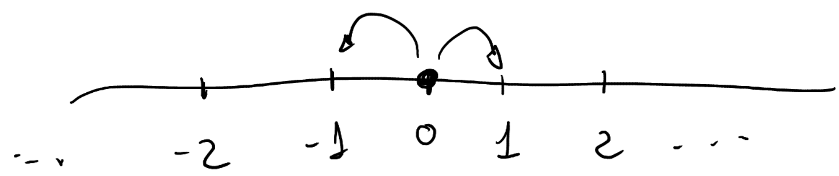
FEDERICO.POLITO@UNITO.IT

V. CARLO ALBERTO 10

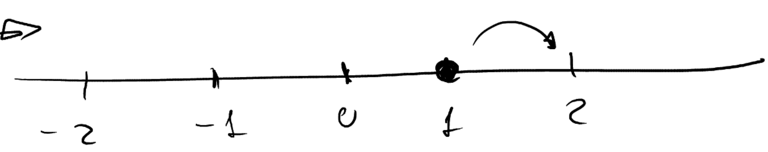
ROBERTA.SIROVICH@UNITO.IT

PROBABILITÀ

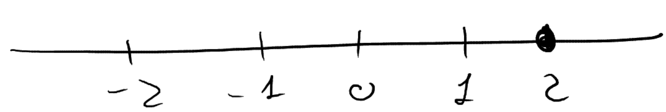


TEMPO 1

TEMPO 2



TEMPO 3



MONETA $\quad PROB(T) = PROB(C) = \frac{1}{2}$

RIGUARDA ESPERIMENTI CHE HANNO UN ESITO NON FACILMENTE PREVEDIBILE.

LANCIO DI UN DADO (EQUO)

PERSI DIACONIS

TEORIA DEGLI INSIEMI

UN INSIEME È UNA COLLEZIONE DI OGGETTI CHE VENGONO DETTI "ELEMENTI DELL'INSIEME"

$$S = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$S = \{x \,/\, x \text{ ha LA PROPRIETÀ } p\}$$

LANCIO DI UN DADO

$$S = \{x \,/\, x \text{ SIA PARI}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$S = \{x \,/\, x \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{4, 6, 3, 2, 5\}$$

S NUMERABILE

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{T, C\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$3 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \ni 3$

S NON NUMERABILE

ES. $\mathbb{R}$

$T \subseteq S$ T È INCLUSO IN S

$(\forall x \in T \Rightarrow x \in S)$

$\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\dots$ $\{6\}$

SINGOLETTI

LANCIO DELLA MONETA

$\{T, C\}$ ← SPAZIO CAMPIONARIO Ω

LANCIO DI UN DADO

$\{1,2,\dots,6\}$ ← SPAZIO CAMPIONARIO Ω

SPAZIO CAMPIONARIO = INSIEME DEI RISULTATI DI UN ESPERIMENTO PROBABILISTICO

SIANO A, B DUE INSIEMI:

$$A^c = \{x \,/\, x \notin A\}$$ [COMPLEMENTARE]

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$ [UNIONE]

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$ [INTERSEZIONE]

$\emptyset$ INSIEME VUOTO $\{\}$

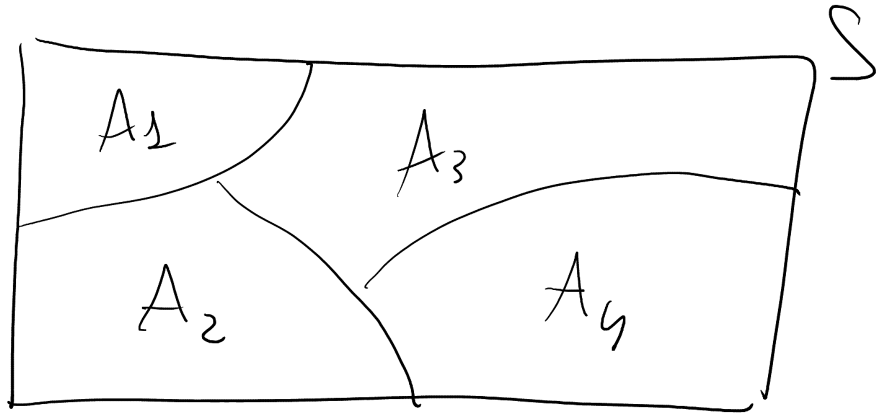
SE $\boxed{A \cap B = \emptyset}$ ALLORA A, B SONO "DISGIUNTI" (o "INCOMPATIBILI")

DATO S INSIEME. CHIAMO "PARTIZIONE DI S" UNA COLLEZIONE DI INSIEMI $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ CON LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) DISGIUNTI DUE A DUE:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i,j \,/\, i \neq j.$$

② $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$



$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = S$$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$A_1 \cap A_3 = \emptyset$

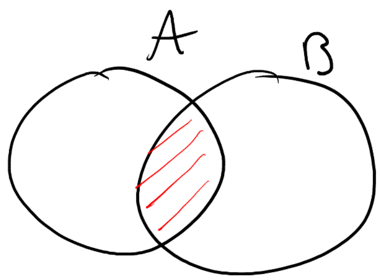
$A_1 \cap A_4 = \emptyset$

$\vdots$

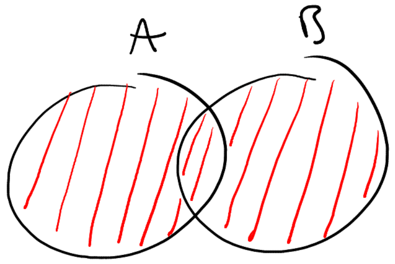
PARTIZIONE DI S

$(A_i)_{i=1}^{4}$

DIAGRAMMI DI VENN



$A \cap B$



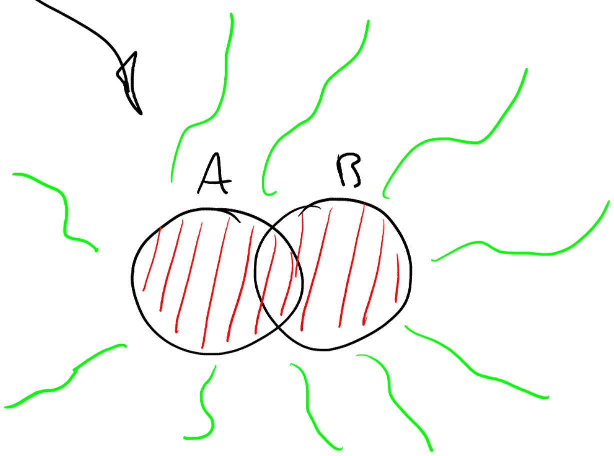
$A \cup B$

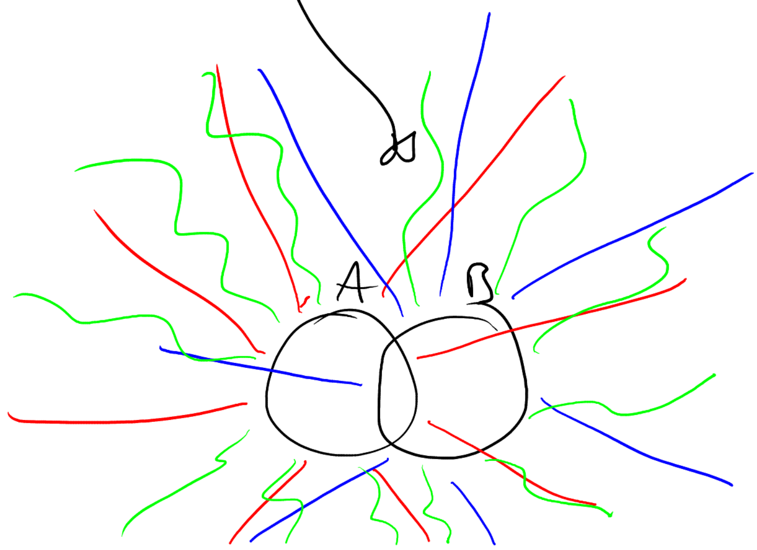
LEGGI DI DE MORGAN:

A, B

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$





SIA $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ COLLEZIONE DI INSIEMI

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

MODELLO PROBABILISTICO $\rightarrow$ PROBABILITÀ

MODELLO PROBABILISTICO

OGGETTO MATEMATICO CHE FORNISCE LA RAPPRESENTAZIONE ASTRATTA DI

ESPERIMENTO PROBABILISTICO

① SPAZIO CAMPIONARIO

Ω ⇒ INSIEME DEI POSSIBILI RISULTATI O ESITI DELL'ESPERIMENTO PROBABILISTICO.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega = \{T, C\}$$

② $\mathbb{P}$ LEGGE DI PROBABILITÀ

È UNA FUNZIONE

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\underset{\in \mathbb{R}}{x} \longmapsto e^x$$

Ω $\quad \mathcal{P}(\Omega)$ L'INSIEME DELLE PARTI DI Ω.

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underset{\mathcal{P}(\Omega)}{\overset{A}{\cap}} \longmapsto \mathbb{P}(A) \qquad (\mathbb{P}(A) = 0,3)$$

GLI ELEMENTI DI $\mathcal{P}(\Omega)$ VENGONO DENOMINATI "EVENTI"

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\cup\!|$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}$ DEVE SODDISFARE ALCUNE PROPRIETÀ:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3 (ADDITIVITÀ)

- SIA A, B EVENTI , $A \cap B = \emptyset$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

- SIA $(A_i)_{i=1}^{+\infty}$ UNA COLLEZIONE DI EVENTI DISGIUNTI DUE A DUE.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

SE $\mathbb{P}$ SODDISFA GLI ASSIOMI 1, 2, 3 SI CHIAMA FUNZIONE DI PROBABILITÀ.

