长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次） 高等数学A（二）期中 课程代号 0701000215

专业 电气、物电等 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、单项选择题：1～4 小题，每小题 5 分，共 20 分．下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将所选项前的字母写在答题纸上．

1．若直线 $L:\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+Ay+z-B=0 \end{cases}$ 在 xOy 平面上，则____．

(A) $A=6$，$B=27$　　(B) $A=-6$，$B=27$

(C) $A=6$，$B=-27$　　(D) $A=-6$，$B=-27$

2．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的____．

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

3．设 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续的偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$____．

(A) $f_2'+xf_{11}''+(x+z)f_{12}''+xzf_{22}''$　　(B) $xf_{12}''+xzf_{22}''$

(C) $f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$　　(D) xzf_{22}''

4．设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，$I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$，则____．

(A) $I_3>I_2>I_1$　　(B) $I_1>I_2>I_3$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

二、填空题：5～8 小题，每小题 5 分，共 20 分．请将答案写在答题纸上．

5．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy\mathrm{e}^x}{4-\sqrt{16+xy}}=$____．

6. 设函数$z=z(x,y)$由方程$z=e^{2x-3z}+2y$确定，则$3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

7. 设$f(x,y)$在点$A(x_0,y_0)$处可微，且$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_1}\right|_A=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l_2}\right|_A=0$，其中$l_1=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$l_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$f(x,y)$在点$A$处增加最快的方向为______.

8. 交换积分次序，则累次积分$\int_0^2 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=$______.

三、**解答题**：9～14 小题，每小题 10 分，共 60 分．请将解答写在答题纸上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9. 设$|a|=\sqrt{3}$，$|b|=1$，$(\widehat{a,b})=\dfrac{\pi}{6}$，求向量$a+b$与$a-b$的夹角．

10. 设函数$u(x,y,z)=x^y y^z z^x$，求$du|_{(1,1,1)}$．

11. 在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点，使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短．

12. 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2y\}$，计算$\iint\limits_D(4-x^2\sin x-y)dxdy$．

13. 证明：锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}+3$上所有点的切平面都通过锥面的顶点．

14. 证明：函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处两个偏导数都存在，但是在该点处不可微．

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：高等数学 B(二)　　　　试卷编号：01

一、**单项选择题**（本大题总分 20 分，共计 4 小题，每题 5 分）

1. C　　2. A　　3. D　　4. B

二、**填空题**（本大题总分 20 分，共计 4 小题，每题 5 分）

1. 0　　2. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$　　3. $\frac{98}{13}$　　4. 12π

三、**计算题**（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. **【解析】**

设平面的方程为：$Ax+By=0$，$\vec{n}=(A,B,0)$，$\vec{n}_1=(2,1,\sqrt{5})$ ………(3 分)

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{10}}$，$A=-3B$或$B=3A$ ………………………………(8 分)

平面的方程：$-3x+y=0$或$x+3y=0$ ………………………………………(10 分)

2. **【解析】**

过点$(3,-1,2)$作垂直于已知直线的平面，平面的法向量可取为直线的方向向量，即

$\vec{n}=\vec{s}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(0,-3,-3)$ ………………(3 分)

故过已知点的平面方程为：$y+z=1$

联立方程组$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\\y+z=1\end{cases}$，得$x=1$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=\frac{3}{2}$ ……………(7 分)

即$\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$为平面与直线的垂足，于是点到直线的距离

$d=\sqrt{(1-3)^2+(-\frac{1}{2}+1)^2+(\frac{3}{2}-2)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ……………………………(10 分)

3. **【解析】**

设$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}$ ……………………………….(6 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$ ………………………………….……….(10 分)

4. 【解析】

$\begin{cases}f_x(x,y)=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0\\ f_y(x,y)=e^{2x}(\ 2y+2\ )=0\end{cases}$，驻点$(\frac{1}{2},\ -1)$ ………………….(4 分)

$A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)=2e$，$B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)=0$，$C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)=2e$

$AC-B^2=4e^2>0$，且$A>0$ ……………………………………….…………………….(8 分)

$\therefore f\left(\frac{1}{2},\ -1\right)=-\frac{e}{2}$是函数的极小值 ……………………………………………….(10 分)

5. 【解析】

$D=\{(\rho,\ \theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2a\cos\theta\}$ ………………….(4 分)

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3d\rho$ ……………………………………….(7 分)

$=\frac{3}{4}\pi a^4$ …………………………………………………………….……….(10 分)

四、应用题（本题总分 10 分）

【解析】

设$M(x,\ y,\ z)$平面和柱面的交线上的一点，点M到xoy面的距离为d，则

$d=|z|$ ……………………………………………………………………………….(4 分)

$L(x,\ y,\ z)=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1)$

$\begin{cases}L_x=\lambda/3+2\mu x=0\\ L_y=\lambda/4+2\mu x=0\\ L_z=\lambda/5+2\mu x=0\\ x/3+y/4+z/5=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$，得$x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{3}{5}$，$z=\frac{35}{12}$ ………………………….(8 分)

因为可能的极值点$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{35}{12}\right)$唯一，故这个点就是所求点 …………(10 分)

试卷编号 01 拟题教研室（或教师）签名______ 教研室主任签名______

长沙理工大学考试试卷

……………………………………………………………………………………

课程名称（含档次） 高等数学 B(二) 课程代号 0701000235

专 业 土木、化工等 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、单项选择题（本大题总分 20 分，共计 4 小题，每题 5 分）

1.设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，则下列结论正确的是（ ）.

$(A)\ \vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ $(B)\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ $(C)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $(D)\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

2. 直线$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$与平面 $4x-2y-2z=3$ 的位置关系是（ ）.

(A)平行 (B)垂直相交 (C)直线位于平面内 (D)相交但不垂直

3.曲面$x^3-2xy-xz^2-y^2z=11$在点$(3\ ,1\ ,-2)$处的法线方程是（ ）.

$(A)\ \dfrac{x+18}{21}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+13}{11}$ $(B)\ \dfrac{x-3}{21}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{11}$

$(C)\ \dfrac{x+18}{21}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+13}{11}$ $(D)\ \dfrac{x-3}{21}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{11}$

4. 二元函数$z=f(x,y)$满足$dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ ）.

$(A)\ y^2e^{xy}$ $(B)\ (1+xy)e^{xy}$ $(C)\ x^2e^{xy}$ $(D)\ xe^{xy}$

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 4 小题，每题 5 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$ ______.

2.已知$z=x^y$，则$dz=$ ______.

3.函数$u = xyz$在点(5, 1, 2)处沿从点(5, 1, 2)到点(9, 4, 14)的方向的方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(5,\ 1,\ 2)} =$ ________.

4. 已知D：$x^2 + y^2 \leq 4$，二重积分$\iint\limits_D (x + 2y + 3)d\sigma =$ ________.

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 已知平面通过 z 轴，且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求此平面的方程.

2. 求点(3，-1，2)到直线$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$的距离.

3. 设$z^3 - 3xyz = a^3$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4.求函数$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$的极值.

5. 把积分$\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy$化为极坐标形式，并计算积分值.

四、应用题（本题总分 10 分）

求平面$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面$x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与xoy平面距离最短的点.