长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）： 高等数学 A（二） （本部期末） 课程代号：0701000219

专业： 电气、交通、电子信息等 层次（本、专）： 本科 考试方式：闭卷

一、单选题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 两平行平面 $Ax+By+Cz=D_1$ 与 $Ax+By+Cz=D_2$ 之间的距离为（ ）。

A. $\left||D_2|-|D_1|\right|$ B. $|D_2-D_1|$ C. $\dfrac{\left||D_2|-|D_1|\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ D. $\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

答案：D。考点：点到平面的距离。

解答：记 $Ax+By+Cz-D_1=0$ 为 π_1， $Ax+By+Cz-D_2=0$ 为 π_2，则两平行平面之间的距离即 π_1 上的任意一点到 π_2 的距离。$\forall\ P(x_0,y_0,z_0)\in\pi_1$，则 $Ax_0+By_0+Cz_0=D_1$。由点到平面的距离公式，有

$$P\text{ 到 }\pi_2\text{ 的距离 } d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\text{。}$$

2. 考虑二元函数的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续； ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微； ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在；

若用“ $A\Rightarrow B$ ”表示可由性质 A 推出 B，则有（ ）。

A. ②⇒③⇒① B. ③⇒②⇒① C. ③⇒④⇒① D. ③⇒①⇒④

答案：A。考点：多元函数的连续、可导、可微、偏导连续之间的关系。

解答：详情可参考课件中这些概念之间的相互关系图。对于此题，B 中③⇒②错误，C 中④⇒①错误，D 中①⇒④错误。

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} xdx$ 的积分次序后的结果为（ ）。

A. $\int_0^1 dx\int_y^{\sqrt{y}} xdy$ B. $\int_0^1 dy\int_x^{\sqrt{x}} ydx$ C. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xdy$ D. $\int_0^1 dx\int_x^{x^2} xdy$

答案：C。考点：二重积分的计算。

解答：由已知二次积分的上下限可知，积分区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le 1, y\le x\le\sqrt{y}\right\}$（标准的 Y 型区域，由左往右，穿入的是 $x=y$，穿出的是 $x=\sqrt{y}$）。当平行 y 轴的直线由下往上

穿过 D 的内部时，穿入的是 $y=x^2$，穿出的是 $y=x$，故交换积分次序后 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} xdx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xdy$。

4. 下列结论一定正确的是（　　）。
A. 利用积分曲线的参数方程将对弧长的曲线积分转换为定积分计算时，积分下限一定小于上限。
B. 利用积分曲线的参数方程将对坐标的曲线积分转换为定积分计算时，积分下限一定小于上限。
C. 设曲面 $\sum: z=0,(x,y)\in D$（闭区域），则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y,0)dxdy$。
D. 设曲面 $\sum: z=0,(x,y)\in D$（闭区域），则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=-\iint\limits_{D} f(x,y,0)dxdy$。
答案：A。考点：曲线积分和曲面积分的计算。
解答：对弧长的曲线积分（第一类）的计算方法是“方程代入，小到大积分”，对坐标的曲线积分（第二类）的计算方法是“方程代入，起点到终点积分”，对坐标的曲面积分（第二类）的计算方法是“方程代入，投影上带符号积分”。C、D 错在有向曲面 $\sum$ 没有指定是哪一侧。

5. 设 $a_n\le c_n\le b_n$（$n=1,2,\cdots$），且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$（　　）。

A. 必收敛　　B. 必发散　　C. 未必收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 存在但未必等于 0
答案：A。考点：级数收敛的性质，正项级数的比较审敛法。

解答：因为 $a_n\le c_n\le b_n$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 均为正项级数，且满足 $c_n-a_n\le b_n-a_n$。又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则不等式右端对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 是收敛的。由正项级数的比较审敛法可知不等式左端对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 也是收敛的。再由收敛级数的性质（两收敛级数的和差仍然收敛，不要求两级数是正项级数），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则它们的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 是收敛的。

二、填空题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=5$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=$____________________。

