

Labjournaal + werkplan experiment

vrijdag 9 januari 2026 10:11

Lucas Oord (5155320)

Werkplan begint onderaan pagina 13

Lab report begint op pagina 22

Week 7 vrijdag

Begonnen met theorie opzoeken en begrijpen, zodat ik een theoretisch model heb om te vergelijken met het experiment, en kan bepalen wat ik ga onderzoeken.

Het experiment gaat over een gekoppelde slinger, waarbij het gewicht hangt op hoogte l , gewicht met massa m , gewicht.

Het gewicht hangt aan een 'draad', wat een grote massieve liniaal is van metaal met lengte l , draad en gewicht m , draad.

De slingers zitten aan elkaar gekoppeld met een veer.

Ik zoek nu een bewegingsvergelijking die op basis van de tijd de hoek kan geven van de uitwijking.

Ik ben uitgekomen op de volgende bewegingsvergelijking voor roterende beweging:

$$\tau = dL/dt$$

Met τ = koppeling en L = hoekimpuls

Waarbij:

$$L = I \cdot \omega$$

Met I = traagheidsmoment, en ω = hoeksnelheid = $d\theta/dt$

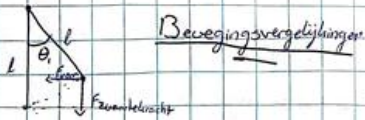
Dit geeft dan:

$$\tau = I \cdot d^2\theta/dt^2$$

Bron van deze theorie: <https://en.wikipedia.org/wiki/Torque>

Daarna heb ik de berekeningen gedaan met behulp van: <https://ap.physik.unibas.ch/PDF/Manuals/English/IM4en.pdf> (sectie 1.2.2 - 1.2.3), aangevuld met koppeling van de draad.

Hieronder staan de berekeningen en het uiteindelijke theoretische model waarmee ik later een onderzoeksplan ga bedenken, op de laatste foto zijn de conclusies te zien en dat is het theoretisch model wat ik ga gebruiken.



lengte staaf = l
 lengte waar gewicht hangt = l = lengte waar voor zit
 massa staaf = M
 massa gewicht = m

$$\tau = I\omega = I\ddot{\theta}$$

$$I = I_{\text{gewicht}} + I_{\text{slinger}}$$

$$I_{\text{gewicht}} = ml^2 \quad (\text{versimpeld tot puntmassa})$$

$$I_{\text{slinger}} = \int r^2 dm$$

$$dm = \frac{M}{l} dr \Rightarrow M(r) = \rho r$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dr} = \frac{M}{l} \Rightarrow dm = \frac{M}{l} dr$$

$$\Rightarrow I_{\text{slinger}} = \int_0^l r^2 \frac{M}{l} dr = \frac{M}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{M}{l} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^l = \frac{1}{3} Ml^2$$

$$\text{dus: } I = ml^2 + \frac{1}{3} Ml^2$$

$$\tau = \tau_{\text{zwaartekracht}} + \tau_{\text{veer}}$$

$$\tau_{\text{zwaartekracht}} = \tau_{\text{z, gewicht}} + \tau_{\text{z, slinger}}$$

$$\tau_{\text{z, gewicht}} = -|r \times F| = -|r| |F| \sin \theta = -lmg \sin \theta$$

$$d\tau_{\text{z, slinger}} = -|r \times F| dr = -|r| |F| \sin \theta dr = -rMg \sin \theta dr$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{z, slinger}} = -\int_0^l rMg \sin \theta dr = -\frac{1}{2} Mg l^2 \sin \theta$$

$$\text{dus } \tau_{\text{zwaartekracht}} = -mgl \sin \theta - \frac{1}{2} Mgl^2 \sin \theta$$

$$\tau_{\text{veer}} = -|r \times F| = -|r| |F| \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$= -kl \sin \theta \cos \theta = -kl \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta$$

$$= -kl^2 \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta$$

dus:

$$\tau = -mgl \sin \theta - \frac{1}{2} Mgl^2 \sin \theta - kl^2 \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta$$

$$\tau = -\left(mgl + \frac{1}{2} Mgl^2\right) \sin \theta - kl^2 \sin(\theta - \theta_0) \cos \theta$$

kleine hoek benadering: $\sin \theta \approx \theta$ en $\cos \theta \approx 1$:

$$\tau = -\left(mgl + \frac{1}{2} Mgl^2\right) \theta - kl^2 (\theta - \theta_0)$$

$$= -\left(mgl + \frac{1}{2} Mgl^2 + kl^2\right) \theta + kl^2 \theta_0$$

$$\text{dus: } (\tau = I\ddot{\theta})$$

$$-\left(mgl + \frac{1}{2} Mgl^2 + kl^2\right) \theta + kl^2 \theta_0 = \left(mgl^2 + \frac{1}{3} Ml^3\right) \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow a\ddot{\theta} + b\theta - c\theta_0 = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{a}\theta - \frac{c}{a}\theta_0 = 0$$

aangezien gewicht 1 en 2 identiek zijn, vinden we het stelsel:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{b}{a}\theta_1 - \frac{c}{a}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{b}{a}\theta_2 - \frac{c}{a}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{b}{a}\theta_1 - \frac{c}{a}\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{b}{a}\theta_2 - \frac{c}{a}\theta_1 = 0$$

we hernoemen van variabelen:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + c_1\theta_1 - c_2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + c_1\theta_2 - c_2\theta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{b}{a} \\ c_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Oplossen stelsel

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + c_1 \theta_1 - c_2 \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + c_1 \theta_2 - c_2 \theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 = -c_2 \theta_2 + c_1 \theta_1 \end{cases}$$

noem $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ dan: $\ddot{\vec{\theta}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$

en dus: $\ddot{\vec{\theta}} = \begin{pmatrix} -c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2 \\ -c_2 \theta_2 + c_1 \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{pmatrix} \vec{\theta} = A \vec{\theta}$

neem aan: $\vec{\theta} = \vec{v} e^{i p t}$ (\vec{v} is eigenvector)

dan: $\ddot{\vec{\theta}} = -p^2 \vec{v} e^{i p t}$

dwars we weten: $\ddot{\vec{\theta}} - A \vec{\theta} = 0$, dus: $\ddot{\vec{\theta}} = A \vec{\theta}$

$\Rightarrow A \vec{v} e^{i p t} = -p^2 \vec{v} e^{i p t}$ (eigenvalue/eigenprobleem)

$\Rightarrow A \vec{v} = -p^2 \vec{v}$

$\Rightarrow (A + p^2 I) \vec{v} = 0$ $\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \det(A + p^2 I) = 0$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -c_1 + p^2 & c_2 \\ c_2 & -c_1 + p^2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (-c_1 + p^2)^2 - c_2^2 = 0$

$\Rightarrow (-c_1 + p^2)^2 = c_2^2$
 $\Rightarrow -c_1 + p^2 = \pm c_2$
 $\Rightarrow p^2 = c_1 \pm c_2$

$\Rightarrow (-c_1 + p^2)^2 = c_2^2$

$-c_1 + p^2 = \pm c_2$

$p^2 = c_1 \pm c_2$

dit geeft: $p_+^2 = c_1 + c_2$ en $p_-^2 = c_1 - c_2$

dus $p_+ = \sqrt{c_1 + c_2}$ en $p_- = \sqrt{c_1 - c_2}$

dan vinden we als algemene oplossing:

$\vec{\theta}(t) = A_1 \vec{v}_+ e^{i p_+ t} + B_1 \vec{v}_- e^{i p_+ t} + A_2 \vec{v}_+ e^{-i p_+ t} + B_2 \vec{v}_- e^{-i p_+ t}$, met $A_i, B_i \in \mathbb{C}$

$\vec{v}_+ : \begin{pmatrix} -c_1 + p_+^2 & c_2 \\ c_2 & -c_1 + p_+^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_2 & c_2 \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow c_2(v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$

neem $v_1 = 1$ dan $v_2 = -1$

$\vec{v}_- : \begin{pmatrix} -c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -c_2 v_1 + c_2 v_2 = 0$

$\Rightarrow c_2(v_2 - v_1) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

neem $v_1 = v_2 = 1$

dus: $\vec{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i p_+ t} + B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i p_+ t} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i p_+ t} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i p_+ t}$
 met $A_i, B_i \in \mathbb{C}$ en $p_{\pm} = \sqrt{c_1 \pm c_2}$

er zijn dus 4 onafhankelijke oplossingen mogelijk,
 en de algemene is de som van deze 4

we hebben dan:

Randvoorwaarden

$$\Theta_1(t) = A(\cos p_1 t + \sin p_1 t) + B$$

We willen oplossingen die ~~reel~~ reël zijn, dus:

$$\Theta_1(t) = A \cos p_1 t + B \sin p_1 t + C \cos p_2 t + D \sin p_2 t$$

$$\Theta_2(t) = -A \cos p_1 t - B \sin p_1 t + C \cos p_2 t + D \sin p_2 t$$

we willen: $\dot{\Theta}_1(0) = \dot{\Theta}_2(0) = 0$

$$\dot{\Theta}_1(t) = -A p_1 \sin p_1 t + B p_1 \cos p_1 t - C p_2 \sin p_2 t + D p_2 \cos p_2 t$$

$$\dot{\Theta}_2(t) = A p_1 \sin p_1 t - B p_1 \cos p_1 t - C p_2 \sin p_2 t + D p_2 \cos p_2 t$$

$$\dot{\Theta}_1(0) = 0 \Rightarrow B p_1 + D p_2 = 0$$

$$\dot{\Theta}_2(0) = 0 \Rightarrow -B p_1 + D p_2 = 0$$

$$\} B = D = 0$$

dus:

$$\Theta_1(t) = A \cos p_1 t + C \cos p_2 t$$

$$\Theta_2(t) = -A \cos p_1 t + C \cos p_2 t$$

3 verschillende randvoorwaarden:

1) $\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = \Theta_0$ (synchron.) (in fase)

2) $\Theta_1(0) = -\Theta_2(0)$ (uit fase)

3) $\Theta_1(0) = \Theta_{1,0}$ en $\Theta_2(0) = \Theta_{2,0}$ (willekeurig)

$$\Theta_1(t) = A \cos p_1 t + C \cos p_2 t$$

$$\Theta_2(t) = -A \cos p_1 t + C \cos p_2 t$$

1) $\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = \Theta_0$

dan:

$$\Theta_0 = A + C \quad \text{en} \quad \Theta_0 = -A + C$$

$$\Rightarrow A + C = -A + C \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

dan: $\Theta_2(t) = C \cos p_2 t = \Theta_1(t)$

voorbij $\Theta_1(0) = \Theta_0 = C$, dus:

als $\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = \Theta_0$, dan:

$$\boxed{\Theta_1(t) = \Theta_2(t) = \Theta_0 \cos p_2 t} \quad (\text{in fase})$$

2) $\Theta_1(0) = -\Theta_2(0)$

dan:

$$A + C = -(-A + C) = A - C \Rightarrow C = 0$$

dus $\Theta_1(t) = A \cos p_1 t$

$$\Theta_1(0) = \Theta_0 \Rightarrow \Theta(t) = \Theta_0 \cos p_1 t$$

dus:

als $\Theta_1(0) = \Theta_0 = -\Theta_2(0)$, dan:

$$\boxed{\Theta_1(t) = \Theta_0 \cos p_1 t}$$

$$\boxed{\Theta_2(t) = -\Theta_0 \cos p_1 t}$$

(uit fase)

3) $\theta_1(0) = \theta_{1,0}$ en $\theta_2(0) = \theta_{2,0}$

dan:

$\theta_{1,0} = A + C$ en $\theta_{2,0} = -A + C$

$\theta_{1,0} + \theta_{2,0} = A + C + (-A + C) = 2C$

dus: $C = \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2}$

$\theta_{1,0} - \theta_{2,0} = A + C - (-A + C) = 2A$

dus: $A = \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2}$

dus:

als $\theta_1(0) = \theta_{1,0}$ en $\theta_2(0) = \theta_{2,0}$, dan:

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos p_1 t + \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos p_2 t$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos p_1 t + \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos p_2 t$$

meest algemene, superpositie van (1) en (2)

p_+ en p_- zijn de eigenfrequenties van dit systeem.

neem $\omega_1 = p_-$ en $\omega_2 = p_+$

dan vinden we als algemene oplossing:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_2 t \\ \theta_2(t) &= \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Waarbij: $\omega_1 = \sqrt{c_1 - c_2}$ en $\omega_2 = \sqrt{c_1 + c_2}$

