefore c_{ji} = d_{ij}$ 即 $C^T = D$ 故 $(AB)^T = B^T A^T$

3) $(kA)^T = kA^T$ $|A^T| = |A|$ 行列式的性质 1

4) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $AA^{-1} = E, (A^{-1})^T A^T = E$, 所以 A^T 可逆, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

6) $(A^T)^* = (A^*)^T$; $(A^*)^T = (A^T)^* = |A| (A^T)^{-1}$

1) $(A^{-1})^{-1} = A$ $A^{-1}A = E$, 由定义有 $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|^n} |A^*| = \frac{1}{|A|^n} |A|^{n-1} = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$

5) $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$ $|A^{-1} + B^{-1}| = |A^{-1}(B + A)B^{-1}| = |A^{-1}| |B + A| |B^{-1}| \neq 0$ P教材55 25
 $(A^{-1} \pm B^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1} (B \pm A)^{-1} (A^{-1})^{-1} = B(B \pm A)^{-1} A \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

6) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1} = A^{-k}$

1) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ $(A^*)^* = |A^*| (A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \frac{A}{|A|} = |A|^{n-2} A \Rightarrow (A^*)^* = |A|^{n-2} A$

2) $(AB)^* = B^* A^*$ $(AB)^* AB = |AB| E = |A| |B| (AB)^{-1} = |A| |B| B^{-1} A^{-1} = |B| B^{-1} |A| A^{-1} = B^* A^*$

$$3) \quad (kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (kA)(kA^*) = |kA|E; (kA^*) = |kA|(kA)^{-1} = k^n |A| \times \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} |A| A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

$$4) \quad |A^*| = |A|^{n-1} \quad \text{若 } |A|, \text{ 则 } |A^*| = 0 \quad AA^* = |A|E; AA^* = AA^* = |A|E \Rightarrow |A||A^*| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$5) \quad (A \pm B)^* \neq A^* \pm B^*$$

$$6) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = |A^{-1}|A = (A^{-1})^* \Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

$$7) \quad (A^k)^* = (A^*)^k$$

$$1) \quad r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \quad \text{见秩的证明 (6)} \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

$$\text{设 } A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), \text{ 记 } 2n \text{ 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix},$$

可知 $D = |A||B|$, 而在 D 中以 b_{1j} 乘以第一列, b_{2j} 乘以第二列 \mathbf{L}

$$2) \quad |AB| = |A||B| \quad \text{教材 41} \quad b_{nj} \text{ 乘以第 } n \text{ 列, 都加在第 } n+j \text{ 列 } (j=1, 2, \mathbf{L}, n), \text{ 有 } D = \begin{vmatrix} A & C \\ -E & B \end{vmatrix},$$

其中 $C = (c_{ij}), c_{ij} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \mathbf{L} + b_{nj}a_{in}$, 故 $C = AB$.

$$\text{再对 } D \text{ 的行做 } r_j \rightarrow r_{n+j} \quad (j=1, 2, \mathbf{L}, n), \text{ 有 } D = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & C \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^n |-E||C| = (-1)^n (-1)^n |C| = |AB|$$

$$3) \quad |kA| = k^n |A| \quad A \text{ 是数表, } k \text{ 乘以 } A \text{ 的每一个数}$$

$$4) \quad |A^k| = |A|^k \quad \text{注意: } (AB)^k \neq A^k B^k. \text{ 不满足交换律}$$

$$5) \quad |A \pm B| \neq |A| \pm |B|$$

$$6) \quad AA^* = A^*A = |A|E \quad (\text{无条件恒成立})$$

$$\text{设 } A = (a_{ij}), \text{ 记 } AA^* = (b_{ij}), \text{ 则 } b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \mathbf{L} + a_{in}A_{jn}$$

$$\text{故 } AA^* = (|A|d_{ij}) = |A|(d_{ij}) = |A|E. \text{ 同理可得}$$

$$AA^* = \left(\sum_{k=1}^n A_{ki}a_{kj} \right) = (|A|d_{ij}) = |A|(d_{ij}) = |A|E.$$

三、线性方程组

$$\text{线性方程组解的性质: } \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} (1) h_1, h_2 \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, } h_1 + h_2 \text{ 也是它的解} \\ (2) h \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, 对任意 } k, kh \text{ 也是它的解} \\ (3) h_1, h_2, \mathbf{L}, h_k \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, 对任意 } k \text{ 个常数} \\ \quad l_1, l_2, \mathbf{L}, l_k, l_1 h_1 + l_2 h_2 + l_k h_k \text{ 也是它的解} \end{array} \\ (4) g \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解, } h \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解, } g + h \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解} \\ (5) h_1, h_2 \text{ 是 } Ax = b \text{ 的两个解, } h_1 - h_2 \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解} \\ (6) h_2 \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解, 则 } h_1 \text{ 也是它的解} \Leftrightarrow h_1 - h_2 \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解} \\ (7) h_1, h_2, \mathbf{L}, h_k \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解, 则} \\ \quad l_1 h_1 + l_2 h_2 + l_k h_k \text{ 也是 } Ax = b \text{ 的解} \Leftrightarrow l_1 + l_2 + l_k = 1 \\ \quad l_1 h_1 + l_2 h_2 + l_k h_k \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解} \Leftrightarrow l_1 + l_2 + l_k = 0 \end{array} \right\} \text{ 齐次方程组}$$

✓ 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A) = m \Rightarrow r(A) = r(AMb) \Rightarrow Ax = b$ 一定有解,

当 $m < n$ 时, 一定不是唯一解 $\Rightarrow \frac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}} < \frac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$, 则该向量组线性相关.

m 是 $r(A)$ 和 $r(AMb)$ 的上限.

✓ 判断 $h_1, h_2, \mathbf{L}, h_s$ 是 $Ax = o$ 的基础解系的条件:

- ① $h_1, h_2, \mathbf{L}, h_s$ 线性无关;
- ② $h_1, h_2, \mathbf{L}, h_s$ 都是 $Ax = o$ 的解;
- ③ $s = n - r(A)$ = 每个解向量中自由未知量的个数.

✓ 一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

✓ 若 h^* 是 $Ax = b$ 的一个解, $x_1, x_2, \mathbf{L}, x_s$ 是 $Ax = o$ 的一个解 $\Rightarrow x_1, x_2, \mathbf{L}, x_s, h^*$ 线性无关

✓ $Ax = o$ 与 $Bx = o$ 同解 (A, B 列向量个数相同), 则:

- ① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等;
- ② 它们对应的部分组有一样的线性相关性;
- ③ 它们有相同的内在线性关系.

✓ 两个齐次线性方程组 $Ax = o$ 与 $Bx = o$ 同解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A) = r(B)$.

✓ 两个非齐次线性方程组 $Ax = b$ 与 $Bx = g$ 都有解, 并且同解 $\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} A & b \\ B & g \end{pmatrix} = r(A) = r(B)$.

✓ 矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$ 的行向量组等价 \Leftrightarrow 齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解 $\Leftrightarrow PA = B$ (左乘可逆矩阵 P);

P 教材101

矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$ 的列向量组等价 $\Leftrightarrow AQ = B$ (右乘可逆矩阵 Q).

