长沙理工大学考试试卷

****

课程名称（含档次） 高等数学 A（一）（本部期末） 课程代号 0701000225

专业 电气、交通、计算机等专业 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、选择题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设有两个数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则（　　）。

A. $\{a_n\}$、$\{b_n\}$必都收敛，且极限相等　　B. $\{a_n\}$、$\{b_n\}$必都收敛，但极限未必相等

C. $\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散　　D. $\{a_n\}$、$\{b_n\}$可能都发散，也可能都收敛

答案：D。考点：极限的运算法则。

解答：A、B 反例如 $a_n = b_n = n$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，但$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都发散。C 中如果$\{a_n\}$收敛，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则由极限的运算法则可知$\{b_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

2. 函数 $f(x) = \dfrac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

答案：C。考点：间断点的分类。

解答：$f(x)$的间断点为 $x = k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$（分母为零的点），它在 $0, \pm1$ 处的极限分别为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - 3x^2}{\pi\cos\pi x} = \dfrac{1}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to \pm1}\dfrac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim\limits_{x\to \pm1}\dfrac{1 - 3x^2}{\pi\cos\pi x} = \dfrac{2}{\pi}$，而 $k \ne 0, \pm1$ 时 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x - x^3}{\sin \pi x} = \infty$。故 $0, \pm1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，其余的（$x = \pm2, \pm3, \cdots$）均为无穷间断点。

3. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量，则（　　）。

A. $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　B. $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$　　C. $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　D. $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$

答案：A。考点：等价无穷小。

解答：因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} \overset{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \underset{\text{洛}}{\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1 - a\cos ax}{-3bx^2} \underset{a=1}{\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{-3bx^2}$$

$$\overset{\text{等价无穷小}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b},$$

故 $b=-\frac{1}{6}$。

4. 不定积分 $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$（　　）。

A. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$　　B. $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$　　C. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$　　D. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

答案：A。考点：不定积分的性质和基本积分公式。

解答：$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\sqrt{x}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$。

5. 设 y_1、y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ、μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）。

A. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　　B. $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$　　C. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　D. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

答案：A。考点：线性微分方程解的结构。

解答：因为 y_1、y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，则

$$y_1'+p(x)y_1=q(x),\quad y_2'+p(x)y_2=q(x)$$

又 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，则 $(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x)$，即

$$\lambda\{y_1'+p(x)y_1\}+\mu\{y_2'+p(x)y_2\}=\lambda q(x)+\mu q(x)=q(x),\quad \lambda+\mu=1。$$

而 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$，即

$$\lambda\{y_1'+p(x)y_1\}-\mu\{y_2'+p(x)y_2\}=\lambda q(x)-\mu q(x)=0,\quad \lambda-\mu=0。$$

综上，可得 $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$。

二、填空题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{x\to 0}x\cot 2x=$________________。

答案：$\frac{1}{2}$。考点：等价无穷小。

解答：$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$。

2. $d\left(e^{\sin x-2}\right)=$____________。

答案：$e^{\sin x-2}\cos xdx$。考点：复合函数的求导法则和微分的计算。

解答：$d\left(e^{\sin x-2}\right)=e^{\sin x-2}\cdot(\sin x-2)'dx=e^{\sin x-2}\cos xdx$。

3. 曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为____________。

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。考点：曲率计算公式。

解答：$y=\dfrac{1}{x}$，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$，则曲率

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\frac{2}{x^3}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}，\quad K\Big|_{(1,1)}=\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$________________。

答案：$\dfrac{1}{\lambda}$。考点：反常积分的计算。

解答：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}xd\left(e^{-\lambda x}\right)=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\right)-0\right)+\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}+\left(-\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}+\frac{1}{\lambda}\right)=0+\left(0+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}。$$

5. 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为____________。

答案：$y=e^{-x}\sin x$。考点：一阶非齐次线性微分方程的求解（通解公式或常数变易法）。

解答：由通解公式，有 $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

$$=e^{-\int 1dx}\left(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int 1dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int\cos xdx+C\right)=e^{-x}(\sin x+C)。$$

又 $y(0)=0$，可得 $C=0$。故该方程满足指定条件的特解为 $y=e^{-x}\sin x$。

三、计算题（共 5 题，每题 10 分，共 50 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t dt}{\int_0^x x^2\sin t dt}$。

考点：积分上限函数的导数，洛必达法则。

解答：$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} te^t dt}{\int_0^x x^2\sin t dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} te^t dt}{x^2\cdot\int_0^x \sin t dt}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{\underset{\text{洛}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{x^2}\cdot 2x}{2x\cdot\int_0^x \sin t dt+x^2\cdot\sin x}$$

$$\overset{\text{化简}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\int_0^x \sin t dt+x\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}e^{x^2}\overset{\text{化简}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\int_0^x \sin t dt+x\sin x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{\underset{\text{洛}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2\sin x+(\sin x+x\cos x)}\overset{\text{化简}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3\sin x+x\cos x}$$

$$\overset{\text{上下除以}x}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4}{3\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{4}{3+1}=1。$$

2. 设 $y=x^2e^{-x}$，求 $y^{(10)}$。

考点：乘积的高阶导数公式（莱布尼兹公式）。

解答：$y^{(10)}=\left(x^2e^{-x}\right)^{(10)}=C_{10}^0\left(x^2\right)\cdot\left(e^{-x}\right)^{(10)}+C_{10}^1\left(x^2\right)'\cdot\left(e^{-x}\right)^{(9)}+C_{10}^2\left(x^2\right)''\cdot\left(e^{-x}\right)^{(8)}$

