长沙理工大学试卷标准答案

课程名称：《高等数学》(B)(二)　　　　试卷编号：17

一、填空题 (本题总分 20 分，每小题 4 分)

1. $\pm(1/3,-2/3,2/3)$　2. $(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$　3. $(-2,2,1)$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\theta\int_0^{2\sec\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　5. $\ln 2$

二、计算题（本题总分 42 分，每小题 7 分）

1. 解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot y;\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'=xf_1'+f_2'.$ (2 分)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_1'+y\cdot(f_{11}''x+f_{12}'')=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}''$ (4 分)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x(f_{11}''x+f_{12}'')+f_{21}''x+f_{22}''.$ (7 分)

2. 解 用极坐标形式表示原积分，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1\ln(1+r^2)\cdot rdr=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1\ln(1+r^2)d(r^2+1)\\&=\frac{\pi}{4}\left[\ln(1+r^2)\cdot(1+r^2)\Big|_0^1-\int_0^1(1+r^2)\cdot\frac{2r}{1+r^2}dr\right]\\&=\frac{\pi}{4}\left[2\ln 2-\int_0^1 2rdr\right]=\frac{\pi}{4}[2\ln 2-1]\end{aligned}$$

(3+2+2=7 分)

3. 解 设切点为 M, 则 M 处的切向量为 $\overrightarrow{T}=\left(1,2t,3t^2\right)$, (2 分)

平面法向量 $\overrightarrow{n}=(1,2,1)$, 而 $\overrightarrow{T}\perp\overrightarrow{n}$，所以 $1+4t+3t^2=0$, 即 $t_1=-1,\ t_2=-1/3$.(4 分)

代入求得点 $M_1=(-1,1,-1)$ 与 $M_2(-1/3,1/9,-1/27)$. 切线的切向量分别为 $(1,-2,3)$, $(1,-2/3,1/3)$, 切线方程为：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$ 与 $\dfrac{x+1/3}{1}=\dfrac{y-1/9}{-2/3}=\dfrac{z+1/27}{1/3}$. (7 分)

4. 解 物体的质量：

$$\begin{aligned}M&=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}xz\Big|_0^{1-x-y}dy\\&=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)dy=\int_0^1(\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2})dx\\&=(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8})\Big|_0^1=\frac{1}{24}\end{aligned}$$

(3+2+2=7 分)

5. 解

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}[1+a^3\sin^3 x+(2x+a\sin x)a\cos x]dx\\&=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3\end{aligned}$$

(3 分)

令 $I'(a)=4(a^2-1)=0$, 得 $a=1(a=-1$舍去) (4 分)

$a=1$ 是 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一驻点。又因为 $I''|_{a=1}=8>0$, 所以 $I(a)$ 在 $a=1$ 处取得最小值，故所求曲线为 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$. (7 分)

6. 解

$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$ 收敛，所以原级数绝对收敛。 (7 分)

三. 解 记 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x} = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3}) = \dfrac{1}{3}[\dfrac{1}{1+(x-1)} - \dfrac{1}{4+(x-1)}]$, (2 分)

$\dfrac{1}{1+(x-1)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n, |x-1| < 1.$ (4 分)

$\dfrac{1}{4+(x-1)} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \dfrac{1}{4}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{4})^n, |\frac{x-1}{4}| < 1.$ (8 分)

故 $f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n[(x-1)^n - \dfrac{1}{4}(\dfrac{x-1}{4})^n], |x-1| < 1.$ (10 分)

四. 解 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12\sin x\cos 3y\cos x = 6\sin 2x\cos 3y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故原式为某个函数 $u(x,y)$ 的全微分。 (4 分)

取路径 $(0,0) \longrightarrow (x,0) \longrightarrow (x,y)$, 则

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x\sin 3y\cos x dx - 3\cos 3y\cos 2x dy \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (-3\cos 3y\cos 2x) dy \\ &= -\sin 3y\cos 2x \end{aligned}$$ (10 分)

五. 解 设所求直线与已知直线交于点 M, 则 M 点坐标为 $(t-1, t+3, 2t)$, (2 分)

所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{T} = (t, t+3, 2t-4)$, (4 分)

由已知可得: $3t-4(t+3)+2t-4 = 0$, 即 $t = 16$, 故所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{T} = (16, 19, 28)$, (8 分)

所求直线为 $\dfrac{x+1}{16} = \dfrac{y}{19} = \dfrac{z-4}{28}$. (10 分)

六. 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y\cdot f'\cdot 2x}{f^2(x^2-y^2)} = \dfrac{-2xyf'}{f^2(x^2-y^2)}$; (3 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{f(x^2-y^2) - y\cdot f'\cdot(-2y)}{f^2(x^2-y^2)} = \dfrac{f(x^2-y^2)+2y^2f'}{f^2(x^2-y^2)}$, (6 分)

所以左式 $= \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-2xyf'}{f^2(x^2-y^2)} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{f(x^2-y^2)+2y^2f'}{f^2(x^2-y^2)} = \dfrac{1}{yf(x^2-y^2)} = \dfrac{z}{y^2}$ = 右边. (8 分)