✓ 关于公共解的三种处理办法:

① 把(I)与(II)联立起来求解;

② 通过(I)与(II)各自的通解, 找出公共解;

当(I)与(II)都是齐次线性方程组时, 设 h_1, h_2, h_3 是(I)的基础解系, h_4, h_5 是(II)的基础解系,

则 (I)与(II)有公共解 \Leftrightarrow 基础解系个数少的通解可由另一个方程组的基础解系线性表示.

$$\text{即: } r(h_1, h_2, h_3) = r(h_1, h_2, h_3 M_1 h_4 + c_2 h_5)$$

当(I)与(II)都是非齐次线性方程组时, 设 $x_1 + c_1 h_1 + c_2 h_2$ 是(I)的通解, $x_2 + c_3 h_3$ 是(II)的通解,

两方程组有公共解 $\Leftrightarrow x_2 + c_3 h_3 - x_1$ 可由 h_1, h_2 线性表示. 即: $r(h_1, h_2) = r(h_1, h_2 M_2 + c_3 h_3 - x_1)$

③ 设(I)的通解已知, 把该通解代入(II)中, 找出(I)的通解中的任意常数所应满足(II)的关系式而求出公共解。

三元线性方程组的几何意义与向量组秩的联系及其形象化（重点）

设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

设增广矩阵的列向量依次为 $a_1, a_2, a_3, a_4 \Rightarrow (A | b) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

数矩阵的行向量依次为 $b_1, b_2, b_3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

增广矩阵的行向量依次为 $g_1, g_2, g_3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$

便于对照，我们把矩阵作如下向量表示

$$\begin{array}{ccc} b_1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} & g_1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & d_1 \end{pmatrix} \\ b_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & g_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & d_2 \end{pmatrix} \\ b_3 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & g_3 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & d_3 \end{pmatrix} \\ \uparrow a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 & \uparrow a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 \uparrow a_4 \end{array}$$

方程组中每一个方程代表一个平面，依次记为 p_1, p_2, p_3 ，每个平面能否存在，等价于每个方程能否成立，也等价于 $d_i (i=1, 2, 3)$ 能否由 (x_1, x_2, x_3) 线性表出，只要有一个 $d_i (i=1, 2, 3)$ 不能由 (x_1, x_2, x_3) 线性表出，其中有个平面就不存在，即存在一个矛盾方程，方程组就无解，对应 $R(A) \neq R(A | d)$ ；由空间解析几何知， b_1, b_2, b_3 分别是平面 p_1, p_2, p_3 的法向量，决定平面的取向，如 $R(b_1, b_2, b_3) = 3 \Leftrightarrow b_1, b_2, b_3$ 线性无关，则说明三个平面（法线）既不能平行又不能重合，如 $R(b_1, b_2, b_3) < 3 \Leftrightarrow b_1, b_2, b_3$ 线性相关，则说明三个平面（法线）既可能同时平行又可能全部重合，或既可能部分平行又可能部分重合； $R(g_1, g_2, g_3) = 3$ 表示三个方程独立， $R(g_1, g_2, g_3) < 3$ 表示三个方程有多余方程存在，比如 g_1, g_2 线性相关，则方程一与方程二是同一个方程等等。显然，根据矩阵秩的性质，有系数矩阵 $R(a_1, a_2, a_3) \equiv R(b_1, b_2, b_3)$ ，增广矩阵 $R(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv R(g_1, g_2, g_3)$ 下面分八种具体情形详细讨论，反复体味。

● 情形 1 $R(a_1, a_2, a_3) = R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ ，三个平面法线成三维分布。

因为当 $R(a_1, a_2, a_3) = R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3 \Rightarrow$ 方程有唯一解。

几何意义：三个平面交于一点。

● 情形 2 $R(a_1, a_2, a_3) = 2 \Leftrightarrow R(b_1, b_2, b_3) = 2$ ，三个平面法线共面。

◎ 2.1 $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = R(a_1, a_2, a_3) = R(g_1, g_2, g_3) = 2 \Rightarrow$ 方程有无穷解，但导出组基础解系只

有一个解向量 ($n - R(A) = 3 - 2 = 1$)，相当于一根直线只有一个方向。几何意义：三个平面交于一根直线。

○ 2.1.1 b_1, b_2, b_3 中有两个向量线性相关。

几何意义：二个平面重合，第三个平面与它们相交于一根直线。

○ 2.1.2 b_1, b_2, b_3 任意两个向量线性无关。

几何意义：三个平面交于一根直线。

◎ 2.2 $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3 \neq R(a_1, a_2, a_3) = R(b_1, b_2, b_3) = 2$ 方程无解。

几何意义：三个平面既无共同交点又无共同交线更无交面（不能重合）。

○ 2.2.1 b_1, b_2, b_3 中有两个向量线性相关。

几何意义：二个平面平行，第三个平面与它们相交两根直线。

○ 2.2.2 b_1, b_2, b_3 中任意两个向量线性无关。

几何意义：三个平面两两相交，中间围成一个三棱柱。

● 情形 3 $R(a_1, a_2, a_3) = 1 \Leftrightarrow R(b_1, b_2, b_3) = 1$ ，三个平面法线共线（平行或重合）。

◎ 3.1 $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = R(a_1, a_2, a_3) = R(b_1, b_2, b_3) = 1 \Rightarrow$ 方程有无穷解，但导出组基础解系有

二个解向量 ($n - R(A) = 3 - 1 = 2$)，相当于需要两根直线才能决定一个平面。几何意义：三个平面重合。

◎ 3.2 $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2 \neq R(a_1, a_2, a_3) = R(b_1, b_2, b_3) = 1 \Rightarrow$ 无解。

○ 3.2.1 g_1, g_2, g_3 中有两个向量线性相关。

几何意义：二个平面重合，第三个平面与它们平行。

○ 3.2.2 g_1, g_2, g_3 中任意两个向量线性无关。

几何意义：三个平面互不重合但相互平行。

四、线性空间与矩阵特征量

向量空间 设 V 为 n 维向量的集合, 如果集合 V 非空, 且集合 V 对于加法及乘数两种运算封闭, 那么就称

集合 V 为向量空间. 集合 V 对于加法及乘数两种运算封闭若 $a \in V, b \in V$, 则 $a + b \in V$;

若 $a \in V, l \in R$, 则 $la \in V$. n 维向量的集合是一个向量空间, 记作 R^n

向量空间的基与维数 设 V 是向量空间, 如果 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r \in V$, 且满足

(1) a_1, a_2, \dots, a_r 线性无关;

(2) V 中任一向量都可由 a_1, a_2, \dots, a_r 线性表示.

那么, 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r \in V$ 就称为向量 V 的一个基, 称为向量空间 V 的维数, 并称 V 为 r 维向量空间. 记为 $\dim(V) = r$.

评注 ①只含有零向量的向量空间称为 0 维向量空间, 因此它没有基.

②若把向量空间 V 看作向量组, 那 V 的基就是向量组的最大无关组, V 的维数就是向量组的秩.

