复变函数与积分变换试题与答案

一、填空题：（每题 3 分）

1. $-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的三角表达形式：________________ ；

   指数表达形式：________________ ；

   几何表达形式：________________ .

2. $(-3)^{2i}=$____________；

3. 设 $M=\mathrm{Max}\{|f(z)|\,|z\in C\}$，$L$ 为曲线 C 的长度，则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le$______.

4. 级数 $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ 的和函数的解析域是______________。

二、 判断正确与错误（画对错号，每题 3 分）

1. 因为 $|\sin z|\le 1$，所以在复平面上 $\sin z$ 有界。（　　）

2、若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f^{(n)}(z)$ 也在 z_0 解析。（　　）

3. 如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的偏导数存在，那么 $f(z)=u+iv$ 可导。（　　）

4． 在 z_o 处可导的函数，一定可以在 z_o 的邻域内展开成罗朗级数。

（　　）

三、解答题（每题 8 分）

1． 设 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$，则 $f(z)$ 在何处可导？何处解析？

2． 已 知 f（z）的 虚 部 为 $v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$， 求 解 析 函 数

三、解答题（每题 8 分）

1．设 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$，则 $f(z)$ 在何处可导？何处解析？

2．已知 f（z）的虚部为 $v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$，求解析函数 $f(z)=u+iv$ 且 $f(0)=0$.

3.求积分 $I=\int_C \bar{z}dz$，C 为沿单位圆 $(|z|=1)$ 的逆时针一周的曲线。

4.求 $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

5.求 $\oint \frac{e^z}{\text{[illegible]}}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

4.求$\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)} \mathrm{d} z$，其中$C$为$|z|=2$。

5.求$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{\cos z} \mathrm{d} z$，其中$C$为$|z|=2$。

6. 把函数$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$在$1<|z|<2$内展开成罗朗级数。

7. 指出 $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$ 在有限复平面上的孤立奇点及类型，并求奇点处的留数。

试题答案

一、填空题：（每题 3 分）

1. $-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的三角表达形式：$2[\cos(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)+i\sin(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)]$；

指数表达形式：$2e^{(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)i}$ ；

几何表达形式：$|-1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2,\ Arg(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})=(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$.

2. $(-3)^{2i}=e^{2\pi-2k\pi-+2\ln 3i}$；

3. 设 $M=\mathrm{Max}\{|f(z)|\,|z\in C\}$, L 为曲线 C 的长度，则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le ML$.

4. 级数 $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ 的和函数的解析域是 $|z|<1$。

二、 判断正确与错误（画对错号，每题 3 分）

1. 因为 $|\sin z|\le 1$，所以在复平面上 $\sin z$ 有界。 （×）
2、若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f^{(n)}(z)$ 也在 z_0 解析。 （√）
3. 如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$的偏导数存在，那么 $f(z)=u+iv$ 可导。 （×）
4. 在z_o处可导的函数，一定可以在z_o的邻域内展开成罗朗级数。 （×）

三、解答题（每题 8 分）

1. 设 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$，则 $f(z)$ 在何处可导？何处解析？

解：
$$\begin{aligned}&\because u=xy^2, v=x^2y\text{处处可微},\\&\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\\&\therefore C-R\text{方程仅在}(0,0)\text{处成立},\\&f(z)\text{在}(0,0)\text{处可导, 处处不解析.}\end{aligned}$$

2. 已知 f（z）的虚部为 $v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$，求解析函数 $f(z)=u+iv$,

且$f(0)=0$

解：
$$\begin{aligned}&\because \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=x,\\&\therefore u=xy+c\\&\because f(0)=0\\&\therefore \text{在}(0,0)\text{处可导, 处处不解析.}\\&f(z)=xy-\frac{1}{2}i(x^2-y^2).\end{aligned}$$

3.求积分 $I=\int_C \bar{z}dz$, C 为沿单位圆$(|z|=1)$的逆时针一周的曲线。

解：设
$$\begin{aligned}&z=e^{i\theta}(0\le\theta\le 2\pi), dz=ie^{i\theta}d\theta,\text{则}\\&I=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta(3\text{分})=2\pi i\end{aligned}$$

4.求 $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

解：
$$\begin{aligned}&\oint_C\frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z\\&=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},0]+\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},1]\}\\&=2\pi i\{\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=0}+\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=1}\}\\&=2\pi i\sin 1\end{aligned}$$

5.求 $\oint_C \frac{e^z}{\cos z}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

解：设 $z=e^{i\theta}(0\le\theta\le 2\pi), dz=ie^{i\theta}d\theta$, 则
$I=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta(3分)=2\pi i$

4.求 $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

解：
$$\begin{aligned}&\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z\\&=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},0]+\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},1]\}\\&=2\pi i\{\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=0}+\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=1}\}\\&=2\pi i\sin 1\end{aligned}$$

5.求 $\oint_C \frac{e^z}{\cos z}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$。

解：
$$\begin{aligned}&\oint_C \frac{e^z}{\cos z}\mathrm{d}z\\&=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{\cos z},\frac{\pi}{2}]+\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{\cos z},-\frac{\pi}{2}]\}\\&=2\pi i\{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{-1}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1}\}\\&=2\pi i(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}})\end{aligned}$$

6. 把函数 $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 内展开成罗朗级数。

解：
$$\begin{aligned}&\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}\\&=\frac{1}{5}[\frac{1}{z-2}-\frac{z+2}{z^2+1}]\\&=\frac{1}{5}[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-(z+2)\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})}]\\&=\frac{1}{5}[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{(z+2)}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}]\\&=-\frac{1}{5}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{z^{2n+2}}]\end{aligned}$$

7. 指出 $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$ 在有限复平面上的孤立奇点及类型，并求奇点处的留数。

解：
$\because f(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$ 的孤立奇点 $z=0$,

$f(z)=\frac{1}{z^6}(z-z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\cdots)$

$\therefore z=0$ 为 $f(z)$ 的三阶极点,

$\mathrm{Re}s[f(z),0]=-\frac{1}{5!}$.