长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）： 高等数学 A（二） （本部期末） 课程代号：0701000215

专业： 本部电气、物电等 层次（本、专）： 本科 考试方式：闭卷

一、选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 方程 $x^2=z$ 在空间表示（　　）。

A．两点　　B. 母线平行 x 轴的柱面　　C. 母线平行 y 轴的柱面　　D. 旋转曲面

答案：C。考点：常见空间二次曲面。

解答：由柱面方程可知，方程 $x^2=z$ 表示是一个以 zox 面上的抛物线 $x^2=z$ 为准线、母线平行 y 轴的抛物柱面。

2. 若 $f\left(x,x^2\right)=x^2e^{-x}$，$f_x'\left(x,x^2\right)=-x^2e^{-x}$，则 $f_y'\left(x,x^2\right)=$（　　）。

A. $2xe^{-x}$　　B. $\left(-x^2+2x\right)e^{-x}$　　C. e^{-x}　　D. $\left(2x-1\right)e^{-x}$

答案：C。考点：多元函数的全微分。

解答：由全微分计算公式（全微分等于偏微分叠加），有 $df\left(x,y\right)=f_x'\left(x,y\right)dx+f_y'\left(x,y\right)dy$。

令 $y=x^2$，由多元函数一阶全微分的形式不变性，有

$$df\left(x,x^2\right)=f_x'\left(x,x^2\right)dx+f_y'\left(x,x^2\right)dx^2=f_x'\left(x,x^2\right)dx+2xf_y'\left(x,x^2\right)dx。$$

将已知条件代入，可得

$$\left(2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx=d\left(x^2e^{-x}\right)=-x^2e^{-x}dx+2xf_y'\left(x,x^2\right)dx,$$

故 $f_y'\left(x,x^2\right)=e^{-x}$。

3. 曲线弧 $\widehat{AB}$ 上的曲线积分和 $\widehat{BA}$ 上的曲线积分有关系（　　）。

A. $\int_{AB}f\left(x,y\right)ds=-\int_{BA}f\left(x,y\right)ds$　　B. $\int_{AB}f\left(x,y\right)ds=\int_{BA}f\left(x,y\right)ds$

C. $\int_{AB}f\left(x,y\right)ds+\int_{BA}f\left(x,y\right)ds=0$　　D. $\int_{AB}f\left(x,y\right)ds=-\int_{BA}f\left(-x,-y\right)ds=0$

答案：B。考点：第一类曲线积分的性质。

解答：因为被积函数大于等于 0 时，第一类曲线积分在物理上表示是一曲线型构件的质量，故该型曲线积分与曲线弧的方向无关，即 $\int_{AB}f\left(x,y\right)ds=\int_{BA}f\left(x,y\right)ds$。

4. 若区域 D 为 $|x|\le 1$，$|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D xe^{\cos(xy)}\sin(xy)dxdy=$（　　）。

A. e　　B. e^{-1}　　C. 0　　D. π

答案：C。考点：二重积分的对称性。

解答：因为积分区域 D 关于 x 轴对称，被积函数 $xe^{\cos(xy)}\sin(xy)$ 关于 y 是奇函数，故 $\iint\limits_D xe^{\cos(xy)}\sin(xy)dxdy=0$。

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left|1-\cos\frac{\alpha}{n}\right|$（常数 $\alpha>0$）（　　）。

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 敛散性与 α 有关

答案：C。考点：绝对收敛与条件收敛。

解答：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left|1-\cos\frac{\alpha}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2n}$，其绝对值级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{\alpha}{2n}$。又

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2n}\le 2\cdot\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2=\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 是收敛的（$p=2$ 的 p 级数每项乘以一个正数）。由正项级数的比较审敛法，绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{\alpha}{2n}$ 收敛，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left|1-\cos\frac{\alpha}{n}\right|$ 绝对收敛。

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1. 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+z=a$（其中 $0<a<R$）的交线在 xoy 平面上的投影曲线的方程是______________________。

答案：$\begin{cases}x^2+y^2+(a-x)^2=R^2\\ z=0\end{cases}$。考点：空间曲线在坐标面上的投影。

解答：联立方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+z=a\end{cases}$ 消去 z，得投影柱面 $x^2+y^2+(a-x)^2=R^2$，故该曲线在 xoy 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+(a-x)^2=R^2\\ z=0\end{cases}$。

2. 设 $f(t,s)$ 一阶连续可导，$u=f(x+y+z,xyz)$，则 $du=$________________。

答案：$\left(f_1+yzf_2\right)dx+\left(f_1+xzf_2\right)dy+\left(f_1+xyf_2\right)dz$。考点：多元函数的全微分。

解答：由多元函数的全微分计算公式及一阶全微分形式的不变性，有

$$du=df\left(x+y+z,xyz\right)=f_1\cdot d\left(x+y+z\right)+f_2\cdot d\left(xyz\right)$$

$$=f_1\cdot\left(dx+dy+dz\right)+f_2\cdot\left(yzdx+xzdy+xydz\right)$$

$$=\left(f_1+yzf_2\right)dx+\left(f_1+xzf_2\right)dy+\left(f_1+xyf_2\right)dz\text{。}$$

3. 设函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(a,b\right)$ 的偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(a+x,b\right)-f\left(a-x,b\right)}{x}=$____________。