$c_1 = \frac{b}{a}$, $c_2 = \frac{c}{a}$

$b = mlg + \frac{mLg}{2} + kl^2$

$a = ml^2 + \frac{1}{3}mL^2$

$c = kl^2$

dus $c_1 \pm c_2 = \frac{b \pm c}{a} = \frac{m(mlg + \frac{mLg}{2} + kl^2) \pm kl^2}{ml^2 + \frac{1}{3}mL^2}$

~~$\frac{b+c}{a} = \frac{m(mlg + \frac{mLg}{2} + kl^2) + kl^2}{ml^2 + \frac{1}{3}mL^2}$~~
 ~~$\frac{b-c}{a} = \frac{m(mlg + \frac{mLg}{2} + kl^2) - kl^2}{ml^2 + \frac{1}{3}mL^2}$~~

$$\omega_2^2 = \frac{b+c}{a} = C_1 + C_2 = \frac{mLg + \frac{MLg}{2} + 2kl^2}{mL^2 + \frac{1}{3}ML^2} = \frac{mLg + \frac{MLg}{2} + 2kl^2}{I}$$

$$\omega_1^2 = \frac{b-c}{a} = C_1 - C_2 = \frac{mLg + \frac{MLg}{2}}{mL^2 + \frac{1}{3}ML^2} = \frac{mLg + \frac{MLg}{2}}{I}$$

Conclusie:

dusi:

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_2 t$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_2 t$$

met:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mLg + \frac{MLg}{2}}{I}} \quad \text{en} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mLg + \frac{MLg}{2} + 2kl^2}{I}}$$

waarbij:

$$I = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

Bij de conclusie hoort:

- m = massa gewicht
- M = massa slinger
- ℓ = afstand rotatie-as tot zwaartepunt gewicht
- L = lengte 'draad'
- k = veerconstante
- g = zwaartekrachtsconstante
- $\theta_{1,0}$ = hoek van slinger 1 op t = 0
- $\theta_{2,0}$ = hoek van slinger 2 op t = 0

In deze berekeningen heb ik redelijk wat versimpelende aannames en benaderingen gedaan. Deze kunnen allemaal bijdragen aan een eventuele afwijking tussen theorie en experiment bij het onderzoek. Ik heb in de berekeningen de volgende aannames gemaakt:

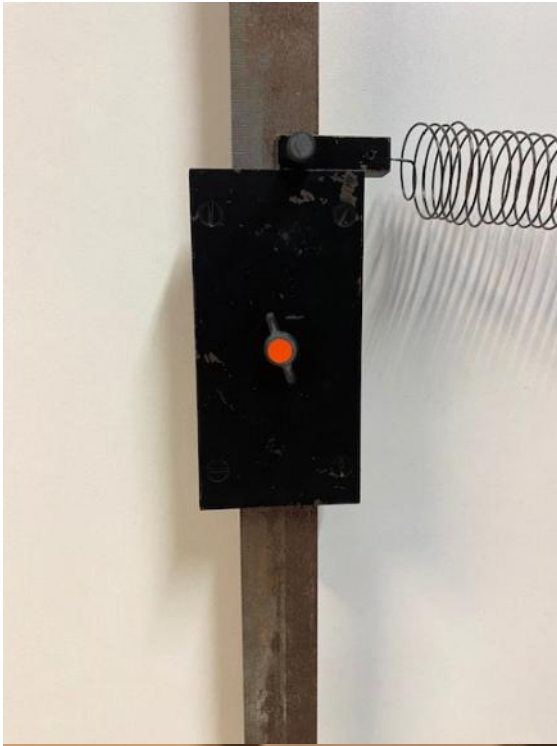
- De 'draad' is een staaf, omdat ik anders niet wist hoe ik het traagheidsmoment hiervan moest berekenen, en dit het meest dicht bij komt.
- Het gewicht is een puntmassa, om dezelfde reden als hierboven.
- Luchtweerstand en andere wrijvingen zijn verwaarloosbaar.
- De uitwijking zal altijd klein zijn (<15 graden), waardoor ik de benaderingen $\sin\theta = \theta$ en $\cos\theta = 1$ kon gebruiken.

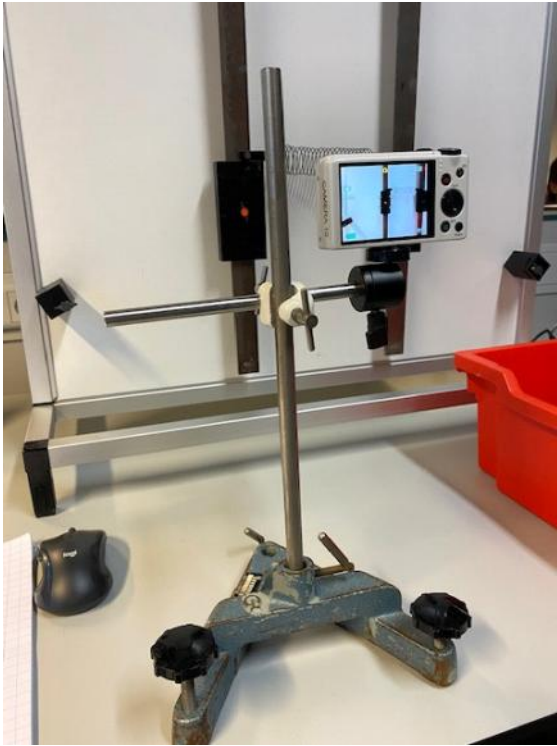
Bij dit theoretisch model hoort ook $T_1 = 2\pi/\omega_1$ en $T_2 = 2\pi/\omega_2$, waarbij T_1 en T_2 de periodes zijn van de eigenfrequenties.

Ik zou de veerconstante kunnen bepalen door een paar metingen te doen waarbij de veer onder invloed is van alleen zwaartekracht (eventueel met gewichtje) om dan de uitwijking te meten. Dan kan ik via de wet van Hooke ($F=k \cdot u$) k berekenen door: $k = F/u$, waarbij $F = F_z = m \cdot g$.

Nu ben ik gaan uit proberen wat een goede opstelling zou kunnen zijn. Ik moet in ieder geval de camera gebruiken om een sticker te tracken die op het slingerende gewichtje zit geplakt. De sticker moet dus goed in beeld zijn (en niet buiten beeld vallen, want dan verliest het trackingalgoritme de sticker uit het oog), en de hele uitwijking die ik ga gebruiken moet dus zichtbaar zijn. Omdat ik in mijn theoretisch model de kleine hoek benadering heb gebruikt ($\sin\theta \approx \theta$), zal ik proberen de slinger niet verder uit te wijken dan 15 graden, aangezien de hoek waarbij de foutmarge groter dan 1% wordt 14 graden is (https://en.wikipedia.org/wiki/Small-angle_approximation).

Ongeveer 33 ± 1 cm tot uitgestoken lens van de camera geeft een breed genoeg beeld om de volledige uitwijking in beeld te kunnen krijgen (moet nog checken of dit in de videotracking goed gaat, doe ik volgende week), sticker in het midden van het gewichtje plakken, op de bevestigingsschroef. Camera positioneren zodat het stipje in het midden van het beeld zit. Camera moet zo recht mogelijk staan (lens loodrecht op de sticker), zodat het beeld zo duidelijk mogelijk de situatie weergeeft. Om de onzekerheid te verminderen kies ik voor een framerate van 240fps met een resolutie van 512 pixels, bij het wiel van Maxwell gebruikte ik dit ook en daar ging de tracking goed, en was de uiteindelijke onzekerheid klein. Hieronder staan foto's van de opstelling.





Week 8 woensdag

Ik ben begonnen met de componenten van de gekoppelde slinger wegen. Ik heb ze afzonderlijk 3 keer gewogen en daarna het gemiddelde genomen als uiteindelijke gewicht, met als onzekerheid het verschil tussen het gemiddelde en de grootste uitschieter. Ik heb in dit labjournaal nog niet afgerond volgens de DATA-vuistregel, omdat deze onzekerheden nog gepropageerd zullen worden bij de uitvoering en dataverwerking van het experiment.

Ik kwam uit op:

- Draad:
 - o Meting 1: 1459.0 g
 - o Meting 2: 1459.1 g
 - o Meting 3: 1459.0 g
- Gewichtje:
 - o Meting 1: 92.28 g
 - o Meting 2: 92.27 g
 - o Meting 3: 92.28 g
- Massa aan veer:
 - o Meting 1: 38.5 g
 - o Meting 2: 38.2 g
 - o Meting 3: 37.7 g

De massa aan de veer heeft een grotere onzekerheid, omdat ik de massa niet los kon krijgen van de veer, waardoor het lastig was om alleen de massa zelf te meten en niet de massa samen met een stukje van de veer.

Ik kwam hierdoor uit op de volgende (op 2 decimalen afgeronde) waarden:

- Massa draad: 1459.03 \pm 0.07 g
- Massa gewicht: 92.28 \pm 0.01 g
- Massa aan veer: 38.13 \pm 0.45 g

Ik had bij het theoretisch model aangenomen dat de veer hangt op dezelfde hoogte als het gewichtje (het zwaartepunt van het gewichtje om precies te zijn), maar ik pas dit in het theoretisch model aan, wat ervoor zorgt dat in w_2 de $2kl^2 \rightarrow 2kl \cdot h_{\text{veer}}$ wordt.

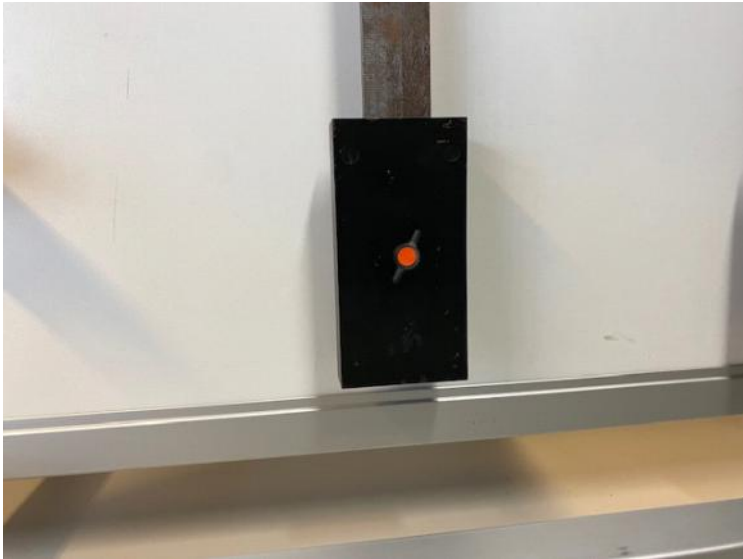
Hierna ben ik lengte metingen gaan doen. Ik heb de lengte van de 'draad' gemeten. De draad heeft zelf al afmetingen erop staan (lengte 1 meter), maar hangt nog aan een verbindingsstuk van:

- Meting 1: 2.0 cm
- Meting 2: 2.05 cm
- Meting 3: 2.1 cm

Lengte verbindingsstuk: 2.05 \pm 0.05 cm

Daardoor: lengte 'draad': 102.05 \pm 0.05 cm

Ik heb de gewichtjes zo gehangen dat de onderkant van de draad precies op dezelfde hoogte zit als de onderkant van het gewicht, zie de foto hieronder.



De onderkant hangt dus op 100 cm (en neem hierin geen onzekerheid aan), de bovenkant kan ik aflezen van de draad, en komt uit op: 89.3 cm voor slinger 1 en 89.2 cm voor slinger 2.

Ik neem daarom als bovenkant hoogte 89.25 ± 0.05 cm. Het zwaartepunt ligt dan op het gemiddelde van de onderkant en de bovenkant (het gewichtje is symmetrisch, vandaar gemiddelde): $94.625 \text{ cm} \pm 0.025 \text{ cm} = l_{\text{gewicht}}$.

