

长沙理工大学考试试卷

试卷编号 2 拟题教研室（或教师）签名 _____ 教研室主任签名 _____

课程名称（含档次） 复变函数与积分变换 B 课程代号 0701000135

专业 各专业 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 若函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 D，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析。
 A. 连续 B. 可导 C. 可微 D. 某一邻域内可微

2. 下列级数中，绝对收敛的是 A

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i}{n^2} + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{\sqrt{n+1}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| + \left| \frac{i}{n^2} \right|$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \sqrt{3}i)^n$

3. 在下列复数中，使得 $e^z = 3$ 成立的是 B。

A. $z = \sqrt{3}$;

B. $z = \ln 3 + 2k\pi i$, k 为整数;

C. $z = \ln 3$;

D. $z = \ln 3 + \pi i$

4. 设 C 为上半单位圆，则 $\int_C |z| dz =$ C (C 为逆时针方向)

A. 0 B. πi C. -2 D. $2i$

5. $z=0$ 为函数 $f(z) = \frac{(1-\cos z)\ln(1+z)\sin^2 z}{2z^4(e^z-1)}$ 的 B

A. 本性奇点; B. 可去奇点; C. 二级极点; D. 连续点.

二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2022} =$ -1.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4i}{6} \right)^n =$ 0.

3. $\operatorname{Res} \left(\frac{e^z}{z^2-1}, 1 \right) =$ $\frac{1}{2}$.

4. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z + e^z}{2z-4i} dz =$ 0.

$$\frac{z}{(1-z)^2}$$

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n+1}$ 在 $|z| < 1$ 内的和函数是 $\frac{-\ln(1-z)}{z} + \frac{1}{z^2}$

三、计算下列各式的值 (本题总分 20 分, 每小题 5 分)

$$1. 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad 2. \ln(-i) \quad 3. (1+i)^{\frac{1}{2}} \quad 4. \exp\left[\frac{(1+i)\pi i}{3}\right]$$

四、解答下列各题 (本题总分 20 分, 每小题 5 分)

1. $f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$ 是否在 Z 平面上解析?

如果是, 求其导函数。

2. 函数 $u(x, y) = e^x \cos y + 2xy$, 求函数 $v(x, y)$ 使 $f = u + iv$ 为解析函数, 并求 $f(z)$.

3. 求函数 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(1-z)^2}$ 在 $0 < |z-1| < 2$ 内的罗朗展开式。

4. 函数 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 有哪些有限奇点? 如果是极点, 指出它们的级。

$$z = -1$$

五. 计算下列积分(本题总分 24 分, 每小题 6 分)

1. $\int_C [(x-y)+ix^2] dz$, 积分路径 C 为自原点沿虚轴到 i , 再由 i 沿水平方向到 $1+i$ 的折线。

2. $\int_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-4)}$.

3. $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, (a > 0, b > 0)$.

六. (本题总分 6 分) 利用拉氏变换求微分方程 $y' + y = t$, 满足初值条件 $y(0) = 1$,

解: 对两边同时取拉氏变换

$$s^2 Y(s) - sY(0) - y'(0) + Y(s) = y(0) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s + 1$$

(注: 本卷所有的路积分中积分曲线均为正向)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

四、1. 解 $U_x = e^{x(1+y)} \cos y - e^y \sin y$ $U_y = -e^x x \sin y - e^x (\sin y + y \cos y)$
 $V_x = e^x y \cos y + e^{x(1+y)} \sin y$ $V_y = e^x x \cos y + e^x (\cos y - y \sin y)$

$\because U_x = V_y$ $U_y = -V_x$ 满足 C-R 方程 $\therefore f(z)$ 在复平面上解析.

$$\begin{aligned} f'(z) &= (U_x + iV_x) = e^{x(1+y)} (\cos y + \sin y \cdot i) + e^y \cdot (\cos y i - \sin y) \\ &= e^{x(1+y)} (\cos y + \sin y \cdot i) + i e^y (\cos y + \sin y i) = e^{x(1+x+y)} e^{yi} = e^z (1+z) \end{aligned}$$

