长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：线性代数　　　　　　　　试卷编号：09

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. D　　2. C　　3. C　　4. D　　5. A

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. -4　　2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$　　3. 3　　4. 1　　5. $\frac{1}{4}(A-E)$

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 由已知可得$\alpha=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$或$\alpha=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha^T\alpha=14$ ……………………………..…(4 分)

$$A^{100}=(\alpha\alpha^T)^{100}=\alpha(\alpha^T\alpha)^{99}\alpha^T=14^{99}\alpha\alpha^T=14^{99}\begin{bmatrix}9&6&3\\6&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}$$ ……………..…(10 分)

2. $A=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&2&-1&4\\1&7&-4&11\\5&5&-2&13\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1/3&0&5/3\\0&-5/3&1&-7/3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ………………..…(5 分)

基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\0\\7\\3\end{pmatrix}$　通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-5\\0\\7\\3\end{pmatrix}$(10 分)

3. $(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\beta)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&-4&a+1&0\\0&0&0&(a+1)(a-1)/4&b\end{bmatrix}$ ………………………..…(6 分)

(1) $\begin{cases}(a+1)(a-1)/4=0\\ b\neq 0\end{cases}$ 即$a=\pm1$，且$b\neq 0$

(2) $(a+1)(a-1)/4\neq 0$，即$a\neq\pm1$，　$b\in R$ ………………………..…(10 分)

4. $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$，$A$的特征值：　2，$b$，$-1$

故$\begin{cases} 2+a=2+b-1 \\ |A|=-2=-2b \end{cases}$，即$a=0$，$b=1$ …………………………..…(5 分)

当 $\lambda=2$ 时，$A-2E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $p_1=\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda=1$ 时，$A-2E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系：$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$p_2=\frac{\xi_2}{||\xi_2||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda=-1$ 时，$A+E=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$p_3=\frac{\xi_3}{||\xi_3||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P=(p_1 \quad p_2 \quad p_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ …………………………..…(10 分)

5. $|A^*|=-2\times(-1)\times 1\times 4=|A|^{4-1}$，$|A|=2$ …………………………………..…(3 分)

$AA^*=|A|E$，$A=|A|(A^*)^{-1}$，A的特征值为：-1，-2，2，$\frac{1}{2}$， ……….…(6 分)

B的特征值为：-1，2，2，$-\frac{7}{4}$，$|B|=-1\times 2\times 2\times\left(-\frac{7}{4}\right)=7$ ………..…(10 分)

四、证明题（本题总分 10 分）

$A^T=A$ ……………………………………………..…(3 分)

$(B^TAB)^T=B^TA^TB=B^TAB$ ……………..…(8 分)

B^TAB也是对称矩阵 ……………..…..…(10 分)