③若向量组 a_1, a_2, \dots, a_r 是向量空间 V 的一个基, 则 V 可表示为

$$V = \{x = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_r a_r, l_1, l_2, \dots, l_r \in R\}$$

向量空间的性质:

$$(1) \text{ 基变换: } \begin{cases} b_1 = a_{11} a_1 + \dots + a_{1n} a_n \\ \mathbf{K} \\ b_n = a_{n1} a_1 + \dots + a_{nn} a_n \end{cases} \Leftrightarrow [b_1, \dots, b_n] = [a_1, \dots, a_n] \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{n1} & \mathbf{L} & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_1, \dots, a_n] P$$

P 称为从基 $[a_1, \dots, a_n]$ (旧基) 到基 $[b_1, \dots, b_n]$ (新基) 的过渡矩阵.

$$(2) \text{ 坐标变换: } a = [a_1, \dots, a_n] X = [b_1, \dots, b_n] Y = [a_1, \dots, a_n] P Y \quad \text{其中坐标向量: } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{M} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = P Y \Leftrightarrow Y = P^{-1} X$$

(3) 同一线性变换 T 在两个不同基下的坐标矩阵 A 与 B 之间的关系

$$\begin{aligned} T(a_1, \dots, a_n) &= (a_1, \dots, a_n) A \quad T(b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n) B \\ (b_1, \dots, b_n) &= (a_1, \dots, a_n) P \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) P^{-1} \\ &\Rightarrow (b_1, \dots, b_n) B = T(b_1, \dots, b_n) \\ &= T[(a_1, \dots, a_n) P] = [T(a_1, \dots, a_n)] P = [(a_1, \dots, a_n) A] P = (a_1, \dots, a_n) A P \\ &\Rightarrow (b_1, \dots, b_n) B = (b_1, \dots, b_n) P^{-1} A P; \Rightarrow B = P^{-1} A P \end{aligned}$$

这表明两个不同基下的坐标矩阵 A 与 B 相似, 两个基之间的过渡矩阵 P 正是相似变换矩阵.

标准正交基 n 个 n 维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

向量 $a = (a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n)^T$ 与 $b = (b_1, b_2, \mathbf{L}, b_n)^T$ 的内积 $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n}$

对连续实函数空间: 内积定义为 $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

✓ 内积的性质: ① 正定性: $(a, a) \geq 0$, 且 $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = o$

② 对称性: $(a, b) = (b, a)$

③ 双线性: $(a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2)$

$$(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$$

$$(ca, b) = c(a, b) = (a, cb)$$

a 与 b 正交 $(a, b) = 0$. 记为: $a \perp b$

向量 $a = (a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n)^T$ 的长度 $\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \mathbf{L} + a_n^2}$

(i) 非负性: 当 $x \neq 0$ 时, $\|x\| > 0$; 当 $x = 0$ 时, $\|x\| = 0$;

向量长度的性质: (ii) 齐次性: $\|I x\| = |I| \|x\|$;

(iii) 三角不等性: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

a 是单位向量 $\|a\| = \sqrt{(a, a)} = 1$. 即长度为 1 的向量.

n 维向量的夹角 当 $\|x\| \neq 0, \|y\| \neq 0$ 时, $q = \arccos \frac{[x, y]}{\|x\| \|y\|}$; 称为 n 维向量 x 与 y 的夹角。

正交向量组的概念 若一非零向量组中的向量两两正交, 则称该向量组为正交向量组.

向量空间的正交基 若 $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r$ 是向量空间 V 的一个基, 且 $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r$ 是两两正交的非零向量组, 则称 $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r$ 是向量空间 V 的正交基.

规范正交基 设 n 维向量 $e_1, e_2, \mathbf{L}, e_r$ 是向量空间 $V (V \subset R^n)$ 的一个基, 如果 $e_1, e_2, \mathbf{L}, e_r$ 两两正交且都是单位向量, 则称 $e_1, e_2, \mathbf{L}, e_r$ 是 V 的一个规范正交基.

施密特正交规范化 a_1, a_2, a_3 线性无关, 几何解释见教材 P117

$$\text{正交化} \begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 \\ b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 \end{cases}$$

$$\text{单位化: } h_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} \quad h_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} \quad h_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}$$

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。让第二个解向量先与第一个解向量正交，再把第二个解

向量代入方程，确定其自由变量。例如： $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ 取 $b_1 = (-1, 1, 0)^T$ ， $b_2 = (1, 1, 2)^T$ 。

特征值的 I 定义： $AX = I X$ （针对方阵）

A 的特征矩阵 $I E - A$ 。

A 的特征多项式 $|I E - A| = f(I)$ 。

$$|I E - A| = I^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) I^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) I - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{根据韦达定理，马上可以得到两个重要公式：} \begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = -[-(a_{11} + a_{22} + a_{33})] = \text{Tr}(A) \\ I_1 I_2 I_3 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^n = |A| \end{cases}$$

评注：特别地，如特征值行列式中，有两行或两列对应成比例，上述公式可以简化为：

$$|I E - A| = I^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) I^2 = I^3 - \left(\sum_{i=1}^3 a_{ii} \right) I^2 = I^3 - (\text{tr} A) I^2 \Rightarrow I_1 = \text{tr} A, \quad I_2 = I_3 = 0$$

韦达定理一般形式为：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \quad \prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}; \quad \sum_{i \neq j=1}^n x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

✓ $f(I)$ 是矩阵 A 的特征多项式 $\Rightarrow f(A) = O$ 见教材124

若 A 与 Λ 相似，即有可逆矩阵 P ，使 $P^{-1} A P = \Lambda = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_n)$ ，有

$$f(A) = P f(\Lambda) P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(I_1) & & \\ & \mathbf{O} & \\ & & f(I_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P O P^{-1} = O$$

A 的特征方程 $|I E - A| = 0$ 。 $Ax = I x$ (x 为非零列向量) $\rightarrow Ax$ 与 x 线性相关

$$\sqrt{|A| = I_1 I_2 \mathbf{L} I_n} \quad \sum_{i=1}^n I_i = \text{tr} A, \quad \text{tr} A \text{ 称为矩阵 } A \text{ 的迹.}$$

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

√ 若 $|A| = 0$, 则 $I = 0$ 为 A 的特征值, 且 $Ax = o$ 的基础解系即为属于 $I = 0$ 的线性无关的特征向量.

$$\sqrt{r(A) = 1 \Leftrightarrow A \text{ 一定可分解为 } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mathbf{M} \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \mathbf{L}, b_n), A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n) A, \text{ 从而 } A \text{ 的特征值}$$

$$\text{为: } I_1 = \text{tr} A = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n, \quad I_2 = I_3 = \mathbf{L} = I_n = 0.$$

评注 $(a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n)^T$ 为 A 各行的公比, $(b_1, b_2, \mathbf{L}, b_n)$ 为 A 各列的公比.

