长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）　高等数学 A（二）期末　　课程代号　0701000215

专业　电气、物电等　　层次（本、专）　本科　　考试方式（开、闭卷）　闭卷

一、单项选择题：1～5 小题，每小题 4 分，共 20 分．下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将所选项前的字母写在答题纸上．

1．设 a，b，c 均为非零向量，则下列向量中与 a 不垂直的是 D ．

(A) $(a\cdot c)b-(b\cdot a)c$　　(B) $b-\dfrac{a\cdot b}{a\cdot a}a$

(C) $a\times b$　　(D) $a+(a\times b)\times a$

2．已知二元函数 $f(x,y)$ 可微，$l=(l_1,l_2)\neq 0$，则下列各式中不正确的是 C ．

(A) $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$　（θ 为 l 与 x 轴正向的夹角）

(B) $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$　（$\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 l 的方向余弦）

(C) $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(l_1,l_2)$　　(D) $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}\,f\cdot\dfrac{l}{|l|}$

3．设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(\cancel{x}+\cancel{y}+\cancel{z}+1)\mathrm{d}v=$ B ．

(A) 2π　　(B) $\dfrac{4}{3}\pi$　　(C) $\dfrac{2}{3}\pi$　　(D) π

4．由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积为 D ．

(A) 3π　　(B) 4π　　(C) 5π　　(D) 6π

5．下列级数中，收敛的是 A ．

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 绝对　　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

C、条件

$x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$

$x^2+y^2=2$

$\iint(6-2x^2-y^2)d\sigma$

$-\iint_D(x^2+2y^2)d\sigma$

$=\iint_D(6-3(x^2+y^2))d\sigma$

$=6\times 4\pi-3\times\frac{2\pi}{2}\times 4$

$=(12-6)\pi=6\pi$

二、填空题：6～10 小题，每小题 4 分，共 20 分．请将答案写在答题纸上．

$(0,y_0,0)$ 代入 $\begin{cases} -2y_0-6=0 \\ -y_0+D=0 \end{cases} \Rightarrow y_0=D=-3$

6. 若直线 $\begin{cases} 3x-2y+3z-6=0, \\ x-y+z+D=0 \end{cases}$ 与 y 轴相交，则常数 $D=$ $\underline{\quad -3 \quad}$.

$\arctan x$
$\arctan(-y)$

7. 设 $z=\arctan\dfrac{x-y}{1-xy}$，则 $dz|_{(0,0)}=$ $\underline{\quad dx-dy \quad}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}(-1)$

8. 设 L 是从 $A(0,\sqrt{2})$ 沿 $x^2+y^2=2$ 经 $B(\sqrt{2},0)$ 到 $C(1,-1)$ 的弧段，则 $\int_L |y|ds=$ $\underline{-(\sqrt{2}-4)}=4-\sqrt{2}$

$L:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}dt$

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{2}dt$

9. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$，$a=2$，则 $\oint\!\!\oint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$ $\underline{\quad 64\pi \quad}$.

$4\pi a^4$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x\le 0, \\ 1+x^2, & 0<x\le\pi, \end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad \frac{\pi^2}{2} \quad}$.

三、解答题：11～17 小题，共 60 分．请将解答写在答题纸上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

11. 已知常数 a，b 满足 $a\le b$，求使 $\int_a^b(6-x-x^2)dx$ 取到最大值的 a 和 b．

（本题满分 8 分）

12. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，计算 $\iint_D |y-x^2|dxdy$．（本题满分 8 分）

13. 计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成的空间区域．

（本题满分 8 分）

14. 计算 $I=\iint_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\ge 0)$ 的上侧．

（本题满分 10 分）

15. 设函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 确定．已知 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$．

（本题满分 10 分）

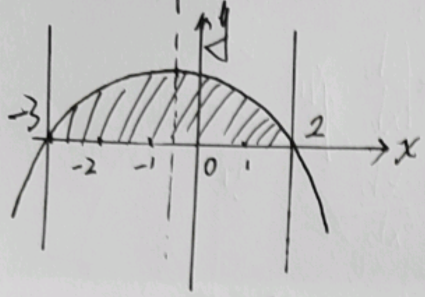
16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数．

（本题满分 10 分）

17. 设 $f(u)$ 为连续函数，且 C 为任一简单闭曲线，证明：$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$．

（本题满分 6 分）

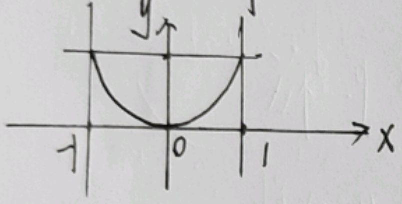
11、已知常数 a,b 满足 $a<b$ 求使 $\int_a^b(6-x-x^2)dx$ 取最大值时的 a 和 b



