本部高等数学 A（一）期末考试试卷三

一、选择题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1、设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）。

(A)　0　　　　(B)　1　　　　(C)　-1　　　　(D)　不存在

答案：D。考点：极限存在与左、右极限的关系。

解答：

$$\text{左极限 } f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\text{右极限 } f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

由于左、右不相等，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

2、函数 $y=x|x|$ 在 $x=0$ 处（　　）。

(A)　不可导　　　(B)　不连续　　　(C)　可导　　　(D)　以上说法都不对

答案：C。考点：导数定义。

解答：函数 y 在 $x=0$ 及其附近均有定义，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}|x|=0,$$（绝对值函数是连续的）

则函数 y 在 $x=0$ 处是可导的，且 $y'(0)=0$。（注意可导必连续）

3、关于 $f(x)=x^3(x-1)^2$ 的极值点的正确结论是（　　）。

(A)　$x=0$ 不是极值点，$x=1$ 是极值点　　(B)　$x=0$ 是极值点，$x=1$ 不是极值点

(C)　$x=0$ 是极值点，$x=1$ 也是极值点　　(D)　$x=0$，$x=1$ 都不是极值点

答案：A。考点：函数的极值。

解答：$f'(x)=3x^2(x-1)^2+2x^3(x-1)=x^2(x-1)(5x-3)$，于是

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{3}{5}\right)$	$\frac{3}{5}$	$\left(\frac{3}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$	↗		↗		↘		↗

则 $x=0$ 不是极值点，$x=1$ 是极小值点。

4、设 $f'(\ln x)=x$，则 $f(x)=$（　　）。

(A) $\frac{1}{2}x^2+C$　　(B) $-\frac{1}{2}x^2+C$　　(C) e^x+C　　(D) 以上答案都不正确

答案：C。考点：不定积分。

解答：令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$f'(t)=e^t$，$f(t)=\int e^t dt=e^t+C$，即 $f(x)=e^x+C$。

5、下列函数中，不是微分方程 $y''-y=0$ 的解的是（　　）。

(A) $y=e^x+e^{-x}$　　(B) $y=e^x-e^{-x}$

(C) $y=2e^x-e^{-x}$　　(D) 以上都不对

答案：D。考点：二阶常系数齐次线性微分方程的通解。

解答：该微分方程对应的特征方程为 $r^2-1=0$，$r_{1,2}=\pm 1$，则该微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

由此可知 A、B、C 均是微分方程的解。

二、填空题（本大题总分 20 分，共计 5 小题，每题 4 分）

1、若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax+b\right)=0$，$a$、$b$ 均为常数，则 $a=$______，$b=$______。

答案：1，1。考点：极限的运算法则。

解答：$0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+(-ax+b)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x+b}{x+1}$，

则 $\begin{cases}1-a=0\\ b-a=0\end{cases}$（分子多项式的次数应比分母多项式的次数低），即 $a=b=1$。

2、$d\left(e^{\sin^2 x+3}\right)=$________________。

答案：$e^{\sin^2 x+3}\sin 2x\,dx$。考点：微分的计算。

解答：$d\left(e^{\sin^2 x+3}\right)=\left(e^{\sin^2 x+3}\right)'dx=\left(e^{\sin^2 x+3}\cdot 2\sin x\cos x\right)dx=e^{\sin^2 x+3}\sin 2x\,dx$。

3、写出 $f(x)=e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式：____________________。

答案：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 ξ 在 0 与 x 之间。考点：常用函数的麦克劳林公式。

解答：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，则

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 ξ 在 0 与 x 之间。

4、$\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx =$______________________。

答案：$-\frac{\ln x}{x} + C$。考点：不定积分的分部积分法。

解答：把被积函数中的分母凑到微分里去，可得

$$\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx = -\int (\ln x - 1)d\left(\frac{1}{x}\right) = \int (1 - \ln x)d\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\text{分部积分}}{=} \frac{1 - \ln x}{x} - \int \frac{1}{x}d(1 - \ln x)$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1 - \ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x}{x} + C \text{。}$$

