



Projekt OP VK  
CZ.1.07/1.1.07/11.0112

## Podpora odborného vzdělávání na středních školách MSK

Střední škola průmyslová  
a umělecká, Opava,  
příspěvková organizace  
Praskova 8/399  
746 01, Opava  
[www.sppu-opava.cz](http://www.sppu-opava.cz)

tel.: 553 621 580  
e-mail: [spskola@opava.cz](mailto:spskola@opava.cz)

[www.spravnysmer.cz](http://www.spravnysmer.cz)

„Vydejte se s námi tím správným směrem ...“

DOPRAVNÍ STROJNÍ A HUTNÍ STAVEBNÍ CHEMICKÉ ELEKTRO A INFORMAČNÍ TECHNOLOGIE ZAHRADNICKÉ

## Mechanika II Výukový manuál

Ing. Vítězslav Doleží, Ing. Dušan Galis



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

„Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky“



# Mechanika

# Mechanika

III

# Výukový manuál

# Výukový manuál

Ing. Vítězslav Doleží, Ing. Dušan Galis

---

Opava 2009



Střední škola průmyslová a umělecká, Opava, příspěvková  
organizace



---

Opava 2009



## Obsah

1	Úvod .....	5
1.1	Plán učiva .....	5
1.2	Pomůcky .....	5
1.3	Poznámky .....	6
2	Opakování prvního ročníku .....	6
2.1	Skládání sil – graficky a početně .....	6
2.2	Rozložení síly do dvou kolmých směrů .....	6
2.3	Podmínky rovnováhy .....	7
2.4	Řešení reakcí nosníků na dvou podporách .....	7
2.5	Smykové tření .....	7
2.6	Těžiště .....	8
2.7	Diagram tahové zkoušky .....	8
2.8	Dovolené napětí a bezpečnost .....	9
2.9	Tah, tlak .....	9
2.10	Smyk .....	10
2.11	Příklady .....	10
3	Kvadratické momenty průřezových ploch .....	16
3.1	Momenty .....	17
3.1.1	Statický moment síly .....	17
3.1.2	Statický moment plochy .....	17
3.1.3	Kvadratický moment plochy .....	17
3.1.4	Steinerova věta .....	19
3.2	Kvadratické momenty geometrických ploch .....	19
3.3	Kvadratické momenty složených ploch .....	21
3.4	Poloměr kvadratického momentu (kvadratický poloměr) .....	23
3.4.1	Obdélník .....	23
3.4.2	Kruh .....	23
3.4.3	Poloměr kvadratického momentu $i_x$ k mimotěžišťové ose .....	23
3.5	Průřezové moduly v ohybu a krutu .....	24
3.6	Průřezový modul v ohybu .....	25
4	Krut .....	27
4.1	Základní rovnice pro krut .....	28
4.2	Pevnostní podmínka pro krut .....	28
4.3	Hookeův zákon pro snyk .....	28
4.4	Deformační podmínka pro krut: .....	29
4.5	Závislost krouticího momentu $M_K$ na výkonu $P$ .....	30
4.6	Kroucené pružiny .....	30
4.6.1	Torzní tyč: .....	30
4.6.2	Šroubová válcová pružina .....	31
4.7	Krut nekruhových průřezů .....	33
5	Ohyb .....	36
5.1	Pevnostní podmínka pro ohyb .....	36
5.2	Uložení nosníků .....	37
5.2.1	Způsoby uložení: .....	37
5.3	Vnitřní síly a momenty .....	39
5.4	Průběh posouvajících sil a ohybových momentů .....	41
5.4.1	Vetknutý nosník .....	41
5.5	Určování posouvajících sil a ohybových momentů .....	42
5.5.1	Analytická metoda: .....	42



---

5.5.2	Metoda superpozice: .....	43
5.6	Schwedlerova věta.....	47
5.7	Nosníky se spojitým zatížením.....	49
5.8	Nosník na dvou podporách .....	50
5.9	Nosníky stálé pevnosti.....	55
5.9.1	Vetknutý nosník.....	55
5.9.2	Nosník na dvou podporách .....	58
5.10	Deformace v ohybu .....	59
5.10.1	Poloměr křivosti $\rho$ .....	59
5.10.2	Úhel natočení $\alpha$ .....	59
5.10.3	Průhyb $y$ .....	60
5.10.4	Metoda superpozice .....	64
5.11	Deformační podmínka pro ohyb.....	67
5.12	Staticky neurčité nosníky .....	68
5.13	Ohýbané pružiny .....	69
5.13.1	Výpočet listových pružin:.....	71
6	Složená namáhání .....	73
6.1	Kombinace normálních napětí.....	73
6.1.1	Šikmý ohyb:.....	73
6.1.2	Tah nebo tlak + ohyb .....	75
6.1.3	Excentrický tah (tlak): .....	76
6.2	Kombinace normálních sil a tečných napětí .....	78
6.3	Teorie pevnosti .....	78
6.3.1	Teorie maximálních normálních napětí $\sigma_{Max}$ .....	78
6.3.2	Teorie maximálních poměrných deformací $\varepsilon_{Max}$ .....	78
6.3.3	Teorie maximálních smykových napětí $\tau_{Max}$ .....	78
6.3.4	Teorie energetická – podle celkové měrné deformační energie .....	79
6.3.5	Teorie energetická – podle měrné deformační energie pro změnu tvaru .....	79
6.4	Redukovaný moment.....	80
7	Vzpěr .....	86
7.1	Výpočet podle Eulera (pružný vzpěr).....	88
7.2	Výpočet podle Tetmajera (nepružný vzpěr) .....	90
7.3	Součinitel vzpěrnosti .....	91
7.4	Shrnutí vzpěru: .....	91
8	Cyklické namáhání – únava.....	94
8.1	Wöhlerova křivka (studium praskání kolejnic) .....	95
8.2	Smithův diagram .....	96
8.3	Tvarová pevnost .....	97
8.3.1	Vliv tvaru součásti: .....	97
8.3.2	Vliv velikosti: .....	98
8.3.3	Vliv povrchu součásti: .....	99
8.4	Výpočet hřídele na únavu .....	99
9	Kinematika.....	101
9.1	Přímočaré pohyby .....	102
9.2	Přímočarý rovnoměrný pohyb – příklady .....	104
9.3	Rovnoměrně zrychlený a zpozděný přímočarý pohyb .....	106
9.4	Volný pád .....	108
9.5	Svislý vrh.....	108
9.6	Křivočaré pohyby .....	111



---

9.6.1	Obecný rovnoměrný křivočarý pohyb .....	111
9.6.2	Rovnoměrný pohyb bodu po kružnici .....	111
9.7	Rovnoměrný rotační pohyb těles kolem stálé osy .....	113
9.8	Rovnoměrně zrychlený rotační pohyb .....	114
9.9	Skládání pohybů .....	116
9.10	Pohyb ve dvou rovnoběžných přímkách .....	117
9.11	Pohyb v různoběžných přímkách .....	117
9.12	Vodorovný vrh .....	120
9.13	Šikmý vrh .....	120
9.14	Svislý vrh .....	122
9.15	Rozkládání pohybů .....	123
9.15.1	Valení válce po rovině .....	123
9.15.2	Oba dílčí pohyby otáčivé .....	125
9.16	Unášivý pohyb rotační, relativní posuvný .....	125
9.17	Harmonický pohyb .....	126
9.18	Rotační pohyb .....	127
9.19	Kinematika soustavy těles .....	129
9.20	Stupně volnosti: .....	129
9.21	Převody .....	132
9.22	Řemenový nebo řetězový převod .....	132
9.23	Převody ozubenými koly .....	132
9.24	Složený řemenový převod .....	133
9.25	Složený převod ozubenými koly .....	134

# 1 Úvod

## 1.1 Plán učiva

1. Úvod.
2. Opakování látky z 1. ročníku.
3. Kvadratické momenty a průrezové moduly.
4. Krut.
5. Ohyb.
6. Složené namáhání.
7. Stabilita – vzpěr.
8. Cyklické namáhání – únava.
9. Kinematika.
10. Na konci roku před uzavřením známek kontrola všech sešitů, sešity musí být v absolutním pořádku, se všemi nakreslenými obrázky, se vším dopsaným učivem, s okraji tuší.
11. Opakování učiva.

## 1.2 Pomůcky

1. Kniha MECHANIKA Pružnost a pevnost pro SPŠ strojnické, L. Mrňák, A. Drdla, SNTL.
2. Kniha MECHANIKA II Kinematika pro SPŠ strojnické, M. Julina, J. Kovář, V. Venclík, SNTL.
3. Kniha MECHANIKA Sbírka úloh, I. Turek, O. Skala, J. Haluška, SNTL.
4. Kniha Strojnické tabulky, Jan Leinveber a Pavel Vávra, ALBRA.
5. Čtverečkový sešit A4 tlustý, okraje tuší 3 cm od vnější strany.
6. Pero a pentelka 0,5 mm.
7. Guma na gumování.
8. Trojúhelníkové pravítko.
9. Kalkulačka.



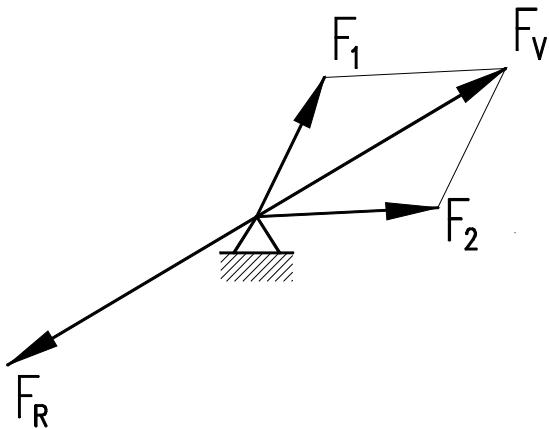
### 1.3 Poznámky

Modul pružnosti		
	V tahu	Ve smyku
Ocel	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
Litina	$E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$G = 4 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

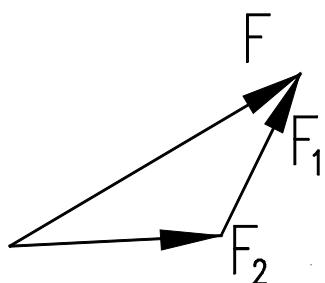
## 2 Opakování prvního ročníku

### 2.1 Skládání sil – graficky a početně

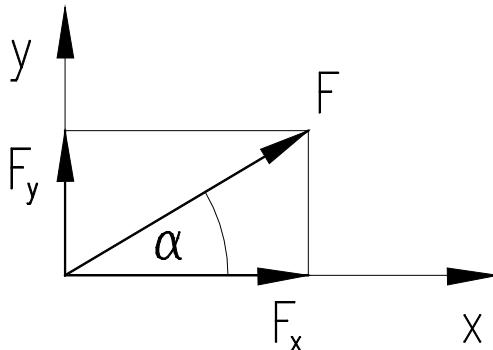
SILOVÝ ROVNOBĚŽNÍK



SILOVÝ TROJÚHELNÍK



### 2.2 Rozložení síly do dvou kolmých směrů



$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

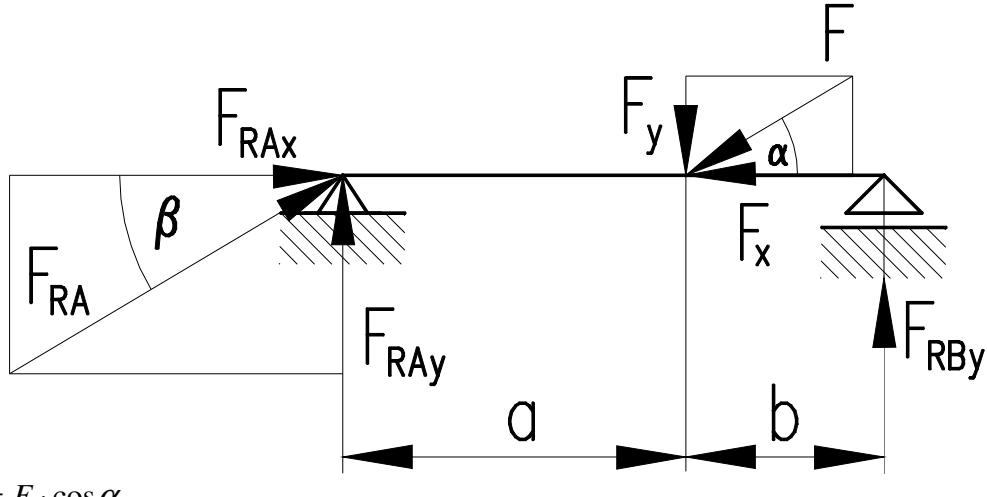
$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

## 2.3 Podmínky rovnováhy

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0$$

## 2.4 Řešení reakcí nosníků na dvou podporách



$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B = 0$$

$$F_{RAx} = F_x$$

$$F_{RBx} = \frac{F_y \cdot a}{a+b}; \quad F_{RAY} = \frac{F_y \cdot b}{a+b}$$

## 2.5 Smykové tření

$$F_t = F_n \cdot f$$

$$F_n = m \cdot g \quad (\text{Poznámka: platí v případě vodorovné podložky})$$

$f$  – součinitel snykového tření, ocel/ocel –  $0,15 \div 0,20$ ;

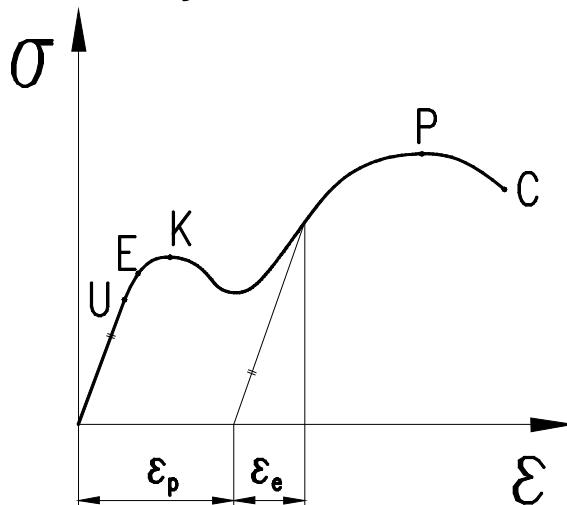
$f_0$  – součinitel snykového tření v klidu;

$f$  – součinitel snykového tření v pohybu;

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

## 2.6 Těžiště

## 2.7 Diagram tahové zkoušky



$\varepsilon_e$  – pružná, elastická deformace;

$\varepsilon_p$  – plastická deformace;

U,  $\sigma_U$  – mez úměrnosti;

E,  $\sigma_E$  – mez pružnosti, elastičnosti;

K,  $\sigma_K$ ,  $R_e$  – mez kluzu, vzniká již trvalá deformace, dá se přesně zjistit u houževnatých materiálů, je výchozí hodnotou pro výpočty;

P,  $\sigma_P$ ,  $R_m$  – mez pevnosti, materiál praská, je důležitá u křehkých materiálů;

C – dochází k přetržení zkoušební tyčinky.

$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

**Hookeův zákon:**

$$\boxed{\sigma = \varepsilon \cdot E}$$

$$\varepsilon - \text{poměrné prodloužení, deformace } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o};$$

E – modul pružnosti v tahu.

Obdobně platí pro smyk (strojnické tabulky str. 35):

$$\tau_s = \gamma \cdot G$$

$\gamma$  – zkos

G – modul pružnosti ve smyku.

Mez kluzu ve smyku  $\tau_{KS} = 0,6 \cdot R_e$

Pro ocel i litinu platí:  $\sigma_{pt} = \sigma_{pd}$  (pevnost v tahu se rovná pevnosti v tlaku).

## 2.8 Dovolené napětí a bezpečnost

Počítáme:  $\sigma$ , bezpečnost, rozměr, sílu.

$$\text{Dovolené napětí v tahu: } \sigma_{Dovt} = \frac{R_e}{k} \text{ (mez kluzu / bezpečnosti).}$$

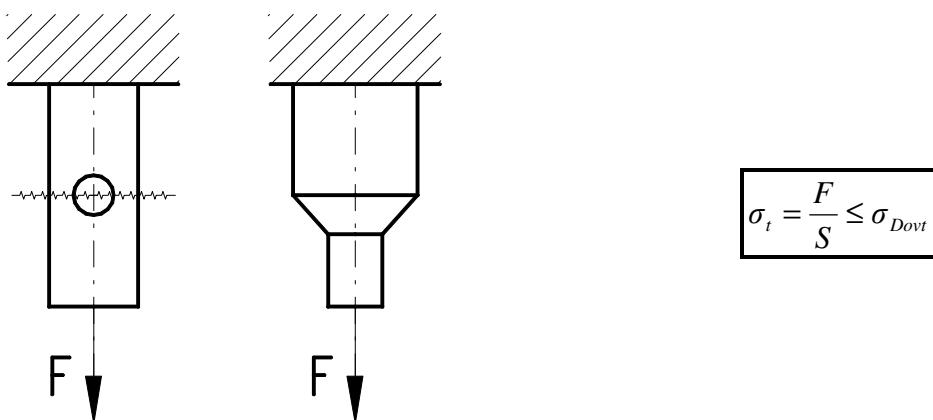
$R_m$  a  $R_e$  najdeme ve strojnických tabulkách str. 232 ÷ 238

$$R_e = 0,6 \cdot R_m \quad (\sigma_K = 0,6 \cdot \sigma_P)$$

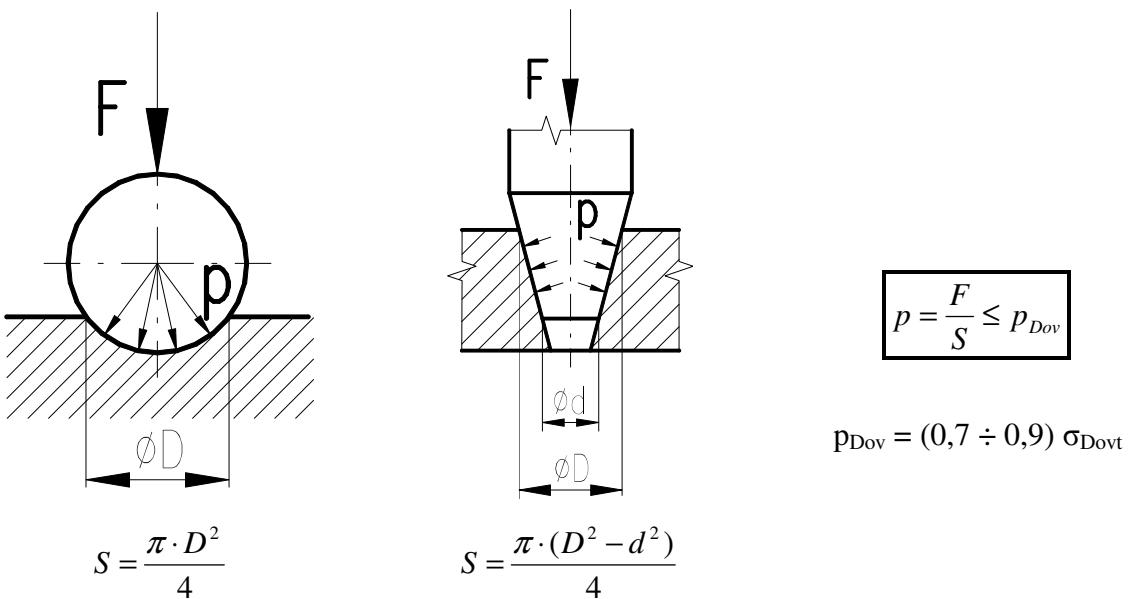
$$p_{Dov} = (0,7 \div 0,9) \sigma_{Dovt}$$

## 2.9 Tah, tlak

Tah počítáme v nejužším průřezu:



Měrný tlak počítáme na průmět plochy kolmý k působící síle:





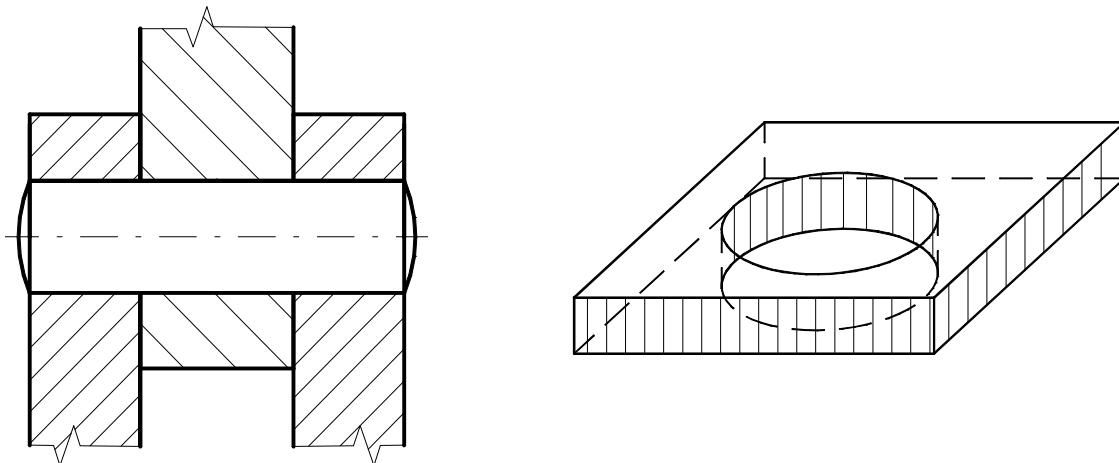
## 2.10 Smyk

$$\tau_s = \frac{F}{S} \leq \tau_{DovS}$$

$$\tau_{PS} = 0,6 \cdot \sigma_{Pt}$$

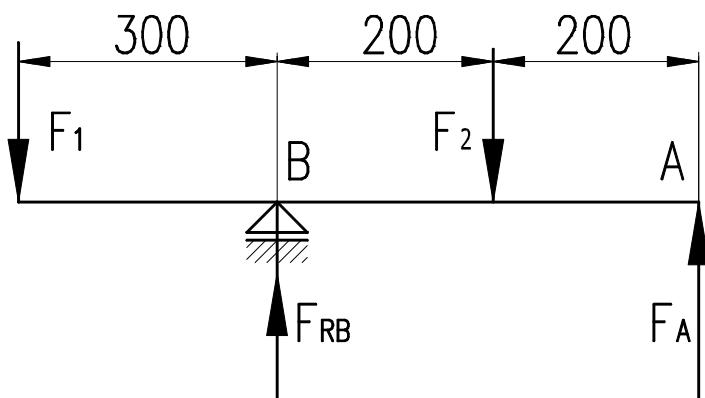
$$\tau_{KS} = 0,6 \cdot \tau_{PS} = 0,6 \cdot (0,6 \cdot \sigma_{Pt}) = 0,36 \cdot \sigma_{Pt}$$

$$\tau_{DovS} = \frac{\tau_{KS}}{k}$$



## 2.11 Příklady

Př.: Jak velkou svislou silou musíme působit v místě A, aby se soustava nepohybovala. Jaká bude reakce v bodě B?  $F_1 = 500 \text{ N}$ ,  $F_2 = 1000 \text{ N}$ .



$$\sum_{i=1}^n M_B = 0$$

$$-F_1 \cdot 300 + F_2 \cdot 200 - F_A \cdot 400 = 0 \rightarrow F_A = 125 \text{ N}$$

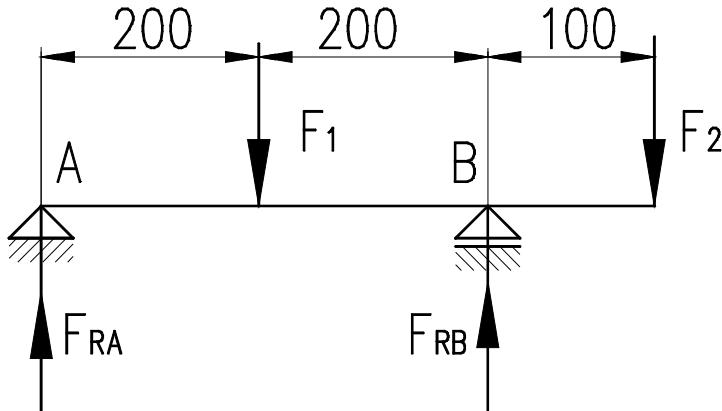
$$\sum_{i=1}^n F_y = 0$$

$$F_1 - F_{RB} + F_2 - F_A = 0 \rightarrow F_{RB} = 1375 \text{ N}$$



Př.: Určete reakce nosníku.

$$F_1 = F_2 = 500N$$



$$\sum_{i=1}^n M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 200 - F_{RB} \cdot 400 + F_2 \cdot 500 = 0$$

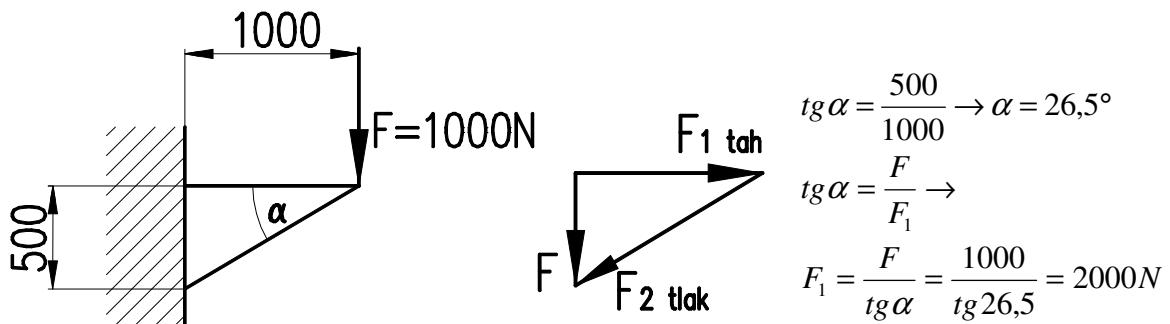
$$F_{RB} = \frac{500 \cdot 200 + 500 \cdot 500}{400} = 875N$$

$$\sum_{i=1}^n F_y = 0$$

$$F_{RA} = F_1 - F_{RB} + F_2$$

$$F_{RA} = 500 - 875 + 500 = 125 N$$

Př.: Jaké je napětí v jednotlivých prutech konzoly? Pruty mají průměr  $d = 10 \text{ mm}$ ?



$$\sin \alpha = \frac{1000}{F_2} \rightarrow F_2 = \frac{1000}{\sin \alpha} = \frac{1000}{\sin 26,5} = 2236N$$

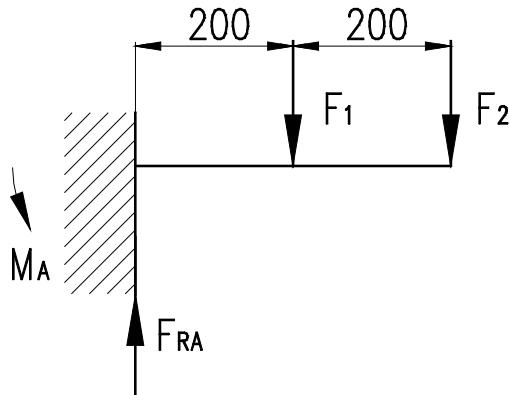
$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{4F_1}{\pi \cdot d^2} = 25,46 MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S} = \frac{4F_2}{\pi \cdot d^2} = 28,5 MPa$$



Př.: Jakým momentem  $M_A$  musíme působit, aby byla soustava v rovnováze?

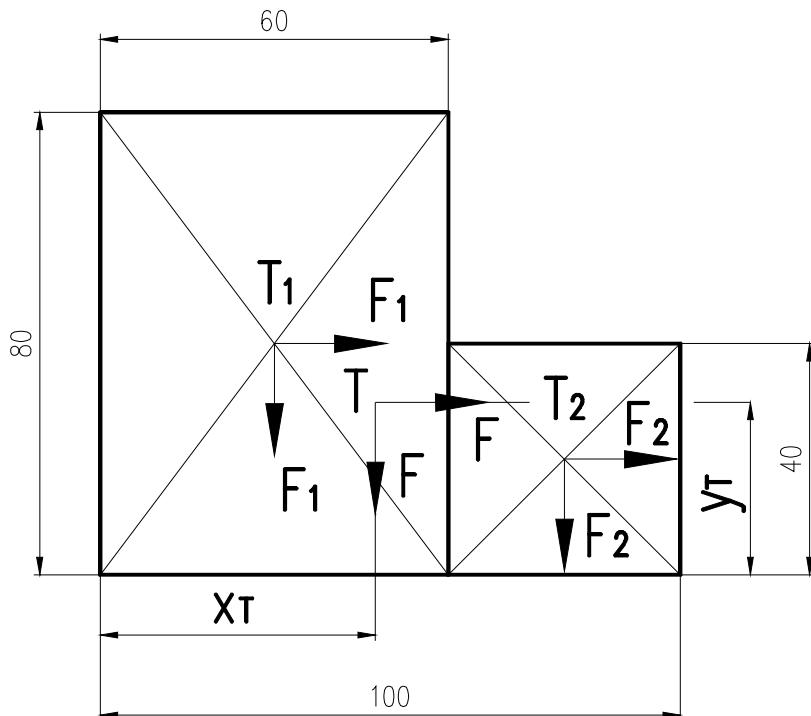
$$F_1 = F_2 = 100N$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \rightarrow F_{RA} = F_1 + F_2 = 200N$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i = 0 &\rightarrow F_1 \cdot 200 + F_2 \cdot 400 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 100 \cdot 200 + 100 \cdot 400 = \\ &= 60000N = 60Nm = 60 \cdot 10^3 Nmm \end{aligned}$$

Př.: Určete těžiště obrazce, rozměry jsou dány v mm.



Určíme  $T_1$  a  $T_2$ :

Vypočteme plochy  $S_1$  a  $S_2$ :

$$S_1 = 80 \cdot 60 = 4800 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = 40 \cdot 40 = 1600 \text{ mm}^2$$



Souřadnice těžiště:

$$x_1 = 30 \text{ mm}, y_1 = 40 \text{ mm}, x_2 = 80 \text{ mm}, y_2 = 20 \text{ mm}$$

Výpočet výslednice:

$$S = S_1 + S_2 = 6400 \text{ mm}^2$$

F je přímo úměrná ploše, zavedeme:

$$F = 6400 \text{ N}$$

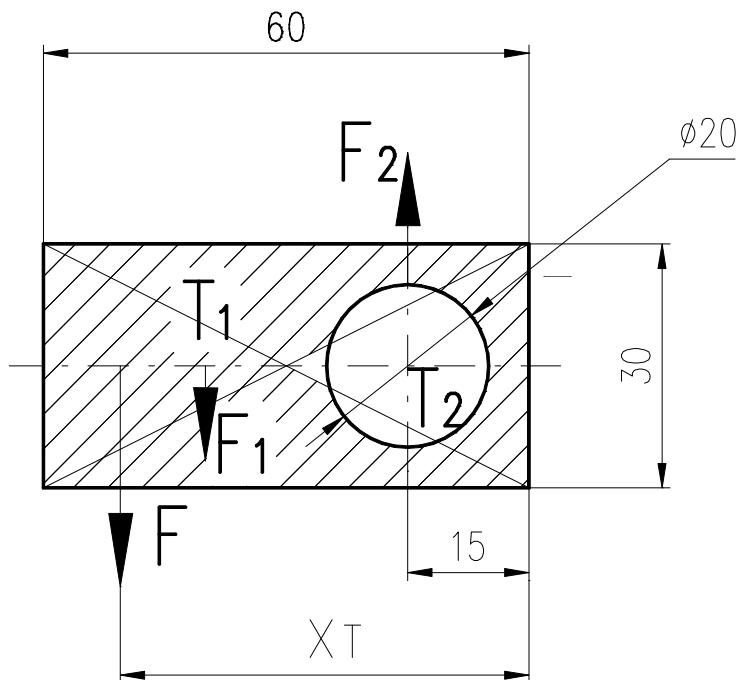
$$F_1 = 4800 \text{ N}$$

$$F_2 = 1600 \text{ N}$$

$$F \cdot x_T = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 \rightarrow x_T = \frac{4800 \cdot 30 + 1600 \cdot 80}{6400} = 42,5 \text{ mm}$$

$$F \cdot y_T = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 \rightarrow y_T = \frac{4800 \cdot 40 + 1600 \cdot 20}{6400} = 35 \text{ mm}$$

Př.: Určete těžiště obrazce, rozměry jsou dány v mm:



$$S_1 = 60 \cdot 30 = 1800 \text{ mm}^2 \rightarrow F_1 = 1800 \text{ N}$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2 \rightarrow F_2 = 314 \text{ N}$$

$$x_1 = 30 \text{ mm}, x_2 = 15 \text{ mm}$$

$$F = F_1 - F_2 = 1486 \text{ N}$$

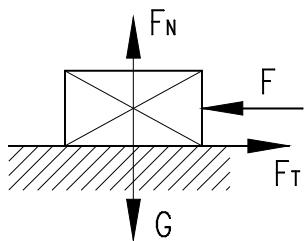
$$F \cdot x_T = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 \rightarrow x_T = \frac{1800 \cdot 30 - 314 \cdot 15}{1486} = 33,2 \text{ mm}$$

Těžiště leží na ose souměrnosti  $\rightarrow y_T = 0$  (bod 0 zvolen na ose).



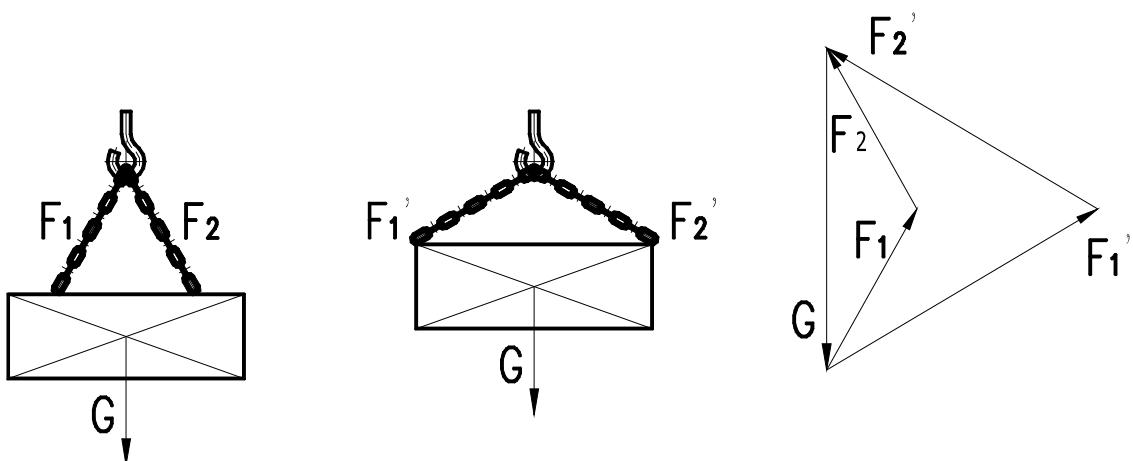
**Př.:** Jakou silou  $F$  musíme tlačit bednu o hmotnosti 100 kg, aby se začala pohybovat?

Součinitel smykového tření  $f = 0,2$ .



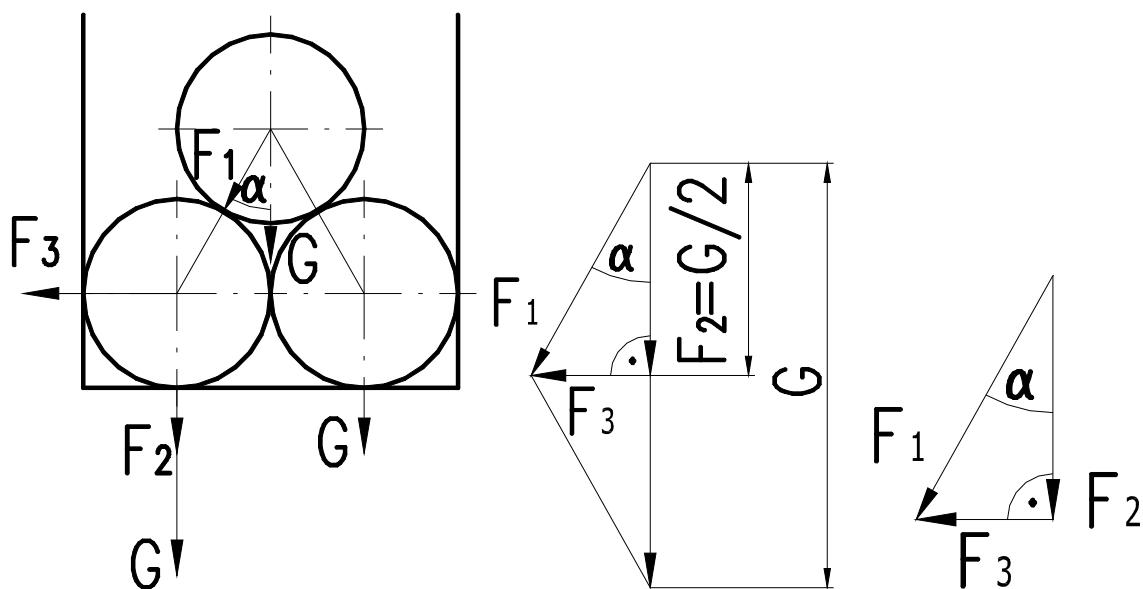
$$F = F_T = F_N \cdot f = m \cdot g \cdot f = 100 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 196,2 \text{ N}$$

**Př.:** Který jeřábnič zvolil z pevnostního hlediska vhodnější délku řetězu? Situaci prověrte graficky.



První varianta je dle grafického rozkladu výhodnější.

**Př.:** Jakou silou tlačí levá spodní tyč na bočnici a na dno palety. Tíha jedné roury je 2000 N, průměr roury je 500 mm.





Rovnostranný trojúhelník  $\rightarrow 60^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$\cos 30 = \frac{G}{\frac{2}{F_1}} \rightarrow F_1 = \frac{G}{2 \cdot \cos 30} = \frac{1000}{\cos 30} = 1154,7 N$$

Síla působící na dno pod levou tyčí:

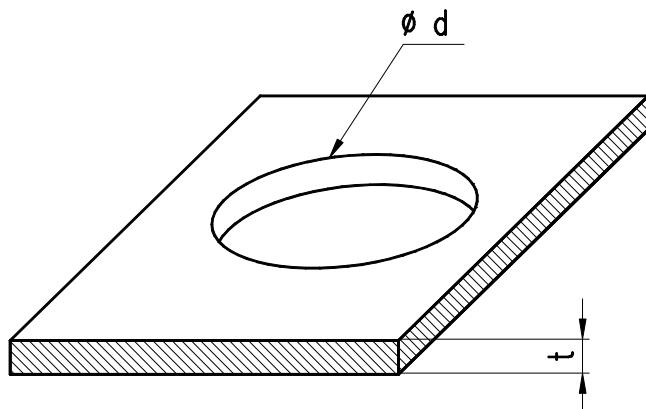
$$F_{DNA} = F_2 + G = 1000 + 2000 = 3000 N$$

Síla působící na bočnici:

$$\sin 30 = \frac{F_3}{F_1} \rightarrow F_3 = F_1 \cdot \sin 30 = 1154,7 \cdot \sin 30 = 577,35 N$$

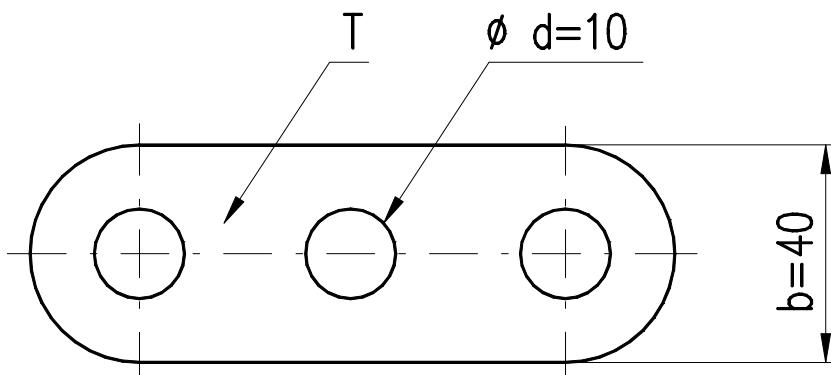
**Př.: Jaká velká síla je potřebná k vystřížení pětikoruny z plechu.  $\tau_{PS} = 250$  MPa.**

Průměr  $d = 23$  mm,  $t = 2$  mm.



$$\begin{aligned}\tau_s &= \frac{F}{S} \geq \tau_{PS} \rightarrow F \geq \tau_{PS} \cdot S = \\ &= \tau_{PS} \cdot \pi \cdot d \cdot t = \\ &= 250 \cdot \pi \cdot 23 \cdot 2 = 36128 N = \\ &= 36,128 kN = 3,6 t\end{aligned}$$

**Př.: Táhlo s otvory je namáháno na tah silou  $F = 33$  kN. Materiál táhla 11 523 má  $R_e = 335$  MPa. Určete tloušťku táhla při bezpečnosti k mezi kluzu  $k = 1,5$ .**

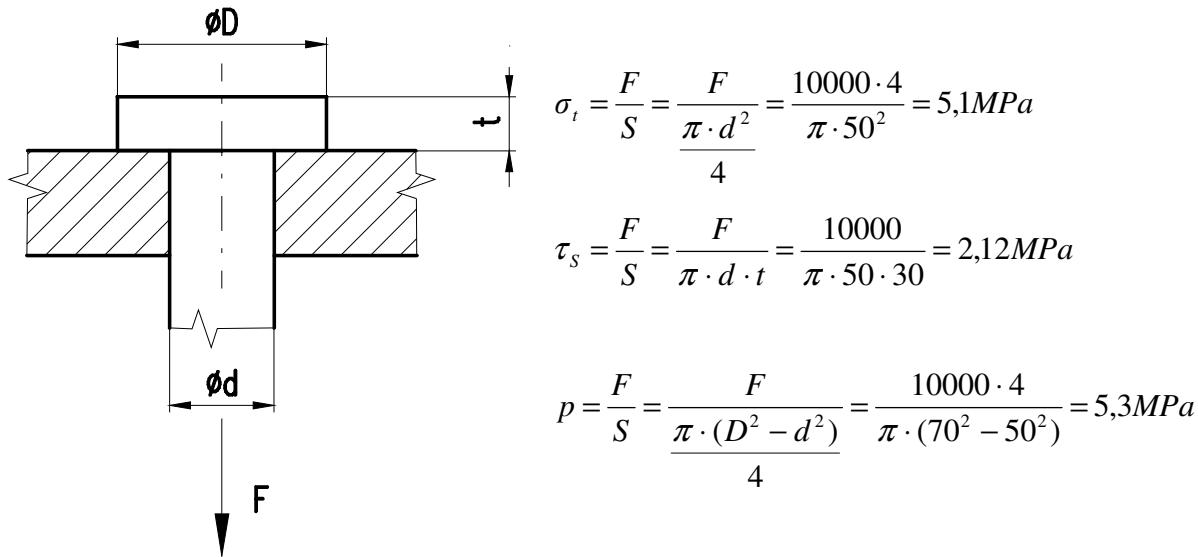


$$\sigma_{Dovt} = \frac{R_e}{k} = \frac{335}{1,5} = 223,3 MPa$$

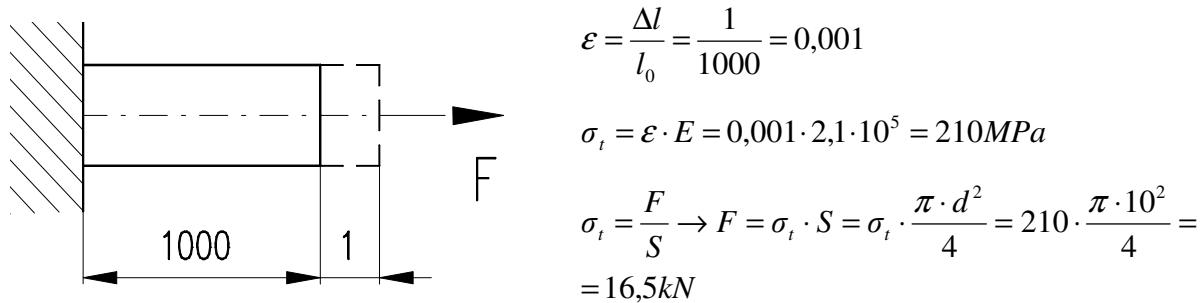
$$\sigma_t = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dovt} \rightarrow S = \frac{F}{\sigma_{Dovt}} = \frac{33000}{223,3} = 147,78 mm^2$$

$$S = (40 - 10) \cdot t \rightarrow t = \frac{S}{30} = \frac{147,78}{30} = 4,9 \text{ mm}$$

**Př.:** Osazený konec tyče je namáhán silou 10 kN, vypočtěte napětí v patřičných místech. D = 70 mm, d = 50 mm, t = 30 mm.



**Př.:** Jakou velkou silou je třeba táhnout ocelovou tyč, aby se prodloužila o 1mm? Tyč má průměr 10 mm a délku 1 m (Hookeův zákon).



### 3 Kvadratické momenty průřezových ploch

Při namáhání v tahu, tlaku a smyku jsme poznali, že charakteristickými veličinami, na kterých závisela únosnost součásti a její deformace, byly velikost síly a plocha průřezu. Nezáleželo na poloze a tvaru. Jinak tomu bude u krutu a ohybu.

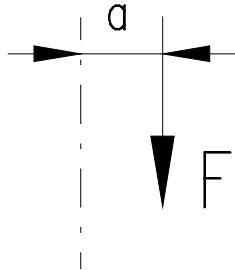
Například pravítko na ležato a na stojato.

U ohybu i dalších namáhání tedy únosnost a deformace závisí nejen na síle a průřezu, ale i na poloze, tvaru a rozložení podél průřezové osy.

Charakteristickou veličinou tedy není průřez, ale kvadratický moment průřezu.

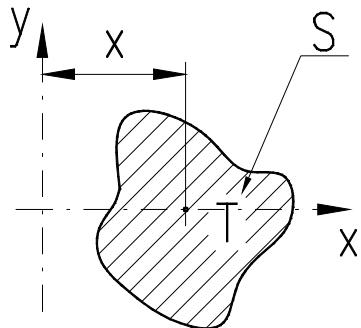
### 3.1 Momenty

#### 3.1.1 Statický moment síly



$$M = F \cdot a \quad [N \cdot m]$$

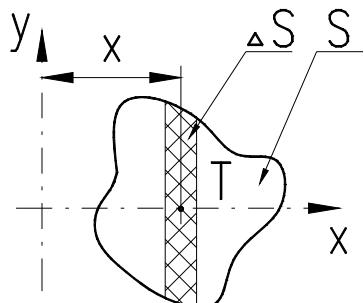
#### 3.1.2 Statický moment plochy



$$M_S = S \cdot x \quad [m^3]$$

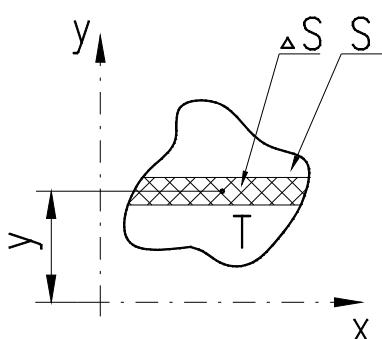
#### 3.1.3 Kvadratický moment plochy

##### 3.1.3.1 Osový:



$$\Delta J_y = \Delta S \cdot x^2 \quad [m^4]$$

$$J = \sum_{i=1}^n (\Delta S_i \cdot x_i^2) = \sum \Delta J_i \quad [m^4]$$



$$J_x = \sum_{i=1}^n \Delta J_{x_i} = \sum_{i=1}^n (\Delta S_i \cdot y_i^2)$$

$$!!! S \cdot y_T^2 \neq \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_{T_i}^2 !!!$$

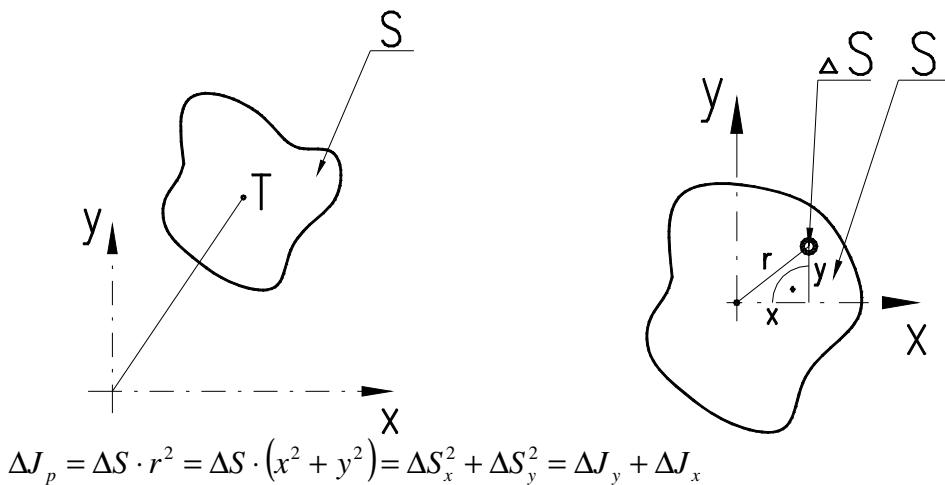
Kvadratický osový moment plošky  $\Delta S$  vzhledem k nějaké ose  $x$  se rovná součinu obsahu této plošky a čtverce vzdálenosti těžiště  $y^2$  této plošky od osy  $x$ .