De veer ligt op de bovengrens van het gewichtje, dus $h_{\text{veer}} = 89.25 \pm 0.05$ cm

Hierna ben ik de veerconstante gaan bepalen, door de uitwijking onder invloed van zwaartekracht te meten. Dit doe ik weer drie keer. Hier meet ik:

- Meting 1: 14.90 cm
- Meting 2: 14.85 cm
- Meting 3: 14.80 cm

Daarom lengte met uitwijking: 14.85 ± 0.05 cm

Lengte zonder uitwijking:

- Meting 1: 11.0 cm
- Meting 2: 10.9 cm
- Meting 3: 11.1 cm

Dus lengte zonder uitwijking: $11.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$

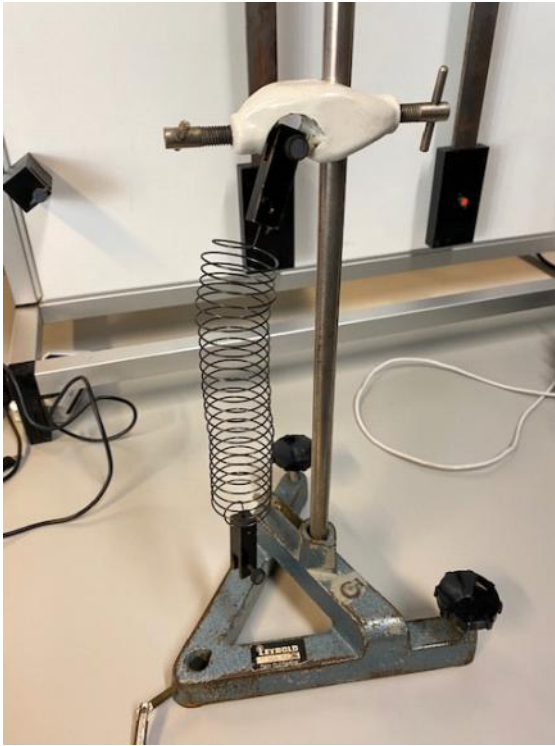
De uitwijking is dus: 3.85 ± 0.11 cm

We hebben dan $F = k \cdot u \Rightarrow k = F/u = \text{massa aan veer} \cdot g / u = 38.13 \pm 0.45 \text{ g} \cdot 9.80665 / 3.85 \pm 0.11 \text{ cm}$

Ik neem aan dat de onzekerheid in g verwaarloosbaar is.

Ik gooi deze waarden in python, samen met de uncertainty package, en daar komt uit (na omzetting naar standaard eenheden): $9.71 \pm 0.30 \text{ N/m}$.

Hieronder staat de opstelling voor het meten van de veerconstante onder invloed van alleen zwaartekracht. Het blokje onderaan is het gewichtje waaraan de zwaartekracht trekt. Ik ga er hier vanuit dat de veer een verwaarloosbare gewicht heeft.



De uncertainty package propageert onzekerheden automatisch, door de partiële onzekerheden te berekenen met de differentieermethode, om daarna de totale onzekerheid te bepalen. Zie de formules hieronder.

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y\right)^2}$$

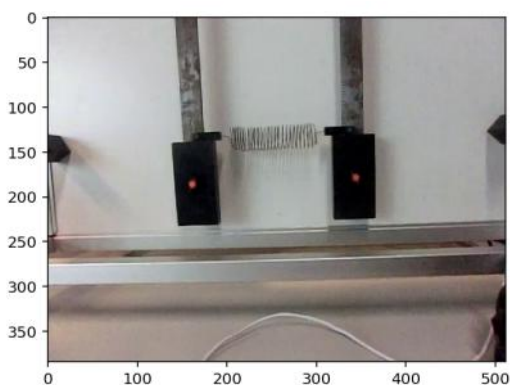
$$\equiv \sqrt{\sigma_{z,x}^2 + \sigma_{z,y}^2}.$$

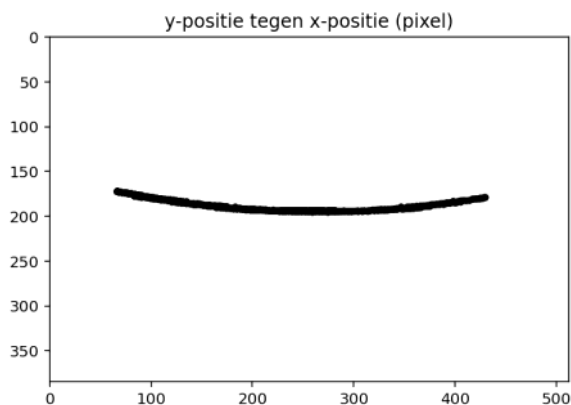
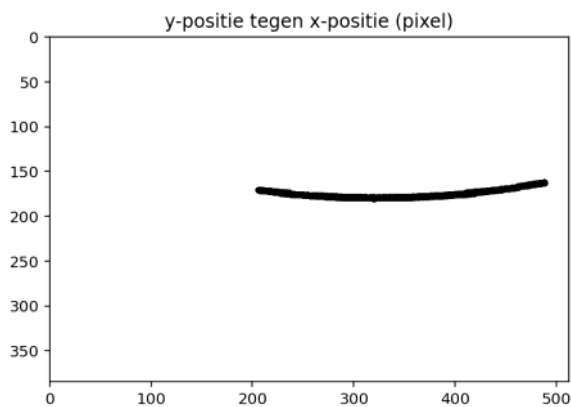
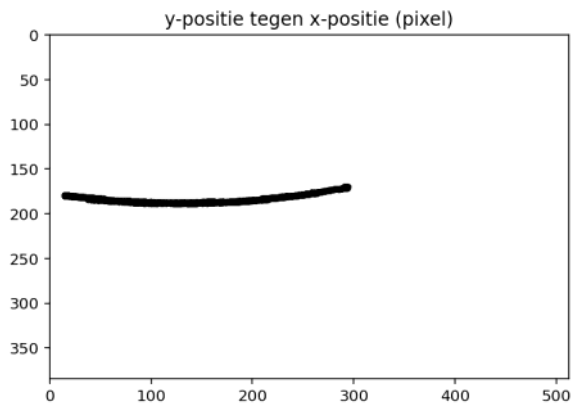
Ik heb ook besloten om het multitracking script te gebruiken. En moest daarvoor de camera op een nieuwe afstand plaatsen. De camera staat nu op een afstand van 44 ± 1 cm, waarbij beide gewichtjes bij volledige uitwijking in beeld blijven.

Ik begin nu met het testen van het trackingscript. Ik doe voor beide slingers een volledige uitwijking, om te kijken of het trackingscript de volledige breedte van beide uitwijkingen kan tracken.

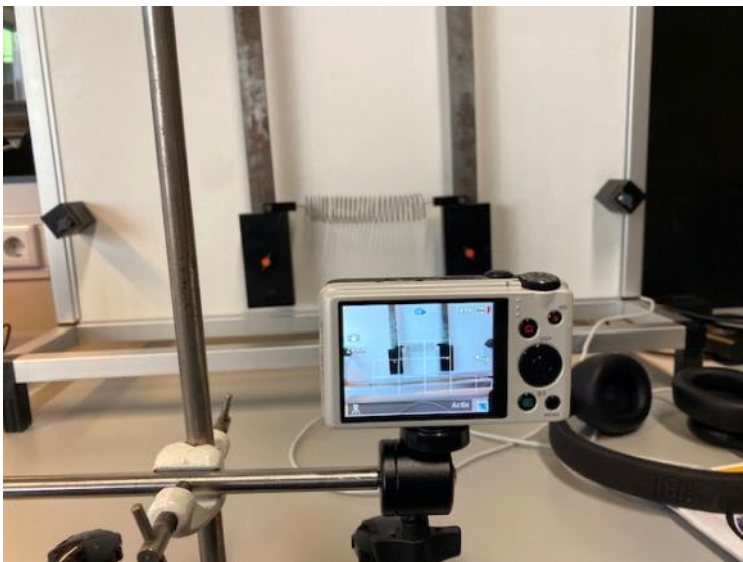
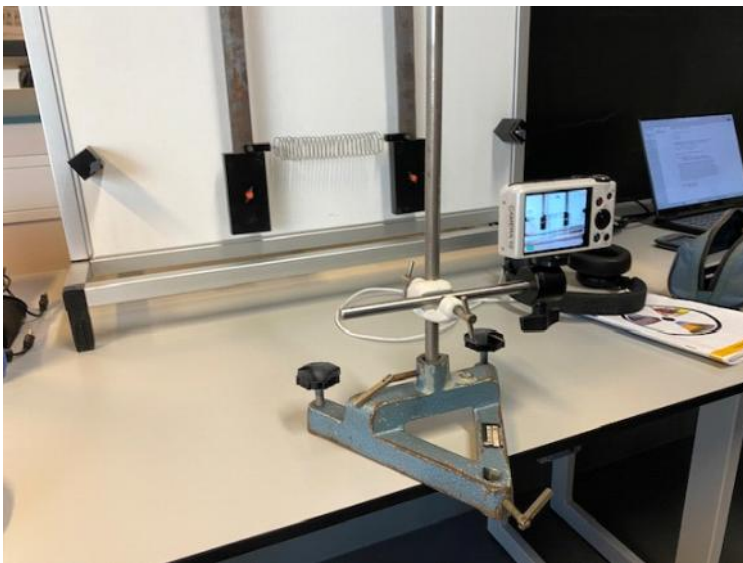
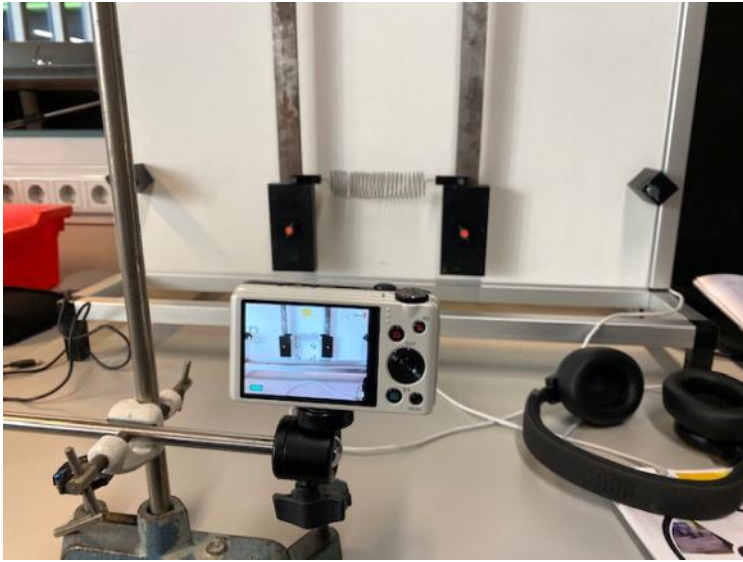
Het multitracking script gaf een error, waarvan ik niet snel kon zien wat het probleem was, dus ik ga toch terug naar het trackingscript met 1 tracker.

Dit is dan de beste opstelling om de gewichtjes te tracken. Ik kan met deze opstelling beide gewichtjes tracken (wel apart, want ik gebruik single tracking), en de test-tracking geeft goede resultaten weer. Het script trackt het stipje gedurende de hele video, en de x,y-plot ziet er goed uit, waardoor ik concludeer dat de tracking op deze manier goed gaat, en dit dus een goede opstelling en een goede resolutie (512x384 px) en framerate (240 fps) is. Hieronder staan de plots van de test tracking (deze zijn dus niet opgemaakt), waaruit ik concludeer dat de opstelling goed is. De eerste plot geeft het eerste frame weer, de tweede de x,y-plot van het linker gewichtje na tracking, en de derde geeft de x,y-plot van het rechter gewichtje na tracking. Ik heb ook de tracking geprobeerd met de opstelling van week 7 vrijdag. Deze ging ook goed (zie 4e plaatje hieronder), maar omdat deze nieuwe opstelling meer flexibiliteit geeft en een completer beeld met een makkelijkere te definiëren schaal, is deze beter.





Zie hieronder de foto's voor de goede opstelling. Camera op hoogte 16 ± 0.2 cm van tafel, gericht op het midden tussen de 2 gewichten, op 44 ± 1 cm vanaf gewicht. Camera zo waterpas mogelijk. Camera positioneren zodat de kantelpunten van de twee blokjes aan de uiteindes van het scherm waar de slingers aan hangen de rand van het beeld snijden (zie de plot met frame 1 voor een duidelijk voorbeeld). De afstand tussen deze 2 blokjes is 68.2 ± 0.1 cm, waarbij de onzekerheid geschat is. Dit kan ik gebruiken om pixels om te zetten naar fysieke lengteschaal. Op basis van het schatten van de maximale uitwijking op basis van de eerste plot ($u = 140\text{px}$) kom ik uit op een maximale uitwijking van: 10.529 ± 0.016 graden (dmv $\theta = \arcsin(u/L)$, na omzetten schaal), wat valt binnen de limiet van de kleine hoek benadering, waardoor ik dus de hele schaal kan benutten. De testvideo's zijn gedaan met 240 fps. De video's zijn ongeveer 94 secondes lang wanneer er wordt afgespeeld met 30fps, dus het bevat ongeveer 12 seconden aan echte tijd (meetijd). In testvideo 1 werd het gewichtje losgelaten op $t \approx 60$ seconden, dus dit bedroeg zo een 7,5 secondes aan slingertijd. Het trackingsalgoritme duurde ongeveer inclusief wegeschrijven 10 keer zo lang als de meetijd, dus 1 meting kost ongeveer $\text{videolengte} \cdot 10 + \text{videolengte} = 11 \cdot \text{videolengte}$, met videolengte wordt hier echte tijd bedoeld. Bij de testvideo's duurde een meting dus ongeveer 132 seconden, een ruimgenomen veilige meetijd voor reproductie is dus ongeveer 2,5 minuut.



