试卷编号__________　拟题教研室(或教师)签名__________　教研室主任签名__________

长沙理工大学考试试卷

课程名称(含档次) 《高等代数》(一)　　课程代号__________

专　业　数学、信计、统计　层次(本、专)　本　科　考试方式(开、闭卷)　闭　卷

一、填空题（总分20分，每小题4分）

1. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则常数$m, n$满足条件____时,向量组$\alpha_2 + m\alpha_1$, $n\alpha_3 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$线性无关.

2. 已知n阶方阵A满足$A^2 - 2A - 3E = 0$, 则$(A - E)^{-1} =$____

3. 设分块矩阵$T = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$, 其中$A, B$可逆, 则$T^{-1} =$____ .

4. 设n阶A的行列式为4, 则$|5A^*| =$______.

5. 设$f(x) = x^3 + 3x - 1$, $g(x) = x + 2$, 则$f(x)$除以$g(x)$的商式是______.

三、计算题（总分55分，第1-4题，每小题10分，每5题15分）

1. 求下列向量组的秩，并找出其一组最大线性无关组，并将其余向量用最大线性无关组线性表示。

$$\alpha_1 = (1, 1, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, -1, -2, 4)^T, \alpha_3 = (0, 2, 6, -2)^T, \alpha_4 = (-3, -1, 3, 4)^T, \alpha_5 = (-1, 0, -4, -7)^T.$$

2. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且$AX = A + X$, 求$X$.

3. 计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

4. 求多项式$f(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$的有理根及根的重数.

5. k为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解？若有解, 求出其全部解。

四、证明题（总分25分，每1题10分，第2题15分）

1. 证明：若$(x^2+x+1)|\left(f_1(x^3)+xf_2(x^3)\right)$, 则$(x-1)|f_1(x)$, $(x-1)|f_2(x)$.

2. 设A 为n阶方阵，α 为n 维列向量，证明
（1）如果$A^{k-1}\alpha \neq 0$, 但$A^k\alpha=0$, 则$\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha (0<k\leq n)$ 线性无关；
（2）秩(A^{n+1}) =秩(A^n).