长沙理工大学考试试卷

试卷编号 3 拟题教研室（或教师）签名______ 教研室主任签名______

课程名称（含档次）复变函数与积分变换 (C) 课程代号 0701000135

专 业 各专业 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1．方程 $z=\dfrac{i}{t^2}+t^2$（t 为实数）所表示的曲线是（　　）.

A. 双曲线 $xy=1$　　B. 双曲线 $xy=1$ 位于第一象限的那部分

C. 直线 $y=x$　　D. 直线 $y=x$ 位于第一象限的那部分

2．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则下列等式中错误的是（　　）.

A. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　B. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$

C. $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　D. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

3．设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<R$ 内解析，k 为正整数，则 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^k},0\right]=$（　　）.

A. $(k-1)!a_{k-1}$　　B. $k!a_k$　　C. a_k　　D. a_{k-1}

4．$z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的（　　）.

A. 可去奇点　　B. 本性奇点　　C. 三级极点　　D. 四级极点

5．若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z=1+4i$ 处收敛，则该级数在 $z=4$ 处的敛散性为（　　）.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 不能确定

二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 复数 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 的模为______，辐角主值为______。

2. $\oint\limits_{|z|=2} e^z(z^2+z+\cos z)dz=$________。

3. $\operatorname{Res}[\frac{\sin z}{z},0]=$________

4. $\lim\limits_{z\to(1+i)}\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=$________。

5. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 4^n}z^n$的收敛半径为________.

三、计算下列各式的值（本题总分20分，每小题5分）

1. $\exp[\frac{1+i\pi}{4}]$； 2. $(-i)^{(-\sqrt{2})}$； 3. $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$， 4. $Ln(-1+i)$

四、解下列各题（本题总分21分，每小题7分）

1. 将函数$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$，在圆环$0<|z+i|<2$内展成罗朗（Laurent）级数；

2. 设$f(z)=2(x-1)y+iv(x,y)$解析,求$f(z)$,使$f(2)=-i$。

3. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$的收敛半径与和函数。

五. 计算下列积分(本题总分29分)

1. $\int\limits_c |z|idz$，其中c为从$-i$到i的右半圆周$|z|=1$，(7分)

2. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz$. (7分)

3. $\oint\limits_{|z|=3}\frac{Cos\pi z}{z^2-z-2}dz$ (7分)

4. $\int_0^{+\infty}\frac{xSinx}{x^2+4}dx$ (8分)

（**注**：本卷所有的闭路积分中积分曲线均为正向！）

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：复变函数与积分变换（C）　　　　试卷编号：3

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1.B　2.B　3.D　4.C　5.A

二. 填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 1，$\frac{2\pi}{3}$；　2. 0；　3. 0；　4. $\frac{3-i}{4}$；　5. $R=4$；

三. 计算下列复数的值（本题总分 20 分，每小题 5 分）

1. $\exp(\frac{1+i\pi}{4})=\exp(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}i)=e^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=e^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ (5 分)

2. $(-i)^{-\sqrt{2}}=e^{-\sqrt{2}Ln(-i)}=e^{-i\sqrt{2}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)},(k=0,\pm1..)$(5 分)

3. $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}=\sqrt[3]{2}(Cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{3}+iSin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{3}),(k=0,1,2,.)$ (5 分)

4. $Ln(-1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi),(k=0,\pm1.....)$ (5 分)

四、解下列各题（本题总分２１分，每小题７分）

1. $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$ **(2 分)**　$\frac{1}{z-i}=-\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}=-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z+i}{2i})^k$ **(6 分)**

$$f(z)=-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z+i}{2i})^{k-1}\quad(7\text{ 分})$$

2. **(10′)** 解：设 $z=x+iy,u(x,y)=2(x-1)y$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y,\frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$。**(3 分)**

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2y-2i(x-1)=-2iz+2\text{。}\mathbf{(4\text{ 分})}$$

故　$f(z)=-iz^2+2z+C,C$为复常数。**(6 分)**

又 $f(2)=-i$，可得 $C=3i-4$.因此，　$f(z)=-iz^2+2z+3i-4$.(7 分)

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为R＝1，（2分）和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\cdot\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$，

由于 $\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z nz^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ （$|z|<1$） （5分）

所以 $S(x) = z\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$ （$|z|<1$） （7分）

五．计算下列积分(本题总分29分)

1．曲线方程： $z=e^{i\theta}....(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ ....(3分)

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta}id\theta = -2$ （7分）

2. 函数 $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处不解析， e^z 在圆周 $|z|=2$ 内处处解析（4分）

由柯西积分导数公式有 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(e^z)'\big|_{z=1} = 2e\pi i$ （7分）

3. $I=2\pi i(\mathrm{Re}\,s(f(z),2)+\mathrm{Re}\,s(f(z),-1))$ (4分)

$\mathrm{Re}\,s(f(z),2)=\frac{1}{3},\mathrm{Re}\,s(f(z),-1)=\frac{1}{3}$ （6分）

$I=\frac{4\pi i}{3}$ （7分）

4. $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xSinx}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+4}dx$ (3分)

设 $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+4}$， $f(z)$ 在上半平面仅有一个一级极点 $2i$， （5分）

$\mathrm{Re}\,s(f(z),2i)=\frac{1}{2}e^{-2}$ （7分）

$I=\frac{\pi}{2}e^{-2}$ （8分）