长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）：　高等数学 A（二）　（本部期末）　　　课程代号：0701000215
专业：　本部电气、物电等　　　层次（本、专）：　本科　　　考试方式：闭卷

一、选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 以点 $A(1,1,1)$、$B(5,2,0)$、$C(2,5,0)$、$D(1,2,4)$ 为顶点的四面体体积为（　　）。

A. 12　　B. 8　　C. 4　　D. 3

答案：B。考点：向量积，数量积（也可参考混合积，教材第 22 页例 7）。

解答：由已知条件可得 $\overrightarrow{AB}=(4,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,4,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,3)$，记 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{f}$ 。

由向量积定义，四面体的底面 ΔABC 的面积是 $\frac{1}{2}\left|\vec{f}\right|$，高为 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{f}$ 上的投影，故四面体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\left|\vec{f}\right|\right)\cdot prj_{\vec{f}}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\left|\vec{f}\right|prj_{\vec{f}}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\vec{f}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{6}(3,3,15)\cdot(0,1,3)=\frac{1}{6}(0+3+45)=8\text{ 。}$$

2. 使 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$ 成立的是（　　）。

A. $z=e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$　　B. $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$　　C. $z=e^{-\frac{1}{x}}$　　D. $z=e^{-\frac{1}{y}}$

答案：B。考点：多元函数的偏导数。

解答：容易验证，当 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$ 时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y^2},$$

满足方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$ 。

3. 设 D 是由 $x=y^2$ 、$x=-y^2$ 、$y=1$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=$（　　）。

A. 0　　B. 4　　C. -1　　D. 1

答案：A。考点：二重积分的对称性。

解答：易知 D 关于 y 轴对称，被积函数 $x\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数，故该积分为 0。

4. 设Σ为平面$x=a$、$y=a$、$z=a$（$a>0$）及三个坐标面所围成的立体的表面的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}\left(y^2z-x\right)dydz+\left(z^2x-y\right)dzdx+\left(x^2y-z\right)dxdy=$（　　）。

A. a^3　　　　B. $-a^3$　　　　C. $3a^3$　　　　D. $-3a^3$

答案：D。考点：高斯公式。

解答：$P=y^2z-x$，$Q=z^2x-y$，$R=x^2y-z$，记$\sum$所围闭区域为Ω，则

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left(y^2z-x\right)dydz+\left(z^2x-y\right)dzdx+\left(x^2y-z\right)dxdy\overset{Gauss}{=}\iiint\limits_{\Omega}\left(-1-1-1\right)dv$$

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}dv=-3V_{\Omega}=-3a^3。$$

5. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 收敛　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n u_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$ 收敛　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ 收敛

答案：D。考点：收敛级数的基本性质（教材第 254-256 页），常数项级数（正项级数、交错级数、任意项级数）敛散性的判定。

解答：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_n$（收敛级数的基本性质 1）和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_{n+1}$（收敛级数的基本性质 3 和性质 1）均是收敛的，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_{n+1}$即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$是收敛的（收敛级数的基本性质 2）。而 A、B 可举反例$u_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n}$；C 可举反例$u_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$。

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 设函数$F\left(u,v\right)$具有一阶连续偏导数，$F_u\left(0,1\right)=2$，$F_v\left(0,1\right)=-3$，则曲面$F\left(x-y+z,xy-yz+zx\right)=0$在点$\left(2,1,-1\right)$处的切平面方程为____________________。

答案：$2x-11y-z+6=0$。考点：多元函数微分法在几何上的应用。

解答：由已知条件可知F是u、v的函数，而u、v均是x、y、z的函数，则

$$F_x = F_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = F_u + (y+z)F_v,$$

$$F_y = F_u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -F_u + (x-z)F_v$$

$$F_z = F_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + F_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = F_u + (x-y)F_v。$$

故切平面的法向量$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$，$\vec{n}\big|_{(2,1,-1)} = (2,-11,-1)$，于是切平面方程为

$$2(x-2) - 11(y-1) - (z+1) = 0 \text{ 或 } 2x - 11y - z + 6 = 0。$$

2. 设函数$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则$df(1,1,1) =$__________。

答案：$dx - dy$。考点：多元函数的全微分。

解答：$f_x = \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1} \cdot \frac{1}{y}$，$f_y = \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$，$f_z = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \ln\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$，则

$$f_x(1,1,1) = 1，f_y(1,1,1) = -1，f_z(1,1,1) = 0。$$

$$df(1,1,1) = f_x(1,1,1)dx + f_y(1,1,1)dy + f_z(1,1,1)dz = dx - dy。$$

3. 将二次积分$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$化为极坐标形式的二次积分为_______________。

答案：$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$。考点：二重积分在极坐标系下的计算。

解答：由二次积分的上、下限可知积分区域$D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}\right\}$。从原点出发作射线穿过$D$的内部时，原点（$\rho = 0$）穿入，抛物线$y = \sqrt{x}$（$\rho = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$）穿出，则

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho。$$

4. 设Ω是由$xy = z$、$x + y = 1$、$z = 0$所围成的闭区域，则把三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$化为积分次序为$z \to y \to x$的三次积分是________________。

答案：$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f\left(x,y,z\right)dz$ 。考点：三重积分在直角坐标系下的计算。

