

# 长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 C (一)

## 一、填空题：(本题总分 16 分，每小题 4 分)

1. 已知  $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}$ , 为使  $f(x)$  在  $x=0$  点连续, 则应补充定义  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2. 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + bn + 5}{3n - 2} = 2$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\cos x$ , 则  $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 已知  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、选择题：(本题总分 16 分，每小题 4 分)

1. 设  $f(x)$  在  $x=x_0$  处可导, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = (\quad)$   
A.  $-f'(x_0)$                       B.  $f'(-x_0)$                       C.  $f'(x_0)$                       D.  $2f'(x_0)$
2. 下列函数在  $[1, e]$  上满足拉格朗日定理条件的是( )  
A.  $\ln \ln x$                       B.  $\frac{1}{\ln x}$                       C.  $\ln x$                       D.  $\ln(2-x)$
3. 根据估值定理, 积分  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{10+3\cos x} dx$  的值在区间( )内  
A.  $[7, 13]$                       B.  $[0, 2\pi]$                       C.  $\left[\frac{1}{13}, \frac{1}{7}\right]$                       D.  $\left[\frac{2\pi}{13}, \frac{2\pi}{7}\right]$
4. 函数  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$  的极大值是( )  
A. 10                      B. 11                      C. 17                      D. 9

## 三、计算题：(本题总分 64 分，每小题 8 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ .
2. 若隐函数  $y = y(x)$  由方程  $\ln(x^2 + y^2) = \arctan \frac{y}{x}$  确定, 求  $y'(x)$ .
3. 设曲线 C 的参数方程是  $\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \\ y = (e^t + e^{-t})^2 \end{cases}$ , 求曲线 C 上对应于  $t = \ln 2$  的点的切线方程.
4. 求  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .
5. 求  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .
6. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3x} \int_0^x te^{3t} dt}{2x}$ .
7. 求  $\int x \cos^2 x dx$ .
8. 已知曲线  $y = 2x - x^2$  与  $g(x) = 2ax$  围成的图形面积等于  $\frac{32}{3}$ , 求常数  $a$ .

## 四、证明题：(本题总分 4 分，每小题 4 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  可导, 且  $f'(x) \leq 0$ , 记  $F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$ , 证明: 在  $(a, b)$  内有  $F'(x) \leq 0$ .

## 长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 A (一)

一、选择题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  的值为( )  
A. 1                      B.  $\infty$                       C. 不存在                      D. 0
2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ b + \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则  $a, b$  的值为( )  
A.  $a=2, b=1$               B.  $a=1, b=2$               C.  $a=-2, b=1$               D.  $a=2, b=-1$
3. 设函数  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ , 则  $f(x)$  在( )  
A.  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加                      B.  $(-\infty, +\infty)$  上单调减少  
C.  $(-1, 1)$  上单调增加, 其余区间单调减少  
D.  $(-1, 1)$  上单调减少, 其余区间单调增加
4. 设  $f(x)$  连续, 则  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$  ( )  
A.  $\frac{1}{2} f(x^2)$               B.  $xf(x^2)$                       C.  $2xf(x^2)$                       D.  $-2xf(x^2)$
5. 设线性无关的函数  $y_1, y_2, y_3$  都是二阶非齐次线性方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的解,  $C_1, C_2$  是任意常数, 则该非齐次方程的通解可以是( )  
A.  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$                       B.  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$   
C.  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$                       D.  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

二、填空题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f'''(0) =$ \_\_\_\_\_.
2. 微分方程  $y'' + 2y' + 3y = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$ \_\_\_\_\_.
4.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$ \_\_\_\_\_.

5.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题：(本题总分 60 分，每小题 10 分)

1. 求函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$ .

2. 设  $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$  确定了函数  $y = y(x)$ , 求  $y'(x)$ .

3. 计算  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ , 其中  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ .

4. 证明:  $x \arctan x \geq \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ .

5. 过曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  ( $x \geq 0$ ) 上点 A 做切线, 使该切线与曲线及  $x$  轴围成的平面图形 D 的面积等于  $\frac{3}{4}$ .

(1) 求 A 点的坐标;

(2) 求平面图形 D 绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

6. 设  $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ , 其中  $f(x)$  是连续函数, 求  $f(x)$ .

## 长沙理工大学考试试卷

2017-2018 学年本部高数 B (一)

一、选择题：(本题总分 16 分，每小题 4 分)

1. 设函数  $f(x) = |x|$ ,  $-2 < x < 2$ , 则  $f(x-1)$  的值域为( )

A.  $[0,2)$                       B.  $[0,3)$                       C.  $[0,2]$                       D.  $[0,3]$

2. 当  $x \rightarrow 0$  时, 要  $1 - \cos x$  与等价, 则  $a$  应等于( )

A.  $\frac{1}{4}$                               B. 4                              C.  $\frac{1}{2}$                               D. 2

3. 设  $f(x)$  在  $x_0$  点可导, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = ( \quad )$

A.  $f'(-x_0)$                       B.  $-f'(x_0)$                       C.  $f'(x_0)$                       D.  $2f'(x_0)$

4. 设  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上连续, 在  $(-1,1)$  内可导, 且  $|f'(x)| \leq M$ ,  $f(0) = 0$ , 则必有( )

A.  $|f(x)| \geq M$                       B.  $|f(x)| > M$                       C.  $|f(x)| \leq M$                       D.  $|f(x)| < M$

二、填空题：(本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. 设  $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设  $y = f(x+y)$ , 其中  $f$  具有一阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $y = \ln f(x)$  且  $f''(x)$  存在, 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_.

