

长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 C (一)

一、填空题：(本题总分 16 分，每小题 4 分)

1. 已知 $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}$ ，为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则应补充定义 $f(0)=\underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + b n + 5}{3n - 2} = 2$ ，则 $a=\underline{\hspace{2cm}}$, $b=\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\cos x$ ，则 $f'(x)=\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题：(本题总分 16 分，每小题 4 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = (\quad)$
A. $-f'(x_0)$ B. $f'(-x_0)$ C. $f'(x_0)$ D. $2f'(x_0)$
2. 下列函数在 $[1, e]$ 上满足拉格朗日定理条件的是()
A. $\ln \ln x$ B. $\frac{1}{\ln x}$ C. $\ln x$ D. $\ln(2-x)$
3. 根据估值定理，积分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{10+3\cos x} dx$ 的值在区间() 内
A. $[7, 13]$ B. $[0, 2\pi]$ C. $\left[\frac{1}{13}, \frac{1}{7}\right]$ D. $\left[\frac{2\pi}{13}, \frac{2\pi}{7}\right]$
4. 函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ 的极大值是()
A. 10 B. 11 C. 17 D. 9

三、计算题：(本题总分 64 分，每小题 8 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.
2. 若隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y^2) = \arctan \frac{y}{x}$ 确定，求 $y'(x)$.
3. 设曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \\ y = (e^t + e^{-t})^2 \end{cases}$ ，求曲线 C 上对应于 $t = \ln 2$ 的点的切线方程.
4. 求 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
5. 求 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.
6. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3x} \int_0^x t e^{3t} dt}{2x}$.
7. 求 $\int x \cos^2 x dx$.
8. 已知曲线 $y = 2x - x^2$ 与 $g(x) = 2ax$ 围成的图形面积等于 $\frac{32}{3}$ ，求常数 a .

四、证明题：(本题总分 4 分，每小题 4 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f'(x) \leq 0$, 记 $F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$, 证明: 在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 A (一)

一、选择题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为()
- A. 1 B. ∞ C. 不存在 D. 0
2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ b + \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 a, b 的值为()
- A. $a=2, b=1$ B. $a=1, b=2$ C. $a=-2, b=1$ D. $a=2, b=-1$
3. 设函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 在()
- A. $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加 B. $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少
- C. $(-1, 1)$ 上单调增加, 其余区间单调减少
- D. $(-1, 1)$ 上单调减少, 其余区间单调增加
4. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$ ()
- A. $\frac{1}{2} f(x^2)$ B. $x f(x^2)$ C. $2x f(x^2)$ D. $-2x f(x^2)$
5. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解可以是()
- A. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$ B. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$
- C. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$ D. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

二、填空题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f'''(0) =$ _____.
2. 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 _____.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$ _____.
4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x| \right) dx =$ _____.

5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: (本题总分 60 分, 每小题 10 分)

1. 求函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + b x \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a , b , k .

2. 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $y'(x)$.

3. 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

4. 证明: $x \arctan x \geq \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

5. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ ($x \geq 0$) 上点 A 做切线, 使该切线与曲线及 x 轴围成的平面图形 D 的面积等于 $\frac{3}{4}$.

(1) 求 A 点的坐标;

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

6. 设 $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 求 $f(x)$.

长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 B (一)

一、选择题: (本题总分 16 分, 每小题 4 分)

1. 设函数 $f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$, 则 $f(x-1)$ 的值域为()

- A. $[0,2)$ B. $[0,3)$ C. $[0,2]$ D. $[0,3]$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 要 $1 - \cos x$ 与等价, 则 a 应等于()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ ()

- A. $f'(-x_0)$ B. $-f'(x_0)$ C. $f'(x_0)$ D. $2f'(x_0)$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 在 $(-1,1)$ 内可导, 且 $|f'(x)| \leq M$, $f(0) = 0$, 则必有()

- A. $|f(x)| \geq M$ B. $|f(x)| > M$ C. $|f(x)| \leq M$ D. $|f(x)| < M$

二、填空题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 设 $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} =$ _____.

