长沙理工大学考试试卷

试卷编号 ____2____ 拟题教研室（或教师）签名______教研室主任签名__________

课程名称（含档次）____高等代数（一）____ 课程代号 001725

专 业 应用数学，信计，统计 层次（本、专） 本 考试方式（开、闭卷） 闭

一 、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1． 设 A 为 3 ×3 矩阵，$|A|=-2$，把 A 按列分块为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 α_j 是 A 的第 j 列，则$|\alpha_3-4\alpha_1,5\alpha_2,\alpha_1|=$________

2. 设方程组$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$有唯一解，则$a$满足的条件是_

3．设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-2A-3E=0$,则$(A-5E)^{-1}=$ ________

4．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$，则$\left\| A\,|\,A^*\right|=$____________ .

5.若$(x+1)^2\,\big|\,ax^4+bx^2+1$,则$a=$_____,$b=$____.

二、 计算题 (60 分，每小题 10 分，共 6 小题)

1.计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$。

2. 设四元齐次线性方程组（I）为$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$,又已知某齐次线性方程组(II)的通解为

$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$,

(1) 求(I)的基础解系；

(2) 问(I)与(II)是否有非零公共解？若有，则求出所有非零公共解，否则说明理由。

3. 问 $\boldsymbol{a}$ 取什么值时下列向量组线性无关?

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{5}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\\\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{-6}\\\mathbf{10}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

4 将多项式 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-7x-4$ 按 $x-1$ 的方幂展开。

5. 向量 $\beta=(0,8,-1,5)$ 是否为向量组 $\alpha_1=(1,3,-1,2),\alpha_2=(0,-1,2,1),\alpha_3=(0,-1,2,1)$ 的线性组合？如果是，求其线性组合的表达式。

6 判断多项式 $f(x)=x^5-5x^4+7x^3\text{-}2x^2+4x-8$ 有无重因式，有的话，求出重因式，并求出重数。

四、证明题（20 分，每小题 10 分）

1. 设 $f(x)$ 是一整系数多项式，且 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & & 3^{n-1} & 3^n+x \end{vmatrix}$，.

其中 $n\geq 2$,证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约。

2. 设 A 是 n 阶方阵,则 $A^2=A$ 的充要条件是 $R(A)+R(A\text{-}E)=n.$