√ 若 A 的全部特征值 $I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n$, $f(A)$ 是多项式, 则:

① 若 A 满足 $f(A) = O \Rightarrow A$ 的任何一个特征值必满足 $f(I_i) = 0$

② $f(A)$ 的全部特征值为 $f(I_1), f(I_2), \mathbf{L}, f(I_n)$; $|f(A)| = f(I_1) f(I_2) \mathbf{L} f(I_n)$.

√ 初等矩阵的性质:

$ E(i, j) = -1$	$ E[i(k)] = k$	$ E[i, j(k)] = 1$
$E(i, j)^T = E(i, j)$	$E[i(k)]^T = E[i(k)]$	$E[i, j(k)]^T = E[j, i(k)]$
$E(i, j)^{-1} = E(i, j)$	$E[i(k)]^{-1} = E[i(\frac{1}{k})]$	$E[i, j(k)]^{-1} = E[i, j(-k)]$
$1 E(i, j)^* = -E(i, j)$	$E[i(k)]^* = k E[i(\frac{1}{k})]$	$E[i, j(k)]^* = E[i, j(-k)]$

√ 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \mathbf{L} + a_1 x + a_0$, 对 n 阶矩阵 A 规定: $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \mathbf{L} + a_1 A + a_0 E$ 为 A 的一个多项式.

$$\sqrt{I \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 则: } \begin{cases} kA & kI \\ aA + bE & aI + b \\ A^T & I \\ A^{-1} & \frac{1}{I} \\ A^* & \frac{|A|}{I} = \frac{I_1 I_2 \mathbf{L} I_n}{I} \\ A^2 & I^2 \\ A^m & I^m \end{cases} \text{ 分别有特征值 } \begin{matrix} \\ \\ \\ \frac{1}{I} \\ \frac{|A|}{I} \\ I^2 \\ I^m \end{matrix} .}$$

$$\sqrt{x \text{ 是 } A \text{ 关于 } I \text{ 的特征向量, 则 } x \text{ 也是 } \begin{cases} kA & kI \\ aA+bE & aI+b \\ A^{-1} & \frac{1}{I} \\ A^* & \frac{|A|}{I} = \frac{I_1 I_2 \dots I_n}{I} \\ A^2 & I^2 \\ A^m & I^m \end{cases} \text{ 关于 } \frac{1}{I} \text{ 的特征向量.}$$

$\sqrt{A^2, A^m}$ 的特征向量不一定是 A 的特征向量.

\sqrt{A} 与 A^T 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同. $p_{\text{教材138, 6}}$

$$|A^T - I E| = |(A - I E)^T| = |A - I E|, \text{ 即 } A^T \text{ 与 } A \text{ 的特征多项式相同, 故特征值相同}$$

$\sqrt{\text{设 } n \text{ 阶矩阵 } A, B \text{ 满足 } R(A) + R(B) < n \text{ 则 } A, B \text{ 有公共的特征值, 有公共的特征向量. } p_{\text{教材138, 7}}}$

由题设 $R(A) + R(B) < n$, 知 $R(A) < n, R(B) < n$, 故 $|A| = 0, |B| = 0$ 于是根据特征值的性质 $I_1 I_2 \dots I_n = |A|$ A, B 都是特征值 0, 从而 A, B 具有公共的特征值.

又由于 A, B 对应与特征值 0 的特征向量 $Ax = 0, Bx = 0$ 的非零解; 因此证明 A, B 有公共的特征向量的问题,

转化为 $Ax = 0, Bx = 0$ 是否有公共的非零解, 考虑齐次方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 因为 $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B) < n$,

故齐次方程组有非零解, 此非零解使得 $Ax = 0$, 也使得 $Bx = 0$, 即使 A, B 对应与特征值 0 的公共特征向量, 从而 A, B 具有公共的特征向量.

$\sqrt{\text{设 } A \text{ 为正交矩阵, 且 } |A| = -1, \text{ 则 } I = -1 \text{ 是 } A \text{ 的特征值 } p_{\text{教材138, 9}}}$

$$\text{因 } A^T A = E, \text{ 故 } |A + E| = |A + A^T A| = |A| |E + A^T| = -|E + A^T| = -|(E + A)^T| = -|A + E| \Rightarrow 2|A + E| = 0, \text{ 从而 } |A + E| = 0,$$

$\sqrt{\text{设 } I \neq 0 \text{ 是 } m \text{ 阶矩阵 } A_{m \times n} B_{n \times m} \text{ 的特征值, 则 } I \text{ 也是 } n \text{ 阶矩阵 } B_{n \times m} A_{m \times n} \text{ 的特征值 } p_{\text{教材138, 10}}}$

证明: 因 $I \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m \times n} B_{n \times m}$ 的特征值, 设 x 是对应的特征向量, 即有 $(AB)x = Ix$

用矩阵 B 左乘上式两端, 的 $(BA)(Bx) = B[(AB)x] = B[Ix] = IBx$ 于是只需要说明 $Bx \neq 0$,

则有特征值的定义有 I 是 n 阶矩阵 BA 的特征值, Bx 是对应的特征向量, 若 $Bx = 0$, 代人 $(AB)x = Ix$

即得 $Ix = 0$, 因特征向量 $x \neq 0$, 推出 $I = 0$, 与已知 $I \neq 0$ 矛盾

特征值和特征向量的性质

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值, p_1, p_2, \dots, p_m 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 各不相等, 则 p_1, p_2, \dots, p_m 线性无关.

设有常数 x_1, x_2, \dots, x_m 使 $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = 0$. 则 $A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m) = 0$, 即

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \dots + \lambda_m x_m p_m = 0, \text{ 类推有 } \lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \dots + \lambda_m^k x_m p_m = 0. (k=1, 2, \dots, m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式, 得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \dots, x_m p_m) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式,

当各 λ_i 不相等时, 该行列式不等于 0, 从而该矩阵可逆. 于是有 $(x_1 p_1, x_2 p_2, \dots, x_m p_m) = (0, 0, \dots, 0)$,

即 $x_j p_j = 0 (j=1, 2, \dots, m)$. 但 $p_j \neq 0$, 故 $x_j = 0 (j=1, 2, \dots, m)$. 所以向量组 p_1, p_2, \dots, p_m 线性无关.

Ø 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

Ø 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量.

Ø 对于不同的特征值 λ , 则 $k_1 x_1 + k_2 x_2$ (k_1, k_2 不全为零) 不是 λ 的特征向量.

Ø 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的, 一个特征值具有的特征向量不唯一; 一个特征向量不能属于不同的特征值.

因为, 如果设 x 同时是 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) 的特征向量, 即有 $Ax = \lambda_1 x, Ax = \lambda_2 x$
 $\Rightarrow \lambda_1 x = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, 由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, 则 $x = 0$, 与定义矛盾.

