长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)　　　　试卷编号：12

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $2x-6y-z+5=0$　2. $-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$　3. $\int_0^a dy\int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　4. -1　5. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + f_1'\cdot 1 + f_2'\cdot y = ye^{xy} + f_1' + yf_2'$　(2 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = xye^{xy} + e^{xy} + (f_{11}'' + f_{12}''x) + f_2' + y(f_{21}'' + f_{22}''x).$　(7 分)

2. 解 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \dfrac{\pi}{8}.$　(7 分)

3. 解 设 $F(x,y,z) = x^2 + 4y - z^2 + 5$, 则 $F_x = 2x, F_y = 4, F_z = -2z.$　(2 分)

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-2z}{1}$, 解得切点：$(2,-2,-1)$.　(5 分)

切平面方程为 $2x + 2y + z + 1 = 0$.　(7 分)

4. 解 $\int_C (x^3 - y)dx + (x - y^3)dy = \iint_{x^2+y^2\le -2x} 2dxdy = 2\pi$　(7 分)

5. 解

$$V = \;= \int_{-1}^0 dx \int_{-2x-2}^0 dy \int_0^{2x+y+2} dz \\ = \frac{2}{3}$$　(7 分)

6. 解 因为 $\rho = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{1}{2} < 1$, 所以原级数收敛.　(7 分)

三. 解 易求得 $R = 1$, 收敛域为 $[-1, 1)$.　(2 分)

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, 则 $S(x) = \int_0^{\infty} S'(x)dx = \int_0^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x^n}{n})'dx = \int_0^{\infty} \dfrac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$

(8 分)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n} = S(\dfrac{1}{3}) = \ln\dfrac{3}{2}.$　(10 分)

四. 解 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0$ 得 $(x,y) = \pm(1,1), (0,0)$。(4 分)

而 $z_{xx} = 12x^2 - 2, z_{xy} = -2, z_{yy} = 12y^2 - 2$　(6 分)

对 $(x,y) = \pm(1,1), z_{xx} = 10, z_{xy} = -2, z_{yy} = 10$　(8 分)

知 $(x,y) = \pm(1,1)$ 为极小值点，且极小值为 -2　(10 分)

五. 解 已知直线的方向向量易求得 $\vec{v} = (2,-1,0)$,　(3 分)

平面的法向量为 $(1,1,1)$　(4 分)

由已知可得，所求直线的方向向量为：$(2,-1,0)\times(1,1,1) = (-1,-2,3)$　(8 分)

所以所求直线方程为 $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ (10 分)

六. 解 因为 $|x|\le 1, |y|\le 1$. $|\sin x|\le |x|, |\sin y|\le |y|$, 所以 $\sin^2 x\le x^2, \sin^2 y\le y^2$. (2 分)

所以 $\dfrac{1}{\sqrt{16+x^2+y^2}}\le \dfrac{1}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\le \dfrac{1}{4}$. (4 分)

$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{16+x^2+y^2}}\le \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\le \iint_D \frac{dxdy}{4}$. (6 分)

又因为 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{16+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{16+r^2}}=2\pi(\sqrt{17}-4)$.

$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{4}=\frac{\pi}{4}$.

得证。 (8 分)