本部高等数学 A（一）期末考试试卷二

一、选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1、试确定当 $x\to 0$ 时，下列哪一个无穷小量是关于 x 的 3 阶无穷小（　　）。

(A) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$　　　　(B) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$（$a>0$ 是常数）

(C) $x^3+0.0001x^2$　　　　(D) $\sqrt[3]{\tan x}$

答案：B。考点：无穷小的阶。

解答：当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$，故 A 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(a+x^3\right)-a}{x^3\left(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$，故 B 是 x 的 3 阶无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+0.0001x^2}{x^2}=0.0001$，

故 C 是 x 的 2 阶无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}}{x^{\frac{1}{3}}}=1$，故 D 是 x 的 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小。

注：（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^k}=C$（$C\neq 0$，$k>0$），则称当 $x\to 0$ 时，α 为 x 的 k 阶无穷小。

（2）两个无穷小的和、差的阶取其最小者，两个无穷小的乘积的阶取二者阶的和。

2、$d\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)=$（　　）。

(A) $-\dfrac{1}{1+x^2}dx$　　(B) $\dfrac{1}{1+x^2}dx$　　(C) $\dfrac{x}{1+x^2}dx$　　(D) $-\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

答案：A。考点：微分的计算。

解答：$d\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)=\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)'dx=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$。

3、设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $x=a$ 为（　　）。

(A) $f(x)$ 的极大值点　　　　(B) $f(x)$ 的极小值点

(C) 不是 $f(x)$ 的驻点　　　　(D) $f(x)$ 的驻点但不是极值点

答案：A。考点：极值的定义，函数取得极值的条件。

解答：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$，则由极限的局部保号性，存在 $\delta>0$，当 $x\in\overset{o}{U}(a,\delta)$ 时，

有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，$f(x)-f(a)<0$。即当 $x\in \overset{o}{U}(a,\delta)$ 时，$f(x)<f(a)$。由极值的定义

可知 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点。又 $-1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a}$，故分子

的极限存在且等于0，即 $f'(a)=0$，$x=a$ 是 $f(x)$ 的一个驻点。

4、设 $f(x)=x^3+x$，则定积分 $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ 的值等于（　　）。

(A)　0　　(B)　8　　(C)　$\int_0^2 f(x)dx$　　(D)　$2\int_0^2 f(x)dx$

答案：A。考点：定积分的对称性。

解答：$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续且为奇函数，则 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的积分等于 0。

5、微分方程 $2y''+5y'=\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（　　）。

(A)　$A\cos 2x+B\sin 2x$　　(B)　$Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$

(C)　$A+B\cos 2x$　　(D)　$Ax^2+B\cos 2x+C\sin 2x$

答案：A。考点：二阶常系数非齐次线性微分方程的待定系数法。

解答：该方程右端可写为 $f(x)=e^{0x}(1\cdot\cos 2x+0\cdot\sin 2x)$，且对应齐次方程的特征方程为

$2r^2+5r=0$，$\lambda=0$，$\omega=2$，$\lambda\pm i\omega$ 不是特征方程的根，故可设该非齐次方程的特解为

$y^*=x^0\cdot e^{0x}(a\cdot\cos 2x+b\cdot\sin 2x)=a\cos 2x+b\sin 2x$，其中 a、b 为常数。

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1、微分方程 $\dfrac{1}{x}y''=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的通解是____________________。

答案：$y=\dfrac{1}{2}x\ln(1+x^2)-x+\arctan x+C_1x+C_2$。考点：可降阶的高阶方程。

解答：$y''=\dfrac{x}{1+x^2}$，两边同时积分，$y'=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1$，两边再次同时积分，可得

$$y=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)dx+C_1x\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int xd\ln(1+x^2)+C_1x$$

$$=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{x}{1+x^2}\cdot 2xdx+C_1x=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=\frac{1}{2}x\ln\left(1+x^2\right)-\left(x-\arctan x\right)+C_1x+C_2=\frac{1}{2}x\ln\left(1+x^2\right)-x+\arctan x+C_1x+C_2$$

2、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(t)dt=x(1+\cos x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$__________。

