长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等代数(一)》　　　　试卷编号： 1

一、填空题（总分20分，每小题4分）

1. 1;　2. $\frac{1}{2}$　3. 2;　4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　5. $r(A,b)=r(A)=n$.

三、计算题(第1-4题，每题10分;第5小题15分,总分55分)

1. **解** $f(x)=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

因为$(\pm\sqrt{2})^2-4<0$, 所以上述分解即为$f(x)$在R内的因式分解.　(3 分)

在复数域C中,$x^2+\sqrt{2}x+1$的根为$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$;

$x^2-\sqrt{2}x+1$的根为$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

于是$f(x)$在C内的因式分解为$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.　(3 分)

令$x=y+1$,则$f(x)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2=g(y)$, 取$p=2$, 由Eiseneein判别法得$g(y)$在$Q$上不可约.因此$f(x)=x^4+1$为$f(x)$在$Q$上的以上的因式分解.　(10 分).

2. **解** 令$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$, 则$A=aE+\alpha\beta$,

其中$\alpha=(1,2,\cdots,n)^t,\beta=(1,1,\cdots,1)$.　(3 分)

(1) 当$a=0$时, $D=|A|=0$;　(5分)

(2) 当$a\neq 0$时, $D=|aE|(1+\frac{1}{a}\beta\alpha)=a^n(1+\frac{1}{a}\frac{n(n+1)}{2})=a^n+\frac{n(n+1)}{2}a^{n-1}$.

综上可得$D_n=a^n+\frac{n(n+1)}{2}a^{n-1}$.　(10 分)

3. 解 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$　(4 分)

令$X=(x_1,x_2)$, 则

$$x_1=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1-2 \\ -4 \\ 3k_1-5 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$x_2=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_2+1 \\ -3 \\ 3k_2+6 \\ k_2 \end{pmatrix}$$　(8 分)

于是$X=\begin{pmatrix} k_1-2 & k_2+1 \\ -4 & -3 \\ 3k_1-5 & 3k_2+6 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中$k_1,k_2$为任意常数.　(10 分)

4. **解** 由$|A|=2$得$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}A^*$,$|A^*|=4$, 于是

$|(\frac{1}{3}A)^{-1}-2A^*|=|\frac{3}{2}A^*-2A^*|=|-\frac{1}{2}A^*|=-\frac{1}{8}|A^*|=-\frac{1}{2}.$ (5分)

$|A^{-1}+B|=|A^{-1}(B^{-1}+A)B|=|A^{-1}||B^{-1}+A||B|=\frac{3}{2}$ (10分)

5. **解** $A^*=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$, 其中$\alpha=(2,0)^T$.

得$|A^*|=1$, 由$|A|>0$及$|A^*|=|A|^2$得$|A|=1$, 因此$AA^*=|A|E=E$, 于是

$A=(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}E_2&-\alpha\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (7分)

由$ABA^{-1}=-2BA^{-1}+3E$得$AB=-2B+3A^*$,于是$(A+2E)B=3A$,即

$B=(A+2E)^{-1}3A=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (15分)

四,证明题($8\times2=16$**分**)

1,**证** 若存在不全为的数$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$使得

$$a_0+a_1\sqrt[n]{2}+a_2\sqrt[n]{2^2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-2}}=0,$$

令$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, 则$degf(x)\leq n-1$且$\sqrt[n]{2}$是$f(x)$的根.因为$\sqrt[n]{2}$是$x^n-2$的根, 于是$(f(x),x^n-2)\neq 1$. 因为$x^n-2$在$Q$上不可约, 于是$x^n-2)|f(x)$, 因此$degf(x)\geq n$, 可得矛盾, 故$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$. (10分)

2,**证** 由$A+B=AB$得$A=(A-E)B$, $(A-E)(B-E)=E$, 因此$A-E$可逆,于是有

(1) $r(A)=r((A-E)B)=r(B)$; (7分)

(2) $(B-E)(A-E)=E$, 于是$A+B=BA$, 因此$AB=BA$. (15分)