<u>LANCIO DI UNA MONETA:</u>

$$\Omega = \{T, C\}$$

$$\Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{\{T\}, \{C\}, \{T, C\}, \emptyset\}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset)$$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$$

$$\Omega \cap \emptyset = \emptyset$$

$$= \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$= 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbb{P}(\emptyset) = 0}$$

(ES): LANCIO DI UNA MONETA:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{T\} \cup \{C\}) = \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(C)$$

MONETA BILANCIATA:

$$\underline{\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C)}$$

$$= 2\,\mathbb{P}(T)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\{T, C\}$$

(ES) LANCIO DI UN DADO EQUO CON n FACCE, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset,$$

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}$$

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \ldots, \ldots$$

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \ldots, \ldots$$

$$\vdots$$

$$\{1,2,3,\ldots,n-1\}, \{2,3,\ldots,n\}, \ldots$$

$$\Omega$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(\quad , \quad , \quad , \quad \ldots , \quad)$$

$$n \cdot n-1 \cdot n-2 \quad \ldots \quad 2 \cdot 1 = n!$$

es $n = 6$

$k = 2$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{2}\ \cancel{4!}} = 15$$

DADO EQUO $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{n\})$

$$\boxed{1} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n\})$$

ADDITIVITÀ

$$= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{n\})$$

$$\boxed{= n\,\mathbb{P}(\{1\})}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{n\})$$

ADDITIVITÀ

$$\mathbb{P}(\{i,j\}) = \mathbb{P}(\{i\} \cup \{j\}) = \mathbb{P}(\{i\}) + \mathbb{P}(\{j\}) \qquad i \neq j$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\mathbb{P}(\{i,j,k\}) = \mathbb{P}(\{i\} \cup \{j\} \cup \{k\}) \qquad i \neq j \neq k$$

$$= \mathbb{P}(\{i\}) + \mathbb{P}(\{j\}) + \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{3}{n}$$

$\{i\}$ SI VERIFICA $\Rightarrow$ $\{i,j,k\}$ SI VERIFICA

$$\{i\} \subseteq \{i,j,k\}$$

$A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROB.

$$\mathbb{P}(\{i,j,k\}) = \frac{\#\{i,j,k\}}{\#\Omega} = \frac{3}{n}$$

$$= \frac{\#\text{ CASI FAVOREVOLI AL VERIFICARSI DI } A}{\#\text{ CASI POSSIBILI}}$$

$\mathbb{P}$ CHE ASSEGNA MASSA DI PROBABILITÀ UGUALE AI SINGOLETTI SI CHIAMA "UNIFORME DISCRETA"

$\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA SE Ω È FINITO
E $\mathbb{P}$ ASSEGNA LA STESSA MASSA DI PROB. AD OGNI
SINGOLETTO.

LANCIO 3 VOLTE UNA MONETA EQUA:

$$\Omega = \{TTT, CCC, TCC, CTC, CCT, TTC, TCT, CTT\}$$

$$(\; , \; , \;)$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

LUNGHEZZA STRINGA.

N° SIMBOLI CHE POSSO UTILIZZARE

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{TTT\}, \dots, \{CCC\}, \{TTT, CCC\}, \dots$$

$$\dots$$

$$\mathbb{P}(\{TTT\}) = \frac{1}{8} = \frac{\#\{TTT\}}{\#\Omega}$$

I SINGOLETTI HANNO LA STESSA PROB., CIOÈ $\mathbb{P}$ È UNIFORME DISCRETA

$A =$ "IL PRIMO LANCIO È T"

$= \{TTT, TCC, TTC, TCT\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$B =$ "OTTENGO ESATTAMENTE 2 TESTE"

$= \{TTC, TCT, CTT\}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{8}$

$C =$ "OTTENGO ALMENO DUE TESTE"

$= \{TTC, TCT, CTT, TTT\}$ $\quad \mathbb{P}(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$D =$ "OTTENGO PIÙ DI DUE TESTE"

$= \{TTT\}$ $\quad \mathbb{P}(D) = \frac{1}{8}$

PROPOSIZIONE: SIANO A, B, C EVENTI.

a) SE $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

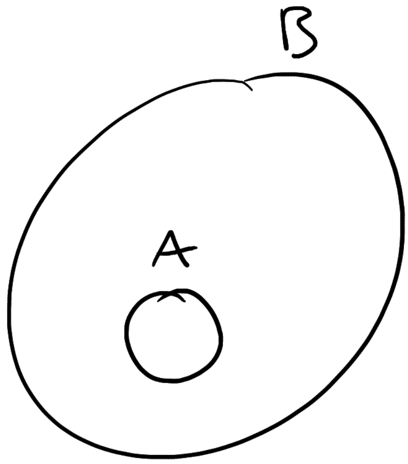
ⓓ $$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

ⓐ $$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\{B\setminus A\}\cup\{A\})$$

DISGIUNTI.

$$=\boxed{\mathbb{P}(B\setminus A)}+\mathbb{P}(A)$$

$$\geq \mathbb{P}(A)$$

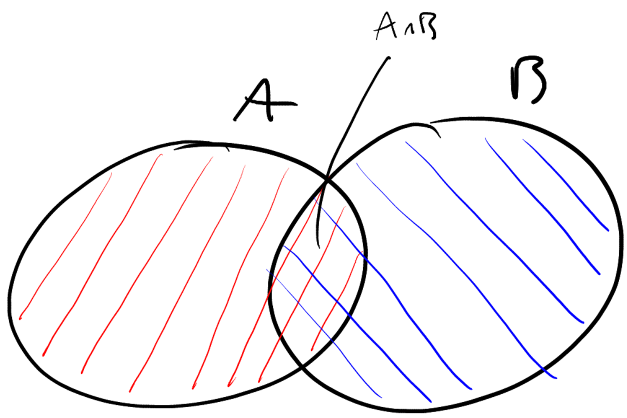


$$B=\{TCT,\ CTT,\ TTC\}$$

$$A=\{TTT\}$$

$$\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$$

ⓑ $\mathbb{P}(A\cup B)$



$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

(c)

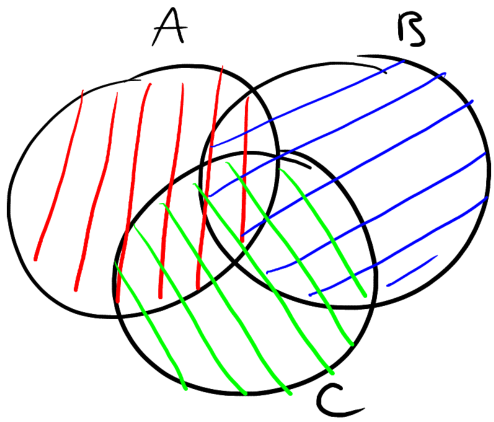
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\geq 0}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

SUB-ADDITIVITÀ

(d)

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$- \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$- \mathbb{P}(A \cap C)$$
$$- \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

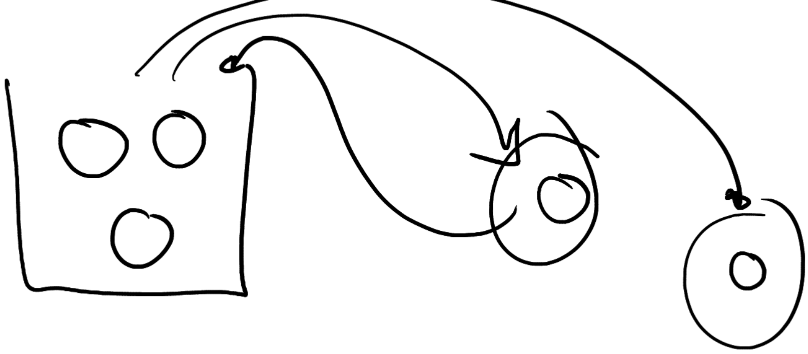


ESERCIZIO

UNA SCATOLA CONTIENE 3 BIGLIE: UNA ROSA, UNA VERDE, UNA BLU.

ESTRAGGO UNA BIGLIA, LA REIMBUSSOLO E ESTRAGGO UNA SECONDA BIGLIA.

SCRIVERE UN POSSIBILE MODELLO PROBABILISTICO E CALCOLARE LA PROB. CHE LE DUE BIGLIE ESTRATTE SIANO UGUALI.



$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \ , \ \omega_i \in \{R, V, B\}, i \in \{1,2\}\}$$

ω_1
ω_2

$$\# \Omega = 3^2 = 9$$

LA COMPOSIZIONE DELLA SCATOLA NON MUTA ALLA SECONDA ESTRAZIONE

$\mathbb{P} \to$ USO LA UNIFORME DISCRETA ($\to$ SIMMETRIA)

A = "LE DUE BIGLIE ESTRATTE SONO UGUALI"

$$A = \{RR, VV, BB\} \qquad \# A = 3$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO

UN DADO A 4 FACCE EQUO VIENE LANCIATO RIPETUTAMENTE FINO A CHE ESCE UN NUMERO PARI.
SCRIVERE LO SPAZIO CAMPIONARIO PER QUESTO ESPERIMENTO.
QUANTI SONO GLI ESITI POSSIBILI?
POSSO USARE LA LEGGE UNIFORME DISCRETA

Ω

$(1,3,4)$ (2)

$(3,2)$ $\cancel{(4,2,4)}$

$\cancel{(2,1)}$

$$\Omega = \{ (w_1, w_2, \dots, w_N),\ N \in \{1,2,3,\dots\} \ / \ w_N \text{ SIA PARI E } w_1, \dots, w_{N-1} \text{ SIANO DISPARI},\ w_i \in \{1,2,3,4\},\ i \in \{1,\dots,N\} \}$$

$$\#\Omega = +\infty$$

NO, NON POSSO USARE LA LEGGE UNIFORME DISCRETA, PERCHÉ Ω NON È FINITO.

ESERCIZIO

UN GRUPPO DI 5 RAGAZZI E 10 RAGAZZE VIENE MESSO IN FILA IN ORDINE CASUALE.