答案：$1-\frac{\pi}{2}$。考点：变限积分的导数公式。

解答：$\int_0^x f(t)dt=x(1+\cos x)$，两边同时求导，$f(x)=(1+\cos x)-x\sin x$，则

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}。$$

3、设 $y=\cos(2x-1)+\arctan x$，则 $\frac{dy}{dx}=$____________________。

答案：$-2\sin(2x-1)+\frac{1}{1+x^2}$。考点：导数的运算法则。

解答：$\frac{dy}{dx}=y'=-\sin(2x-1)\cdot 2+\frac{1}{1+x^2}=-2\sin(2x-1)+\frac{1}{1+x^2}$。

4、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=1+xe^y$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$_______________。

答案：$\frac{e^y}{1-xe^y}$ 或 $\frac{e^y}{2-y}$。考点：隐函数求导法。

解答：在方程 $y=1+xe^y$ 的两边同时对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，于是

$$y'=e^y+xe^y\cdot y',\quad y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{1-(y-1)}=\frac{e^y}{2-y}。$$

5、$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=$____________。

答案：0。考点：极限的运算法则

解答：当 $x\to 0^+$ 时，括号里趋向 $\frac{2}{5}$，指数趋向 $+\infty$，由指数函数图像可知该极限为 0。

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1、求不定积分：$\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$。

考点：不定积分的分部积分法。

解答：$\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx=\int e^{2x}\left[\left(\tan^2 x+1\right)+2\tan x\right]dx=\int e^{2x}\left[\sec^2 x+2\tan x\right]dx$

$$=\int e^{2x}\cdot\sec^2 xdx+2\int e^{2x}\tan xdx=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan xdx$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=}\left(e^{2x}\tan x-\int\tan x de^{2x}\right)+2\int e^{2x}\tan x dx$$

$$=\left(e^{2x}\tan x-\int\tan x\cdot 2e^{2x}dx\right)+2\int e^{2x}\tan x dx+C=e^{2x}\tan x+C\text{。}$$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$。

考点：洛必达法则，极限的四则运算。

解答：当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x\to\infty$，$\dfrac{1}{1+\ln x}\to 0$。又 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$，则

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{x}{1+\ln x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)\cdot\frac{1}{1+\ln x}}=e^{0\cdot 0}=1\text{。}$$

3、已知 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

考点：高阶导数。

解答：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$，于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\text{。}$$

4、求函数 $y=2e^x+e^{-x}$ 的极值。

考点：函数的极值。

解答：该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $y'=2e^x-e^{-x}=\dfrac{2e^{2x}-1}{e^x}$。令 $y'=0$，得驻点 $x=-\dfrac{1}{2}\ln 2$。当 $x<-\dfrac{1}{2}\ln 2$ 时，$y'<0$；当 $x>-\dfrac{1}{2}\ln 2$ 时，$y'>0$。$x=-\dfrac{1}{2}\ln 2$ 是函数的极小值点，极小值为 $y\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)=2e^{-\frac{1}{2}\ln 2}+e^{\frac{1}{2}\ln 2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。

5、计算定积分：$\int_1^e\sin\ln x dx$。

考点：定积分的分部积分法。

解答：$\int_1^e\sin(\ln x)dx\overset{\text{令}\ln x=t}{=}\int_0^1\sin t\cdot e^t dt=\int_0^1\sin t de^t=e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t d\sin t$

$$=e\sin 1-\int_0^1 \cos t\cdot e^t dt=e\sin 1-\int_0^1 \cos t de^t=e\sin 1-e^t\cos t\Big|_0^1+\int_0^1 e^t d\cos t$$

$$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_0^1 e^t\sin t dt,$$

$$\therefore\ \int_0^1 e^t\sin t dt=\frac{1}{2}\left(e\sin 1-e\cos 1+1\right)。$$

四、证明题（本题 10 分，共计 1 小题）

设 $a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$。

考点：拉格朗日中值定理。

证明：令 $f(x)=\ln x$，易知 $f(x)$ 满足（1）$[b,a]$ 上连续；（2）(b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $b<\xi<a$，使得 $\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}=\dfrac{1}{\xi}$，又 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，故

$$\frac{1}{a}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}，即 \frac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{b}，即 \frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}。$$