试卷编号 __17__ 拟题教研室 (或教师) 签名 __公共数学 (一)__ 教研室主任签名 ______

长沙理工大学考试试卷

课程名称(含档次) __高等数学 B(二)__ 课程代号 __001680__

专 业 ________ 层次 (本部、城南) __本 部__ 考试方式 (开、闭卷) __闭 卷__

一. 填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. 已知 $\vec{a} = (2, 2, 1), \vec{b} = (8, 10, 6)$, 则与 $\vec{a}, \vec{b}$ 都垂直的单位向量是 ________

2. 设 $z = (1 + xy)^y$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ________.

3. 函数 $u = x^3 - xy^2 - z$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处沿 ________ 方向的方向导数最小.

4. 将二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(x, y)dy$ 转化为极坐标形式的二次积分，得 ________.

5. $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$ ________.

二. 计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 设函数 $u = f(xy, y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

2. 计算二重积分 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域。

3. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 的平行于平面 $x + 2y + z = 4$ 的切线方程。

4. 设有一物体，占有空间区域为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x$, 计算该物体的质量。

5. 在通过 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中，求一条曲线 L，使该曲线从 O 到 A 积分 $\int_L (1 + y^3)dx + (2x + y)dy$ 的值最小。

6. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ 的敛散性, 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

三.(10 分) 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x}$ 在 $x = 1$ 展开成幂级数。

四.(10 分) 验证 $4 \sin x \sin 3y \cos x dx - 3 \cos 3y \cos 2x dy$ 在整个 xoy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分，并求 $u(x, y)$.

五.(10 分) 求过点 $A(-1, 0, 4)$, 平行于平面 $3x - 4y + z = 10$, 且与直线 $x + 1 = y - 3 = \dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

六.(8 分) 设 $z = \dfrac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数，验证 $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.