

# 长沙理工大学考试试卷

试卷编号 2 拟题教研室(或教师)签名 教研室主任签名

课程名称(含档次) 复变函数与积分变换 B 课程代号 0701000135

专业 各专业 层次(本、专) 本科 考试方式(开、闭卷) 闭卷

一、选择题:(本题总分 15 分, 每小题 3 分)

1. 若函数  $w = f(z)$  在点  $z_0$  D, 则称  $f(z)$  在点  $z_0$  解析.  
A. 连续 B. 可导 C. 可微 D. 某一邻域内可微

2. 下列级数中, 绝对收敛的是 (A)

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{n^2} + \left( \frac{2}{3} \right)^n \right]$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \left| \frac{i}{n^2} \right| \right]$

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{\sqrt{n+1}}$

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \sqrt{3}i)^n$

3. 在下列复数中, 使得  $e^z = 3$  成立的是 (B).

A.  $z = \sqrt{3}$ ;

B.  $z = \ln 3 + 2k\pi i, k$  为整数;

C.  $z = \ln 3$ ;

D.  $z = \ln 3 + \pi i$

4. 设  $C$  为上半单位圆, 则  $\int_C |z| dz =$  C ( $C$  为逆时针方向)

A. 0

B.  $\pi i$

C. -2

D.  $2i$

5.  $z=0$  为函数  $f(z) = \frac{(1 - \cos z) \ln(1+z) \sin^2 z}{2z^4(e^z - 1)}$  的 B

A. 本性奇点;

B. 可去奇点;

C. 二级极点;

D. 连续点.

二、填空题(本题总分 15 分, 每小题 3 分)

1.  $\left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{2022} =$  -1

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3-4i}{6} \right)^n =$  0

3.  $\text{Res}\left(\frac{e^z}{z^2-1}, 1\right) =$   $\frac{e}{2}$

4.  $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z + e^z}{2z-4i} dz =$  0

$$\frac{z^2}{(1-z)^2}$$

5. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n+1}$  在  $|z| < 1$  内的和函数是  $-\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{2}$

三、计算下列各式的值 (本题总分 20 分, 每小题 5 分)

取  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.  $\sqrt[8]{z} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  2.  $\ln(-i)$  3.  $(1+i)^{\frac{1}{2}}$  4.  $\exp\left[\frac{(1+i)\pi}{2}\right]$

$$4. e^{-\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{z} + \frac{\sqrt{z}}{z} \right)$$

四、解答下列各题 (本题总分 20 分, 每小题 5 分)

1.  $f(z) = e^x (x \cos y - y \sin y) + i e^x (y \cos y + x \sin y)$  是否在  $Z$  平面上解析?

如果是, 求其导函数。

2. 函数  $u(x, y) = e^x \cos y + 2xy$ , 求函数  $v(x, y)$  使  $f = u + iv$  为解析函数, 并求  $f(z)$ 。

3. 求函数  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(1-z)^2}$  在  $0 < |z-1| < 2$  内的罗朗展开式。

4. 函数  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$  有哪些有限奇点? 如果是极点, 指出它们的级。

$z = -1$

五、计算下列积分 (本题总分 24 分, 每小题 6 分)

1.  $\int_C [(x-y) + ix^2] dz$ , 积分路径  $C$  为自原点沿虚轴到  $i$ , 再由  $i$  沿水平方向到  $1+i$  的折线。

$$2. \int_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-4)}$$

$$3. \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, (a > 0, b > 0)$$

六、(本题总分 6 分) 利用拉氏变换求微分方程  $y'' + y = t$ , 满足初值条件  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$  的解。

解: 对两边同时取拉氏变换

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 Y(s) - s + 2 + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 1) Y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$y(t) = t - \sin t + \cos t - 2 \sin t$$

四. 1. 解  $U_x = e^x(1+x)\cos y - e^x y \sin y$   $U_y = -e^x x \sin y - e^x(\sin y + y \cos y)$   
 $V_x = e^x y \cos y + e^x(1+x)\sin y$   $V_y = e^x x \cos y + e^x(\cos y - y \sin y)$   
 $\therefore U_x = V_y$   $U_y = -V_x$  满足 C-R 方程  $\therefore f(z)$  在复平面上解析.  
 $f'(z) = U_x + iV_x = e^x(1+x)(\cos y + \sin y \cdot i) + e^x y(\cos y \cdot i - \sin y)$   
 $= e^x(1+x)(\cos y + \sin y \cdot i) + i e^x y(\cos y + \sin y \cdot i) = e^x(1+x+iy) e^{iy} = e^z(1+z)$