Kvadratický osový moment celé plochy S složené z plošek  $\Delta S$  se rovná součtu dílčích kvadratických momentů  $\Delta J$  všech plošek  $\Delta S$ .

Pozor! Na rozdíl od lineárního momentu, kde jsme mohli součet dílčích momentů nahradit výslednou plochou násobenou vzdáleností těžiště, u kvadratického momentu by jsme dostali jiný výsledek!

### 3.1.3.2 Polární



odtud pak:

$$J_p = \sum_{i=1}^n \Delta J_{p_i} = \sum_{i=1}^n \Delta J_{x_i} + \sum_{i=1}^n \Delta J_{y_i} = J_x + J_y$$

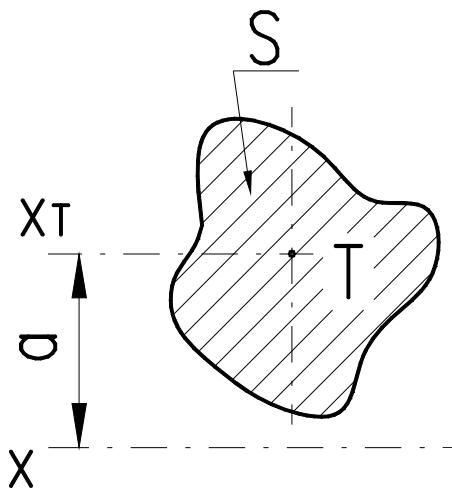
Kvadratický polární moment plošky  $\Delta S$  vzhledem k libovolnému bodu (pólu) se rovná součinu obsahu této plošky a čtverce vzdálenosti této plošky od pólu ( $r^2$ ).

Polární moment celé plochy S se rovná součtu dílčích polárních momentů  $\Delta J_p$ .

Polární moment  $\Delta J_p$  plochy S se rovná součtu osových kvadratických momentů téže plochy S ke dvěma osám, které jsou kolmé a procházejí pólem.

### 3.1.4 Steinerova věta

Udává vztah mezi osovými momenty ke dvěma rovnoběžným osám, z nichž jedna prochází těžištěm.

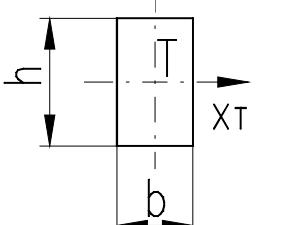
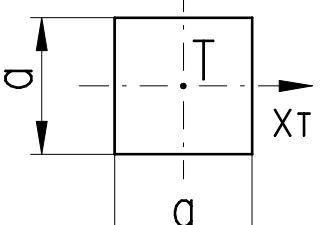


$$J_x = J_{XT} + S \cdot a^2 \quad [\text{mm}^4]$$

Kvadratický moment k mimotěžišťové ose  $x$  se rovná kvadratickému momentu k těžišťové ose  $xt$  rovnoběžnému s osou  $x$ , zvětšenému o součin  $S \cdot a^2$ , kde  $S$  je obsah plochy a  $a$  je vzdálenost os.

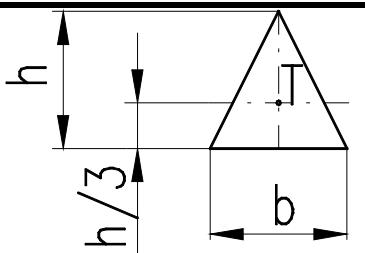
Důsledek: K těžišťové ose je kvadratický moment minimální.

## 3.2 Kvadratické momenty geometrických ploch

Kvadratické momenty geometrických ploch			
	Velikost průřezu	Kvadratický moment průřezu k ose těžiště	Polární moment průřezu
Obdélník			
	$S = b \cdot h$	$J_{xt} = \frac{b \cdot h^3}{12}$	-
Čtverec			
	$S = a^2$	$J_{xt} = \frac{a^4}{12}$	-



### Trojúhelník

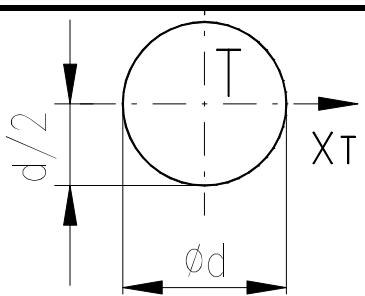


$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{xT} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

-

### Kruh

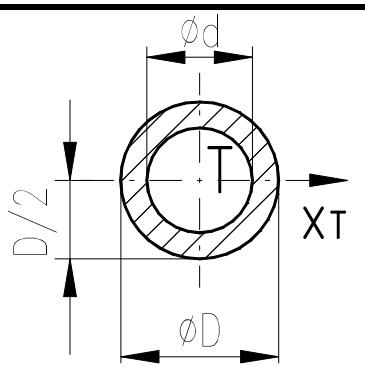


$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$J_{xT} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

### Mezikruží

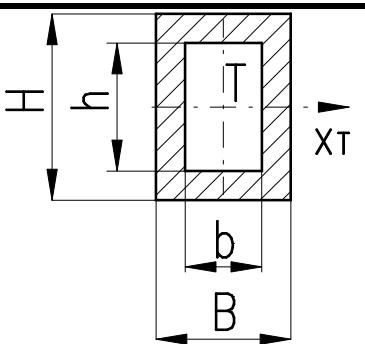


$$S = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

$$J_{xT} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$$

$$J_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

### Dutý obdélník

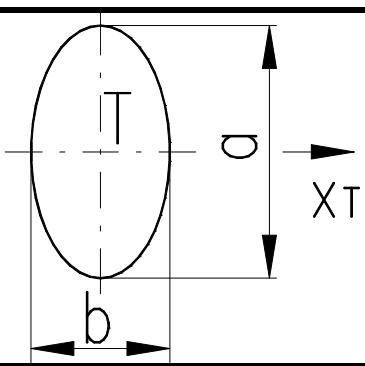


$$S = B \cdot H - b \cdot h$$

$$J_{xT} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$$

-

### Elipsa



$$S = \frac{\pi}{4} \cdot a \cdot b$$

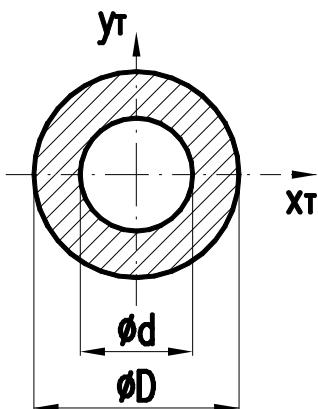
$$J_{xT} = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{64}$$

-

### 3.3 Kvadratické momenty složených ploch

Kvadratické momenty mohu sčítat a odčítat pouze, působí-li ke stejné ose. Obvykle počítáme kvadratický moment k těžišťové ose celého průřezu.

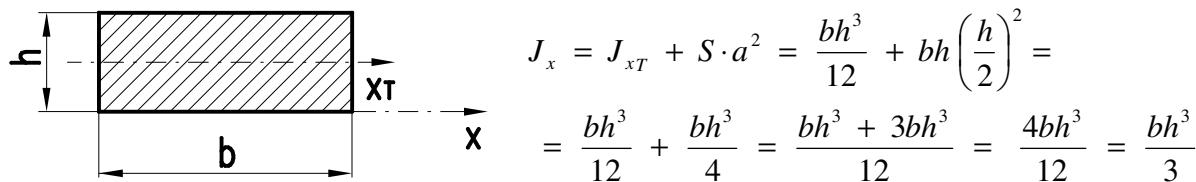
Např.: Mezikruží.



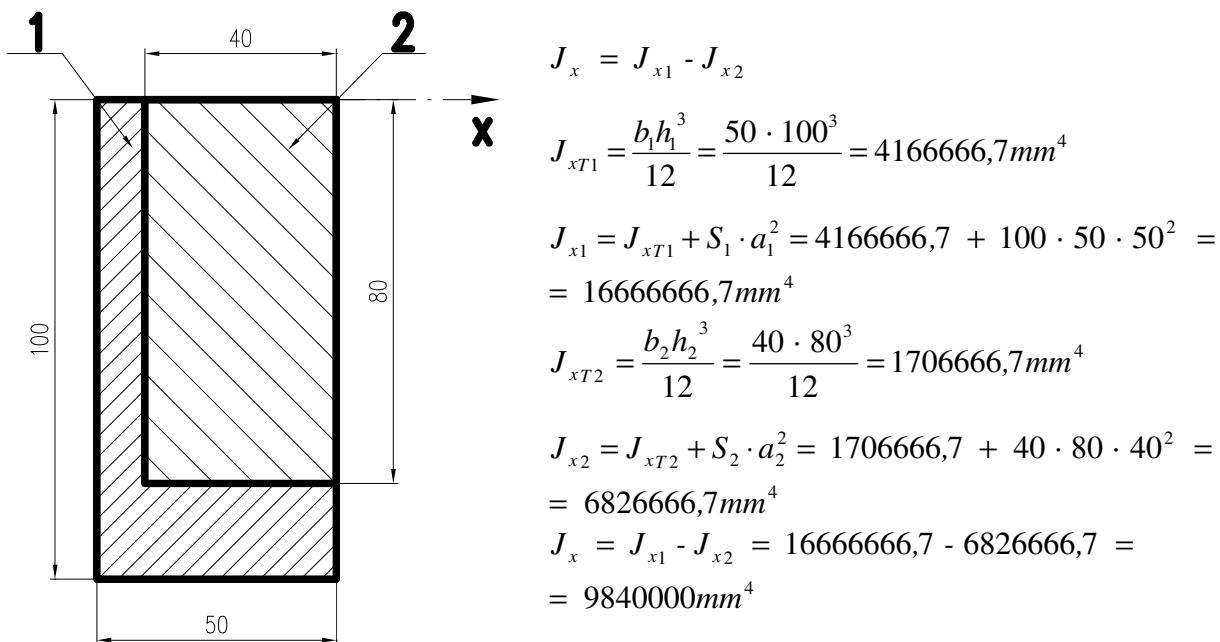
$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$$

$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

Př.: Určete kvadratický moment k ose x.



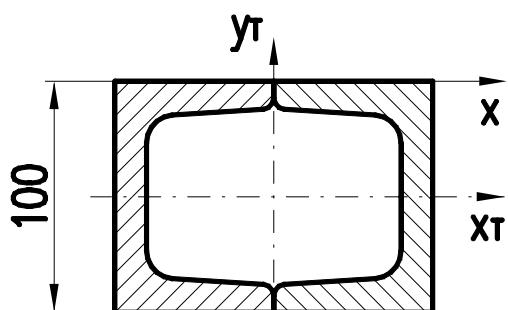
Př.: Určete kvadratický moment k ose x.





**Př.:** Určete kvadratický moment k ose x. Jde o dva profily U 100 ČSN 42 5570, Strojnické tabulky str. 295.

2 x U100



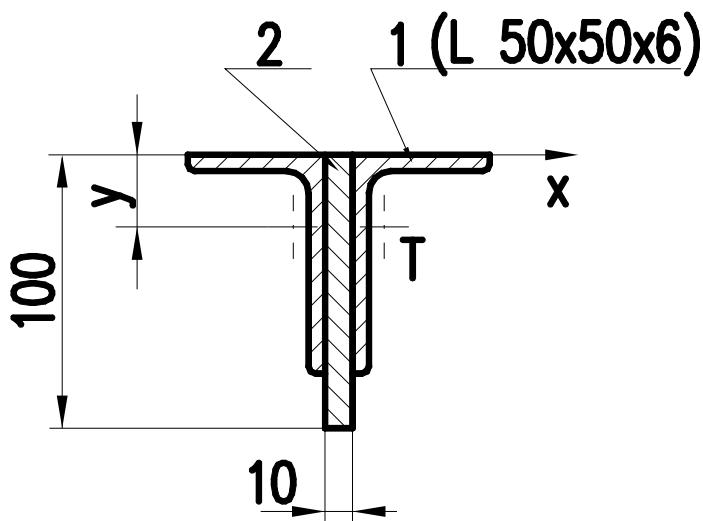
Z tabulek určíme:

$$J_{xU} = 206 \text{ cm}^4$$

$$S_u = 1350 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \cdot (J_{xU} + S_u \cdot a_U^2) = \\ &= 2 \cdot (2060000 + 1350 \cdot 50^2) = 10870000 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

**Př.:** Určete kvadratický moment k ose x. Jde o dva profily L50x50x6 ČSN 42 5541, Strojnické tabulky str. 289, 290 + profil 10 x 100.



Z tabulek určíme:

$$J_{xT1} = 12,88 \text{ cm}^4$$

$$S_1 = 5,69 \text{ cm}^2$$

$$e = y = 1,44 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} J_{x1} &= J_{xT1} + S_1 \cdot a_1^2 = J_{xT1} + S_1 \cdot y^2 = \\ &= 12,88 + 5,69 \cdot 1,44^2 = 24,68 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$J_{x2} = J_{xT2} + S_2 \cdot a_2^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 1 \cdot 10 \cdot 5^2 = 333,33 \text{ cm}^4$$

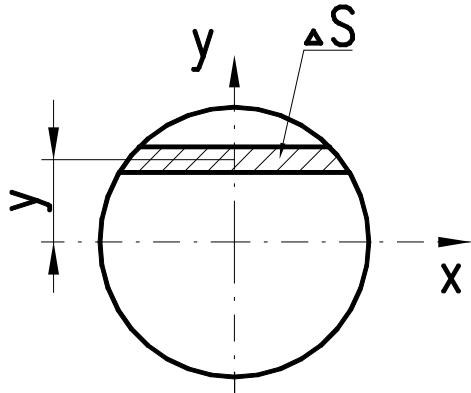
$$J_{x3} = J_{x1}$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} + J_{x3} = 24,68 + 333,33 + 24,68 = 382,69 \text{ cm}^4$$

### 3.4 Poloměr kvadratického momentu (kvadratický poloměr)

Protože neplatí vztah  $J_x = S \cdot y_T^2$ , nahrazujeme jej pro nutné případy vztahem:

$$J_x = S \cdot i_x^2$$



$$J_x = \sum_{i=1}^n \Delta S \cdot y_i^2 = S \cdot i_x^2 \neq S \cdot y_T^2$$

$i_x^2$  – poloměr kvadratického momentu, kvadratický poloměr

$$J_x \neq S \cdot y_T^2$$

#### 3.4.1 Obdélník

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}} = \sqrt{\frac{1}{12}bh^2}$$

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

#### 3.4.2 Kruh

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}}$$

$$i_x = \frac{d}{4}$$

#### 3.4.3 Poloměr kvadratického momentu $i_x$ k mimotěžišťové ose

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}} = \sqrt{\frac{J_{xT} + S \cdot a^2}{S}}$$

### 3.5 Průřezové moduly v ohybu a krutu

**Pevnostní podmínky:**

$$\begin{aligned}\sigma_{t,d} &= \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dovt,d} \\ p &= \frac{F}{S} \leq p_{Dov} \\ \tau_s &= \frac{F}{S} \leq \tau_{DovS} \\ \sigma_o &= \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_{DovO} \\ \tau_k &= \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{DovK}\end{aligned}$$

Průřezový modul  $W_O$ ,  $W_K$  nám reprezentuje v pevnostní podmínce pro krut a ohyb rozměry součástí, stejně jako plocha průřezu reprezentuje rozměry součástí v tahu nebo smyku.

**Průřezový modul v krutu**

$$W_K = \frac{J_p}{e}$$

$J_p$  – polární moment průřezu k neutrální ose.

$J_x$  – kvadratický moment průřezu k neutrální ose.

$e$  – vzdálenost krajního vlákna od neutrální osy.

$W_K$  – modul průřezu v krutu.

Neutrální osa je osa, ve které nepůsobí žádné napětí. U kružnice je to uprostřed.

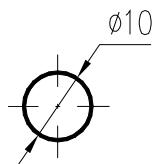
$$\textcircled{O} \quad W_K = \frac{J_p}{e} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \quad \boxed{W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16}} \quad [\text{mm}^3]$$

$$\textcircled{O} \quad W_K = \frac{J_p}{e} = \frac{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D} \rightarrow \text{tedy } W_{Kcelk} \neq W_{K1} - W_{K2}$$

**Průřezové moduly nelze nikdy sčítat ani odečítat!**

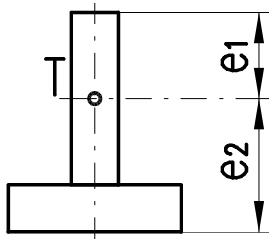
Poznámka: obvykle u krutu neuvažujeme jiné průřezy.

Př.:



$$W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} = 196 \text{ mm}^3$$

### 3.6 Průřezový modul v ohybu



$$\sigma_o = \frac{M_0}{W_{0\min}}$$

$$W_{01} = \frac{J_x}{e_1}$$

$$W_{02} = \frac{J_x}{e_2}$$

$J_x$  – kvadratický moment k neutrální osě.

Neutrální osa je osa, kde není žádné napětí, při ohybu prochází těžištěm průřezu.

$e_1, e_2$  – vzdálenost krajních vláken průřezu.

$W_{01}, W_{02}$  – moduly průřezu v ohybu, do pevnostní rovnice uvažují s minimálním modulem.

#### Postup výpočtu modulu průřezu v ohybu:

1. Určím těžiště průřezu a tím i neutrální osu.
2. Vypočtu kvadratický moment průřezu  $J_x$  s ohledem k těžištní ose.
3. Vypočtu moduly průřezu  $W_{01} = \frac{J_x}{e_1}$  a  $W_{02} = \frac{J_x}{e_2}$

U průřezů symetrických podle osy platí  $e_1 = e_2 \rightarrow W_{01} = W_{02}$

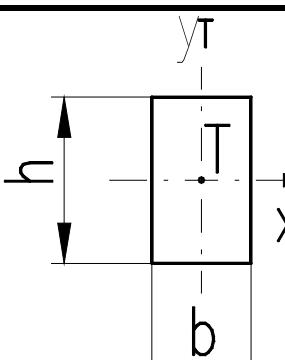
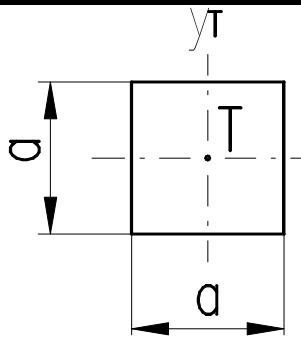
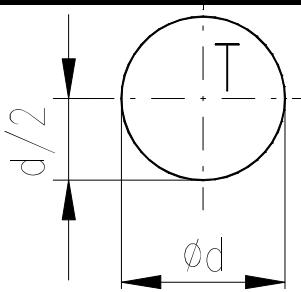
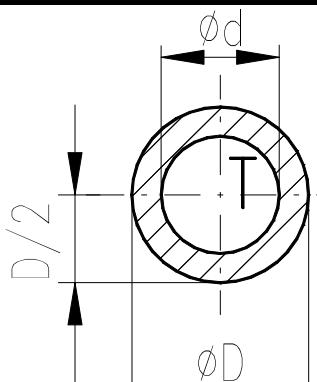
$$W_{0celk} \neq W_{0\ části1} + W_{0\ části2}$$

$$J_{xcelk} = J_{xčásti1} + J_{xčásti2} \text{ (ke stejné ose)}$$



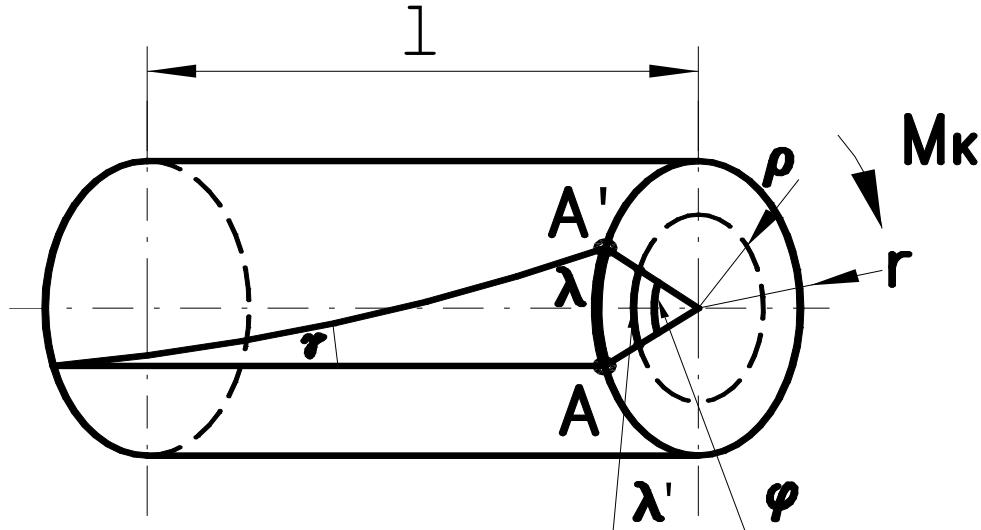
Strojnické tabulky, str. 39 ÷ 41

### Průřezové moduly v ohybu základních geometrických obrazců

	K ose x	K ose y
<b>Obdélník</b>		
	$W_{0x} = \frac{1}{6}bh^3$	$W_{0y} = \frac{1}{6}b^2h$
<b>Čtverec</b>		
	$W_{0x} = \frac{1}{6}a^3$	$W_{0y} = \frac{1}{6}a^3$
<b>Kruh</b>		
	$W_{0x} = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_{0y} = \frac{\pi d^3}{32}$
<b>Mezikruží</b>		
	$W_{0x} = \frac{\pi}{32} \cdot \left( \frac{D^4 - d^4}{D} \right)$	$W_{0y} = \frac{\pi}{32} \cdot \left( \frac{D^4 - d^4}{D} \right)$

## 4 Krut

Je namáhání kroutícím momentem, který působí v rovině  $\perp$  na podélnou osu součásti.



Deformace

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{r \cdot \varphi}{\rho \cdot \varphi} = \frac{r}{\rho}$$

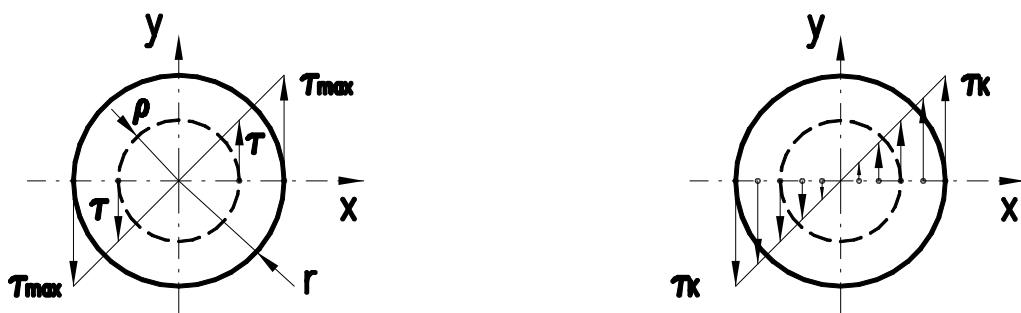
$$\text{Pro malé úhly platí: } \gamma \cdot l = \varphi \cdot r \rightarrow \gamma = \frac{r \cdot \varphi}{l}$$

$\gamma$  – zkros.

$\vartheta$  – [théta] zkrut (úhel zkroucení hřídele jednotkové délky).

$\varphi$  – úhel zkroucení.

Rovinné řezy zůstávají rovinné, pouze se proti sobě natočí. Při natočení se řezy po sobě snaží posouvat, tedy vzniká tečné napětí  $\rightarrow \tau_K$ .



Je zřejmé, že deformace  $\lambda$  uvnitř tyče je menší než deformace po obvodě tyče. Protože platí Hookeův zákon, je deformace přímo úměrná napětí, tedy i napětí roste přímo úměrně se vzdáleností od neutrální osy. Tedy při krutu je napětí rozloženo rovnoměrně a má maximální hodnotu na povrchu průřezu.

## 4.1 Základní rovnice pro krut

$$\boxed{\tau_{K \max} = \frac{M_K}{W_K}}$$

kde  $W_K = \frac{J_p}{r}$

pro kruh:  $W_{K_o} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

## 4.2 Pevnostní podmínka pro krut

$$\boxed{\tau_K = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_{KDov}}$$

Ocel  $\tau_{DovK} = 0,63 \cdot \sigma_{Dovt}$

Litina  $\tau_{DovK} = \sigma_{Dovt}$

$W_K$  – modul průřezu v krutu.

Výhodnější jsou duté hřídele, kde při stejné hmotnosti přenesou podstatně větší  $M_K$  (materiál u neutrální osy není využitý).

## 4.3 Hookeův zákon pro smyk

$$\tau_{\max} = \gamma \cdot G$$

$G$  – modul pružnosti ve smyku.

Ocel  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa.

Litina  $G = 4 \cdot 10^4$  MPa.

$$\gamma - zkos, \quad \gamma = \frac{r \cdot \varphi}{l} \quad W_K = \frac{J_p}{r}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K \cdot r}{J_p} = \gamma \cdot G = \frac{r \cdot \varphi}{l} \cdot G \rightarrow \varphi = \frac{M_K \cdot r \cdot l}{J_p \cdot r \cdot G} = \frac{M_K \cdot l}{J_p \cdot G}$$

Úhel kroucení:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{J_p \cdot G} [\text{rad}] \quad \cdot \frac{180}{\pi} [\text{°}]$$

$\vartheta$  – [théta] zkrut (měrný úhel zkroucení) = úhel zkroucení tyče délky 1m.

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{G \cdot J_p} [\text{rad}] \quad \cdot \frac{180}{\pi} [\text{°}]$$

## 4.4 Deformační podmínka pro krut:

U dlouhých tenkých hřídelů máme obvykle požadavek i na dostatečnou tuhost hřídele. Poddajný hřídel, který se hodně deformuje, může způsobit torzní kmity (pružina), které způsobují nežádoucí vibrace stroje. Proto v těchto případech kontrolujeme hřídel i z deformační podmínky.

Úhel zkroucení:

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \varphi_{Dov}^\circ$$

Zkrut

$$\vartheta^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_K}{G \cdot J_p} \leq \vartheta_{Dov}^\circ$$

**Př.:** Vypočítejte napětí v krutu  $\tau_K$  a úhel zkroucení pro tyče průměru 25 mm a délky 1 m,  $M_K = 50$  N.m,  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa.

$$W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 25^3}{16} = 3068 \text{ mm}^3$$

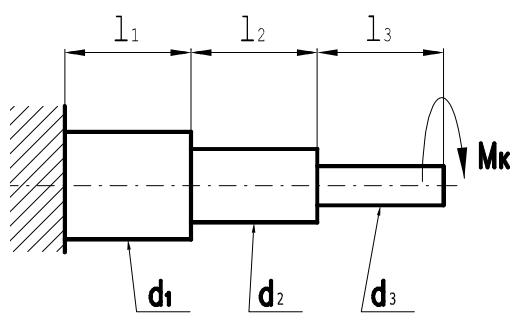
$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{50000}{3068} = 16,28 \text{ MPa}$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 25^4}{32} = 38350 \text{ mm}^4$$

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{50000 \cdot 1000 \cdot 180}{8 \cdot 10^4 \cdot 38350 \cdot \pi} = 0,93^\circ$$

$$(\text{pro trubku by platily vzorce: } W_K = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}, \quad J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32})$$

**Př.:** Určete výsledný úhel zkroucení  $\varphi$ .



$$\hat{\varphi}_{celk} = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_3 = \frac{M_K}{G} \cdot \left( \frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2}{J_{p2}} + \frac{l_3}{J_{p3}} \right)$$

$$J_{p1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \dots$$

$$J_{p2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \dots$$

$$J_{p3} = \frac{\pi \cdot d_3^4}{32} = \dots$$

## 4.5 Závislost krouticího momentu $M_K$ na výkonu P

Obvykle u hřídele známe přenášený výkon P a jeho otáčky n:

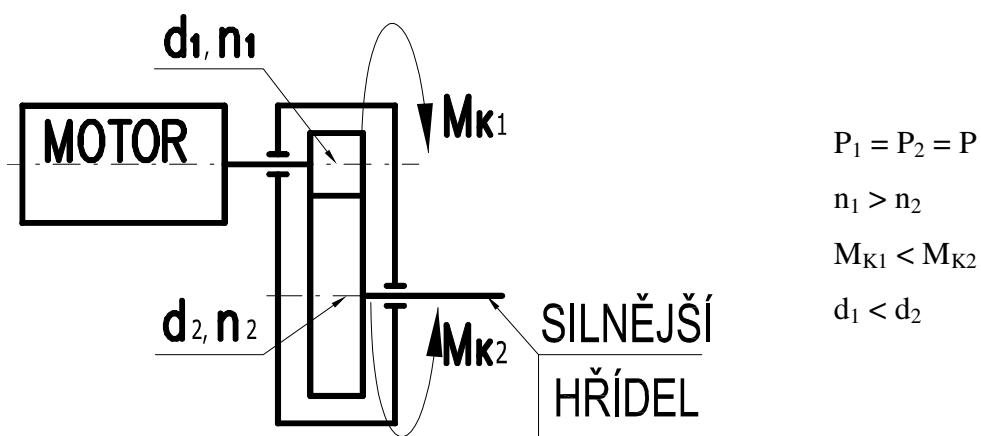
Výkon:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = F \cdot r \cdot \omega = M_K \cdot \omega$$

odtud:  $M_K = \frac{P}{\omega}$

Úhlová rychlosť:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$

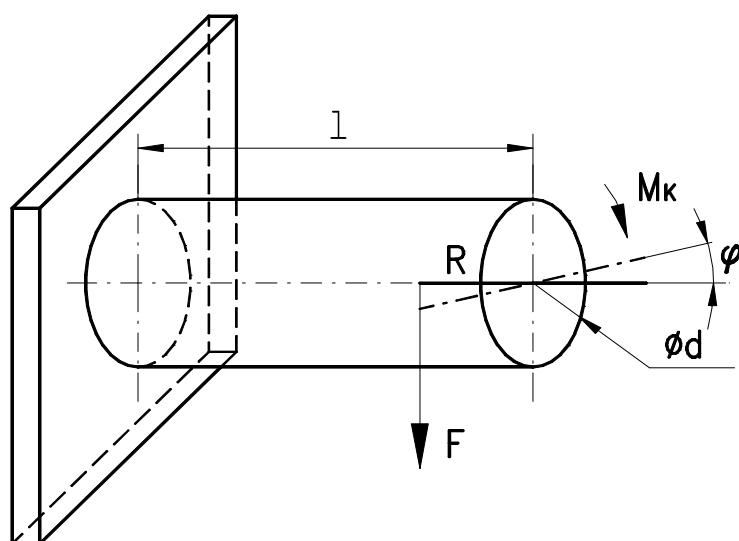
Tedy při stejném výkonu čím větší máme otáčky, tím menší je kroutící moment.



## 4.6 Kroucené pružiny

### 4.6.1 Torzní tyč:

Je to pružina ve tvaru přímé tyče, používá se u automobilů (odpružení). Torzní pružina má mnohem lepší využití materiálu, než pružina ohýbaná. Využívají se tedy hlavně tam, kde záleží na lehkosti konstrukce.



Pevnostní rovnice:

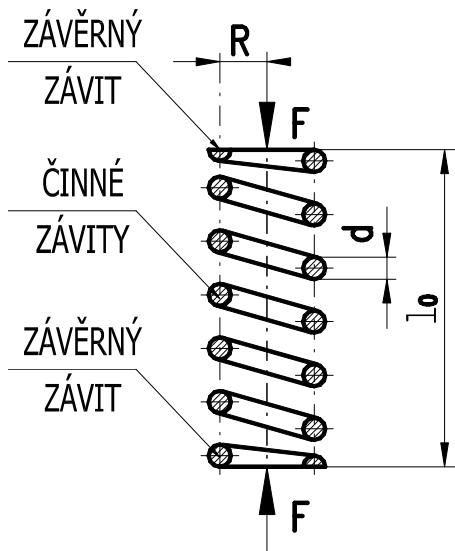
$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq \tau_{DovK}$$

Deformační podmínka:  $\hat{\varphi} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \hat{\varphi}_{\max}, (J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32})$

Obvykle víme  $M_K$ ,  $\varphi_{\max}$ , materiál a musíme vypočítat průměr d, délku l.

#### 4.6.2 Šroubová válcová pružina

Tato pružina se používá nejčastěji, může být tažná (má oka) a tlačná (rovné zakončení závitů). Je vinuta z drátu.



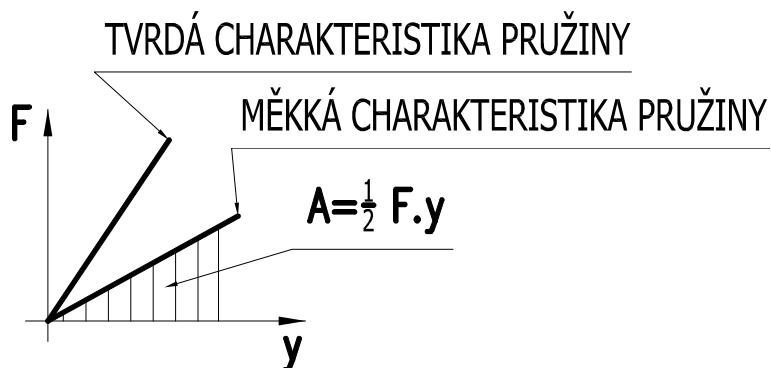
d – normalizovaný průměr drátu pružiny.

R – poloměr vinutí pružiny  $R = (3 \div 5) \cdot d$

Pevnostní rovnice:

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{F_{\max} \cdot R}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq \tau_{DovK} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot \tau_{DovK}}}$$

Deformační podmínka:



y – stlačení pružiny [mm].

n – počet činných závitů.

A – deformační práce.

$\hat{\varphi}$  – natočení drátu

pružiny.

$$A = \frac{1}{2} F \cdot y = \frac{1}{2} M_K \cdot \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \varphi_{\max}$$

$$M_K = F \cdot R$$

$$J_{po} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot n$$

$$\frac{1}{2} F \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_K^2 \cdot l}{G \cdot J_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 R^2 l}{G \cdot J_p} \rightarrow$$

$$y = F \frac{R^2 \cdot l}{G \cdot J_p} = F \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot n \cdot R^2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} = F \cdot \frac{64 \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \rightarrow$$

$$n = \frac{y_{\max} \cdot d^4 \cdot G}{64 \cdot F_{\max} \cdot R^3}$$

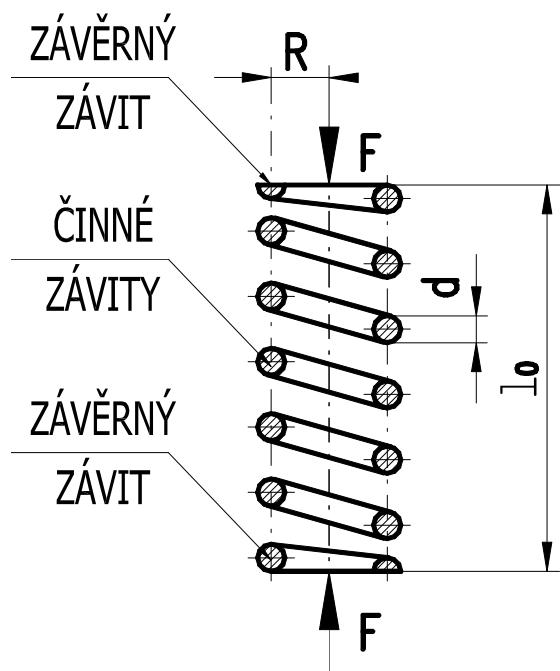
$$y = F \cdot \frac{64 \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = F \cdot \frac{1}{y} \rightarrow F = y \cdot k$$

Tuhost pružiny k:

$$k = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot R^3 \cdot n}$$

### Výpočet volné délky tlačné pružiny $l_0$ :

Při maximálním provozním stlačení pružiny  $y_{\max}$  má být mezi závity ještě minimální vůle  $v_{\min} = 0,5$  mm. Závity tedy nesmí dosednout na sebe.



Celkový počet závitů:

$$n_C = n + n_Z$$

$n_C$  – celkový počet závitů

$n$  – počet činných závitů

$n_Z$  – počet závěrných závitů ( $n_Z = 1,5 \div 3$ )

$$l_0 = n_C \cdot d + (n_C - 1) \cdot v_{\min} + y_{\max}$$

**Př.: Navrhněte tlačnou pružinu pro:  $F_{\max} = 200 \text{ N}$ ,  $R = 15 \text{ mm}$ , maximální provozní zatížení pružiny  $y_{\max} = 20 \text{ mm}$ . Materiál je patentovaný ocelový drát  $\tau_{DovK} = 400 \text{ MPa}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .**

$$\text{průměr drátu: } \tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{F_{\max} \cdot R}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq \tau_{DovK} \rightarrow$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot F_{\max} \cdot R}{\pi \cdot \tau_{DovK}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200 \cdot 15}{\pi \cdot 400}} = 3,36 \text{ mm}$$

Podle normy volím drát průměru 3,55 mm (staré ST str. 611, nové ST str. 617).

Počet činných závitů:

$$n = \frac{y_{\max} \cdot d^4 \cdot G}{64 \cdot F_{\max} \cdot R^3} = \frac{20 \cdot 3,55^4 \cdot 0,8 \cdot 10^5}{64 \cdot 200 \cdot 15^3} = 5,88 \text{ závitů}$$

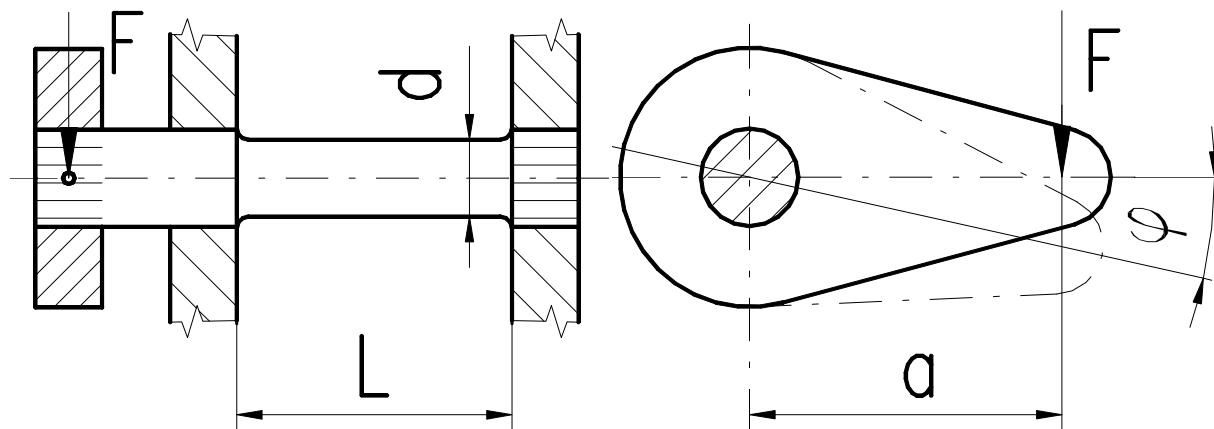
$$n_z = 2$$

$$n_c = 8 \text{ závitů}$$

## 4.7 Krut nekruhových průřezů

Nekruhové průřezy se při kroucení bortí, proto se jejich použití vyhýbáme. Pro průřezy přibližně kruhové (šestihran, hřídel s perem, drážkovaný hřídel) počítáme přibližně s průměrem vepsané kružnice. U obecných průřezů (čtverec, obdélník) lze najít příslušné vzorečky v literatuře a jsou pouze přibližné.

**Př.: Zjistěte úhel zkroucení  $\varphi$  a zkrut  $v$  [théta] tyče v obloukové míře a ve stupních, jestliže délka tyče je  $L = 1 \text{ m}$ , průměr  $d = 16 \text{ mm}$  a modul pružnosti ve smyku je  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $a = 200 \text{ mm}$ ,  $F = 1000 \text{ N}$ .**





$$M_K = F \cdot a = 1000 \cdot 0,2 = 200 Nm = 200 \cdot 10^3 Nmm$$

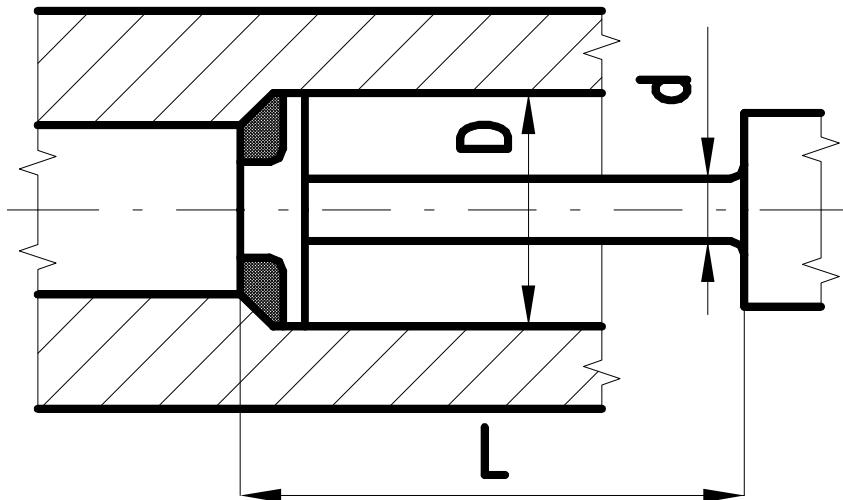
$$\hat{\varphi} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 16^4}{32}} = 0,3886 rad$$

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \hat{\varphi} = \frac{180}{\pi} \cdot 0,3886 = 22,26^\circ = 22^\circ 15'$$

$$\vartheta = \frac{\hat{\varphi}}{l} = \frac{0,3886}{1} = 0,3886 \frac{rad}{m}$$

$$\vartheta^\circ = \frac{\varphi^\circ}{l} = \frac{22^\circ 15'}{1} = 22^\circ 15' na metr délky$$

**Př.: Vyvrtávajícím strojem** je obráběn válec dvěma noži dle obrázku. Řezná síla  $F=10^4 N$  působí kolmo na poloměr  $R = 200$  mm. Vypočtěte  $\vartheta$  vřetena, které otáčí vyvrtávacím nožem, a to tak, aby celkový úhel zkroucení  $\varphi$  na délce  $l = 1,2$  m nepřekročil hodnotu  $\varphi_{Dov} = 0,5^\circ$ , je-li  $G = 0,77 \cdot 10^5$  MPa. Určete zkrut  $\vartheta$ .



$$\hat{\varphi} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p}$$

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p} \leq 0,5^\circ$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$M_K = 2 \cdot F \cdot R = 2 \cdot 10^4 \cdot 200 = 4 \cdot 10^6 Nmm$$

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_K \cdot l}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} \leq 0,5^\circ$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot M_K \cdot l \cdot 32}{\pi \cdot G \cdot \pi \cdot 0,5}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1200 \cdot 32}{\pi^2 \cdot 0,77 \cdot 10^5 \cdot 0,5}} = 92,36 mm$$

$$\vartheta^\circ = \frac{\varphi^\circ}{l} = \frac{0,5^\circ}{1,2} = 0,42^\circ na metr délky$$

**Př.:** Porovnejte úsporu materiálu u plného a dutého hřídele stejné délky, přenáše jícího stejný krouticí moment při stejném dovoleném napětí. Dané hodnoty:  $M_K = 5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$ , poměr  $\alpha = d/D = 0,7$ ;  $\tau_{DovK} = 60 \text{ MPa}$ .

a) Plný hřídel:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_{DovK}$$

$$W_K = \frac{M_K}{\tau_{DovK}} = \frac{5 \cdot 10^6}{60} = 8,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_K = \frac{\pi d^3}{16} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_K}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8,33 \cdot 10^4}{\pi}} = 75 \text{ mm}$$

b) Dutý hřídel:

$$W_K = \frac{\pi}{16} \cdot \left( \frac{D^4 - d^4}{D} \right) = \frac{\pi}{16} \cdot \left( \frac{D^4 - (\alpha \cdot D)^4}{D} \right) = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4}{D} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{16} \cdot D^3 (1 - \alpha^4)$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_K}{\pi \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8,33 \cdot 10^4}{\pi \cdot (1 - 0,7^4)}} \doteq 82 \text{ mm}$$

$$d = D \cdot \alpha = 82 \cdot 0,7 = 57,4 \text{ mm}$$

Poměr hmotností obou hřídelů se při stejně délce a materiálu rovná poměru průřezů.

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = S_1 \cdot l \cdot \rho$$

$$m_2 = V_2 \cdot \rho = S_2 \cdot l \cdot \rho$$

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 75^2}{4} = 4420 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot 82^2 (1 - 0,7^2) = 2693 \text{ mm}^2$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{S_2 \cdot l \cdot \rho}{S_1 \cdot l \cdot \rho} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2673}{4420} = 0,61$$

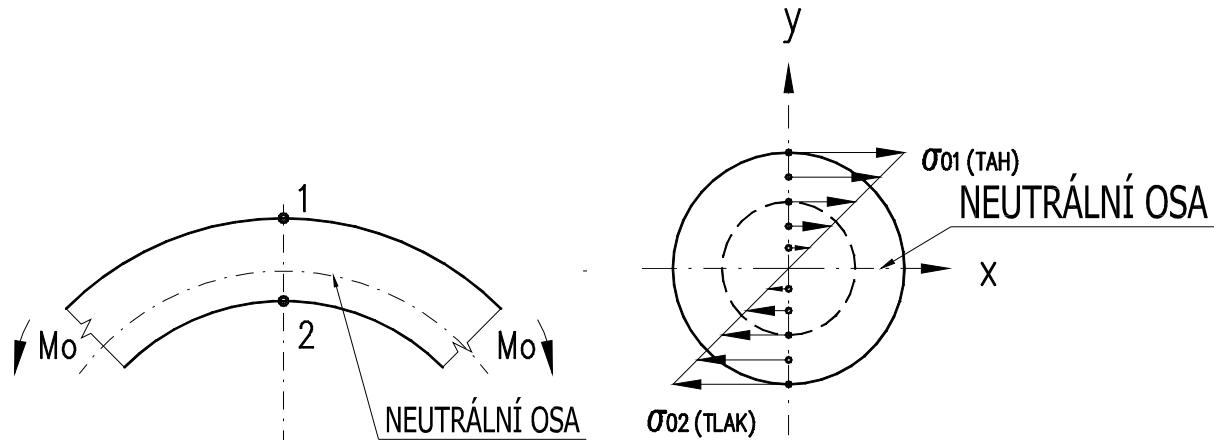
$$100 - 61 \% = 39 \%$$

→ dutý hřídel stejných parametrů má o 39 % menší hmotnost.