答案：40。考点：两向量的向量积。

解答：$\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=\left|3\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}\right|=\left|-\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}\right|$

$$=\left|-\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b}\right|=4\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\overset{\text{定义}}{=}4\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=4\cdot2\cdot5\cdot\sin\frac{\pi}{2}=40\text{ 。}$$

2. 设$u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则$\frac{\partial u}{\partial y}$在点$(1,1)$处的值为______________。

答案：$-e^{-1}\cos1$。考点：多元函数的偏导数。

解答：$u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)}=e^{-1}\cdot\cos1\cdot(-1)=-e^{-1}\cos1$。

3. 三重积分$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le4}dv=$___________。

答案：$\frac{32}{3}\pi$。考点：三重积分的性质。

解答：由三重积分的性质，有$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le4}dv=V_\Omega=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot2^3=\frac{32}{3}\pi$。

4. 设L为椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$，其周长为$a$，则$\oint\limits_L\left(2xy+4x^2+5y^2\right)ds=$_________。

答案：$20a$。考点：第一类曲线积分的对称性，第一类曲线积分的计算。

解答：因为L关于y轴对称，$2xy$关于x是奇函数，故$\oint\limits_L 2xyds=0$，则

$$\oint\limits_L\left(2xy+4x^2+5y^2\right)ds=\oint\limits_L\left(4x^2+5y^2\right)ds\overset{\begin{cases}x=\sqrt5\cos t\\y=2\sin t\end{cases}}{=}\oint\limits_L\left(20\cos^2t+20\sin^2t\right)ds$$

$$=20\oint\limits_L ds=20\cdot L\text{的周长}=20a\text{ 。}$$

5. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot2^n}$的和等于_________。

答案：$\ln\frac{2}{3}$。考点：幂级数的和函数。

解答：构造幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\overset{令}{=}s(x)$，易知$s(0)=0$，收敛域为$[-1,1)$。于是

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}，\ |x|<1。$$

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)，\ x\in[-1,1)。$$

当$x=-\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}=s\left(-\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{2}{3}$。

三、计算题（共 5 题，每题 10 分，共 50 分）

1. 已知曲线$\Gamma:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1+t^2\end{cases}$上点$P$处的切线与平面$\pi: x+y-z=0$平行，求点$P$的坐标以及曲线在该点处的切线方程。

考点：多元函数微分法在几何上的应用。

解答：由已知条件可知，曲线在点P的切向量$\vec{T}=(x_t',y_t',z_t')=(1,1,2t)$与平面$\pi$的法向量$\vec{n}=(1,1,-1)$垂直，即

$$(1,1,2t)\cdot(1,1,-1)=0，可得t=1，即P(2,1,2)，\vec{T}\Big|_P=(1,1,2)。$$

此时切线方程为$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$。

2. 求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\right\}$上的最大值和最小值。

考点：多元连续的抽象函数的最大值和最小值的求法。

解答：① 内部：$\begin{cases}f_x=2x-2xy^2=2x(1-y^2)=0\\f_y=4y-2x^2y=2y(2-x^2)=0\end{cases}$，得驻点$(\pm\sqrt{2},1)$；

② 边界：

$L_1: x^2+y^2=4$，求$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在条件$x^2+y^2=4$下的极值。消元法，得

$$f(x,y)=x^2+2(4-x^2)-x^2(4-x^2)=x^4-5x^2+8，\ x\in[-2,2]。$$

$$f_x'\left(x,y\right)=4x^3-10x=0\text{，得驻点}\left(0,2\right)\text{、}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\text{和端点}\left(\pm2,0\right)\text{。}$$

$L_2: y=0$，求 $f\left(x,y\right)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在条件 $y=0$ 下的极值。消元法，得

$$f\left(x,y\right)=x^2,\quad x\in\left[-2,2\right]\text{。}$$

$$f_x'\left(x,y\right)=2x=0\text{，得驻点}\left(0,0\right)\text{和端点}\left(\pm2,0\right)\text{。}$$