Ik kan de hoek van de uitwijking bepalen door de schaal van de camera te benutten. Ik heb al een methode om het aantal pixels om te zetten naar cm. Ik kan dan de hoek bepalen door: $\text{uitwijking} = l \cdot \sin(\theta)$, van het frame waarin de slinger het meest is uitgeweken (de startuitwijking). Als beide slingers dezelfde hoek moeten hebben kan dit wel wat lastiger worden, aangezien ik hier de hoek achteraf pas bepaal. Bij gelijke hoeken zou ik dan bijvoorbeeld moeten afschatten of de 2 slingers parallel hangen. Ik kan een meetlint spannen aan de onderkant van de opstelling om de uitwijking ruwweg te schatten, zodat ik ongeveer goed zit bij vooraf bepaalde hoeken. Hier zal dan wel een grote onzekerheid inzitten, omdat ik de uitwijking af moet lezen en het gewichtje niet tegen het meetlint aan kan liggen. Ik kan dan wel achteraf kijken of mijn schatting van de hoeken goed klopt, of dat ik de meting opnieuw moet doen, door het dus met de schaal te berekenen na analyse van het frame met de grootste uitwijking.

Ik heb de gemeten en gevonden waarden van vandaag in het theoretisch model van week 7 (met de aanpassing dat $2kl^2 \rightarrow 2kl \cdot h_{\text{veer}}$) gestopt, om in

python met de uncertainty package de theoretisch voorspelde waardes voor w_1 en w_2 te berekenen. Hieruit kwamen de volgende (mogelijk niet goed afgeronde wegens testmeting) waardes:

$$w_1 = 3.7211 \pm 0.0008 \text{ rad/s}$$

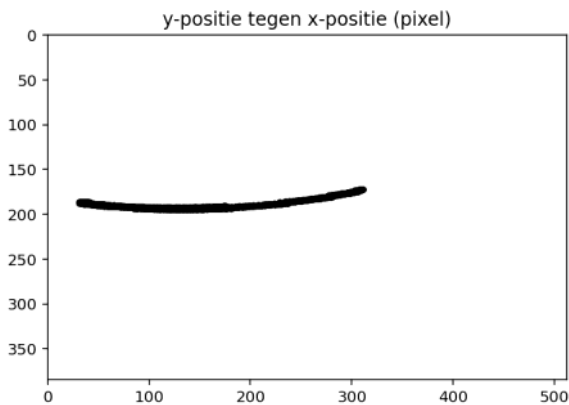
$$w_2 = 6.46 \pm 0.07 \text{ rad/s}$$

Meteen valt op dat de onzekerheid in w_1 veel kleiner is dan de onzekerheid in w_2 . Dit komt doordat vanuit de grootste percentuele onzekerheid ligt in de veerconstante, en die bij w_1 niet gebruikt wordt om de theoretische voorspelling te doen. Daarnaast zijn de onzekerheden al klein omdat de gemeten variabelen percentueel al een kleine onzekerheid hebben.

Week 8 vrijdag

Ik ga verder met testmetingen uitvoeren. Ik ga de maximale uitwijking in en uit fase test-tracken en timen. Zodat ik beter weet hoe lang ik nodig heb per meting. Bij uit fase meten kan ik niet de maximale uitwijking gebruiken, omdat de twee gewichtjes dan tegen elkaar aan stuiten, wat ervoor zorgt dat de veer niet de damping verzorgt, en dus is deze hoek onbruikbaar. Dit geldt na proberen voor alle hoeken buiten hele kleine, waardoor ik weinig variatie kan hebben in hoek als de slingers uit fase zijn, wat het ongeschikter maakt om w_2 experimenteel te bepalen.

Een meting van de slingers in fase duurde langer dan wat ik had voorspeld in week 8 woensdag, omdat ik langer nodig heb om de slingers goed in fase te zetten. Omdat mijn laptop de camera niet kan vinden bij een verbinding moet ik via de desktop de video's naar een usb kopiëren en die vervolgens overzetten naar mijn laptop, wat ook redelijk wat tijd kost waar ik dus rekening mee moet houden. Ik kom nu uit op ongeveer 10 minuten per meting (inclusief marge), wat ongeveer 8 seconden aan daadwerkelijke slingertijd bevatte. Hoe langer de slingertijd, hoe groter de effecten van fouten in 'parallelheid' van de startpositie. Hoe kleiner de slingertijd, hoe minder oscillaties, dus hoe minder data. 8 seconden slingertijd is hierin een goede compromis. Dit heb ik bepaald door te kijken hoe merkbaar het effect is van de menselijke fout in parallelheid. Ik heb hierbij de slingers zo parallel mogelijk gehouden voordat ik ze loslaat, en vervolgens getimed hoelang het duurt voordat de slingers zichtbaar niet meer in fase waren, waarbij 8 seconden een redelijke grens was.



Dit is de plot die er uit de testmeting kwam. Hierna ben ik verder gegaan met het werkplan opstellen.

Werkplan

Onderzoeksdoel

Het experimenteel bepalen van de eigenfrequentie w_1 (in fase) van een gekoppelde slinger, door met cameratracking de hoek θ op vaste tijdstippen t_n te meten afhankelijk van de verschillende beginhoeken $\theta(t=0)$, om daarna op het lineaire verband tussen $\theta(t_n)$ en $\theta(t=0)$ datafitting toe te passen en daarvanuit w_1 te berekenen.

Theorie

Bij de gekoppelde slinger zijn er twee losse slingers verbonden met een veer, waarbij de veer zich gedraagt als damping voor beide individuele slingers. Wanneer 1 slinger uitwijkt wordt er door de veer aan de andere slinger getrokken, waardoor de uitwijking van de ene slinger afhankelijk wordt van de uitwijking van de andere door middel van energieoverdracht. Als slinger 1 energie verliest, komt er bij slinger 2 energie bij, omdat er in dit systeem (bij benadering) energiebehoud optreedt. In dit experiment gaat de eigenfrequentie w_1 bepaald worden. Dit is een van de twee natuurlijke resonantie frequenties van het gekoppelde slinger systeem. Elke beweging van dit systeem is dan een superpositie van de eigenfrequenties.

Nu meer over het wiskundig model erachter.

Zie labjournaal week 7 voor een onderbouwing van het model. Kort gezegd is er vanuit Newtoniaanse mechanica een stelsel bewegingsvergelijkingen opgesteld, deze zijn hierna opgelost en met de randvoorwaarde dat hoeksnelheid($t=0$) = 0 uitgewerkt, hulpbron:

<https://ap.fysik.unibas.ch/PDF/Manuals/English/IM4en.pdf> (sectie 1.2.2 - 1.2.3).

Er zijn hierbij ook wat simplificaties en aannames gebruikt in het model:

- Beide slingers en gewichtjes zijn identiek.
- De uitwijking is altijd klein ($\theta < 15$ graden), zodat de kleine hoekbenadering gebruikt kan worden ($\sin\theta = \theta$ en $\cos\theta = 1$).
- De slinger een staaf is die symmetrisch in de lengte (cilindervormig).
- Het gewichtje is sferisch symmetrisch.
- Luchtweerstand en andere wrijvingskrachten spelen geen rol.

Het theoretisch model komt dan uit op de volgende vergelijkingen en variabelen, te zien in figuur 1. Hierin staan de vergelijkingen voor de harmonische

beweging van de gekoppelde slinger.

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{1,0} - \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_2 t \\ \theta_2(t) &= \frac{\theta_{1,0} + \theta_{2,0}}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\theta_{2,0} - \theta_{1,0}}{2} \cos \omega_2 t \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{m g + \frac{M L g}{2}}{I}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{m g + \frac{M L g}{2} + 2 k l h}{I}} \\ I &= m l^2 + \frac{1}{3} M L^2\end{aligned}$$

$\theta_1(t)$: hoekuitwijking slinger 1 op tijdstip t
 $\theta_2(t)$: hoekuitwijking slinger 2 op tijdstip t
 $\theta_{1,0}$: hoekuitwijking slinger 1 op tijdstip $t = 0$
 $\theta_{2,0}$: hoekuitwijking slinger 2 op tijdstip $t = 0$

ω_1 : eigenfrequentie systeem in fase
 ω_2 : eigenfrequentie systeem uit fase

m : massa gewichtje

M : massa slinger

l : afstand vanaf draaipunt tot zwaartepunt gewichtje

L : lengte slinger

h : afstand vanaf draaipunt tot veer

k : veerconstante

I : traagheidsmoment enkele slinger met gewichtje

g : zwaartekrachtsversnelling oppervlak aarde

Figuur 1, vergelijkingen en variabelen theoretisch model

Als we ω_1 willen vinden, moeten de twee slingers in fase zijn. Dan geldt: $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_0$, hierbij hoort de vergelijking:

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t = \theta_2(t)$$

Er is dus een lineair verb $\omega_1 = \frac{\arccos \frac{\theta_1(t_n)}{\theta_0}}{t_n}$ en een vast tijdstip $t = t_n$ en de beginhoek als de slinger in fase is:

$$a(t_n) = \frac{\theta_1(t_n)}{\theta_0}$$

$$a(t_n) = \cos \omega_{1,2} t_n$$

Kortom, uit deze vergelijkingen vinden we dus een te toetsen kwantitatief lineair verband tussen $\theta_1(t_n)$ en θ_0 waar ω_1 uit berekent kan worden, namelijk:

$$a(t_n) = \frac{\theta_1(t_n)}{\theta_0}$$

$$a(t_n) = \cos \omega_{1,2} t_n$$

Het lineaire verband tussen $\theta_1(t_n)$ en de beginhoeken (bij in fase dus $a(t_n)$) kunnen we experimenteel bepalen door middel van cameratracking en lineaire datafitting, waaruit we dan vervolgens ω_1 kunnen berekenen. Kort samengevat:

- In dit experiment is de onafhankelijke variabele θ_0 .
- De afhankelijke en te meten variabele is dan $\theta_1(t_n)$.
- Hierbij hebben we als controlevariabelen:
 - o t_n , vast tijdstip waarop de hoek gemeten wordt.
 - o De systeemeigenschappen en algemene vaste variabelen, dus m, M, l, L, h, k, g .

Hypothese

Op basis van de theorie verwacht ik een lineair verband te vinden tussen $\theta_1(t_n)$ en θ_0 voor zowel in fase uit fase beweging. Namelijk dat:

$$a(t_n) = \frac{\theta_1(t_n)}{\theta_0}$$

$$a(t_n) = \cos \omega_{1,2} t_n$$

Als ik dan $\theta_1(t_n)$ plot tegen θ_0 verwacht ik daarom een rechte lijn door de oorsprong met helling dus $\cos(\omega_1 t_n)$, waardoor ik ω_1 kan bepalen aan de hand van berekeningen aan de gemeten data. Ik verwacht op basis van de theorie in de buurt te komen van de volgende theoretisch voorspelde waarde van ω_1 :

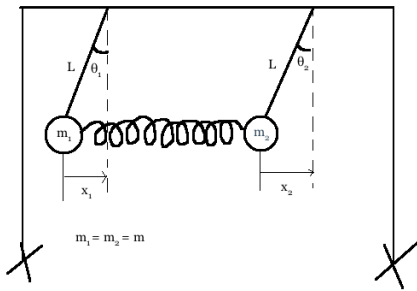
$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{m g + \frac{M L g}{2}}{I}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{m g + \frac{M L g}{2} + 2 k l h}{I}} \\ I &= m l^2 + \frac{1}{3} M L^2\end{aligned}$$

Ik verwacht niet dat ω_1 vrijwel precies deze theoretische waarde krijgt, aangezien er in het model aannames zijn gemaakt die in de opstelling van het experiment niet zullen kloppen (voornamelijk slinger cilindervormig en gewicht sferisch symmetrisch), wel verwacht ik in de buurt te komen. Met de gemeten waarden voor de controlevariabelen (zie labjournaal week 8 woensdag) verwacht ik daarom binnen 20% te komen van de volgende theoretische voorspelling: $\omega_1 = 3.7211 \pm 0.0008 \text{ rad/s}$

Systeem

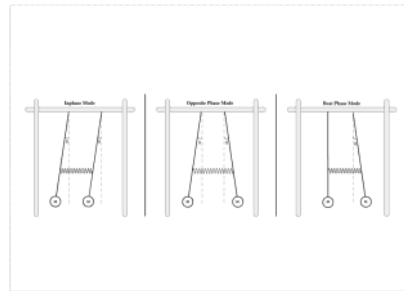
De opstelling bestaat uit twee losse identieke slingers met lengte L en massa M en hebben beide identieke gewichtjes met massa m bevestigd aan de onderkant van de slinger. Het zwaartepunt van de gewichtjes bevindt zich op afstand l vanaf het draaipunt. De twee slingers zijn op afstand h vanaf het draaipunt door middel van een veer aan elkaar bevestigd. Zie figuur 2 voor een schematische schets van de opstelling. Hierbij nemen we de linker slinger als slinger 1 en de rechter slinger als slinger 2. Dat betekent dat de hoek tussen equilibrium en uitwijking slinger 1 is θ_1 , en de hoek tussen equilibrium en uitwijking slinger 2 is θ_2 . Hierbij geldt: links van equilibrium: hoek is negatief, rechts van equilibrium: hoek is positief. De slingers kunnen handmatig worden gebracht naar een vooraf gekozen startuitwijking, en worden dan tegelijk losgelaten. In dit experiment gaat de eigenfrequenties ω_1 (in

fase) bepaald worden. Zie het eerste plaatje in figuur 3 voor een gekoppelde slinger in fase, het tweede plaatje in figuur 3 voor een gekoppelde slinger uit fase, en het derde plaatje voor een superpositie van deze twee eigenfrequenties.