## 5 Ohyb

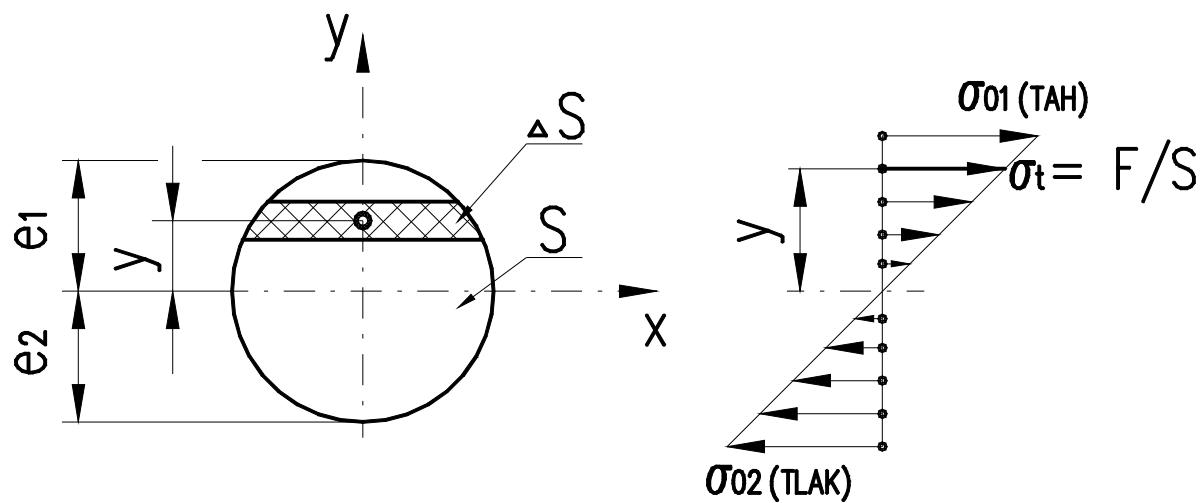
Ohyb vzniká u součástí zatěžovaných ohybovým momentem, tj. momentem působícím v rovině osy součásti.



U ohýbaných součástí je napětí rozloženo po průřezu nerovnoměrně. Největší tahové napětí je na vnější straně ohybu (krajní vlákno 1) a největší tlakové napětí na vnitřní straně ohybu (krajní vlákno 2). Mezi krajními vlákny je místo, kde je nulové napětí. Tomuto místu pak říkáme **neutrální osa**. Neutrální osa je průsečnice neutrální vrstvy s rovinou řezu součásti.

Neutrální osa prochází těžištěm průřezu a je v ní nulové ohybové napětí (od ohybového momentu).

### 5.1 Pevnostní podmínka pro ohyb



Podmínka rovnováhy momentů:

$$M_O = M_{OV}$$

$M_O$  – ohybový moment;

$M_{OV}$  – moment vnitřních sil.

$$M_O = M_{OV} = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot \Delta S_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{01}}{e_1} y_i \cdot \Delta y_i \cdot y_i = \frac{\sigma_{01}}{e_1} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i^2 = \frac{\sigma_{01}}{e_1} \cdot J_x =$$

$$= \frac{\sigma_{02}}{e_2} \cdot J_x = \frac{\sigma_{01}}{W_{O1}} = \frac{\sigma_{02}}{W_{O2}}$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i^2 = J_x$$

$$\frac{J_x}{e_1} = W_{Ox}$$

$$\boxed{\sigma_{O\max} = \frac{M_o}{W_{O\max}} \leq \sigma_{DovO}}$$

$$\sigma_{DovO} = \sigma_{Dovt}$$

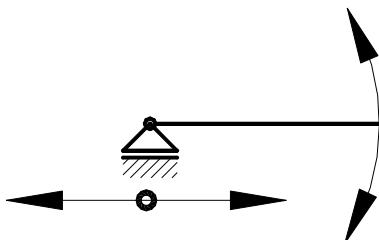
$$W_o - \text{průřezový modul}, W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, W_o = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Pozn.: U litiny se někdy počítá napětí v obou krajních vláken, tedy tahové i tlakové napětí, protože litina má mez kluzu v tahu asi trojnásobnou meze kluzu v tlaku  $\sigma_{Dovt} = 3 \cdot \sigma_{DovD}$

## 5.2 Uložení nosníků

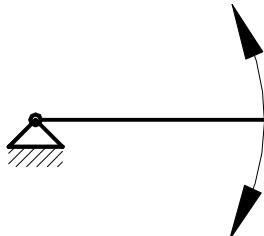
### 5.2.1 Způsoby uložení:

**Volná podpora (posuvná):**



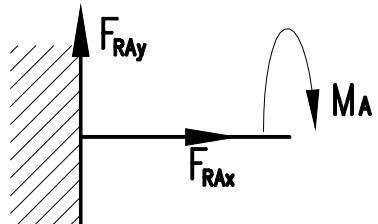
Umožňuje natáčení a vodorovný posun, přenáší svislé síly.

**Pevná podpora (kloub):**



Umožňuje pouze natáčení. Přenáší obecné šikmé síly, které se rozkládají do směrů x, y  
 $\leftrightarrow, \uparrow, R_{Ax}, R_{Ay}$

**Vetknutí:**



Neumožňuje žádný pohyb. Přenáší šikmé síly a moment (po rozložení  $F_{R_{Ax}}$ ,  $F_{R_{Ay}}$ ).

Vazební síly jsou reakční síly působící v místě uchycení ohýbaných součástí (nosníků). U vetknutí vzniká navíc i vazební moment. Použití podpor nebo vetknutí závisí na konstrukčním uspořádání nosníků.

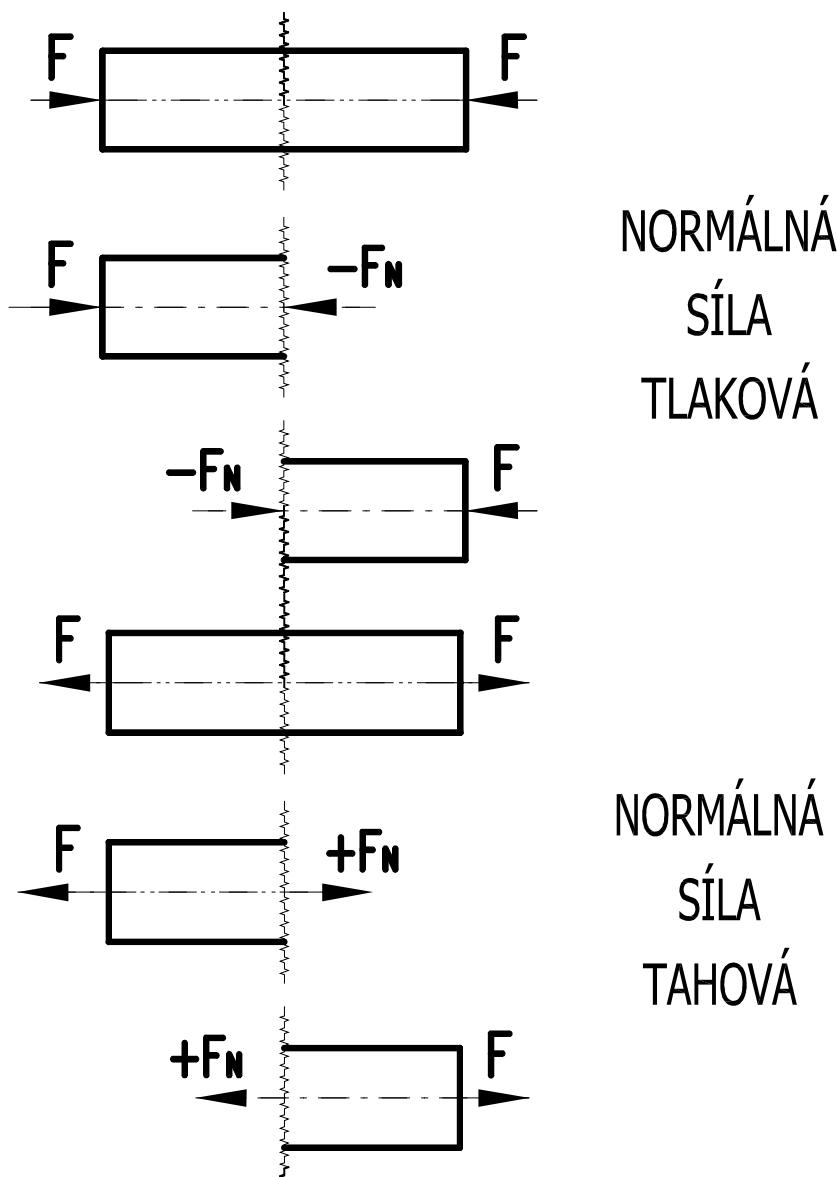


### 5.3 Vnitřní síly a momenty

**Vnější síly:** zatížení + reakce v uložení.

**Vnitřní síly:** jsou uvnitř v materiálu (metoda uvolňování).

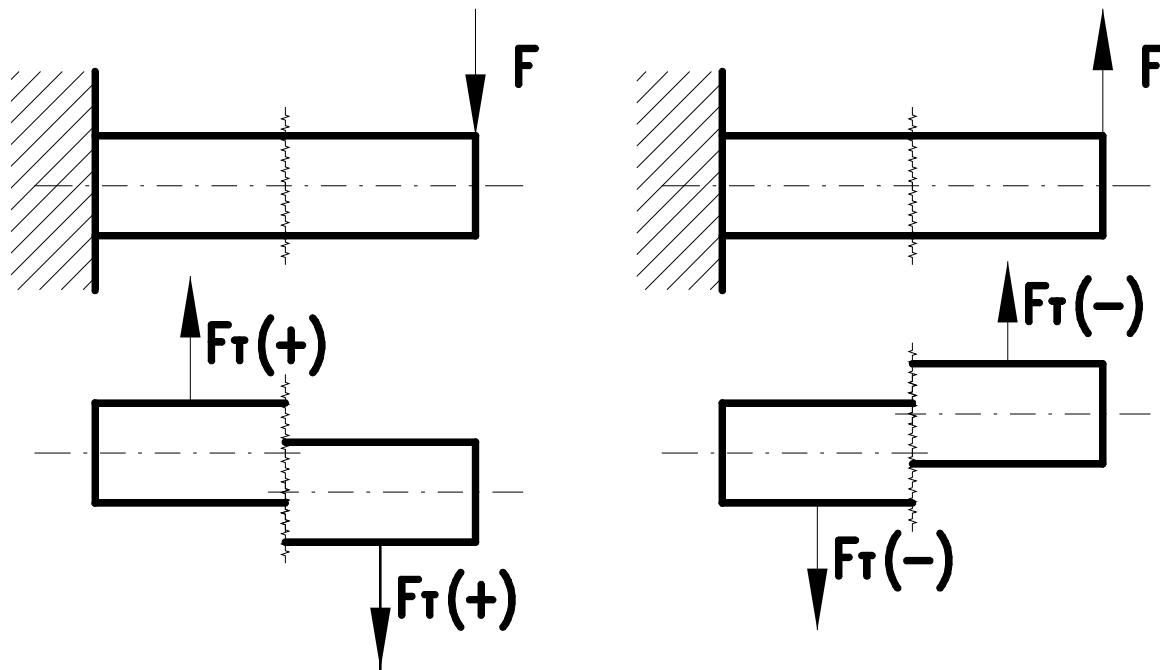
#### 1. Normálná síla $F_N$ :



Normálná síla je síla působící v rovině řezu, která udržuje v rovnováze síly působící ve směru osy nosníku. Normálná síla v určitém místě nosníku je součet všech normálních vnějších sil po jedné straně nosníku.

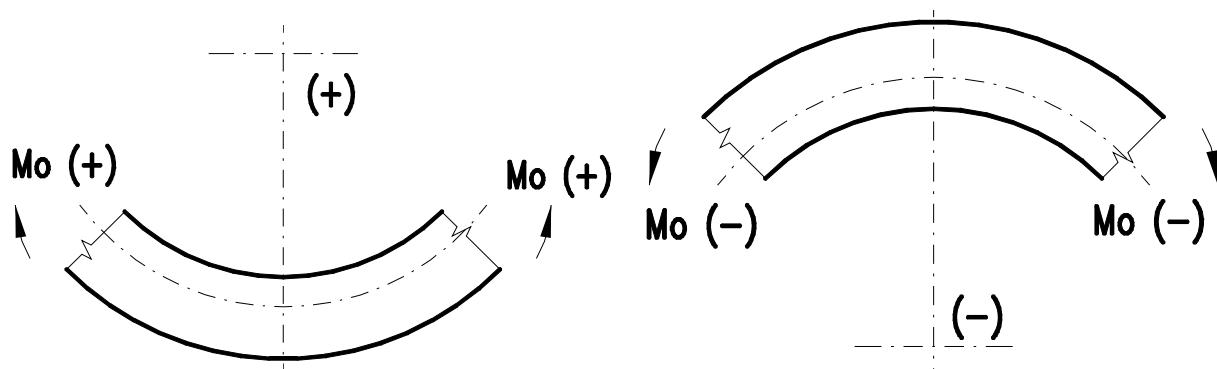


## 2. Posouvající síly $F_T$ :

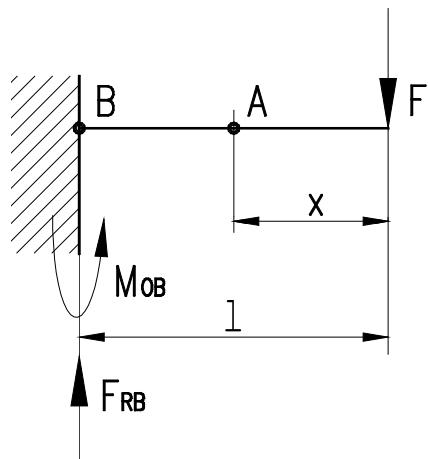


Posouvající síla působí v místě řezu ve směru kolmém na osu nosníku a snaží se tedy posunout obě části řezu proti sobě. Kladná je ta posouvající síla, která se snaží posunout levou část nahoru proti pravé části. Posouvající síla v určitém místě nosníku je součet všech příčných vnějších sil po jedné straně nosníku.

## 3. Ohybový moment:



Ohybový moment působí v místě řezu a je kolmý na osu nosníku. Ohybový moment v určitém místě nosníku je součet všech ohybových momentů po jedné straně řezu. Je to vnitřní moment, který je v rovnováze s vnějšími momenty.



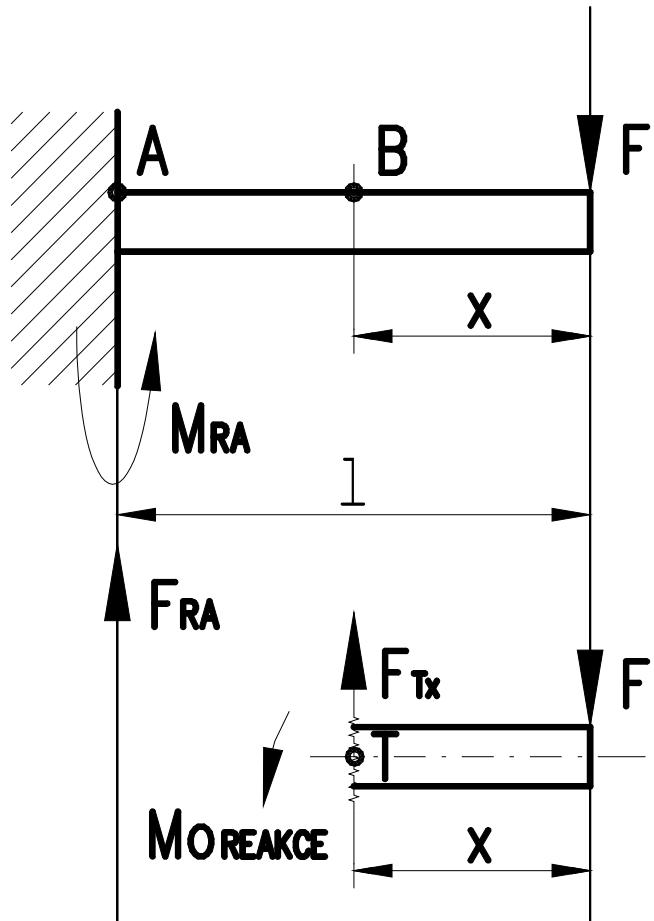
$$M_{OA} = F \cdot x$$

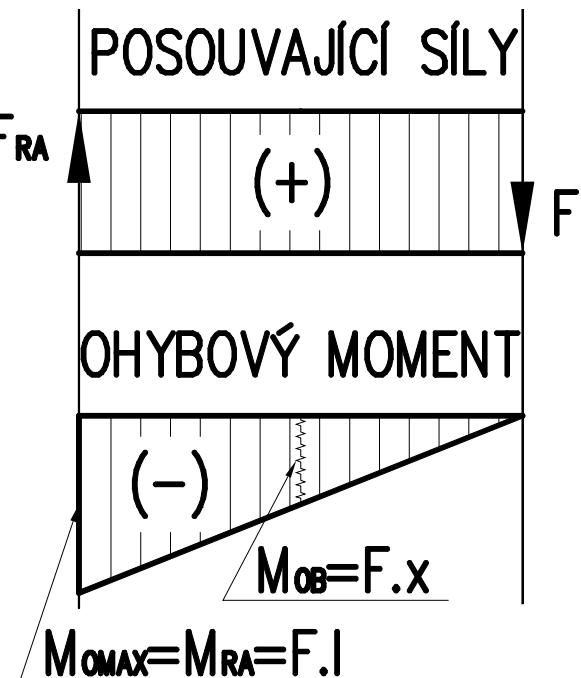
$$M_{OB} = F \cdot l$$

$$M_{OA} = M_{OB} - F_{RB}(l - x) = F \cdot l - F_{RB} \cdot l + F \cdot x = F \cdot x$$

## 5.4 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů

### 5.4.1 Veknutý nosník





Rovnováha sil:

$$F_{RA} = F$$

Rovnováha momentů k B:

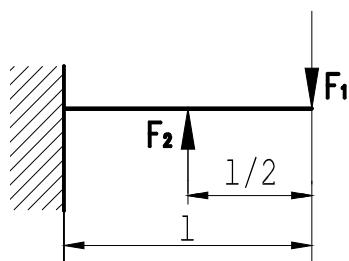
$$M_{0X} = F \cdot x$$

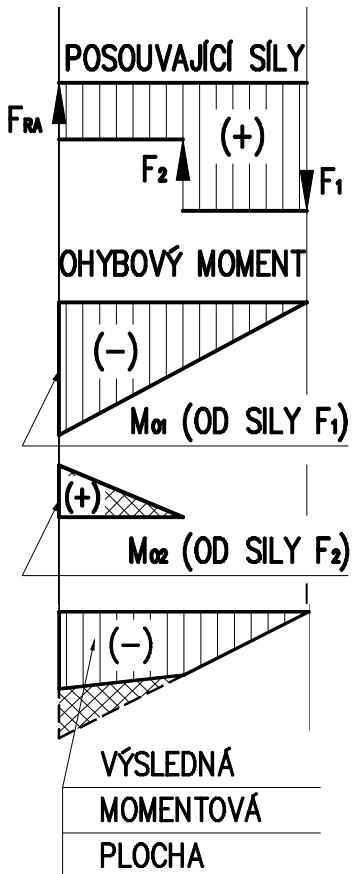
## 5.5 Určování posouvajících sil a ohybových momentů

### 5.5.1 Analytická metoda:

- Posouvající síla v libovolném průřezu se rovná algebraickému součtu všech vnějších příčných sil působících po jedné straně nosníku od místa řezu.
- Ohybový moment v libovolném průřezu nosníku se rovná algebraickému součtu momentů všech vnějších sil působících po jedné straně nosníku od místa řezu.

**Př.: Určete průběhy posouvajících sil a ohybových momentů analytickou metodou.**





$$F_1 = 2F_2$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$F_{RA} + F_2 - F_1 = 0 \rightarrow F_{RA} = F_1 - F_2 = 2F_2 - F_2 = F_2$$

$$F_{RA} = \frac{F_1}{2}$$

$$M_{01} = F_1 \cdot l$$

$$M_{02} = F_2 \cdot \frac{l}{2}$$

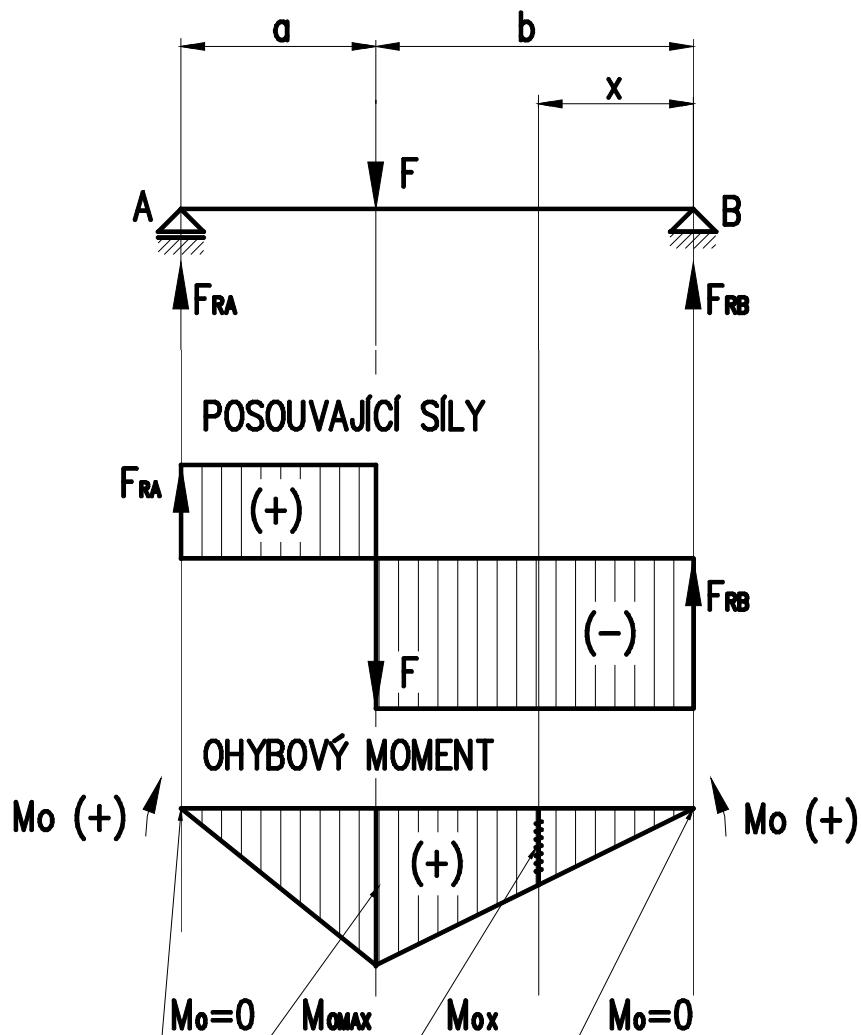
$$M_{o\max} = M_{01} - M_{02}$$

### 5.5.2 Metoda superpozice:

Používá se u nosníku zatíženého větším počtem sil. Analyticky určíme momentové plochy od každé síly zvlášť. Výsledná momentová plocha vznikne složením dílčích ploch (ohybové momenty od jednotlivých sil se ve stejném místě sčítají).



Př.:



reakce:

$$\left( \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \right)$$

$$-F \cdot a + F_{RB} (a + b) = 0$$

$$F_{RB} = \frac{F \cdot a}{a + b}$$

$$F_{RA} = \frac{F \cdot b}{a + b}$$

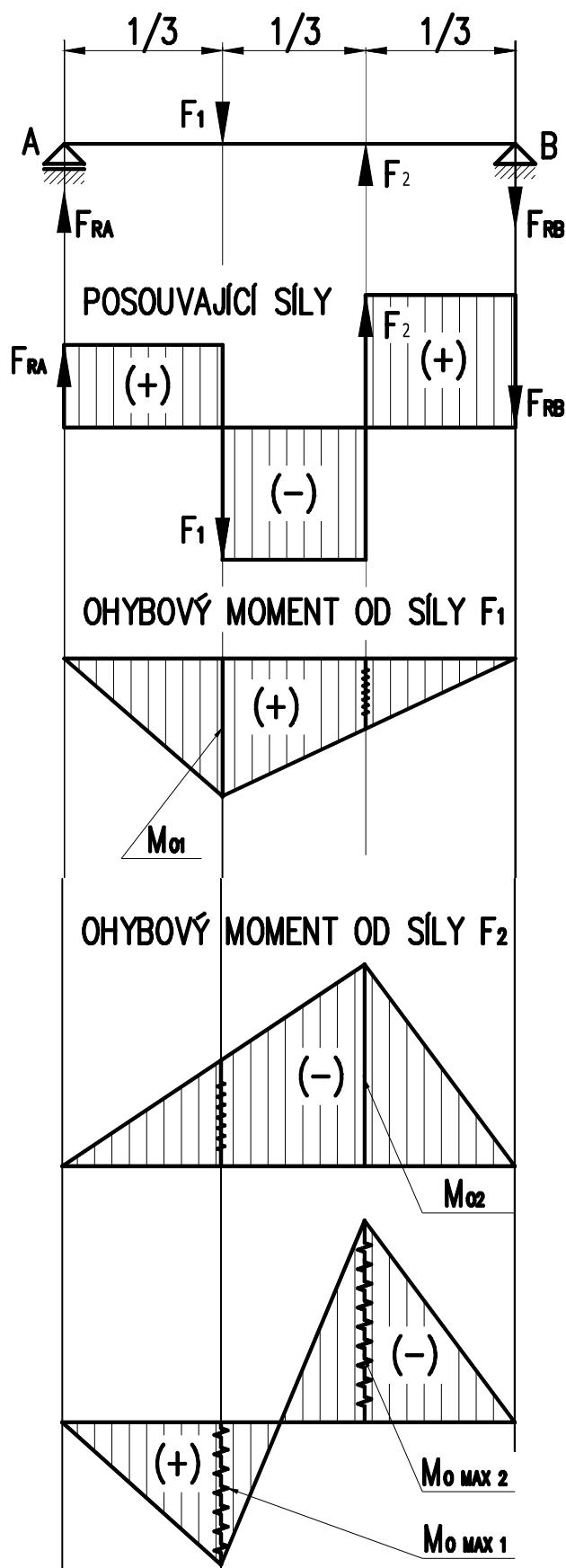
$$M_{0X} = F_{RB} \cdot x$$

pro  $x = b$

$$M_{0X} = M_{OB} = M_{OMax} = F_{RB} \cdot b = F_{RA} \cdot a$$



Př.:



$$F_1 = -F_2 \rightarrow$$

$$F_{RA} = \frac{1}{3} F_1$$

$$F_{RB} = \frac{1}{3} F_1$$

**Řešení od síly  $F_1$ :**

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

$$F_{RA} = \frac{2}{3} F_1$$

$$F_{RB} = \frac{1}{3} F_1$$

**Moment od síly  $F_1$  v místě síly  $F_1$**

$$M_{o1,1} = F_{RA} \cdot \frac{1}{3}l = \frac{2}{3} F_1 \cdot \frac{1}{3}l = \frac{2}{9} F_1 \cdot l$$

**Moment od síly  $F_1$  v místě síly  $F_2$**

$$M_{o2,1} = F_{RB} \cdot \frac{1}{3}l = \frac{1}{3} F_1 \cdot \frac{1}{3}l = \frac{1}{9} F_1 \cdot l$$

**Řešení od síly  $F_2$ :**

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

$$F_{RA} = \frac{1}{3} F_2$$

$$F_{RB} = \frac{2}{3} F_2$$

**Moment od síly  $F_2$  v místě síly  $F_1$**

$$M_{o1,2} = F_{RA} \cdot \frac{1}{3}l = \frac{1}{9} F_2 \cdot l$$

$$M_{o2,2} = F_{RB} \cdot \frac{1}{3}l = \frac{2}{9} F_2 \cdot l$$

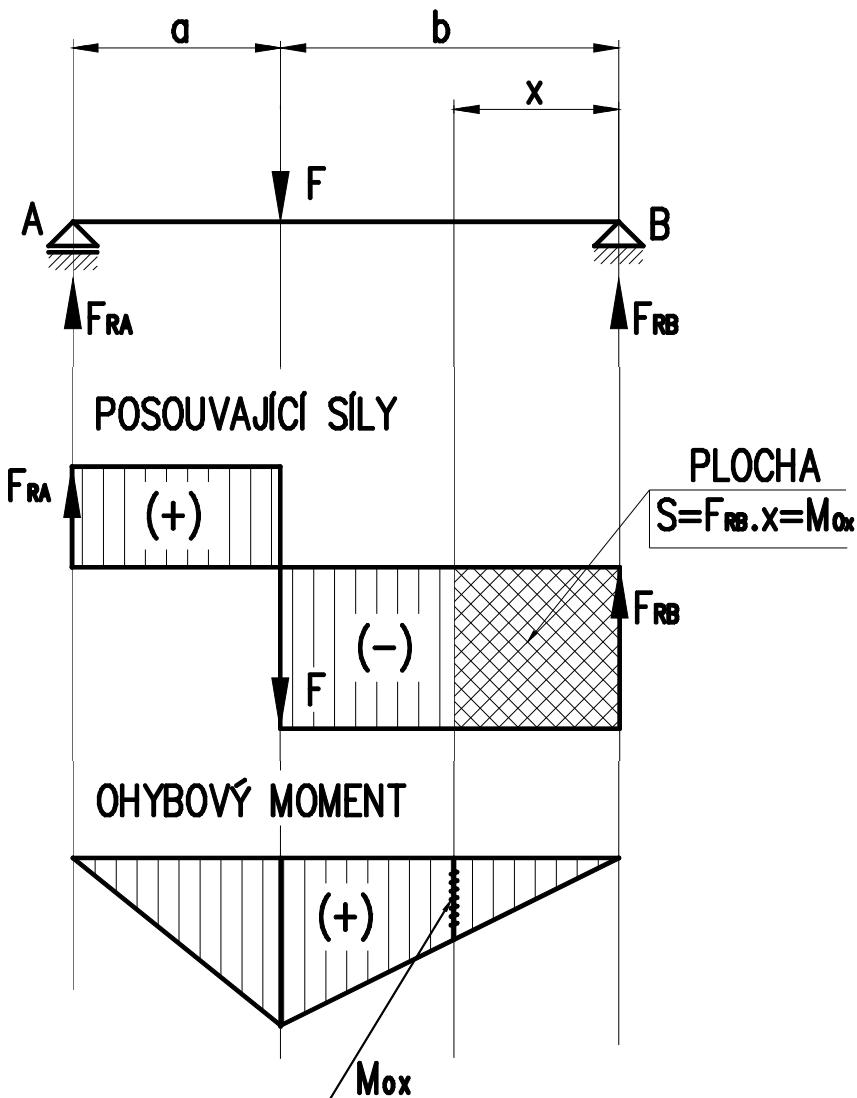
**Superpozice**

$$M_{o\max(1)} = M_{o1,1} - M_{o1,2} = \frac{2}{9} F_1 \cdot l - \frac{1}{9} F_2 \cdot l = \frac{2}{9} F_1 \cdot l - \frac{1}{9} F_1 \cdot l = \frac{1}{9} F_1 \cdot l$$

$$M_{o\max(2)} = M_{o2,2} - M_{o2,1} = \frac{1}{9} F_2 \cdot l$$

## 5.6 Schwedlerova věta

Udává vztah mezi plochou posouvajících sil a ohybovým momentem: **Moment v libovolném místě nosníku se rovná obsahu plochy posouvajících sil po jedné straně nosníku od uvažovaného místa.**



Z toho plyne Schwedlerova věta:

**$M_{OMax}$  je v místě, kde posouvající síla mění své znaménko, nebo tam, kde je rovna 0.**

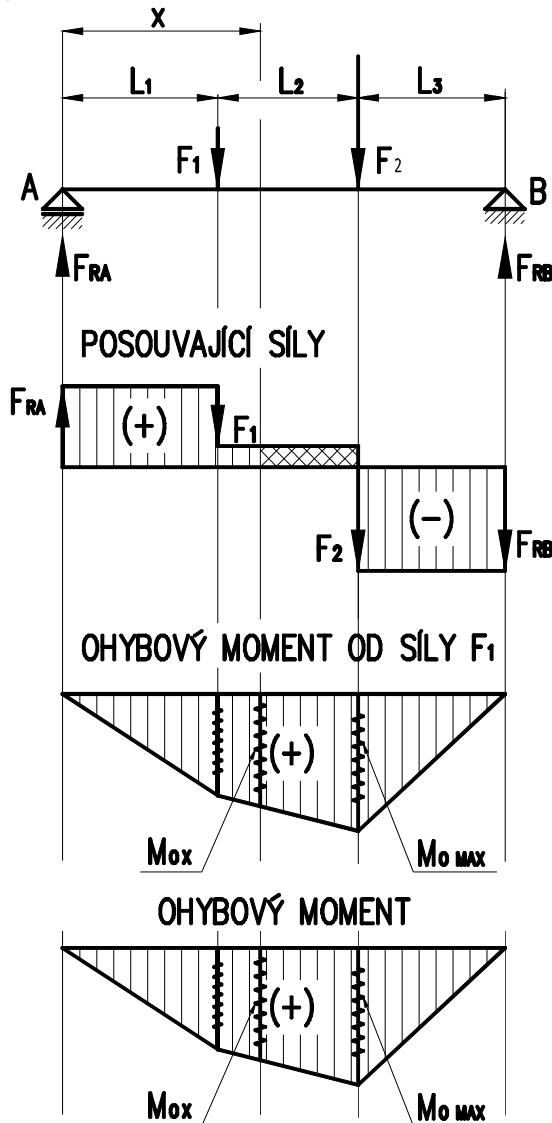
Pokud nosník nemá spojité zatížení, je  $M_{OMax}$  vždy pod nějakou vnější silou (včetně reakcí).

Než kreslení průběhů momentových ploch a provádění superpozice, bývá rychlejší vypočítat  $M_O$  pod všemi silami.



Př.:  $F_1 = 28 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 40 \text{ kN}$ ,  $l_1 = 2,3 \text{ m}$ ,  $l_2 = 3 \text{ m}$ ,  $l_3 = 2,7 \text{ m}$ ,  $x = 3,6 \text{ m}$ .

Určete  $M_{oMax}$  a  $M_{ox}$



$$F_{RA} = \frac{F_1 \cdot (l_2 + l_3) + F_2 \cdot l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{28 \cdot 5,7 + 40 \cdot 2,7}{8} = 33,45 \text{ kN}$$

$$F_{RB} = \frac{F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{28 \cdot 2,3 + 40 \cdot 5,3}{8} = 34,55 \text{ kN}$$

$$M_{oMax} = F_{RB} \cdot l_3 = 34550 \cdot 2,7 = 93285 \text{ Nm}$$

$$M_{ox} = M_{oMax} - (F_2 - F_{RB}) \cdot (l_1 + l_2 - x) = 93285 - (40000 - 34550) \cdot (5,3 - 3,6) = 84020 \text{ Nm}$$

nebo

$$M_{ox} = F_{RA} \cdot l_1 + (F_{RA} - l_1) \cdot (x - l_1) = 33450 \cdot 2,3 + (33450 - 28000) \cdot (3,6 - 2,3) = 84020 \text{ Nm}$$

nebo

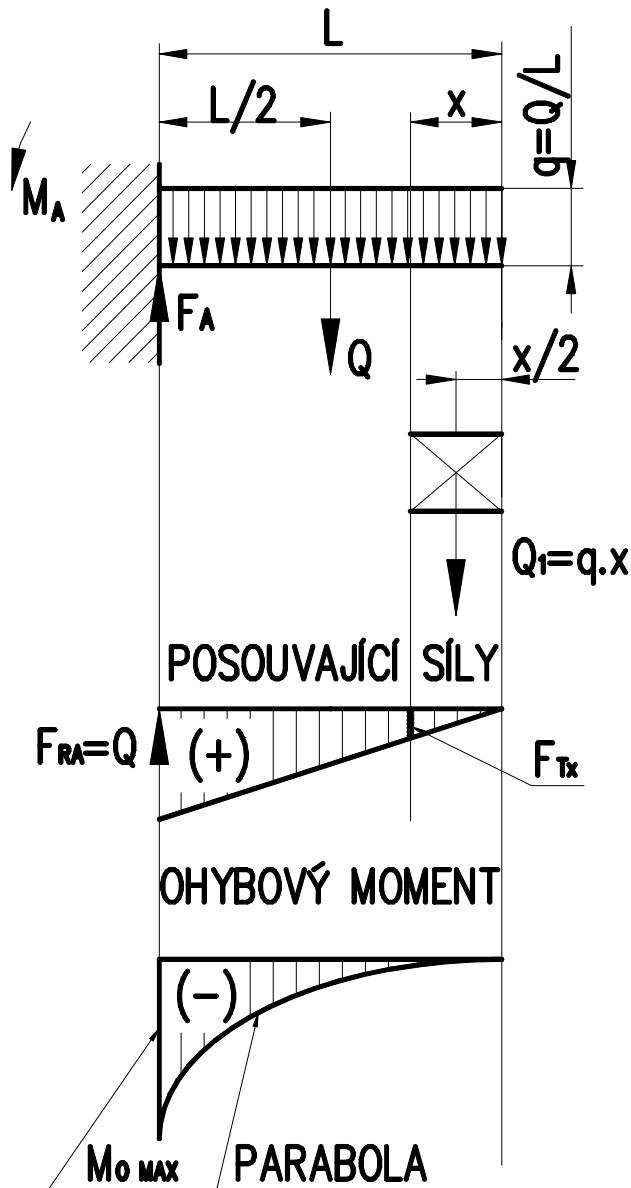
$$M_{ox} = F_{RA} \cdot x - F_1 \cdot (x - l_1) = 33450 \cdot 3,6 - 28000 \cdot (3,6 - 2,3) = 84020 \text{ Nm}$$

## 5.7 Nosníky se spojitým zatížením

Zatížení nosníku je určeno buď celkovou velikostí zatížení, kterou značíme  $Q$  nebo měrným zatížením  $q$  vztaheným na jednotku délky.

$$q = \frac{Q}{l} \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Celou tíhu můžu nahradit myšlenou výslednicí v těžišti.



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$F_A - Q = 0 \rightarrow F_A = Q$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

$$M_A - Q \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow M_A = Q \cdot \frac{l}{2}$$

V místě x:

$$F_{Tx} = Q_1 = q \cdot x \rightarrow$$

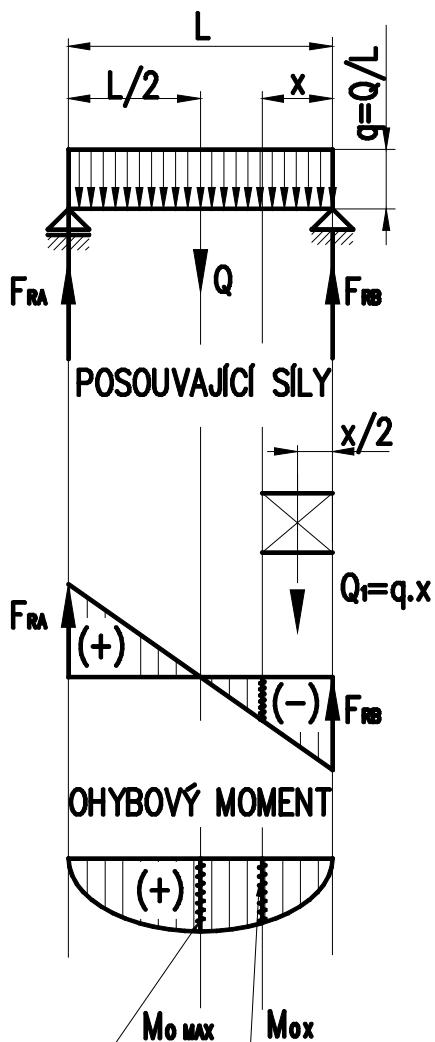
přímka

$$M_{ox} = Q_1 \cdot \frac{x}{2} = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \cdot \frac{x^2}{2} \rightarrow$$

parabola

$$M_{oMax} = Q \cdot \frac{l}{2} = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = q \cdot \frac{l^2}{2}$$

## 5.8 Nosník na dvou podporách



$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{Q}{2} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$Q_1 = q \cdot x$$

$$F_{Tx} = F_{RB} - Q_1 = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x$$

Kontrola:

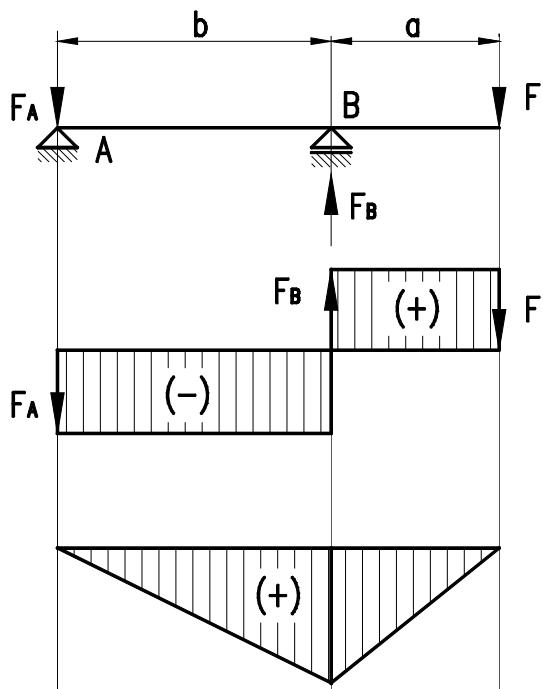
$$\text{pro } x = \frac{l}{2} \rightarrow F_{Tx} = 0$$

$$M_{ox} = F_{RB} \cdot x - Q_1 \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \rightarrow \text{parabola}$$

$$\text{pro } x = \frac{l}{2}$$

$$M_{o\max} = \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{Q \cdot l}{8}$$

Př.:



$$F \cdot a = F_A \cdot b$$

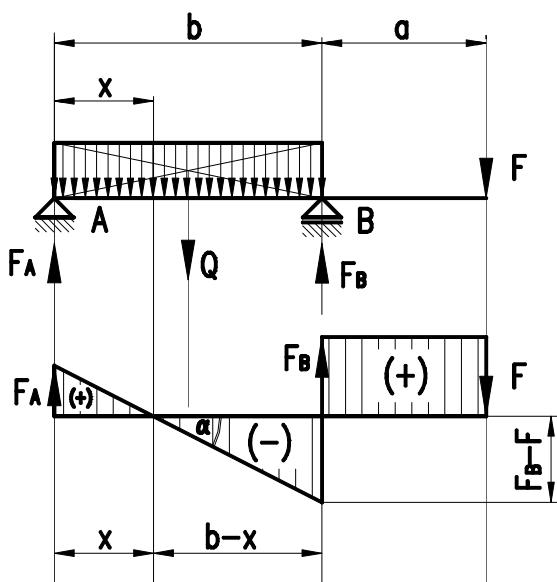
$$F_A = \frac{F \cdot a}{b}$$

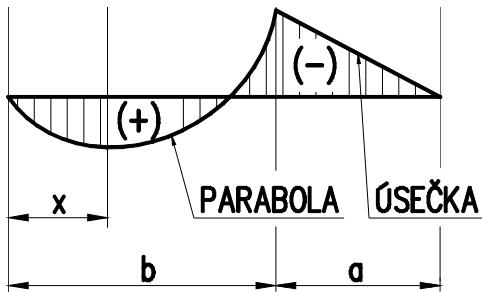
$$F_B \cdot b = F \cdot (a + b)$$

$$F_B = \frac{F \cdot (a + b)}{b}$$

$$M_{O\text{Max}} = F \cdot a = F_A \cdot b$$

Př.:





$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$Q \cdot \frac{b}{2} - F_B \cdot b + F \cdot (a + b) = 0$$

$$F_B = \frac{F \cdot (a + b) + Q \cdot \frac{b}{2}}{b}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0$$

$$F_A \cdot b - Q \cdot \frac{b}{2} + F \cdot a = 0$$

$$F_A = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} - F \cdot a}{b}$$

$$M_{0X} = F_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$Q_x = q \cdot x$$

$$M_{0X} = F_A \cdot x - Q_x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{0B} = F \cdot a$$

**Výpočet souřadnice x:**

1. Součet sil po jedné straně nosníku:

$$F_A - Q_x = 0$$

$$F_A - q \cdot x = 0$$

$$x = \frac{F_A}{q}$$

2.

$$\tan \alpha = \frac{F_A}{x} = \frac{F_B - F}{b - x}$$

$$F_A \cdot (b - x) = (F_B - F) \cdot x$$

$$F_A \cdot b - F_A \cdot x = F_B \cdot x - F \cdot x$$

$$F_A \cdot b = F_B \cdot x - F \cdot x + F_A \cdot x$$

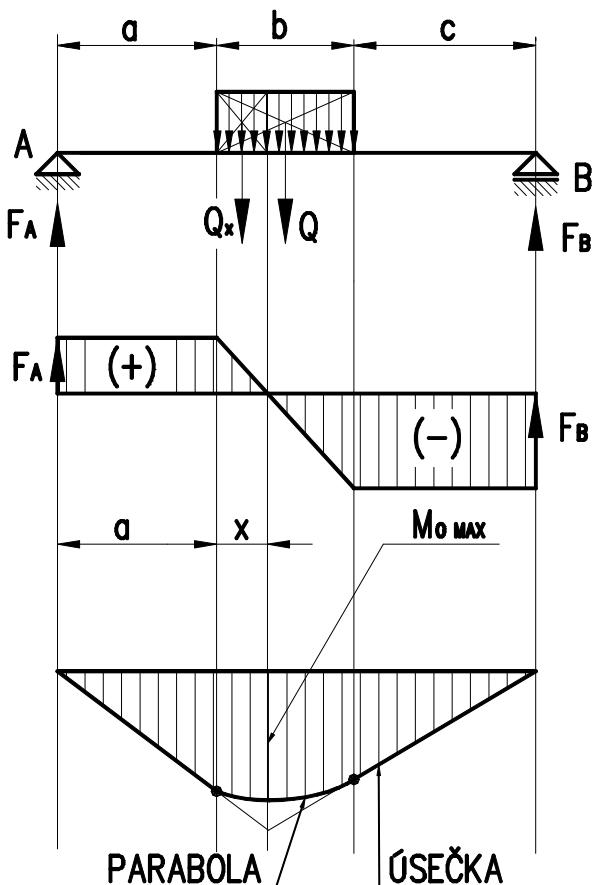
$$F_A \cdot b = x \cdot (F_B - F + F_A)$$

$$x = \frac{F_A \cdot b}{F_B - F + F_A} = \frac{F_A \cdot b}{Q} = \frac{F_A}{q}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$F_A - Q + F_B - F = 0$$

Př.:.



$$Q = q \cdot b$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0$$

$$F_A \cdot (a + b + c) - Q \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$F_A = \frac{Q \cdot \left( c + \frac{b}{2} \right)}{(a+b+c)}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$F_B = Q - F_A$$

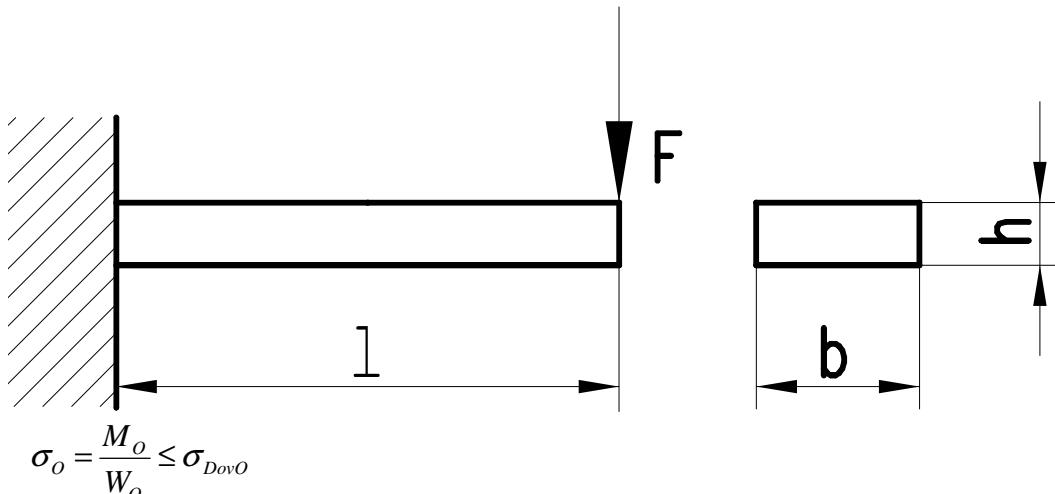
$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$$

$$M_{0x} = F_A(x+a) - Q_x \cdot \frac{x}{2} = F_A \cdot (x+a) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$F_A - Q_x = 0 \rightarrow x = \frac{F_A}{q}$$

$$M_{0x} = F_A \cdot (x+a) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = F_A \cdot (x+a) - q \cdot \frac{F_A}{q} \cdot \frac{F_A}{2 \cdot q} = F_A \cdot \left( \frac{F_A}{q} + a \right) - \frac{F_A^2}{2 \cdot q}$$

**Př.**: Vypočtěte rozměry b a h dle obrázku.  $b : h = 2 : 1 \rightarrow b/h = 2/1 \rightarrow b = 2 \cdot h$



$$W_o \geq \frac{M_o}{\sigma_{DovO}}$$

$$\frac{1}{6} b \cdot h^2 \geq \frac{F \cdot l}{\sigma_{DovO}}$$

$$\frac{1}{6} 2 \cdot h^3 \geq \frac{F \cdot l}{\sigma_{DovO}}$$

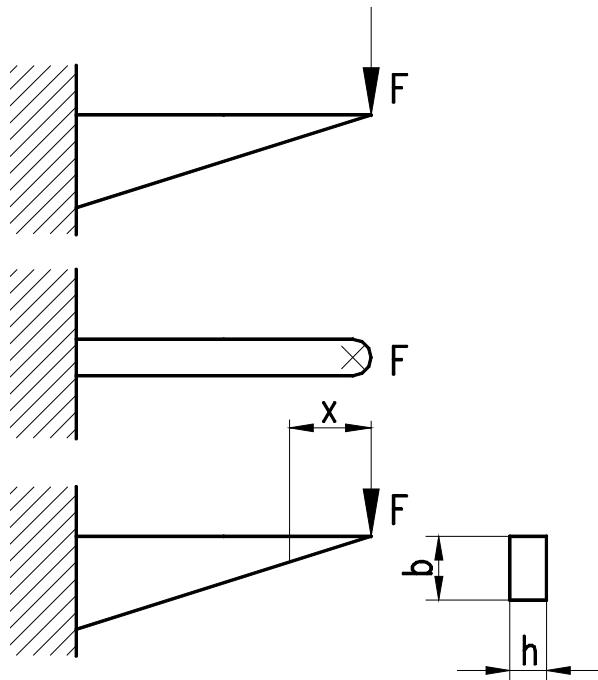
$$h \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F \cdot l}{\sigma_{DovO}}}$$

## 5.9 Nosníky stálé pevnosti

Tyto nosníky mají proměnný průřez v závislosti na ohybovém momentu. Průřez je takový, aby napětí bylo ve všech bodech přibližně konstantní.