2. 解  $\because f = u + iv$  为解析函数 满足 C-R 方程  
 $V_y = U_x = e^x \cos y + 2xy$   $V = \int e^x \cos y + 2xy = e^x \sin y + y^2 + \varphi(x)$   
 $V_x = -U_y = e^x \sin y - 2x = e^x \sin y + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = -2x$   $\varphi(x) = -x^2 + C$   
 $\therefore V(x, y) = e^x \sin y + y^2 - x^2 + C$   
 $f(z) = e^x \cos y + 2xy + (e^x \sin y + y^2 - x^2 + C)i = e^x(\cos y + i \sin y) + i(-x^2 - 2xy + y^2 + C)$   
 $= e^z - i z^2 + i C$

3. 解  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(1-z)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}}$   
 $\because 0 < |z| < 2 \therefore 0 < \left|\frac{z}{2}\right| < 1$   
 $\therefore f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(z+1)^{n-2}}{z}$

4. 解 令  $1+z^2=0 \Rightarrow z_1=i, z_2=-i$   
 令  $1+e^{i\pi k}=0 \Rightarrow z_k = (2k+1)i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$   
 当  $k=0$  时  $z_k = z_1 = i$   
 当  $k=-1$  时  $z_k = z_2 = -i$

即  $z_1=i, z_2=-i$  为  $f(z)$  的二级极点  
 $z_k = (2k+1)i \quad (k=1, \pm 2, \dots)$  为一级极点

五. 1. 解积分路径  $C_1$  的参数方程  $z = it$   $t$  从 0 到 1,  $dz = i dt$ .

积分路径  $C_2$  的参数方程  $z = t + i$   $t$  从 0 到 1,  $dz = dt$ .

$$\begin{aligned}\int_C [(x-y) + ix^2] dz &= \int_{C_1} [(x-y) + ix^2] dz + \int_{C_2} [(x-y) + ix^2] dz \\ &= \int_0^1 -ti dt + \int_0^1 (t+1) + it^2 dt = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\end{aligned}$$

2. 解  $\oint_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz$  中  $f(z) = e^{z+1} \sin z$  在  $|z|=1$  中处处解析.

由柯西-古萨定理  $\oint_{|z|=1} f(z) dz = 0$

$g(z) = \frac{dz}{(z+1)(z-4)}$  在圆域  $|z| < 1$  内只存在一个一级极点  $z = -1$

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)(z-4)} = 2\pi i \left\{ \text{Res}[g(z), -1] \right\} = 2\pi i \left( \frac{1}{-5} \right) = -\frac{2\pi i}{5}$$

$$I = \oint_{|z|=1} e^{z+1} \sin z dz + \oint_{|z|=3} \frac{1}{(z+1)(z-4)} dz = 0 + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{-2\pi i}{5} = -\frac{1}{5}$$

3. 解  $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$  在  $|z|=1$  上存在一个一级极点  $z=0$  - 三级极点  $z=1$ .

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \left\{ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 1] \right\}$$

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-0)e^z}{z(1-z)^3} = 1$$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^3 \cdot e^z}{-z(1-z)^3} \right]'' = - \frac{e^z(1-z+2z^2+2z)}{2z^4} \bigg|_{z=1} = -\frac{e}{2}$$

$$\therefore \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = (1-e)2\pi i = (2-e)\pi i$$

4. 解  $I = \int_{-b}^{+b} \frac{x^2}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)} dx$

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+b^2)(z^2+a^2)}$  (在实轴无根, 在上半平面有两个一级极点)  
 $z_1 = ai \quad z_2 = bi$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi i \left\{ \text{Res}[f, ai] + \text{Res}[f, bi] \right\} = 2\pi i \left[ \frac{z^2}{(z+ai)(z+b^2)} \right]_{z=ai} + \frac{z^2}{(z+bi)(z+a^2)} \Big|_{z=bi} \\ &= 2\pi i \left[ \frac{-a^2}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{-b^2}{2bi(a^2-b^2)} \right] \\ &= \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$