2. 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 具有一阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $y = \ln f(x)$ 且 $f''(x)$ 存在, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 当 $a > 0$ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 微分方程 $y' = \frac{2y}{x}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题: (本题总分 30 分, 每小题 6 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

2. 求函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间.

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$.

4. 求定积分 $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$, 其中 $a > 0$.

5. 求一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \cos x$ 满足条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$ 的特解.

四、解答题: (本题总分 20 分, 每小题 10 分)

1. 已知一平面图形由曲线 $x=0, x=1, y=\sqrt{x}$ 以及 x 轴围成, 求(1) 此平面图形的面积; (2) 此平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

2. 求微分方程 $y'' + y = e^x$ 的通解.

五、应用题: (本题 9 分)

已知制作一个背包的成本为 40 元, 如果一个背包的售出价为 x 元, 售出的背包数由 $n = -\frac{a}{x-40} + b(80-x)$ 给出, 其中 a, b 为正常数, 问什么样的售出价格能带来最大利润?

六、证明题: (本题 5 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x) \leq 0$, 记 $F(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a}$, 证明: 在 (a,b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

长沙理工大学考试试卷 2016-2017 学年本部高数 A (一)

一、选择题: (本题总分 16 分, 每小题 4 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{x+3}$ 的值为 ()
- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. 不存在

2. 下列函数 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上满足罗尔中值定理条件的是()

A. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ B. $f(x) = x^2 |x|$ C. $f(x) = \arccos x$ D. $f(x) = \cot \frac{\pi x}{2}$

3. 下列函数中, 哪一个不是 $\sin 2x$ 的原函数 ()

A. $\sin^2 x$ B. $-\cos^2 x$ C. $-\cos 2x$ D. $5\sin^2 x + 4\cos^2 x$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\frac{d}{dx} \left[x \int_a^b f(x) dx \right] =$ ()

A. $\int_a^b f(x) dx$ B. $bf(b) - af(a)$

C. $x[f(b) - f(a)] + \int_a^b f(x) dx$ D. $\int_a^b f(x) dx + xf(x)$

二、填空题: (本题总分 16 分, 每小题 4 分)

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)} + \arcsin \frac{x-1}{3}$ 的定义域为 _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} =$ _____.

3. 设 $y = \pi^x + x^a$, 则 $y' =$ _____.

4. 若 $a < 0$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ _____.

三、计算题: (本题总分 50 分, 每小题 10 分)

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x \cos x}}{x^3}$.

2. 设参数方程 $\begin{cases} x = \ln(\sin t + \sqrt{1 + \sin^2 t}) \\ y = \sqrt{1 + \sin^2 t} \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. 计算不定积分 $\int 2x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$, 其中 $|x| < 1$.

4. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^9 \cos x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$.

5. 求函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间与极值.

四、应用题: (本题 10 分)

在曲线 $y = x^2 + 1$ 上求一点 M , 使它到点 $M_0(5, 0)$ 的距离最小.

五、证明题: (本题 8 分)

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 可导且 $f'(x)$ 单调递增, $x_0 \in (a, b)$, 记 $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$

证明: $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内也单调递增.

长沙理工大学考试试卷

2016-2017 学年本部高数 B (一)

一、填空题：(本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. 如果 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 是等价无穷小，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的可去间断点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 函数 $y = xe^{-x}$ 的拐点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ ，则 $dy|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 微分方程 $y'' + 8y' + 15y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、求下列极限：(本题总分 12 分，每小题 6 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$

三、求下列导数：(本题总分 12 分，每小题 6 分)

1. 设 $y = e^{-x} \sin x$ ，求 y'' ；

2. 已知 $y = \tan(x+y)$ ，求 y' .

四、求下列积分：(本题总分 18 分，每小题 6 分)

1. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$

2. $\int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx;$

3. $\int_{-2}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx.$

五、解答题：(本题总分 30 分，每小题 10 分)

1. 当 a 为何值时， $y = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处有极值？求此极值，并说明是极大值还是极小值.

2. 求抛物线 $y^2 = 2x$ 与其在点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足条件 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解.

六、证明题：(本题 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，证明： $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$