高等代数(一)试卷标准答案

课程名称： 《高等代数》(一)　　　　　　试卷编号： 3

一、填空题（总分20分，每小题4分）

1. $m+n\neq 0$;　2. $\frac{A-E}{4}$　3. $\begin{pmatrix} -A^{-1}CB^{-1} & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.　4. $\frac{20^n}{4}$　5. x^2-2x+7

三、计算题(每小题10分，共50分)

1. 解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以$R(\alpha_1,\ldots,\alpha_5)=3$,, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为最大无关组，且

$$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2, \alpha_5=-\frac{7\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_4}{6}.$$

(10分)

2. 解　方程可化为$(A-E)X=A$, $|A-E|=1$, 因此$A-E$可逆, $X=(A-E)^{-1}A$.　(2分)

$$(A-E,A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$ (8分)

于是$X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.　(10分)

3. 令

$$D'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}.$$

由于$D'=\left(\Pi_{k=1}^n(x-a_k)\right)\cdot\left(\Pi_{1\le i<j\le n}^n(a_j-a_i)\right)$ 且$D'=A_{1n}+xA_{2n}+\cdots+x^{n-2}A_{(n-2)n}+x^{n-1}A_{(n-1)n}+x^nA_{nn}$ (8分), 比较两式x^{n-1}的系数可得

$$D_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\Pi_{1\le i<j\le n}^n(a_j-a_i)\right).$$

(10分)

4. **解** $f(x)$可能的有理根为$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ (2分).

$f(1)=0, f(-1)=-32, f(2)=0, f(-2)=-108, f(3)=192, f(-3)=-384, f(6)\neq0, f(-6)\neq0$, 所以$f(x)$的有理根为1. (6分).

因为$f'(x)=5x^4-20x+15$, $f''(x)=20x^3-20$, $f'''(x)=60x^2$, 所以$f'(1)=f''(1)=0$ 但$f'''(1)\neq0$, 因此1是$f(x)$的3重根. (10 分).

5. **解** $|A|=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-(k^2-3k-4)=-(k-4)(k+1).$ (2分)

当$|A|\neq0$, 即$k\neq-1,4$时，方程组有唯一解。用克莱姆法则求之。

$x_1=\dfrac{k^2+2k}{k+1}, x_2=\dfrac{k^2+2k+4}{k+1}, x_3=\dfrac{-2k}{k+1}.$

当$k=-1$时，方程组为$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=4\\-x_1-x_2+x_3=1\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ (4分)

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&-2&3&-8\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=2$, $R(\overline{A})=3$,所以方程组无解。 (6分)

当$k=4$时，方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=4\\-x_1+4x_2+x_3=16\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&5&5&20\\0&-2&-2&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ (8分)

因为$R(A)=R(\overline{A})=2$,所以方程组有无穷多解，于是

$\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=-x_3+4\end{cases}$,令$x_3=c$, 则得通解为$x=\begin{pmatrix}-3c\\4-c\\c\end{pmatrix}$, 即$x=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$。 (15分)

四、证明题（20分，每题10分）

1. **证** 设x^2+x+1的两个复根为α,β, 由于$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 所以$\alpha^3=\beta^3=1$. 由于$x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$, 且$(x-\alpha)(x-\beta)|(f_1(x^3)+xf_2(x^3))$, 所以$f_1(\alpha^3)+\alpha f_2(\alpha^3)=0$, $f_1(\beta^3)+\beta f_2(\beta^3)=0$, 所以$f_1(1)+\alpha f_2(1)=0$, $f_1(1)+\beta f_2(1)=0$. 解得$f_1(1)=f_2(1)=0$. 得证. (10分)

2. **证明**:（1）令

$$x_0\alpha+x_1A\alpha+\cdots+x_{k-1}A^{k-1}\alpha=0,$$

用A^{k-1}左乘等式两边，由$A^k\alpha=0$得

$$x_0A^{k-1}\alpha=0$$

而$A^{k-1}\alpha\neq0$，于是$x_0=0$, 则等式变为

$$x_1A\alpha+\cdots+x_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$$

用A^{k-2}左乘两边，得$x_1A^{k-1}\alpha=0$, 于是得$x_1=0$,, 同理可得$x_i=0, i=0,1,2,\ldots,k$, 故$\alpha, A\alpha,\ldots,A^{k-1}\alpha$线性无关；

（2）假设$R(A^{n+1})\neq R(A^n)$, 则必有$R(A^{n+1})<R(A^n)$, 从而$A^{n+1}x=0$的解不全是$A^nx=0$的解，则必存在非零的列向量β使得$A^n\beta\neq 0$ 而$A^{n+1}\beta=0$, 由（1）可知$\beta, A\beta,\ldots,A^n\beta(0<k\leq n)$ 线性无关, 这与$n+1$个n维列向量必线性相关矛盾，因此$R(A^{n+1})=R(A^n)$.

(10分)