长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)　　　　试卷编号：11

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $30\sqrt{3}$　2. $\dfrac{14}{\sqrt{5}}$　3. $\dfrac{x-8}{8}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-2\ln 2}{1}$　4. $\dfrac{y+ze^{-xz}}{y+xe^{-xz}}$　5. 4

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial x}=2xf_1'$　(1 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial y}=e^y\cos e^y f_2'+\dfrac{1}{y}f_3'$　(4 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(f_{12}''\cdot e^y\cos e^y+f_{13}''\dfrac{1}{y})$　(7 分)

2. 解 $\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y}f(x,y)dx$(3 分)

$\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-x}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$

(7 分)

3. 解

$$\begin{aligned}\oint_L(x^2+y^2)^n ds &= \int_0^{2\pi}(4\cos^2 t+4\sin^2 t)^n\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}dt\\ &=\int_0^{2\pi}2^{2n+1}dt=2^{2(n+1)}\pi\end{aligned}$$

(4+3=7 分)

4. 解 由条件有 $f'(x)=\dfrac{\partial}{\partial y}[(\sin x-f(x))\dfrac{y}{x}]$, 所以 $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　(3 分)

解得 $f(x)=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$, 因为 $f(\pi)=1$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}(-\cos x+\pi-1)$.　(7 分)

5. 解

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega(x+y+z)dv &= \iiint_\Omega xdv+\iiint_\Omega ydv+\iiint_\Omega zdv\\ &=0+0+\iiint_\Omega zdv\\ &=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 zdz=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(2+3+2=7 分)

6. 解 因为 $\rho=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{2^{n+1}\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\frac{\pi}{3^n}}=\dfrac{2}{3}<1.$　(5 分)

故原级数收敛.　(7 分)

三. 解 易求得原级数的收敛半径是 $R=1$, 收敛域为 $[0,2)$.　(2 分)

设 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$, 则 $S(0)=0$, $S'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}$.　(6 分)

故 $S(t)=-\ln(1-t)$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n}=-\ln(2-x)$　(10 分)

四. 解 $z = x^2 + (1-x)^2 + 1 = 2x^2 - 2x + 2$ (2 分)

令 $z' = 4x - 2 = 0$, 得 $x = 1/2$. (4 分)

$z'' = 4 > 0$, 所以 $x = 1/2$ 是极小值点, (8 分)

故 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在 $y = 1 - x$ 下的极小值点为 $(1/2, 1/2)$, 极小值为 $3/2$. (10 分)

五. 解 过直线 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ 的平面束为 $x - y + z + \lambda(2x - y - 2z - 1) = 0$, (2 分)

即 $(1+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (1-2\lambda)z - \lambda = 0$, 令此平面与已知平面垂直, 得得 $3(1+2\lambda) + (1+\lambda) + 3(1-2\lambda) = 0$, 所以 $\lambda = -7$. (6 分)

所以过已知直线且与已知平面垂直的平面方程为 $-13x + 6y + 15z + 7 = 0$. (8 分)

故所求投影为平面 $-13x + 6y + 15z + 7 = 0$ 与 $3x - y + 3z = 1$ 的交线。 (10 分)

六. 解 曲面在点 M 处的法线方向向量为 $\vec{n} = \left(-e^{\frac{y}{x}}(1 - \frac{y}{x}), -e^{\frac{y}{x}}, 1\right)$ (4 分)

$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$, 得证。 (8 分)