比较上述各点的函数值：

$$f\left(\pm\sqrt{2},1\right)=2,\quad f\left(0,2\right)=8,\quad f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4},\quad f\left(\pm2,0\right)=4,\quad f\left(0,0\right)=0,$$

可知 $f\left(x,y\right)$ 在 D 上的最大值为 $f\left(0,2\right)=8$，最小值为 $f\left(0,0\right)=0$。

3. 计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2-2\sin x+3y+4\right)d\sigma$。

考点：二重积分的对称性，二重积分的性质，二重积分在极坐标系下的计算。

解答：记 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$。因为 D 关于 y 轴对称，$-2\sin x$ 关于 x 是奇函数，$\iint\limits_D\left(-2\sin x\right)d\sigma=0$；因为 D 关于 x 轴对称，$3y$ 关于 y 是奇函数，$\iint\limits_D\left(3y\right)d\sigma=0$，于是

$$\iint\limits_D\left(x^2-2\sin x+3y+4\right)d\sigma=\iint\limits_D\left(x^2+4\right)d\sigma=\iint\limits_D x^2d\sigma+4\iint\limits_D d\sigma$$

$$\overset{\text{轮换对称性}}{=}\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma+4A_D=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho+4\pi a^2=\frac{\pi}{4}a^4+4\pi a^2\text{。}$$

4. 计算曲线积分 $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AO}}\left(e^x\sin y-3y\right)dx+\left(e^x\cos y-3\right)dy$，其中 $\widehat{AO}$ 为由 $A\left(a,0\right)$ 到 $O\left(0,0\right)$ 经过圆 $x^2+y^2=ax$ 上半部分的路径（$a>0$）。

考点：格林公式。

解答：记 $\widehat{AO}$ 对应路径为 L，由 $O\left(0,0\right)$ 到 $A\left(a,0\right)$ 经过 $y=0$ 的直线路径为 L_1，L 与 L_1 所围的区域记为 D。注意 $P=e^x\sin y-3y$，$Q=e^x\cos y-3$，则

$$\int\limits_{L+L_1}\left(e^x\sin y-3y\right)dx+\left(e^x\cos y-3\right)dy\overset{Green}{=}\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D \left(e^x\cos y-\left(e^x\cos y-3\right)\right)dxdy=3\iint_D dxdy=3\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi a^2,$$

即 $\int_L \left(e^x\sin y-3y\right)dx+\left(e^x\cos y-3\right)dy=\frac{3}{8}\pi a^2-\int_{L_1}\left(e^x\sin y-3y\right)dx+\left(e^x\cos y-3\right)dy$

$$\overset{L_1:y=0}{=}\frac{3}{8}\pi a^2-\int_0^a\left(e^x\sin 0-3\cdot 0\right)dx=\frac{3}{8}\pi a^2-0=\frac{3}{8}\pi a^2。$$

5. 将 $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{4-x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}\left(1\right)$。

考点：函数展开成幂级数。

解答：
$$f\left(x\right)=\frac{x-1}{4-x}=\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{3-\left(x-1\right)}=\frac{x-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}=\frac{x-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^{n+1}}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(x-1\right)^n,$$

其中 $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$，故收敛域为 $\left(-2,4\right)$。又 $a_n=\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{f^{(n)}\left(1\right)}{n!}$，故 $f^{(n)}\left(1\right)=\dfrac{n!}{3^n}$。

注：$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$，对比两边幂级数系数，可得 $a_n=\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$。

四、证明题（共 1 题，每题 10 分，共 10 分）

证明：函数 $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处沿任意方向的方向导数都存在，但是 $f_x\left(0,0\right)$ 不存在。

考点：方向导数和偏导数的定义。

证明：① 在点 $\left(0,0\right)$ 处沿任意方向 l 上任取一点 $\left(\Delta x,\Delta y\right)$，记 $\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$，由方向导数定义，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f\left(0,0\right)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}{\rho}=1$，即函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处沿任意方向的方向导数都存在。

② 由偏导数定义，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\left(\Delta x\right)^{2}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x}$，该极限不存在（左右极限虽然存在但不相等），即 $f_x\left(0,0\right)$ 不存在。