√ 设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2 , 则 $p_1 + p_2$ 不是 A 的特征向量

按题意有 $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2$, 故 $A(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$

用反证法: 假设 $p_1 + p_2$ 是 A 的特征向量, 则存在数 λ , 使 $A(p_1 + p_2) = \lambda(p_1 + p_2)$

于是 $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ 即 $(\lambda - \lambda_1)p_1 + (\lambda - \lambda_2)p_2 = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ 知 p_1, p_2 线性无关

$\xrightarrow{p_1, p_2 \text{ 线性无关}} (\lambda - \lambda_1) = 0; (\lambda - \lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

A 与 B 相似

$$P^{-1}AP = B \quad (P \text{ 为可逆矩阵}) \quad \text{记为: } A \sim B$$

√ 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似 $p_{\text{教材}138, 13}$

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = EBA = BA \text{ 从而 } AB \text{ 与 } BA \text{ 相似, 此处取 } A \text{ 作为 } P$$

A 与 B 正交相似

$$P^{-1}AP = B \quad (P \text{ 为正交矩阵})$$

A 可以相似对角化

A 与对角阵 Λ 相似. 记为: $A \sim \Lambda$ (称 Λ 是 A 的相似标准形)

√ A 可相似对角化 $\Leftrightarrow n - r(I_n E - A) = k_i \quad k_i$ 为 λ_i 的重数, $(I_n E - A)X = 0$ 的解空间的秩 $R(S) = k$.

(注意: $R(IE-A)=n-k \Leftrightarrow R(S)=n-R(A-IE)=k$ 。) $\Leftrightarrow A$ 恰有 n 个线性无关的特征向量.

$\Leftrightarrow n$ 阶方阵存在 n 个不等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (即特征值只有单根) 这时, P 为 A 的特征向量拼成的矩阵,

$P^{-1}AP$ 为对角阵, 主对角线上的元素为 A 的特征值. 设 α_i 为对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则有:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

n 阶方阵有 n 个线性无关的特征向量才可对角化的证明过程如下:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^{-1} A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \Lambda$$

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (注意 P 为特征向量组) 则 $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow A \sim \Lambda$, 由于要求 P 可逆,

故 n 阶方阵必须存在 n 个线性无关的特征向量。

评注 当 $\lambda_i = 0$ 为 A 的重特征值时, A 可相似对角化 $\Leftrightarrow \lambda_i$ 的重数 $= n - r(A) = Ax=0$ 基础解系的个数.

✓ 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值 $\Rightarrow A$ 可相似对角化.

✓ 若 A 可相似对角化, 则其非零特征值的个数 (重根重复计算) $= r(A)$.

$$\checkmark \text{ 若 } A \sim \Lambda \Rightarrow A^k = P\Lambda^k P^{-1}, \quad g(A) = Pg(\Lambda)P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & 0 \\ & g(\lambda_2) & \\ 0 & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

✓ 相似矩阵的性质:

① $|IE-A| = |IE-B|$, 从而 A, B 有相同的特征式和值, 但特征向量不一定相同.

② x 是 A 关于 λ_0 的特征向量, $P^{-1}x$ 是 B 关于 λ_0 的特征向量.

③ $\text{tr}A = \text{tr}B$

④ $|A| = |B|$ 从而 A, B 同时可逆或不可逆

⑤ $r(A) = r(B)$

$$\textcircled{5} A^T \sim B^T; A^{-1} \sim B^{-1} \quad (\text{若 } A, B \text{ 均可逆}); A^* \sim B^*$$

$$\textcircled{6} A^k \sim B^k \quad (k \text{ 为整数}); f(A) \sim f(B), |f(A)| = |f(B)|$$

$$\textcircled{7} A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$$

注前四个都是必要条件,而非充分条件,只能用来否定两个矩阵相似,

不能用来肯定两个矩阵相似,

√ 数量矩阵只与自己相似.

要判断两个矩阵是否相似,先看是否与必要条件矛盾,如是则否决,如不是,主要看它是满秩,因为矩阵对角化一般值需要 n 个线性无关的一般向量,对角化特征值则需要 n 个线性无关的特征向量.

√ 实对称矩阵的性质:

① 特征值全是实数,特征向量是实向量;

② 不同特征值对应的特征向量必定正交(对一般称矩阵则不一定正交,只是线性无关),

评注 对于普通方阵,不同特征值对应的特征向量线性无关;

③ 一定有 n 个线性无关的特征向量.若 A 有重的特征值,该特征值 λ_i 的重数 $= n - r(\lambda_i E - A)$;

(对一般称矩阵则不一定有此结论),且一定线性无关但不一定正交,需要使用施密特正交化并单位化)

④ 必可用正交矩阵相似对角化,即:任一实二次型可经正交变换化为标准形;

⑤ 与对角矩阵合同,即:任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形;

⑥ 两个实对称矩阵相似 \Leftrightarrow 有相同的特征值.

√ 任给可逆矩阵 C ,令 $B = C^T A C$,如果 A 为对称矩阵,则 B 也为对称矩阵,且 $R(B) = R(A)$. $p_{\text{教材}54,9}$

A 为对称矩阵,即有 $A = A^T$,于是 $B^T = (C^T A C)^T = C^T A^T C = C^T A C = B$,

$\mathbf{Q} B = C^T A C, \therefore R(B) \leq R(AC) \leq R(A)$,又 $\mathbf{Q} A = (C^T)^{-1} B C^{-1}, \therefore R(A) \leq R(B C^{-1}) \leq R(B). \therefore R(A) = R(B)$.

√ 设 A, B 为 n 阶矩阵,则 AB 也为对称阵的充要条件是 $AB = BA$ $p_{\text{教材}54,10}$

证明: 充分性: 由 $AB = BA$, 及 $A^T = A, B^T = B$, 得 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 故 AB 是对称阵
必要性: 由 AB 是对称阵及 $A^T = A, B^T = B$, 得 $AB = B^T A^T = BA$

n 阶实对称矩阵 A 及其多项式 $f(A)$ 一定有 n 个线性无关的特征向量，可无条件可对角化。

实对称矩阵的对角化有两种形式：

一是它可以和对角矩阵相似而对角化；

二是它既可以和对角矩阵相似 $\left(\Lambda_1 = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & & I_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP \right)$ 又合同 $\left(\Lambda_2 = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & & I_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP = P^TAP \right)$ ，

适当排列特征值 I_1, I_2, \dots, I_n 的顺序, 可以使 $\Lambda_1 = \Lambda_2$ 。一般的矩阵即使可以对角化，也不能与对角矩阵合同。

因为如果 A 合同 B ，则 $B = M^TAM \Leftrightarrow A = (M^{-1})^TBM^{-1}$ ，可见， B 也合同 A ，而这时

$$B^T = (M^TAM)^T = M^T A^T M = M^TAM = B$$

$$A^T = \left[(M^{-1})^TBM^{-1} \right]^T = (M^{-1})^T B^T M^{-1} = (M^{-1})^T BM^{-1} = A$$

可见，只要 A 为实对称矩阵，则 B 也是实对称矩阵，反之亦然，所以，合同是实对称矩阵特有的一种等价关系，与对称矩阵合同的矩阵必是对称矩阵，它们具有相同的秩和相同的正惯性指数（对角矩阵对角元为正数的个数）它在二次型尤其是正定型中，作用巨大。

另外实对称矩阵可以和非特征值主对角元的对角矩阵 C 合同，即存在可逆矩阵 $M \Rightarrow M^TAM = C$ ，即合同变换可以使实对称矩阵对角化。