1. CALCOLARE LA PROB. CHE LA PERSONA IN QUARTA POSIZIONE SIA UN RAGAZZO.

2. CALCOLARE LA PROB. CHE LA PERSONA IN DODICESIMA POSIZIONE SIA UN RAGAZZO.

3. CALCOLARE LA PROB. CHE LUIGI SIA IN TERZA POSIZIONE

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{15}) \quad \omega_i \in \left\{ \begin{matrix} \text{NOMI DI TUTTE} \\ \text{LE PERSONE} \end{matrix} \right\} \right\}$$

$$\#\Omega = 15!$$

POSSO USARE LA $\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA

(1) A = "LA PERSONA IN 4ª POSIZIONE SIA UN RAGAZZO"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5 \cdot \cancel{14!}}{\underbrace{15!}_{15 \cdot \cancel{14!}}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(2) $$\mathbb{P}\left(\begin{matrix} \text{LA PERSONA IN } 12^a \\ \text{POSIZIONE SIA UN} \\ \text{RAGAZZO} \end{matrix}\right) = \frac{1}{3}$$

(3) C = "LUIGI SIA IN 3ª POSIZIONE"

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1 \cdot \cancel{14!}}{\underset{15 \cdot \cancel{14!}}{15!}} = \frac{1}{15}$$

ESERCIZIO:

UNA GIURIA COMPOSTA DI 5 MEMBRI VIENE SELEZIONATA DA UN GRUPPO DI 6 UOMINI E 9 DONNE. CON QUALE PROBABILITÀ LA GIURIA SARÀ COMPOSTA DI 3 UOMINI E 2 DONNE?

GIURIA

15 PERSONE

5 PERSONE

6 UOMINI
9 DONNE

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{"3 UOMINI E 2 DONNE"}}_{A}) = \frac{}{\#\Omega}$$

$$\#\Omega = \binom{15}{5}$$

$$\#A = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$$

ESERCIZIO

SE $n \in \mathbb{N}$ PERSONE SONO PRESENTI IN UNA STANZA, QUAL È LA PROB. CHE NESSUNO ABBIA LO STESSO GIORNO DI COMPLEANNO?

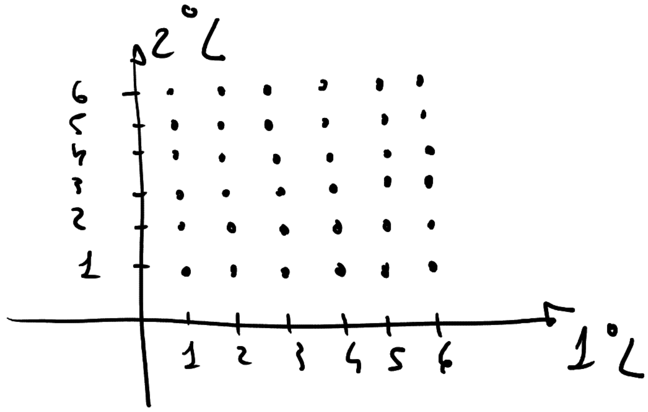
PROBABILITÀ CONDIZIONATA:

VORREMMO CALCOLARE DELLE PROBABILITÀ CHE TENGANO CONTO DI INFORMAZIONI PARZIALI SULL'ESITO DELL'ESPERIMENTO.

(ES) LANCIO DUE DADI EQUI A SEI FACCE DISTINGUIBILI.

$$\longrightarrow \quad \Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots \}$$

$$\#\Omega = 36$$



$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{"LA SOMMA FA 9"}}_{A}) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$A = \{ (4,5), (5,4), (3,6), (6,3) \}$$

$$B = \text{"IL PRIMO DADO HA DATO 6"}$$

$$= \{ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \} \qquad \#B = 6$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \text{ SAPENDO } B)$$

PROBABILITÀ DI A CONDIZIONATA A B

DEF: DATO $(\Omega, \mathbb{P})$ MODELLO PROBABILISTICO

E DATO B UN EVENTO TALE CHE $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

DEFINISCO "PROBABILITÀ CONDIZIONATA ALL'EVENTO B" (E LA INDICO CON $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$)

LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} \cup \\ A \end{array} \longmapsto \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$\to \mathbb{P}_B(\cdot)$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\} \cap \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\right)}{1/6}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{(6,3)\})}{1/6} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

DIMOSTRO CHE $\mathbb{P}(\cdot|B)$ È UNA MISURA DI PROB.

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

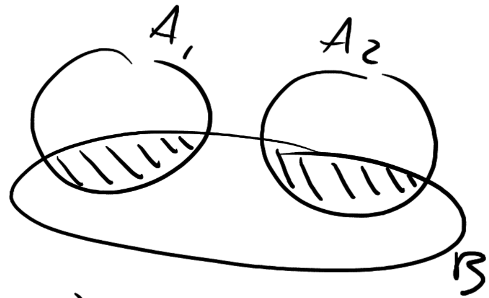
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\overset{\geq 0}{\mathbb{P}(A \cap B)}}{\mathbb{P}(B) \geq 0} \geq 0 \quad \text{OK}$$

2. $$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = 1 \quad \text{OK}$$

3. SIANO A_1, A_2 EVENTI DISGIUNTI

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 | B)}_{} = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$



$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A_1 | B)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_2 | B)}$$

OK

$\Rightarrow \mathbb{P}(\cdot | B) = \mathbb{P}_B(\cdot)$ È UNA MISURA DI PROBABILITÀ ASSOCIATA A Ω.

$(\Omega, \mathbb{P})$ $\quad B \quad$ $\mathbb{P}(\cdot | B)$

$(\Omega, \mathbb{P}(\cdot | B))$

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B)}$$

$$= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

3 EVENTI A_1, A_2, A_3

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2}\cap \underbrace{A_3}) = \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}$$

$$= \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

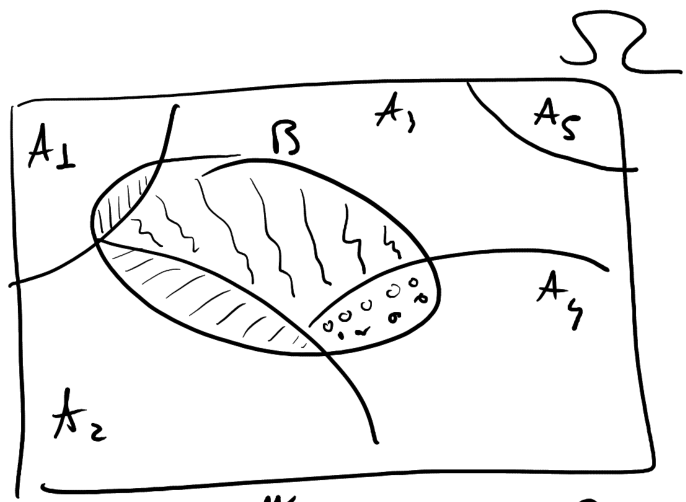
REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

DATA $(A_i)_{i=1}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω.

SIA B UN EVENTO. ALLORA

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)$$



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

TEOREMA DI BAYES

SIA $(A_i)_{i=1}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω

E SIA B UN EVENTO. ALLORA

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

ESERCIZIO

LANCIO UNA MONETA EQUA 3 VOLTE.

DEFINISCO 2 EVENTI:

A = "ESCONO PIÙ TESTE CHE CROCI"

B = "IL PRIMO LANCIO RESTITUISCE T"

$$\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \ , \ \omega_i \in \{T, C\} \}$$

$$\#\Omega = 2^3 = 8$$

$\mathbb{P}$ È UNIFORME DISCRETA.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A = \{(TTT), (TTC), (TCT), (CTT)\}$$

$$B = \{(TTT), (TCT), (TTC), (TCC)\}$$

$$\#B = 4.$$

ESCONO PIÙ TESTE CHE CROCI SAPENDO CHE AL PRIMO LANCIO È USCITA UNA TESTA.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(TTT), (TCT), (TTC)\})}{\frac{\#B}{\#\Omega}}$$

$$= \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\cancel{\#\Omega}}}{\frac{\#B}{\cancel{\#\Omega}}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

ESERCIZIO

ESTRAGGO 3 CARTE DA UN MAZZO DI 52 CARTE SENZA REIMBUSSOLAMENTO. CALCOLARE LA PROB. CHE NESSUNA DELLE 3 CARTE SIA DI CUORI.

NO ORDINE

$A =$ "NESSUNA DELLE 3 CARTE ESTRATTE È CUORI"

ESTRAZIONE IN BLOCCO

$$52 = \underbrace{39}_{\text{NON CUORI}} + \underbrace{13}_{\text{CUORI}}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39!}{\cancel{3!}\,36!}}{\frac{52!}{\cancel{3!}\,49!}} = \frac{\frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot \cancel{36!}}{\cancel{36!}}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot \cancel{49!}}{\cancel{49!}}} = \frac{39\cdot 38\cdot 37}{52\cdot 51\cdot 50}$$

ESTRAZIONI SUCCESSIVE

A

$A_1 =$ "NON ESTRAGGO CUORI ALLA 1^a ESTRAZIONE"

$A_2 =$ " " " " " 2^a " "

$A_3 =$ " " " " " 3^a ESTRAZIONE"

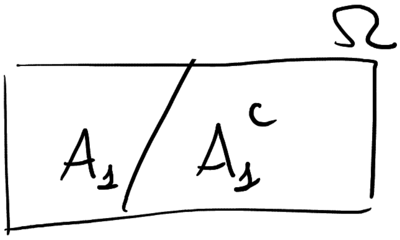
$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{39}{52}$$

$$\mathbb{P}(A_2) =$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{38}{51}$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c) = \frac{39}{51}$$



$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c)$$

$$= \frac{38}{51}\frac{39}{52} + \frac{39}{51}\frac{13}{52} = \frac{39(38+13)}{51 \cdot 52}$$

$$= \frac{39 \cdot \cancel{51}}{\cancel{51} \cdot 52} = \frac{39}{52}$$

PROBABILITÀ MARGINALE

$$\mathbb{P}(A_3) =$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{37}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c) = \frac{38}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) = \frac{38}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 | A_1^c \cap A_2^c) = \frac{39}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2^c)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 | A_1^c \cap A_2)\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 | A_1^c \cap A_2^c)\underbrace{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)}_{= \mathbb{P}(A_2^c | A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c)} = \dots = \frac{39}{52}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$
$$= \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_1)$$
$$= \frac{37}{50} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{39}{52}$$

UNA VOLTA SOLA

<u>ESERCIZIO</u> LANCIO UN DADO EQUO A 4 FACCE. SE ESCE 1 OPPURE 2 LO LANCIO DI NUOVO, ALTRIMENTI MI FERMO. CALCOLARE LA PROB. CHE LA SOMMA DEI NUMERI OTTENUTI SIA ALMENO 4.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,4)$$
$$(2,1),\dots,(2,4),(3,0),$$
$$(4,0)\}$$

$0 =$ " NON LANCIO IL DADO LA 2^a VOLTA"

$\mathbb{P} \longrightarrow$ NON USO LA PROB. UNIFORME DISCRETA

$\Rightarrow$ SINGOLETTI NON EQUIPROBABILI.