2. 解 $\because f = u + iv$ 为解析函数 满足 C-R 方程

$$V_y = U_x = e^x \cos y + 2y. \quad V = \int e^x \cos y + 2y = e^x \sin y + y^2 + \varphi(x)$$

$$V_x = -U_y = e^x \sin y - 2x = e^x \sin y + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = -2x. \quad \varphi(x) = -x^2 + C.$$

$$\therefore V(x, y) = e^x \sin y + y^2 - x^2 + C.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + 2xy + (e^x \sin y + y^2 - x^2 + C)i = e^x (\cos y + i \sin y) + i(-x^2 - 2xy + y^2 + C) \\ &= e^z - i z^2 + iC. \end{aligned}$$

3. 解 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(1-z)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}$

$$\therefore 0 < |z-1| < 2 \therefore 0 < \left| \frac{z+1}{2} \right| < 1$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{z+1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{n-2}}{2^{n+1}}.$$

4. 解 $1+z^2=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{z_2} = -i$

$$\text{令 } 1+e^{iz}=0 \Rightarrow z_k = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

当 $k=0$ 时 $z_k = z_1 = -i$

当 $k=-1$ 时 $z_k = z_2 = i$.

即 $z_1 = i$ $z_2 = -i$ 为 $f(z)$ 的二极级极点

$z_k = (2k+1)\pi \quad (k=1, \pm 2, \dots)$ 为一级极点

五. 1. 解积分路径 G 的微分方程 $\bar{z} = it$ 从0到1, $d\bar{z} = i dt$.

积分路径 G_2 的微分方程 $\bar{z} = t + i\bar{v}$ 从0到1, $d\bar{z} = dt$.

$$\begin{aligned}\int_G [(x-y) + iy^2] d\bar{z} &= \int_G [(x-y) + iy^2] d\bar{z} + \int_{G_2} [x-y + iy^2] d\bar{z}, \\ &= \int_0^1 -t^2 dt + \int_0^1 (t+1) + it^2 dt = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\end{aligned}$$

2. 解 $\int_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz$ 中 $f(z) = e^{z+1} \sin z$ 在 $|z|=1$ 中处处解析.

由柯西-古萨定理 $\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{(z+1)(z-1)} \text{ 在圆域 } |z| < 1 \text{ 内只有在 } -1 \text{ 一级极点 } z = -1 \\ \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)} &= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}[g(z), 1] \right\} = 2\pi i \cdot \left. \left(\frac{1}{z-1} \right) \right|_{z=1} = -\frac{2\pi i}{3} \\ I &= \int_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz + \int_{|z|=3} \frac{1}{(z+1)(z-1)} = 0 + \frac{1}{2\pi i} \cdot -\frac{2\pi i}{3} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. 解 $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$ 在 $|z|=1$ 上有在 -1 一级极点 $z = 0$, -1 三级极点 $z = 1$.

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1] \right\}.$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-0)e^z}{z(1-z)^3} = 1$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)^3 \cdot e^z}{-z \cdot (1-z)^3} \right]'' = -\frac{e^z (1-2+z)^2 + 2z}{2z^4} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = (1-0)2\pi i (2-0)\pi i = 2\pi i$$

$$解 \quad I = \int_{-b}^{+b} \frac{x^2}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)} dx$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+b^2)(z^2+a^2)}$$

f(z) 在实轴无根，在复平面有两个一级极点
 $z_1=a\bar{i}$ $z_2=b\bar{i}$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}[f(z), z_k] \\ &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}[f, a\bar{i}] + \operatorname{Res}[f, b\bar{i}] \right] = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{z}^2}{(z+a\bar{i})(z+b\bar{i})} \Big|_{z=a\bar{i}} + \frac{\bar{z}^2}{(z+b\bar{i})(z+a\bar{i})} \Big|_{z=b\bar{i}} \right. \\ &= 2\pi i \left[\frac{-a^2}{2a\bar{i}(b^2-a^2)} + \frac{-b^2}{2b\bar{i}(a^2-b^2)} \right] \\ &= \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$