4. 当  $a > 0$  时, 反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx =$  \_\_\_\_\_.

5. 微分方程  $y' = \frac{2y}{x}$  的通解为 \_\_\_\_\_.

### 三、计算题: (本题总分 30 分, 每小题 6 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

2. 求函数  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调区间.

3. 求不定积分  $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$ .

4. 求定积分  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , 其中  $a > 0$ .

5. 求一阶线性微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \cos x$  满足条件  $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$  的特解.

### 四、解答题: (本题总分 20 分, 每小题 10 分)

1. 已知一平面图形由曲线  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=\sqrt{x}$  以及  $x$  轴围成, 求(1) 此平面图形的面积; (2) 此平面图形分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转所成的旋转体的体积.

2. 求微分方程  $y'' + y = e^x$  的通解.

### 五、应用题: (本题 9 分)

已知制作一个背包的成本为 40 元, 如果一个背包的售出价为  $x$  元, 售出的背包数由  $n = -\frac{a}{x-40} + b(80-x)$  给出, 其中  $a, b$  为正常数, 问什么样的售出价格能带来最大利润?

### 六、证明题: (本题 5 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) \leq 0$ , 记  $F(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a}$ , 证明: 在  $(a, b)$  内有  $F'(x) \leq 0$ .

## 长沙理工大学考试试卷

2016-2017 学年本部高数 A (一)

### 一、选择题: (本题总分 16 分, 每小题 4 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{x + 3}$  的值为 ( )

A. 2

B. -2

C.  $\pm 2$

D. 不存在

2. 下列函数  $f(x)$  在  $[-1, 2]$  上满足罗尔中值定理条件的是( )

A.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$     B.  $f(x) = x^2|x|$     C.  $f(x) = \arccos x$     D.  $f(x) = \cot \frac{\pi x}{2}$

3. 下列函数中, 哪一个不是  $\sin 2x$  的原函数 ( )

A.  $\sin^2 x$     B.  $-\cos^2 x$     C.  $-\cos 2x$     D.  $5\sin^2 x + 4\cos^2 x$

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\frac{d}{dx} \left[ x \int_a^b f(x) dx \right] = ( )$

A.  $\int_a^b f(x) dx$     B.  $bf(b) - af(a)$   
C.  $x[f(b) - f(a)] + \int_a^b f(x) dx$     D.  $\int_a^b f(x) dx + xf(x)$

二、填空题: (本题总分 16 分, 每小题 4 分)

1. 函数  $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)} + \arcsin \frac{x-1}{3}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $y = \pi^x + x^a$ , 则  $y' =$ \_\_\_\_\_.

4. 若  $a < 0$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ \_\_\_\_\_.

三、计算题: (本题总分 50 分, 每小题 10 分)

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x \cos x}}{x^3}$ .

2. 设参数方程  $\begin{cases} x = \ln(\sin t + \sqrt{1 + \sin^2 t}) \\ y = \sqrt{1 + \sin^2 t} \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

3. 计算不定积分  $\int 2x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ , 其中  $|x| < 1$ .

4. 计算定积分  $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^9 \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$ .

5. 求函数  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调区间与极值.

四、应用题: (本题 10 分)

在曲线  $y = x^2 + 1$  上求一点  $M$ , 使它到点  $M_0(5, 0)$  的距离最小.

五、证明题: (本题 8 分)

设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 可导且  $f'(x)$  单调递增,  $x_0 \in (a, b)$ , 记  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ ,

证明:  $\varphi(x)$  在  $(a, b)$  内也单调递增.

# 长沙理工大学考试试卷

2016-2017 学年本部高数 B (一)

## 一、填空题: (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 如果  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  与  $a \sin^2 \frac{x}{2}$  是等价无穷小, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

2. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$  的可去间断点为\_\_\_\_\_.

3. 函数  $y = xe^{-x}$  的拐点为\_\_\_\_\_.

4. 已知  $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ , 则  $dy|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} =$ \_\_\_\_\_.

5. 微分方程  $y'' + 8y' + 15y = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

## 二、求下列极限: (本题总分 12 分, 每小题 6 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1};$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$

## 三、求下列导数: (本题总分 12 分, 每小题 6 分)

1. 设  $y = e^{-x} \sin x$ , 求  $y''$ ;

2. 已知  $y = \tan(x+y)$ , 求  $y'$ .

## 四、求下列积分: (本题总分 18 分, 每小题 6 分)

1.  $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$

2.  $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx;$

3.  $\int_{-2}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx.$

## 五、解答题: (本题总分 30 分, 每小题 10 分)

1. 当  $a$  为何值时,  $y = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处有极值? 求此极值, 并说明是极大值还是极小值.

2. 求抛物线  $y^2 = 2x$  与其在点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  处的法线所围成的图形的面积.

3. 求微分方程  $xy' + 2y = x \ln x$  满足条件  $y(1) = -\frac{1}{9}$  的解.

## 六、证明题: (本题 8 分)

设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 证明:  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$