Figuur 2, schematische schets van de gekoppelde slinger

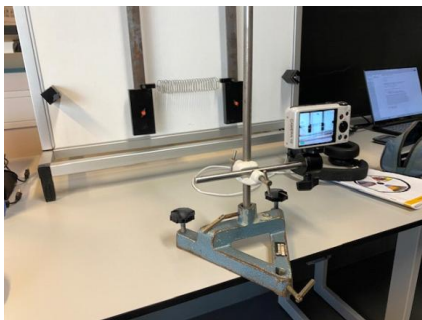
bron: <https://ucscphysicsdemo.sites.ucsc.edu/physics-5a6a/coupled-pendulum/>



Figuur 3, verschillende fases van de gekoppelde slinger

bron: <https://www.edrawmax.com/templates/1032376/>

De gewichtjes moeten gemarkeerd zijn met een duidelijk zichtbaar (klein) object zoals een sticker, zodat deze getrackt kunnen worden. Bij dit experiment wordt een camera gebruikt voor de tracking van de gewichtjes. Deze camera staat vast op een statief en staat loodrecht op de opstelling. De camera moet op een dusdanige afstand van de opstelling staan zodat de gewichtjes bij maximale uitwijking ook nog in beeld zijn. Bij het doen van dit experiment is de maximale toegestane uitwijking 15 graden vanwege de kleine hoekbenadering die gebruikt is in het theoretisch model. Daarnaast is het beeld van de camera gecentreerd, zodat het de gewichtjes in hoogte grofweg in het midden zitten, en in de breedte is de afstand van het midden van het beeld tot aan de gewichtjes gelijk, zie figuren 4 en 5 hieronder, waarbij de gewichtjes gemarkeerd zijn met een oranje sticker. Het liefst is er (net zoals in de figuren hieronder de blokjes aan de buitenkant van het witte blad (hier 68.2 ± 0.1 cm)) een eenvoudig referentiepunt om de maximale uitwijking en daarmee de te filmen breedte te bepalen. Hierdoor is de schaal eenvoudig te berekenen. De schaal is de breedte van de opstelling in centimeters gedeeld door de breedte in pixels van de resolutie van de film. De camera moet een hoge framerate en een goede resolutie hebben zodat de tracking van het object goed gaat. In de figuren hieronder voldeed een framerate van 240fps gepaard met een resolutie van 512x384 px. Bij de testmetingen stond de camera op een hoogte van 16 ± 0.2 cm en afstand van 44 ± 1 cm.

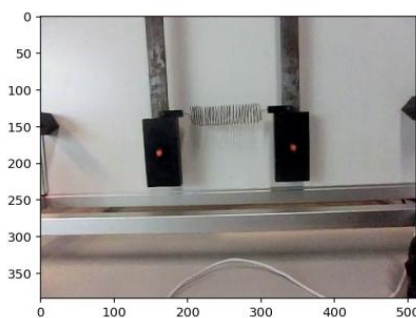


Figuur 4, opstelling met camera

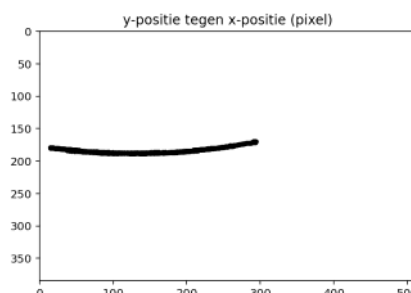


Figuur 5, centreren van camera

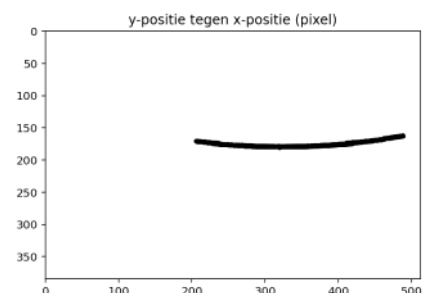
Met deze opstelling zijn testmetingen met als startuitwijking de maximale uitwijking uitgevoerd. Bij deze metingen zijn beide gewichtjes een keer getrackt om te checken of het hele beeld te tracken viel. Dit gaf de volgende plots, waarbij de plot 1 frame 1 weergeeft, plot 2 de tracking van het linker gewichtje, en plot 3 de tracking van het rechter gewichtje.



Plot 1, frame 1 van testmetingen

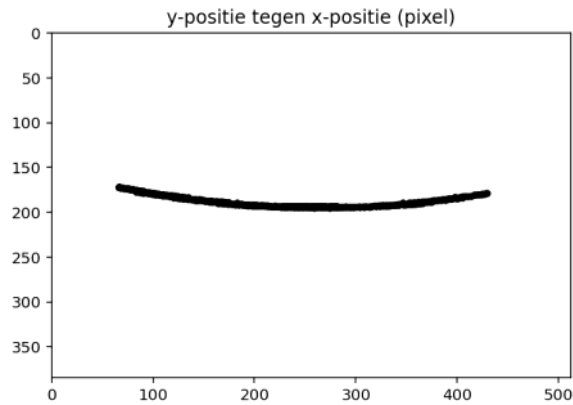


Plot 2, tracking linker gewichtje



Plot 3, tracking rechter gewichtje

Een andere mogelijkheid voor camerapositionering is focussen op 1 gewichtje gecentreerd in het camerabeeld, en alleen deze tracken (zie figuur 6 en plot 4). Dit werkt ook goed, maar biedt minder flexibiliteit en een moeilijker te definiëren schaal, waardoor de eerdergenoemde opstelling de betere is. Een voordeel is wel dat de x positie een makkelijkere en kleinere 'offset' nodig heeft bij de latere verwerking van de data van de uitwijking.



Figuur 6, camera gecentreerd op een enkel gewichtje Plot 4, tracking gecentreerd gewichtje

Als beide gewichtjes gedurende de hele video goed getrackt worden, geeft dit aan dat de opstelling en gekozen camera-instellingen goed zijn voor het experiment. Een systematische afwijking waar in deze opstellingen rekening mee gehouden moet worden, is dat de x positie van het gewichtje bij equilibrium zich niet op $x = 0$ bevindt. De equilibrium positie kan gehaald worden uit de plot met frame 1, zodat de uitwijking in pixels dan wel correct is, wat bij de testmeting ongeveer 140 px bedroeg. De pixelresolutie (wordt bepaald tot op 1 onafgeronde pixel, dus niet bijvoorbeeld 1.3 pixels), zorgt ook voor een onzekerheid in fysieke uitwijking, namelijk met de schaal van de testmeting: 0.13320 cm. Dit leidt tot een onzekerheid in hoekuitwijking van 0.0013053 rad (bepaald met lengte slinger in testmeting = 102.05 ± 0.05 cm, na omzetten naar standaard eenheden).

Op basis van gemeten tracking data kan de startuitwijking (maximale getrackte uitwijking) met hoge precisie gevonden worden. Er hoeft dan niet vooraf handmatig een specifieke hoek gemeten te worden waaronder de slinger wordt losgelaten. De hoekuitwijking op $t = 0$ kan namelijk bepaald worden met $\theta_0 = \arcsin(\text{uitwijking} / \text{lengte draaipunt tot tracking})$, waarbij de uitwijking bepaald is door de pixels om te zetten naar fysieke eenheden met behulp van de schaal. Wel zorgt dit ervoor dat het lastig is om de hoeken van beide slingers gelijk te krijgen, dit moet handmatig met menselijke precisie gedaan worden, waardoor er een grotere onzekerheid komt te zitten in de starthoek van de niet getrackte slinger, wat ervoor zorgt dat de slingers niet perfect in fase zijn. Dit zorgt voor een extra onzekerheid in de starthoek van ongeveer 3 graden = 0.052 rad.

De onzekerheden waar in dit systeem dus rekening mee gehouden moet worden zijn dan:

- Equilibrium niet bij $x = 0$ in pixelschaal (systematische onzekerheid), bij testmeting 140 px.
- Slinger laten vallen gebeurt niet op $t=0$ in de video.
- Slingers moeten handmatig naar beginhoeken gebracht worden: 0.052 rad.
- Pixelresolutie: ± 1 px
- Door de pixelresolutie: onzekerheid in uitwijking (met schaal testmeting): 0.0013053 cm
- Onzekerheid in hoekuitwijking hierdoor: 0.13090 rad
- Framerate, bij 240fps is de tijdsresolutie ongeveer 4.17 ms, dus een onzekerheid van ongeveer 2.85 ms

Dit geeft uiteindelijk als totale onzekerheden:

- Equilibrium niet op $x=0$ (systematische onzekerheid) bij testmeting: 140 px
- Slinger laten vallen gebeurt niet op $t=0$, verschilt per video
- Pixelresolutie: ± 1 px
- Onzekerheid in starthoek door pixelresolutie: 0.0533 rad
- Onzekerheid in uitwijking door pixelresolutie: 0.13320 cm
- Onzekerheid in tijdsresolutie door framerate: 2.85 ms
- Onzekerheden in controlegrootheden

Uit de testmetingen bleek dat een goede meting inclusief tracking ongeveer 10 minuten kost, waarvan 8 seconden slingertijd (zie week 8 vrijdag voor onderbouwing). Omdat er de hele video lang getrackt wordt, hoeft er niet 1 vast tijdstip t_n gekozen te worden waarop $\theta(t_n)$ gemeten wordt. Er kunnen meerdere tijdstippen vooraf bepaald worden, bijvoorbeeld 10, waardoor er na de metingen 10 verschillende onafhankelijke lineaire verbanden zijn. Voor al deze verbanden kan dan een fit gemaakt worden, waardoor er 10 verschillende waarden voor w_1 bepaald kunnen worden. Hiermee kan je dan de onzekerheid in w_1 verkleinen.

Meetmethode

Aangezien de testmetingen in de systeemsectie bij de tracking succesvol waren en een goed te definiëren schaal geven, ga ik die opstelling opnieuw gebruiken. Uit de testmetingen bleek dat de gekozen resolutie en framerate, gecombineerd met de positionering van de camera ervoor zorgen dat de tracking goed gaat. Hier de specificaties:

- Camerahoogte: 16 ± 0.2 cm
- Camera-afstand: 44 ± 1 cm
- Camera-instellingen: 240fps, 512x384 px
- Gewichtje gemarkeerd met oranje sticker
- Onderkant gewichtje hangt op zelfde hoogte als onderkant slinger
- Breedte te filmen beeld in cm: 68.2 ± 0.1 cm

Zie de foto's in de systeemsectie voor een duidelijker beeld hiervan. Het is voor de opstelling belangrijk dat de camera loodrecht kijkt op de slingers, en dat de stickers op de slingers een duidelijk andere kleur hebben dan de omgeving en altijd in beeld zijn (volledige uitwijking moet zichtbaar in beeld) zodat het trackingalgoritme deze goed trackt. Ik neem 15 minuten aan voor het bouwen van deze opstelling.