当 $P^T = P^{-1}$ 时，说明 P 为正交矩阵，所以，我们可以使用一个正交矩阵，使实对称矩阵与对角矩阵既相似又合同，既可以解决实对称矩阵对角化问题，又同时解决了二次型的标准化问题。下面介绍对给定的实对称矩阵 A ，如何求正交矩阵 Q ，使 A 对角化（当然，如果仅仅是对角化 A ，没有必要一定求一个正交矩阵，只要具备 n 个线性无关的特征向量按列组成一个可逆矩阵即可完成对角化。）

实对称矩阵的正交对角化及其方法

▲第一步, 根据 $|I E - A| = 0 \Rightarrow$ 求 $I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n$;

▲第二步, 对每一个特征值 I , 根据 $(I E - A)X = 0$, 求出对应的特征向量, 如果是单根, 就对应一个特征向量, 如果是 k 重根, 就一定对应 k 个线性无关的特征向量;

▲第三步, 对重特征值对应的那组特征向量进行施密特正交化, 再单位化, 就得到了一个正交单位向量组 $q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n$;

▲第四步, 将 $q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n$ 对应 $I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n$ 的顺序按列排列, 就得到所求的正交矩阵

$$Q = (q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n). \text{ 而且有 } Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & I_n \end{pmatrix}$$

正交矩阵 $AA^T = E$

✓ A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的 n 个行(列)向量构成 R^n 的一组标准正交基.

性质: 正交变换保持向量的长度不变. 设 $y = Px$ 为正交变换, 则有 $\|y\| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T P x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$.

✓ A, B 为正交阵, 则 AB 也为正交阵 $(AB)(AB)^T = (AB)B^T A^T = A(BB^T)A^T = AEA^T = E$

✓ 正交矩阵的性质: ① $A^T = A^{-1}$;

② $AA^T = A^T A = E$;

③ 正交阵的行列式等于 1 或 -1; 特征值为 1 或 -1;

④ A 是正交阵, 则 A^T, A^{-1} 也是正交阵;

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵;

⑥ A 的行(列)向量都是单位正交向量组.

五、正定二次型

$$\boxed{\text{二次型}} \quad f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \mathbf{L} + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \mathbf{L} + a_{2n}x_2x_n \\ + \mathbf{L} \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \mathbf{L} + a_{nn}x_n^2 \end{cases}$$

√ 惯性定理：任一实对称矩阵 A 与唯一对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \mathbf{O} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \mathbf{O} \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \mathbf{O} \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 合同.

任意实二次型 f 都可以经合同变换化成标准形。其中 $d_i > 0$ 的个数为正惯性指数； $d_i < 0$ 的个数为负惯性指数，且正负惯性指数唯一。

√ 用正交变换化二次型为标准形：

- ① 求出 A 的特征值、特征向量；
- ② 对 n 个特征向量正交规范化；
- ③ 构造 C （正交矩阵），作变换 $x = Cy$ ，则

$$(Cy)^T A(Cy) = y^T C^T A C y = y^T C^T A C y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathbf{M} \\ y_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathbf{M} \\ y_n \end{pmatrix}$$

新的二次型为 $f = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$ ， Λ 的主对角上的元素 d_i 即为 A 的特征值。

合同变换的本质就是同型初等行列变换： $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{同型行列变换}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$

Ø 相似一定合同、合同未必相似；合同推不出相似，

Ø 若 C 为正交矩阵，则 $C^T A C = B \Rightarrow A : B$ （合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

√ 合同变换化二次型为标准形

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \mathbf{O} & & \\ & & & d_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \mathbf{O} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由于 C 可逆（满秩）， C 总可以表为若干初等变换的乘积，令 $C = F_1 F_2 \mathbf{L} F_m$ ，使

$$C^T AC = F_m^T \mathbf{L} F_2^T F_1^T A F_1 F_2 \mathbf{L} F_m = E^T \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \mathbf{O} & & & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \mathbf{O} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} E$$

$A F_i \rightarrow$ 对 A 列变换, $F_i^T A \rightarrow$ 行变换, 列变换在先, 相对应的行变换在后。也就是说:
如果经过一对相同的列行初等变换, 最终有:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \mathbf{O} & & & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \mathbf{O} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{与此同时, } C \rightarrow E$$

又 $C = F_1 F_2 \mathbf{L} F_m = E F_1 F_2 \mathbf{L} F_m$, 相当于只对 E 进行列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{EF_1 F_2 \mathbf{L} F_m}]{\substack{F_m^T \mathbf{L} F_2^T F_1^T A F_1 F_2 \mathbf{L} F_m}} \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \mathbf{O} & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \mathbf{O} & \\ & & & & & 0 \\ \hline & & & & & & C \end{pmatrix}$$

具体操作中, 注意行变换只能在 A 的行数以内进行, E 中的行不可交换它的行所在的原始位置, 这样才能保证对 E 只进行列变换。

√ 拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有 x_i 的平方项, 则先把含有 x_i 的乘积项集中, 然后配方, 再对其余的变量同样进行, 直到都配成平方项为止, 经过非退化线性变换, 就得到标准形;
2. 若二次型中不含有平方项, 但是 $a_{ij} \neq 0$ 则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \quad (k=1, 2, \mathbf{L}, n \text{ 且 } k \neq i, j) \\ x_k = y_k \end{cases}$$

3. 化二次型为含有平方项的二次型，然后再按 1 中方法配方.

秩为 r 的 n 阶对称矩阵 A 必合同于对角矩阵，

即存在满秩矩阵 C ，使 $C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \mathbf{L}, d_r, 0, 0)$ 其中： $\{d_i\}$ 不为零的个数为 r 个。

正定二次型 $x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n$ 不全为零， $f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) > 0$ 。

正定矩阵 正定二次型对应的矩阵。

✓ $f(x) = x^T A x$ 为正定二次型 \Leftrightarrow (之一成立):

① $\forall x \neq 0, x^T A x > 0; \xrightarrow{B \text{ 满秩}} (Bx)^T A (Bx) > 0$ 抽象正定二次型

② A 的特征值全大于 0；抽象的正定二次型

③ f 的正惯性指数为 n ；对实对称矩阵而言，正负惯性指数分别等于正负特征值的个数。

④ A 的所有顺序主子式全大于 0； $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \mathbf{L}, \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{m1} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{vmatrix} > 0$ 具体二次型

⑤ A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C 使得 $C^T A C = E$ ； $P_{\text{教材}140, 33}$

⑥ 存在可逆矩阵 P ，使得 $A = P^T P$ ；

⑦ 存在正交矩阵 C ，使得 $C^T A C = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & \mathbf{O} \\ & & & I_n \end{pmatrix} \quad (I_i \text{ 大于 } 0)。$

必要条件有 1: ① $a_{ii} > 0$ 。② $|A| > 0$

充分条件有 2: ①正定矩阵一定为满秩矩阵。②正定矩阵一定为实对称矩阵。

✓ $f(x) = x^T A x$ 为负定二次型 $\Leftrightarrow -f$ 正定 \Leftrightarrow 奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正 **霍尔维茨定理**

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{m1} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{vmatrix} > 0, (r=1, 2, \mathbf{L}, n)$$

✓ 合同变换不改变二次型的正定性。

✓ A 为正定矩阵 $\Rightarrow a_{ii} > 0$; $|A| > 0$.

