

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称: 《高等数学》(B)(二)

试卷编号: 13

一、填空题(本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. $5/4$ 2. $2\sqrt{6}$ 3. $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\cos\theta}}^1 f(r)rdr$ 4. $\frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$ 5. $(1+y)dx + xdy$

二、计算题(本题总分 42 分, 每小题 7 分)

1. 解 由 $\phi(x^2, e^y, z) = 0$ 可得 $\phi'_1 \cdot 2x + \phi'_2 \cdot e^y \cos x + \phi'_3 \frac{dz}{dx} = 0$. (2 分)

所以 $\frac{dz}{dx} = \frac{-2x\phi'_1 - \phi'_2 e^y \cos x}{\phi'_3}$. (4 分)

$\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cos x - f'_3 \frac{dz}{dx} = f'_1 + f'_2 \cos x - f'_3 \frac{2x\phi'_1 + \phi'_2 e^y \cos x}{\phi'_3}$. (7 分)

2. 解 $I = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{8}{3} (3+3+1=7 \text{ 分})$

3. 解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 56$, 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z, \vec{n} = (4, 8, 12)$. (4 分)
所以切平面方程为: $(x-2) + 2(y-4) + 3(z-6) = 0$. (5 分)

法线: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{3}$ (7 分)

4. 解 由格林公式可得, 原积分 $= \iint_D (3+1) dxdy = 12$. (7 分)

5. 解 $\iiint_{\Omega} z dv = \int_1^2 z dz \iint_{D(z)} dxdy = \pi \int_1^2 z^3 dz = \frac{15}{4} \pi$ (7 分)

6. 解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$. (5 分)

故原级数收敛. (7 分)

三. 解 易求得原级数在 $(-1, 1)$ 时收敛. (2 分)

设和函数为 $S(x)$, 则 $S(0) = 0$.

因为 $S'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1})' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1})' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}, (-1 < x < 1)$. (7 分)

所以 $S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, (-1 < x < 1)$. (10 分)

四. 解 $z_x = 2x - y + 9, z_y = 2y - x - 6$, 由 $z_x = 0, z_y = 0$ 得驻点 $(-4, 1)$ (5 分)

$z_{xx} = 2, z_{xy} = -1, z_{yy} = 2. AC - B^2 = 3 > 0, A > 0$, 所以 $(-4, 1)$ 为极小值点 (8 分)

$f_{\min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$. (10 分)

五. 解 由已知可得, 两直线的方向向量分别为: $\vec{v}_1 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = (1, -2, -3), \vec{v}_2 = (2, -1, 1) \times (1, -1, 1) = (0, -1, -1)$ (4 分)

所以平面的法向量可取: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 1, -1)$ (8 分)

所以所得平面方程为 $-(x-2) + (y-2) - z = 0$, 即 $x - y + z = 0$. (10 分)

六. 解 $P = x + y$, $Q = x - y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则该曲线积分与路径无关, 取路径为折线

$(1, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (2, 3)$, (3 分)

$$\begin{aligned} & \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^2 + \left(2y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^3 = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$