长沙理工大学本部高等数学 A（二）期中考试试卷

一、选择题：1～4 小题，每小题 5 分，共 20 分。下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将所选项前的字母写在答题纸上。

1、若直线 $L:\begin{cases}x-2y+z-9=0\\3x+Ay+z-B=0\end{cases}$ 在 xoy 平面上，则（　　）。

A. $A=6$，$B=27$　　　　B. $A=-6$，$B=27$

C. $A=6$，$B=-27$　　　　D. $A=-6$，$B=-27$

答案：B。考点：空间直线的方程、平面束方程。

解答：

方法一：因为直线在 xoy 面上，即 $z=0$ 通过两平面的交线。由平面束方程，必存在 $\lambda_0\in R$，使得 $z=0$ 可表示为

$$\left(x-2y+z-9\right)+\lambda_0\left(3x+Ay+z-B\right)=0,$$

$$\left(1+3\lambda_0\right)x+\left(-2+A\lambda_0\right)y+\left(1+\lambda_0\right)z+\left(-9-B\lambda_0\right)=0,$$

所以 $\begin{cases}1+3\lambda_0=0\\-2+A\lambda_0=0\\-9-B\lambda_0=0\end{cases}$，得 $A=-6$，$B=27$。

方法二：由已知条件，该直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\3&B&1\end{vmatrix}=\left(-2-A,2,A+6\right)$。因为 L 在 xoy 面上，故 $\vec{s}\perp z$ 轴，即 $\left(-2-A,2,A+6\right)\cdot\left(0,0,1\right)=0$，可得 $A=-6$。将 A 代入直线方程，有 $L:\begin{cases}x-2y+z-9=0\\3x-6y+z-B=0\end{cases}$。注意 L 在 xoy 面上，其上的点的坐标均为 $\left(x,y,0\right)$，又该方程组的每一个解对应着直线上的一个点，故将 $z=0$ 代入后，该方程组应有无穷多解，由此可得 $B=27$。

2、二元函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处的两个偏导数 $f_x\left(x_0,y_0\right)$、$f_y\left(x_0,y_0\right)$ 存在是 $f\left(x,y\right)$ 在该点连续的（　　）。

A.充分非必要条件　　B.必要非充分条件　　C.充要条件　　D.既非充分也非必要条件

答案：D。考点：多元函数连续与可导间的关系。

解答：对多元函数而言，连续不一定可导，比如 $f\left(x,y\right)=\left|x\right|$，它在 $\left(0,0\right)$ 处是连续的，但它在 $\left(0,0\right)$ 处

对 x 的偏导数不存在，故不可导；可导不一定连续，比如 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$，它在 $\left(0,0\right)$ 处 $f_x\left(0,0\right)=0$、$f_y\left(0,0\right)=0$，可导，但它在 $\left(0,0\right)$ 处的极限不存在，故不连续。

3、设 $u=f\left(x+y,xz\right)$ 有二阶连续的偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$（　　）。

A. $f_2'+xf_{11}''+\left(x+z\right)f_{12}''+xzf_{22}''$　　　　B. $xf_{12}''+xzf_{22}''$

C. $f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$　　　　D. xzf_{22}''

答案：C。考点：多元复合函数求导法。

解答：令 $x+y=u$，$xz=v$，注意 f、f_1 和 f_2 的复合关系图是一样的，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1\cdot 1+f_2\cdot z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial\left(f_1+zf_2\right)}{\partial z}=\frac{\partial\left(f_1\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(zf_2\right)}{\partial z}=\left(f_{12}\cdot x\right)+\left(1\cdot f_2+z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)=\left(f_{12}\cdot x\right)+\left(f_2+z\left(f_{22}\cdot x\right)\right)。$$

4、设积分区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，$I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)^2 d\sigma$，则（　　）。

A. $I_3>I_2>I_1$　　B. $I_1>I_2>I_3$　　C. $I_2>I_1>I_3$　　D. $I_3>I_1>I_2$

答案：A。考点：二重积分的性质。

解答：$\forall\left(x,y\right)\in D$，$0\le x^2+y^2\le 1$，$0\le\left(x^2+y^2\right)^2\le x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1$，又余弦函数在 $\left[0,1\right]$ 上单调递减，则

$$\cos\left(x^2+y^2\right)^2\ge\cos\left(x^2+y^2\right)\ge\cos\sqrt{x^2+y^2},$$

故 $I_1\le I_2\le I_3$。由于三个积分的被积函数在 D 上不是恒等的，故不等式严格成立，即 $I_1<I_2<I_3$。

二、填空题：5～8 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案写在答题纸上。

5、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}}=$____________________。

答案：-8。考点：多元函数极限的计算。

解答：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}}\overset{\text{有理化}}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy\left(4+\sqrt{16+xy}\right)}{4^2-\left(\sqrt{16+xy}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}e^x=-8$ 。

6、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________________。

答案：2。考点：多元隐函数求导法。

解答：在方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 两边同时微分，可得 $dz=de^{2x-3z}+d(2y)$，于是

$$dz=e^{2x-3z}d(2x-3z)+2dy=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy,$$

$$\left(1+3e^{2x-3z}\right)dz=2e^{2x-3z}dx+2dy,\quad dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy,$$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{1+3e^{2x-3z}}$，故 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6e^{2x-3z}+2}{1+3e^{2x-3z}}=2$。

7、设 $f(x,y)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 处可微，且 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_1}\right|_A=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_2}\right|_A=0$，其中 $\vec{l}_1=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\vec{l}_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $f(x,y)$ 在点 A 处增加最快的方向为____________________。

