

一、填空题：（每题 3 分）

1.  $-1-\sqrt{3}i$  的三角表达形式：\_\_\_\_\_；

指数表达形式：\_\_\_\_\_；

几何表达形式：\_\_\_\_\_。

2.  $(-3)^{2i} =$ \_\_\_\_\_；

3. 设  $M = \text{Max} \{ |f(z)| | z \in C \}$ ,  $L$  为曲线  $C$  的长度, 则  $|\int_C f(z) dz| \leq$ \_\_\_\_\_。

4. 级数  $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$  的和函数的解析域是\_\_\_\_\_。

二、判断正确与错误（画对错号，每题 3 分）

1. 因为  $|\sin z| \leq 1$ , 所以在复平面上  $\sin z$  有界。 ( )

2. 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f^{(n)}(z)$  也在  $z_0$  解析。 ( )

3. 如果  $u(x,y), v(x,y)$  的偏导数存在, 那么  $f(z)=u+iv$  可导。 ( )

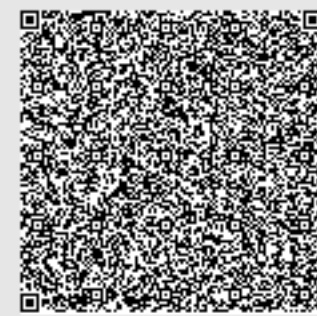
4. 在  $z_0$  处可导的函数, 一定可以在  $z_0$  的邻域内展开成罗朗级数。

( )

三、解答题（每题 8 分）

1. 设  $f(z) = xy^2 + ix^2y$ , 则  $f(z)$  在何处可导? 何处解析?

2. 已知  $f(z)$  的虚部为  $v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ , 求解析函数



### 三、解答题（每题 8 分）

1. 设  $f(z) = xy^2 + ix^2y$ ，则  $f(z)$  在何处可导？何处解析？

2. 已知  $f(z)$  的虚部为  $v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ ，求解析函数  $f(z) = u + iv$  且  $f(0) = 0$ .

3. 求积分  $I = \int_C \bar{z} dz$ ， $C$  为沿单位圆 ( $|z| = 1$ ) 的逆时针一周的曲线。

2

2

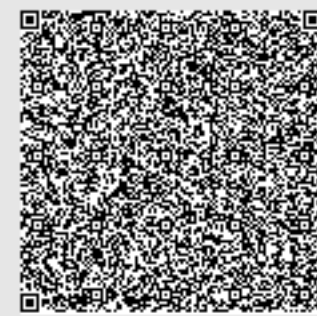
4. 求  $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz$ ，其中  $C$  为  $|z| = 2$ 。

5. 求  $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$ ，其中  $C$  为  $|z| = 2$ 。



WPS Office

快拍即存 · WPS拍照扫描

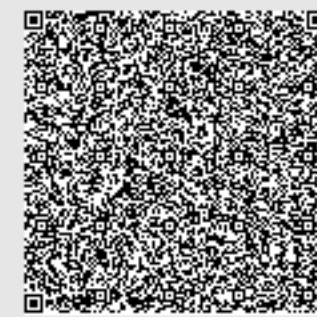


4. 求  $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。

5. 求  $\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。

6. 把函数  $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$  在  $1 < |z| < 2$  内展开成罗朗级数。

7. 指出  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$  在有限复平面上的孤立奇点及类型, 并求奇点处的留数。





## 试题答案

### 一、填空题：(每题 3 分)

1.  $-1-\sqrt{3}i$  的三角表达形式:  $2[\cos(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)+i\sin(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)]$ ;

指数表达形式:  $2e^{(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)i}$ ;

几何表达形式:  $|-1-\sqrt{3}i|=2, \text{Arg}(-1-\sqrt{3}i)=(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$ .

2.  $(-3)^{2i} = e^{2\pi-2k\pi+2\ln 3i}$ ;

3. 设  $M = \text{Max} \{ |f(z)| | z \in C \}$ ,  $L$  为曲线  $C$  的长度, 则  $|\int_C f(z)dz| \leq ML$ .