5、设 $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t}\,dt$，则 $F'(x) =$____________。

答案：$-\sqrt{1+x}$。考点：变限积分的导数公式。

解答：$F'(x) = \left(\int_x^1 \sqrt{1+t}\,dt\right)' = 0 - \sqrt{1+x} \cdot 1 = -\sqrt{1+x}$。

三、计算题（本大题总分 50 分，共计 5 小题，每题 10 分）

1、求 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$。

考点：极限的运算法则、等价无穷小、无穷小的性质。

解答：当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \to 0,\quad \sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \sim \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2},$$

即 $\sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$ 为无穷小，而 $\cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ 为有界函数，则

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) \overset{\text{和差角公式}}{=} \lim_{x \to +\infty} 2\sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = 0 \text{。}$$

2、设 $f(x) = ax^2 + bx + c$，用导数定义求 $f'(x)$。

考点：导函数定义。

解答：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c\right]-\left[ax^2+bx+c\right]}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\Delta x+b)=2ax+b\text{。}$$

3、求不定积分$\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$。

考点：不定积分的基本积分公式。

解答：$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int\left(\csc^2 x-\sec^2 x\right)dx=-\cot x-\tan x+C\text{。}$$

4、计算定积分：$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$。

考点：定积分的换元积分法。

解答：$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\overset{令x=\sin t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\csc^2 t-1\right)dt$$

$$=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-1-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}\text{。}$$

5、求微分方程$\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$的通解。

考点：可分离变量的微分方程。

解答：移项，$\sec^2 y\tan x dy=-\sec^2 x\tan y dx$，分离变量，$\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}dy=-\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}dx$。两边同时积分，$\displaystyle\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=-\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx$，即$\ln\tan y=-\ln\tan x+C_1$，化简，可得通解为

$$\tan y\cdot\tan x=C\text{，其中}C=e^{C_1}\text{。}$$

注：不用考虑奇解。

四、应用题（本题 10 分，共计 1 小题）

在一页书纸上排印文字占S（cm^2），上、下边空白处要留a（cm），左、右要留b（cm），问以怎样的尺寸排印才最省纸张。

考点：函数的最大值、最小值。

解答：

方法一：设书纸的高为$x\ cm$，宽为$y\ cm$，则书纸中文字占$(x-2a)(y-2b)=S\ cm^2$，即$y=\dfrac{S}{x-2a}+2b$，于是书纸的面积

$$A(x)=xy=x\left(\frac{S}{x-2a}+2b\right)=\frac{Sx}{x-2a}+2bx,$$

$$A'(x)=\frac{S(x-2a)-Sx}{(x-2a)^2}+2b=\frac{-2aS}{(x-2a)^2}+2b=\frac{2b(x-2a)^2-2aS}{(x-2a)^2},$$

令$A'(x)=0$，可得$x=2a\pm\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$。注意$x-2a\geq 0$，$x=2a-\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$舍去，故只剩下唯一可能的极值点$x=2a+\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$。又由题意，该问题的最小值点是存在的，则该可能的极值点$x=2a+\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$即所求的最小值点，此时$y=2b+\sqrt{\dfrac{bS}{a}}$，最小面积为$S+4ab+4\sqrt{abS}$。

方法二：设书纸的高为$x+2a\ cm$，宽为$y+2b\ cm$，则书纸中文字占$xy=S\ cm^2$，于是书纸的面积

$$A(x)=(x+2a)(y+2b)=S+4ab+2bx+2ay=S+4ab+2bx+2a\cdot\frac{S}{x}$$
$$\geq S+4ab+4\sqrt{abS},$$

当且仅当$2bx=\dfrac{2aS}{x}$等号成立。即$x=\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$时，书纸面积达到最小值$S+4ab+4\sqrt{abS}$，此时$y=\sqrt{\dfrac{bS}{a}}$。