答案：$\left(\sqrt{3},-1\right)$。考点：方向导数与梯度。

解答：由方向导数的计算公式（教材第 105 页），$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_1}\right|_A=f_x(x_0,y_0)\cos\dfrac{\pi}{6}+f_y(x_0,y_0)\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_2}\right|_A=f_x(x_0,y_0)\cos\dfrac{\pi}{3}+f_y(x_0,y_0)\sin\dfrac{\pi}{3}=0$。解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_x(x_0,y_0)+\dfrac{1}{2}f_y(x_0,y_0)=1\\ \dfrac{1}{2}f_x(x_0,y_0)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$ 可得

$$f_x(x_0,y_0)=\sqrt{3},\quad f_y(x_0,y_0)=-1。$$

故 $f(x,y)$ 在点 A 处增加最快的方向为梯度方向，即 $\left.gradf\right|_A=\left.\left(f_x,f_y\right)\right|_A=\left(\sqrt{3},-1\right)$。

8、交换积分次序，则累次积分 $\int_0^2dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy=$____________________。

答案：$\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$。考点：二重积分的计算、交换积分次序。

解答：由已知条件可知，积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le x^2\}$。因为 D 由 $x=0$、$x=2$、$y=0$ 及 $y=x^2$ 围成，其为标准的 y 型区域，故交换积分次序后为 $\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$。

三．解答题：9～14 小题，每小题 10 分，共 60 分。请将解答写在答题纸上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9、设 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=1$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角。

考点：向量的点积，两向量的夹角。

解答：令 $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$。由已知条件可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\sqrt{3}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$，则

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=2,$$

$$|\vec{m}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{7},$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=1,$$

故向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$。

10、设函数 $u(x,y,z)=x^y y^z z^x$，求 $du|_{(1,1,1)}$。

考点：多元函数的全微分。

解答：已知 $u(x,y,z)=x^y y^z z^x$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}\cdot y^z\cdot z^x+x^y\cdot y^z\cdot z^x\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x\cdot y^z\cdot z^x+x^y\cdot zy^{z-1}\cdot z^x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^y\cdot y^z\ln y\cdot z^x+x^y\cdot y^z\cdot xz^{x-1}.$$

则 $du|_{(1,1,1)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}dx+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}dy+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}dz=dx+dy+dz$。

11、在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。

考点：多元函数的极值，拉格朗日乘数法。

解答：在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任取一点 $M(x,y)$，其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}，\text{其中 } M(x,y) \text{ 的坐标 } x、y \text{ 满足方程 } x^2+4y^2=4。$$

考虑问题：$D=(2x+3y-6)^2$，条件：$x^2+4y^2=4$。由拉格朗日乘数法，构造

$$L(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda\left(x^2+4y^2-4\right),$$

解方程组 $\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$，可得 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$。

由题意分析可知，该椭圆上一定存在到已知直线距离最短和最长的点，又

$$d\Big|_{\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad d\Big|_{\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)}=\frac{11}{\sqrt{13}}。$$

故点 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 即为该椭圆上到已知直线距离最短的点，其最短距离为 $\frac{1}{\sqrt{13}}$。

12、设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，计算 $\iint\limits_D\left(4-x^2\sin x-y\right)dxdy$。

二重积分常考：对称性

画图可以直接看出

看范围

一般用在奇函数

考点：二重积分的对称性，二重积分在极坐标系下的计算。

解答：易知 D 关于 y 轴对称，故 $\iint\limits_D x^2\sin x dxdy=0$，于是

$$\iint\limits_D\left(4-x^2\sin x-y\right)dxdy=\iint\limits_D 4dxdy-\iint\limits_D x^2\sin xdxdy-\iint\limits_D ydxdy=4A_D-\iint\limits_D ydxdy$$

dσ 面积元积分 → 柱所面是常数不在性 曲面为柱面

$$=4\pi-2\iint\limits_{D_{右}} ydxdy=4\pi-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho。$$

$$=4\pi-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=4\pi-\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi。$$

底为σ. 高为4. 积分结果就是底×高

D关于x轴对称 ↓ x不看 看y $\iint\limits_D f(y)dxdy=0$

D关于y轴对称 ↓ 看x不看y

13、证明：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 上所有点的切平面都通过锥面的顶点。

考点：曲面在一点的切平面方程。

①

解答：易知该锥面的顶点为 $(0,0,3)$。在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，其中

$z_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}+3$。过该点的切平面的法向量 $\vec{n}\Big|_{M_0}=\left(f_x,f_y,-1\right)\Big|_{M_0}=\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},-1\right)$，该切

②

平面的方程为$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x-x_0)+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(y-y_0)-(z-z_0)=0$，化简后可得

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}y-z+3=0。$$

易验算锥面的顶点为$(0,0,3)$在上述切平面上。

14、证明：函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处两个偏导数都存在，但是在该点处不可微。

考点：多元函数可导与可微的定义。

解答：

①可导性：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$，类似，$f_y(0,0)=0$，即$f(x,y)$在点$(0,0)$处可导。

用定义

②可微性：因为$\underbrace{\left[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\right]}_{\Delta z}-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，即$\Delta f-\left[A\Delta x+B\Delta y\right]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$。考虑极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\left[A\Delta x+B\Delta y\right]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$，不存在（教材第 61 页）。

即$\Delta f-\left[A\Delta x+B\Delta y\right]\neq o(\rho)$，由微分的定义可知$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微。

极限不为0、