一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1．函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在区域 D 满足 $C.-R.$ 条件且 u_x,u_y,v_x,v_y 在内 D 连续，是 $f(z)$ 在区域 D 内解析的______条件。

A. 必要非充分　　B. 充分非必要　　C. 充分必要　　D.以上都不对

2．设 $z=x+iy$，则 $\left|e^{z^2}\right|=$____________。

A. $e^{|z|^2}$　　B. $e^{x^2-y^2}$　　C. $e^{\left|x^2-y^2\right|}$　　D. $\left|e^{x^2-y^2}\right|$

3. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在 $z=2+4i$ 处收敛，则该级数在 $z=3\text{-}3i$ 处的敛散性为（　）。

A．绝对收敛　　B．条件收敛　　C．发散　　D．不能确定

4．设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内解析，k 为正整数，则 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^k},0\right]=$（　）。

A．$(k-1)!a_{k-1}$　　B．$k!a_k$　　C．a_k　　D．a_{k-1}

5．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{(e^{z^2}-1)(1-\cos z)}{z^3\sin^3 z}$ 的（　）。

A.本性奇点；　　B.可去奇点；　　C.二级极点；　　D. 连续点.

二、　填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1．$\lim\limits_{z\to(1+i)}\dfrac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=$________________。

2. 设 C 是 $z=e^{it}\sin^2 t$，t 从 0 至 $\dfrac{\pi}{2}$ 的弧段，则 $\int\limits_C ze^{z^2}dz=$_______。

3．$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+e^z\cos z}{2z-5i}dz=$________。

4．设 $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)\sin^2 z}{2z^3}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$_____________.

5．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n n^n}(z-i)^n$ 的收敛圆为___________。

三、计算下列各式的值（本题总分 20 分，每小题 5 分）

1．$\sqrt[3]{1-i}$　　2．$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8}$　　3．$(-i)^{(-i)}$　　4．$\exp(\dfrac{1+i\pi}{4})$

三、　解下列各题（本题总分20分，每小题5分）

1、求级数$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n$的收敛半径与和函数。

2、已知$u(x,y)=e^x Siny$，求以$u(x,y)$为实部的解析函数$f(z)=u+iv$。

3、将函数$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，在圆环$0<|z+i|<2$内展开成洛朗级数。

4、若函数$f(z)$与$\overline{f(z)}$在区域D内都解析，试证：$f(z)$在区域D内必为常数。

五．计算下列积分(本题总分24分，每小题6分)

1．求积分$I=\int_c \dfrac{2z-3}{z}dz$的值，其中$C$为从$-1$到$1$的上半圆周。

2、求积分$I=\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{2z-1}{z(z-1)}dz$。

3、计算积分$\int_C \dfrac{\cos z}{(z-i)^4}dz$，其中$C$绕$i$一周的围线。

4．利用留数计算定积分$\int_0^{\pi} \dfrac{\cos mx}{5-4\cos x}dx$　（m是正整数）。

六、(本题6分) 利用拉氏变换求微分方程$y''-y'-6y=e^{-t}$ 满足初值条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$的解。

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1.C　　2.B　　3.A　　4. D　　5.C

二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1、 $\frac{3-i}{4}$ ；　　2. $\frac{1-e}{2e}$；　　3. 0;　　4. 0;　　5. $|z-i|<2e$；

三．计算下列复数的值（本题总分 20 分，每小题 5 分）

1. $\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}(Cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{3}+iSin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{3}),(k=0,1,2,)$ （5 分）

2. $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8}=\frac{2^4[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})]^4}{2^4[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]^8}=\frac{\cos(-\frac{4\pi}{6})+i\sin(-\frac{4\pi}{6})}{\cos(-\frac{8\pi}{4})+i\sin(-\frac{8\pi}{4})}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$（5 分）

3. $(-i)^{-i}=e^{-iLn(-i)}=e^{-i\bullet i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},(k=0,\pm1....)$ （5 分）

4． $\exp(\frac{1+i\pi}{4})=\exp(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}i)=e^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=e^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ （5 分）

