长沙理工大学考试试卷

试卷编号 1 拟题教研室（或教师）签名________ 教研室主任签名________

课程名称（含档次） 复变函数与积分变换 (C) 课程代号 0701000135

专 业 各专业 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、选择题：(本题总分 15 分，每小题 3 分)

1．方程 $\mathrm{Re}\,z^2=4$ 所表示的曲线是（　　）.

A. 双曲线　　B. 圆　　C. 直线　　D. 椭圆

2．关于指数函数 e^z，以下哪个说法是错误的（　　）

A. 以 $2k\pi i$ 为周期（k 为整数）　　B. $(e^z)'=e^z$

C. $\forall z\in\mathbf{C}$，$e^z>0$　　D. 处处解析

3．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则下列等式中错误的是（　　）.

A. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　B. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$

C. $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　D. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

4．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{(e^z-1)\sin z^2}{2z^4}$ 的（　　）

A.本性奇点；　　B. 可去奇点；　　C.连续点；　　D.一级极点.

5．下列级数中，条件收敛的是（　　）

A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$　　B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{n!}$

C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{2}\right)^n$　　D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{\sqrt{n+1}}$

二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 若 $f(z^2+1)=|z|$，则 $f(0)=$________。

2. $\displaystyle\oint_{|z|=2}e^z(z+\sin z+\cos z)dz=$________。

3. 复数$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$的模为______，辐角主值为______。

4. $\lim\limits_{z\to(1+i)}\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=$____________。

5. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$的收敛半径为_______。

三、计算下列各式的值（本题总分20分，每小题5分）

1. $\exp[\frac{1+i\pi}{4}]$；　2. $(1+i)^i$；　3. $Ln(ie)$，　4. $\sqrt[3]{1-i}$

四、解下列各题（本题总分21分，每小题7分）

1. 将函数$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$在$2<|z|<\infty$内展开成罗朗（Laurent）级数；

2. 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求共轭调和函数$v(x,y)$，使$f=u+iv$为解析函数

3. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$的收敛半径与和函数。

五．计算下列积分(本题总分29分)

1. $\int_c(z+1)dz$，其中c为从原点到1+i的线段。(7分)

2. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$．(7分)

3. $\oint\limits_{C}\frac{z}{z^2+2z-3}dz$，C：$|z|=2$　(7分)

4. $\int_0^{+\infty}\frac{xSinx}{x^2+9}dx$　(8分)

（注：本卷所有的闭路积分中积分曲线均为正向！）

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：复变函数与积分变换（C）　　　　试卷编号：1

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. A　2. C　3. B　4. D　5. A

二．填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 1；　2. 0；　3. 1，$\frac{3\pi}{4}$；　4. $\frac{3-i}{4}$；　5. R=e；

三．计算下列复数的值（本题总分 20 分，每小题 5 分）

1. $\exp(\frac{1+i\pi}{4})=\exp(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}i)=e^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=e^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ (5 分)

2. $(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}, (k=0,\pm1....)$ (5 分)

3. $Ln(ie)=\ln 1+\frac{\pi}{2}i+2k\pi i=(2k+\frac{1}{2})\pi i,(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$ (5 分)

4. $\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}(Cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{3}+iSin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{3}),(k=0,1,2)$ (5 分)

四、解下列各题（本题总分２１分，每小题７分）

1. $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-2^n}{z^n}$ (7 分)

2. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x, v=2xy+g(x)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y=-2y-g'(x), g'(x).=0$ (4 分)

$\Rightarrow f(z)=z^2+ic$　　（7 分）

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$ 的收敛半径为 R＝1，（2 分）和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$，

由于 $\int_0^z\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z nz^{n-1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}$　（$|z|<1$）　（5 分）

所以$S(x)=z\cdot\left(\dfrac{z}{1-z}\right)'=\dfrac{z}{(1-z)^2}$　（$|z|<1$）　（7分）

五．计算下列积分(本题总分29分)

1．线段方程：　$z=(1+i)t....(0\le t\le 1)$ (3分)

$$I=\int_0^1((1+i)t+1)(1+i)dt=1+2i$$ （7分）

2．函数$f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$在$z=1$处不解析，　e^{2z}在圆周$|z|=2$内处处解析（4分）

由柯西积分导数公式有 $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i(e^{2z})'\big|_{z=1}=4e^2\pi i$（7分）

3．在正向积分曲线C内，函数$\dfrac{z}{z^2+2z-3}$有一个不解析的点，$z\ =1$，　(3分)

作两个正向圆周：　$C\ :|z-1|=r<1$，则由复合闭路定理可得

$$\oint_C\frac{z}{z^2+2z-3}dz\ =2\pi i\frac{z}{(z+3)}\Big|_{z=1}$$ （5分）

$$=\pi i/2$$ （7分）

4．　$I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xSinx}{x^2+9}dx=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xe^{ix}}{x^2+9}dx$　　(3分)

设$f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+9}$，$f(z)$在上半平面仅有一个一级极点$3i$，　(5分)

$\mathrm{Re}\,s(f(z),3i)=\dfrac{1}{2}e^{-3}$　　（7分）

$I=\dfrac{\pi}{2}e^{-3}$　　（9分）