✓ A 为正定矩阵 $\Rightarrow A^T, A^{-1}, A^*$ 也是正定矩阵.

✓ A 与 B 合同, 若 A 为正定矩阵 $\Rightarrow B$ 为正定矩阵

✓ A, B 为正定矩阵 $\Rightarrow A+B$ 为正定矩阵, 但 AB, BA 不一定为正定矩阵

✓ 二次型 $f(x) = x^T A x$ 在 $\|x\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值。 $P_{\text{教材140, 29}}$

$I_1 \geq I_2 \geq \mathbf{L} \geq I_n$ 是矩阵 A 的 n 个特征值, 由对称性可正交相似对角化, 故存在正交阵 $Q = (q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n)$, 使

$Q^T A Q = \text{diag}(I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n) \rightarrow \Lambda$ 并且 Q 的第 i 个列向量 q_i 是对应于特征值 I_i 单位特征向量

今做变换 $x = Qy$, 其中 $x = (x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \mathbf{L}, y_n)^T$, 则 $\|x\|^2 = x^T x = y^T Q^T Q y = y^T y = \|y\|^2$

从而, 一方面, $\max_{\|x\|=1} f(x) = \max_{\|x\|=1} x^T A x = \max_{\|y\|=1} y^T Q^T A Q y = \max_{\|y\|=1} y^T \Lambda y = \max_{\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1} y^T \Lambda y = \max_{\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1} (I_1 y_1^2 + I_2 y_2^2 + \mathbf{L} + I_n y_n^2)$

$\leq I_1 \max_{\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1} \sum_{i=1}^n y_i^2 = I_1$; 另一方面, 当取 $y_0 = e_1 = (1, 0, \mathbf{L}, 0)^T$, 则 $\|y_0\|=1$, 令 $x_0 = Qy_0$, 则 $\|x_0\|=1$

且二次型 $f(x)$ 在 x_0 处的值为 $f(x_0) = x_0^T A x_0 = y_0^T Q^T A Q y_0 = y_0^T \Lambda y_0 = I_1$;

此式说明二次型在条件 $\|x\|=1$ 下确可取得 I_1 。综合以上两个方面有 $\max_{\|x\|=1} f(x) = \max_{\|x\|=1} x^T A x = I_1$

✓ 证明对称阵 A 为正定的充要条件是存在可逆矩阵 U , 使 $A = U^T U$ 即 A 与 E 合同, $P_{\text{教材140, 33}}$

充分性: 已知存在可逆矩阵 U , 使 $A = U^T U$, 任取 $0 \neq x \in R^n$, 必有 $Ux \neq 0$; 否则 $x \neq 0$ 并且对应

于矩阵 A 的二次型在该处的值 $f(x) = x^T A x = x^T U^T U x = [Ux, Ux] = \|Ux\|^2 > 0$ 即对应于矩阵 A 的二次型是正

定的, 从而根据定义知 A 是正定矩阵

必要性: 因 A 是对称阵, 故存在正交阵 Q , 使 $Q^T A Q = \Lambda = \text{diag}(I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n)$ 其中 $I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n$ 是 A 的特征值

已知 A 为正定阵。则 $I_1, I_2, \mathbf{L}, I_n$ 均大于 0, 记对对角阵 $\sqrt{\Lambda} = \text{diag}(\sqrt{I_1}, \sqrt{I_2}, \mathbf{L}, \sqrt{I_n})$ 显然有 $\sqrt{\Lambda} \sqrt{\Lambda} = \Lambda$ 从而

有 $A = Q \Lambda Q^T = Q \sqrt{\Lambda} \sqrt{\Lambda} Q^T = Q \sqrt{\Lambda} (Q \sqrt{\Lambda})^T$ 令 $U = (Q \sqrt{\Lambda})^T$ 显然, U 是 n 阶可逆矩阵, 且有上式得 $A = U^T U$

✓ 实二次型 $f = x^T A x$ 为正定的充分必要条件是: 它的标准形中的 n 个系数全为正。 $P_{\text{教材136, 定理10}}$

证: 设可逆变换 $x = Cy$ 使 $f(x) = f(Cy) = \sum_{i=1}^n k_i y_i^2$

先证充分性. 设 $k_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 任给 $x \neq 0$, 则 $y = C^{-1}x \neq 0$, 故 $f(x) = \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 > 0$

再证必要性. (用反证法) 假设有 $k_s \leq 0$, 则当 $y = e_s$ (单位坐标向量) 时, $f(Ce_s) = k_s \leq 0$

显然, $Ce_s \neq 0$, 这与 f 为正定相矛盾。因而 $k_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$

考研数学矩阵的 8 大秩及其证明

$$(1) \quad 0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$$

由于在矩阵中取子式必须是方阵，故矩阵的秩不可能大于行列数中的较小值， $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$

$$(2) \quad \begin{cases} \bullet \text{Max}\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B) \\ \bullet \xrightarrow{R(B) \text{ 为列向量} \Leftrightarrow R(B) \equiv 1} R(A) \leq R(A, B) \leq R(A) + 1 \\ \bullet R(A_{m \times n}, E_m) \equiv m \end{cases} \quad P_{\text{教材}71}$$

证明：因为矩阵 A 的最高阶非零子式总是 (A, B) 的非零子式，所以有： $R(A, B) \geq R(A)$

同理： $R(A, B) \geq R(B)$ 两式合起来，即为： $\text{Max}\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B)$

设 $R(A)=r, R(B)=t$ ，把 A, B 分别做列变换化成列阶梯 \tilde{A}, \tilde{B} 如： $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 就是列阶梯形

\tilde{A}, \tilde{B} 中分别含用 r, t 个非零列； $\tilde{a}_1 \mathbf{L} \tilde{a}_r, \tilde{b}_1 \mathbf{L} \tilde{b}_t$ 分别表示非全零列，则有：

$$\begin{cases} A \xrightarrow{c \text{ (表示列变换)}} \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \mathbf{L} \tilde{a}_r & 0 \mathbf{L} 0 \end{pmatrix} \\ B \xrightarrow{c \text{ (表示列变换)}} \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \mathbf{L} \tilde{b}_t & 0 \mathbf{L} 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow (A, B) \xrightarrow{c} (\tilde{A}, \tilde{B})$$

由于初等变换后互为等价矩阵，故 $R(A, B) = R(\tilde{A}, \tilde{B})$

而矩阵 (\tilde{A}, \tilde{B}) 只含有 $r+t$ 个非全零列，所以： $R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq r+t \Rightarrow R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq R(A) + R(B)$ 。

综合上述得： $\text{Max}\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$

●特别地：如 $B=b$ 为列向量，则 $R(b) \equiv 1 \Rightarrow R(A) \leq R(A, B) \leq R(A) + 1$ 。