$A_1 =$ "ESCE 1 AL PRIMO LANCIO"

$A_2 =$ "ESCE 2 AL PRIMO LANCIO"

$A_3 =$ "ESCE 3 AL PRIMO LANCIO"

$A_4 =$ "ESCE 4 AL PRIMO LANCIO"

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$A_4 = \{(4,0)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(\{(4,0)\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = \{(3,0)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(\{(3,0)\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\left(\{(2,1)\}\right)+\mathbb{P}\left(\{(2,2)\}\right)+\mathbb{P}\left(\{(2,3)\}\right)+\mathbb{P}\left(\{(2,4)\}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\left(\{(2,1)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(2,2)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(2,3)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(2,4)\}\right)=\frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}\left(\{(1,1)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(1,2)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right)=\mathbb{P}\left(\{(1,4)\}\right)=\frac{1}{16}$$

HO COSTRUITO LA $\mathbb{P}$ RAGIONANDO SULL'ESPERIMENTO PROBABILISTICO.

$$\mathbb{P}\left(A = \text{"SOMMA ALMENO 4"}\right) = \mathbb{P}\left(\{(1,3),(1,4),\ldots\}\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right)+\mathbb{P}\left(\{(1,4)\}\right)+\mathbb{P}\left(\{(4,0)\}\right)+\ldots$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\ldots$$

ESERCIZIO

UN TEST È AL 99% EFFICACE NEL RILEVARE UNA CERTA MALATTIA QUANDO IL SOGGETTO È EFFETTIVAMENTE MALATO. TUTTAVIA RESTITUISCE UN FALSO POSITIVO NE 2% DEI CASI QUANDO

LA MALATTIA NON È PRESENTE.

SUPPONENDO CHE LA MALATTIA SIA PRESENTE NEL 5% DELLA POPOLAZIONE, QUAL È LA PROB. DI ESSERE MALATO SE SI È RISULTATI POSITIVI AL TEST?

M = "IL SOGGETTO È MALATO"

M^c = "IL SOGGETTO È SANO"

P = "IL TEST È POSITIVO"

P^c = "IL TEST È NEGATIVO"

$$\mathbb{P}(P|M^c) = 0{,}02$$

$$\mathbb{P}(M) = 0{,}05$$

TH. BAYES

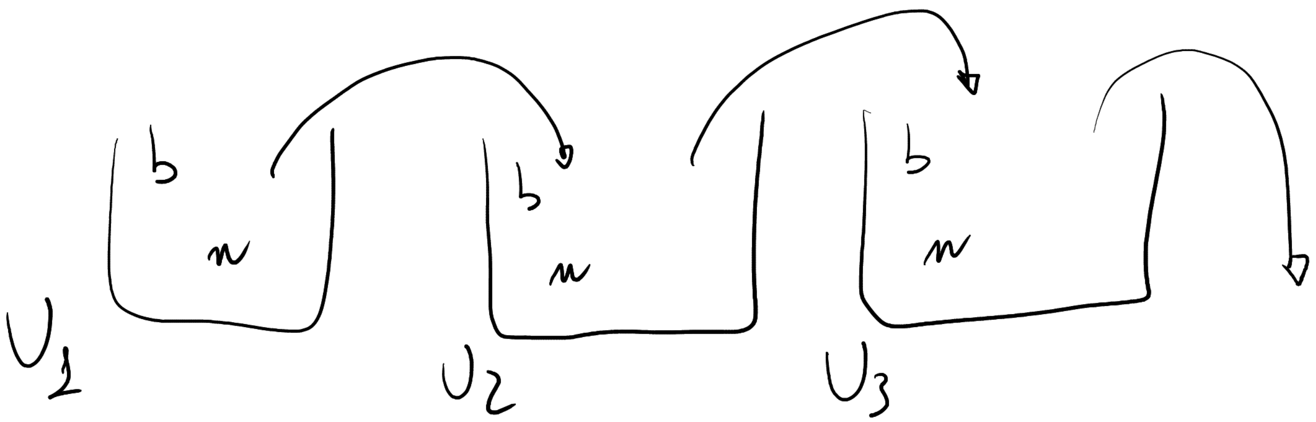
$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|M^c)\mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}02 \cdot 0{,}95} = 0{,}7226.$$

<u>ESERCIZIO</u>

OGNUNA DI 3 URNE CONTIENE b PALLINE BIANCHE E n PALLINE NERE. PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA PRIMA URNA E LA METTO NELLA SECONDA. POI PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA SECONDA URNA E LA METTO NELLA TERZA. INFINE PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA TERZA URNA.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE UNA PALLINA BIANCA ALLA TERZA ESTRAZIONE.



$$\Omega = \{ w = (w_1, w_2, w_3), \quad w_i \in \{B, N\} \}$$

A_3 = "LA 3ª PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

$$= \{ w \,/\, w = (w_1, w_2, B), \quad w_1 \in \{B, N\}, w_2 \in \{B, N\} \}$$

A_2 = "LA 2ª PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

A_1 = "LA 1ª PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{b+1}{b+1+n}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c) = \frac{b}{b+n+1}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) = \frac{b+1}{b+1+n}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) = \frac{b}{n+1+b}$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c)\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2)\,\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c)\,\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)$$

DOVE

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) = \frac{b+1}{b+1+n} \cdot \frac{b}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{b+1+n} \cdot \frac{b}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c)\,\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{b}{b+n+1} \cdot \frac{n}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1^c)\,\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{n+1}{b+n+1} \cdot \frac{n}{b+n}$$

FACCIO I CONTI E OTTENGO

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{b}{b+n}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \text{FACCIO I CONTI} = \frac{b}{b+n}$$

INDIPENDENZA:

$$\underbrace{\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\right)}_{\text{SPAZIO DI PROBABILITÀ}}$$

DEF:

SIANO A, B DUE EVENTI.

A E B SI DICONO INDIPENDENTI SE

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

$$\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\cdot|B)\right) \qquad \left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\cdot)\right)$$

OSS

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\text{INDIP}}{=} \mathbb{P}(A)$$

$$\frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\iff \frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

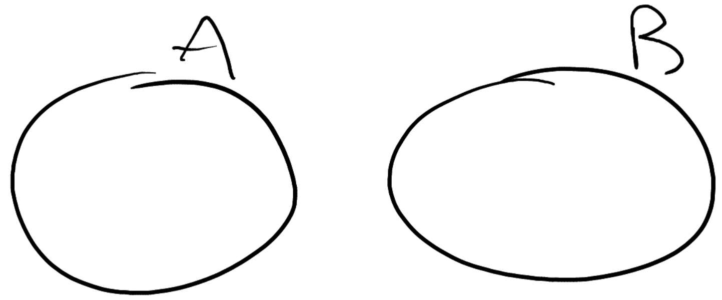
OSS A, B INDIP.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\iff \boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI INDIPENDENZA FRA A E B.

ATTN!!



$$A \cap A^c = \emptyset \qquad \mathbb{P}(A) > 0$$
$$\mathbb{P}(A^c) > 0$$

$$\mathbb{P}(A \cap A^c) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

$$\mathbb{P}(A \cap A^c) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \underbrace{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)}_{}$$

$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)$: $\neq 0$

$$\mathbb{P}(A \mid A^c) = 0 \qquad \mathbb{P}(A)$$

A A^C SONO **DIPENDENTI**

ESEMPIO: LANCIO DUE DADI EQUI A 4 FACCE.

A_i = "IL 1° LANCIO RESTITUISCE i"

B_i = "IL 2° LANCIO RESTITUISCE i"

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\Omega = \{(i,j) \ , \ i,j \in \{1,2,3,4\}\}$$

EQUITA' $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA.

(a)

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \frac{\#(A_i \cap B_j)}{\#\Omega} = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\# A_i}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B_j) = \frac{\# B_j}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$A_i = \{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\}$$

$$B_j = \{(1,j),(2,j),(3,j),(4,j)\}$$

$$A_i \cap B_j = \{(i,j)\}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$$

$\Rightarrow$ A_i E B_j SONO INDIPENDENTI.