De vooraf bepaalde kwalitatieve waarden van de controlegrootheden bij deze opstelling zijn:

- $m = 92.28 \pm 0.01$ g (massa gewichtje)

- $M = 1459.03 \pm 0.07$ g (massa slinger)
- $l = 94.625 \pm 0.025$ cm (afstand zwaartepunt gewichtje tot draaipunt)
- $L = 102.05 \pm 0.05$ cm (lengte slinger)
- $h = 89.25 \pm 0.05$ cm (afstand bevestiging veer tot draaipunt)
- $k = 9.71 \pm 0.30$ N/m (veerconstante)
- $g = 9.80665 \pm 0.00001$ m/s² (zwaartekrachtsversnelling)

Ik neem een meetperiode (inclusief tracking) van 3 uur, en verwacht dus ongeveer 18 metingen te doen (uitgaande van meettijd van 10 minuten inclusief tracking), dus 18 verschillende starthoeken. Deze starthoeken bepaal ik niet vooraf, omdat deze niet vooraf exact bepaald hoeven te worden, zolang de slingers maar parallel staan (zie systeem). Ik houd er hierbij wel rekening mee dat ik niet dezelfde starthoeken vaker gebruik. Dit doe ik door te beginnen met de grootste starthoek, en dan steeds kleiner te gaan. Ik neem 10 verschillende vaste tijdstippen waarop ik de uitwijking pak. Omdat ik uitga van een meettijd van 10 minuten, met een effectieve slingertijd van 8 seconden, verdeel ik deze tijdstippen lineair, waarbij ik een redelijke marge wil aanhouden zodat ik geen data verlies. Ik neem daarom de 10 tijdstippen van $t = 1$ s tot aan $t = 6$ s, met intervallen van 0.5 s. Hierdoor kom ik uit op 180 effectieve metingen. De slingertijd van 8 seconden bleek uit testmetingen goed te zijn, omdat dit meerde oscillaties bevat, maar kort genoeg is zodat een kleine fout in de 'parallelheid' van de slingers niet binnen de tijd een merkbaar effect geeft.

Dit zijn de stappen die ik volg per meting:

- Ik laat de camera beginnen met filmen
- Ik breng beide slingers naar dezelfde starthoek (kleiner dan de vorige starthoek, en willekeurig als de starthoek al erg klein is), en kijk of de twee slingers nagenoeg parallel staan aan elkaar, zonder mijn hand voor de trackingstikker te houden
- Ik laat beide slingers tegelijk los, zonder dat mijn hand de trackingstikker bedekt
- Ik laat de camera nog ongeveer 8 seconden filmen, en stop deze daarna
- Ik start de volgende meting

Ik film met de camera elke onafhankelijk meting, en na alle metingen gedaan te hebben zet ik deze over naar de desktop, kopieer ik de video's naar een usb, en zet ze dan in mijn laptop. Vervolgens doorloop ik voor elke video apart het tracking-algoritme, wat veel tijd gaat kosten. Per tracking laat ik python de systematische fout van de x positie corrigeren, en verwijder ik voor elke meting de trackingsdata van voordat de slinger losgelaten is. Hierna laat ik python de starthoek berekenen op basis van de maximale uitwijking getrackt in de video na loslaten van de slinger. Vervolgens laat ik python de framenummers omrekenen naar tijdstippen en corrigeer ik deze zodat de frame waarop de slinger losgelaten wordt gebeurt op $t=0$. Hierna laat ik python voor elke t_n de corresponderende waarde voor de hoek wegschrijven naar een bestandje, met in kolom 1 de starthoek, kolom 2 t_n , en kolom 3 $\theta(t_n)$. Hierdoor heb ik voor verschillende starthoeken (onafhankelijke grootte) meerdere θ (afhankelijke grootte) op $t = t_n$ (controlegrootte).

Ik laat hierna dit bestandje met data inlezen in een ander python programma, ik plot dan voor elke t_n $\theta(t_n)$ tegen θ_0 , en maak voor elke t_n een aparte lineaire fit. Hiermee krijg ik dus 10 losstaande fits, waarvan ik de kwaliteit van de fit check door te kijken naar de gereduceerde χ^2 . Aan de hand van het lineaire verband uit de theorie sectie kan ik dan voor elke t_n een waarde voor w_1 berekenen, waarbij het script rekening houdt met propagatie van onzekerheden. Dit zijn de onzekerheden die ik laat door propageren:

- Equilibrium niet op $x=0$ (systematische onzekerheid) bij testmeting: 140 px
- Slinger laten vallen gebeurt niet op $t=0$, verschilt per video
- Pixelresolutie: ± 1 px
- Onzekerheid in starthoek door pixelresolutie: 0.0533 rad
- Onzekerheid in uitwijking door pixelresolutie: 0.13320 cm
- Onzekerheid in tijdsresolutie door framerate: 2.85 ms
- Onzekerheden in controlegrootheden

Ik krijg dan 10 waarden voor w_1 , waarop ik een strijdigheidsanalyse loslaat om te kijken of er eventuele uitschieters zijn en waardoor dat komt, wat bepaald welke gevonden waarden van w_1 ik meeneem om mijn beste schatter van w_1 te bepalen. Ik bepaal dan de beste schatter van w_1 door het gemiddelde te pakken van de goedgekeurde waarden, en vergelijk deze met de gevonden waarde in de hypothese. Ik reken voor de dataverwerking en analyse een uur, maar dat hoeft niet per se op locatie te gebeuren.

Er zijn geen veiligheidseisen bij dit experiment en geen taakverdeling aangezien ik alleen werk.

Bronnen:

- <https://ap.fysik.unibas.ch/PDF/Manuals/English/IM4en.pdf> (sectie 1.2.2 - 1.2.3)
- <https://ucscphysicsdemo.sites.ucsc.edu/physics-5a6a/coupled-pendulum/>
- <https://www.edrawmax.com/templates/1032376/>

Week 9 woensdag

Ik ga de opstelling bouwen zoals beschreven in het meetplan, met deze eigenschappen dus:

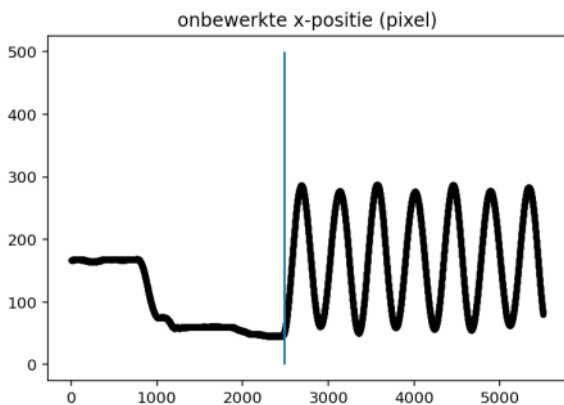
- Camerahoogte: 16 ± 0.2 cm
- Camera-afstand: 44 ± 1 cm
- Camera-instellingen: 240fps, 512x384 px
- Gewichtje gemarkeerd met oranje stikker
- Onderkant gewichtje hangt op zelfde hoogte als onderkant slinger
- Breedte te filmen beeld in cm: 68.2 ± 0.1 cm

Het viel mij later nog op dat de camerabeelden niet helemaal waterpas waren in de testmetingen, dus hier let ik op bij het bouwen van de opstelling.

Hierna ben ik begonnen met de meetserie. Ik mik op in ieder geval 18 metingen, zoals beschreven in het meetplan. Ik time elke keer 8 seconden nadat ik het gewichtje loslaat zodat ik zeker weet dat elke video lang genoeg is. Als een video fout gaat doordat de gewichtjes niet parallel hangen verwijder ik deze meteen van de camera. Na elke video check ik of de trackingstikker niet bedekt wordt ergens in de video. Ik begin mij de maximale uitwijking en ga vervolgens steeds kleiner. Ook check ik na elke video of de camera nog goed gepositioneerd is, en corrigeer ik dit wanneer hij bewogen is.

Het viel me vandaag pas op dat de slingers niet altijd goed bevestigd zitten bij het draaipunt. Vanaf nu let ik erop dat ze voor elke meting goed zitten. De videometingen gingen iets sneller dan verwacht, ik was na een uur klaar met 25 video's en ben daarna begonnen met overzetten naar de laptop, om vervolgens te gaan tracken. Ik had wat problemen met de desktop werkend krijgen, dus loop hierdoor flinke vertraging op.

Ik ben begonnen met tracken door de video's in een folder te stoppen en dan met een voorgeschreven python script al deze video's te doorlopen. Het script zoekt zelf het punt waarop de slinger losgelaten wordt, zodat ik dit niet handmatig hoeft te doen, maar de data wel goed gesliced wordt voor de latere dataverwerking. De data wordt door het script in een output bestandje weggeschreven.



Hierboven een voorbeeld van waar de functie de data sliced bij een doorsnee video. Op de blauwe lijn wordt de slinger (geschat) losgelaten. Dit is alleen niet onfeilbaar.

Het ging fout bij:

- Video 3 (blauwe lijn oscillatie te laat)
- Video 5: (halve oscillatie te laat)
- Video 8: (halve oscillatie te laat)
- Video 9: (halve oscillatie te laat)
- Video 10: (te vroeg)
- Video 11: (te laat)
- Video 12: (te laat)
- Video 15: (te laat)
- Video 24 (te laat)

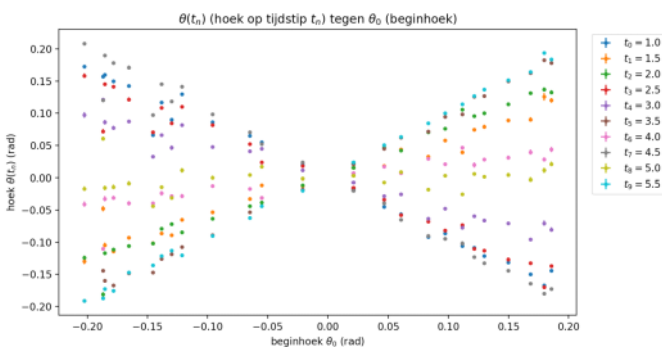
Deze functie werkte slecht bij kleine starthoeken, ik had tussen mijn testmetingen ook geen kleine starthoeken om deze functie op te testen.

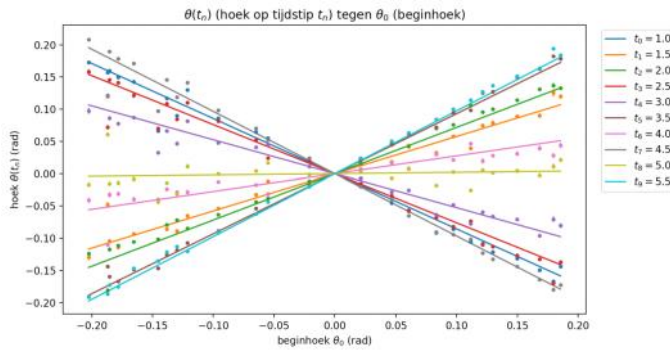
Ik trackte elke video het linker gewichtje. Bij video 6 moest ik de rechter tracken omdat mijn hand heel even over de stikker heen bewoog waardoor het algoritme de stikker kwijt raakte. Dit maakt verder voor de dataverwerking niet uit, hier houdt het dataverwerkingsscriptje rekening mee.

Uiteindelijk was ik klaar met de metingen (inclusief tracking rond 17:30. Deze uitloop kwam doordat ik meer video's had gemaakt (25 ipv 18) dan ik origineel van plan was, omdat ik te ambitieus werd. Daarnaast heeft het gedoe met de desktop mij ook aardig wat tijd gekost. De originele inschatting van 18 video's inclusief tracking was dus wel goed.

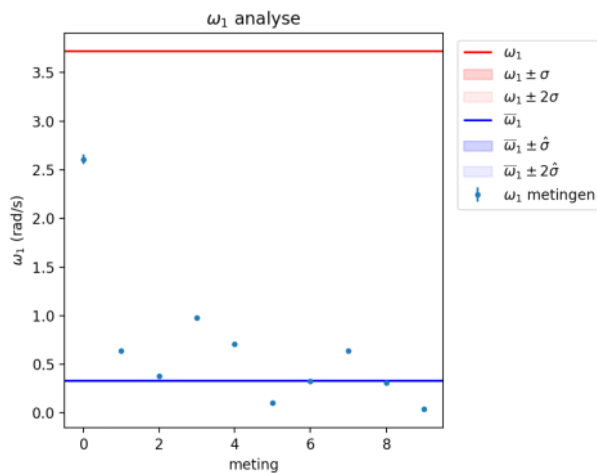
Week 9 vrijdag

Ik ben thuis verder gegaan met de data-analyse en verwerking van week 9 woensdag. Ik heb in mijn script de optie toegevoegd om handmatig het frame waarop de slinger losgelaten wordt te selecteren, en heb hiermee de video's verwerkt die fout waren gegaan op woensdag. De data plotten en fitten ging zoals verwacht, zie hieronder.