答案：$2f_x\left(a,b\right)$。考点：多元函数偏导数定义。

解答：由偏导数定义，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(a+x,b\right)-f\left(a-x,b\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(a+x,b\right)-f\left(a,b\right)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f\left(a-x,b\right)-f\left(a,b\right)}{-x}$$

$$=f_x\left(a,b\right)+f_x\left(a,b\right)=2f_x\left(a,b\right)\text{。}$$

4. 已知 L 为自原点沿顺时针方向到点 $A\left(2,2\right)$ 的圆弧 $y=\sqrt{4x-x^2}$，则 $\int_L xydy=$____________。

答案：$\dfrac{4}{3}$。考点：对坐标的曲线积分的计算（方程代入、起点到终点积分）。

解答：$y=\sqrt{4x-x^2}$，$\left(x-2\right)^2+y^2=4$，故 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$，原点 $\left(0,0\right)$ 对应 $t=\pi$，终点 $A\left(2,2\right)$ 对应 $t=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\int_L xydy=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\cos t\right)\cdot 2\sin t d\left(2\sin t\right)=8\left(\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 tdt\right)$$

$$=8\left(\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin td\sin t-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 td\cos t\right)=8\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\text{。}$$

5. 设 Ω 是由 $z=x^2+y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的有界闭区域，则

$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}dv=$__________。

答案：$2\pi(e-2)$。考点：三重积分在柱面坐标系下的计算。

解答：由已知条件，易得Ω在xoy面上的投影是一半径为 1 的圆（联立方程消z）。当直线平行z轴由下往上穿Ω的内部时，穿入的是旋转抛物面$z=x^2+y^2$（对应$z=\rho^2$），穿出的是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$（对应$z=\rho$），于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\frac{e^{\rho}}{\rho^2}\cdot\rho dz=2\pi\int_0^1\frac{e^{\rho}}{\rho}\left(\rho-\rho^2\right)d\rho$$

$$=2\pi\int_0^1 e^{\rho}(1-\rho)d\rho=2\pi\int_0^1(1-\rho)de^{\rho}=2\pi\cdot(2-\rho)e^{\rho}\Big|_0^1=2\pi(e-2)。$$

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1. 函数$z=z(x,y)$由方程$2x+y+z=xyz$所确定，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$。

考点：多元隐函数求导法。

解答：易知$x=1$，$y=2$时$z=4$。在方程$2x+y+z=xyz$的两边同时对x求偏导（注意z是x、y的函数），有

$$2+\frac{\partial z}{\partial x}=y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-yz}{xy-1},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-6。$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{2-yz}{xy-1}\right)_x'=\frac{-y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(xy-1)-(2-yz)\cdot y}{(xy-1)^2},\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=24。$$

2. 求函数$z=3x^2+y^2+2xy-10x-2y+7$的极值。

考点：多元函数的极值。

解答：$\begin{cases}z_x=6x+2y-10=0\\z_y=2y+2x-2=0\end{cases}$，得驻点$(2,-1)$。又$A=z_{xx}=6$，$B=z_{xy}=2$，$C=z_{yy}=2$，

$\Delta=AC-B^2>0$且$A>0$，故$(2,-1)$是该函数的极小值点，极小值$z(2,-1)=-2$。

3. 设C是椭圆周$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$，方向为逆时针，计算$\oint_C y^2dx-x^2dy$的值。

考点：格林公式，二重积分的对称性。

解答：$P=y^2$，$Q=-x^2$，由格林公式，有

$$\oint_C y^2dx-x^2dy=\iint_D(-2x-2y)dxdy=-2\iint_D xdxdy-2\iint_D ydxdy=0,$$

其中D：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\le 1$关于$y$轴和$x$轴都是对称的，$\iint_D xdxdy=\iint_D ydxdy=0$。

4. 设Ω是半径为R的球体：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，试求积分$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dv$。

考点：三重积分在球面坐标系下的计算，三重积分的对称性。

解答：因为Ω关于三个坐标面均是对称的，则

$$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dv=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv+2\iiint_\Omega yzdv+2\iiint_\Omega xzdv+2\iiint_\Omega xydv$$

$$=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv+0+0+0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr=2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{4}{5}\pi R^5。$$

5. 试将函数$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$展成x的幂级数。

考点：函数展开成幂级数。

解答：
$$y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,$$

其中收敛半径$R=\min\{1,2\}=1$，故收敛域为$(-1,1)$。

四、证明题（本题 10 分，共计 1 小题）

已知函数$y=y(x)$满足微分方程$y'=x+y$，且$y(0)=1$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$绝对收敛。

考点：正项级数敛散性的判定。

解答：因为微分方程 $y' = x + y$ 是一阶非齐次线性微分方程，其中 $p(x) = -1$，$q(x) = x$，

由通解公式，有 $y(x) = e^{\int dx}\left(\int xe^{-\int dx}dx + C\right) = e^{x}\left(\int xe^{-x}dx + C\right) = Ce^{x} - 1 - x$ 。由 $y(0) = 1$，

可得 $C = 2$，所以 $y\left(\frac{1}{n}\right) = 2e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}$ 。

利用不等式“$u > 0$ 时，$e^{u} > 1 + u$”可知 $y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} = 2\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) > 0$，即

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}\right]$ 是正项级数。将其与 $p = 2$ 的 p 级数作比较，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{\text{令}\frac{1}{n}=x}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x} - 1 - x\right)}{x^2} \overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x} - 1\right)}{2x} = 1$$ 。（有限的正数）

由比较审敛法的极限形式可知两级数同收敛。又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}\right]$ 是正项级数，其绝对值级数即本身，故该级数绝对收敛。