(b) A_1 = "IL PRIMO LANCIO RESTITUISCE 1"

B = "LA SOMMA FA 5"

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$A_1 \cap B = \{(1,4)\}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \frac{\#(A_1 \cap B)}{\#\Omega} = \frac{1}{16} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{=\mathbb{P}(A_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{=\mathbb{P}(B)}$$

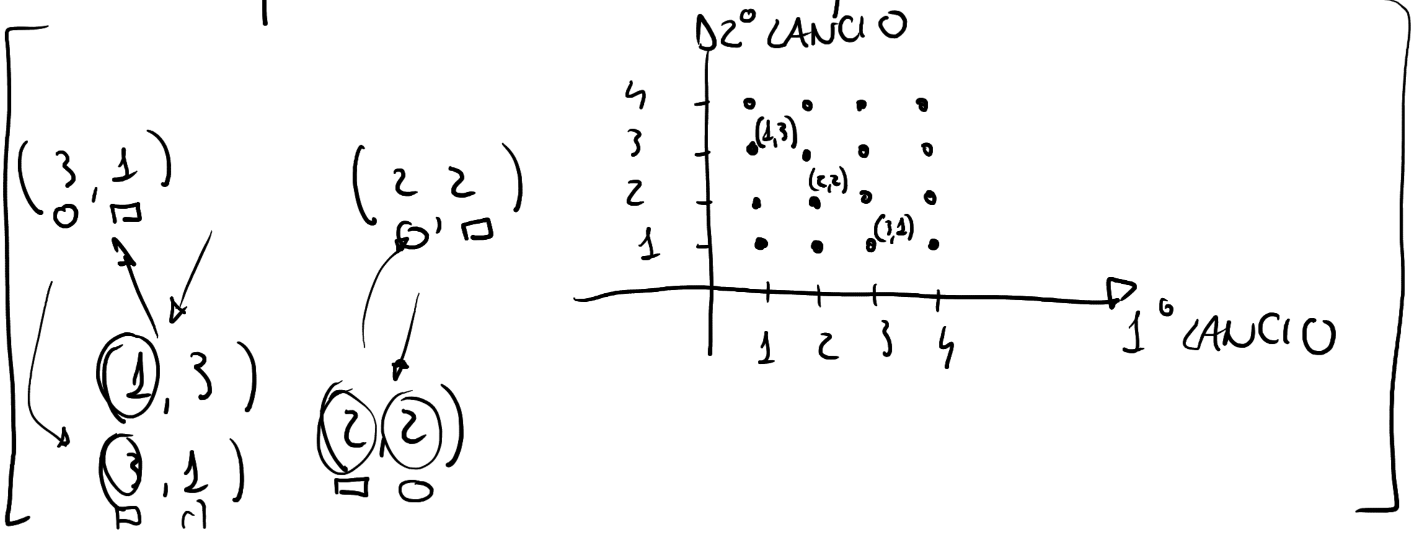
$\Rightarrow$ A_1 E B SONO INDIPENDENTI.

(c) A_1

$C =$ "LA SOMMA FA 4"

$\mathbb{P}(A_1) = 1/4$ $\qquad \mathbb{P}(C)$

$$C = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$



$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{16}$$

$$A_1 \cap C = \{(1,3)\}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16} \neq \overset{\mathbb{P}(C)}{\frac{3}{16}} \cdot \overset{\mathbb{P}(A_1)}{\frac{1}{4}}$$

A_1 E C SONO DIPENDENTI.

d)

D = "IL MASSIMO FRA I DUE LANCI È 2"

E = "IL MINIMO FRA I DUE LANCI È 2"

$$D = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$E = \{(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16} \qquad \mathbb{P}(E) = \frac{5}{16}$$

$$D \cap E = \{(2,2)\}$$

$$\mathbb{P}(D \cap E) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{16} = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E)$$

$\Rightarrow$ D ED E SONO DIPENDENTI
(NON SONO INDIPENDENTI)

PROPOSIZIONE: SIANO A, B EVENTI INDIPENDENTI. ALLORA

A E B^C SONO INDIPENDENTI

A^C E B SONO INDIPENDENTI

A^C E B^C SONO INDIPENDENTI.

COSTRUZIONE DI MISURE DI PROBABILITÀ SU PRODOTTI CARTESIANI

$$A \times B = \{(a,b) \ , \ a \in A, b \in B\}$$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{1,2,3,4\}$

$$A \times B = \{(i,j) \ , \ i,j \in \{1,2,3,4\}\}$$

ES LANCIO DUE DADI A 4 FACCE TRUCCATI:

DADO 1: 4 ESCE CON PROB. $1/2$
1, 2, 3 ESCONO CON PROB. $1/6$.

DADO 2: 1 ESCE CON PROB $1/2$
2, 3, 4 ESCONO CON PROB. $1/6$.

- SUPPONGO DI LANCIARE SOLO IL DADO 1:

$$\Omega^1 = \{1,2,3,4\} \qquad (\Omega^1, \mathcal{P}(\Omega^1), \mathbb{P}^1)$$

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}^1(\{2\}) = \mathbb{P}^1(\{3\})$$

$$\mathbb{P}^1(\{4\}) = \frac{1}{2}$$

- SUPPONGO DI LANCIARE SOLO IL DADO 2:

$$\Omega^2 = \{1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1/2 \qquad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \mathbb{P}^2(\{3\}) = \mathbb{P}^2(\{4\}) = 1/6$$

<u>OSS</u> $\mathbb{P}^1 \neq \mathbb{P}^2$

- LANCIO I DUE DADI:

$$\Omega = \{ (i,j) \ , \quad i,j \in \{1,2,3,4\} \}$$

$\mathbb{P}$? $\longrightarrow$ LA COSTRUISCO TRAMITE $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$ E L'INDIPENDENZA.

DICO CHE

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{(i,j)\}}_{\in \mathcal{P}(\Omega)}) = \mathbb{P}^1(\underbrace{\{i\}}_{\in \mathcal{P}(\Omega^1)}) \cdot \mathbb{P}^2(\underbrace{\{j\}}_{\in \mathcal{P}(\Omega^2)})$$

ES

$$\mathbb{P}\left(\{(3,1)\}\right) = \mathbb{P}^1\left(\{3\}\right) \cdot \mathbb{P}^2\left(\{1\}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$\mathbb{P}$ È UNA MISURA DI PROB.

COERENZA

$$A_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

$$\cap$$

$$\mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}^1(\{1\}) \quad ?$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}\left(\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{(1,1)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,2)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,4)\}\right)$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^2(\{1\}) + \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^2(\{2\}) + \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^2(\{3\}) + \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^2(\{4\})$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})\left[\mathbb{P}^2(\{1\}) + \mathbb{P}^2(\{2\}) + \mathbb{P}^2(\{3\}) + \mathbb{P}^2(\{4\})\right]$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})\,\mathbb{P}^2(\{1,2,3,4\}) = \mathbb{P}^1(\{1\})\,\underbrace{\mathbb{P}^2(\Omega^2)}_{=1}$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})$$

$\mathbb{P}$ SI CHIAMA LEGGE DI PROB. CONGIUNTA

$\mathbb{P}^1$
SI CHIAMANO LEGGI DI PROB. MARGINALI.
$\mathbb{P}^2$

INDIPENDENZA FRA EVENTI

COSTRUIRE PROB. SU SPAZI PRODOTTO

ES

UN DADO A 6 FACCE COSTRUITO IN MODO CHE OGNI FACCIA PARI SIA DOPPIAMENTE PROBABILE RISPETTO AD UNA FACCIA DISPARI. TUTTE LE FACCE PARI SONO EQUIPROB. E TUTTE LE FACCE DISPARI SONO EQUIPROBABILI. SI LANCI IL DADO 3 VOLTE E SI CALCOLA LA PROB. CHE LA SOMMA SIA INFERIORE A 6.

$$\Omega^1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$p = \mathbb{P}^1(\{1\}) = \mathbb{P}^1(\{3\}) = \mathbb{P}^1(\{5\})$$

$$2p = \mathbb{P}^1(\{2\}) = \mathbb{P}^1(\{4\}) = \mathbb{P}^1(\{6\})$$

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) + \mathbb{P}^1(\{2\}) + \mathbb{P}^1(\{3\}) + \mathbb{P}^1(\{4\}) + \mathbb{P}^1(\{5\}) + \mathbb{P}^1(\{6\})$$

$$= 1$$

sse

$$p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1$$

sse

$$9p = 1$$

sse

$$p = 1/9$$

$$\mathbb{P}^1(\{i\}) = 1/9 \quad , \quad i \in \{1, 3, 5\}$$

$$\mathbb{P}^1(\{i\}) = \frac{2}{9} \quad , \ i \in \{2,4,6\}$$

$$\Omega = \Omega^1 \times \Omega^1 \times \Omega^1 = \{ (i,j,k) \quad , \ i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$$

TALE CHE
$$\mathbb{P}(\{(i,j,k)\}) = \mathbb{P}^1(\{i\}) \cdot \mathbb{P}^1(\{j\}) \cdot \mathbb{P}^1(\{k\})$$

$A =$ "LA SOMMA DEI TRE LANCI < 6"

$$= \{ (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1) \}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(1,1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(1,1,2)\}) + \dots + \mathbb{P}(\{(3,1,1)\})$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\}) + \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{2\}) + \dots + \mathbb{P}^1(\{3\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}(\{1\})$$

$$= \overbrace{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}}^{\left(\frac{1}{9}\right)^3} + \frac{1}{9}\frac{1}{9}\frac{2}{9} + \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^3$$

INDIPENDENZA (DI COLLEZIONI DI EVENTI)

DEF: LA COLLEZIONE DI EVENTI $(A_i)_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, SI DICE COMPOSTA DA EVENTI "INDIPENDENTI DUE A DUE" SE

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \quad \forall i,j \,/\, i \neq j$$

OSS equiv. A

$$\mathbb{P}(A_i | A_j) = \mathbb{P}(A_i)$$
$$\mathbb{P}(A_j | A_i) = \mathbb{P}(A_j)$$

DEF (MUTUA INDIPENDENZA)(INDIPENDENZA COLLETTIVA) (ANCHE INDIPENDENZA)

LA COLLEZIONE $(A_i)_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, È UNA COLLEZIONE DI EVENTI (MUTUAMENTE) INDIPENDENTI SE

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i) \qquad \forall S$$

DOVE S È QUALUNQUE SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DEGLI INDICI $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

---

3 EVENTI $A_1 \; A_2 \; A_3$ $(n = 3)$

$\{1, 2, 3\}$ ← L'INSIEME DEGLI INDICI

$S=\{1,2\}$, $S=\{1,3\}$ $S=\{2,3\}$ ...

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$ $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)=\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

$S=\{1\}$ $S=\{2\}$ $S=\{3\}$ $S=\{1,2,3\}$

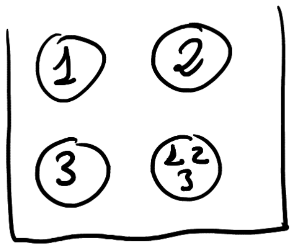
$\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_1)$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(A_3)$$

OSS: SE $(A_i)_{i=1}^{n}$ COLL. DI EVENTI (MUTUAMENTE INDIP.)

$\Rightarrow$ $(A_i)_{i=1}^{n}$ SONO INDIP. DUE A DUE.

