

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)

试卷编号：16

一、填空题 (本题总分 20 分, 每小题 4 分)

1. 5 2. $(2xf'_1 + 2x_2f'_2 + 2yf'_3)dx + (2yf'_1 - 2yf'_2 + 2xf'_3)dy$ 3. $(1, -4, 2)$

4. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ 5. $\ln 2$

二、计算题 (本题总分 42 分, 每小题 7 分)

1. 解 用极坐标形式表示原积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \frac{1}{r} \cdot r dr \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan \theta \sec \theta d\theta = \sec \theta \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned} \quad (3+4=7 \text{ 分})$$

2. 解 设切点为 M , 则 M 处的切向量为 $\vec{T} = \left(\frac{1}{(1+t)^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t \right)$, (2 分)

由已知可得 $\frac{1}{(1+t)^2} = -\frac{1}{t^2} = \frac{2t}{8}$, 所以 $t = 1$, 即此点为 $(1/2, 2, 1)$, (4 分)

切线的切向量为 $(1/4, -1, 2)$, 此切线方程为: $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}$ (5 分)

法平面方程为 $(x - \frac{1}{2}) - 4(y - 2) + 8(z - 1) = 0$, 即 $x - 4y + 8z - 1/2 = 0$. (7 分)

3. 解 物体的质量:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (xz + yz + \frac{1}{2}z^2) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x + y + \frac{1}{2}) dy = \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^1 (x + 1) dx = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (3+2+2=7 \text{ 分})$$

4. 解

$$\begin{aligned} \int_L (x + y) ds &= \int_0^1 \sqrt{1 + [(-x + 1)']^2} dx + \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} dx + 1 = \sqrt{2} + 1 \end{aligned} \quad (4+3=7 \text{ 分})$$

5. 解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关. (2 分)

取折线 $(0, 0) \rightarrow (\pi/2, 0) \rightarrow (\pi/2, 1)$

$$\begin{aligned}
\text{所求} &= \int_0^{\pi/2} 2dx + \int_0^1 (3 - 2y + \frac{3\pi^2}{4}y^2)dy \\
&= \int_0^{\pi/2} 2dx + \int_0^1 (3 - 2y + \frac{3\pi^2}{4}y^2)dy \\
&= \pi + (3y - y^2 + \frac{\pi^2}{4}y^3)|_0^1 \\
&= \pi + 2 + \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned} \tag{7分}$$

6. 解 令 $u_n = (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{3}$, (4分) 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 是收敛的, 即原级数绝对收敛。 (7分)

三. 解 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$, ($-1 < x < 1$).

$$\text{因为 } \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \int_0^x x^{n-1} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n. \tag{3分}$$

$$\text{记 } S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n, (-1 < x < 1), \text{ 则 } S_1(0) = 0. \tag{6分}$$

$$\text{因为 } \int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}. \tag{8分}$$

$$\text{所以 } S_1(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x^2)^2}, \text{ 故 } S(x) = \left(\frac{2x - x^2}{2(1-x^2)^2} \right)' = \frac{1}{(1-x)^3} \tag{10分}$$

四. 解 设 $C(0, 0, z)$ 为 z 轴上任一点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & z \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right\| \\
&= \frac{1}{2} |(-2z, 1-z, -2)| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{4z^2 + (1-z)^2 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}
\end{aligned} \tag{6分}$$

$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10z-2}{\sqrt{5z^2-2z+5}}. \text{ 令 } \frac{dS}{dz} = 0, \text{ 得唯一驻点 } z = 1/5. \tag{8分}$$

由此问题的实际意义知, 三角形 ABC 的最小面积一定存在, 所以在点 $C(0, 0, 1/5)$ 处 $\triangle ABC$ 的面积最小, 最小面积为 $S_{\min} = \frac{\sqrt{30}}{5}$. (10分)

五. 解 因为过交线的平面方程可写成 $x + 5y + 2z + \lambda(x - z + 4) = 0$, 即为 $(1 + \lambda)x + 5y + (2 - \lambda)z + 4\lambda = 0$, (6分)

因为 $A(1, 1, 1)$ 在平面上, 所以 $1 + \lambda + 5 + 2 - \lambda + 4\lambda = 0$, (8分)

解得 $\lambda = -2$, 所以所求平面的方程为 $x - 5y + 4z - 8 = 0$. (10分)

六. 解 (1) 因为 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{y} + yf(xy) \right) = f(xy) - \frac{2}{y^2} + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x} (xf(xy) - \frac{2x}{y^2})$ 在上半平面内处处成立, 所以在上半平面内曲线 I 与积分路径无关. (4分)

(2) 因为在上半平面内曲线 I 与积分路径无关, 故可取积分路径 L 为由点 $(3, 1)$ 到点

(1, 1) 再到点 (1, 3) 的折线段, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{(3,1)}^{(1,3)} \left(\frac{2}{y} + yf(xy) \right) dx + \left(xf(xy) - \frac{2x}{y^2} \right) dy \\ &= \int_3^1 (2 + f(x)) dx + \int_1^3 \left(f(y) - \frac{2}{y^2} \right) dy \\ &= -4 + \int_3^1 f(x) dx + \int_1^3 f(y) dy + 2\left(\frac{1}{3} - 1\right) \\ &= -6 + \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{8 分}$$