四、解下列各题 (本题总分 20 分，每小题 5 分)

1、解：收敛半径 R＝1（3 分），和函数 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^n=z^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$，

由于 $\int_0^z\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}dz=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^z n(n-1)z^{n-2}dz=\sum_{n=2}^{\infty}nz^{n-1}$ 以及

$\int_0^z\sum_{n=2}^{\infty}nz^{n-1}dz=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^z nz^{n-1}dz=\sum_{n=2}^{\infty}z^n=\frac{z^2}{1-z}$ （$|z|<1$）（3 分）

所以 $S(x)=z^2\cdot\left(\frac{z^2}{1-z}\right)''=\frac{2z^2}{(1-z)^3}$ （$|z|<1$） （5 分）

2、 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\,\mathrm{Sin}\,y, v=-e^x\,\mathrm{Cos}\,y+g(x)$（3 分）

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\,\mathrm{Cos}\,y=-\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\,\mathrm{Cos}\,y-g'(x), g(x)=c$ 　 $f(z)=-ie^z+ic$（5 分）

3、解：$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ **(2 分)** $\dfrac{1}{z-i}=-\dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{1-\dfrac{z+i}{2i}}=-\dfrac{1}{2i}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\dfrac{z+i}{2i})^{k}$ **(4 分)**

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{k-1}}{(2i)^{k+1}}\qquad (0<|z+i|<2)\quad \textbf{(5 分)}$$

4、证明：设 $f(z)=u+iv$.则 $\overline{f(z)}=u-iv$，由 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 均在 D 内解析，由 C.-R.条件知（1）$u_x=v_y,u_y=-v_x$,（2）$u_x=-v_y,u_y=v_x$,从而得 $u_x=u_y=v_x=v_y=0$，故 u,v 均为常数，$f(z)$ 为常数。（5 分）

五．计算下列积分(本题总分 24 分，每小题 6 分)

1、解：曲线方程： $z=e^{i\theta}$ ，θ：$\pi\to 0$ (3 分)

$$I=\int_{\pi}^{0}(2-\frac{3}{e^{i\theta}})ie^{i\theta}d\theta=2i\int_{\pi}^{0}(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta-3i\int_{\pi}^{0}d\theta\ =4+3\pi i\ （6 分）$$

2、解：$I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{2z-1}{z(z-1)}dz=\oint\limits_{|z|=2}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}\right)dz$（4 分）$=2\pi i+2\pi i=4\pi i$.（6 分）

3、解：$\int_{c}\dfrac{\cos z}{(z-i)^4}=2\pi i\dfrac{(\cos z)^{(3)}}{3!}\Big|_{z=i}=\dfrac{\pi i}{3}\sin i=\dfrac{\pi i}{3}\dfrac{e^{-1}-e}{2i}=\dfrac{\pi}{6}(\dfrac{1}{e}-e$)（6 分）

4、解：$\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{\cos mx}{5-4\cos x}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\cos mx}{5-4\cos x}dx=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\cos mx}{5-4\cos x}dx+i\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin mx}{5-4\cos x}dx\right]$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{imx}}{5-4\cos x}dx=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^m}{5-4\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2-2z^2}dz,\quad（4 分）$$

由于 $f(z)=\dfrac{z^m}{5z-2-2z^2}$ 在 $|z|<1$ 内仅有一个一级极点 $z=\dfrac{1}{2}$，

且 $\mathrm{Re}\,s[f(z),\dfrac{1}{2}]=\dfrac{1}{3\cdot 2^m}$，所以 $\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{\cos mx}{5-4\cos x}dx=\dfrac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{1}{3\cdot 2^m}=\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}$（6 分）

六、**(本题 6 分) 解**：设 $L[y(t)]=F(s)$，方程两边进行拉氏变换，得

$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-[sF(s)-y(0)]-6F(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow\ （4 分）$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-3)(s+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{s-3}+\frac{\frac{-1}{4}}{s+1}\Rightarrow\ y(t)=\frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}.\ （6 分）$$