长沙理工大学考试试卷

试卷编号 2 拟题教研室（或教师）签名______ 教研室主任签名______

课程名称（含档次） 复变函数与积分变换（C） 课程代号 0701000135

专　业 各专业 层次（本、专） 本科 考试方式（开、闭卷） 闭卷

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1．方程 $|z+1-i|=\sqrt{2}$ 所表示的曲线是（　　）.

A. 中心为 $1-i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　B. 中心为 $-1+i$，半径为 2 的圆周

C. 中心为 $-1+i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　D. 中心为 $1-i$，半径为 2 的圆周

2．设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处满足柯西—黎曼方程是 $f(z)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的（　　）

A.充分但非必要条件；　　B.必要但非充分条件；

C.充要条件；　　D.既非充分条件，也非必要条件。

3．设 C 为不经过点 1 与 -1 的正向简单闭曲线，则 $\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz$ 为（　　）.

A. $\frac{\pi}{2}i$　　B. $-\frac{\pi}{2}i$　　C. 0　　D. A、B、C 都有可能

4．$z=0$ 为函数 $f(z)=\frac{(e^z-1)\sin z^2}{z^6\cos z}$ 的（　　）

A.本性奇点；　　B. 三级极点；　　C. 可去奇点；　　D. 连续点.

5．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在 $z=3+i$ 处收敛，则该级数在 $z=3$ 处的敛散性为（　　）.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 不能确定

二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $f(\frac{1}{z-i})=z$，则 $f(1+i)=$ ______。

2. $\oint_{|z|=2} e^z(z^2+\sin z-1)dz=$ ______。

3. $\lim_{z\to\alpha}\frac{z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}{z-\alpha}=$ ______。

4. $\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z-1}{z},0]=$________。

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(3+4i)^n z^n$的收敛半径为________。

三、计算下列各式的值（本题总分20分，每小题5分）

1. $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$；　2. $(1+i)^i$；　3. $Ln(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$，　4. $\sqrt[4]{1+i}$

四、解下列各题（本题总分21分，每小题7分）

1. 求函数$f(z)=\frac{1}{(z+1)(1-z)^2}$在$0<|z-1|<2$内的罗朗展开式。；

2. 已知函数$u(x,y)=e^x Siny$，求调和函数$v(x,y)$，使$f=u+iv$为解析函数。

3. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)z^n$的收敛半径与和函数。

五．计算下列积分(本题总分29分)

1. $\int_c |z|dz$，其中c为从$-i$到i的右半圆周$|z|=1$。(7分)

2. $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz$ (7分)

3. $I=\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz$ (7分)

4. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$ (8分)

（注：本卷所有的闭路积分中积分曲线均为正向！）

长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：复变函数与积分变换（C）　　　　　　　　试卷编号：2

一、选择题：（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1.C　2.B　3.D　4.B　5.A

二．填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. $\frac{1+i}{2}$；　2. 0；　3. $\alpha-\beta$；　4. 0；　5. $R=\frac{1}{5}$；

三．计算下列复数的值（本题总分 20 分，每小题 5 分）

1. $e^{1-i\frac{\pi}{2}}=e\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}=e[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})]=-ie$　（5 分）

2. $(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}, (k=0,\pm1\ldots.)$（5 分）

3. $Ln(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=i(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi), (k=0,\pm1\ldots..)$（5 分）

4. $\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}(Cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}+iSin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}), (k=0,1,2,3.)$（5 分）

四、解下列各题（本题总分 2 1 分，每小题 7 分）

1. 解：若 $0<|z-1|<2,$，$0<\left|\frac{z-1}{2}\right|<1,$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2+z-1}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2(1+(z-1)/2)}$$

$$=\frac{1}{2(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z-1}{2})^n.$$ （7 分

2. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^xSiny, v=-e^xCosy+g(x)\ldots\ldots\ldots$ （3 分）

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^xCosy=-\frac{\partial v}{\partial x}=e^xCosy-g'(x), g(x).=c$ （5 分）

$f(z)=-ie^z+ic$　（7 分）

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n$ 的收敛半径为R＝1，(3分)

和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n = z^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$

由于 $\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z n(n-1)z^{n-2}dz = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ 以及

$\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z nz^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ （$|z|<1$） （5分）

所以 $S(x)=z^2\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)'' = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$ （$|z|<1$） （7分）

五．计算下列积分(本题总分29分)

1．曲线方程： $z=e^{i\theta}....(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ ....(3分)

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta}d\theta = 2i$ （7分）

2．函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ 在 $z=0$ 处不解析，e^z 在圆周 $|z|=1$ 内处处解析，(3分)

由柯西积分导数公式有 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i(e^z)'|_{z=0} = 2\pi i$ （7分）

3．$I=\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz = \oint_{|z|=2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz$ （4分） $=2\pi i+2\pi i=4\pi i$．(7分)

4．$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{i\frac{\pi}{4}}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{i\frac{3\pi}{4}}\right]\right)=\frac{\pi}{4}i(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}})$

$=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ （8分）