ES



SCELGO A CASO UNA PALLINA

$A_1 =$ "ESTRAGGO IL N° 1"

$A_2 =$ "ESTRAGGO IL N° 2"

$A_3 =$ "ESTRAGGO IL N° 3"

$$(A_i)_{i=1}^{3}=(A_1, A_2, A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)=\frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

STESSO RAGIONAMENTO PER LE ALTRE COPPIE.

QUINDI (A_1, A_2, A_3) SONO INDIPENDENTI DUE A DUE.

MA

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

ESERCIZIO

ESPERIMENTO:

- LANCIAMO UN DADO EQUO A SEI FACCE.
- SE ESCE 1 OPPURE 2 ESTRAIAMO CON REIMBUSSOLAMENTO TRE PALLINE DALLA SCATOLA S_1
- SE ESCE 3, 4, 5, 6 ESTRAIAMO 3 PALLINE CON REIMBUSSOLAMENTO DALLA SCATOLA S_2

S_1 È COMPOSTA DA 5 PALLINE VERDI E DUE NERE. S_2 È COMPOSTA DA 1 PALLINA VERDE E 3 NERE.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE 3 PALLINE VERDI.

CALCOLARE LA PROB DI ESTRARRE UNA PALLINA VERDE

ALLA PRIMA ESTRAZIONE.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE UNA PALLINA VERDE ALLA SECONDA ESTRAZIONE.

SONO EVENTI INDIP?

$A =$ "ESTRAGGO 3 PALLINE VERDI"

$$\Omega = \left\{ (d, e_1, e_2, e_3) \ , \quad d \in \{1,2,3,4,5,6\}, \ e_i \in \{V, N\}, \ i = 1,2,3 \right\}$$

uso S_1

$$S_1 = \left\{ (d, e_1, e_2, e_3) \ , \quad d \in \{1,2\} \ , \ e_i \in \{V, N\}, \ i = 1,2,3 \right\}$$

uso S_2

$$S_2 = \left\{ (d, e_1, e_2, e_3) \ , \quad d \in \{3,4,5,6\} \ , \ e_i \in \{V, N\}, \ i = 1,2,3 \right\}$$

$$\Omega = S_1 \cup S_2 \qquad S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

(S_1, S_2) È UNA PARTIZIONE DI Ω.

USO LEGGE DELLE PROB. TOTALI:

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A | S_1)}_{\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7}\right)} \underbrace{\mathbb{P}(S_1)}_{\frac{2}{6}} + \underbrace{\mathbb{P}(A | S_2)}_{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)} \underbrace{\mathbb{P}(S_2)}_{\frac{4}{6}} = 0{,}13189$$

4^a 0,1319

2^a 0,13

A_1 = "VERDE ALLA PRIMA ESTRAZIONE"

$$\mathbb{P}(A_1) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 | S_1)}\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_1 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}(\{v\})\underbrace{\mathbb{P}(\{\Omega\})}_{=1}\underbrace{\mathbb{P}(\{\Omega\})}_{=1}$$

APPROX ALLA 4^a CIFRA DEC.

$$= 0{,}40476 = 0{,}4048$$

A_2 = "VERDE ALLA SECONDA ESTRAZIONE"

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 | S_1)\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_2 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | S_1)}\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$= 0{,}2117 \neq (0{,}4048)^2$$

A_1 e A_2 NON SONO INDIPENDENTI.

ES || CHIEDIAMO AL NOSTRO VICINO DI ANNAFFIARE LE NOSTRE PIANTE MENTRE SIAMO IN VACANZA.
SENZA ACQUA MORIRANNO CON PROB. 0,8.
CON ACQUA MORIRANNO CON PROB. 0,15.
NOI SIAMO CERTI AL 90% CHE IL NOSTRO VICINO SI RICORDERÀ DI ANNAFFIARLE.

a) QUAL È LA PROB. CHE LE PIANTE SIANO VIVE AL NOSTRO RITORNO?

b) SE SONO MORTE, QUAL È LA PROB. CHE IL NOSTRO VICINO SI SIA DIMENTICATO DI ANNAFFIARLE?

W = "IL VICINO ANNAFFIA LE PIANTE"

W^c = "IL VICINO NON ANNAFFIA LE PIANTE"

M = "LE PIANTE MUOIONO"

M^c = "LE PIANTE NON MUOIONO"

$$\mathbb{P}(M \mid W^c) = 0,8$$

$$\mathbb{P}(M \mid W) = 0,15$$

$$\mathbb{P}(W) = 0,9$$

$$\mathbb{P}(M^c) = 1 - \mathbb{P}(M)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(M \mid W)\,\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(M \mid W^c)\,\mathbb{P}(W^c) \right]$$

$$= 1 - \left[0{,}15 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \right] = 0{,}785$$

$$\mathbb{P}(W^c \mid M) = \frac{\mathbb{P}(W^c, M)}{\mathbb{P}(M)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(M \mid W^c)\,\mathbb{P}(W^c)}{1 - \mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{1 - 0{,}785} = 0{,}3721$$

EVENTI $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}(A) \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

VARIABILI ALEATORIE

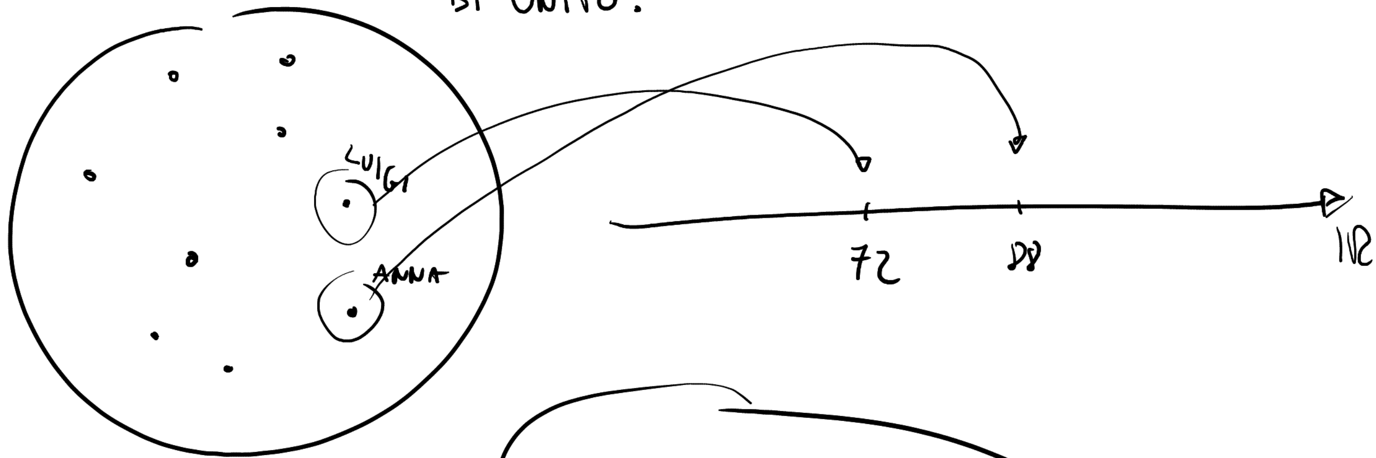
ALEA $\to$ DADO

$\to$ STOCASTICO $\to$ STOCHASTICS

$\to$ CASUALE

$x \in \mathbb{R}$

Ω = STUDENTI DEL 2° ANNO DEL C.D.L. INFORMATICA DI UNITO.



VOTO DI MATURITÀ

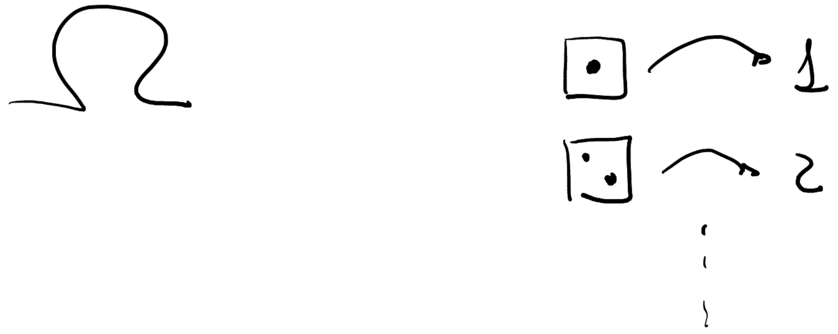
STO DEFINENDO UNA FUNZIONE

ES. LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA.
SONO INTERESSATO AL "N° DI TESTE"

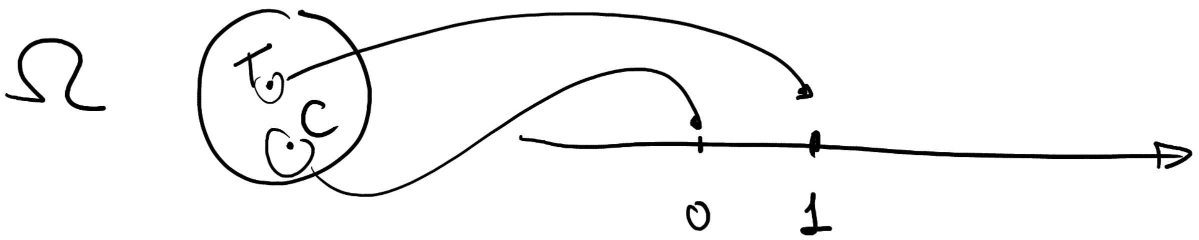
$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \; , \; \omega_i \in \{T, C\} \; , \; i = 1, \dots, 5 \}$$

$$\omega' = (T, T, T, C, C) \qquad 3$$

ES LANCIO DI UN DADO:



ES LANCIO DI UNA MONETA:



DEF (VARIABILE ALEATORIA) (V.A.) — RANDOM VARIABLE (R.V.)

