长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）　线性代数　　课程代号　0701001215

专　业　土木、汽机等　层次（本、专）　本科　　考试方式（开、闭卷）　闭卷

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 方程 $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ 的根是(　).

(A) 0 或 -1　　(B) 0 或 1　　(C) -1 或 1　　(D) 无根

2. 设α_1，α_2，α_3是齐次线性方程组$Ax = 0$的一个基础解系，则下列向量组也是该方程组的一个基础解系的是(　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$　　(D) $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$

3. 设 λ 是正交矩阵A的一个实特征值，则下列结论正确的是(　).

(A) $\lambda^2 = 1$　　(B) $\lambda = 1$　　(C) $\lambda = -1$　　(D) $\lambda = 0$

4. 设A、B、C均为n阶矩阵，且$AB = BC = CA = E$，其中E为n阶单位矩阵，则$A^2 + B^2 + C^2 =$(　).

(A) O　　(B) E　　(C) $2E$　　(D) $3E$

5. 已知a_1，a_2，a_3，a_4为 3 维列向量，下列结论正确的是(　).

(A) a_1，a_2，a_3，a_4是线性无关的　　(B) a_1一定能由a_2，a_3，a_4线性表示

(C) $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$　　(D) a_1，a_2，a_3，a_4是线性相关的

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，则$A^2B =$ ________.

2. 设方阵A满足$A^2-A-2E=O$，则$(A+2E)^{-1}=$ ____________.

3. 若η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，ξ是其导出组$Ax=0$的解，则$2\xi+\eta^*$为线性方程组____________的解.

4. 设方阵A与$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$是相似的，则$A$的特征值为____________.

5. 已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$x=Py$可化成标准形$f=6y_1^2$，则$a=$ ____________.

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 计算行列式的值$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$

2. 求线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=1\\ x_1-x_2-x_3+x_4=3\\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=4\end{cases}$的通解.

3. 向量组α_1，α_2，α_3线性无关，若$\alpha_1+t\alpha_2$，$2\alpha_1+\alpha_2+t\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$亦线性无关，求$t$的值.

4. 设A为三阶实对称矩阵，$R(A)=2$，且$A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求$A$的全部特征值与特征向量.

5. 判别二次型$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$的正定性.

四、证明题（本题总分 10 分）

设A、B均为n阶方阵，且$A^2=A$，$B^2=B$，证明：$(A+B)^2=A+B$的充分必要条件是$AB+BA=O$.

试卷编号 07 拟题教研室（或教师）签名＿＿＿＿＿＿＿＿教研室主任签名＿＿＿＿＿＿＿＿

长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）＿线性代数＿ 课程代号＿0701001215＿

专　业＿土木、汽机等＿层次（本、专）＿本科＿ 考试方式（开、闭卷）＿闭卷＿

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1.B　2.A　3.A　4.D　5.D

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1.$\begin{bmatrix}21 & 0\\ 7 & 14\end{bmatrix}$　2.$\frac{1}{4}(3E-A)$　3.$Ax=b$　4.-2，2，4　5.2

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1.原式 $=\begin{vmatrix}0 & 1+ab & a & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}=-1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab & a & 0\\ -1 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}$……(5 分)

$=\begin{vmatrix}1+ab & a & ad\\ -1 & c & 1+cd\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=-1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1+ab & ad\\ -1 & 1+cd\end{vmatrix}$

$=abcd+ab+ad+cd+1$……………………(10 分)

2.$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$……………(5 分)

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$……………………(10 分)

3.$(\alpha_1+t\alpha_2\quad 2\alpha_1+\alpha_2+t\alpha_3\quad \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ t & 1 & 2\\ 0 & t & -1\end{pmatrix}$..(5 分)

由已知有$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ t & 1 & 2\\ 0 & t & -1\end{vmatrix}=t^2-1\neq 0$，$t\neq\pm1$……………………(10 分)

4. 记$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则$Ap_1=-p_1$，$Ap_2=p_2$

特征值：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$

$R(A)=2<3$，$|A|=0$，故$\lambda_3=0$……………………………………(4 分)

A为三阶实对称矩阵，故$\lambda_3=0$ 对应的特征向量p_3与p_1，p_2是正交的

$\begin{pmatrix}p_1^T\\p_2^T\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$……………………………(8 分)

$k_1p_1(k_1\neq 0)$为特征值 $\lambda_1=-1$ 对应的全部特征向量，

$k_2p_2(k_2\neq 0)$为特征值$\lambda_2=1$ 对应的全部特征向量，

$k_3p_3(k_3\neq 0)$为特征值$\lambda_3=0$ 对应的全部特征向量…………………………(10 分).

5. $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{bmatrix}$……………………………………………………(3 分)

$1>0$，$\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=2>0$，$\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0$，$\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{vmatrix}=24>0$

二次型f是正定的……………………………………………………………(10 分)

四、证明题（本题总分 10 分）

必要性：$(A+B)^2=A+B$，$A^2=A$， $B^2=B$

$\therefore$ $A^2+B^2+AB+BA=A+B+AB+BA=A+B$

$\therefore$ $AB+BA=O$……………………………………………………(5 分)

充分性：$AB+BA=O$，$A^2=A$， $B^2=B$

$\therefore$ $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA=A+B+O=A+B$ ……(10 分)