长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：　《高等数学》(B)(二)　　　　　　试卷编号：14

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)$　2. $(3,-2,-6)$　3. $\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{a\sec\theta}f(r)rdr$　4. $(1,1,-1)$　5. $-\frac{1}{4}dx+\frac{1}{2}dy$

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot(\frac{-y}{x^2})+f_2'\cdot 2xy=-\frac{y}{x^2}f_1'+2xyf_2'.$ (2 分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f_1'-\frac{y}{x^2}\cdot(f_{11}''\cdot\frac{1}{x}+f_{12}''\cdot x^2)+2xf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{1}{x}+f_{22}''x^2\right)$$
$$=-\frac{y}{x^3}f_{11}''+yf_{12}''+2x^3yf_{22}''-\frac{1}{x^2}f_1'+2xf_2'$$ (7 分)

2. 解 $I=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1(\cos\theta+\sin\theta)dr=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}$(3+3+1=7 分)

3. 解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$, $G(x,y,z)=x^2+y^2-2x$, 则 $F_x(M_0)=2x_{M_0}=0$, $F_y(M_0)=2y_{M_0}=0$, $F_z(M_0)=2z_{M_0}=4$. (1 分)

$G_x(M_0)=(2x-2)_{M_0}=-2$, $G_y(M_0)=2y_{M_0}=0$, $G_z(M_0)=0$. (2 分)

$$\left|\begin{matrix}F_y' & F_z'\\ G_y' & G_z'\end{matrix}\right|\Bigg|_{M_0}=0,\quad \left|\begin{matrix}F_z' & F_x'\\ G_z' & G_x'\end{matrix}\right|\Bigg|_{M_0}=-8,\quad \left|\begin{matrix}F_x' & F_y'\\ G_x' & G_y'\end{matrix}\right|\Bigg|_{M_0}=0$$ (4 分)

故切线方程为：$\begin{cases}x=0,\\ z=2\end{cases}$ (5 分)

法平面方程为：$y=0$ (7 分)

4. 解 曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转，所得旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$. (2 分)

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_2^8dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\rho^3d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8dz$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4|_0^2\cdot 6+2\pi\int_2^4\rho^3(8-\frac{\rho^2}{2})d\rho=336\pi$$ (7 分)

5. 解 $C=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.$

$AB:\begin{cases}y=1-x\\ z=0\end{cases},0\le x\le 1.$

$\int_{AB}dx-dy+ydz=\int_0^1[1-(1-x)']dx=-2.$ (2 分)

$BC:\begin{cases}y=1-z\\ x=0\end{cases},0\le z\le 1.$

$\int_{BCB}dx-dy+ydz=\int_0^1[-(1-z)'+(1-z)]dz=3/2.$ (4 分)

$CA: \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 0 \end{cases}, 0 \le z \le 1.$

$\int_{BCB} dx - dy + ydz = \int_0^1 dx = 1.$

故 $\oint_C dx - dy + ydz = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$ (7 分)

6. 解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{x^n}\frac{3^{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$, 所以原级数绝对收敛. (7 分)

三. 解 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$. 易求得级数记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛半径是 $R = 1$ (2 分)

因为 $S'(x) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}, (-1 < x < 1).$ (6 分)

所以 $S(x) = \int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x, (-1 < x < 1).$ (8 分)

两边对 $x \longrightarrow 1^-$ 取极限得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (10 分)

四. 解 求解 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}(x + y^2 + 2y) + e^{2x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(2y+2) = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$ (5 分)

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1/2,-1)} = 2e > 0;$ (6 分)

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1/2,-1)} = 0;$ (7 分)

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1/2,-1)} = 2e.$ (8 分)

$AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 所以函数在 $(1/2, -1)$ 取得极小值为 $-e/2$. (10 分)

五. 解 由已知可得，直线的方向向量为：$\vec{v} = (-1, 2, 8)$ (1 分)

已知平面的法向量为 $\vec{n} = (1, -1, 3)$ (2 分)

过已知直线且与已知平面垂直的平面 π 的法向量可取为：$\vec{n_1} = \vec{v}\times\vec{n} = (14, 11, -1)$, 所以平面 π 的方程为 $14x + 11y - x - 26 = 0$. (8 分)

故所求直线在平面上的投影方程为 $\begin{cases} x - y + 3z + 8 = 0 \\ 14x + 11y - z - 26 = 0 \end{cases}$ (10 分)

六. 解 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y}.$ (2 分)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy + C \\ &= \int_0^y 12ye^y dy + \int_0^x (3x^2y + 8xy^2)dx + C \\ &= x^3y + 4x^2y^2 + 12(ye^y - e^y) + C \end{aligned}$$ (8 分)