### 5.9.1 Veknutý nosník

#### 5.9.1.1 Konstantní šířka



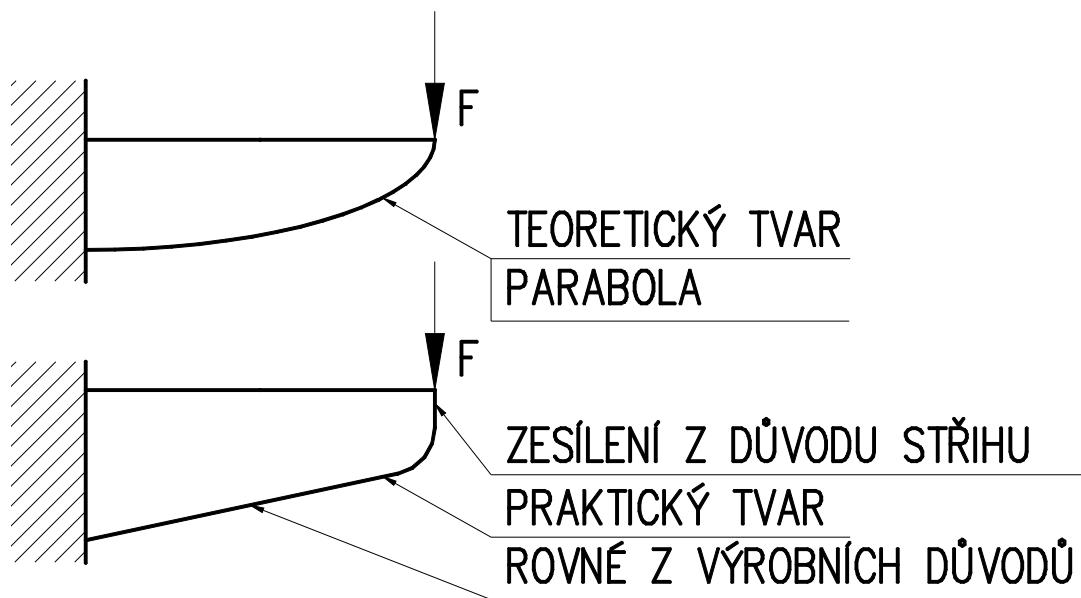
$$\sigma_o = \frac{M_0}{W_0} = \text{konst.}$$

$$\sigma_{0x} = \frac{M_{0x}}{W_{0x}} = \sigma_{0Max} = \frac{M_{0max}}{W_{0max}} = \text{konst.}$$

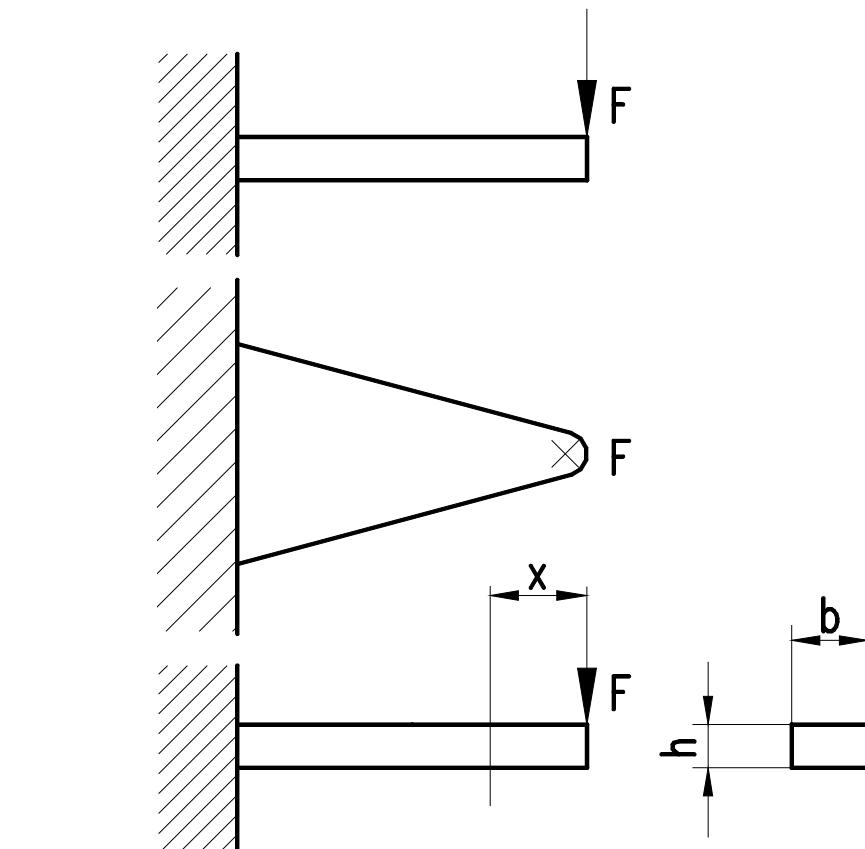
pak:

$$\frac{W_{0x}}{W_{0max}} = \frac{M_{0x}}{M_{0max}}$$

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h_x^2}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h_{max}^2} = \frac{F \cdot x}{F \cdot l} \rightarrow h_x = h_{max} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}$$

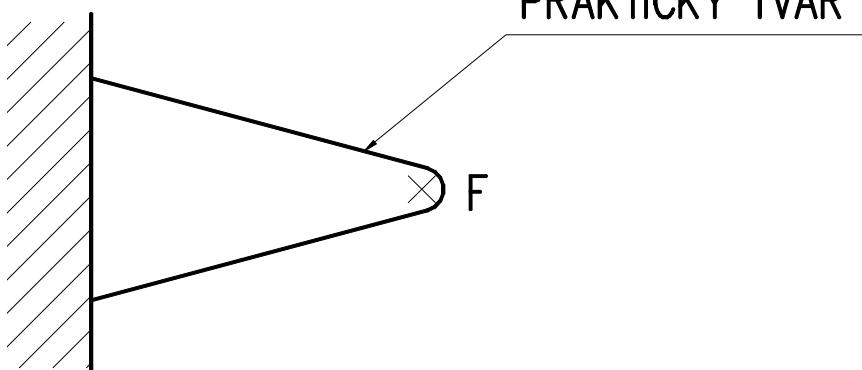
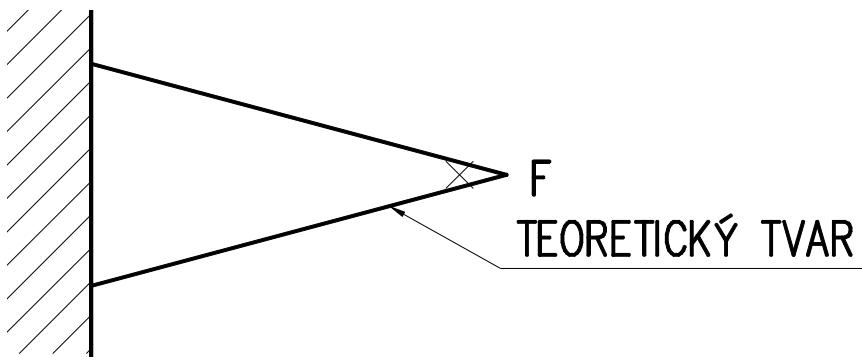


### 5.9.1.2 Konstantní tloušťka



$$\frac{W_{0x}}{W_{0 \max}} = \frac{M_{0x}}{M_{0 \max}}$$

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot b_x \cdot h^2}{\frac{1}{6} \cdot b_{\max} \cdot h^2} = \frac{F \cdot x}{F \cdot l} \rightarrow b_x = b_{\max} \cdot \frac{x}{l}$$

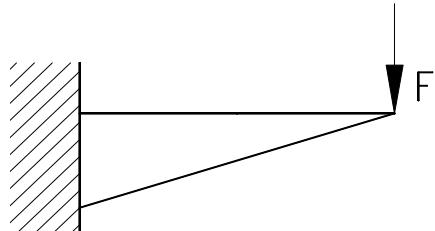


Teoretický tvar nosníku nepoužíváme proto, že je výrobně nákladný a v místě osamělých sil nemůžeme zanedbat smyk. Proto se na volném konci používá výška profilu

$$h_{\text{Min}} = \frac{h_{\text{Max}}}{2}$$

Úspora materiálu je u teoretického nosníku asi 33 %, u praktického asi 25 %.

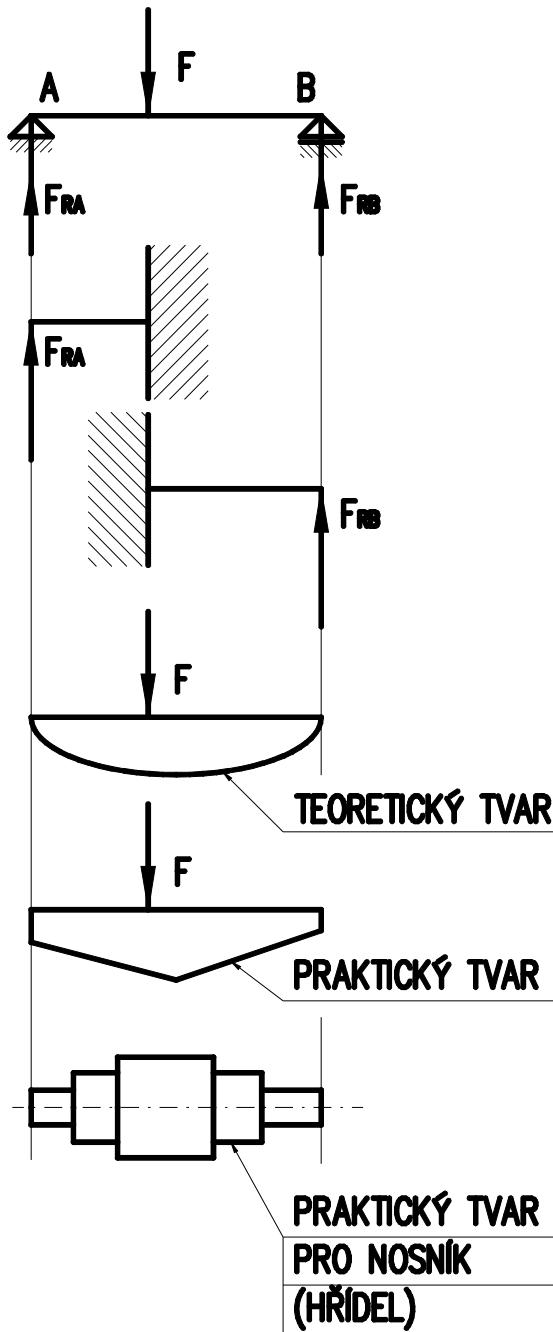
Použití: ušetřím materiál (např. konzoly).





## 5.9.2 Nosník na dvou podporách

Řešíme jako dva vetknuté nosníky, zatížené reakcemi.



Teoretický tvar celého nosníku je daný spojením teoretického tvaru obou vetknutých nosníků.

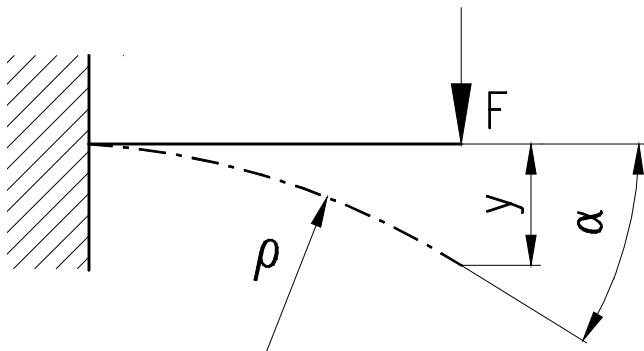
Praktický tvar musí ležet vždy vně teoretického tvaru, aby napětí bylo vždy menší než  $\sigma_{\text{Max}}$ .

U nosníků s kruhovým průřezem – hřídelů, se obvykle používá praktický tvar nosníku jako odstupňovaný.

## 5.10 Deformace v ohybu

Po deformaci bude neutrální osa nosníku zakřivená, říkáme jí pak průhybová čára (ohybová čára). K zakřivení dochází vlivem ohybového momentu.

**Deformační veličiny:**



$\rho$  – poloměr křivosti;

$\alpha$  – úhel natočení;

$y$  – průhyb.

### 5.10.1 Poloměr křivosti $\rho$

$$\rho_{Min} = \frac{J_x \cdot E}{M_{0Max}}$$

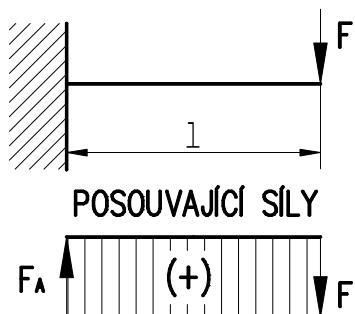
$J_x$  – kvadratický moment;

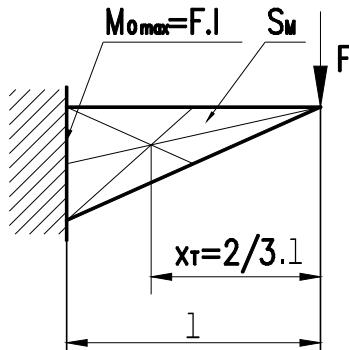
E – modul pružnosti v tahu.

### 5.10.2 Úhel natočení $\alpha$

$$\alpha = \frac{S_M}{E \cdot J_x}$$

$S_M$  – plocha momentového obrazce.





### 5.10.3 Průhyb y

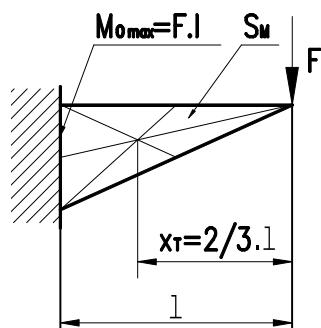
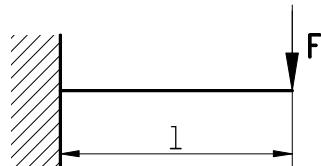
$$y = \frac{M_s}{E \cdot J_x}$$

$M_s$  – je statický moment plochy momentového obrazce k místu síly.

$$M_s = S_M \cdot x_T$$

$$y = \frac{M_s}{E \cdot J_x} = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J_x}$$

Př.:



$$M_{oMax} = F \cdot l$$

Plocha momentového obrazce:

$$S_M = \frac{M_{oMax} \cdot l}{2} = \frac{F \cdot l^2}{2}$$



Statický moment:

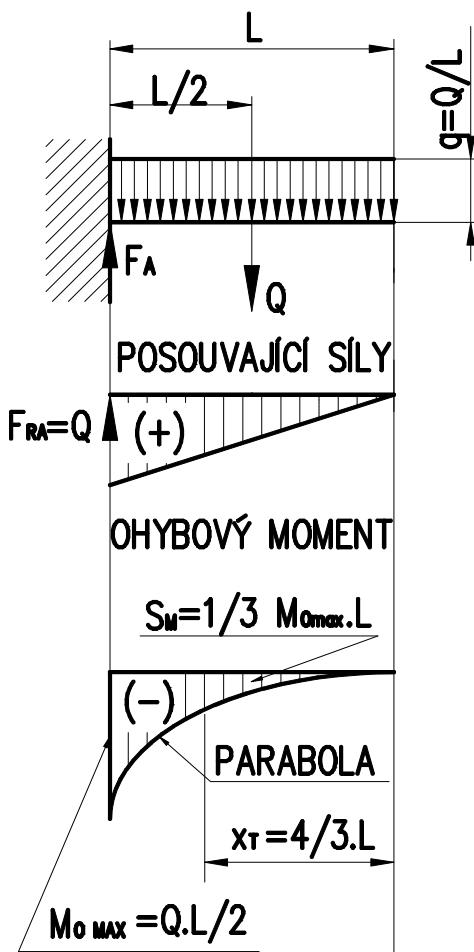
$$M_s = S_M \cdot x_T = \frac{F \cdot l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{F \cdot l^3}{3}$$

$$\rho_{\min} = \frac{J_x \cdot E}{M_{0\max}} = \frac{J_x \cdot E}{F \cdot l}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{S_M}{E \cdot J_x} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J_x}$$

$$y_{\max} = \frac{M_s}{E \cdot J_x} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x}$$

Př.:



$$M_{0\max} = \frac{Q \cdot l}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot l = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

Plocha momentového obrazce:

$$S_M = \frac{1}{3} M_{0\max} \cdot l = \frac{Q \cdot l^2}{6} = \frac{q \cdot l^2}{6} \cdot l = \frac{q \cdot l^3}{6}$$

Statický moment:

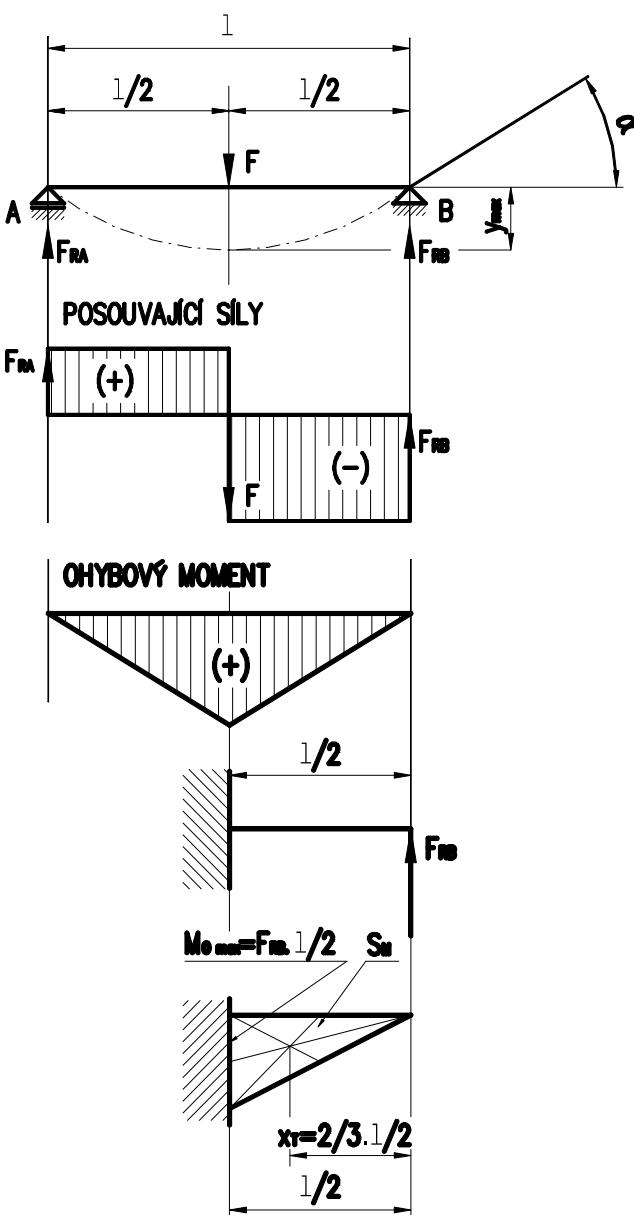
$$M_s = S_M \cdot x_T = \frac{Q \cdot l^2}{6} \cdot \frac{3}{4}l = \frac{Q \cdot l^3}{8} = \frac{q \cdot l^4}{8}$$

$$\rho_{\min} = \frac{J_x \cdot E}{M_{0Max}} = \frac{2 \cdot E \cdot J_x}{Q \cdot l} = \frac{2 \cdot E \cdot J_x}{q \cdot l^2}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{S_M}{E \cdot J_x} = \frac{Q \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J_x} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_x}$$

$$y_{\max} = \frac{M_s}{E \cdot J_x} = \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J_x} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J_x}$$

Př.: Nosník na dvou podporách.





$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$M_{0\text{Max}} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4}$$

$$S_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l^2}{16}$$

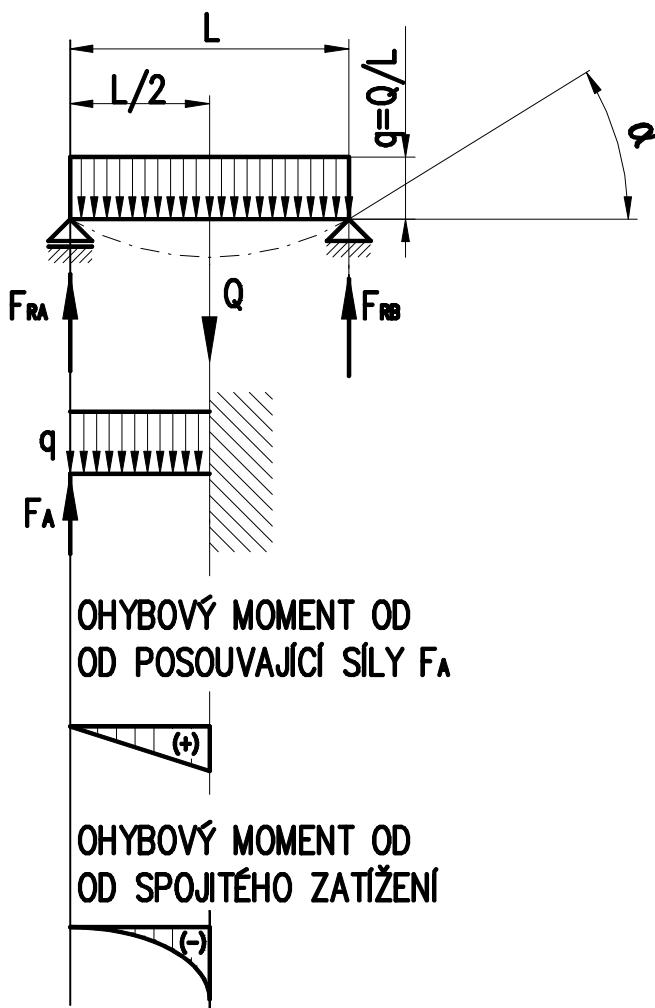
$$M_S = S_M \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l^3}{48}$$

$$\rho_{\min} = \frac{J_x \cdot E}{M_{0\text{max}}} = \frac{4 \cdot E \cdot J_x}{F \cdot l}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{S_M}{E \cdot J_x} = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J_x}$$

$$y_{\max} = \frac{M_S}{E \cdot J_x} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J_x}$$

**Př.:**



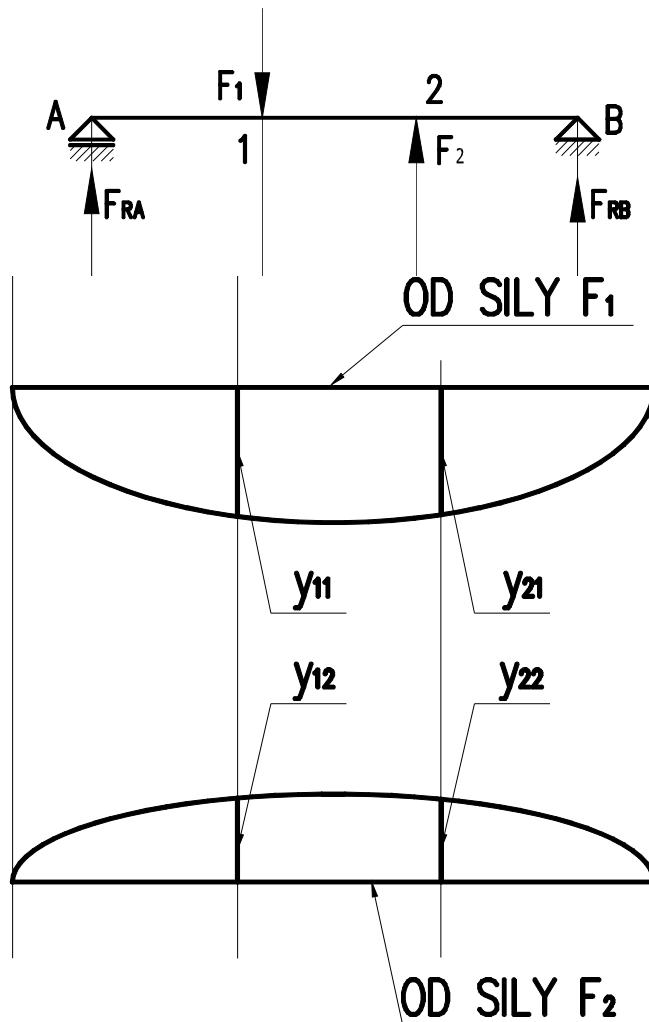
$$y_{\max} = y_{\text{Od spojitého zatížení}} - y_{\text{Od reakce}}$$

Při výpočtu průhybu nosníku obvykle vzorce neodvozujeme, ale najdeme je v tabulkách. Pokud je nosník zatížen více silami nebo spojitým zatížením, používáme metodu superpozice.



## 5.10.4 Metoda superpozice

Vypočteme průhyby (úhel natočení) nosníku v požadovaném místě samostatně od jednotlivých zatížení (sil, spojitého zatížení). Výsledný průhyb (natočení) v daném místě pak dostaneme sečtením, případně odečtením průhybů (natočení) od jednotlivých sil. Kladný průhyb je směrem dolů.



Průhyb v místě 1 pomocí superpozice:

$$y_1 = y_{11} - y_{12}$$

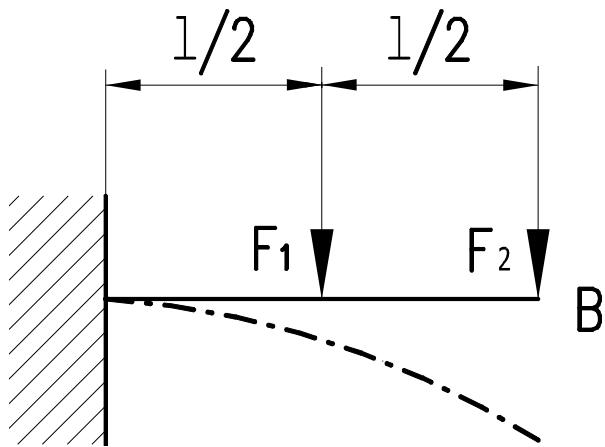
Průhyb v místě 2 pomocí superpozice:

$$y_2 = y_{21} - y_{22}$$



Příklady na použití vzorců ze strojnických tabulek str. 44:

Př.: Máme určit  $\alpha_{\max}$ ,  $y_{\max}$



$$\text{od } F_2 : \alpha_B = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J_x}$$

$$y_B = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x}$$

$$\text{od } F_1 : \alpha_B = \frac{F \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J_x}$$

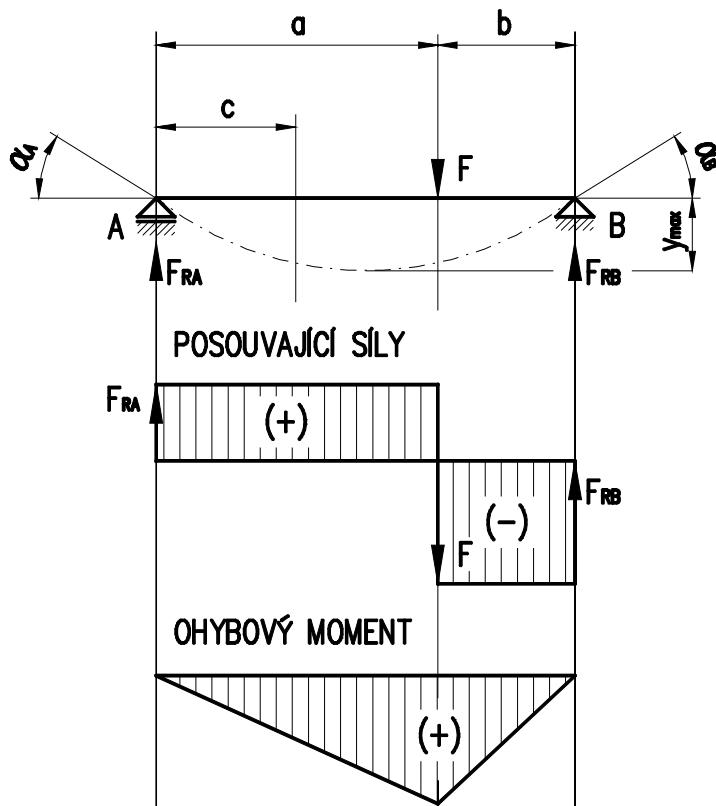
$$y_B = \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J_x}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J_x} + \frac{F \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J_x}$$

$$y_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x} + \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J_x}$$



Př.:



$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$M_{o\text{Max}} = F_{RB} \cdot b = F_{RA} \cdot a$$

$$l = a + b$$

$$M_{0\text{max}} = \frac{F \cdot a \cdot b}{a + b}$$

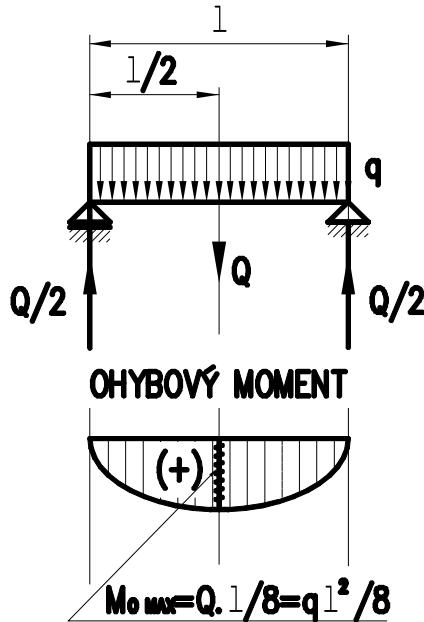
$$\alpha_A = \frac{F \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left( \frac{b}{a+b} - \frac{b^3}{(a+b)^3} \right)$$

$$\alpha_B = \frac{F \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left( \frac{2 \cdot b}{l} + \frac{b^3}{l^3} - \frac{3 \cdot b^2}{l^2} \right) \quad \text{Ve strojnických tabulkách str. 45 je v tomto vzorci chyba!!!}$$

$$y_{\text{max}} = \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot J_x \cdot l}$$

$$y_c = \frac{F \cdot a \cdot c}{6 \cdot E \cdot J_x \cdot l} \cdot [b \cdot (b+2 \cdot a) - c^2]$$

**Př.:** Vypočtěte max. průhyb, maximální úhel natočení a maximální ohybové napětí  $\sigma_0$  tyče  $\varnothing 30$  mm,  $l = 1000$  mm,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



$$Q = G = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho \cdot g = \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} \cdot 1 \cdot 7850 \cdot 9,81 = 54,4 N$$

$$q = \frac{Q}{l} = \frac{54,4}{1} = 54,4 \frac{N}{m} = 0,0544 \frac{N}{mm}$$

$$M_{0\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{54,4 \cdot 1^2}{8} = 6,8 Nm = 6804 Nmm$$

$$\sigma_{0\max} = \frac{M_{0\max}}{W_0} = \frac{M_{0\max}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 6,804}{\pi \cdot 0,03^3} = 77005,5 Pa = 0,077 MPa$$

strojnické tabulky str. 45

$$y_{\max} = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot J_x} = \frac{5 \cdot 64 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{5 \cdot 64 \cdot 54,4 \cdot 1000^3}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 30^4} = 0,08 mm$$

strojnické tabulky str. 45

$$\alpha = \frac{Q \cdot l^2}{24 \cdot E \cdot J_x} = \frac{64 \cdot Q \cdot l^2}{24 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{64 \cdot 54,4 \cdot 1000^2}{24 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 30^4} = 0,00027 rad = 0,00027 \cdot \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi} = 0^\circ 0'56''$$

## 5.11 Deformační podmínka pro ohyb

U některých nosníků, např. delších hřídelů, počítáme kromě pevnostní podmínky

$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} \leq \sigma_{DovO}$  také s podmínkou deformační. Tato podmínka nám udává maximální

přípustnou deformaci nosníku. Používá se tam, kde např. nechceme, aby se ozubené kolo vlivem průhybu vysunulo ze záběru nebo aby se hřídel v ložiscích příliš natočila.



$$\alpha_{\max} \leq \alpha_{Dov}$$

$$y_{\max} \leq y_{Dov}$$

## 5.12 Staticky neurčité nosníky

Jsou to nosníky, kde máme takové podpory, že reakce už nejsme schopni vypočítat z podmínek rovnováhy. Máme 3 podmínky rovnováhy:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 - \text{vypočteme } F_n, \text{ ale obvykle nás nezajímá;}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 - \text{vypočteme 2 reakce;}$$

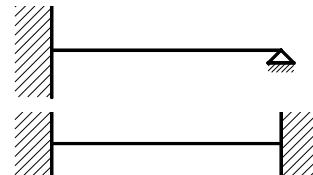
$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 - \text{vypočteme 2 reakce.}$$

**Staticky neurčité nosníky jsou:**

Nosníky na více než dvou podporách



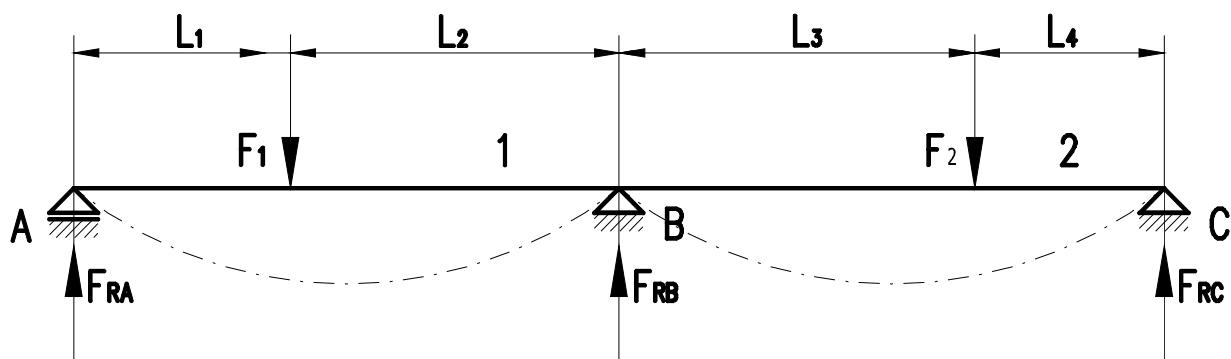
Nosníky veknuté + podpora



Nosníky veknuté na obou stranách

Ke zjištění reakčních sil a momentů musíme u staticky neurčitých nosníků připojit ke statickým podmínkám i podmínky deformační.

Př.: Máme 3 neznámé reakce



Statické podmínky rovnováhy sil:

2 rovnice pro 3 neznámé → nelze řešit.

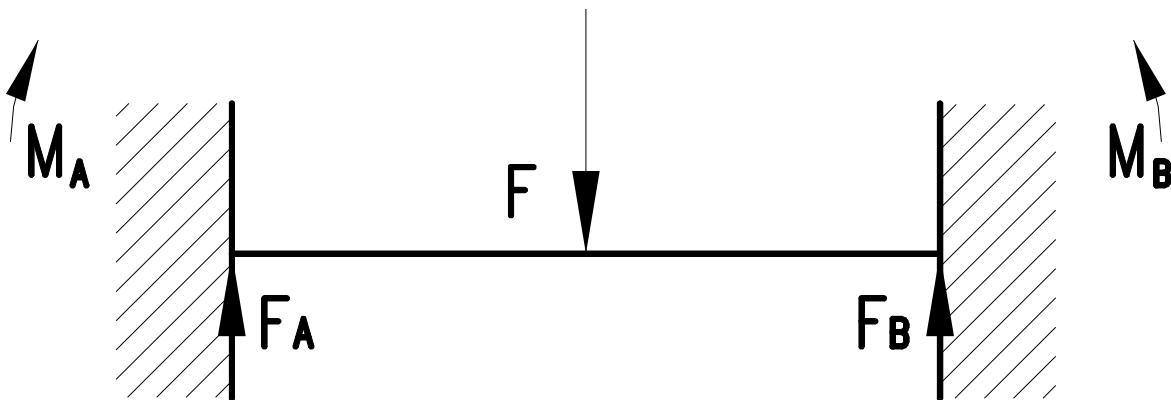
$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

Deformační podmínka:

- a.  $y_B = 0$  a  $y_C = 0$
  - b. natočení části 1 v místě B = natočení části 2 v místě B.
- Ted' už máme 3 rovnice pro 3 neznámé, tedy můžu řešit.

Př.: Neznám  $F_A, F_B, M_A, M_B$



$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

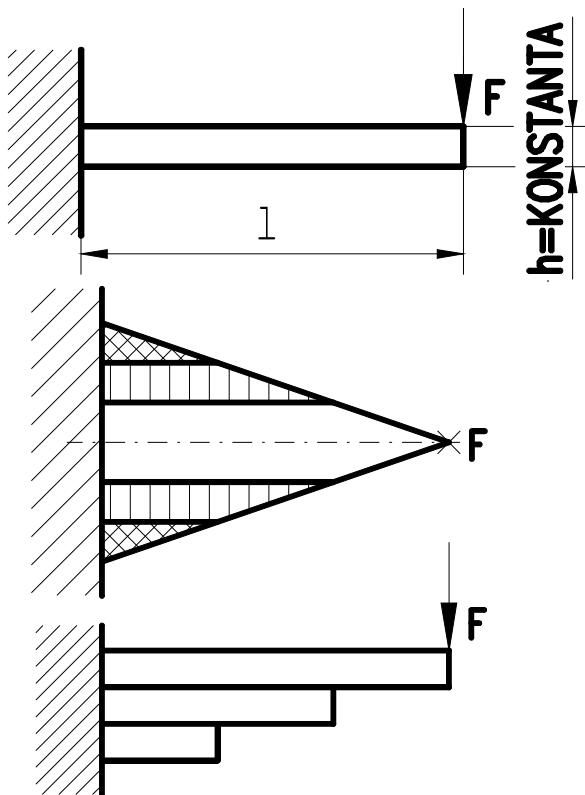
$$\alpha_A = 0$$

$$\alpha_B = 0$$

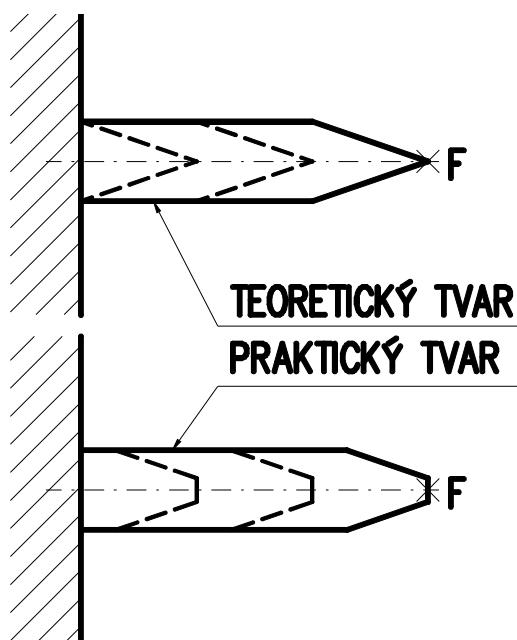
## 5.13 Ohýbané pružiny

Jde především o listové pružiny.

Je to nosník stejné pevnosti trojúhelníkového tvaru s konstantní výškou vytvořený z poskládaných pásů obdélníkového průřezu – tzv. pružnic.



Pružnice jako by rozřežeme a naskládáme na sebe.

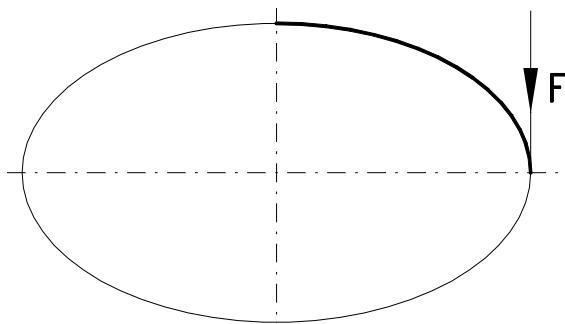


$$\text{U svazku pružnic platí: } y = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot J_x}$$

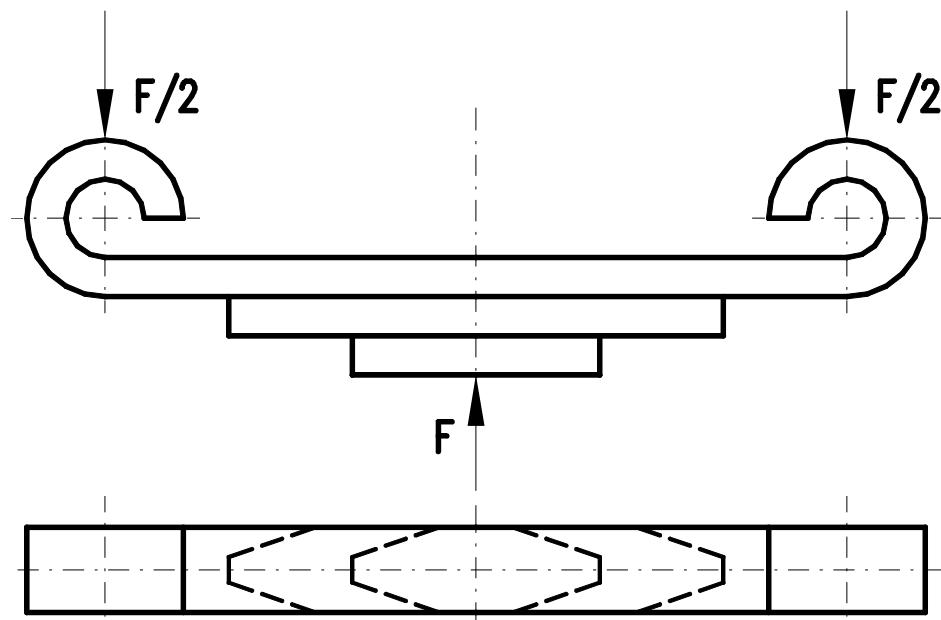
$$\text{Kvadratický moment pro } n \text{ pružnic: } J_x = \frac{n \cdot b \cdot h^3}{12}; \quad n - \text{počet listů, počet pružnic.}$$



Používáme pojem 1/4 eliptické pero (od slova elipsa, pero – pružina).



Prakticky používaný tvar pružnic – 1/2 eliptické pero (nosník na dvou podporách)



Používají se tam, kde je třeba zachytit rázy tím, že pohybovou energii přeměníme v deformační práci pružiny. Deformační práce je největší u nosníků stálé pevnosti a navíc dochází k úspoře materiálu (až o 50%). Průhyb nosníku stálé pevnosti konstantní tloušťky je 1,5 x větší než u nosníku s konstantním průřezem, tedy i práce je větší.

Svazky pružnic, tzv. listové pružiny, se používají na podvozcích aut nebo železničních vagónů. Obvykle jsou v nezatíženém stavu vytvarovány do elipsy a zatížením se narovnávají.