UNA V.A. X È UNA FUNZIONE A VALORI REALI DEFINITA COSÌ:

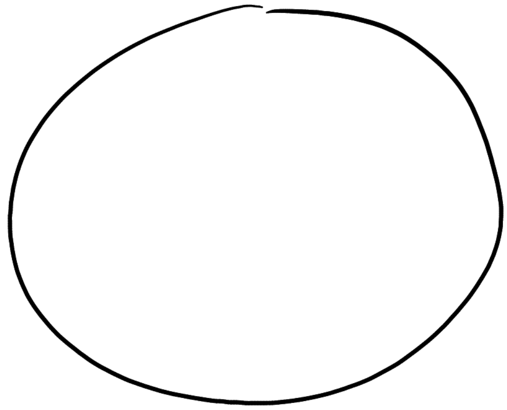
$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\Omega \ni \omega \longmapsto X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

OSS

$$\mathrm{Im}(X) = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; \exists\, \omega \in \Omega \text{ t.c. } X(\omega) = x \}$$

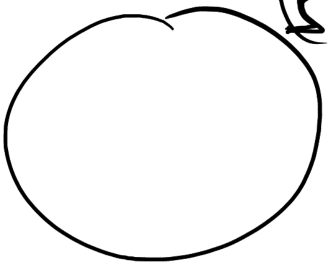
OSS $\mathrm{Im}(X)$:

- DISCRETA ($\mathrm{Im}(X)$ È AL PIÙ NUMERABILE) $\Rightarrow$ V.A. DISCRETE
- CONTINUA ($\mathrm{Im}(X)$ È NON NUMERABILE) $\Rightarrow$ V.A. CONTINUE



$$X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

$(\Omega, \mathbb{P})$



V.A. DISCRETE

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\mathrm{Im}(X)$ AL PIÙ NUMERABILE.

ES LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA E CONTO IL N° DI TESTE OTTENUTE. — X

$$X\left(\{(T,T,C,C,C)\}\right) = 2$$

$\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA.

$A =$ "OTTENGO 2 TESTE"

$$A = \left\{ (T,T,C,C,C), (T,C,T,C,C), \ldots \right\}$$

$\# A = \binom{5}{2}$ $\qquad \# \Omega = 32$

(T, T, C, C, C)

(T, T, C, C, C)

$X = 2$

$$A = \underbrace{\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 2\}}$$

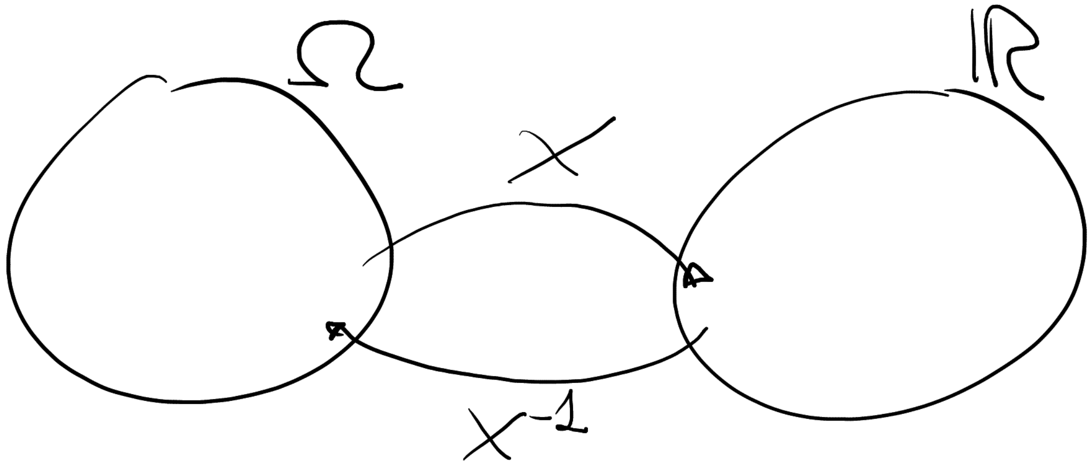
CONTRO-IMMAGINE
IMMAGINE INVERSA
DI $\{2\} \in \mathbb{R}$

$= X^{-1}(2)$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# X^{-1}(2)}{\# \Omega}$$

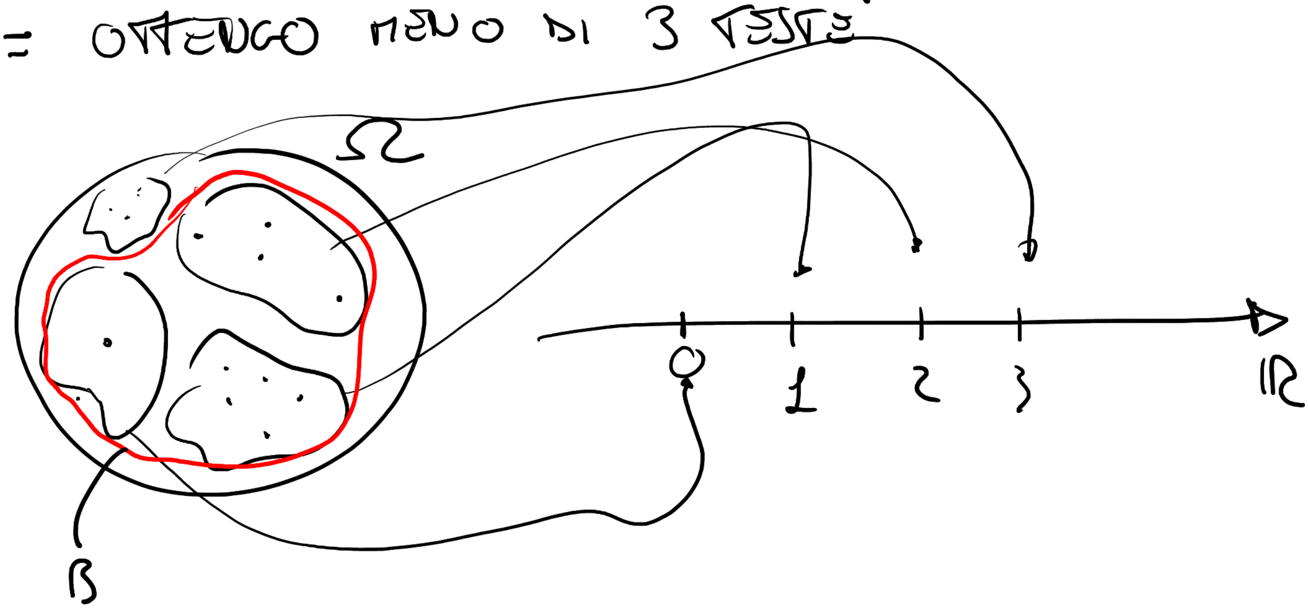
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 2\}) = \mathbb{P}(X = 2)$$

NOTAZIONE



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(2))$$

B = "OTTENGO MENO DI 3 TESTE"



$$B = X^{-1}(\{0,1,2\})$$

SONO DISGIUNTI.

X È UNA FUNZIONE

E QUINDI

$X^{-1}(0), X^{-1}(1), X^{-1}(2)$

SONO DISGIUNTI

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{0,1,2\})\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(0)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(1)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(2)\right)$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) < 3\}\right) = \mathbb{P}(X < 3)$$

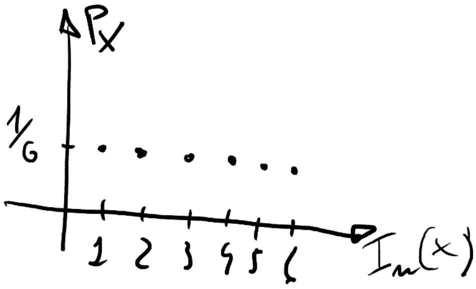
DEF (FUNZIONE DI MASSA DI PROB.)
(PROBABILITY MASS FUNCTION - PMF)

DENSITÀ DISCRETA

LA PMF DI X È DEFINITA COSÌ:

$$p_X : Im(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$k \longmapsto p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$



DADO 6 FACCE

$$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

X = "N° PALLINI SULLA FACCIA SUPERIORE"

$$Im(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y = "CONTA IL N° PALLINI E AGGIUNGE 0.1"

$\hookrightarrow \quad Im(Y) = \{1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1\}$

$k \in Im(Y)$

ES LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA.
CONTO IL N° DI TESTE.

DETERMINARE LA PMF DI X = "N° DI TESTE"

① $Im(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

② $\forall k \in Im(X)$ DETERMINO $p_X(k)$.

$\underline{k=0}$

$$\underbrace{p_X(0)} = \underbrace{\mathbb{P}(X=0)} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 0\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(C, C, C, C, C)\}) = \frac{1}{32}$$

$\underline{k=1}$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(T, C, C, C, C), (C, T, C, C, C), \dots)$$

$$= \frac{\binom{5}{1}}{32}$$

$k = 2$

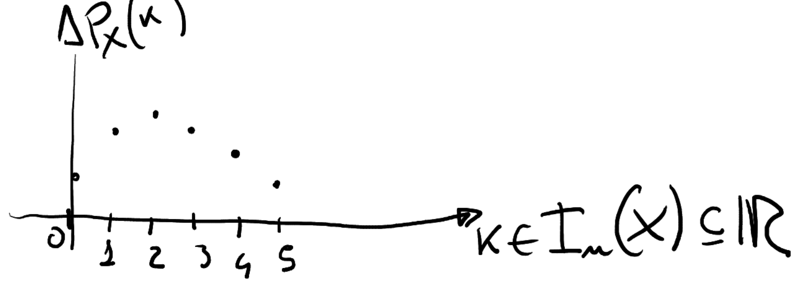
$$P_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 2\})$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{32}$$

$\underline{k \in \mathrm{Im}(X)}$

$$P_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = k\})$$

$$= \frac{\binom{5}{k}}{32}$$



$$\{X = k\} = \underbrace{X^{-1}(k)}_{\subset \Omega} \qquad k \in \mathrm{Im}(X)$$

$$\bigcup_{k \in \mathrm{Im}(X)} X^{-1}(k) = \Omega$$

$$X^{-1}(k) \cap X^{-1}(h) = \emptyset$$

con $h, k \in \mathrm{Im}(X)$, $h \neq k$

HO IN PRATICA DEFINITO UNA PARTIZIONE DI Ω INDOTTA DA X

$A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{k \in I_m(X)} X^{-1}(k)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} X^{-1}(k)\right)$$

ADD.

$$= \sum_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} \mathbb{P}\left(X^{-1}(k)\right)$$

$$= \sum_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} \mathbb{P}(X = k)$$

VARIABILI ALEATORIE V.A. (R.V.)

