长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)　　　　试卷编号：19

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $-1/2$　　2. $(1+xy)^x[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}]$　　3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$
5. 2

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &= \int_{-1}^{0}e^x dx\int_{-1-x}^{1+x}e^y dy+\int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{1-x}e^y dy\\
&= \int_{-1}^{0}e^x(e^y)|_{-1-x}^{1+x}dx+\int_0^1 e^x(e^y)|_{x-1}^{1-x}dx \qquad (2+2+2+1=7\text{ 分})\\
&= \int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})dx+\int_0^1(e-e^{2x-1})dx\\
&= \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}\cdot x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}\right)\Big|_0^1=e-e^{-1}
\end{aligned}
$$

2. 解 xoy 平面上曲线 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转一周得曲面 $y=x^2+z^2$,　　(2 分)

记 $F(x,y,z)=x^2+z^2-y$. $F_x(1,2,1)=2x|_{(1,2,1)}=2$; $F_y(1,2,1)=-1|_{(1,2,1)}=-1$; $F_z(1,2,1)=2z|_{(1,2,1)}=2$.　　(4 分)

故切平面方程为 $2(x-1)-(y-2)+2(z-1)=0$, 即为 $2x-y+2z-2=0$.　　(5 分)

法线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.　　(7 分)

3. 解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &= \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}xzdz=\int_0^1 dx\int_0^x(x\cdot\frac{1}{2}z^2)|_0^{xy}dy \qquad (4+3=7\text{ 分})\\
&= \int_0^1 dx\int_0^x\frac{x^3y^2}{2}dy=\int_0^1\frac{x^6}{6}dx=\frac{x^7}{42}|_0^1=\frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

4. 解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &= \int_0^{2\pi}(16\cos^2 t+16\sin^2 t)^{n+1}\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cos t)^2}dt \qquad (4+3=7\text{ 分})\\
&= \int_0^{2\pi}4^{2(n+1)}\cdot 4dt=2^{4n+7}\pi
\end{aligned}
$$

5. 解 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 故积分与路径无关。　　(3 分)

取 L_1 : 从 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到 $A(\pi,0)$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &= \int_{L_1}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy \qquad (7\text{ 分})\\
&= \int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^3}{3}
\end{aligned}
$$

6. 解 因为 $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n^{2/3}}}=1$, 而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ 发散，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)(n+2)}}$ 发

散。 (4 分)

而原级数是交错级数，满足莱布尼茨定理的条件，所以原级数为条件收敛. (7 分)

三. 解 记 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3+(x-1)}-\dfrac{1}{4+(x-1)}$, (2 分)

$\dfrac{1}{3+(x-1)}=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n,\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1.$ (5 分)

$\dfrac{1}{4+(x-1)}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\dfrac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{4})^n,\ \left|\dfrac{x-1}{4}\right|<1.$ (8 分)

故 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)(x-1)^n, |x-1|<3.$ (10 分)

四. 解

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy\\&=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)dy\\&=x^2+y^2\sin x+x^2\cos y-x^2\\&=y^2\sin x+x^2\cos y\end{aligned}$$

(2+2+1+1=6 分)

五. 解 将平面方程变形为 $z=5(1-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4})$

设 $L(x,y,z)=5(1-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4})+\lambda(x^2+y^2-1)$, (2 分)

解方程组

$$\begin{cases}F_x=-\dfrac{5}{3}+2\lambda x=0\\F_y=-\dfrac{5}{4}+2\lambda x=0\\x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

(5 分)

得点 $(4/5,3/5)$ 及点 $(-4/5,-3/5)$. (7 分)

比较两点处函数的值知：当 $x=4/5, y=3/5$ 时 $z=35/12$ 为小，$(4/5,3/5,35/12)$ 为所求的与 xoy 平面距离最短的点。 (10 分)

六. 解 $z=e^{y^2\ln x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{y^2\ln x}\cdot\dfrac{y^2}{x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2y}{x}x^{y^2}(1+y^2\ln x)$, (4 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y^2\ln x}\cdot 2y\ln x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{2y}{x}x^{y^2}(1+y^2\ln x)$, 故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0.$ (8 分)