### 5.13.1 Výpočet listových pružin:

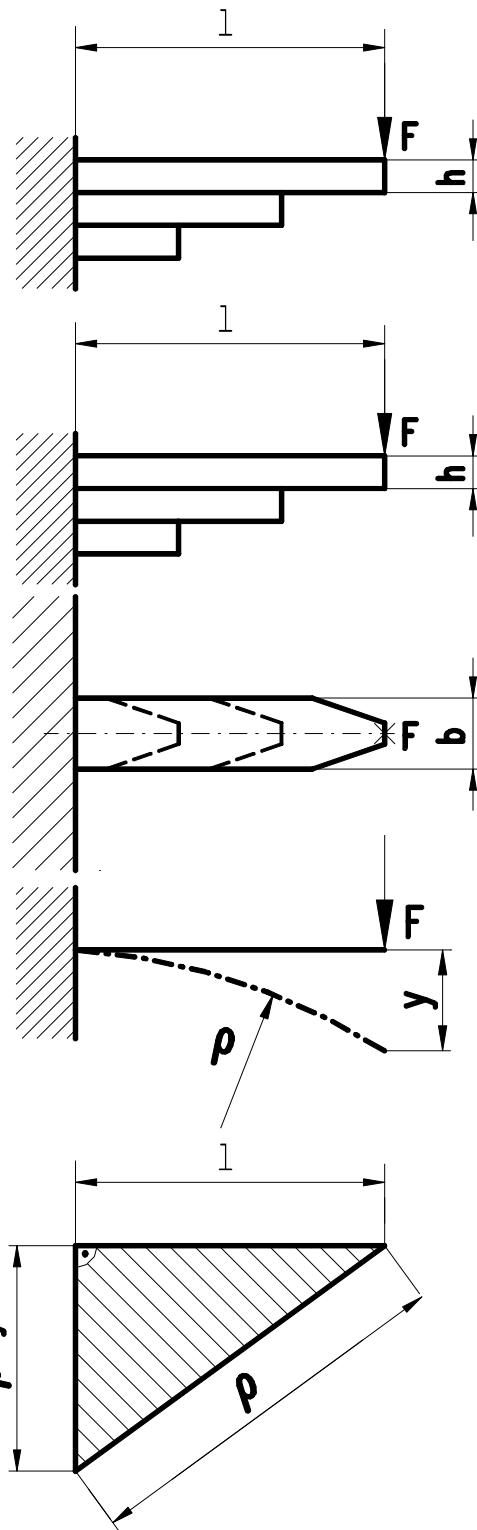
Počet listů pružiny:

$$\sigma_{DovO} = 400 \div 600 \text{ MPa u kalených a } 300 \div 600 \text{ MPa u nekalených materiálů.}$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{0Max}}{W_0} \leq \sigma_{DovO}$$



$$W_0 = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \cdot n \rightarrow n = \frac{6 \cdot M_{0Max}}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{DovO}} = \frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{DovO}}$$



Pro malé výchylky:

$$\rho^2 = (\rho - y)^2 + l^2$$

$$\rho^2 = \rho^2 - 2\rho y + y^2 + l^2$$

$y^2$  zanedbáváme.

$$y = \frac{l^2}{2\rho}$$

Pro jeden list pružiny platí:

$$W_o = \frac{J_x}{e} = \frac{2 \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$J_x = W_o \cdot e = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\rho = \frac{E \cdot J_x}{M_{0\max}} = \frac{E \cdot W_0 \cdot \frac{h}{2}}{M_{0\max}} = \frac{E \cdot \frac{h}{2}}{\sigma_0} = \text{konst.} \rightarrow \text{průhybová čára je kružnice.}$$

$$y = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{l^2 \cdot \sigma_0}{2 \cdot E \cdot \frac{h}{2}} = \frac{l^2 \cdot \frac{M_{0\max}}{W_0}}{2 \cdot E \cdot \frac{h}{2}} = \frac{l^2 \cdot M_{0\max}}{2 \cdot E \cdot J_x} = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot J_x}$$

Pozn. veknutý nosník s konstantním průřezem měl:  $y = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x}$

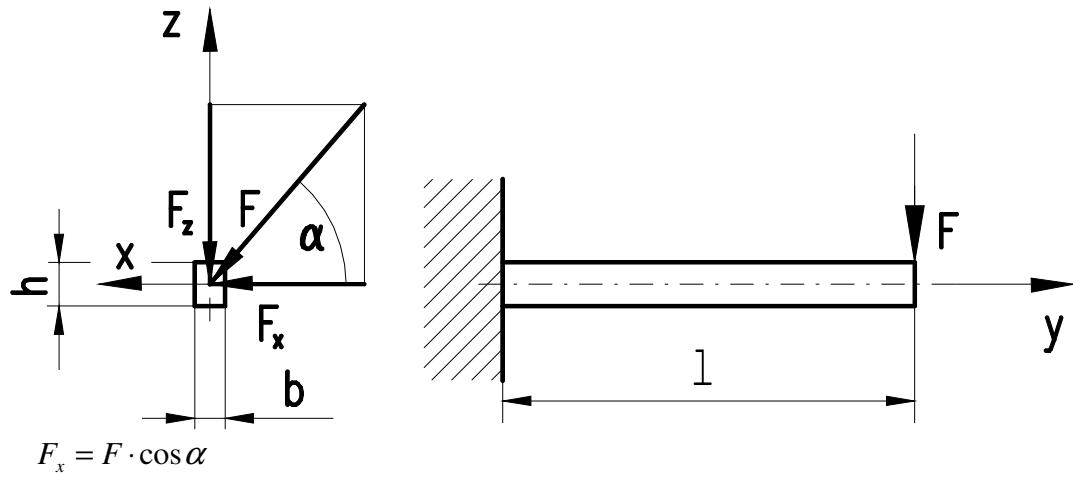
## 6 Složená namáhání

Ke složenému (kombinovanému) namáhání dochází tehdy, vyskytnou-li se současně alespoň dva druhy namáhání (napětí). Kombinovaná namáhání mohou být normálná, tečná nebo normálná i tečná současně.

### 6.1 Kombinace normálných napětí

#### 6.1.1 Šikmý ohyb:

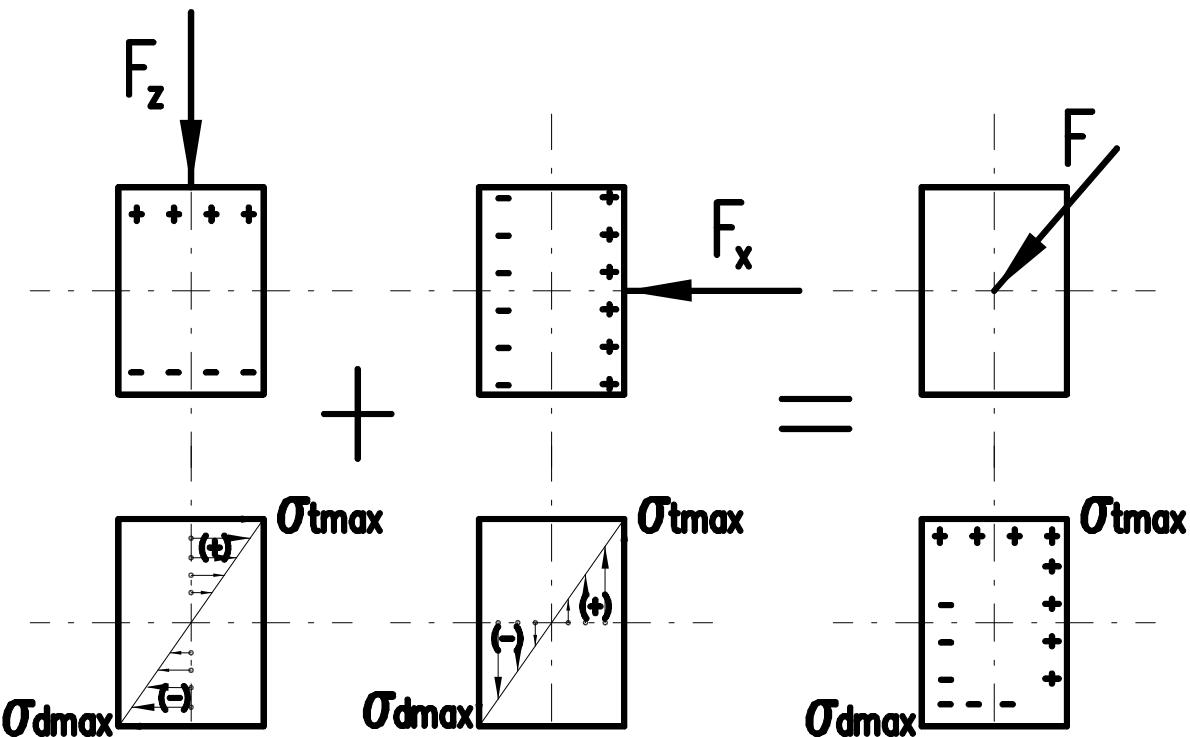
Šikmý ohyb nastává, když zatížení neleží v rovině souměrnosti nosníku, ale leží stále v rovině kolmé na osu nosníku.



Postup řešení: sílu rozložíme do hlavních os průřezu ( $F_x$ ,  $F_z$ ) a vypočítáme dvě hodnoty napětí (ve směru  $x$  a  $z$ ):

$$\sigma_x = \frac{M_{Ox}}{W_{OZ}} = \frac{F_x \cdot l}{W_{OZ}} = \frac{F_x \cdot l}{J_Z} = \frac{F_x \cdot l}{\frac{h \cdot b^2}{6}}$$

$$\sigma_z = \frac{M_z}{W_{Ox}} = \frac{F_z \cdot l}{W_{Ox}} = \frac{F_z \cdot l}{J_X} = \frac{F_z \cdot l}{\frac{h^2 \cdot b}{6}}$$

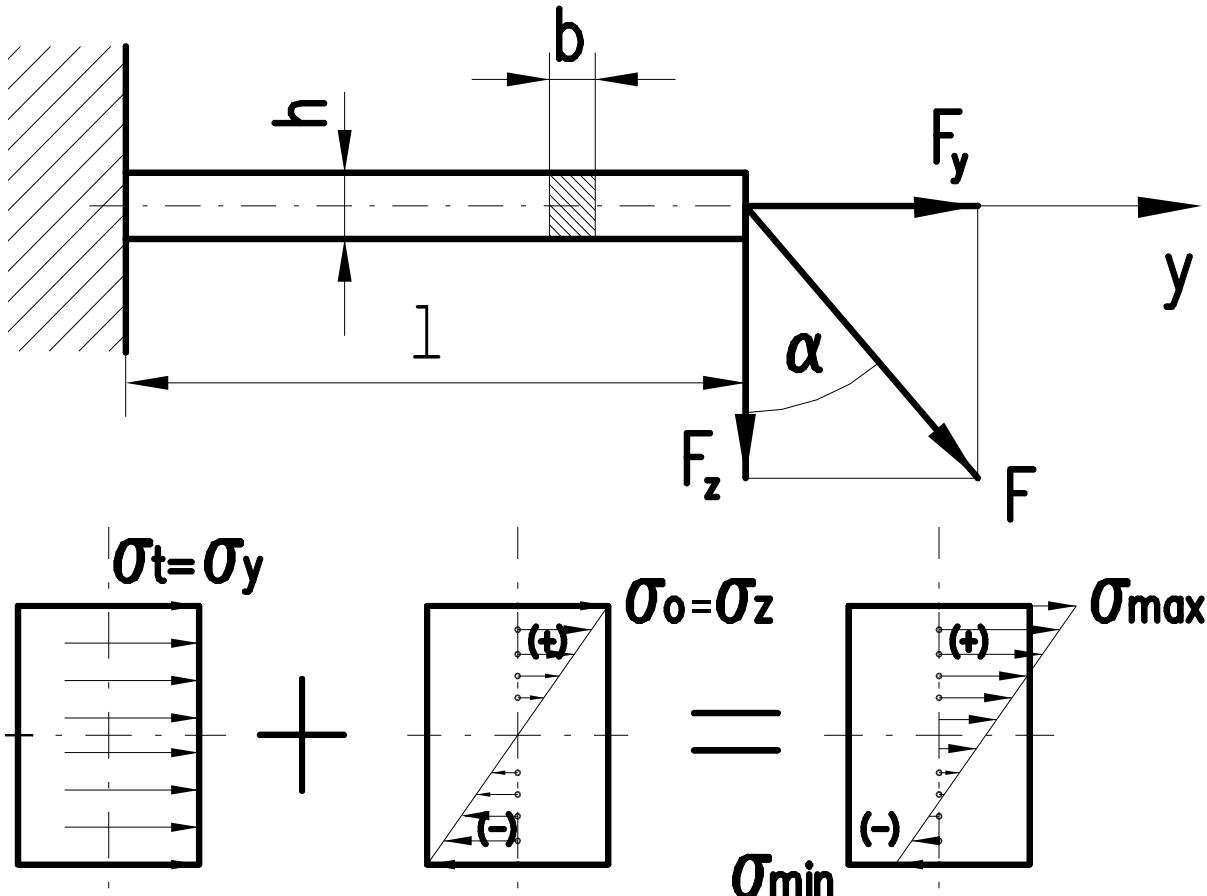


Protože se jedná o normálná napětí, která působí stejným směrem, tj. ve směru podélné osy součásti, můžu je sečít a výsledek porovnat s dovoleným napětím.



$$\sigma_{\max} = \sigma_x + \sigma_z \leq \sigma_{DovO}$$

### 6.1.2 Tah nebo tlak + ohyb



$$F_y = F \cdot \sin \alpha - \text{tah}$$

$$F_z = F \cdot \cos \alpha - \text{ohyb}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{S}$$

$$\sigma_z = \frac{F_z \cdot l}{w_{0y}} = \frac{F_z \cdot l}{\frac{b \cdot h^2}{6}}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_y + \sigma_z \leq \sigma_{Dov}$$

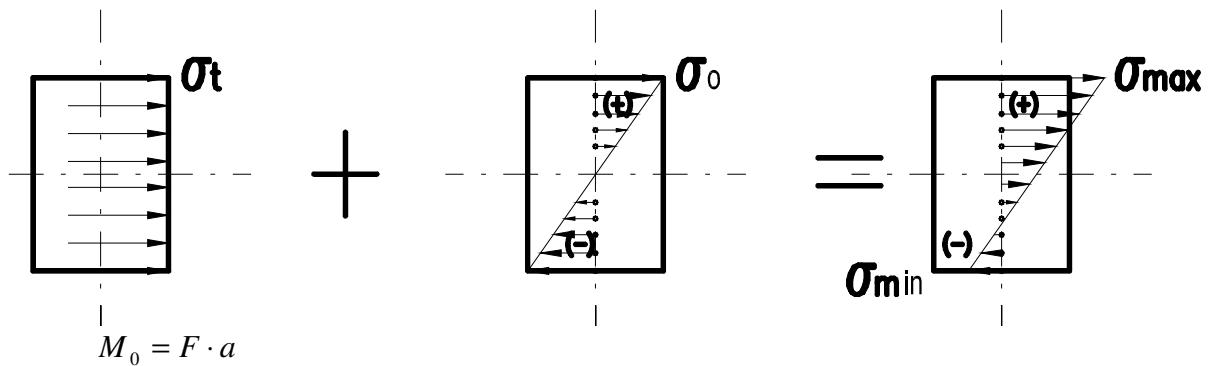
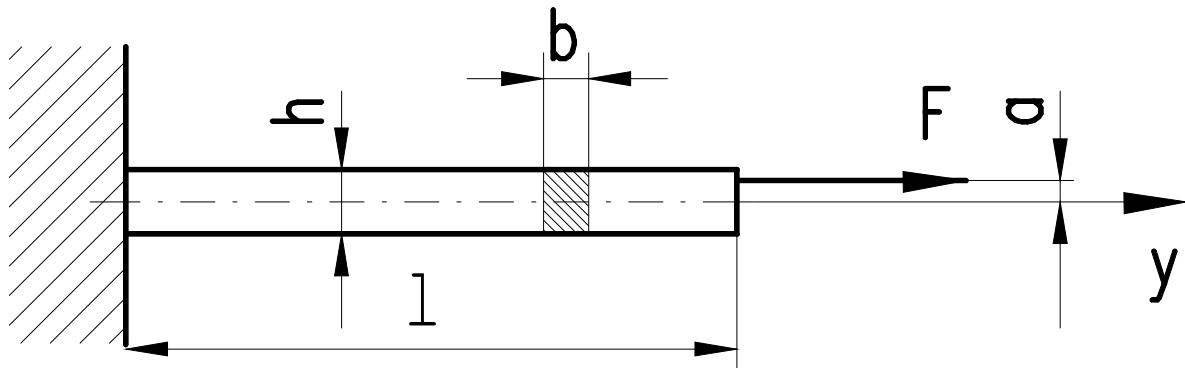
Sílu opět rozložíme na složku  $F_y$ , která namáhá nosník tahem, a sílu  $F_z$ , která namáhá nosník ohybem.

Tyto síly vyvolají normálná napětí stejného směru, tedy je můžeme sečít a výsledek porovnat s dovoleným napětím.



### 6.1.3 Excentrický tah (tlak):

Je to opět namáhání tahem (tlakem) + ohybem.



$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_0 = \frac{F \cdot a}{W_0}$$

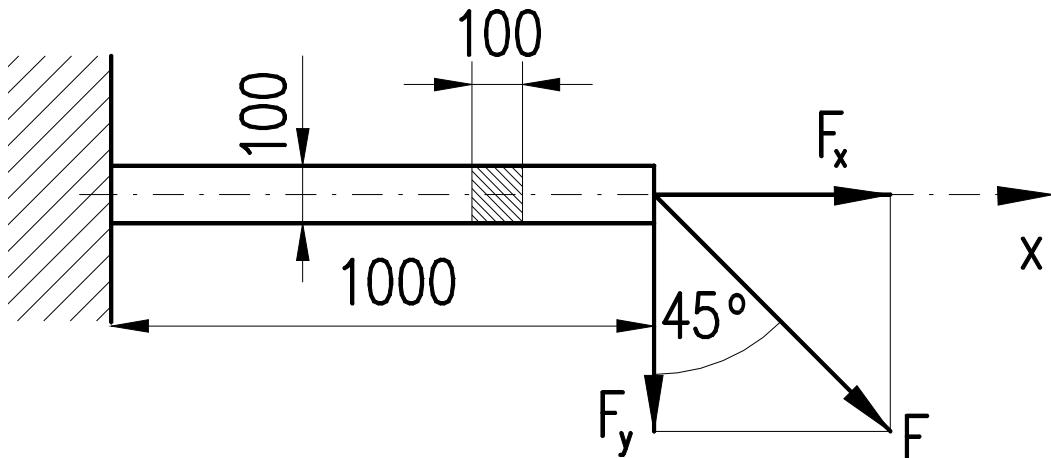
$$W_o = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_t + \sigma_0 \leq \sigma_{Dov}}$$

$$(\sigma_{\min} = \sigma_t - \sigma_0)$$



**Př.: Tah + ohyb.** Určete bezpečnost k mezi pevnosti.  $\sigma_{pt} = R_m = 350 \text{ MPa}$ ,  $F = 5000 \text{ N}$



$$F_x = F \cdot \sin 45^\circ = 5000 \cdot \sin 45^\circ = 3535,5 \text{ N}$$

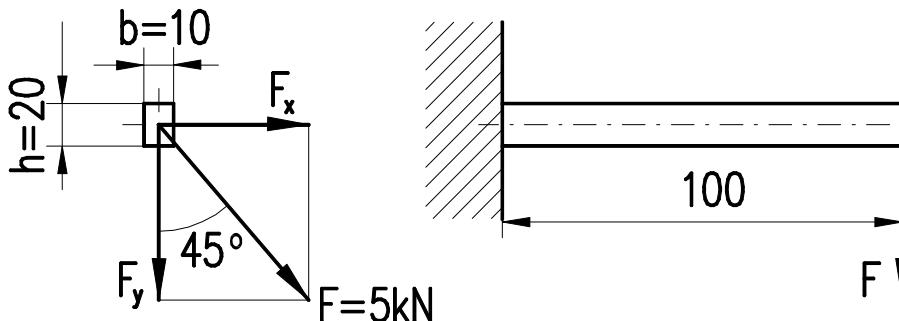
$$F_y = F \cdot \cos 45^\circ = 5000 \cdot \cos 45^\circ = 3535,5 \text{ N}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_t + \sigma_0 = \frac{F_x}{S} + \frac{M_O}{W_0} = \frac{F_x}{S} + \frac{F_y \cdot l}{W_0} = \frac{F_x}{a^2} + \frac{F_y \cdot l}{\frac{1}{6}a^3} = \frac{3535,5}{0,1^3} + \frac{3535,5 \cdot 1 \cdot 6}{0,1^3} =$$

$$= 21566550 \text{ Pa} = 21,6 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{\max}} = \frac{350}{21,6} = 16 \quad k_{Re} = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} = \frac{0,6 \cdot 350}{21,6} = 9,6$$

**Př.: Šikmý ohyb**



$$F_x = F \cdot \sin 45^\circ = 5000 \cdot \sin 45^\circ = 3535,5 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \cos 45^\circ = 5000 \cdot \cos 45^\circ = 3535,5 \text{ N}$$

$$\sigma_x = \frac{M_{Ox}}{W_{0x}} = \frac{F_x \cdot l}{W_{0x}} = \frac{6 \cdot F_x \cdot l}{b^2 \cdot h} = \frac{6 \cdot 3535,5 \cdot 0,1}{0,02 \cdot 0,01^2} = 1060650000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y = \frac{M_{Oy}}{W_{0y}} = \frac{F_y \cdot l}{W_{0y}} = \frac{6 \cdot F_y \cdot l}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 3535,5 \cdot 0,1}{0,01 \cdot 0,02^2} = 530325000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_t + \sigma_0 = 106065000 + 530325000 = 1590975000 \text{ Pa} = 1591 \text{ MPa}$$

## 6.2 Kombinace normálních sil a tečných napětí

### 6.3 Teorie pevnosti

Normální a smyková napětí ( $\sigma$  a  $\tau$ ), která vznikají při složeném namáhání, nelze algebraicky ani vektorově sčítat. Jejich účinek lze nahradit (redukovat) jediným, tzv. **redukovaným napětím**  $\sigma_{red}$ . Tím se převede složené namáhání na jednoduché „tahové“ napětí  $\sigma_{Red}$ , které pak lze porovnat smezí kluzu  $R_e$  v tahu nebo dovoleným napětím v tahu  $\sigma_{Dovt}$ .

Redukované napětí lze počítat podle 5-ti různých teorií pevnosti:

#### 6.3.1 Teorie maximálních normálních napětí $\sigma_{Max}$

Tato teorie předpokládá, že k porušení součásti dojde tehdy, když maximální normálné napětí dosáhne hodnoty, při které nastane porušení u prostého tahu.

Nevýhoda: tato teorie zanedbává ostatní normální i smyková napětí.

Dá se použít u křehkých materiálů (litiny).

$$\sigma_{red} = \sigma_{max}$$

#### 6.3.2 Teorie maximálních poměrných deformací $\varepsilon_{Max}$

Tato teorie předpokládá, že k porušení dojde při dosažení maximální poměrné deformace, která je rovna deformaci při prostém tahu.

Nevýhoda: nebude v úvahu deformace a zkosy v ostatních směrech.

Dá se použít u křehkých materiálů (litina).

#### 6.3.3 Teorie maximálních smykových napětí $\tau_{Max}$

Tato teorie předpokládá, že k porušení dojde, dosáhne-li maximální tečné napětí velikosti, při níž se materiál poruší při prostém tahu.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Tato teorie je použitelná pro houževnaté materiály, dává však poněkud větší rozdíly součástí. Používá se v USA.



### 6.3.4 Teorie energetická – podle celkové měrné deformační energie

Tato teorie předpokládá, že k porušení dojde tehdy, dosáhne-li celková měrná deformační energie hodnoty stejné, jako u prostého tahu. Tato teorie se nepoužívá.

$$W_c = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sigma_2$$

Deformační energie: na změnu tvaru součásti (smykové napětí)

na změnu objemu součásti (normální napětí), (ocel je stlačená  $\mu = 0,3$ )

Pokusy bylo zjištěno, že např. všeobecný tlak nemá vliv na pevnost součásti, tedy energie na změnu objemu součásti nemá vliv na pevnost součásti.

### 6.3.5 Teorie energetická – podle měrné deformační energie pro změnu tvaru

Tato teorie se označuje HMH podle svých objevitelů Hubera, Mieseho, Henckyho. Tato teorie předpokládá, že k porušení dojde tehdy, když měrná deformační energie pro změnu tvaru dosáhne hodnoty jako u prostého tahu.

$$\sigma_{\text{Re}_d} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{\text{Dovt}}$$

Protože tvar součásti mohou změnit jen smyková napětí, říká se této teorii také energetická teorie smykového napětí.

Tato teorie nejlépe vyhovuje výsledkům zkoušek u houževnatých materiálů a je také předepsána pro výpočty normou ČSN.

U ohybu a krutu hřídelů se někdy v teorii HMH používá tzv. Bachův opravný součinitel, který bere do úvahy rozdílný způsob zatížení hřídelů v ohybu a krutu (např. střídavý ohyb a míjivý krut).

$$\sigma_{\text{Re}_d} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_B \cdot \tau)^2} \leq \sigma_{\text{Dovt}}$$

$\alpha_B$  – Bachův opravný součinitel

Pro stejné způsoby zatížení je  $\alpha_B = 1$ , jinak se vypočte z poměru dovoleného napění v ohybu a krutu.

$$\alpha_B = \frac{\sigma_{\text{Dov}}}{1,73 \cdot \tau_{\text{Dov}}}$$

## 6.4 Redukovaný moment

Často počítaný případ ohybu a krutu hřidelů se také řeší přes tzv. **redukovaný moment**. V tomto vzorci je vlastně kroutící moment dle 5-té teorie pevnosti převeden na moment ohybový a další výpočet probíhá, jako by byla hřidel namáhána pouze ohybem.

$$\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{\text{Dovt}}$$

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0}$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{2W_0}$$

$$W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$\frac{M_{O\text{Red}}}{W_0} = \sqrt{\frac{M_0^2}{W_0^2} + 3 \cdot \frac{M_K^2}{2^2 W_0^2}}$$

$$M_{O\text{Red}} = \sqrt{M_0^2 + \frac{3}{4} M_K^2}$$

$$M_{O\text{Red}} = \sqrt{M_0^2 + 0,75 M_K^2}$$

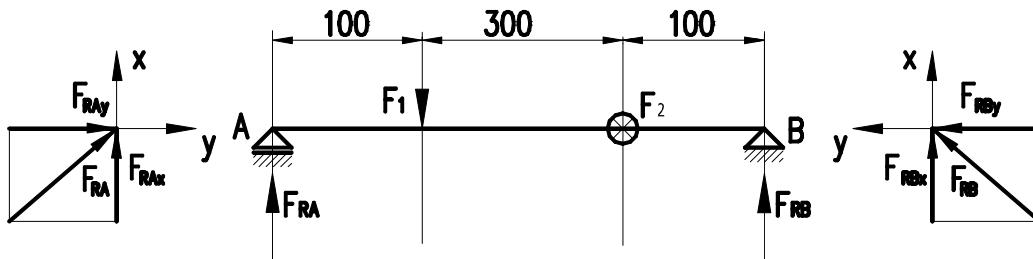
$$\sigma_{\text{Red}} = \frac{M_{O\text{Red}}}{W_0} \leq \sigma_{\text{Dov}} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{O\text{Red}}}{\pi \cdot \sigma_{\text{Dov}}}}$$

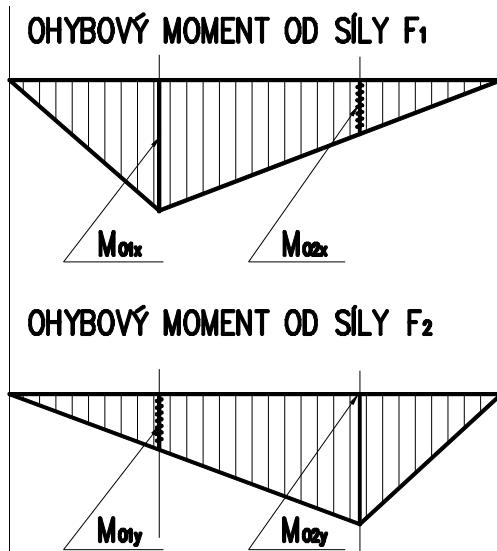
S použitím Bachova opravného součinitele:

$$M_{O\text{Red}} = \sqrt{M_0^2 + 0,75 \cdot (\alpha_B \cdot M_K)^2}$$

**Př.: Provrďte výpočet  $\varnothing$  hřidele namáhaného krutem  $M_K = 300 \text{ Nm}$  a ohybem silami**

$F_1 = 2 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 3 \text{ kN}$ , které působí ve dvou  $\perp$  rovinách,  $\sigma_{\text{Dov}} = 200 \text{ MPa}$





$F_1$  působí v ose x

$F_2$  působí v ose y

Reakce od  $F_1$ :

$$F_{RAx} = F_1 \cdot \frac{400}{500} = 2000 \cdot \frac{400}{500} = 1600N$$

$$F_{RBx} = F_1 \cdot \frac{100}{500} = 2000 \cdot \frac{100}{500} = 400N$$

Reakce od  $F_2$ :

$$F_{RAY} = F_2 \cdot \frac{100}{500} = 3000 \cdot \frac{100}{500} = 600N$$

$$F_{RBY} = F_2 \cdot \frac{400}{500} = 3000 \cdot \frac{400}{500} = 2400N$$

Pro výpočet ložisek:

Výsledná síla v ložisku

$$F_{RA} = \sqrt{F_{RAx}^2 + F_{RAY}^2} = \sqrt{1600^2 + 600^2} = 1709N$$

$$F_{RB} = \sqrt{F_{RBx}^2 + F_{RBY}^2} = \sqrt{400^2 + 2400^2} = 2433N$$

Ohybové momenty v místech 1, 2

od  $F_1$ :

$$M_{01x} = F_{RAx} \cdot 100 = 1600 \cdot 100 = 160000Nm = 160Nm$$

$$M_{02x} = F_{RBx} \cdot 100 = 400 \cdot 100 = 40000Nm = 40Nm$$

od  $F_2$ :

$$M_{01y} = F_{RAy} \cdot 100 = 600 \cdot 100 = 60000 Nmm = 60 Nm$$

$$M_{02y} = F_{RB_y} \cdot 100 = 2400 \cdot 100 = 240000 Nmm = 240 Nm$$

Výsledné ohýbové momenty:

$$M_{01} = \sqrt{M_{01x}^2 + M_{01y}^2} = \sqrt{160^2 + 60^2} = 171 Nm$$

$$M_{02} = \sqrt{M_{02x}^2 + M_{02y}^2} = \sqrt{40^2 + 240^2} = 243 Nm$$

$M_{01} < M_{02}$  → počítáme místo 2

Redukovaný moment:

$$M_{O\text{Red}} = \sqrt{M_0^2 + 0,75M_K^2} = \sqrt{243^2 + 0,75 \cdot 300^2} \doteq 356 Nm$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{O\text{Red}}}{W_0} \leq \sigma_{DovO}$$

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

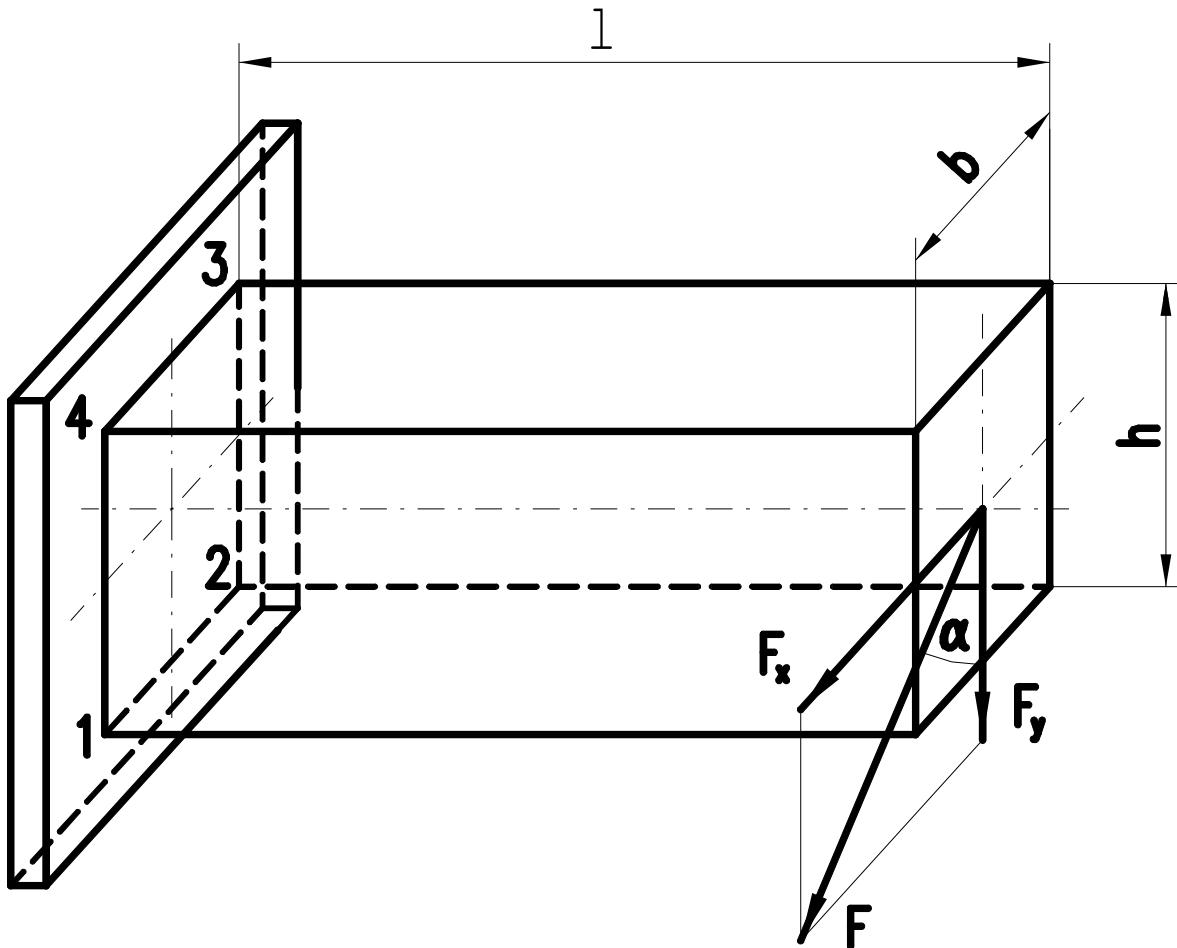
$$\sigma_0 = \frac{\frac{M_{O\text{Red}}}{\pi \cdot d^3}}{32} \leq \sigma_{DovO}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{O\text{Red}}}{\pi \cdot \sigma_{DovO}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 356000}{\pi \cdot 200}} = 26,3 mm$$



Př.: Určete napětí v jednotlivých bodech:

$$l = 2 \text{ m}, F = 2,5 \text{ kN}, b = 10 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}, \alpha = 30^\circ$$



$$F_x = F \cdot \sin \alpha = 2500 \cdot \sin 30^\circ = 1250 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha = 2500 \cdot \cos 30^\circ = 2165 \text{ N}$$

$$\sigma_x = \frac{M_{Ox}}{W_{Ox}} = \frac{F_x \cdot l}{W_{Ox}} = \frac{F_x \cdot l \cdot 6}{h \cdot b^2} = \frac{1250 \cdot 2000 \cdot 6}{20 \cdot 10^2} = 7500 \text{ MPa}$$

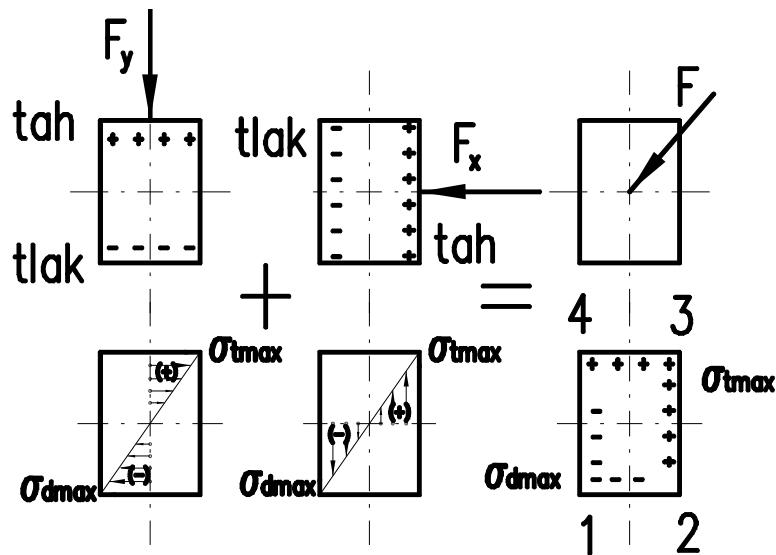
$$\sigma_y = \frac{M_{Oy}}{W_{Oy}} = \frac{F_y \cdot l}{W_{Oy}} = \frac{F_y \cdot l \cdot 6}{b \cdot h^2} = \frac{2165 \cdot 2000 \cdot 6}{10 \cdot 20^2} = 6495 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{Maxd} = -\sigma_x - \sigma_y = -7500 - 6495 = -13995 \text{ MPa}$$

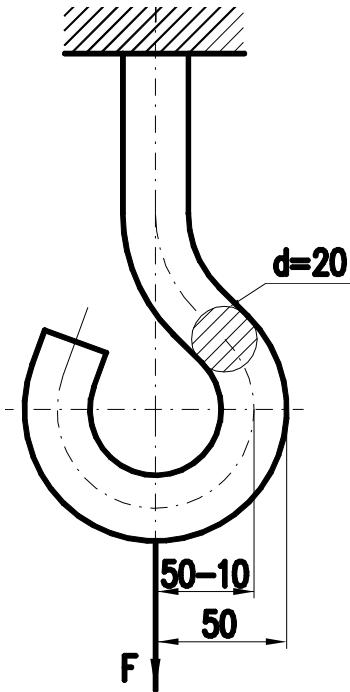
$$\sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y = 7500 - 6495 = 1005 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{Maxt} = \sigma_x + \sigma_y = 7500 + 6495 = 13995 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = \sigma_y - \sigma_x = 6495 - 7500 = -1005 \text{ MPa}$$



Př.: Vypočítejte maximální napětí v háku.  $F = 4 \text{ kN} = 4000 \text{ N}$ .



$$\sigma_c = \sigma_o + \sigma_t$$

$$M_o = F \cdot 40 = 4000 \cdot 40 = 160000 \text{ Nmm}$$

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 20^3}{32} = 785 \text{ mm}^3$$

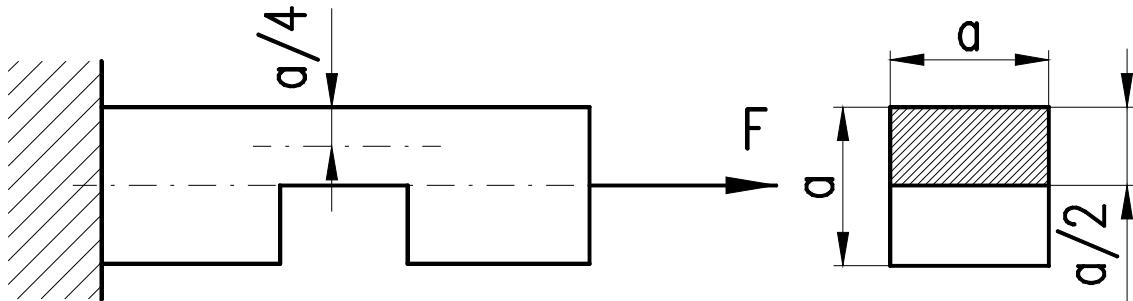
$$\sigma_o = \frac{M_0}{W_0} = \frac{160000}{785} = 204 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{4000 \cdot 4}{\pi \cdot 20^2} = 13 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{celk} = \sigma_o + \sigma_t = 204 + 13 = 217 \text{ MPa}$$



**Př.: Zjistěte největší napětí v tyči zatížené v ose silou  $F = 10\text{ kN}$ ,  $a = 100\text{ mm}$ .**



$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}} = \frac{2F}{a^2} = \frac{2 \cdot 10000}{100^2} = 2 \text{ MPa}$$

$$M_0 = F \cdot \frac{a}{4} = \frac{10000 \cdot 100}{4} = 250000 \text{ Nmm}$$

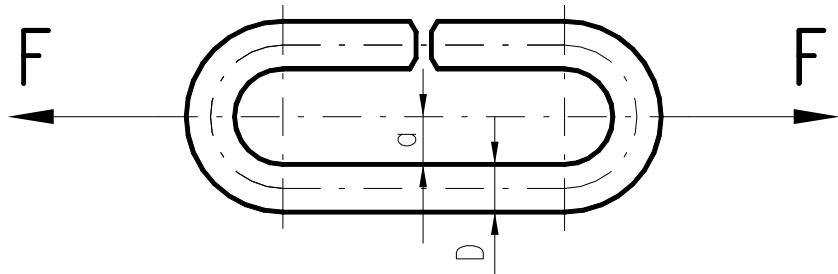
$$W_0 = \frac{a \cdot \frac{a^2}{2^2}}{6} = \frac{a^3}{24} = \frac{100^3}{24} = 41667 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} = \frac{250000}{41667} = 6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \sigma_t = 6 + 2 = 8 \text{ MPa}$$

**Př.: Zjistěte, jaké napětí je ve spojovacím článku řetězu.**

$$a = 60 \text{ mm}, d = 50 \text{ mm}, F = 25 \text{ kN}$$



$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot D^2} = \frac{25000 \cdot 4}{\pi \cdot 50^2} = 13 \text{ MPa}$$

$$M_0 = F \cdot \left( a + \frac{D}{2} \right) = 25000 \cdot (60 + 25) = 2125000 \text{ Nmm}$$

$$W_0 = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 50^3}{32} = 12272 \text{ mm}^3$$

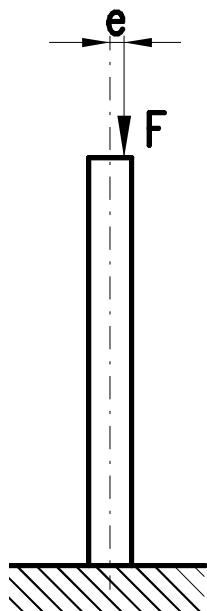
$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} = \frac{2125000}{12272} = 173 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \sigma_t = 173 + 13 = 186 \text{ MPa}$$



## 7 Vzpěr

Stlačuje-li se přímý prut, na jednom konci upnutý, silou  $F$ , vzniká v něm za předpokladu, že prut zůstane přímý, tlakové napětí  $\sigma_d = \frac{F}{S}$ , kde  $S$  je průřez prutu. U prutů, kde je délka několikrát větší než rozměry průřezů, nastává takzvané zatížení vzpěrem. Síla  $F$  vždy nepůsobí přesně v ose prutu, ani rozložení napětí po průřezu není pro různé vady materiálu přesně stejné. Síla tedy působí vždy v nějaké výstřednosti (excentricitě) od osy prutu. Prut je tedy kromě tlaku zatížený také ohybem.



$$M_o = F \cdot e$$

Pokud je síla  $F$  relativně malá, prut se poněkud vychýlí do strany a je stále v rovnováze. Pokud je síla  $F$  velká, prut se do strany vychýlí více, tím se zvětší rameno síly  $e$  a tedy i ohybový moment. Prut pak bude více namáhaný a opět se vychýlí, opět se zvýší ohybový moment, prut se zase vychýlí a tak dále, až se prut zborgí nebo zlomí. Tomuto způsobu porušení součásti říkáme **vzpěrová pevnost** nebo **vzpěr**. Existuje nějaká mezní nejmenší síla  $F$ , při které právě dojde ke zborcení (vybočení) prutu. Této síle říkáme **kritická síla** a značíme ji  $F_{KR}$ .

Kritická síla závisí pouze na rozměrech a materiálu prutu, nezávisí na zatěžující síle!

Při vzpěru se jedná o porušení stability prutu, v soustavě nastane nerovnováha a prut se zborgí nebo praskne.

Pro výpočet kritické síly tlačného prutu slouží tzv. **Eulerův vzorec**:

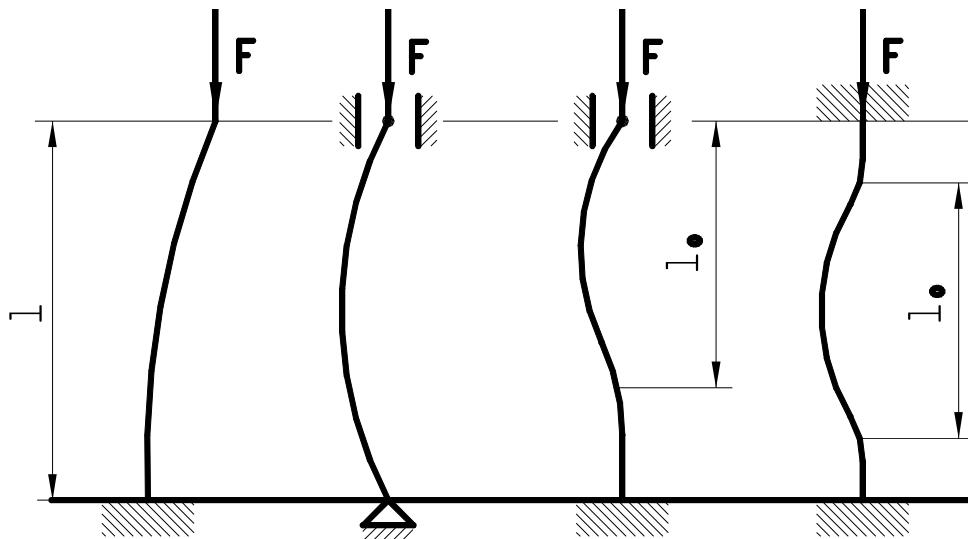
$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l_0^2}$$

$J_{min}$  – kvadratický moment průřezu k té ose, kde je minimální.

Pro obdélník platí:  $J_{min} = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$l_0$  – redukovaná délka, tj. délka prutu přepočítaná podle způsobu uložení prutu.

Určení redukované délky – tzv. příklady vzpěru:



**PŘÍPAD  
VZPĚRU**

$$I_e = 2 \cdot I$$

$$I_e = I$$

$$I_e = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$I_e = \frac{I}{2}$$

Dovolená tlaková síla pak musí být s nějakou bezpečností menší než síla kritická.

Pevnostní podmínka pro pružný vzpěr:

$$F \leq \frac{F_{KR}}{k} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{k \cdot l_0^2}$$

k – bezpečnost ke kritické síle (2 ÷ 20, někdy dle ČSN).

Kritické napětí – je to tlakové napětí, které odpovídá kritické síle.

$$\sigma_{KR} = \frac{F_{KR}}{S} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{S \cdot l_0^2}$$

S – plocha průřezu prutu.

Dříve byl už zaveden tzv. poloměr kvadratického momentu „i“

$$i^2 \cdot S = J_{min}$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

$$\text{pro kruh platí: } i = \frac{d}{4}$$

pak po dosazení:

$$\sigma_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{l_0^2}$$

Zavádíme tzv. štíhlostní poměr  $\lambda$  (štíhlost), který udává, jak moc je prut štíhlý, a tedy náchylný ke vzpěrovému namáhání.

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

Pak:

$$\sigma_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Eulerův vzorec je odvozený z Hookeova zákona ( $\sigma = \epsilon \cdot E$ ) pro pružné chování materiálu, který platí až do meze úměrnosti. Proto, aby Eulerův vzorec platil, musí být:

$$\sigma_u \geq \sigma_{KR}$$

$$\sigma_u \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \sigma_{KR}$$

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \lambda_m$$

Eulerův vzorec platí tedy jen tehdy, když  $\lambda \geq \lambda_m$ .

$\lambda_m$  je tzv. mezní štíhlost a je to materiálová konstanta.