解：由几何可知 $6-x-x^2\geq 0$ 时存在最大值

即 $-3\leq x\leq 2$ 又 $\because a<b$ $\therefore a=-3$ $b=2$

12. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ 计算 $\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$

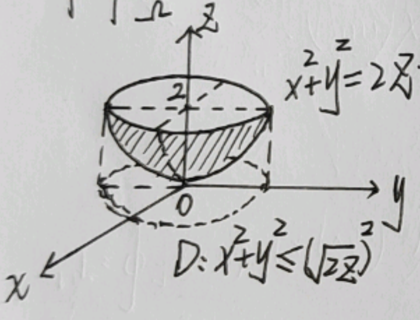


解：$\iint\limits_D |y-x^2|dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy$

$=\int_{-1}^1 (x^2y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{x^2}dx+\int_{-1}^1(\frac{1}{2}y^2-x^2y)\Big|_{x^2}^1 dx$

$=\int_{-1}^1(x^4-x^2+\frac{1}{2})dx=2\int_0^1(x^4-x^2+\frac{1}{2})dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{11}{15}$

13. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$ Ω 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成空间.

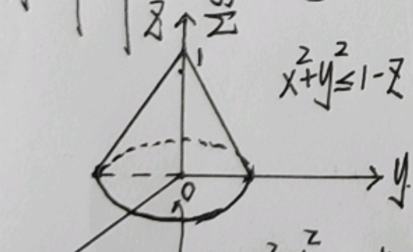


解 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^2 dz\iint\limits_{D:x^2+y^2\leq 2z}(x^2+y^2)dxdy$ 　※由 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}R^4$

$=\int_0^2\frac{\pi}{2}(2z)^2dz$

$=2\pi\int_0^2 z^2dz=\frac{16}{3}\pi$

14. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy$ Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧



$\Sigma_1: z=0$ $x^2+y^2\leq 1$ 法向量朝下

解 取 $\Sigma_1: z=0$ $x^2+y^2\leq 1$ 法向量朝下

记 $J=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy\overset{Gass}{=\!=}\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2)dxdy$

$=6\int_0^1 dz\iint\limits_{D:x^2+y^2\leq 1-z}(x^2+y^2)dxdy=6\int_0^1\frac{\pi}{2}(1-z)^2dz=\pi$

$J_1=\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}-dxdy=\pi.$

$=-\iint\limits_D -dxdy=\pi$

$I=J-J_1=\pi-\pi=\cancel{2\pi}\ 0$

15. 解 $\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\cdot\left(\frac{1}{y}\cdot y'-\cos x\right)$

$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)\cdot\left(\frac{1}{y}y'-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\cdot\left[\frac{y''y-(y')^2}{y^2}+\sin x\right]$

方程 $y-xe^{y-1}=1$ 两边同时对 x 求导，得：$y'-(e^{y-1}+x\cdot e^{y-1}\cdot y')=0$ ①

再同时对 x 求导，得：$y''-\left\{e^{y-1}y'+e^{y-1}y'+x\left[e^{y-1}\cdot(y')^2+e^{y-1}\cdot y''\right]\right\}=0$ ②

将 $x=0$ 代入原方程 $\Rightarrow y=1$

将 $x=0,y=1$ 代入① $\Rightarrow y'\big|_{x=0}=1$

将 $x=0$ $y=1$ 代 $y'=1$ 代入② $\Rightarrow y''\big|_{x=0}=2$.

故：$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}=f'(0)\cdot(1-1)=0$ $\quad f'(0)=1$.

$\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}=f''(0)\cdot(1-1)^2+f'(0)\cdot[(2-1)+0]=1$

16. 解 令 $a_n=2n+1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|=1\Rightarrow R=1$

当 $x=\pm1$ 时 易知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n(2n+1)$ 发散 $\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2n\cdot x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=2x\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}$

$=2x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{2x+1-x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$ $x\in(-1,1)$.

17. 证：$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$ $f(u)$ 为连续函数且 C 为任意简单闭曲线.

证：$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\frac{1}{2}\oint_C f(x^2+y^2)\,d(x^2+y^2)$

令 $x^2+y^2=u$. 原式 $=\frac{1}{2}\oint_C f(u)du$.

又 $\because f(u)$ 为连续函数 故一定可积且存在原函数 $F(u)=\int_0^a f(t)dt$.

且 $dF(u)=f(u)du$

$\therefore\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\frac{1}{2}\oint_C f(u)du=\frac{1}{2}\oint_C dF(u)=\frac{1}{2}\left(F(u)\right)_{u(\alpha)}^{u(\beta)}$.

C 为任意简单闭曲线 $u(\alpha)=u(\beta)$ 即原式 $=0$ 得证.