$=x^2\cdot e^{-x}+10\cdot 2x\cdot\left(-e^{-x}\right)+45\cdot 2\cdot e^{-x}=e^{-x}\left(x^2-20x+90\right)$。

3. 设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，在 $[0,1]$ 上可积，并且恒有 $f(x)=3x^2+4x-2\int_0^1 f(x)dx-3\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$。

考点：极限的运算法则，定积分的性质。

解答：设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$，$\int_0^1 f(x)dx=B$，则 $f(x)=3x^2+4x-2B-3A$。在该式两边同时取极限（令 $x\to 1$），可得 $A=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+4x-2B-3A\right)=7-2B-3A$；在该式两边同时 0 到 1 积分，可得 $B=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(3x^2+4x-2B-3A\right)dx=1+2-2B-3A$。

解方程组$\begin{cases}4A+2B=7\\A+B=1\end{cases}$，可得$\begin{cases}A=\dfrac{5}{2}\\B=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$，故$f(x)=3x^2+4x-2B-3A=3x^2+4x-\dfrac{9}{2}$。

4. 在曲线$y=x^2$（$x\geq 0$）上某点A处作一切线，使之与曲线以及x轴所围成图形的面积为$\dfrac{1}{12}$，试求（1）切点A的坐标；（2）由上述所围平面图形绕x轴旋转一周所形成旋转体的体积。

考点：元素法在几何上的应用。

解答：（1）设切点$A(x_0,x_0^2)$，则过点A的切线方程为$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$。令$y=0$，可得切线与x轴交点的横坐标为$x=\dfrac{x_0}{2}$。曲线与切线以及x轴所围平面图形的面积S可视为曲线与$x=x_0$以及x轴所围平面图形的面积减去切线与$x=x_0$以及x轴所围成的三角形面积，即$S=\int_0^{x_0}x^2dx-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x_0}{2}\cdot x_0^2=\dfrac{1}{3}x_0^3-\dfrac{1}{4}x_0^3=\dfrac{1}{12}x_0^3$，由已知条件，可得$x_0=1$，故切点为$A(1,1)$。

（2）曲线与切线以及x轴所围平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积V_x可视为曲线与$x=x_0$以及x轴所围平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积减去切线与$x=x_0$以及x轴所围成的三角形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积（圆锥体体积），即

$$V_x=\int_0^1\pi y^2dx-\frac{1}{3}\pi r^2h=\int_0^1\pi x^4dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{30}。$$

5. 求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解。

考点：二阶常系数非齐次线性微分方程通解的结构，待定系数法。

解答：（1）特征方程$r^2-3r+2=0$，特征根$r_1=1$，$r_2=2$，则该非齐次方程对应的齐次方程的通解$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$；

（2）$f(x)=2xe^x$，$\lambda=1$是特征方程的单根，$k=1$，故可设该非齐次方程的特解为$y^*=x^k(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$。于是

$$(y^*)'=(ax^2+(2a+b)x+b)e^x，\quad (y^*)''=(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b))e^x。$$

将y^*以及它的一阶、二阶导数代入非齐次方程，可得

$$(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b))e^x-3(ax^2+(2a+b)x+b)e^x+2(ax^2+bx)e^x=2xe^x，$$

$$-2ax+(2a-b)=2x,$$

即$\begin{cases}-2a=2\\2a-b=0\end{cases}$，$a=-1$，$b=-2$，即$y^*=-(x^2+2x)e^x$。

综上，可得该非齐次方程的通解$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-(x^2+2x)e^x$。

四、证明题（共 1 题，每题 10 分，共 10 分）

设$f(x)$在$[2,4]$上可导，且$f(2)=\int_3^4(x-1)^2f(x)dx$，证明：至少存在一点$\xi\in(2,4)$，使得$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$。

考点：积分中值定理，罗尔定理。

证明：由积分中值定理，至少存在一点$\eta\in(3,4)$，使得

$\int_3^4(x-1)^2f(x)dx=(\eta-1)^2f(\eta)\cdot(4-3)$，由已知条件可得$f(2)=(\eta-1)^2f(\eta)$。

构造函数$F(x)=(x-1)^2f(x)$，由已知条件可知，$F(x)$在$[2,\eta]$上连续，在$(2,\eta)$上可导，且$F(2)=(2-1)^2f(2)=f(2)$，$F(\eta)=(\eta-1)^2f(\eta)$，即$F(2)=F(\eta)$。由罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(2,\eta)\subset(2,4)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=2(\xi-1)f(\xi)+(\xi-1)^2f'(\xi)=0,$$

化简后可得$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$。

注释：该题$F(x)$的构造可参考下列两种方法：

方法一：把$f(2)=(\eta-1)^2f(\eta)$看成是$(2-1)^2f(2)=(\eta-1)^2f(\eta)$，即该式可理解为$F(x)=(x-1)^2f(x)$在$x=2$和$x=\eta$处的函数值。

方法二：将结论$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$作变形$(1-x)f'(x)=2f(x)$，构造函数$F(x)$，使得$F'(x)\big|_{x=\zeta}=g(x)\{(1-x)f'(x)-2f(x)\}\big|_{x=\xi}=0$，解微分方程$(1-x)f'(x)=2f(x)$，$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{1-x}$，两边同时积分$\ln f(x)=-2\ln(x-1)+\widetilde{C}_1$（$x>1$），即$f(x)(x-1)^2=C$，

故可设$F(x)=(x-1)^2f(x)$。