Uhlíková ocel	$\lambda_m = 100$
Legovaná ocel	$\lambda_m = 85$
Šedá litina	$\lambda_m = 80$
Pružinová ocel	$\lambda_m = 60$
Dřevo	$\lambda_m = 100$

## 7.1 Výpočet podle Eulera (pružný vzpěr)

Postup výpočtu (strojnické tabulky str. 36, 37):

- Z pevnostní podmínky pro vzpěr vypočteme podle zadání průřez nebo bezpečnost ke kritické síle:

$$F \leq \frac{F_{KR}}{k} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{k \cdot l_0^2}$$

odtud např.

$$J_{min} \geq \frac{F \cdot k \cdot l_0^2}{\pi^2 \cdot E} \rightarrow \text{vypočteme průřez}$$

- Vypočteme kvadratický poloměr:

$$i = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

c. Vypočteme štíhlostní poměr:

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

d. Porovnáme vypočtené  $\lambda$  s  $\lambda_m$ :

pokud platí:

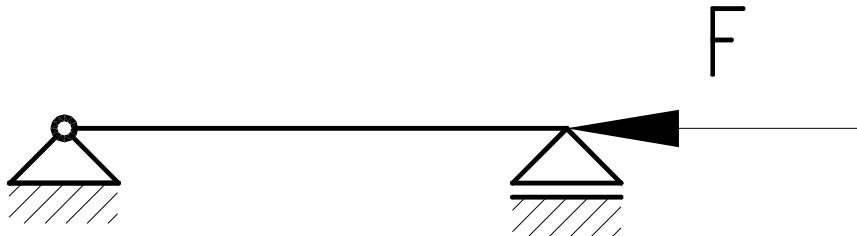
$$\lambda \geq \lambda_m, \text{ je výpočet v pořádku}$$

$\lambda < \lambda_m$ , jsme mimo rozsah platnosti Eulerovy rovnice a musíme počítat podle Tetmajera (tzv. nepružný vzpěr).

**Př.:**

$$l = 2 \text{ m}, \quad F = 10 \text{ kN}, \quad \text{trubka } D = 40 \text{ mm}, \quad d = 34 \text{ mm}, \quad \lambda_m = 100, \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$F_{KR} = ?, \quad \lambda = ?, \quad k = ?$$



Druhý případ vzpěru –  $l_0 = l$

$$J_{\min} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (0,04^4 - 0,034^4)}{64} = 0,00000006 \text{ m}^4 = 60066 \text{ mm}^4$$

$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60,066 \cdot 10^{-9}}{2^2} = 31123 \text{ N}$$

$$k = \frac{F_{KR}}{F} = \frac{31123}{10000} = 3,11$$

$$S = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (0,04^2 - 0,034^2)}{4} = 348,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = \sqrt{\frac{60,066 \cdot 10^{-9}}{348,7 \cdot 10^{-6}}} = 0,013 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{2}{0,013} = 152,385 [-]$$

$\lambda > \lambda_m \rightarrow$  výpočet je v pořádku.

Př.:  $d = 20\text{ mm}$ ,  $l = 1200\text{ mm}$ , ocel,  $F_{KR} = ?$ ,  $\lambda = ?$ , ST str. 36.

Kvadratický moment:



$$J_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 0,02^4}{64} = 7,854 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 = 7854 \text{ mm}^4$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} = 0,000314 \text{ m}^2 = 314 \text{ mm}^2$$

$$l_0 = 2l = 2400 \text{ mm}$$

$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-9}}{2,4^2} = 2826 \text{ N}$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-9}}{314 \cdot 10^{-6}}} = 0,005 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{2,4}{0,005} = 480 \text{ [-]}$$

$\lambda > \lambda_m \rightarrow$  výpočet je v pořádku.

## 7.2 Výpočet podle Tetmajera (nepružný vzpěr)

Tetmajer nahradil chování materiálu při vzpěru nadmezí úměrnosti přímkou.

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda$$

$\sigma_{KR}$  – kritické napětí, tj. fiktivní tlakové napětí při zhrocení prutu;

a, b – experimentálně zjištěné konstanty, závislé na druhu materiálu (v tabulkách).

Pevnostní podmínka vzpěru podle Tetmajera:

$$F \leq \frac{F_{KR}}{k} = \frac{\sigma_{KR} \cdot S}{k}$$

**Postup výpočtu:**

- Navrheme průřez nebo vypočteme bezpečnost podle Eulera (vypočteme  $F_{KR}$ ,  $i$ ,  $\lambda$ )
- $i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}$ ,  $\lambda = \frac{l_0}{i}$ ,  $F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2}$ ,  $F \leq \frac{F_{KR}}{k}$
- Pokud je  $\lambda < \lambda_m$ , Eulerův výpočet neplatí a počítáme podle Tetmajera (pokud je  $\lambda \geq \lambda_m$ , pak je výpočet dle Eulera).
- Vypočítáme kritické napětí dle Tetmajera  $\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda$

- d. Zkontrolujeme, zda-li je splněna pevnostní podmínka dle Tetmajera, případně vypočteme bezpečnost.  $F \leq \frac{\sigma_{KR} \cdot S}{k}$

### 7.3 Součinitel vzpěrnosti

Některé součásti (mosty, jeřáby, sloupy) se dle ČSN počítají pomocí tzv. **součinitele vzpěrnosti c**. Podstata řešení je v tom, že se prut počítá jakoby na tlak, zatěžující síla je ale zvětšena vynásobením součinitelem vzpěrnosti **c**.

$$\boxed{\sigma_d = \frac{F \cdot c}{S} \leq \sigma_{Dovd}}$$

Součinitel vzpěrnosti závisí na druhu materiálu (ocel, ...) a na štíhlosti  $\lambda$  (čím je  $\lambda$  větší, tím je **c** větší) a najdeme ho v tabulkách, kde je zahrnut jak pružný, tak i nepružný vzpěr.

### 7.4 Shrnutí vzpěru:

Rozhodující pro výpočet vzpěru je štíhlost prutu  $\lambda$

- Pokud je  $\lambda$  malé ( $\lambda < 20 \div 30$ ) – počítáme pouze na tlak, na vzpěr ne.
- $\lambda \geq \lambda_m$  – počítáme podle Ruleta.
- $\lambda < \lambda_m$  a není moc malé – výpočet dle Tetmajera.
- Výpočty v bodech b) a c) lze nahradit výpočtem podle součinitele vzpěrnosti **c**.

**Př.**: Druhý případ vzpěru,  $l = 1050 \text{ mm}$ ,  $F = 12 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $k = 10$ , ocel 11 500,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\lambda_m = 100$ ,  $a = 335 \text{ MPa}$ ,  $b = 0,62 \text{ MPa}$ ,  $l_0 = 1$ ,  $d = ?$ ,  $\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda$



$$F = \frac{F_{KR}}{k} \rightarrow F_{KR} = F \cdot k = 12 \cdot 10^4 \cdot 10 = 12 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2} \rightarrow J_{\min} = \frac{F_{KR} \cdot l_0^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 1,05^2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \pi^2} = 0,000000638 \text{ m}^4 = 638323 \text{ mm}^4$$

$$J_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot J_{\min}}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 0,000000638}{\pi}} = 0,06 \text{ m} = 60 \text{ mm}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,06^2}{4} = 0,0028 \text{ m}^2 = 2832 \text{ mm}^2$$

Poloměr kvadratického momentu:  $i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = \sqrt{\frac{0,000000638}{0,0028}} = 0,015 \text{ m}$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{1,05}{0,015} = 69,5$$

$\lambda < \lambda_m \rightarrow$  výpočet podle Tetamajera

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda = 335 - 0,62 \cdot 69,5 = 292 MPa$$

$$F_{KR} = \sigma_{KR} \cdot S = 292 \cdot 10^6 \cdot 0,0028 = 817600 N$$

$$k = \frac{F_{KR}}{F} = \frac{817600}{12 \cdot 10^4} = 6,8 < 10 \rightarrow \text{nevyhovuje}$$

Navrheme nový průřez: Např.:

$$\sigma_{KR} = \frac{k \cdot F}{S} = \frac{k \cdot F \cdot 4}{\pi \cdot d^2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{F \cdot 4 \cdot k}{\pi \cdot \sigma_{KR}}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10}{\pi \cdot 292}} = 72 mm$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{Min}}{S}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} \quad i = \frac{d}{4} = \frac{72}{4} = 18 mm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{1050}{18} = 58,3$$

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda = 335 - 0,62 \cdot 58,3 = 297 MPa$$

$$F_{KR} = \sigma_{KR} \cdot S = 297 \cdot \frac{\pi \cdot 72^2}{4} = 1209237 N$$

$$k = \frac{F_{KR}}{F} = \frac{1209237}{12 \cdot 10^4} = 10,07 \rightarrow \text{vyhovuje}$$

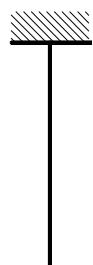
**Př.**: Vzpěr svařovaného drátu průměru 3,15 mm,  $l = 1 m$ ,  $F_{KR} = ?$ ,  $\lambda = ?$

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 3,15^4}{64} = 4,8 mm^4$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 7,8 mm^2$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} = \sqrt{\frac{4,8}{7,8}} = 0,79$$

**a) Jedná se o první případ vzpěru**  $l_0 = 2 \cdot l$



$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 4,8}{(2 \cdot 1000)^2} = 2,5 N$$

$$\lambda = \frac{2000}{0,79} = 2532$$

$$\lambda > \lambda_m \rightarrow \text{Vyhovuje}$$



**b) Jedná se o čtvrtý případ vzpěru  $l_0 = \frac{l}{2}$**

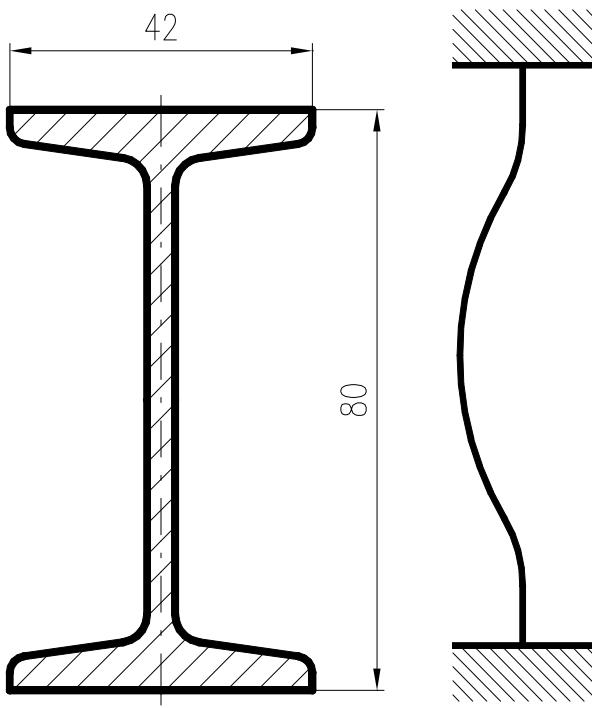


$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 4,8}{500^2} = 39,8 N$$

$$\lambda = \frac{500}{0,79} = 633$$

$\lambda > \lambda_m \rightarrow$  Vyhovuje

**Př.: Určete  $F_{KR}$  a  $\lambda$  tyče délky 2 m na obou stranách vetknuté. Jedná se o průřez I 80 ČSN 42 5550.**



Ze strojnických tabulek str. 293 určíme pro tyč průřezu I 80 ČSN 42 5550, materiál 11 373,  $J_x = 778000 \text{ mm}^4$ ,  $J_y = J_{\min} = 62900 \text{ mm}^4$ ,  $S = 758 \text{ mm}^2$ .

$$l_0 = \frac{l}{2}$$

$$F_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2} = \\ = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 62900}{1000^2} = 130368 N$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = \\ = \sqrt{\frac{62900}{758}} = 9,12 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{1000}{9,12} =$$

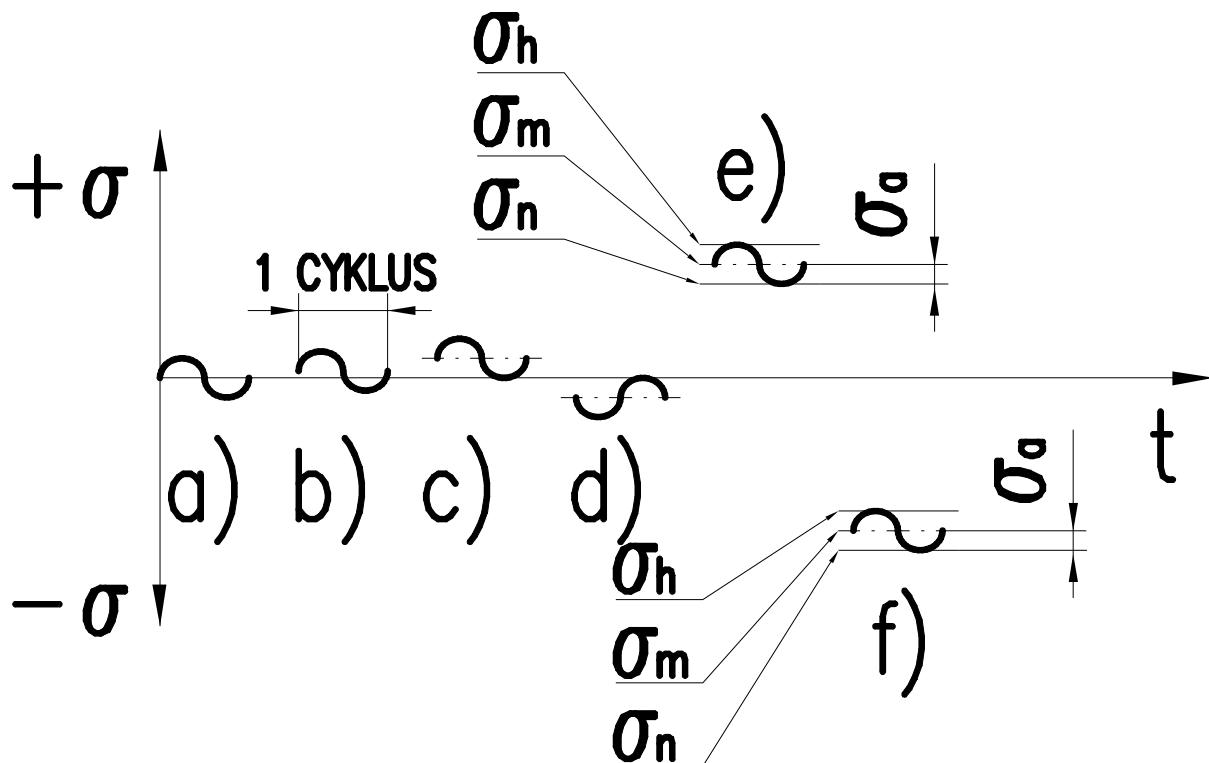
= 109,6 → Výpočet vyhovuje

## 8 Cyklické namáhání – únava

Strojnické tabulky str. 54.

**Cyklické namáhání** je takové namáhání, které periodicky kolísá mezi **minimem** a **maximem**, v závislosti na čase.

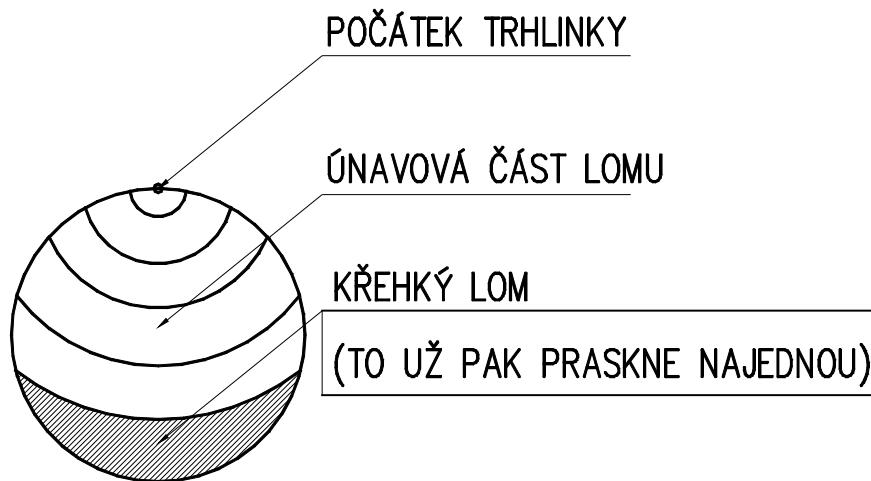
Druhy zatěžovacích cyklů:



a) Střídavý cyklus $\sigma_m = 0$	$\sigma_h$ – horní napětí
b) Střídavý nesouměrný	$\sigma_n$ – dolní napětí
c), d) Míjivý $\sigma_m = \sigma_a$	$\sigma_m$ – střední napětí $\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2}$
e), f) Pulzující (tepavý)	$\sigma_a$ – amplituda napětí $\sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2}$

Při opakovaném (cyklickém) zatížení může dojít k tzv. **únavovým lomům** součásti i při napětí menším, než mez kluzu materiálu. O únavě materiálu hovoříme tehdy, když počet zatěžujících cyklů dosáhne tisíce, miliónu a více. U takto zatížených součástí se může objevit trhlinka, která se dále zvětšuje a šíří až dojde k lomu součásti. Takovému lomu říkáme **únavový lom** a je charakteristický tím, že mu nepředchází téměř žádná plastická deformace.

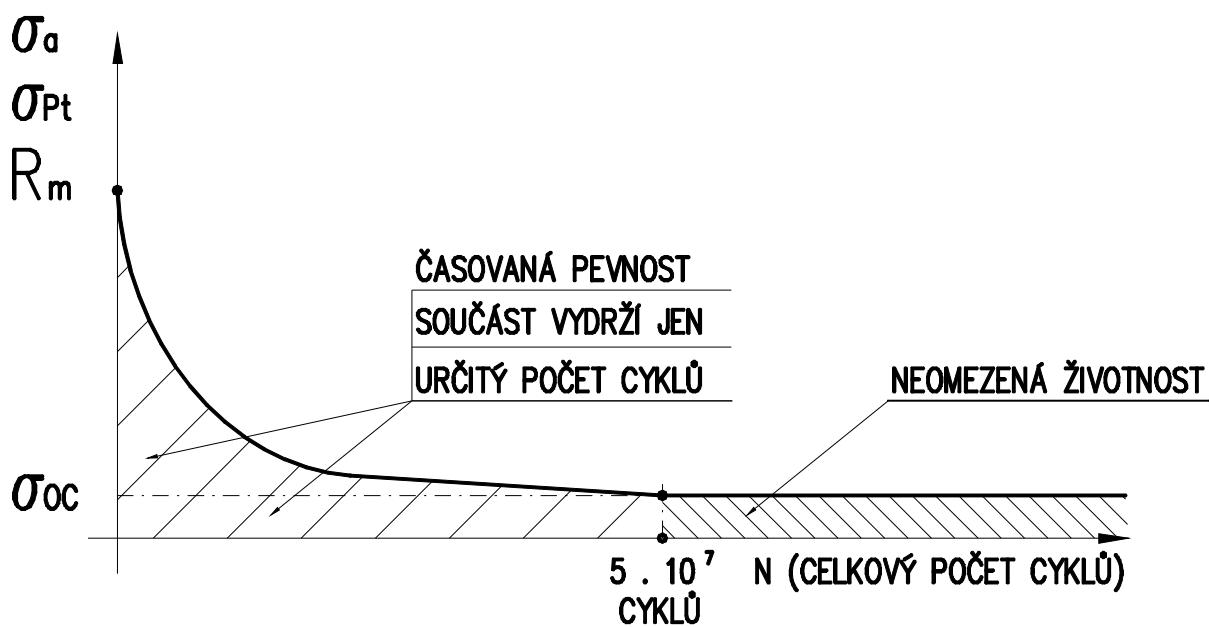
Trhlinky vznikají v místech koncentrace napětí, tedy v místech vrubů, zápichů nebo v místech povrchových vad materiálu (vměstky). Únava materiálu je nejvíce propracována u ohýbaných a kroucených hřidelů.



## 8.1 Wöhlerova křivka (studium praskání kolejnic)

Kniha str. 330.

Wöhlerova křivka ukazuje závislost mezi amplitudou napětí u střídavého cyklu zatížení a životností vzorku. Udává počet cyklů, který zkušební vzorek při daném zatížení vydrží. Vzorek je kruhová leštěná tyč malého průměru. Zkouší se obvykle střídavý ohyb.



**Mez únavy**  $\sigma_{0C}$  = největší napětí, které vzorek vydrží neomezený počet cyklů ( $5 \cdot 10^7$  cyklů). Je určena pro **střídavý cyklus** a leštěnou tyč bez vrubů. Pro ocel platí:

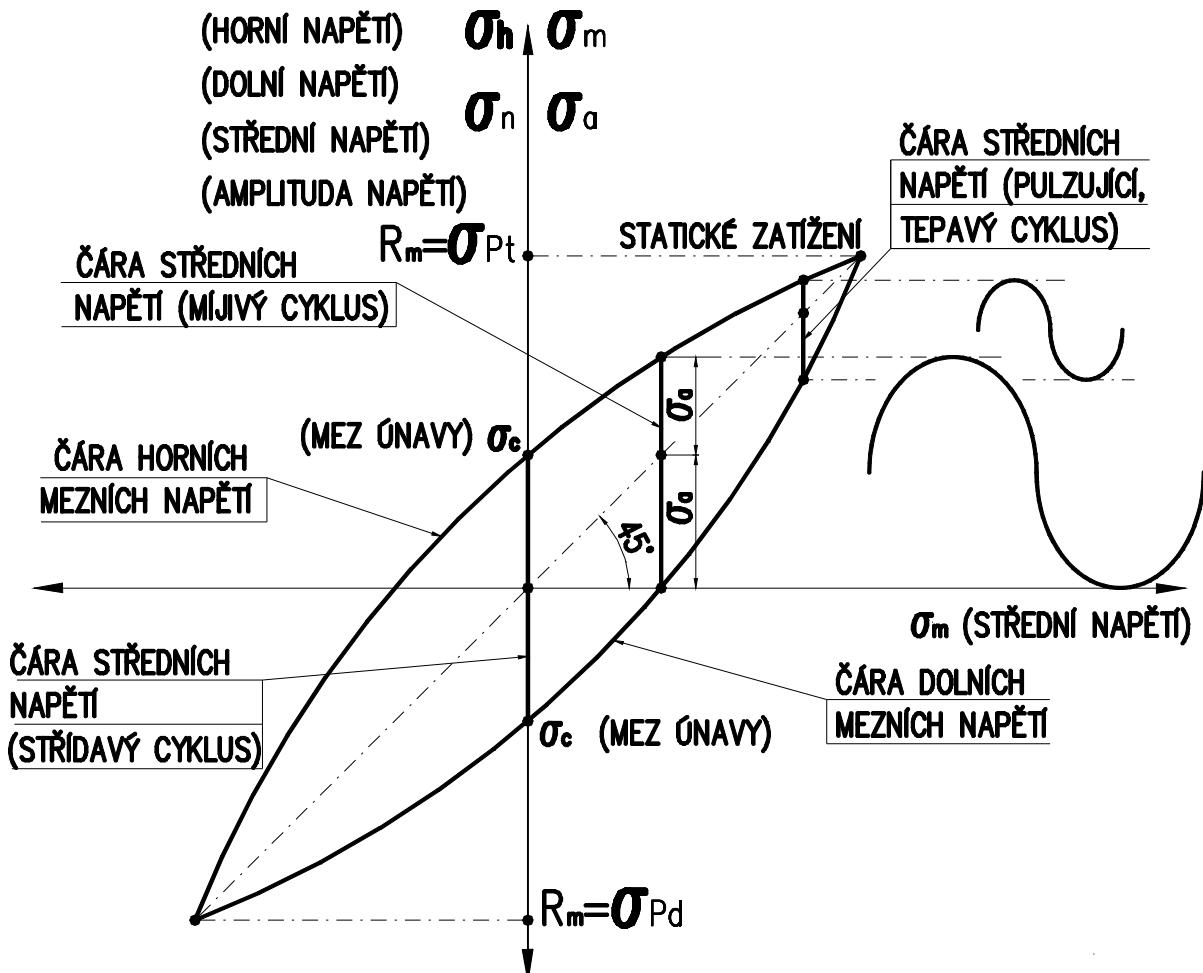
$$\text{Střídavý ohyb:} \quad \sigma_{0C} = 0,43 \cdot R_m$$

$$\text{Střídavý krut:} \quad \tau_{KC} = 0,25 \cdot R_m$$

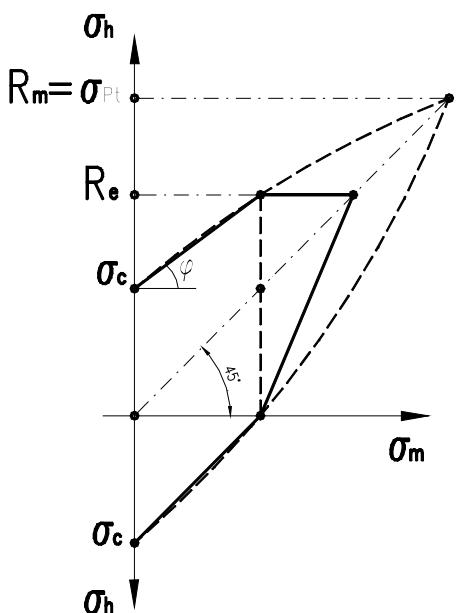


## 8.2 Smithův diagram

Tento diagram udává závislost meze únavy na druhu zatěžovacích cyklů.



Každý cyklus je v tomto diagramu znázorněn úsečkou. Když je tato úsečka uvnitř diagramu, jsme podmezí únavy  $\sigma_c$  a tedy součást má neomezenou životnost.

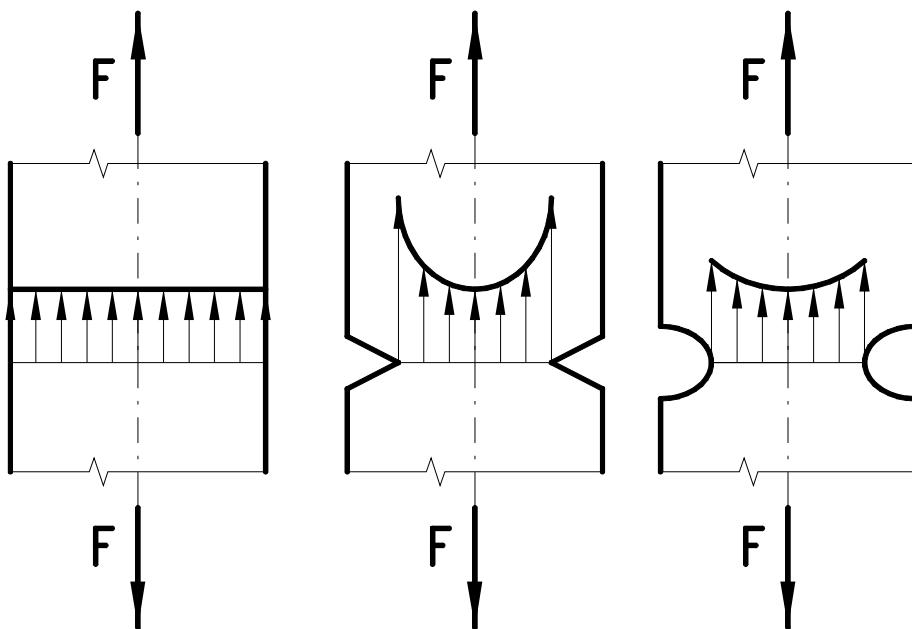


Takto sestrojený Smithův diagram by vyžadoval velké množství zkoušek, proto se používá nahrazení křivek přímkami. Diagram se navíc omezuje mezi kluzu  $R_e$ , protože nechceme opakování trvalé deformace.

$\varphi$  závisí na materiálu, obvykle  $\varphi = 45^\circ$

## 8.3 Tvarová pevnost

U strojních součástí jsou velmi časté změny průřezu, drážky, zápichy a podobně, kterým říkáme vruby. Napětí pak v průřezu není rozloženo rovnoměrně, na vrubech vzniká napěťová špička. Tomuto jevu říkáme koncentrace napětí. Čím je např. zápicí ostřejší, tím je koncentrace napětí větší.



Koncentrace napětí má rozhodující vliv na únavovou pevnost. Mez únavy tyče s vrubem může být třeba jen 20 % meze únavy hladké tyče. Mez únavy je pokusně zjišťována pro hladkou leštěnou tyč bez vrubů. Na mez únavy skutečné součásti má vliv:

- Tvar součásti.
- Velikost součásti.
- Stav povrchu součásti.

### 8.3.1 Vliv tvaru součásti:

Používáme tzv. **vrubový součinitel  $\beta$** , který udává, kolikrát je skutečná napěťová špička větší než rovnoměrně rozložené průměrné napětí.

$$\beta = \frac{\sigma_{skut.}}{\sigma_{jmenovité}}$$

$\sigma_{skut.}$  – skutečná napěťová špička.

$\sigma_{jmenovité}$  – průměrné napětí.

Vrubový součinitel  $\beta$  se určuje poměrně obtížně pomocí únavových zkoušek tyčí s vrubem.



Proto častěji používáme tzv. **tvarový součinitel  $\alpha$** , který udává kolikrát je teoreticky vypočítaná nebo staticky experimentálně zjištěná napěťová špička větší, než průměrné napětí.

$$\alpha = \frac{\sigma_{teor}}{\sigma_{jmenovité}}$$

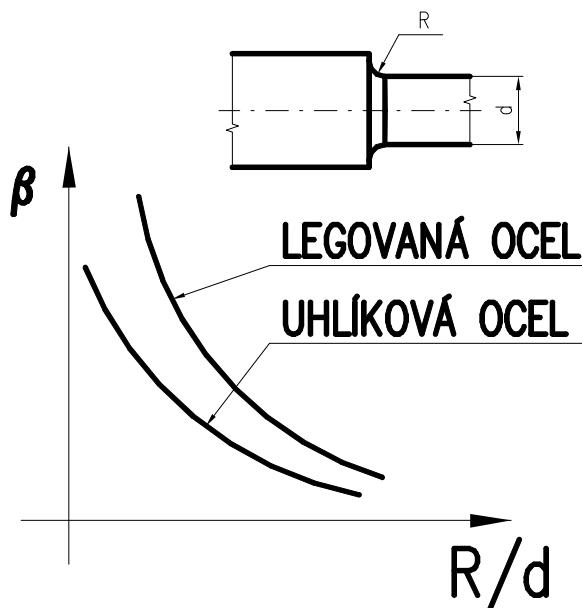
Tvarový součinitel  $\alpha$  je vždy větší než vrubový součinitel  $\beta$ , protože napěťové špičky se vždy v praxi poněkud rozloží a budou menší.

Vrubový součinitel se vypočte:

$$\beta = 1 + (\alpha - 1) \cdot \eta$$

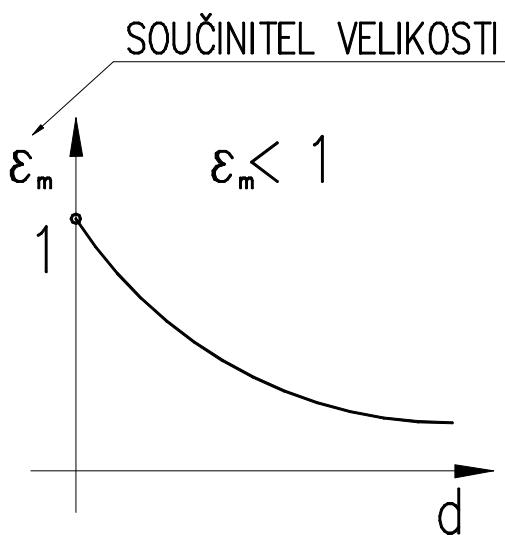
obvykle:  $\beta = 2 \div 3$

$\eta$  – [éta] součinitel citlivosti materiálu na vruby (čím kvalitnější ocel, tím je citlivější).



Vrubový součinitel  $\beta$  se obvykle hledá v diagramech, které byly pro různé vruby zjištěny experimentálně, např. pro osazený hřídel. Jsou v tabulkách, např. strojnické tabulky str. 52.

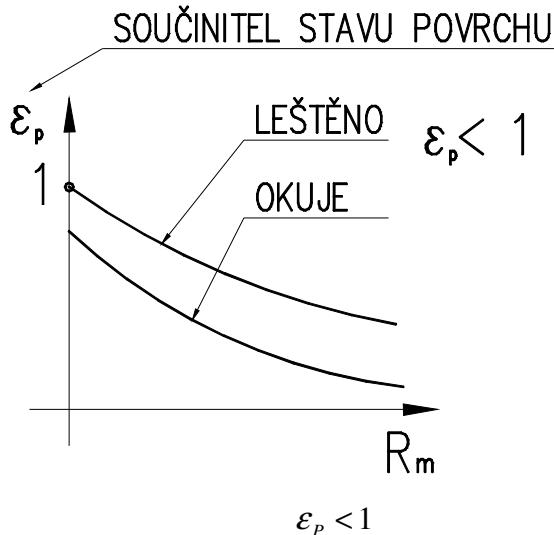
### 8.3.2 Vliv velikosti:



Čím větší součást, tím má více vnitřních vad materiálu, tím je tedy náchylnější k únavovým lomům.  
Např. strojnické tabulky str. 53.

$$\epsilon_m < 1$$

### 8.3.3 Vliv povrchu součásti:



Kniha str. 345, strojnické tabulky str. 53.

Wöhlerova křivka byla zjištěna pro leštěný povrch vzorku. Čím větší drsnost povrchu, tím je více povrchových vrubů, tím je tedy součást náchylnější k únavovým lomům.

Skutečnou mez únavy pro danou součást pak vypočteme:

$$\sigma_{Cskut} = \frac{\sigma_c \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta}$$

$\sigma_c$  – mez únavy (z Wöhlerovy křivky).

$\varepsilon_m$  – součinitel velikosti  $< 1$

$\varepsilon_p$  – součinitel povrchu  $< 1$

$\beta$  – součinitel vrubu  $> 1$

Podmínka neomezené životnosti:  $\sigma \leq \sigma_{Cskut}$

Tato podmínka platí pro střídavý cyklus. Pro jiný cyklus musíme nakreslit Smithův diagram pro hodnotu  $\sigma_{Cskut}$ .

### 8.4 Výpočet hřídele na únavu

Nejčastěji se na únavu počítají hřídele, které jsou zatíženy ohybem a krutem. Na únavu počítáme součásti vždy v místě vrubu (osazení, drážky pro pero, zápichy ...)

a. Vypočteme nebo najdeme v tabulkách skutečnou mez únavy v ohybu  $\sigma_{0C}$  a krutu  $\tau_{KC}$

$$\sigma_{0C} = 0,43 \cdot R_m$$

$$\tau_{KC} = 0,25 \cdot R_m$$

b. Najdeme místa s vruby a vypočítáme tam momenty  $M_K$  a  $M_0$ , z nich vypočteme napětí  $\sigma_0$  a  $\tau_K$

c. Pro každý vrub určím z diagramů součinitel vrubový  $\beta$ , vlivu povrchu  $\varepsilon_p$  a vlivu velikosti  $\varepsilon_m$  pro ohyb i pro krut zvlášť

d. Vypočteme skutečné meze únavy v ohybu a krutu

$$\sigma_{0Cskut} = \frac{\sigma_{0C} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta_o}$$

$$\tau_{Kcskut} = \frac{\sigma_{Kc} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta_K}$$

e. Vypočteme tzv. dynamické bezpečnosti

$$k_{d\sigma} = \frac{\sigma_{0Cskut}}{\sigma_0}$$

$$k_{d\tau} = \frac{\tau_{Kcskut}}{\tau_K}$$

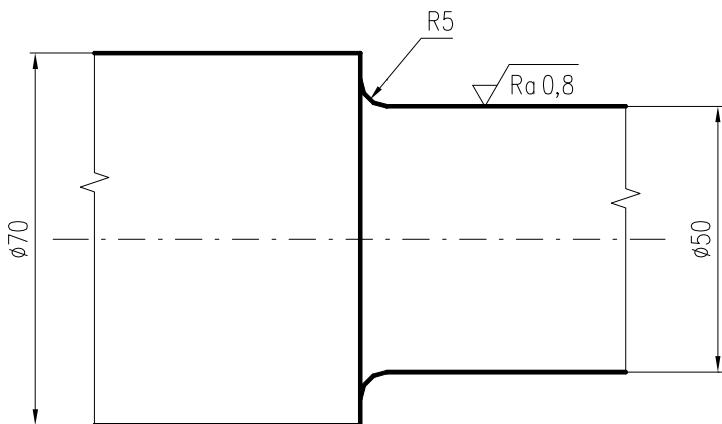
f. Vypočteme výslednou dynamickou bezpečnost

$$\frac{1}{k_d^2} = \frac{1}{k_{d\sigma}^2} + \frac{1}{k_{d\tau}^2}$$

$$k_d = \frac{k_{d\sigma} \cdot k_{d\tau}}{\sqrt{k_{d\sigma}^2 + k_{d\tau}^2}}$$

$$k_{d\min} = 1,5 \div 2$$

**Př.: Vypočte skutečnou mez únavy v ohybu a krutu osazeného hřídele jemně soustruženého, použijte horní hranice rozsahů. Materiál: ocel 12 060.**



Ze strojnických tabulek str. 52

a str. 54

$$R_m = 600 \div 850 \text{ MPa} \quad (850)$$

$$\sigma_{0C} = 215 \div 295 \text{ MPa} \quad (295)$$

$$\tau_{KC} = 150 \div 210 \text{ MPa} \quad (210)$$

$$\frac{R}{d} = 0,1 \rightarrow$$

$$\text{vrubový součinitel } \beta_O = 1,7; \beta_K = 1,2$$

$$\text{součinitel velikosti } \varepsilon_{mO} = 0,83; \varepsilon_{mK} = 0,75$$

$$\text{součinitel stavu povrchu } \varepsilon_p = 0,8$$

Pak skutečná mez únavy:

$$\sigma_{0Cskut} = \frac{\sigma_{0c} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta_0} = \frac{295 \cdot 0,83 \cdot 0,8}{1,7} = 115 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Kcskut} = \frac{\tau_{Kc} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta_K} = \frac{210 \cdot 0,75 \cdot 0,8}{1,2} = 105 \text{ MPa}$$

## 9 Kinematika

Kinematika je věda o pohybu těles. Určuje průběh pohybu (dráhu, rychlosť, zrychlení) v prostoru a čase.

Základní veličiny kinematiky:

**dráha – s [m];**

**rychllosť – v [m/s];**

**zrychlení – a [m/s<sup>2</sup>];**

**čas – t [s].**

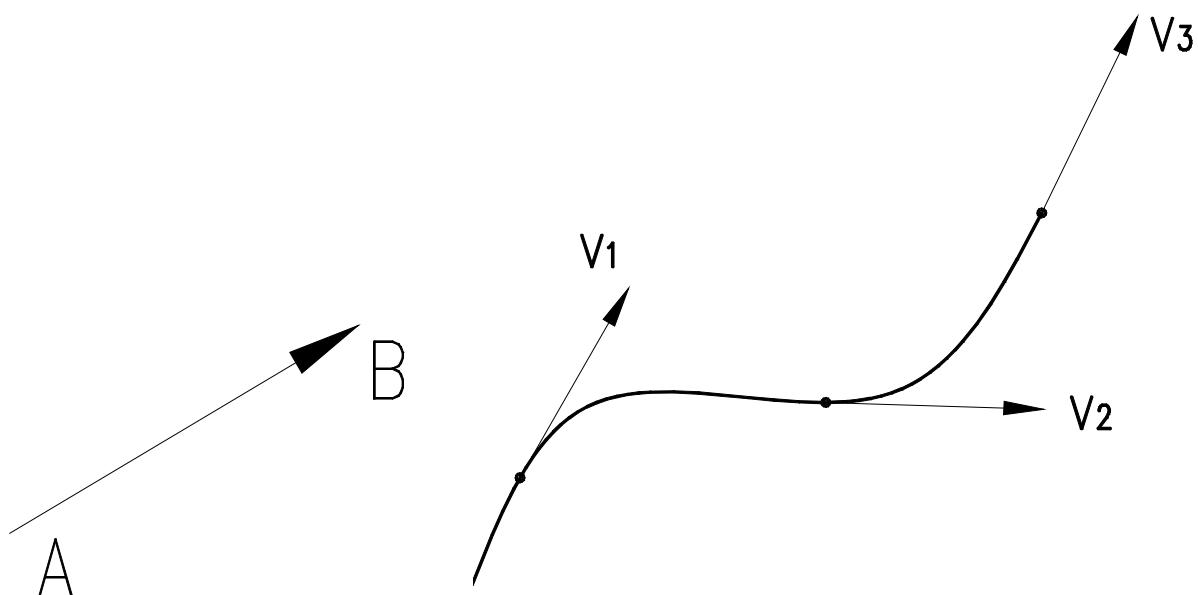
Rychlosť je dráha ujetá za jednotku času:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Zrychlení je změna rychlosti za jednotku času. Vzniká, i když se mění směr rychlosti:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

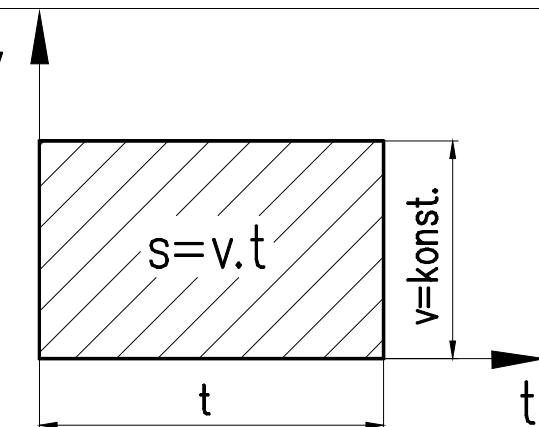
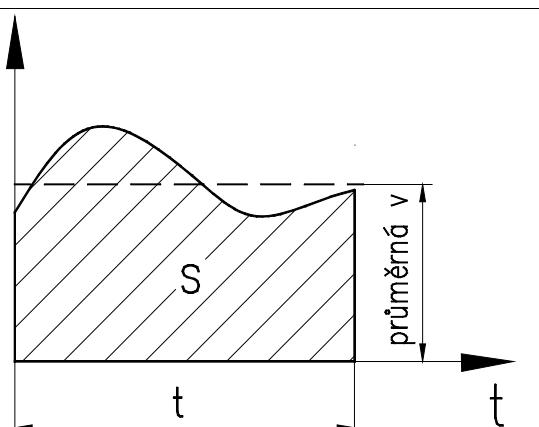
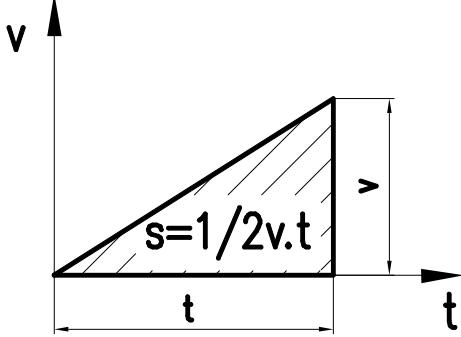
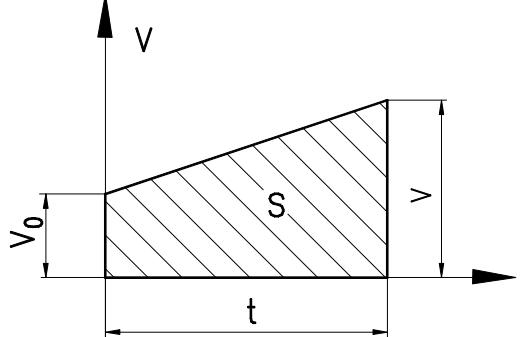
Podle tvaru dráhy dělíme pohyby na přímočaré a křivočaré.





## 9.1 Přímočaré pohyby

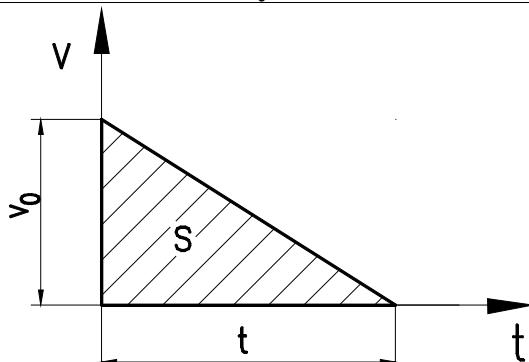
Jsou to pohyby konané po přímce. Pro znázorňování těchto pohybů často používáme diagramy v–t nebo s–t, případně a–t.

v–t diagramy: plocha pod křivkou je dráha.	
<b>Rovnoměrný pohyb.</b>  $s = v \cdot t$ $v = \frac{s}{t}$ $a = 0$	<b>Obecný pohyb.</b>  $s$ $\text{průměrná } v$
<b>Pohyb rovnoměrně zrychlený.</b>	
<b>Počáteční rychlosť <math>v_0 = 0</math></b>  $s = \frac{1}{2} v \cdot t$ $v = \frac{2s}{t}$ $a \neq 0$	<b>Počáteční rychlosť <math>v_0 \neq 0</math></b>  $s = \frac{v_0 + v}{2} t$ $a \neq 0$ $v = \frac{2s}{t} - v_0$



### Pohyb rovnoměrně zpožděný.

**Konečná rychlosť  $v = 0$**

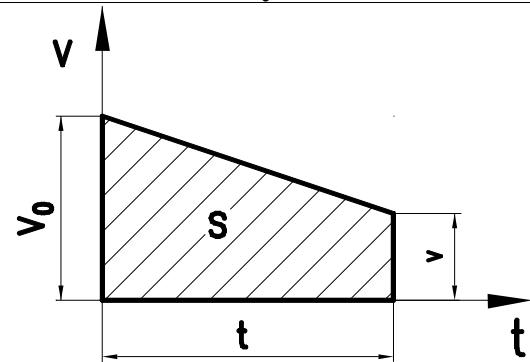


$$s = \frac{1}{2} v_0 \cdot t$$

$$a \neq 0$$

$$v_0 = \frac{2 \cdot s}{t}$$

**Konečná rychlosť  $v \neq 0$**

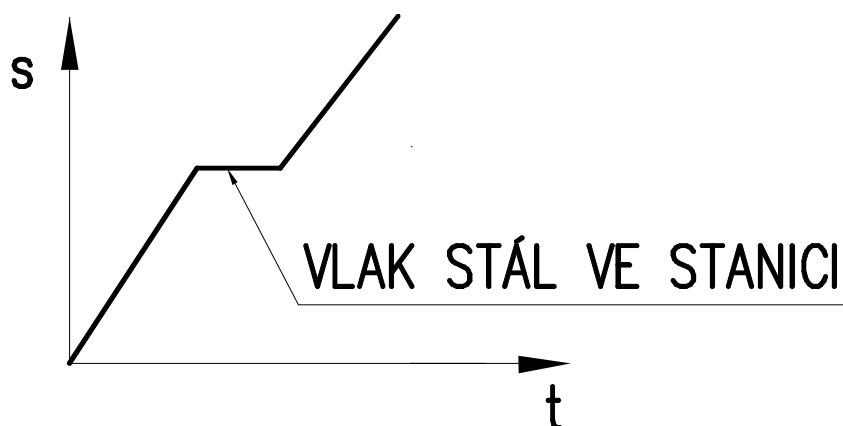


$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

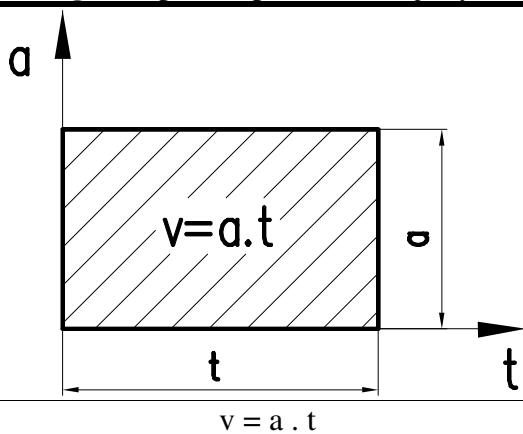
$$a \neq 0$$

$$v = \frac{2 \cdot s}{t} - v_0$$

**s-t diagram:** používá se pro grafické řešení úloh typu kde a kdy se potkají dvě auta. Těchto diagramů se využívá na železnici.