解答：(1)联立所有方程后消去 z 可得 Ω 在 xoy 面上的投影 D_{xy} 是由 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成的闭区域；（2）在 D_{xy} 内任选一点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，比较 $z=xy$ 和 $z=0$，可得 $0\le z\le xy$ 。综合（1）、（2）可得 $\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f\left(x,y,z\right)dz$ 。

5. 将函数 $f\left(x\right)=\ln\left(2+3x\right)$ 展开成 x 的幂级数为________________。

答案：$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot 3^n}{n\cdot 2^n}x^n$ ， $x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$。考点：函数展开成幂级数。

解答：
$$f\left(x\right)=\ln\left(2+3x\right)=\ln 2\left(1+\frac{3x}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{3x}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(\frac{3x}{2}\right)^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot 3^n}{n\cdot 2^n}x^n\text{ ，}-1<\frac{3x}{2}\le 1\text{或}-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3}\text{。}$$

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 设 $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

考点：多元隐函数求导法。

解答：在方程 $e^z-xyz=0$ 的两边同时微分，可得

$$de^z-d\left(xyz\right)=0\text{，}\quad e^z dz-\left(yzdx+xzdy+xydz\right)=0\text{，}$$

$$\left(e^z-xy\right)dz=yzdx+xzdy\text{ ，}\quad dz=\frac{yz}{e^z-xy}dx+\frac{xz}{e^z-xy}dy\text{，}$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$ 。

2. 求函数 $f\left(x,y\right)=\left(6x-x^2\right)\left(4y-y^2\right)$ 的极值。

考点：多元函数的极值。

解答：$\begin{cases} f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0 \\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0 \end{cases}$，得驻点$(3,2)$、$(0,0)$、$(6,0)$、$(0,4)$、$(6,4)$。又

$A=f_{xx}=-2(4y-y^2)$，$B=f_{xy}=(6-2x)(4-2y)$，$C=f_{yy}=-2(6x-x^2)$，则

（1）点$(3,2)$处，$A=-8$，$B=0$，$C=-18$，$\Delta=AC-B^2>0$且$A<0$，故$(3,2)$是该函数的极大值点，极大值$z(3,2)=36$；

（2）点$(0,0)$处，$A=0$，$B=24$，$C=0$，$\Delta=AC-B^2<0$，故$(0,0)$不是该函数的极值点；

（3）点$(6,0)$处，$A=0$，$B=-24$，$C=0$，$\Delta=AC-B^2<0$，故$(6,0)$不是该函数的极值点；

（4）点$(0,4)$处，$A=0$，$B=-24$，$C=0$，$\Delta=AC-B^2<0$，故$(0,4)$不是该函数的极值点；

（5）点$(6,4)$处，$A=0$，$B=24$，$C=0$，$\Delta=AC-B^2<0$，故$(6,4)$不是该函数的极值点。

综上，该函数只有一个极值点，且极大值$z(3,2)=36$。

3. 计算$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是在圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$上由点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧。

考点：平面曲线积分与路径无关的条件，对坐标的曲线积分的计算（方程代入、起点到终点积分）。

解答：$P=x^2-y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，易知$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则该曲线积分与路径无关。

记L_1为$(0,0)$沿直线$y=0$到$(1,0)$，L_2为$(1,0)$沿直线$x=1$到$(1,1)$，则

$$\begin{aligned}&\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy\\ &=\int_{L_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{L_2}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy\\ &=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy=\frac{1}{3}-\int_0^1 dy-\int_0^1\sin^2 ydy\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 2y)\,dy=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\sin 2y\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2\ 。$$

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分。

考点：对面积的曲面积分的计算（方程代入、投影上积分）。

解答：易知 $\sum$ 的方程为，$z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$，其在 xoy 面上的投影 D_{xy} 由 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$、$x=0$、$y=0$ 围成， 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS=\iint\limits_{D_{xy}}\left(2x+\frac{4}{3}y+4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=4\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}\,dxdy=4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot A_{D_{xy}}=4\sqrt{61}\ 。$$

5. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-n)}{2^n}$ 的和。

考点：幂级数的和函数。

解答：构造幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n-1)}{2^n}x^{n-2}\overset{记}{=}s(x)$，则

$$\int_0^x s(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n-1)}{2^n}x^{n-2}dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{n(n-1)}{2^n}x^{n-2}dx=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n-1}\ ,$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x s(x)\,dx\right)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n-1}dx=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\frac{\frac{x^2}{4}}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{x^2}{4+2x}\ ,$$

其中 $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$ 或 $x\in(-2,2)$。于是 $s(x)=\left(\frac{x^2}{4+2x}\right)''=\frac{32}{(4+2x)^3}$，注意 $x=1$ 时级数是收敛的，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-n)}{2^n}=s(1)=\frac{32}{216}=\frac{4}{27}$。

四、证明题（本题 10 分，共计 1 小题）

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{4+n^5x^2}$在$x\in(-\infty,+\infty)$内绝对收敛。

考点：绝对收敛与条件收敛。

证明：易知该级数的绝对值级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|x|}{4+n^5x^2}$，则

（1）当$x\neq 0$时，将绝对值级数与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$作比较，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|}{4+n^5x^2}\Big/\frac{1}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5|x|}{4+n^5x^2}=\frac{1}{|x|}\text{（有限的正数）},$$

由比较审敛法的极限形式可知两级数同收敛，故原级数绝对收敛；

（2）当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{4+n^5x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}0$，显然绝对收敛。

综合（1）、（2）可知，对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{4+n^5x^2}$都是绝对收敛的。