长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）<u>线性代数</u>　　课程代号<u>0701001215</u>

专　业<u>土木、汽机等</u>层次（本、专）<u>本科</u>　考试方式（开、闭卷）<u>闭卷</u>

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 已知$D=\begin{vmatrix}-8&7&4&3\\6&-2&3&-1\\1&1&1&1\\4&3&-7&5\end{vmatrix}$，则$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=(\quad)$.

$(A)-3$　　$(B)-2$　　$(C)-1$　　$(D)\ 0$

2. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$，则下列结论正确的是(　).

$(A)\ AB=BA$　　$(B)\ (A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(C)\ (A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　$(D)\ (A+B)^T=A^T+B^T$

3. 设α_1，α_2是线性方程组$Ax=b$的解，β是其导出组$Ax=0$的解，则下列结论正确的是(　).

$(A)\ \alpha_1+\beta$是$Ax=0$的解　　$(B)\ \beta+(\alpha_1-\alpha_2)$是$Ax=0$的解

$(C)\ \alpha_1+\alpha_2$是$Ax=b$的解　　$(D)\ \alpha_1-\alpha_2$是$Ax=b$的解

4. 下列与可逆矩阵A有相同特征值的矩阵是(　).

$(A)\ A^{-1}$　　$(B)\ A^2$　　$(C)\ A^T$　　$(D)\ A^*$

5. 设$m\times n$矩阵A的秩$R(A)=m-1$，则A的行向量组是(　).

(A)线性相关的　　(B)线性无关的

(C)正交的　　(D)任意向量都可由其余向量线性表示

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 设A为$m\times n$矩阵，且$R(A)=r$，若D为A的一个$r+1$阶子式，则$D=$__________.

2. 设$A=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&2&5\\1&0&0\end{bmatrix}$，则$(A^T)^{-1}=$__________.

3. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$，则$\beta$由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示的表达式为____________.

4. 设三阶矩阵A的特征值为 2，3，λ，行列式$|2A|=-48$，则 $\lambda=$ ____________.

5. 已知$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$，则二次型$f$的秩$R_f$ = ____________.

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 解矩阵方程$X\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$.

2. 求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=1\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=3\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=3\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=5\end{cases}$的通解.

3. 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\7\\-1\end{pmatrix}$的秩与一个最大线性无关组.

4. 求一个正交变换$x=Py$，化二次型$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$为标准形.

5. 设$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$是相似的，(1)求$x$与$y$的值；(2)求$A$的特征值.

四、证明题（本题总分 10 分）

证明：$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$.

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：<u>线性代数</u>　　　　　　试卷编号：05

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. D　　2. D　　3. B　　4. C　　5. A

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 0　　2. $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　3. $\beta = \alpha_1 - 3\alpha_2$　　4. -1　　5. 2

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. $(A^T \quad B^T) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}$ …(6 分)

$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -8 & 15 & -2 \end{bmatrix}$ ……………………………………………………(10 分)

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ …(5 分)

通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ………………(10 分)

3. $(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ……(5 分)

$R(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4) = 2$，一个最大线性无关组$\alpha_1$，$\alpha_2$ ………………………………(10 分)

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$

A的特征值为：$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 4$ ……………………………………………(3 分)

(1)当$\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$A-2E=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$p_1=\dfrac{\xi_1}{||\xi_{1}||}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\dfrac{\xi_2}{||\xi_{2}||}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$……………………..………..…(6 分)

(2)当$\lambda_3=4$ 时，$A-2E=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\dfrac{\xi_3}{||\xi_{3}||}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$P=(p_1\quad p_2\quad p_3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

当$x=Py$时，$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$……………..……………..…..…(10 分)

5.$\begin{cases}tr(A)=2+0+x=2+y-1=tr(B)\\|A|=-2=-2y=|B|\end{cases}$，　$x=0$ ，$y=1$………..…(6 分)

A的特征值为：2，1，-1…………………………………………………..………..…(10 分)

四、证明题（本题总分 10 分）

左边$=\begin{vmatrix}b&c+a&a+b\\b_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$……………(3 分)

$=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\b_1&c_1+a_1&a_1\\b_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\c_1&a_1&a_1+b_1\\c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$……………..…………….…..…(6 分)

$=\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=$ 右边…………..…(10 分)