长沙理工大学考试试卷

课程名称（含档次）线性代数　　课程代号 0701001215

专　业 各专业 层次（本、专）本科　考试方式（开、闭卷）闭卷

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,(\beta_1+\beta_2)|=$（　　）.

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $m-n$　　(D) $n-m$

2. 设矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2-a & 3\\ 2 & 6 & 5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ b & 6 & c-8\end{pmatrix}$，则（　）.

(A) $a=1\quad b=-2\quad c=2$　　(B) $a=1\quad b=2\quad c=-2$

(C) $a=-1\quad b=-2\quad c=2$　　(D) $a=-1\quad b=2\quad c=-2$

3. 若 A,B 均为非零方阵，且 $AB=0$，则有（　）.

(A) 都可逆　　(B) 至少有一个可逆　　(C) $r(A)=r(B)$　　(D) 都不可逆

4. 若 n 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=1$，则 A 的秩为（　　）.

(A) 1　　(B) 0　　(C) n　　(D) $n-1$

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充要条件是（　　）.

(A) A 的行向量线性相关　　(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关　　(D) A 的列向量线性无关

6. 可逆矩阵 A 与下面矩阵（　　）有相同的特征值.

(A) A^T　　(B) A^{-1}　　(C) A^2　　(D) $A+E$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3x+3 & 3y & 3z+2\\ x+2 & y+2 & z+2\end{vmatrix}=$____________.

2. 设 A 为3阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|(-\frac{1}{4}A)^{-1}+A^*\right|=$__________.

3. 若5元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含2个解向量，则矩阵 A 的秩等于__________.

4. 设向量 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 1,\ a)^T$ 正交，则 $a=$________.

5. 已知 -5 是方阵 A 的一个特征值，则 $A-2E$ 一定有一个特征值__________.

6. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一组解，如果 $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也是该方程组的一个解，则 $\sum_{i=1}^{s}c_i=$__________.

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足方程 $AX+E=A^2+X$，求矩阵 X.

3. 求向量组 $a_1=(2,1,1,1), a_2=(-1,1,7,10),\ a_3=(3,1,-1,-2),\ a_4=(8,5,9,11)$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示.

4. 设二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定，则 t 应满足什么条件？

四. 解答题（本大题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

1. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 2 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+x_2-ax_3=b \end{cases}$，讨论当 a，b 为何值时，方程组分别无解，有唯一解，有无穷多解此时求出其通解（用向量形式表示）.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

长沙理工大学试卷参考答案

课程名称：线性代数　　　　　　　　　　　试卷编号：1

一．（本大题总分 24 分，共计 6 小题，每题 4 分）

1、C　　2、B　　3、D　　4、C　　5、D　　6、A

二.（本大题总分 24 分，共计 6 小题，每题 4 分）

1．2　　2.-4　　3．3　　4．-1　　5.-7　　6.1

三（本大题总分 32 分，共计 4 小题，每题 8 分）

1.解：$\begin{vmatrix}3&-1&-1&0\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\1&0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\3&-1&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&2&2&2\\0&2&-1&3\\0&-1&-4&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&2&-1&3\\0&1&4&6\end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-36$

2.解：因为 $AX-X=A^2-E\Rightarrow(A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E)$，所以

$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $|A-E|=-1$, 故可逆，因此 $X=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

3.解 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&-1&3&8\\1&1&1&5\\1&7&-1&9\\1&10&-2&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&5\\0&-3&1&-2\\0&6&-2&4\\0&9&-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{3}&\frac{13}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

列向量组的一个最大无关组为 α_1,α_2，$\alpha_3=\frac{4}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2,\alpha_4=\frac{13}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$,

解：二次型 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ （3 分）

因为 $\boldsymbol{f}$ 正定，所以 A 正定，即

$|1|>0,\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}>0,|\mathbf{A}|>0$ （3 分）

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ （2 分）

四.（本大题总分 20 分，共计 2 小题，每题 10 分）

1. 解：$B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&2&-1&0\\2&1&-a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&-2&-2\\0&1&-2-a&b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&-1-a&b-3\end{pmatrix}$ （4 分）

当 $a=-1,b\neq 3$ 时，　无解 ；当 $a\neq -1,b\neq 3$ 时，唯一解（3 分），

当 $a=-1,b=3$ 时，无穷多解, 此时

$B\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 故其通解：$x=k\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}2&-1&0\end{pmatrix}^T$。（3 分）

2. 解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=(8-\lambda)(\lambda-2)^2=0$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=2,\lambda_3=2$（4 分）

当 $\lambda_1=8$ 时，$A-8E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\xi_1=(1,1,1)^T$

当 $\lambda_2=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\xi_2=(-2,1,1)^T,\xi_3=(0,1,-1)^T$ （4 分）

标准化为 $\xi_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$，,$\xi_2=(-\frac{4}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$，$\xi_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$；

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{4}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ （2 分）