solution

王展鹏

2022 年 7 月 23 日

Contents

Contents

- 令 $f_{i,j}$ 表示有 i 个人，前 j 个人合法的概率。
- 转移每次加一个编号最大的，于是就有 $f_{i,j} = f_{i-1,j} \times p^j + f_{i-1,j-1} \times (1-p)^{i-j}$。

- 事实上我们显然还有另一种转移方法，对称地，考虑每次加一个编号最小的，于是有 $f_{i,j} = f_{i-1,j} \times (1-p)^j + f_{i-1,j-1} \times p^{i-j}$。
- 结合这两个式子

$$f_{i-1,j} \times p^j + f_{i-1,j-1} \times (1-p)^{i-j} = f_{i-1,j} \times (1-p)^j + f_{i-1,j-1} \times p^{i-j}$$

- 整理一下：

$$f_{i,j} = f_{i,j-1} \times \frac{p^{i-j+1} - (1-p)^{i-j+1}}{p^j - (1-p)^j}$$

- 第一维没了，所以时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

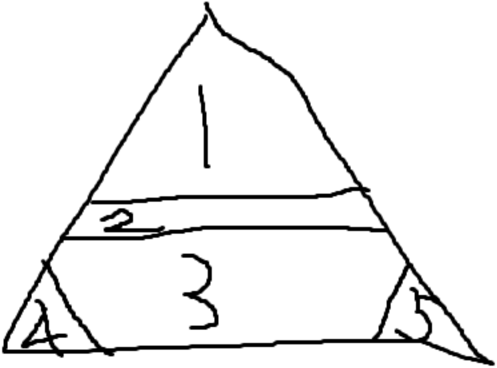
- 非常遗憾，上述算法在第一个样例就会挂掉
- 不难发现当 $p=\frac{1}{2}$ 的时候 $f_i=\binom{n}{i}\times p^{i(n-i)}$。
- 然后我们考虑如何 $\mathcal{O}(n)$ 求这个东西，主要是要求 $p^{i(n-i)}$，其实就是 $p^{i(n-i)}=p^{ni-i^2}=\frac{p^{ni}}{p^{i^2}}$。
- 分子容易计算，对于分母，我们发现 $p^{i^2}=p^{(i-1)^2+(2i-1)}=p^{(i-1)^2}\times p^{2i-1}$，考虑到只要算 $f_{1\sim\lceil\frac{n}{2}\rceil}$ 即可，所以不必算到 p^{2i-1}，只需算到 p^n。
- 最后 $\mathcal{O}(n)$ 求一下逆元即可。

- 看上去已经很完美了，但还是存在一个问题：如果 $p \neq \frac{1}{2}, p^j \equiv (1-p)^j \pmod{998244353}$ 怎么办呢？
- 有个很简单的想法，直接计算 $p^j - (1-p)^j \bmod P^2$ 下的结果，并把它表示成 kP^r 的形式，其中 $r \leq 1$，其中我们可以认为 $p^j - (1-p)^j \bmod P^2 \neq 0$
- 正确性可以从概率方面分析，事实上根据验证，可以证明在 $n \leq 3 \times 10^7$ 情况下该做法是正确的

Contents

- 我们注意到，整个图案其实可以分为形状基本相同的四个部分（可以称为三个边角部分和一个中间部分），这启示我们可以预处理出 $f[i][S]$ 表示填满前 i 层，第 $i+1$ 层的状态为 S 的方案数。这里的第 $i+1$ 层状态记录的是 $i+1$ 层每一个圆圈是否被覆盖，故不同状态数是 2^{i+1} 个。
- 那么我们先计算前一半层的覆盖情况，只要按字典序从小到大朴素搜索前一半的覆盖情况，再搜索中间部分的覆盖情况，那么其余位置的覆盖我们可以用预处理的 f 来快速计算方案数，那么就可以据此计算出前一半层的覆盖情况。

- 接下来，可以一行一行的确定覆盖情况，如下图：



- 1 区域已经确定，2 区域是搜索要确定的区域，3 区域同样搜索，4 5 区域靠预处理的数组快速计算方案。
- 复杂度就不算了，反正是可以通过的。

Contents

- 朴素暴力是：维护第 i 轮还剩那些可能状态（不可能的状态都会在小于 i 轮被发现），然后看看每个人视野中的等价类（即在他看来是一样的状态，属于同一个等价类）中他自己的颜色是否唯一。

- 在第 i 轮时，维护形如：每个区间最多 k 个黑色/白色的信息。设有 a 个黑色，b 个白色，那么最开始的信息只有，$[1,n]$ 中最多只有 a 个黑色，$[1,n]$ 最多只有 b 个白色。
- 一轮过后，如果一个人的视野加上自己中最多有 k 个黑色，如果一个人的视野有 k 个黑色，那么本轮他就会发现自己是白色，否则下一轮就会得到一个新的信息：他的视野最多只有 $k-1$ 个黑色。
- 不难发现，每一次如果一个信息 $[l,r,k]$ 包含一个人的视野 $[a,b]$，那么下一次信息会变成 $[a,b,k-1]$，那么我们可以枚举这个最终区间，用线段树维护，这部分并不难。