Maar ik kwam ook achter een fout in het model dat ik gebruikte voor mijn berekening van w_1 . Omdat er geldt: $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(w_1 \cdot t)$ speelt periodiciteit een rol. Als t groot is, zal \cos nog steeds tussen de -1 en 1 zitten. Maar in de berekening van w_1 wordt deze eigenschap verloren, vanwege: $w_1 = \arccos(a)/t$. Als t hier groot wordt, wordt w_1 erg klein, en aangezien ik de $\theta(t)$ op ook grotere tijdstippen wilde hebben voor een goede spreiding in de dataset was dit een probleem, want w_1 werd snel flink kleiner, zie hieronder.



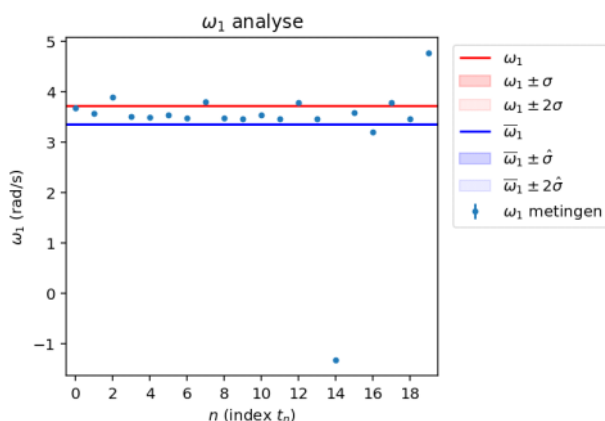
Dit heb ik opgelost door in plaats van de helling te fitten en daarna te berekenen met de \arccos , direct lineair te fitten voor ω_1 voor alle t in t_n . Hieronder het vernieuwde fit model:

```
# het model definiëren
def f(B, x):
    return x * np.cos(B[0] * tn[n])
```

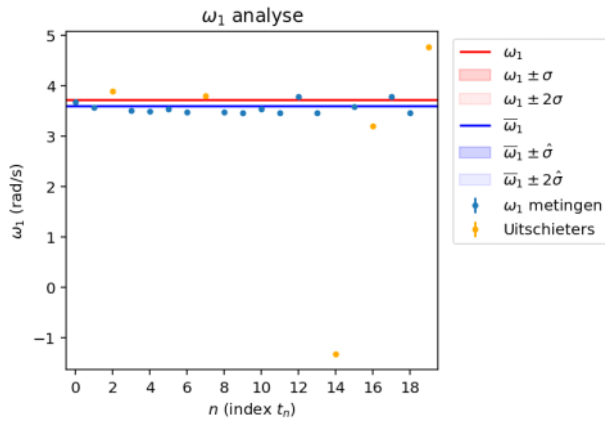
Dit blijft dus wel een lineaire fit, en verder veranderd er niks buiten het feit dat ik nu w_1 inclusief onzekerheid direct uit de fit parameters kan krijgen. Daarnaast kon ik mijn dataset verbreden door in plaats van de t tussen 1 en 6 te nemen met stapjes van 0.5 uit te breiden naar t tussen 1 en 8 met stapjes van 0.35. Hierdoor verdubbel ik de hoeveelheid data (van 10 tijdstippen naar 20) waardoor ik nauwkeuriger w_1 kan berekenen.

Na het analyseren van de data viel het mij op dat er een paar uitschieters bijzitten die flink afwijken van de rest van de gevonden waarden voor w_1 . Deze wilde ik niet meenemen in de dataset voor de eindberekening van w_1 , dus ben ik op zoek gegaan naar methodes om uitschieters te identificeren. Ik kwam uit op de MAD-methode (bron: <https://codefinity.com/courses/v2/165dbadd-b48e-4a7f-8b0d-1b8477c22a1d/047e166d-bc62-4bd1-8114-f0771ef62d83/2e168ca6-063c-4a24-9873-59915e1f4b0d>). Ik moest een methode vinden die onafhankelijk was van de standaard deviatie, omdat de onzekerheid erg klein is bij de metingen en de beste schatter. Als ik dan een criterium zou hebben van $3 \cdot \sigma$, dan zou vrijwel alles erbuiten vallen omdat σ gewoon zo klein is. Daarom kwam ik uit op de MAD-methode. Hierbij check je welke datapunten verder liggen dan $\text{threshold} \cdot \text{MAD}$. MAD is hier de mediaan van het verschil tussen elk datapunt en de mediaan van alle datapunten. Ik heb hierbij meerdere thresholds geprobeerd visueel beoordeeld of de uitschieters goed geïdentificeerd werden, en kwam uit op een threshold van 4 als goede waarde om uitschieters in deze dataset te identificeren.

Hier de gevonden w_1 data (de rode lijn is de theoretische referentiewaarde en de blauwe de beste schatter)

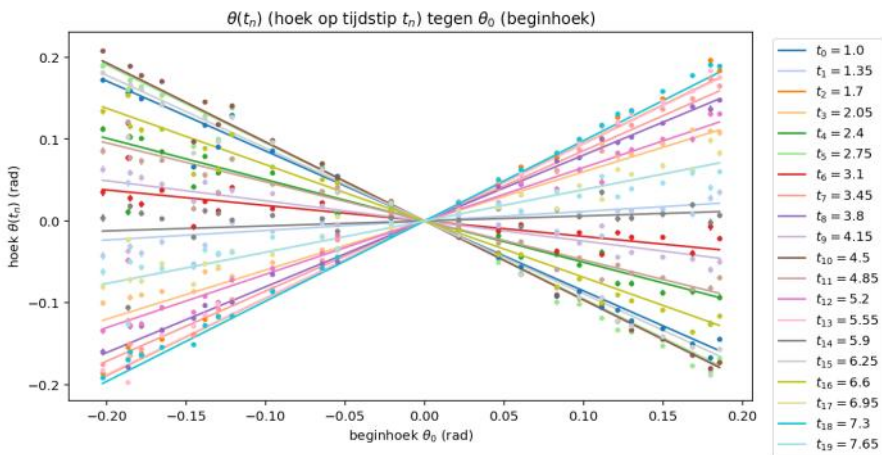
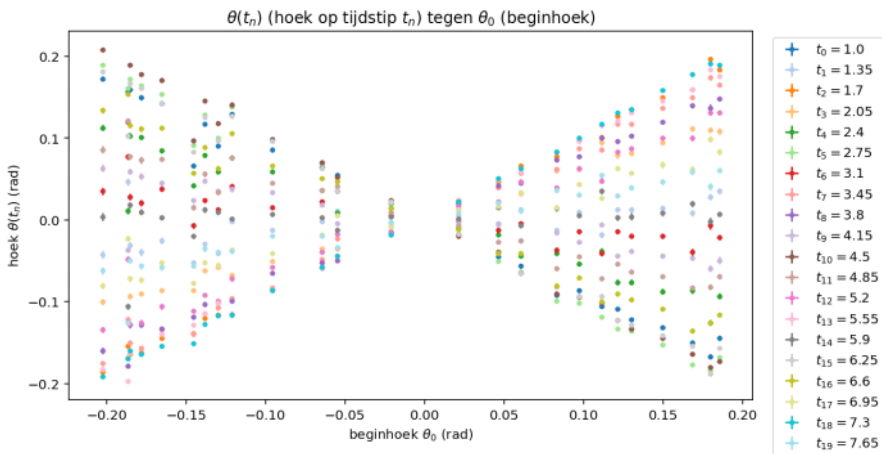


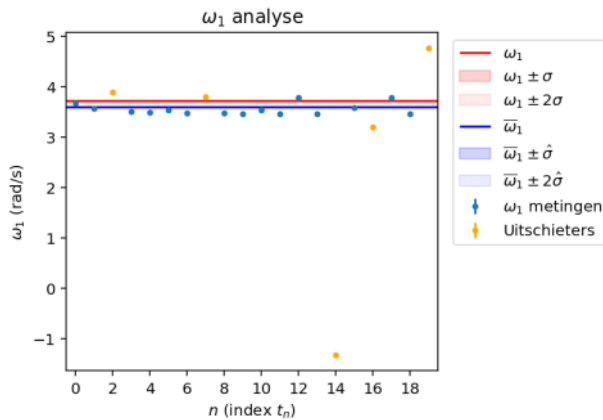
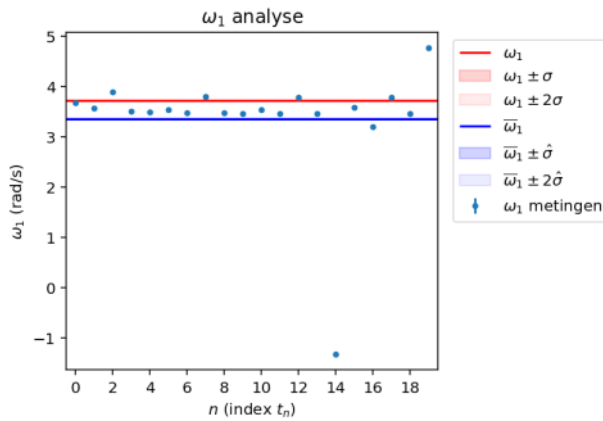
Hier de data na gebruik van de MAD-methode om uitschieters te identificeren met de beste schatter alleen berekend uit de niet-uitschieters:



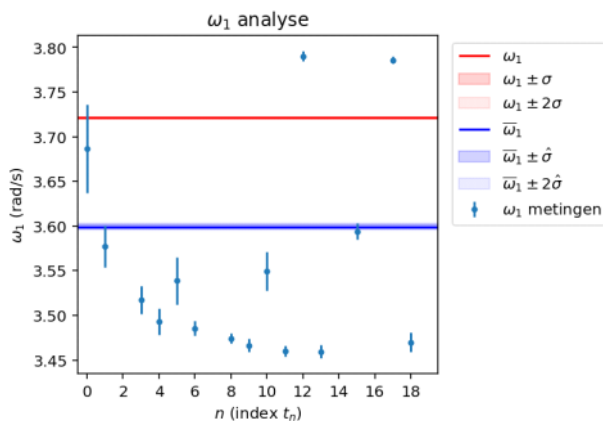
Het script voert ook een strijdigheidsanalyse uit op basis van het 2 sigma criterium. Hierbij is de beste schatter strijdig met de theoretische waarde als deze meer dan 2 sigma verschilt met de referentie (theoretische) waarde. Daarnaast berekent het de gereduceerde χ^2 tussen de verkregen w_1 en de referentie (theoretische) waarde om te kijken hoe accuraat de data past bij het theoretisch model.

Na de volledige en correcte dataverwerking vond ik deze resultaten:





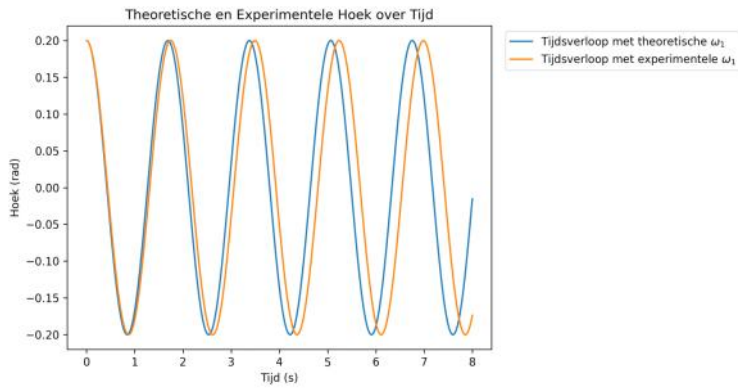
In deze twee bovenstaande plots valt het op dat er een negatieve waarde van w_1 tussen zit. Dit valt te verklaren doordat er geldt: $\cos(x) = \cos(-x)$, en de fit kan niet automatisch zien of de negatieve of positieve de beste is, aangezien ze dus hetzelfde resultaat geven. Ik laat vanaf nu het script hier rekening mee houden, door vanaf nu de absolute waarde van w_1 te pakken wanneer hij deze uit de fitparameter haalt. Bij de uiteindelijke rapportage zal ik dus nieuwe plots met de absolute waarde van de w_1 meting neerzetten.



```

Resultaten van de w1 analyse:
w1 theorie:      3.7211+/-0.0008
w1 beste schatter: 3.5992+/-0.0021
Strijdig:       True
Red chi2:       566.9836337166768
Binnen 20% van theorie: True
  
```

Deze plot hieronder geeft het tijdsverloop weer van de hoek bij een starthoek van 0.2 rad. Hierbij valt op dat er al na 1,5 seconden een zichtbaar verschil is tussen de twee theoretische en experimentele hoekfrequenties.