●如 $B=E$ ，设 $R(A, B) = R(A_{m \times n}, E_m)$ ，则

$$m \geq R(A_{m \times n}, E_m) \geq R(E_m) = m \Rightarrow R(A_{m \times n}, E_m) = m$$

$$(3) \quad R(A+B) \leq R(A) + R(B)$$

不妨设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 对矩阵 $(A+B, B)$ 做列变换 $c_i - c_j (i=1, \sim n)$, 即得
证明: $(A+B, B) \xrightarrow{C} (A, B)$; 于是 $R(A+B) \leq R(A+B, B) = R(A, B) \leq R(A) + R(B)$

$$(4) \begin{cases} \bullet R(A) + R(B) - n \leq R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\} \leq n \quad (n \text{ 为 } A \text{ 的列数}) \\ \bullet \xrightarrow{n \text{ 阶方阵 } A=B} 2R(A) - n \leq R(A^2) \leq R(A) \leq n \end{cases}$$

证明: (1) 设 $AB=C \Rightarrow B$ 是 $AX=C$ 的解 $\Rightarrow R(A) = R(A, C) \geq R(C)$

$$\begin{aligned} \text{又, } B^T A^T = C^T &\Rightarrow R(B^T) = R(B^T, C^T) \geq R(C^T) \xrightarrow{R(B^T)=R(B)} R(B) \geq R(C) \\ &\Rightarrow R(C) = R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\} \leq n \end{aligned}$$

(2) 证明:

$$\text{令 } R(A)=r, R(B)=s. \text{ 故存在有可逆矩 } P_1, P_2, Q_1, Q_2, \text{ 使得 } P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} Er & O \\ O & O \end{bmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} Es & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$\text{于是有 } P_1 A B Q_2 = P_1 A Q_1 (Q_1^{-1} P_2^{-1}) P_2 B Q_2, \text{ 并令 } C = Q_1^{-1} P_2^{-1} = (C_{ij})_{n \times n},$$

$$\text{有 } P_1 A B Q_2 = \begin{bmatrix} Er & O \\ O & O \end{bmatrix} (C_{ij})_{n \times n} \begin{bmatrix} Es & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{r \times s} & O \\ O & O \end{bmatrix} = C^*$$

根据任意矩阵每减少一行或一列, 其秩减少不超过 1; 又 $R(C)=n$,

$$\begin{aligned} R(C^*) &\geq n - (n-r) - (n-s) = r+s-n, \text{ 又有 } R(AB) = R(P_1 A B Q_2) = R(C^*), \text{ 所以有} \\ R(AB) &\geq R(A) + R(B) - n \end{aligned}$$

$$\text{分块矩阵法: } \begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \text{ 所以}$$

$$R(A) + R(B) \leq R \begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = n + R(AB); \text{ 即 } R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$$

$$(5) \boxed{A_{m \times n} B_{n \times l} = 0 \Rightarrow R(A) + R(B) \leq n}$$

证明: 设 $B = (b_1, b_2, \mathbf{L}, b_l)$, 则

$$A(b_1, b_2, \mathbf{L}, b_l) = (0, 0, \mathbf{L}, 0) \Rightarrow Ab_i = 0 \quad (i=1, 2, \mathbf{L}, l)$$

上式说明 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $AX=0$ 的解。如果 $AX=0$ 的解空间为 S , 其维数就是 $R(S) = n - R(A)$. 显然, $b_i \in S \Rightarrow R(B) = R[(b_1, b_2, \mathbf{L}, b_l)] \leq R(S) = n - R(A) \Rightarrow R(A) + R(B) \leq n$

$$(6) \boxed{R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}}$$

证明：分三种情况

$$(1) R(A)=n, A \text{ 满秩、可逆}, A^*A=|A|E \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1} \neq 0, A^* \text{ 可逆}, R(A^*)=n$$

(2) $R(A)=n-1$, 说明 A 中至少有一个元素的代数余子式不为零, 即存在

$$A_{ij} \neq 0 \Rightarrow A^* \neq 0 \Rightarrow R(A^*) \geq 1$$

又 $R(A)=n-1$, A 不可逆, 则

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \Rightarrow A^*A = 0 \Rightarrow R(A^*) + R(A) \leq n \Rightarrow R(A^*) \leq 1 \\ &\Rightarrow R(A^*) = 1 \end{aligned}$$

(3) $R(A) < n-1$ 时, 由矩阵秩的定义知, A 得所有 $n-1$ 阶子式为零 $\Rightarrow A_{ij} \equiv 0$

$$A^* = (A_{ij})^T = 0 \Rightarrow R(A^*) = 0$$

评注 $R(A)=n-1$, 则 $R\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} = R(A) + R(A^*) = (n-1) + 1 = n$ 。

$$(7) \boxed{R(A^T A) = R(AA^T) = R(A)}$$

证明：考察下列两个齐次方程组

$$A^T A X = 0 \quad \mathbf{L L L L L L L L} \quad (1)$$

$$A X = 0 \quad \mathbf{L L L L L L L L} \quad (2)$$

显然, (2) 的解全部是方程 (1) 解, 因此, (2) 的基础解系包含于 (1) 的基础解系, 即

$$n - R(A) \leq n - R(A^T A) \Rightarrow R(A^T A) \leq R(A)$$

$$\text{另一方面 } A^T A X = 0 \Rightarrow X^T (A^T A X) = 0 \Rightarrow (A X)^T (A X) = 0 \Leftrightarrow A X = 0$$

因此, (1) 的基础解系包含于 (2) 的基础解系, 即

$$n - R(A) \geq n - R(A^T A) \Rightarrow R(A^T A) \geq R(A) \therefore R(A) \geq R(A^T A) \geq R(A) \Rightarrow R(A^T A) = R(A)$$

$$\text{而 } R(AA^T) = R\left[(A^T A)^T\right] = R(A^T A) = R(A)$$

$$(8) \boxed{R\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq R(A) + R(B) \quad (C=0 \text{ 时等号成立})}$$

证明：设 $R(A)=r, R(B)=s$, 则：

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{初等行列混合变换}} \left[\begin{array}{cc|cc} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_1 & C_2 & E_s & 0 \\ C_3 & C_4 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} E_r & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_4 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} E_r & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & E_s & C_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & C_4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} E_r & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & E_s & C_2 & 0 \\ \hline C_3 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow R \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R(E_r) + R(E_s) + R(C_4) \geq R(E_r) + R(E_s) = r + t \\
 (C_4 = 0 \text{ 时等号成立})
 \end{aligned}$$

$$R \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq R(A) + R(B) \quad (C = 0 \text{ 时等号成立})$$

评注 下面 3 个关于秩的公式也常常使用。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & r(A^m) = r(A^n) \quad m \neq n; & (b) \quad & r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) \\
 (c) \quad & G \text{ 为列满秩}; H \text{ 为行满秩} \Rightarrow r(GA) = r(AH) = r(A)
 \end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) \\
 \text{只需证: } & r(ABC) + r(B) \geq r(AB) + r(BC); \text{ 由于 } \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \\
 \text{所以} & r(ABC) + r(B) = r \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(BC) \text{ 于是有: } r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)
 \end{aligned}$$