4. 级数  $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$  的和函数的解析域是  $|z|<1$ .

### 二、判断正确与错误(画对错号, 每题 3 分)

1. 因为  $|\sin z| \leq 1$ , 所以在复平面上  $\sin z$  有界。 (×)
2. 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 则  $f^{(n)}(z)$  也在  $z_0$  解析。 (√)
3. 如果  $u(x,y), v(x,y)$  的偏导数存在, 那么  $f(z)=u+iv$  可导。 (×)
4. 在  $z_0$  处可导的函数, 一定可以在  $z_0$  的邻域内展开成罗朗级数。 (×)

### 三、解答题(每题 8 分)

1. 设  $f(z)=xy^2+ix^2y$ , 则  $f(z)$  在何处可导? 何处解析?

$\because u=xy^2, v=x^2y$  处处可微,

解:  $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2, \frac{\partial v}{\partial y}=x^2, \frac{\partial u}{\partial y}=2xy, \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,$

$\therefore C-R$  方程仅在  $(0,0)$  处成立,

$f(z)$  在  $(0,0)$  处可导, 处处不解析.

2. 已知  $f(z)$  的虚部为  $v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$ , 求解析函数  $f(z)=u+iv$ ,

且  $f(0)=0$

$\because \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = x,$

$\therefore u=xy+c$

解:  $\because f(0)=0$

$\therefore$  在  $(0,0)$  处可导, 处处不解析.

$f(z)=xy-\frac{1}{2}i(x^2-y^2).$

3. 求积分  $I=\int_C \bar{z}dz$ ,  $C$  为沿单位圆 ( $|z|=1$ ) 的逆时针一周的曲线。

解: 设  $z=e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi), dz=ie^{i\theta}d\theta$ , 则

$I=\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta (3\text{分})=2\pi i$

4. 求  $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。

$\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}dz$

解:  $=2\pi i\{\text{Res}[\frac{\sin z}{z(z-1)}, 0]+\text{Res}[\frac{\sin z}{z(z-1)}, 1]\}$

$=2\pi i\{\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=0}+\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=1}\}$

$=2\pi i \sin 1$

5. 求  $\oint_C \frac{e^z}{\cos z}dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。





解: 设  $z = e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi), dz = ie^{i\theta} d\theta$ , 则

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta (3分) = 2\pi i$$

4. 求  $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。

$$\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} dz$$

解:  $= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[\frac{\sin z}{z(z-1)}, 0] + \operatorname{Res}[\frac{\sin z}{z(z-1)}, 1] \}$   
 $= 2\pi i \{ \frac{\sin z}{2z-1} \Big|_{z=0} + \frac{\sin z}{2z-1} \Big|_{z=1} \}$   
 $= 2\pi i \sin 1$

5. 求  $\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$ , 其中  $C$  为  $|z|=2$ 。

$$\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$$

解:  $= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[\frac{e^z}{\cos z}, \frac{\pi}{2}] + \operatorname{Res}[\frac{e^z}{\cos z}, -\frac{\pi}{2}] \}$   
 $= 2\pi i \{ \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{-1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1} \}$   
 $= 2\pi i (e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}})$

6. 把函数  $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$  在  $1 < |z| < 2$  内展开成罗朗级数。

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$$

$$= \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{z-2} - \frac{z+2}{z^2+1} \right]$$

解:  $= \frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - (z+2) \frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} \right]$   
 $= \frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{(z+2)}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} \right]$   
 $= -\frac{1}{5} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{z^{2n+2}} \right]$

7. 指出  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$  在有限复平面上的孤立奇点及类型, 并求奇点处的留数。

6

$\because f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$  的孤立奇点  $z=0$ ,

解:  $f(z) = \frac{1}{z^6} (z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots)$   
 $\therefore z=0$  为  $f(z)$  的三阶极点,

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{5!}.$$



WPS Office

快拍即存 · WPS拍照扫描