Hierna ben ik aan het lab report gaan werken.

Lab Report

Dit experiment had als doel om experimenteel w_1 (de eigenfrequentie in fase) te bepalen van een gekoppelde slinger.

Resultaten

De ruwe gemeten data is automatisch na doorloop van het trackingscript weggeschreven naar een databestand (output.txt) en bestaat uit de kolommen:

- frame-nummer
- x-uitwijking (in pixels)
- y-uitwijking (in pixels)

Framenummer 0 correspondeert met het moment waarop de slinger is losgelaten en dus vrij slingert. Elke video bevat minimaal 8 seconden aan effectieve slingertijd en de data voor elke video begint dus ook op frame nummer 0. Daarnaast is voor elke video de startuitwijking uniek. De data is verkregen met een Exilim camera, gefilmd met 240 fps met 512x384 pixelresolutie.

Deze data is vervolgens verwerkt met een data-verwerkingsscript. In dit script wordt eerst de data omgezet naar fysieke grootheden, dus framenummer naar tijd, en pixeluitwijking naar uitwijking in meters, op basis van een vooraf bepaalde schaalfactor (zie werkplan). Vervolgens wordt op basis van de x uitwijking in meters de hoek berekend, waarbij er rekening gehouden wordt met de lengte vanaf het trackingspunt tot het draaipunt. Onzekerheden in dit script worden automatisch gepropageerd door de uncertainties-package. Zie het script voor alle grootheden en hun onzekerheden die van belang zijn. Vervolgens haalt het script voor 20 vaste tijdstippen de hoek op tijdstip t uit elke video, en geeft deze weer in een scatterplot (zie figuur 2). Hiermee kan volgens het theoretisch model (zie werkplan) een lineair verband gevonden worden tussen $\theta(t)$ en $\theta(t=0)$. Omdat er 20 verschillende vaste t gebruikt zijn, zijn er 20 verschillende lineaire verbanden. Het script voert voor al deze 20 verbanden een lineaire fit uit (zie figuur 3), waarbij w_1 een fitparameter is. Dit voorkomt de bepaling van verkeerde w_1 vanwege de periodiciteit van het model. Per vast tijdstip levert dit dus een schatting van w_1 , met bijbehorende onzekerheid (zie figuur 4). Uit deze verzameling wordt vervolgens een beste schatter voor w_1 berekend (inclusief best geschatte onzekerheid), op basis van een gewogen gemiddelde.

De verzameling w_1 bevat enkele uitschieters. Deze uitschieters worden door het script geïdentificeerd d.m.v. de MAD-methode, met een drempel van $4 \cdot \text{MAD}$ (zie figuur 5 voor de uitschieters bepaald d.m.v. deze methode). Deze methode is gekozen omdat de onzekerheden in de individuele metingen erg klein zijn, waardoor een identificatie aan de hand van een sigma criterium ongeschikt was. Deze uitschieters worden vervolgens uit de dataset gehaald, en de gewogen beste schatter wordt opnieuw berekend (zie figuur 6).

De definitieve experimenteel **gewogen beste schatter had waarde: $3.5992 \pm 0.0021 \text{ rad/s}$.**

De **theoretisch berekende referentie waarde was: $3.7211 \pm 0.0008 \text{ rad/s}$.**

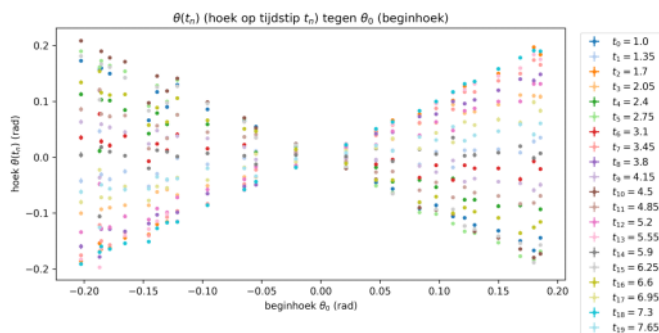
Vervolgens is hierop een strijdigheidsanalyse losgelaten op basis van het 2sigma criterium, en is de gereduceerde χ^2 berekend om te bepalen of de experimentele meting strijdig is met de theoretische waarde. Hieruit bleek dat volgens het 2sigma criterium de twee waarden strijdig waren, en de gereduceerde χ^2 had een waarde van rond de 567, wat aangeeft dat het model en experiment elkaar niet goed weergeven. Dit komt waarschijnlijk doordat de onzekerheden voor allebei erg klein zijn. Hieronder in figuur 1 staat de console output van het verwerkingsscript, waaruit ik bovengenoemde waarden gehaald heb. Hierna voert het script een tijdsevolutie uit van het theoretisch model voor beide w_1 , met als starthoek 20 rad (zie figuur 7), voor een duidelijk en intuïtiever beeld van het significante verschil (en strijdigheid) tussen de experimentele en theoretische waarde.

```
-----
Resultaten van de w1 analyse:
w1 theorie:           3.7211+/-0.0008
w1 beste schatter:    3.5992+/-0.0021
Strijdig (2sigma):    True
Red chi2:             566.9836337166768
Binnen 20% van theorie: True
-----
```

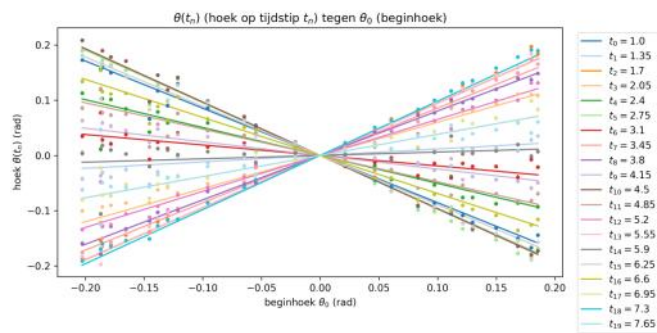
Figuur 1: de console output van het data-verwerkingsscript, met de definitieve waarden.

Zie het script voor uitgebreidere en specifieke verwerkingsmethodes.

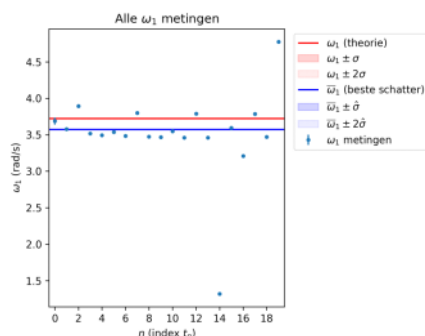
Hieronder de plots die bij de data verwerking horen:



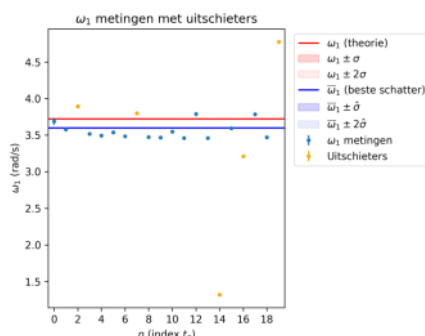
Figuur 2: scatterplot van de hoek op tijdstip t_n tegen de beginhoek



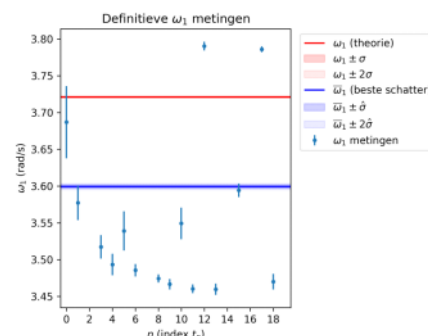
Figuur 3: lineaire fits uitgevoerd op de scatterplot voor alle t_n



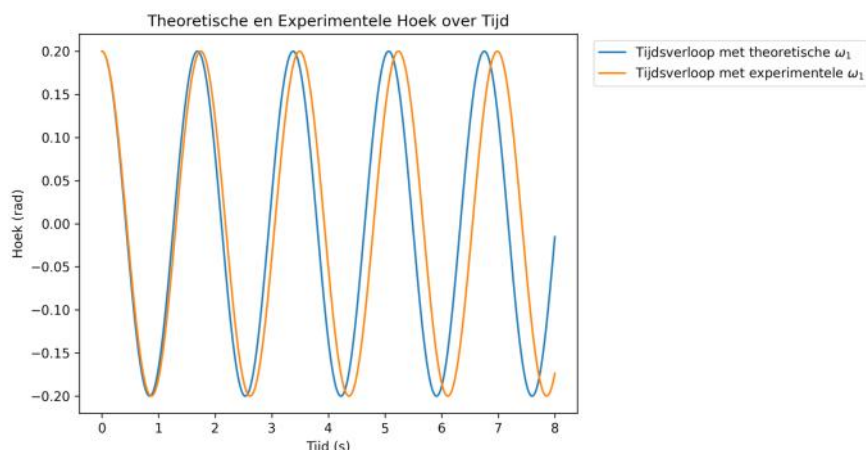
Figuur 4: alle w_1 bepalingen uit de fits, met de theoretische referentie waarde (rood) en de beste schatter (blauw)



Figuur 5: de w_1 metingen na bepaling van de uitschieters, met een herziene beste schatter



Figuur 6: De definitieve w_1 metingen en beste schatter (figuur 5 zonder de uitschieters geplott)



Figuur 7: tijdsevolutie van de hoek bij een startuitwijking van 0.20 rad, bij de theoretisch en experimenteel bepaalde w_1

Conclusie

Het onderzoeksdoel was: Het experimenteel bepalen van de eigenfrequentie w_1 (in fase) van een gekoppelde slinger, door met cameratracking de hoek θ op vaste tijdstippen t_n te meten afhankelijk van de verschillende beginhoeken $\theta(t=0)$, om daarna op het lineaire verband tussen $\theta(t_n)$ en $\theta(t=0)$ datafitting toe te passen en daarvanuit w_1 te berekenen.

Dit doel is behaald, te zien aan de sectie resultaten. Ook komt mijn hypothese (zie werkplan) overeen met de resultaten. Er is namelijk een duidelijk lineair verband gevonden tussen $\theta(t_n)$ en $\theta(t=0)$, waarbij de lijn door de oorsprong gaat, en hieruit is succesvol een experimenteel verkregen waarde voor w_1 bepaald die binnen 20% van de theoretisch voorspelde waarde ligt. Er is, net als in de hypothese voorspeld, wel een verschil tussen de theoretische en experimentele waarde van w_1 , te zien in figuur 6, en een intuïtief gevolg hiervan is te zien in figuur 7.

Reflectie

De grootste bijdrage aan de onzekerheid komt uit het handmatig parallel moeten hangen van de slingers voor het loslaten (zie werkplan). De kleine hoek aanname is bij het hele experiment juist uitgevoerd. Daarnaast heeft het wel/niet waterpas staan van de camera en de slechte/goede bevestiging van het draaipunt ook een bijdrage aan de betrouwbaarheid van de metingen. De grootste fout bij dit experiment was het theoretisch model, waarbij ik eerst w_1 wou bepalen met de arccos, waardoor periodiciteit verloren gaat, en w_1 slecht bepaald wordt (zie labjournaal week 9 vrijdag). Verder heeft het feit dat mijn lab partner de dag voor de start van dit experiment gestopt is met dit vak volgen, buiten dat het meer tijd gekost heeft en ik er thuis ook veel aan heb moeten zitten, verder geen gevolgen gehad voor het verloop van het experiment. Door goed te plannen en thuis voorbereidend werk te doen kon ik de contacttijd goed benutten om van de opstelling gebruik te maken, en is het experiment al met al redelijk vlot verlopen.

Een verbetering aan dit experiment zou zijn om een mechanisme te hebben die beide slingers naar een gelijke startuitwijking brengt, en die ze ook met veel grotere precisie tegelijk los kan laten. Ook is het een idee om de opstelling meer te schikken naar het theoretisch model. Hiermee bedoel ik bijvoorbeeld de vorm van de slinger zelf te versimpelen (sferisch symmetrisch bijvoorbeeld), zodat er minder aannames gemaakt hoeven te worden in het theoretisch model, waardoor er mogelijk minder strijdigheid is tussen de theoretische en experimentele waarde van w_1 .