**a-t diagram:** plocha pod křivkou je rychlosť.



$$v = a \cdot t$$

## 9.2 Přímočarý rovnoměrný pohyb – příklady

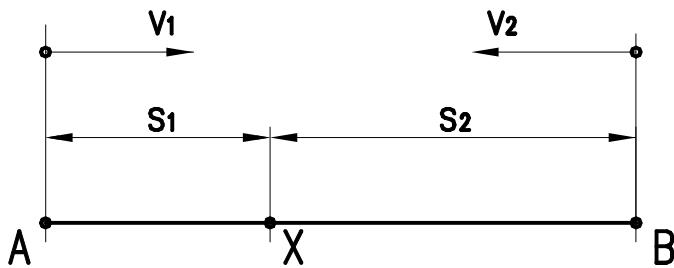
$$s = v \cdot t$$

$$a = 0$$

**Př.:** Za jak dlouho ujede auto dráhu 33km, jede-li rychlostí  $70 \text{ km/h}$ .

$$t = \frac{s}{v} = \frac{33}{70} = 0,47 \text{ h} = 0,47 \cdot 60 \text{ min} = 28 \text{ min}$$

**Př.:** Z míst A, B, vzdálených od sebe 20 km, jedou proti sobě 2 auta. Auto 1 rychlostí  $40 \text{ km/h}$ , auto 2 rychlostí  $100 \text{ km/h}$ . Kdy a kde se potkají?



$$t_1 = t_2$$

$$s_2 = s - s_1$$

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s - s_1}{v_2}$$

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s - s_1}{v_2}$$

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{v_2} - \frac{s_1}{v_2}$$

$$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_1}{v_2} = \frac{s}{v_2}$$

$$s_1 \cdot \left( \frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2} \right) = \frac{s}{v_2}$$

$$s_1 = \frac{s}{v_2} \cdot \frac{1}{\frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2}}$$

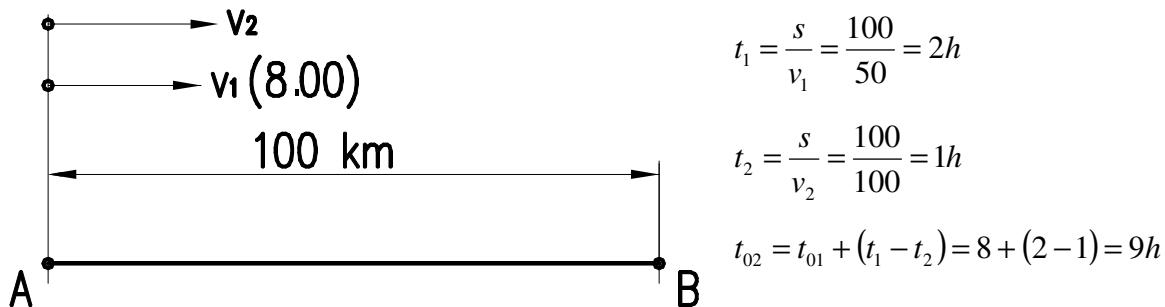


$$s_1 = \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{\frac{100+40}{40 \cdot 100}} = 5,71 \text{ km}$$

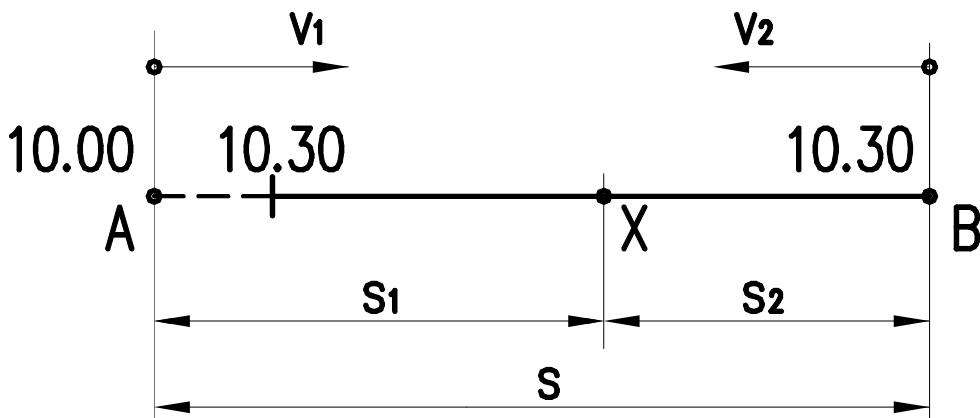
$$s_2 = s - s_1 = 20 - 5,71 = 14,29 \text{ km}$$

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{14,29}{100} = 0,14 \text{ h} \doteq 9 \text{ min}$$

**Př.:** Místo A je vzdáleno 100 km od místa B. Auto 1 jede rychlostí 50 km/h, auto 2 100 km/h. Auto 1 vyjede z místa A v  $t_{01} = 8.00$  hod. V kolik hodin  $t_{02}$  musí vyjet auto 2, mají-li dojet do místa B současně?



**Př.:** Dvě města jsou od sebe vzdálena 200 km. Z města A vyjel v 10.00 hod. osobní vlak rychlostí 50 km/h. Z města B vyjel v 10.30 hod. rychlík rychlostí 80 km/h. Za kolik hodin od vyjetí osobního vlaku se oba vlaky potkají a v jaké vzdálenosti od A.



$$s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot (t - 0,5) = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t - 0,5 \cdot v_2$$

$$s = t \cdot (v_1 + v_2) - 0,5 \cdot v_2$$

$$t = \frac{s + 0,5 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{200 + 0,5 \cdot 80}{50 + 80} = 1,85 \text{ h} = 1 \text{ h } 51'$$

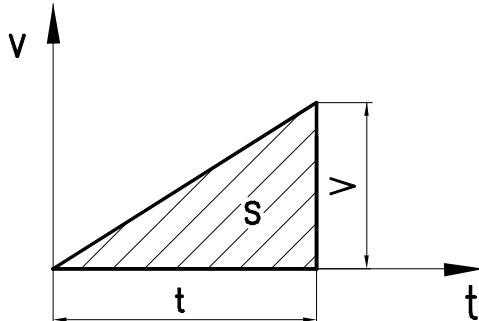
$$s_1 = v_1 \cdot t = 50 \cdot 1,85 = 92,3 \text{ km od A}$$



### 9.3 Rovnoměrně zrychlený a zpožděný přímočarý pohyb

#### Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb.

##### S nulovou počáteční rychlostí.

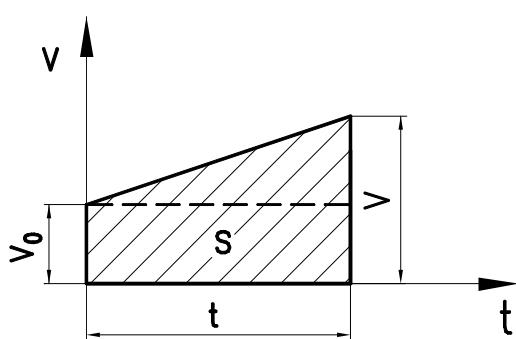


$$a = \text{konst.}$$

$$v = a \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

##### S nenulovou počáteční rychlostí.



$$v = v_0 + a \cdot t$$

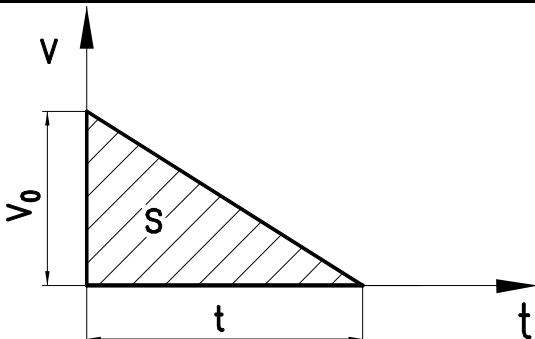
$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} (v - v_0) \cdot t$$

#### Rovnoměrně zpožděný přímočarý pohyb.

##### Na nulovou rychlosť.



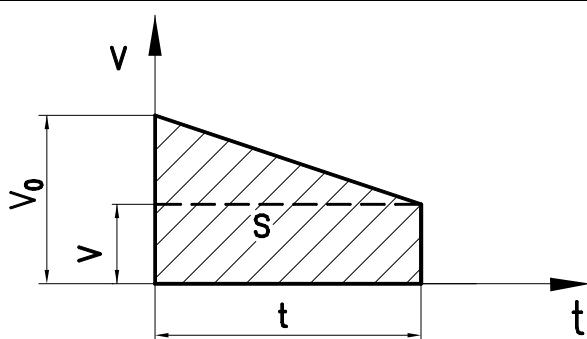
$$a = \text{konst.}$$

$$s = \frac{1}{2} v_0 \cdot t$$

$$v_0 = a \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

##### Na nenulovou rychlosť.



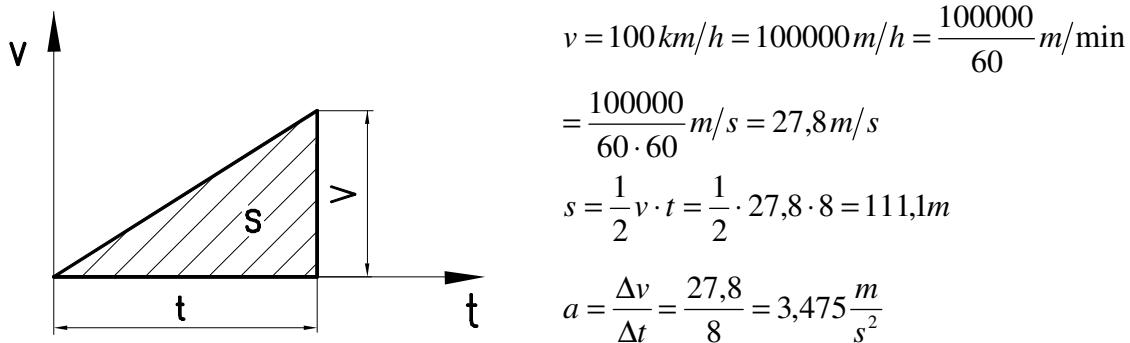
$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

$$v = v_0 - a \cdot t$$

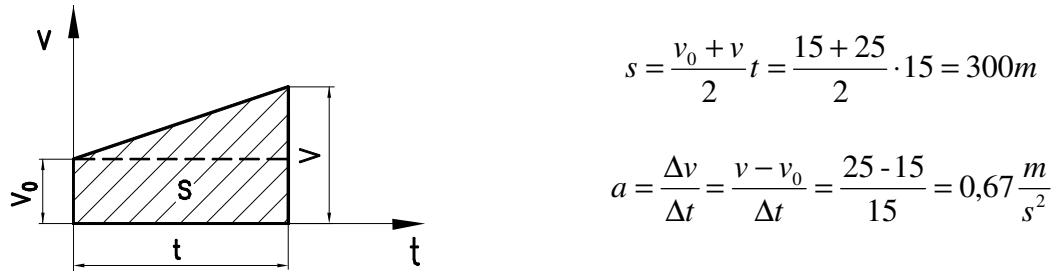
$$a = \frac{v}{t}$$

$$a = \frac{v_0 - v}{t}$$

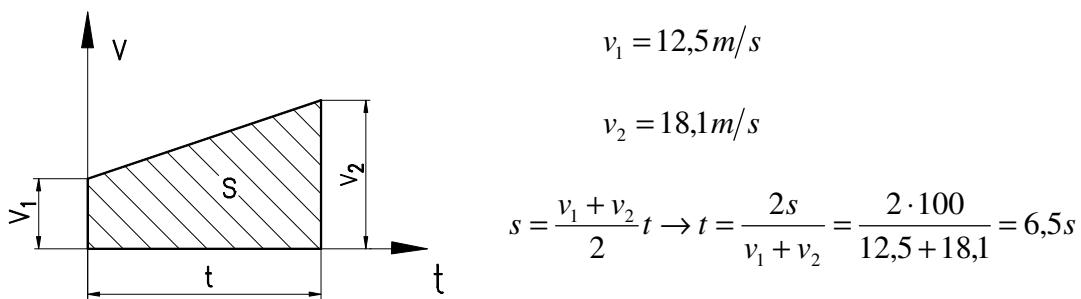
**Př.:** U auta se uvádí, že na rychlosť  $100 \text{ km/h}$  se rozjede za  $8 \text{ s}$ . Jakou dráhu ujede a jaké je zrychlení?



**Př.:** Auto jede rychlosť  $v_0 = 54 \text{ km/hod}$ . Během  $15 \text{ s}$ . zvýší tuto rychlosť na  $v = 90 \text{ km/hod}$ . Jakou dráhu při tom ujede a jaké bylo jeho zrychlení,  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ ,  $v = 25 \text{ m/s}$ .

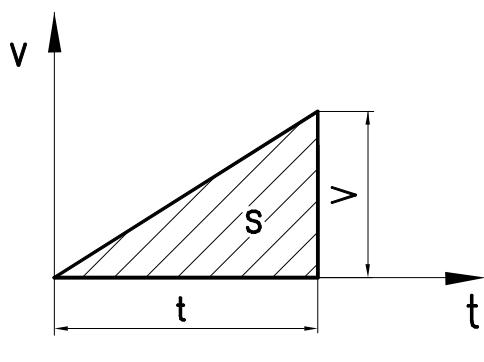
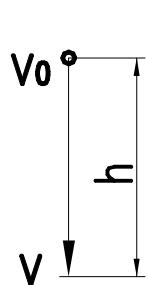


**Př.:** Auto mělo ve dvou místech vzdálených  $100 \text{ m}$  rychlosť  $v_1 = 45 \text{ km/h}$  a  $v_2 = 65 \text{ km/h}$ . Za jakou dobu ujelo tuto vzdálenost?



## 9.4 Volný pád

Je to rovnoměrně zrychlený pohyb, kde zrychlení má hodnotu  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  – tzv. těžové zrychlení.



Hloubka pádu:

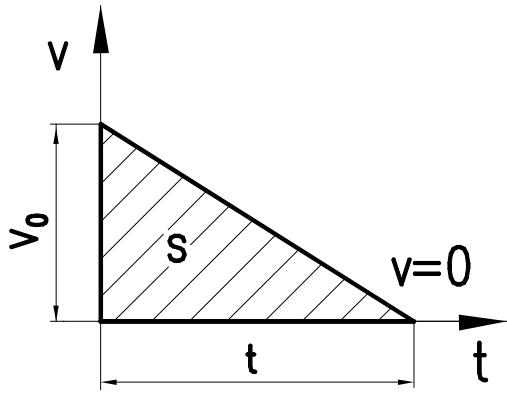
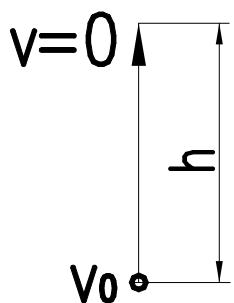
$$s = h = \frac{1}{2} v \cdot t$$

$$a = g = \frac{v}{t} \rightarrow v = g \cdot t$$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

## 9.5 Svislý vrh

Je to rovnoměrně zpomalený (zpožděný) pohyb, kde zpomalení má hodnotu  $g$ .



Výška vrhu:

$$s = h = \frac{1}{2} v_0 \cdot t$$

$$a = g = \frac{v_0}{t} \rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t$$

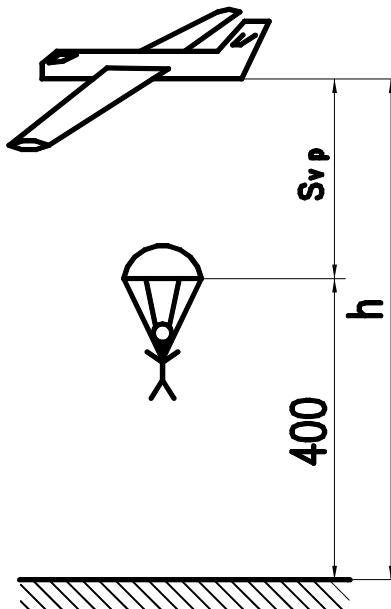
$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

**Př.:** Do propasti hluboké 138 m padá kámen. Za jak dlouho dopadne a jakou rychlosťí dopadne na dno propasti?

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 138}{9,81}} = 5,3 \text{ s}$$

$$v = g \cdot t = 9,81 \cdot 5,3 = 52 \text{ m/s}$$

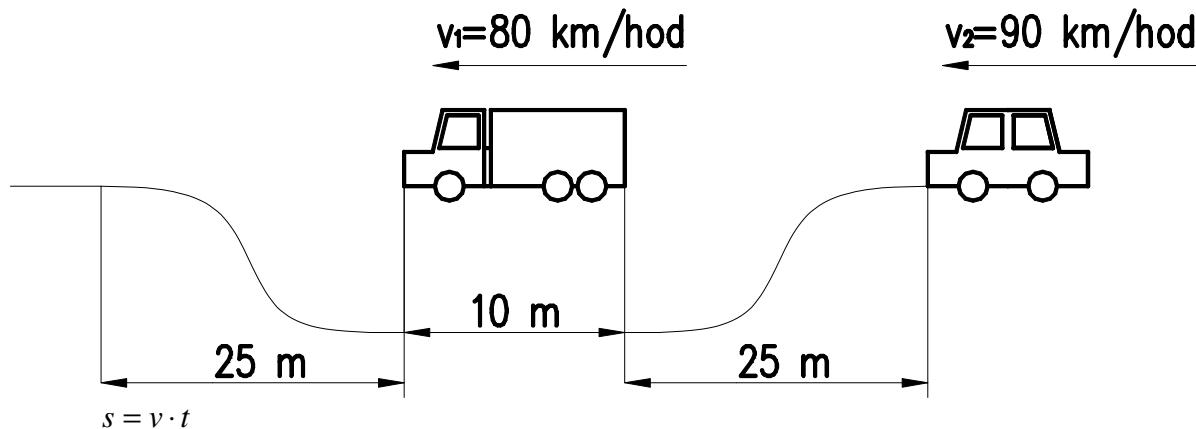
**Př.**: Z letadla vyskočí parašutista, který po dobu 20 s padá volným pádem. Pak ve výšce 400 m nad zemí otevře padák. Jak vysoko bylo letadlo?



$$s_{vp} = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 20^2 = 1962 \text{ m}$$

$$h = s_{vp} + 400 = 1962 + 400 = 2362 \text{ m}$$

**Př.**: Přejíždění vozidel: Na jaké dráze a za jak dlouho dojde k předjetí? Na přejetí a zařazení potřebuje auto 50 m.



$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$v_1 = \frac{80000}{3600} = 22,2 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{90000}{3600} = 25 \text{ m/s}$$

nákladní auto

dráha s

osobní auto

$s + 60$  ( $60 \text{ m} = 25 \text{ m} + 25 \text{ m} + 10 \text{ m}$ )

čas stejný

t

$$t = \frac{s}{v_1} = \frac{s + 60}{v_2}$$

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} + \frac{60}{v_2}$$

$$\frac{s}{v_1} - \frac{s}{v_2} = \frac{60}{v_2}$$

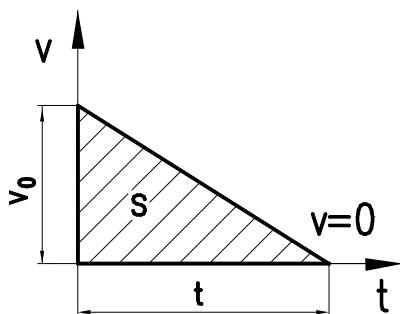
$$s \cdot \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{60}{v_2}$$

$$s = \frac{60}{v_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}} = \frac{60}{25} \cdot \frac{1}{\frac{1}{22,2} - \frac{1}{25}} = 475,7 \text{ m} \quad (\text{také je možno: } s = \frac{60 \cdot v_1}{v_2 - v_1})$$

$$t = \frac{s}{v_1} = \frac{475,7}{22,2} = 21,4 \text{ s}$$

$$\text{také je možno: } t = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s + 60 \text{ m}}{v_2}$$

**Př.**: Protiletadlovým dělem byl vystřelen svisle vzhůru náboj rychlostí  $800 \text{ m/s}$ . Jak dlouho bude střela stoupat a do jaké výšky se dostane?



$$h = \frac{1}{2} v_0 \cdot t$$

$$g = \frac{v_0}{t} \rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{800^2}{9,81} \doteq 32620 \text{ m}$$

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{800}{9,81} = 81,5 \text{ s}$$

**Př.**: Do jaké výšky vyletí tenisový míček, který byl odpálen 1 m od země rychlostí  $15\text{ m/s}$ ?

$$\text{Let: } h_{letu} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15^2}{9,81} = 11,5\text{ m}$$

$$\text{Celková: } h_{celková} = h_0 + h_{letu} = 1 + 11,5 = 12,5\text{ m}$$

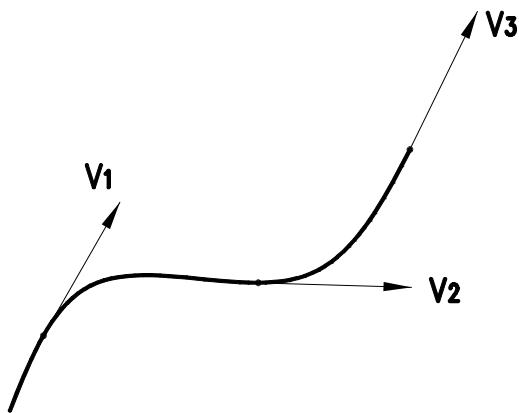
## 9.6 Křivočaré pohyby

### 9.6.1 Obecný rovnoměrný křivočarý pohyb

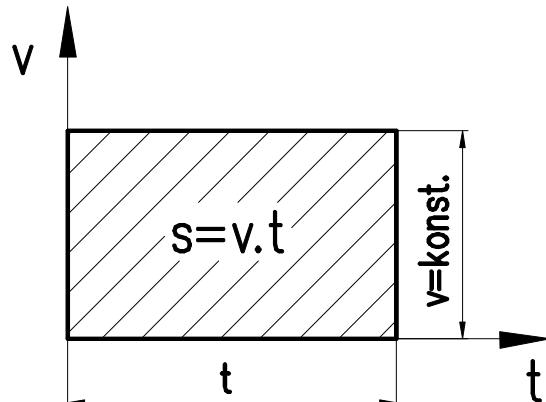
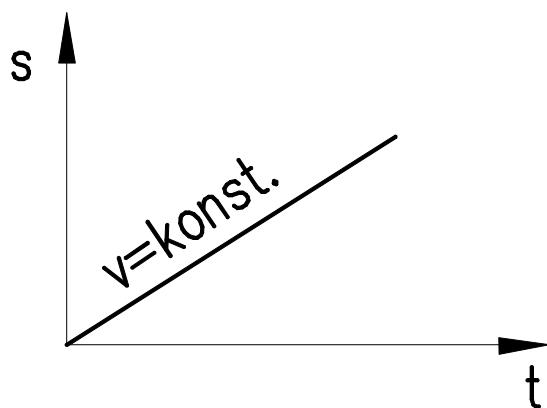
Dráha má tvar obecné křivky. Velikost rychlosti je konstantní.

$$v = \frac{s}{t} = \text{konst.}$$

Směr rychlosti má směr tečny k dráze pohybu.



V diagramech tento pohyb znázorňujeme stejně jako rovnoměrný přímočarý pohyb, protože diagramy nezobrazují tvar dráhy.

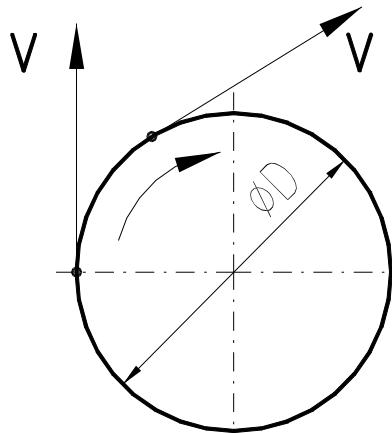


V praxi pohyb auta, vlaku ...

### 9.6.2 Rovnoměrný pohyb bodu po kružnici

Dráha bodu je kružnice, směr rychlosti je vždy tečný k dráze, rychlosť je vždy konstantní.

Pohyb probíhá po obvodu kružnice, proto se rychlosť nazývá obvodová.



Za jednu otáčku vykoná bod dráhu:

$$s_1 = \pi \cdot D$$

za n otáček

$$s = \pi \cdot D \cdot n$$

$$v = \frac{s}{t} - \text{za 1 sekundu } v = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1} = \pi \cdot D \cdot n$$

$$v = \pi \cdot D \cdot n, D[m], n\left[\frac{1}{s}\right], n - \text{otáčky za sekundu}$$

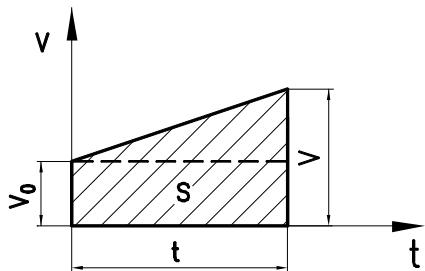
**Př.:** Automobil má kola průměru 620 mm. Jak rychle se kola otáčejí při rychlosti automobilu 75 km/h?

$$75 \text{ km/h} = 20,8 \text{ m/s}$$

$$n = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{20,8}{\pi \cdot 0,62} = 10,7 \frac{\text{ot}}{\text{s}}$$

**Př.:** Vozidlo se pohybuje rovnoměrně zrychleně  $a = 1,5 \text{ m/s}^2$ . Po ujetí dráhy 60 m byla jeho rychlosť 15 m/s. Jaká byla počáteční rychlosť?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$$



$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v) \cdot t \rightarrow t = \frac{2s}{v + v_0}$$

$$a = \frac{(v - v_0) \cdot (v + v_0)}{2s} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$v_0^2 = v^2 - 2as$$

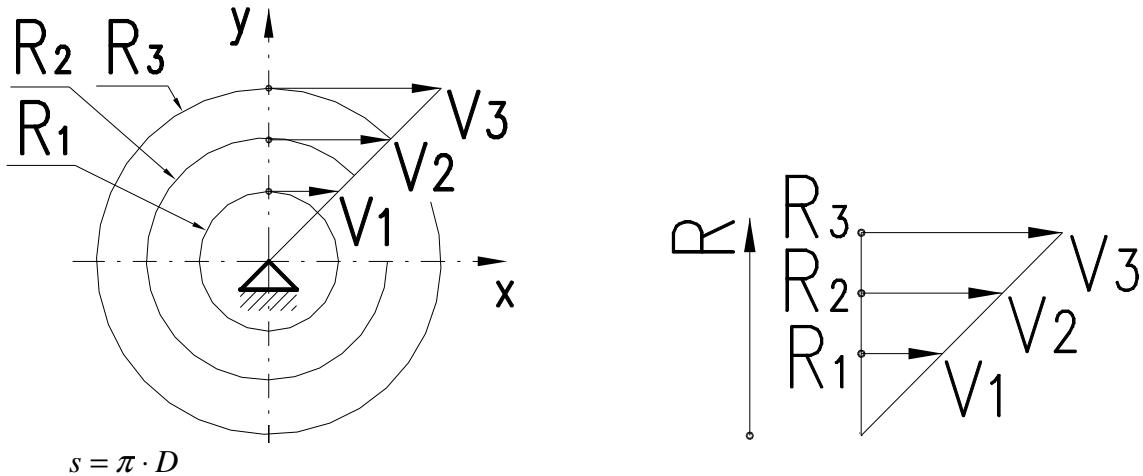
$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2as} = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 60} = 6,7 \text{ m/s}$$

**Př.:** Parní turbína koná 60 otáček za sekundu. Vnější průměr lopatek je 960 mm. Jaká je obvodová rychlosť na výstupu z turbíny?

$$v = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 0,96 \cdot 60 = 181 \text{ m/s}$$

## 9.7 Rovnoměrný rotační pohyb těles kolem stálé osy

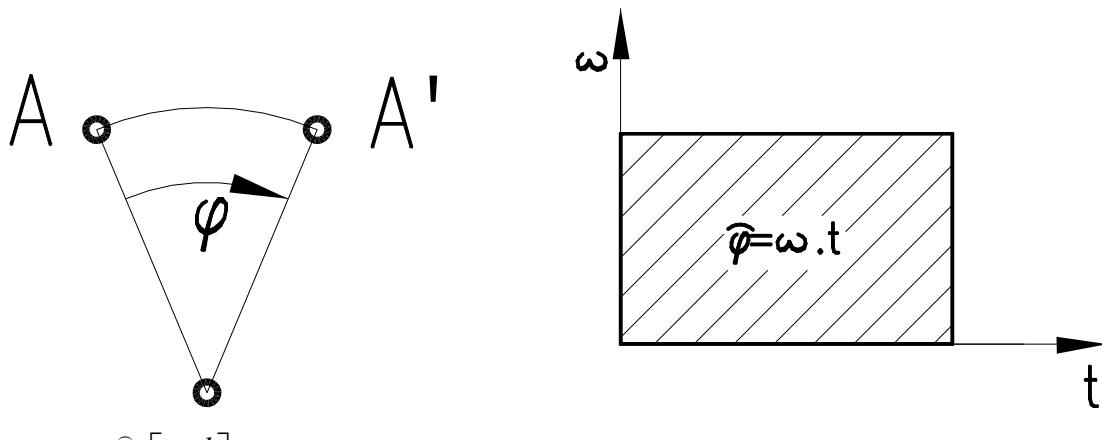
Každý bod tělesa se pohybuje po soustředné kružnici, koná tedy rovnoměrný pohyb bodu po kružnici.



Dráhy, obvodové rychlosti jsou přímo úměrné vzdálenosti bodu od osy rotace

$$s_1 : s_2 : s_3 = v_1 : v_2 : v_3 = R_1 : R_2 : R_3$$

Zavádí se pojem úhlová rychlosť  $\omega$ , která je stejná pro všechny body tělesa. Je to vlastně pootočení tělesa za jednotku času.



$$\omega = \frac{\dot{\varphi}}{t} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$s = R \cdot \dot{\varphi}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{R \cdot \dot{\varphi}}{t} = R \cdot \omega$$

$$v = R \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{R} = \frac{\pi \cdot 2R \cdot n}{R} = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$\boxed{\omega = 2 \cdot \pi \cdot n}$$

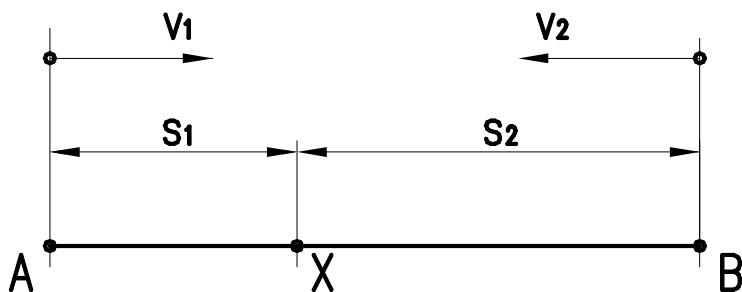
$$n - \text{otáčky} \left[ \frac{1}{\text{s}} \right]$$

**Př.**: Setrvačník průměru 300 mm má  $100 \frac{ot}{s}$ . Jaká je jeho obvodová a úhlová rychlosť?

$$v = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 0,3 \cdot 100 = 94,2 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 628 \text{ rad/s}$$

**Př.**: Z místa A do místa B, vzdálených od sebe  $s = 20 \text{ km}$ , vyjel v 9:00 hod. cyklista rychlosťí  $v_1 = 20 \text{ km/h} = 0,33 \text{ km/min}$ . V 9:20 hod. vyjel z místa B motocyklista rychlosťí  $v_2 = 54 \text{ km/h} = 0,9 \text{ km/min}$ . Kdy se setkají a v jaké vzdálenosti od místa A?



$$s = s_1 + s_2$$

$$s_1 = v_1 \cdot t$$

$$s_2 = v_2 \cdot (t - 20)$$

$$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot (t - 20) = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t - 20 \cdot v_2 = t \cdot (v_1 + v_2) - 20 \cdot v_2$$

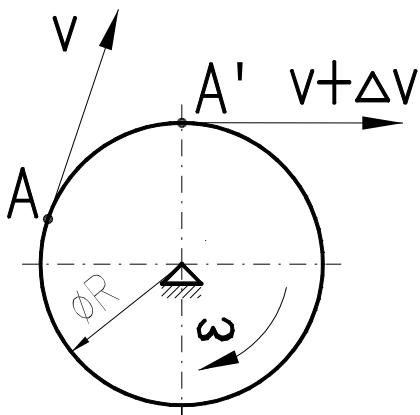
$$t = \frac{s + 20 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{20 + 20 \cdot 0,9}{0,33 + 0,9} \doteq 31 \text{ min}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 0,33 \cdot 31 = 10,23 \text{ km}$$

$$s_2 = s - s_1$$

## 9.8 Rovnoměrně zrychlený rotační pohyb

V závislosti na čase dochází k přírůstku rychlosti. Tento přírůstek způsobuje zrychlení, které má směr rychlosti, tedy tečny ke dráze (kružnici). Říkáme mu tečné zrychlení.

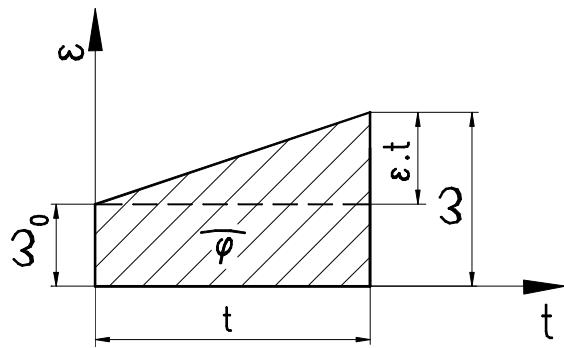


$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{konst}$$

Tečné zrychlení tedy odpovídá změně velikosti obvodové rychlosti.

$$v = R \cdot \omega$$

Mění-li se obvodová rychlosť jednoho bodu, musí se měnit i jeho úhlová rychlosť. Pak platí:



$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta \omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\varepsilon - \text{úhlové zrychlení} \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

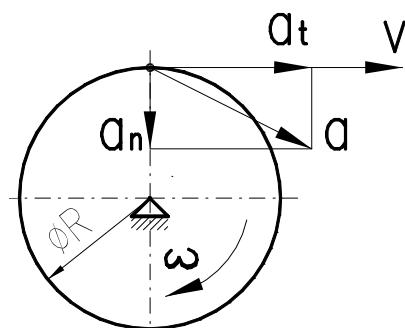
Dráha (úhlová)

$$\bar{\varphi} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

Protože se u rotačního pohybu mění i směr rychlosti, existuje i normálové, neboli dostředivé zrychlení  $a_n$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$



$$a_n = R \cdot \omega^2$$

pro  $R = \infty$  je  $a_n = 0$  (přímka)

Zrychlení skládáme vektorově jako síly.

Výsledné zrychlení:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Dostředivé zrychlení odpovídá změně směru rychlosti, tečné změně velikosti rychlosti.

**Př.: Setrvačník o průměru 3 m se roztáčí rovnoměrně zrychleně tak, že za 10 s vzroste obvodová rychlosť z  $10 \text{ m/s}$  na  $27 \text{ m/s}$ . Vypočtěte úhlovou rychlosť a všechna zrychlení.**

$$v = R \cdot \omega \rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{10}{1,5} = 6,6 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{27}{1,5} = 18 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{18 - 6,6}{10} = 1,14 \text{ rad/s}^2$$

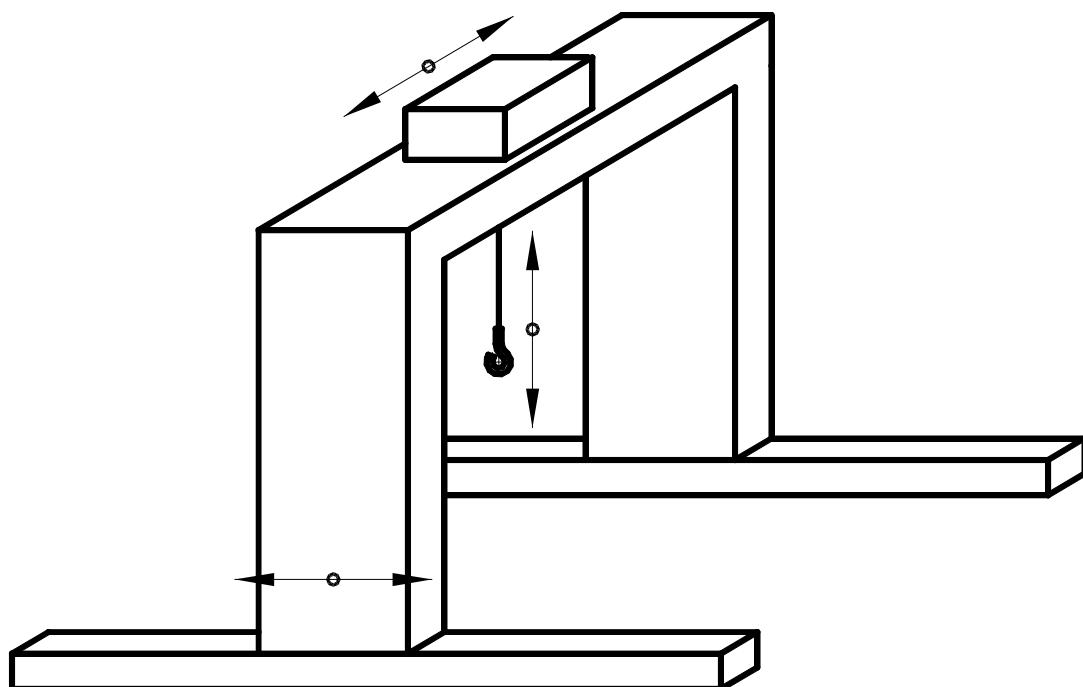
$$a_t = R \cdot \varepsilon = 1,5 \cdot 1,14 = 1,71 \text{ m/s}^2$$

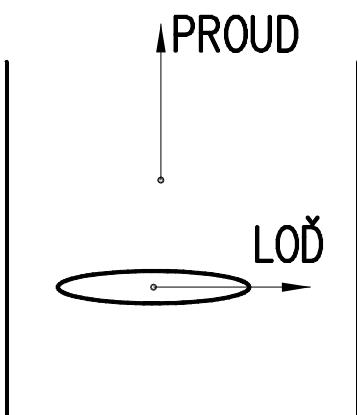
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{27^2}{1,5} = 486 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 486 \text{ m/s}^2$$

## 9.9 Skládání pohybů

V praxi se často setkáváme s případy, kdy těleso nebo bod koná dva i více pohybů. Výsledný pohyb je pak pohyb složený. Např. pohyb loďky napříč řekou, pohyb břemene mostového jeřábu (pohyb mostu  $\leftrightarrow$ , kočky, háku  $\updownarrow$ )





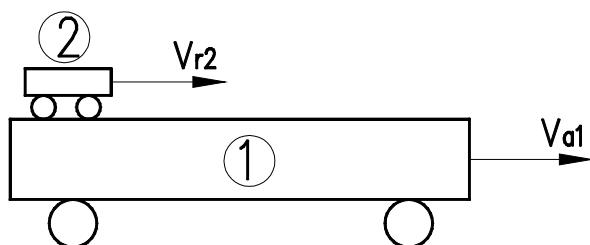
Pro rozlišení jednotlivých pohybů zavádíme pojmy:

**Pohyb absolutní:** je to pohyb, který se jeví pozorovateli z nehybného místa na zemi.

**Pohyb relativní:** pohyb, který se jeví pozorovateli z místa, které se taky pohybuje.

## 9.10 Pohyb ve dvou rovnoběžných přímkách

Rychlosti a dráhy sčítáme nebo odečítáme.



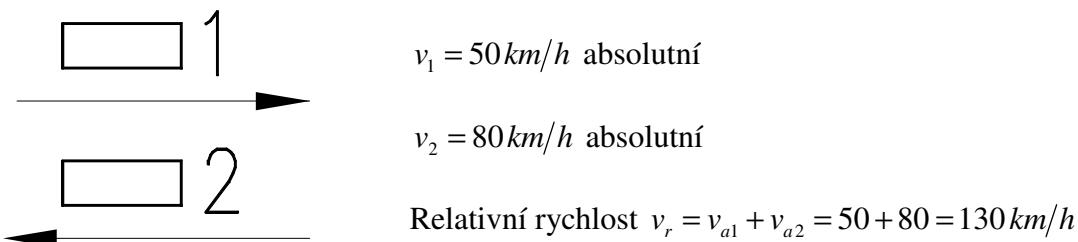
$$\text{Absolutní dráha vozíku 1 za čas } t \quad s_{a1} = v_{a1} \cdot t$$

$$\text{Relativní dráha vozíku 2 za čas } t \quad s_{r2} = v_{r2} \cdot t$$

$$\text{Absolutní dráha vozíku 2 za čas } t \quad s_{a2} = s_{a1} + s_{r2} = (v_{a1} + v_{r2}) \cdot t$$

$$\text{Absolutní rychlosť vozíku 2} \quad v_{a2} = v_{a1} + v_{r2}$$

**Př.:** Míjejí se dva vlaky



## 9.11 Pohyb v různoběžných přímkách

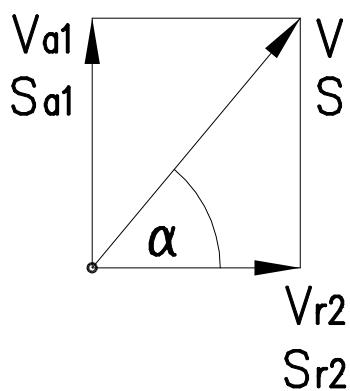
Dráhy a rychlosti skládáme vektorově jako síly, bud' graficky nebo početně (Pythagorova, Cosinova věta).



Např.: převozník přes řeku:

Rychlosti svírají pravý úhel.	Rychlosti svírají obecný úhel.
<b>PROUD</b>  <b>LOD</b>	<b>PROUD</b>  <b>LOD</b>
Pythagorova věta: $v = v_{a2} = \sqrt{v_{a1}^2 + v_{r2}^2}$ $\tan \alpha = \frac{v_{a1}}{v_{r2}} = \frac{s_{a1}}{s_{r2}}$ $s = \sqrt{s_{a1}^2 + s_{r2}^2}$	Cosinova věta: $v = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a \cdot v_r \cdot \cos \beta}$ Sinova věta: $\sin \alpha : \sin \beta = v_a : v$

Př.: Řeka je široká 200 m a lod' pluje kolmo ke směru proudu rychlostí  $v_r = 18 \text{ km/hod.} = 5 \text{ m/s}$ . Rychlosť proudu řeky je  $v_a = 1 \text{ m/s}$ . Určete výslednou dráhu a výslednou rychlosť lodi a dobu plavby.



Doba plavby lodi bez vlivu proudu (relativní):

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t_r = \frac{s_r}{v_r} = \frac{200}{5} = 40 \text{ s}$$

Absolutní dráha proudu řeky za tuto dobu:

$$s_a = v_a \cdot t = 1 \cdot 40 = 40 \text{ m}$$

Výsledná dráha lodi:

$$s = \sqrt{s_a^2 + s_r^2} = \sqrt{40^2 + 200^2} \doteq 204 \text{ m}$$

Výsledná rychlosť:

$$v = \sqrt{v_a^2 + v_r^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = 5,1 \text{ m/s}$$

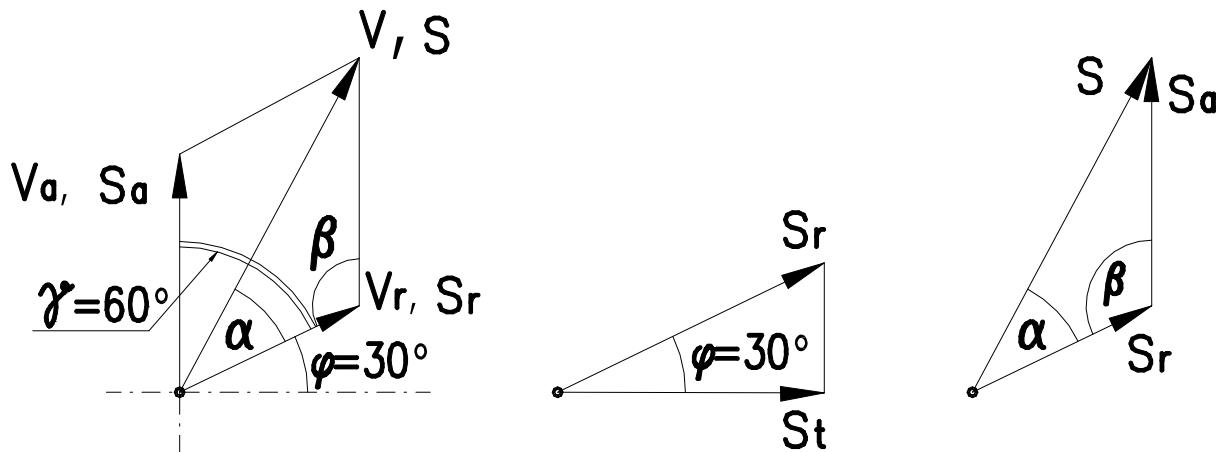
Čas plavby lodi:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{204}{5,1} = 40 \text{ s}$$

Odchylka výsledné dráhy:

$$\tan \alpha = \frac{s_a}{s_r} = \frac{40}{200} = 0,2 \rightarrow \alpha = 11^\circ 20'$$

Př.: To samé jen od příčného směru je odklon  $\varphi = 30^\circ$ ,  $v_r = 5 \text{ m/s}$ ,  $v_a = 1 \text{ m/s}$ , šířka toku  $s_t = 200 \text{ m}$ .



$$\cos 30^\circ = \frac{s_t}{s_r} \rightarrow s_r = \frac{s_t}{\cos 30^\circ} = \frac{200}{\cos 30^\circ} = 231 \text{ m}$$

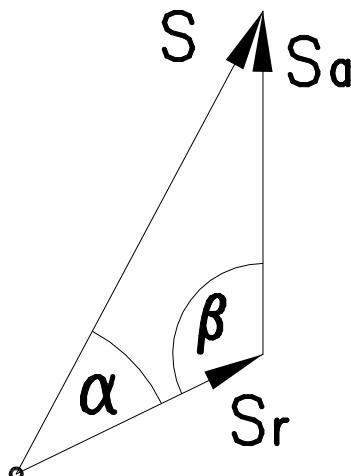
$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s_r}{v_r} = \frac{231}{5} = 46,2 \text{ s}$$

$$s_a = v_a \cdot t = 1 \cdot 46,2 = 46,2 \text{ m}$$

$$s = \sqrt{s_a^2 + s_r^2 - 2s_a \cdot s_r \cdot \cos \beta} = \sqrt{46,2^2 + 231^2 - 2 \cdot 46,2 \cdot 231 \cdot \cos 120^\circ} \doteq 257,2 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a \cdot v_r \cdot \cos \beta} = \sqrt{1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} = 5,56 \text{ m/s}$$

Odchylka výsledné dráhy:



Sinova věta:

$$\sin \alpha / \sin \beta = s_a / s$$

$$\frac{s_a}{\sin \alpha} = \frac{s}{\sin \beta}$$

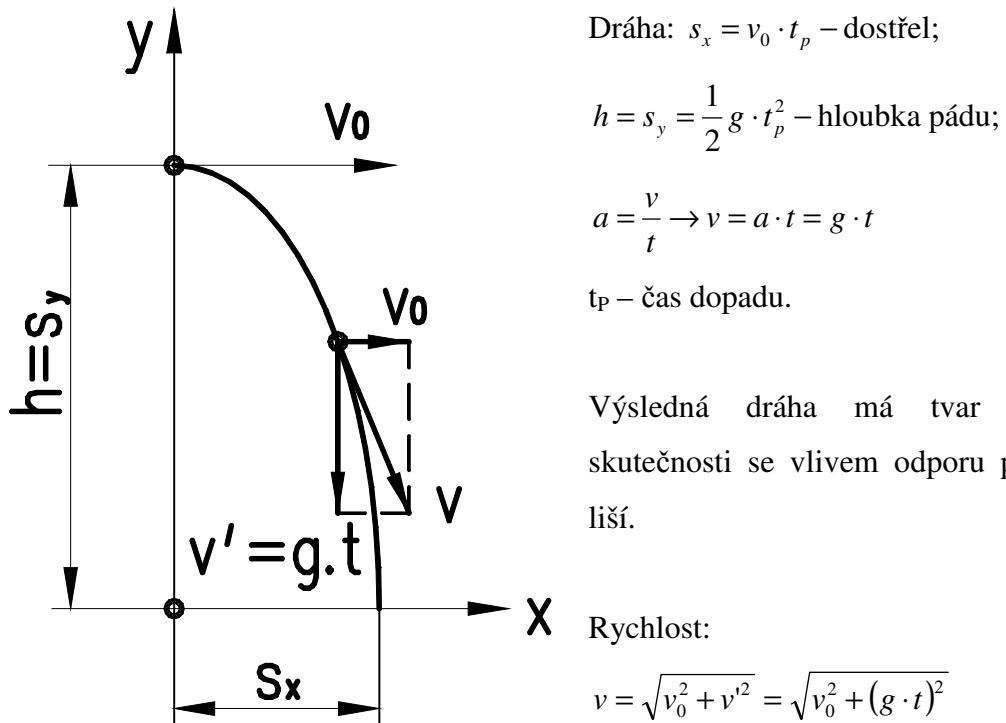
$$\sin \alpha = \frac{s_a}{s} \cdot \sin \beta = \frac{46,2}{257,2} \cdot \sin 120^\circ = 0,156 \rightarrow \alpha = 8,95^\circ$$

Od příčného směru bude odkloněna o:  $30^\circ + 8,95^\circ = 39^\circ$

## 9.12 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh se skládá ze dvou pohybů, které jsou vzájemně kolmé.

- Přímočarý rovnoměrný vodorovný pohyb se stálou rychlosí  $v_0$  (rovnoměrný pohyb).
- Volný pád ve světlém směru se stálým těžovým zrychlením  $g$  (rovnoměrně zrychlený pohyb).



