长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：　高等代数　　　　　　　　　　　　试卷编号：2

一　填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．10　2．　a 不等于 2 且 a 不等于-1　3. $-\frac{A+3E}{12}$　**4　－243**

5. a=1,b=-2

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1.解 从第 n 行起，每一行都减去它的前一行，然后再把各列加到第 1 列，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & n \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}$$　（10 分）

易求得(I)的基础解系为 $\eta_1=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \eta_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$,

令方程组(I)与(II)的通解相等即

$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=k_3(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$

得到关于k_1，k_2，k_3，k_4的一个方程组。

$\begin{cases} k_2-k_3=0 \\ k_1+2k_2-k_3=0 \\ k_1+2k_2-k_4=0 \\ k_2-k_4=0 \end{cases}$ 可求其通解为$\mathrm{k}(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,将$k_1=-\mathrm{k}, k_2=\mathrm{k}$代入(II)的通解可得非零公共解$\mathrm{k}(1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{k}\neq 0$.

3.解 $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4})=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{10} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a}+\mathbf{2} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a}-\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

（5 分）

$\therefore$当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$ 时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4})=\mathbf{3}<\mathbf{4}$ 向量组 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4}$线性相关.

当 $a\neq 2$ 时，$R(a_1,a_2,a_3,a_4)=4$，向量组 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4}$ 线性无关.

（10 分）

4 $f(x)=(x-1)^4-2(x-1)^3+3(x-1)-4$ 。（9 分）

5. $\overline{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$

$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ （10 分）

6 $(f(x),f'(x))=(x-2)^2$，所以 $x-2$ 是 $f(x)$ 的三重因式。（10 分）

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

（1）证明：略。

（2）证明

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -E \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$