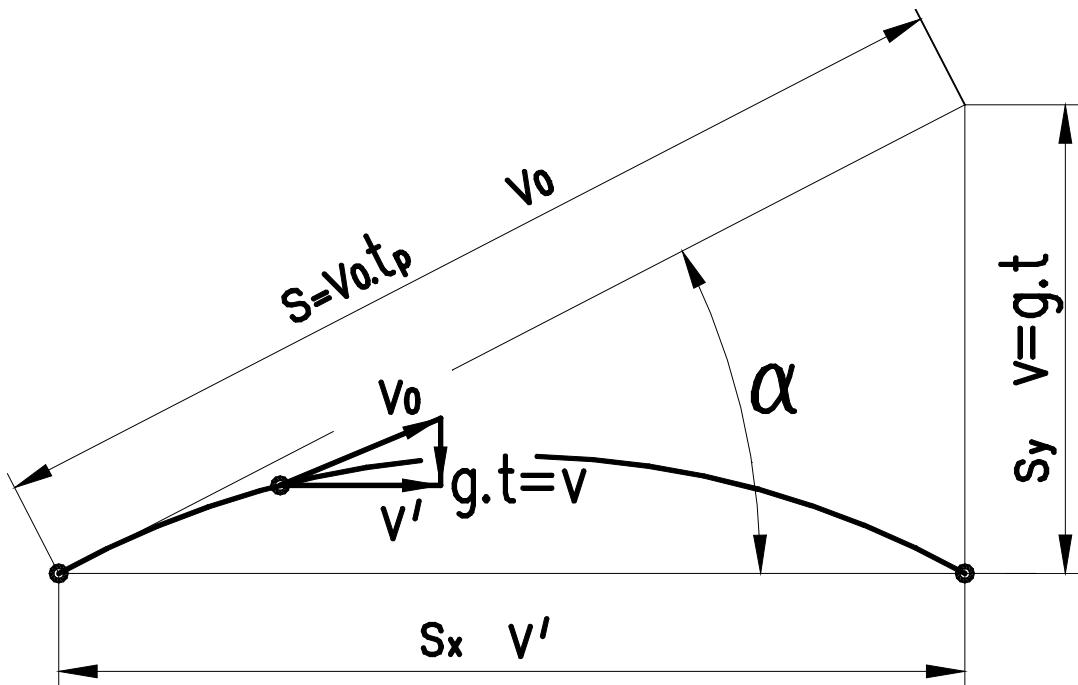
**Př.:** Dělo ve výšce 200 m nad hladinou moře vystřelí vodorovně střelu rychlosí 1000 m/s. V jaké vzdálenosti dopadne střela na hladinu moře?

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{9,81}} = 6,39 \text{ s}$$

$$\text{Dostřel } s_x = v_0 \cdot t = 1000 \cdot 6,39 = 6390 \text{ m}$$

## 9.13 Šikmý vrh

Skládá se zase z přímočáreho rovnoměrného pohybu, odkloněného od vodorovné roviny o úhel  $\alpha$ , a volného pádu. Řešíme jej pomocí nezávislých pohybů, to znamená nejdříve proběhne jeden, až skončí, tak druhý. Výsledný pohyb vznikne jejich vektorovým sečtením. Dráha pohybu má tvar paraboly.



$s = v_0 \cdot t_p$  – přímočarý rovnoměrný pohyb;

$$s_x = v_0 \cdot t_p \cdot \cos \alpha$$

$$s_y = \frac{1}{2} g \cdot t_p^2 - \text{volný pád.}$$

Z trojúhelníku musí platit:

$$s_y = s \cdot \sin \alpha = v_0 \cdot t_p \cdot \sin \alpha$$

Potom:

$$s_y = s_y$$

$$\frac{1}{2} g \cdot t_p^2 = v_0 \cdot t_p \cdot \sin \alpha$$

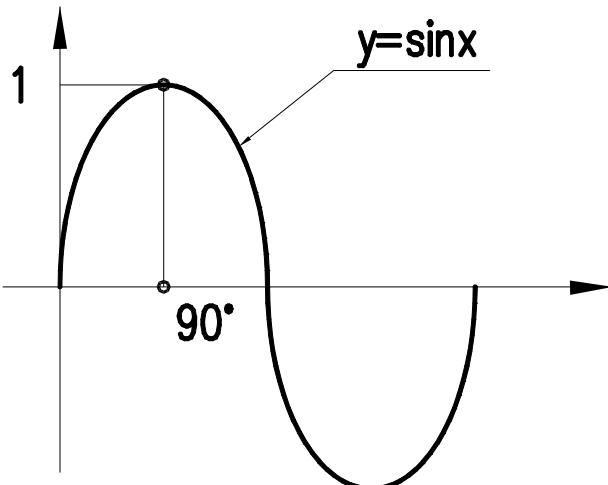
$$\text{čas pádu: } t_p = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_p$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$s_x = v_0 \cdot t_p \cdot \cos \alpha = v_0 \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \overbrace{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}^{\sin 2\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$



$\sin 90^\circ = 1 \rightarrow \text{max. dostrel bude pri uhlhu } 45^\circ.$

Př.: Střela opustila hlaveň rychlostí  $1200\text{ m/s}$  při elevačním úhlu  $45^\circ$ . Jaký je dostrel zanedbáme-li odpor vzduchu?

$$s_x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1200^2}{9,81} \cdot \sin 90^\circ = 146789\text{ m} = 147\text{ km}$$

## 9.14 Svislý vrh

Pohyb vzhůru je přímočarý rovnoměrně zpožděný a pohyb dolů přímočarý rovnoměrně zrychlený.

Dráhy:

$$\text{Pohyb vzhůru: } s_1 = v_0 \cdot t$$

$$\text{Dolů: } s_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

výsledná dráha v libovolném čase:

$$h = s_1 - s_2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Při zpětném dopadu na zem je  $h = 0$ , tedy:

$$0 = v_0 \cdot t_d - \frac{1}{2} g \cdot t_d^2$$

$$v_0 \cdot t_d = \frac{1}{2} g \cdot t_d^2$$

$$t_d = \frac{2 \cdot v_0}{g}$$

Doba výstupu je poloviční:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \rightarrow g = \frac{v_0}{t_v}$$

$$h = v_0 \cdot t_v - \frac{1}{2} g \cdot t_v^2 = v_0 \cdot t_v - \frac{1}{2} \frac{v_0}{t_v} \cdot t_v^2 = v_0 \cdot t_v - \frac{1}{2} v_0 \cdot t_v = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_v$$

Max. výška:

$$h_{\max} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_v = \frac{1}{2} g \cdot t_v^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Výsledná rychlosť:

$$v = v_0 + (-g \cdot t) = v_0 - g \cdot t$$

**Př.**: Střela vystřelená svisle vzhůru dopadla na zem za 120 s. Jak vysoko vystoupila a jaká byla počáteční rychlosť?

$$t_d = 120s, t_v = 60s$$

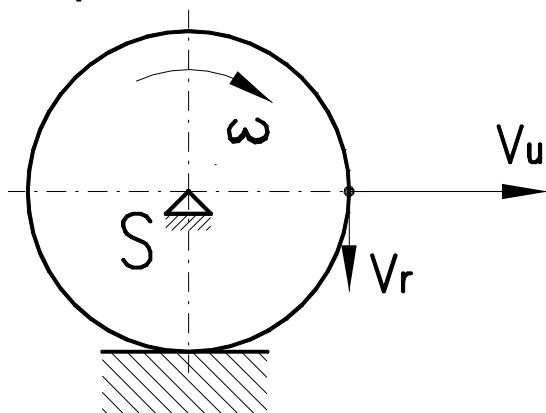
$$h_{\max} = \frac{1}{2} g \cdot t_v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 60^2 = 17658m$$

$$v_0 = t_v \cdot g = 60 \cdot 9,81 = 589 m/s$$

## 9.15 Rozkládání pohybů

Často bývá potřeba výsledný pohyb rozložit do dvou složek. Je to opačný postup ke skládání pohybů.

### 9.15.1 Valení válce po rovině

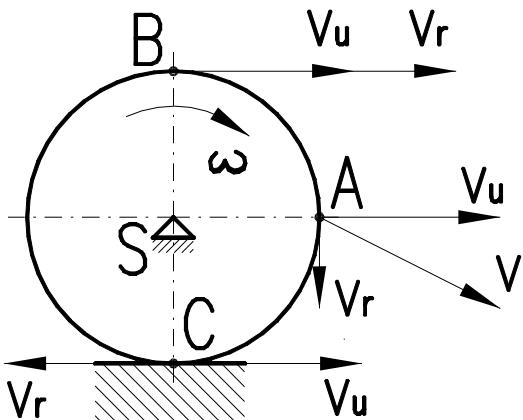


Pohyb rozdělíme na unášivý a relativní pohyb:

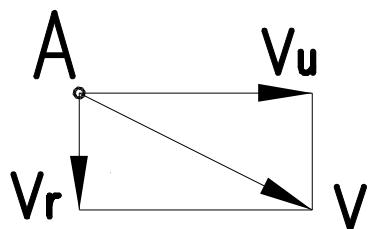
- Unášivý pohyb: těleso se pohybuje jako celek vůči pevnému okolí.
- Relativní pohyb: pohyb tělesa vůči pohyblivému dobu.



V případě valení je unášivý pohyb posuvný pohyb rychlostí  $v_u$  a relativní pohyb je otáčivý pohyb kole středu S, který se pohybuje.

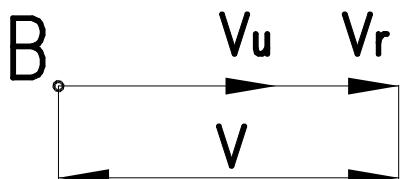


Rychlosti v jednotlivých bodech:



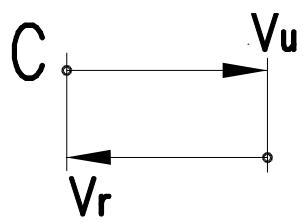
A:

$$v = \sqrt{v_u^2 + v_r^2}$$



B:

$$v = v_u + v_r$$



C:

Kolo nesmí proklouznout, tedy musí být

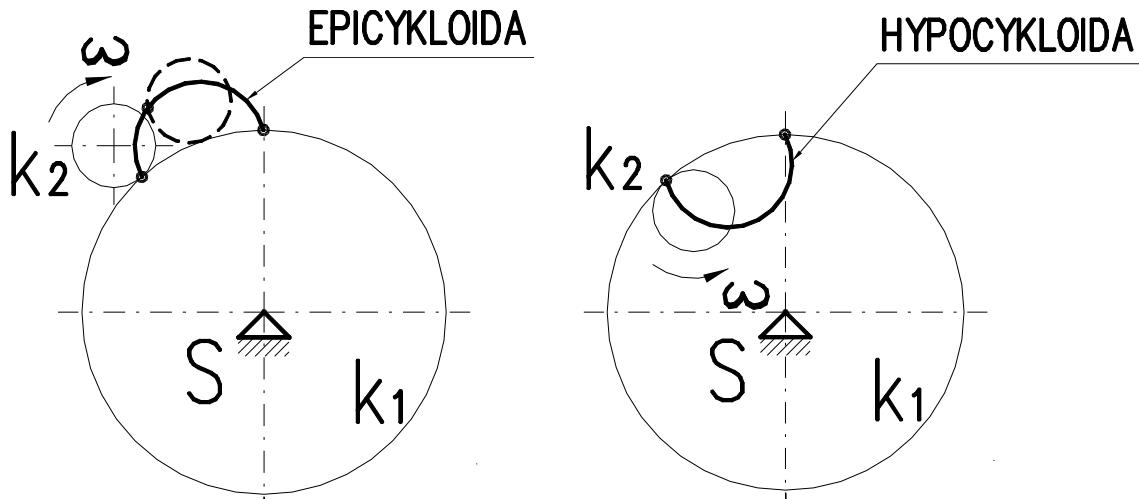
$$v_u = v_r$$

$$v = 0$$



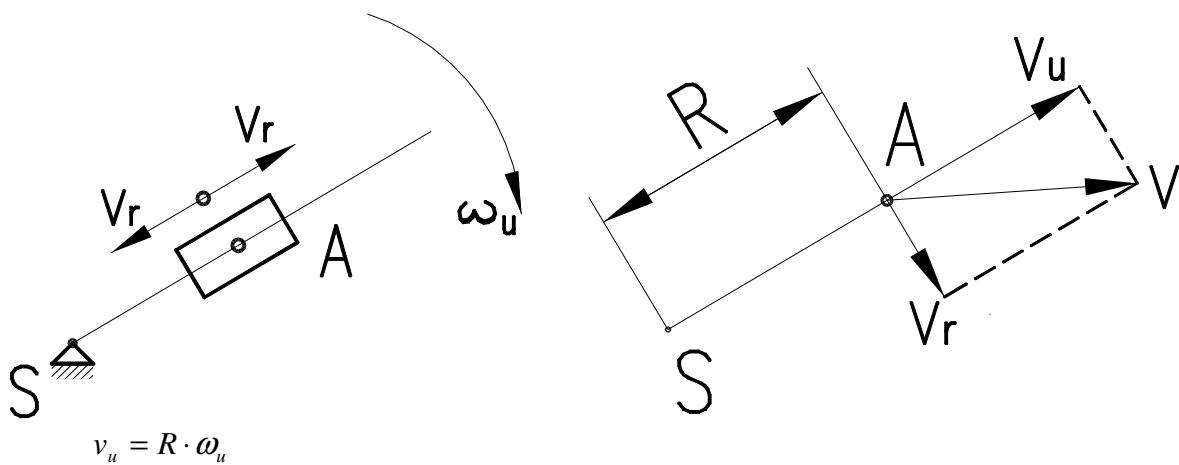
## 9.15.2 Oba dílčí pohyby otáčivé

V praxi u konstrukce ozubení: epicykloida, hypocykloida:

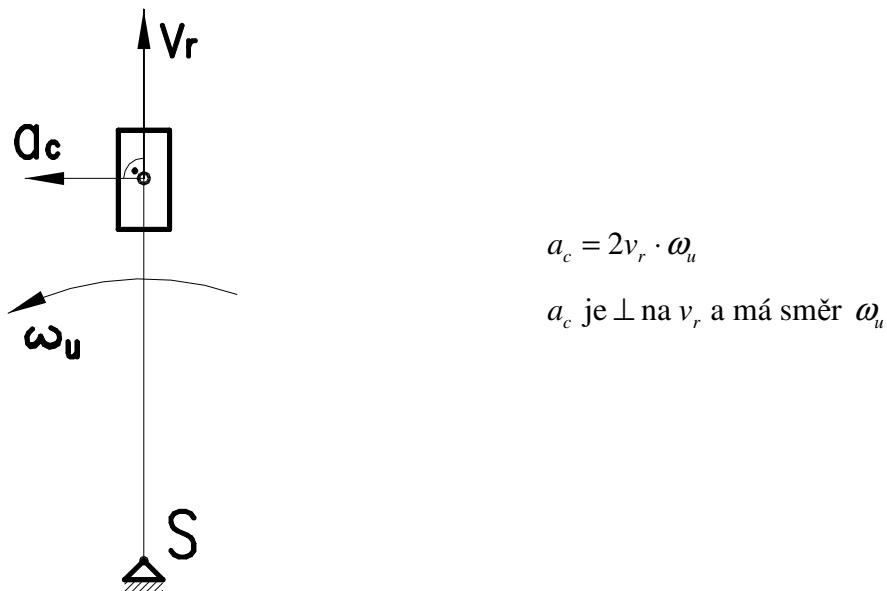


## 9.16 Unášivý pohyb rotační, relativní posuvný

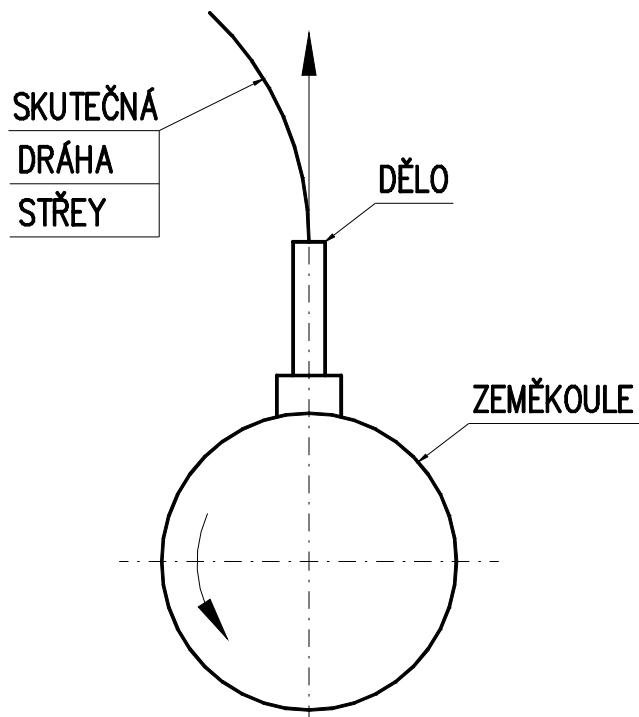
Je to poměrně častý případ u mechanismů, kdy se těleso (objímka) posouvá rovnoměrně po průvodiči rychlostí  $v_r = \text{konst.}$  a ještě se s průvodičem rovnoměrně otáčí ( $\omega_u = \text{konst.}$ ).



Výsledná rychlosť se pak rovná vektorovému součtu relativní rychlosti  $v_r$  a unášivé rychlosti  $v_u$ . Unášivá rychlosť je funkcií poloměru a tedy se neustále mění. Pak tedy i výsledná rychlosť neustále mění svůj směr a velikost. Tedy musí existovat nějaké zrychlení. Toto zrychlení nazýváme Coriolisovo zrychlení a působí vždy kolmo na směr relativní rychlosti.

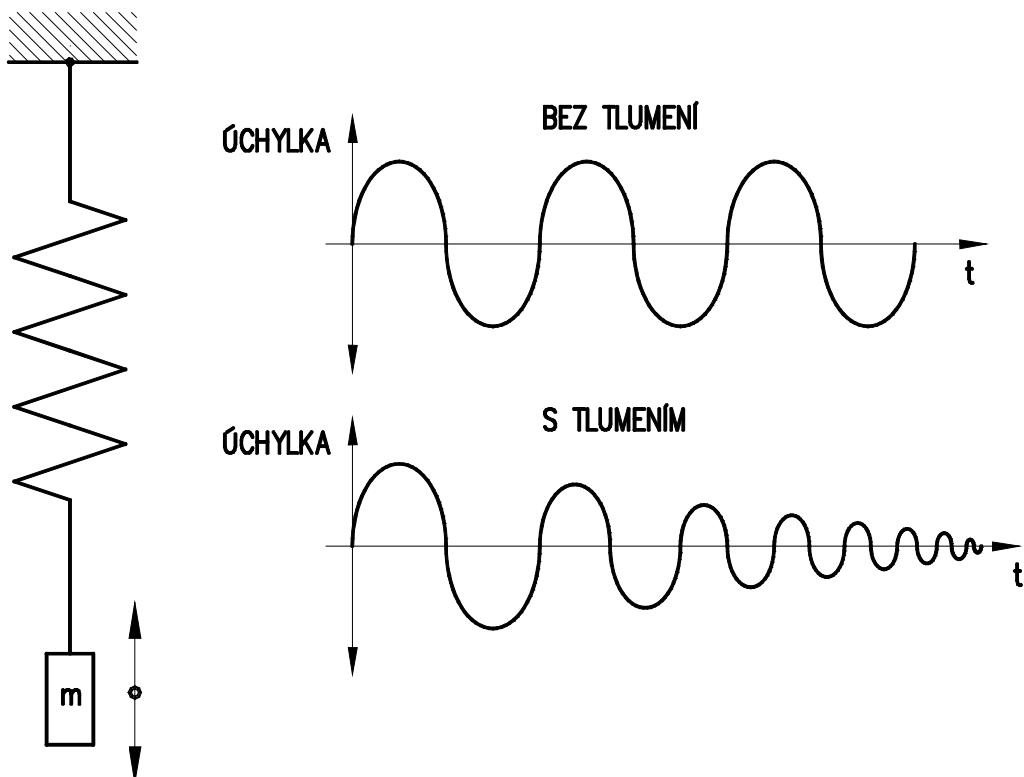


Toto zrychlení způsobuje tzv. Coriolisova síla, která má vliv např. na odchylku střely dalekonosných děl, chod odstředivých čerpadel apod.



## 9.17 Harmonický pohyb

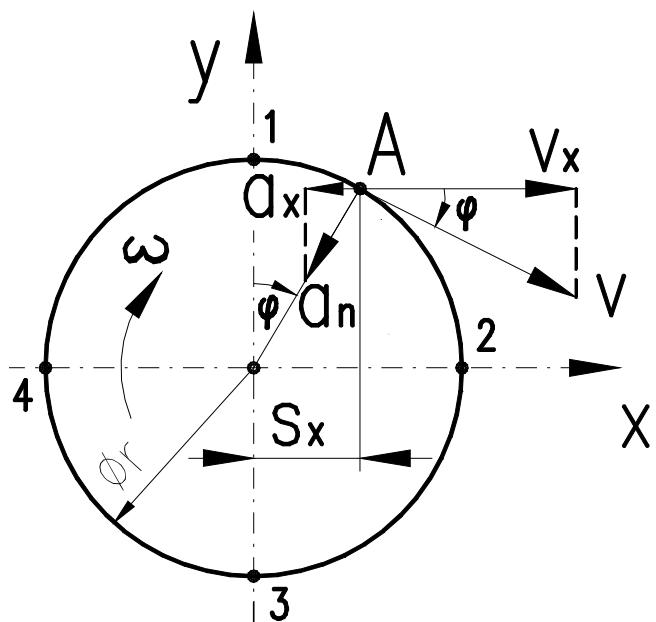
O harmonickém pohybu hovoříme tehdy, jedná-li se o opakovaný vratný pohyb (kmitový pohyb). V praxi se s harmonickými pohyby setkáváme často např. u chvění a vibrací, u pohybu klikového mechanismu apod. Harmonický pohyb koná také např. závaží zavěšené na pružině, kmitající kolem rovnoběžné polohy.



Teoreticky se závaží pohybuje po sinusovce, v praxi je pohyb závaží tlumený vlivem tlumení pružiny a odporu vzduchu.

### 9.18 Rotační pohyb

Při sledování pohybu bodu rotujícího po kružnici o poloměru  $R$  stálou úhlovou rychlosťí  $\omega$  dostaneme jednoduchý harmonický pohyb.



Dráha bodu A ve vodorovném směru:

$$s_x = r \cdot \sin \varphi$$

Obvodová rychlosť:

$$v = r \cdot \omega$$

Složka této rychlosti ve vodorovném směru:

$$v_x = v \cdot \cos \varphi = r \cdot \omega \cdot \cos \varphi$$

Pohyb je rovnoměrný, tedy  $a_t = 0$

Bude pouze normálné (dostředivé) zrychlení:

$$a_n = r \cdot \omega^2$$

Pak jeho složku promítneme do vodorovného směru:

$$a_x = r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi$$

$$(a_n \cdot \sin \varphi)$$

Dosadíme-li do vzorců za pootočení:

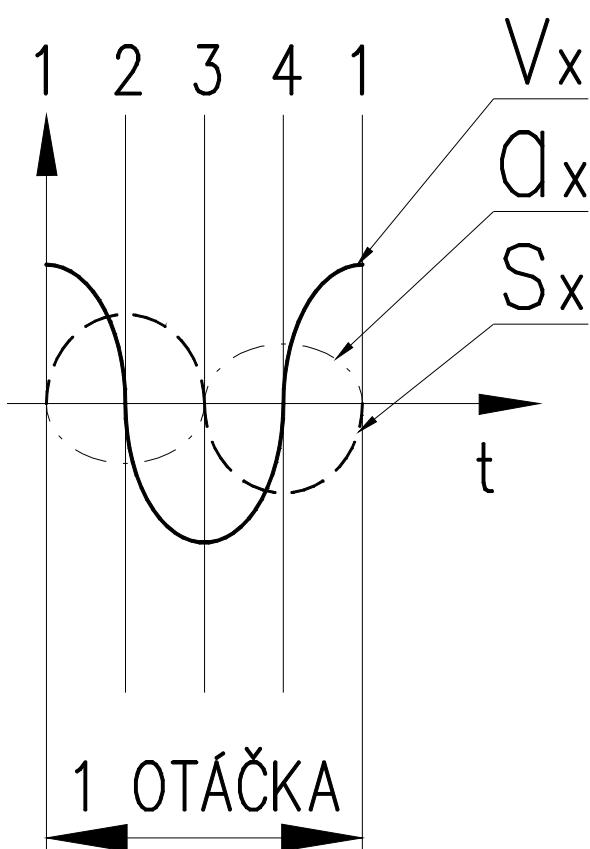
$$\bar{\varphi} = \omega \cdot t$$

Pak rovnice dostanou tvar:

$$s_x = r \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$v_x = r \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$a_x = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t$$



Průběh dráhy a zrychlení je dán sinusovkou, průběh rychlosti cosinusovkou. Z obrázku je zřejmé: v místě, kde je max. rychlosť je nulové zrychlení a naopak, tam kde je nulová rychlosť, je max. zrychlení.

Max. rychlosť dostaneme pro  $\varphi = 0$  a  $180^\circ (\cos 0 = 1)$ , tedy pro body 1 a 3,  
 $v_{\max} = r \cdot \omega$

Max. zrychlení dostaneme pro  $\varphi = 90^\circ$  a  $270^\circ$ , tedy pro body 2, 4,  
 $a_{\max} = -r \cdot \omega^2$

V praxi často kmitavé pohyby např. chvění a vibrace nahrazujeme jedním nebo několika pohybů harmonickými podle sinusovky.

## 9.19 Kinematika soustavy těles

Soustavou těles rozumíme alespoň 3 tělesa (včetně zákl. rámu), která jsou spolu pohyblivě spojena.

Mechanismus je soustava těles s jednoznačným pohybem všech svých členů.

Funkce mechanismu:

- Převod jednoho pohybu v druhý: posuv v posuv, posuv v rotaci, rotaci v rotaci, šroubový pohyb v rotaci apod.
- Dosažení předepsané dráhy pohybujícího se bodu popř. předepsaného pohybu tělesa.

## 9.20 Stupně volnosti:

Těleso má tolik stupňů volnosti, kolik je třeba souřadnic k popsání jeho polohy. Stupně volnosti se tělesu odebírají pomocí vazeb.

Volné těleso v rovině 3 st. volnosti, posuv x,y, rotace  $\varphi_z$  (kolem osy z)

Volné těleso v prostoru 6 x, y, z,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$

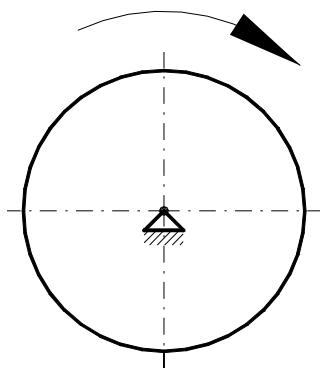
Volný bod v rovině 2 x, y

Volný bod na přímce 1 x

Volný bod v prostoru 3 x, y, z

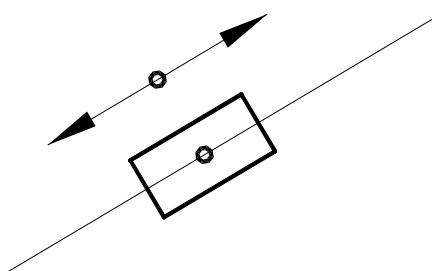
Všechna mechanická zařízení, která omezují těleso v pohybu nazýváme vazbou.

V rovině:

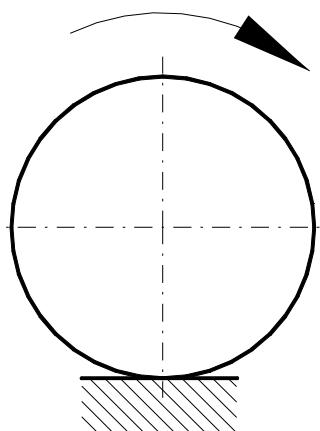


Rotační vazba (otáčivý pohyb)

Odebírá x, y, má  $\varphi_z$



Posuvná vazba odebírá y,  $\varphi_z$ , má x



Válivá vazba umožňuje otáčení kolem okamžitého středu otáčení. Odvaluje se, nesmýká, tedy odebírá x, y, má  $\varphi_z$

Obecná vazba: Tělesa se otáčí a smýkají po sobě – odebírá y, má x,  $\varphi_z$

Počet stupňů rovinných mechanismů:

$$i = 3 \cdot n - 2 \cdot (r + p + v) - o$$

i – počet stupňů volnosti;

n – počet pohyblivých členů mechanismu (bez rámu);

r – počet rotačních vazeb;

p – počet posuvných vazeb;

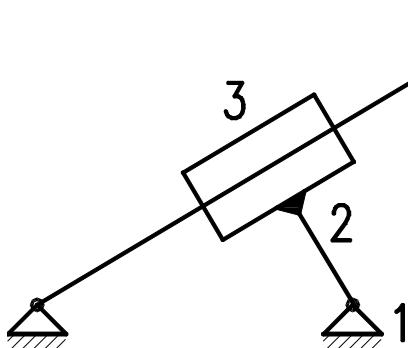
v – počet válivých vazeb;

o – počet obecných vazeb;

0° volnosti: není to mechanismus, nemůže se pohybovat;

1° volnosti: pohyb celého mechanismu je dán jedním pohybem jednoho členu;

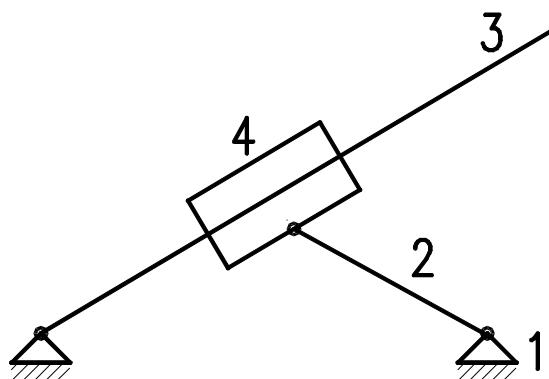
2° volnosti: pohyb celého mechanismu je dán dvěma pohyby jednoho a více členů.



**Př.: 3 členy**

$$i = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (2 + 1) = 0$$

Je pevný!



**Př.: 4 členy**

$$i = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (3 + 1 + 0) - 0 = 1$$

Má 1° volnosti.

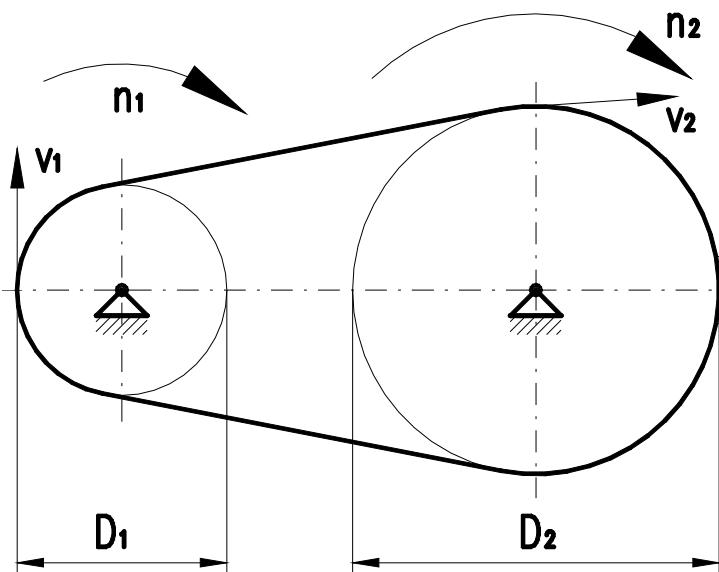


## 9.21 Převody

Převod je mechanismus, který převádí jeden pohyb na jiný nebo na stejný typ pohybu, ale např. jinou rychlosť. Obvykle pod pojmem převod rozumíme mechanismus, který převádí otáčivý pohyb z jedné hřídele na druhý.

Převody	Se silovým stykem	Kontaktní	Třecí převod
		Opásané (s vloženým členem)	Řemeny
	S tvarovým stykem	Kontaktní	Ozubená kola
		Opásané (s vloženým členem)	Řetězový převod

## 9.22 Řemenový nebo řetězový převod



$v = v_1 = v_2 = \text{konst.}$  (řetěz, řemen se neprotahuje ani netrhá);

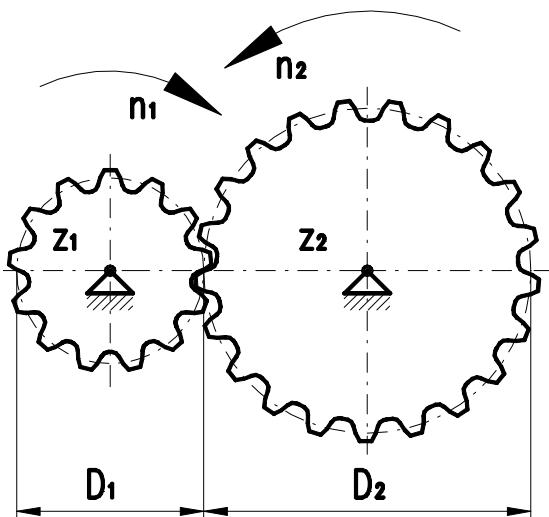
$$v_1 = \pi \cdot D_1 \cdot n_1 = v_2 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2$$

Převodový poměr:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

$i < 1$  převod do rychla;  
 $i > 1$  převod do pomala.

## 9.23 Převody ozubenými koly



$$D_1 = z_1 \cdot m$$

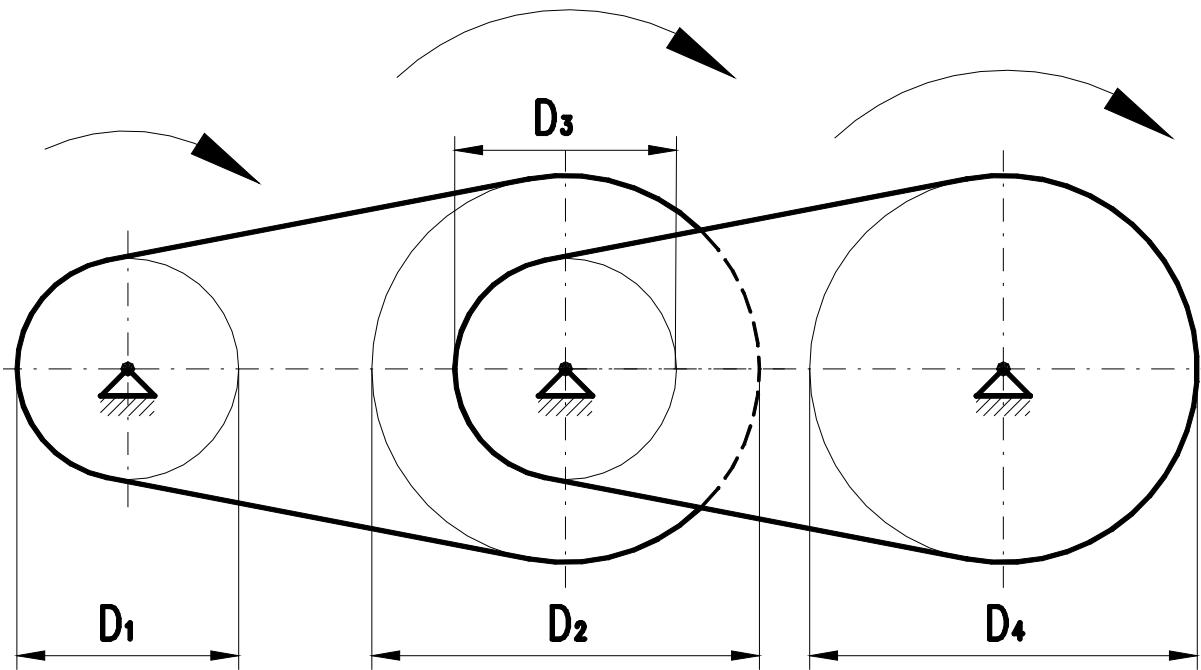
$$D_2 = z_2 \cdot m$$

$$v = \pi \cdot D_1 \cdot n_1 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}$$



## 9.24 Složený řemenový převod



Celkový převod se rovná součinu jednotlivých převodů:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

$$i_{34} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{D_4}{D_3}$$

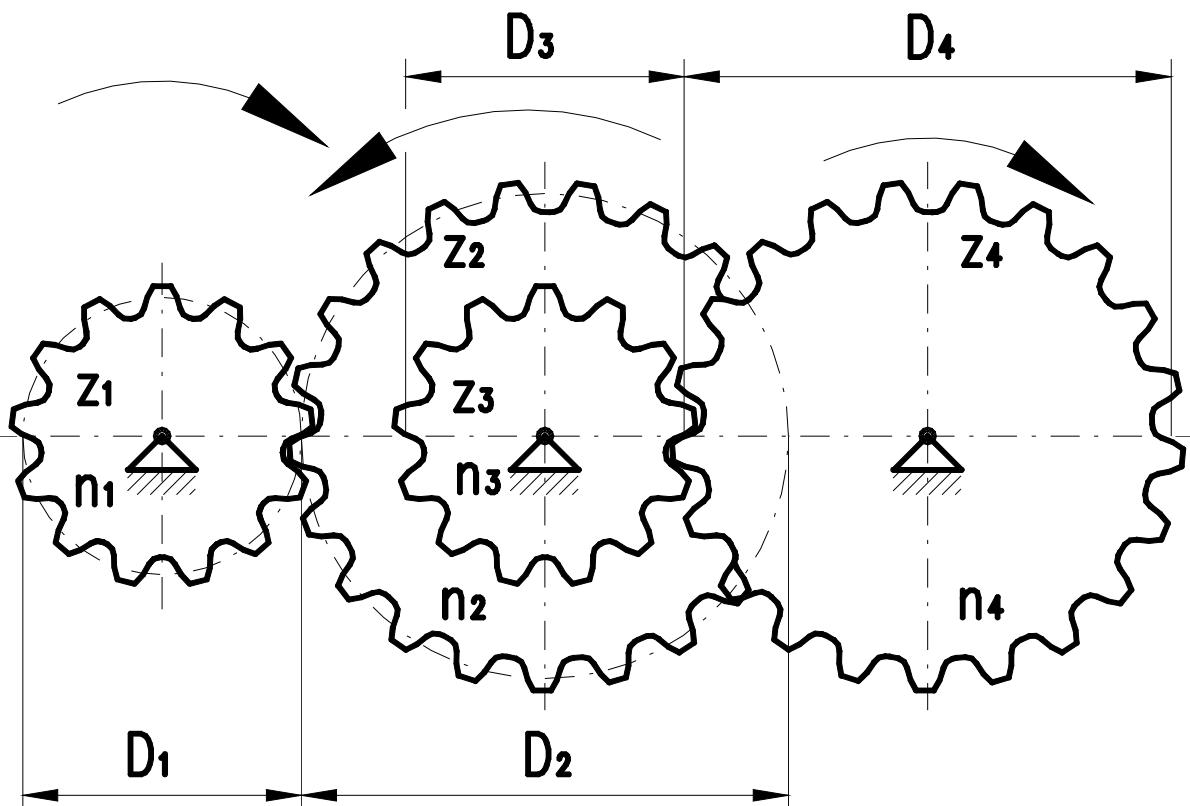
$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} = \frac{n_1 \cdot n_3}{n_2 \cdot n_4} = \frac{D_2 \cdot D_4}{D_1 \cdot D_3}$$

$$n_3 = n_2$$

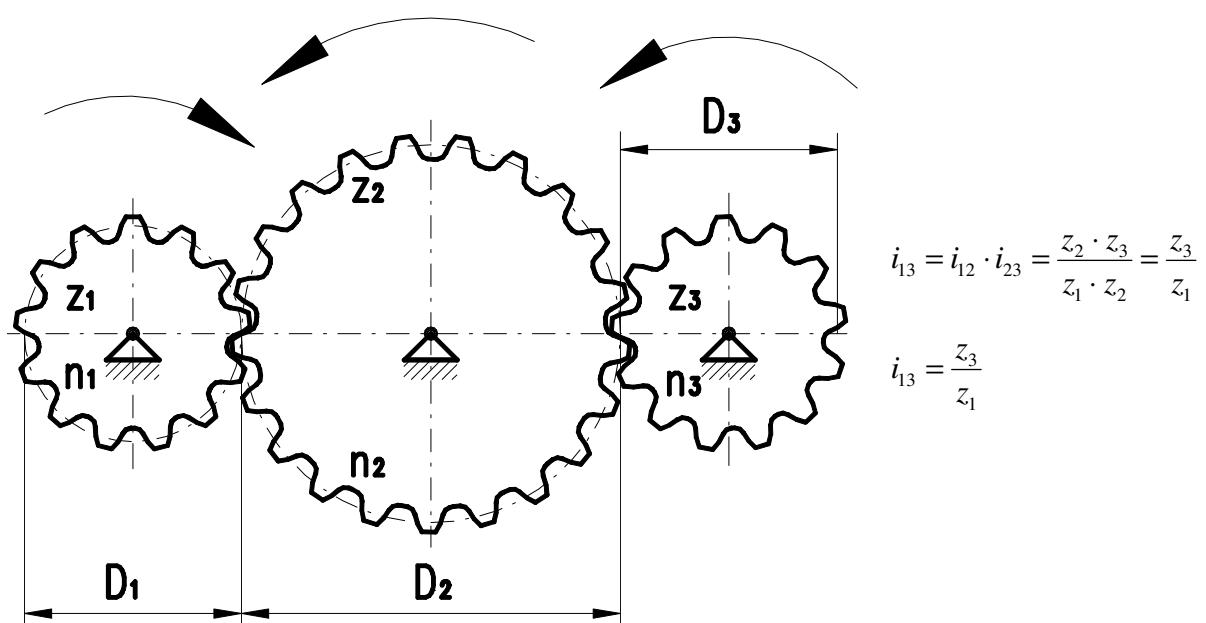
$$i_{14} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{D_2 \cdot D_4}{D_1 \cdot D_3}$$

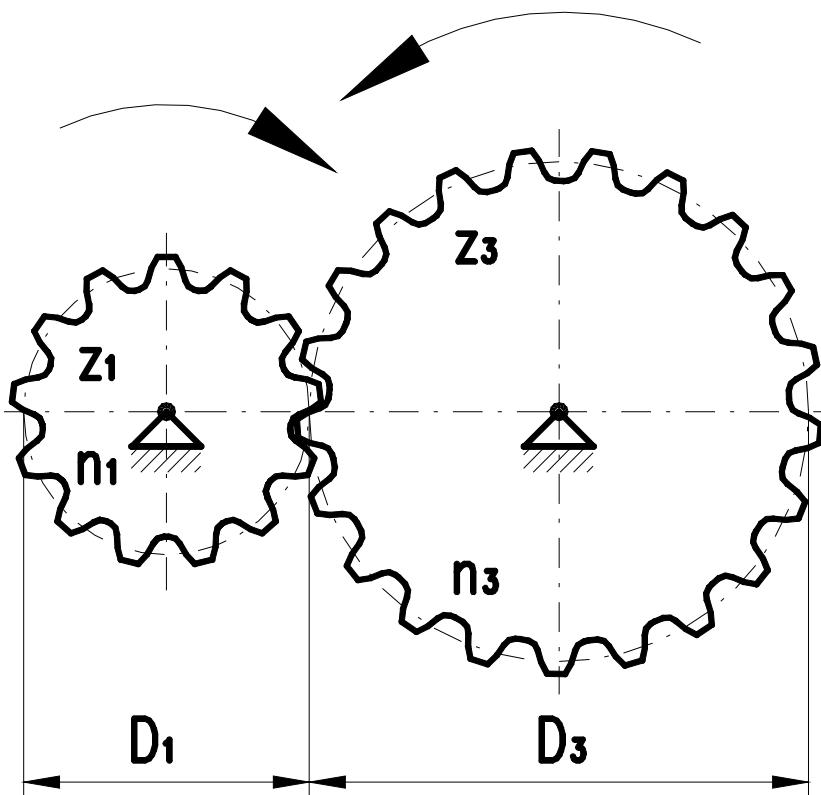


## 9.25 Složený převod ozubenými koly



Vložené kolo:





Převodový poměr mezi kolem 1 a 3 se vložením kola 2 nezmění, změní se jen směr otáčení kola 2 a vzdálenost os hřídelů.

$$i_{13} = \frac{z_3}{z_1}$$

## Seznam použité literatury:

- L. Mrňák, A. Drdla, MECHANIKA – Pružnost a pevnost pro střední průmyslové školy strojnické, Praha: SNTL, 1977.
- M. Julina, J. Kovář, V. Venclík, MECHANIKA II – Kinematika pro střední průmyslové školy strojnické, Praha: SNTL, 1977.
- I. Turek, O. Skala, J. Haluška, MECHANIKA – Sbírka úloh, Praha: SNTL, 1982.
- J. Leinveber, P. Vávra, Strojnické tabulky, Praha: ALBRA, 2008, ISBN 978-80-7361-051-7