V.A. DI BERNOULLI :

DICOTOMICI

• CONSIDERO ESPERIMENTI PROBABILISTICI CON ESITO DICOTOMICO. (CIOÈ 2 SOLE ETICHETTE)

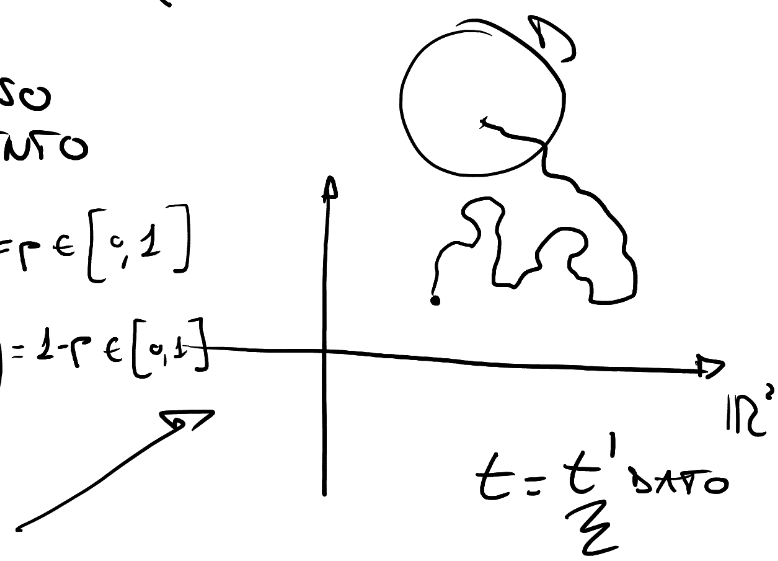
SUCCESSO

FALLIMENTO

$\Omega \; \{s, f\} \longrightarrow \mathbb{P}(\{s\}) = p \in [0,1]$

$\mathbb{P}(\{f\}) = 1-p \in [0,1]$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$



$X(s) = 1$

$X(f) = 0$

$I_m(X) = \{0, 1\}$

PMF:

$P_X(0) = 1-p \; (q)$

$P_X(1) = p$

$\underbrace{\mathbb{P}(\{s\})}_{p} + \underbrace{\mathbb{P}(\{f\})}_{q} = 1$

$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$

X SI CHIAMA V.A. DI BERNOULLI.

PMF:

$$p_X(k) = p^k (1-p)^{1-k} \qquad k \in I_m(X)$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\{s\}) = p$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\{f\}) = (1-p)$$

$p \longrightarrow$ PARAMETRO

ES LANCIO 1 DADO EQUO

$$\{5\} = \{s\}$$

$$\{1,2,3,4,6\} = \{f\}$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$$1-p = \frac{5}{6}$$

V.A. BINOMIALE

ESP. PROB DI TIPO DICOTOMICO.
RIPETO QUESTO ESPERIMENTO n VOLTE IN MODO INDIPENDENTE E IDENTICO. CONTO QUANTI SUCCESSI OTTENGO.

NATURALE FISSATO.

$n = 5$

ES LANCIO 5 VOLTE UN DADO EQUO E CONTO QUANTI "6" HO OTTENUTO.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \in \Omega, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \rightsquigarrow X(\omega)$$

$= \#$ DI OCCORRENZE DI "6" NELLA STRINGA.

$$X \sim \text{BINOMIALE}(n, p)$$

n: N° DI PROVE

p: PROB DI SUCC. IN OGNI PROVA.

PMF: $$I_m(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\forall k \in I_m(X)$$

$$? \quad \mathbb{P}(X = k) = p_X(k)$$

K = 0

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \,/\, \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5), \ \omega_i \in \{1,2,3,4,5\} \ i \in \{1, 2, \dots, 5\}\right\}\right)$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

NB

$$\left[(1-p)^n\right]$$

$\underline{k=1}$

$$P_X(1) = \mathbb{P}(X=1)$$

$$= \binom{5}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\mathbb{P}\left(\left(\overset{\{6\}}{s}, \overset{\omega_i \in \{1,2,3,4,5\}}{f}, f, f, f\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\mathbb{P}\left(\left(f, f, s, f, f\right)\right)$$

$$= \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

DI QUESTE SEQUENZE NE HO $\binom{5}{1}$

$$k \in I_m(X)$$

$$P_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$$

PENSO AD UNA SINGOLA SEQUENZA CON $\underline{k \text{ SUCCESSI}}$ E $\underline{(n-k) \text{ FALLIMENTI}}$

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega)$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \ldots + \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

BINOMIO DI NEWTON

$$= \big(p + (1-p)\big)^n = 1$$

V.A. GEOMETRICA

ESPERIMENTO DICOTOMICO.

RIPETO PROVE BERNOULLIANE INDIPENDENTI E IDENTICHE FINO A CHE OTTENGO IL PRIMO SUCCESSO. CONTO QUANTE PROVE HO FATTO.

$$\overbrace{(f, f, s)}^{3} \qquad \overbrace{(s)}^{1}$$

$$\underbrace{(f, s)}_{2} \qquad \underbrace{(f, f, f, f, f, f, s)}_{7}$$

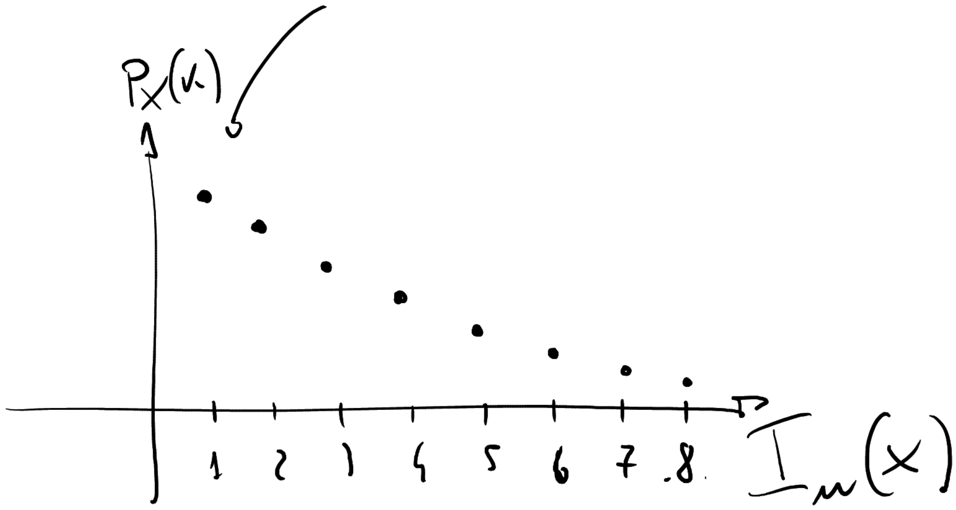
$$I_m(X) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k \in I_m(X)$$

$$X \sim \text{GEOMETRICA}(p)$$

$$\boxed{(f, f, \dots, f, s)}$$

K-MA PROVA



R

ANALISI STATISTICHE

~ MATLAB.

OPEN SOURCE GPL.

V.A. POISSON

BERNOULLI GEOMETRICA

BINOMIALE

V.A. POISSON:

$$X \sim Po(\lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+ \ (\lambda > 0)$$

PMF:

$$P_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in I_m(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$1 = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \boxed{\sum_{k \in I_m(X)} \mathbb{P}(X = k)}$$

$$\forall k \in I_m(X) \qquad \left(X^{-1}(k)\right)_{k=0}^{+\infty}$$

PARTIZIONE DI Ω

V.A. IPERGEOMETRICA

EFFETTUIAMO ESTRAZIONI SENZA REIMBUSSOLAMENTO DA UNA SCATOLA COMPOSTA DA N OGGETTI. DI QUESTI C HANNO UNA SPECIFICA CARATTERISTICA.

ESTRAGGO n OGGETTI SENZA REIMBUSS.

$X =$ "CONTO IL N° DI OGGETTI CON CARATTERISTICA TRA QUELLI ESTRATTI".

$\forall k \in I_m(X)$

$$P_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{C}{k} \cdot \binom{N-C}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\frac{C!}{k!(C-k)!}$$

$k \in \mathbb{N}$

$N = 1000$

$C = 2$

$n = 500$

ESERCIZI

SIA DATA LA SEGUENTE FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in \{-3, 0\} \\ 1/6, & x = 1 \\ 1/3, & x = 2 \end{cases}$$

1. È UNA PMF?
2. SI CHIAMI X LA V.A. CHE HA f COME PMF. CALCOLARE

$$\mathbb{P}(X < 1)$$
$$\mathbb{P}(X \geq 0)$$
$$\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 2)$$

① $I_m(X)$ DISCRETA

$$= \{-3, 0, 1, 2\}$$

SÍ ✓

$\forall x \in I_m(X) \quad f(x) \in [0, 1]$.

$$\underbrace{f(x)}_{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}} \in [0, 1].$$

$\underline{\underline{\text{SÍ}}}$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in I_m(X)} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k \in I_m(X)} f(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\exists X \ / \ P_X(x) = f(x) \ \forall x \in I_m(X)$$

(2) $$\mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) < 1\})$$

$$= \mathbb{P}(X \in (-\infty, 1))$$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, 1)))$$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(\{-3, 0\}))$$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(-3) \cup X^{-1}(0))$$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(-3)) + \mathbb{P}(X^{-1}(0))$$

$$= \mathbb{P}(X = -3) + \mathbb{P}(X = 0)$$

$$= f(-3) + f(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0) = 1 - \mathbb{P}(X = -3)$$

$$\left[\ \{X \geq 0\} \qquad \{X \geq 0\}^c = \{X < 0\}\ \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}\big(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}\big)$$

$$= \frac{3}{4}$$

NB $\{-2 \leq X \leq 2\} = \{X \geq 0\}$

ESERCIZIO

UNA MACCHINA PRODUCE PEZZI CHE IN CONDIZIONI NORMALI SONO DIFETTOSI CON PROB 0,04.

OGNI ORA L'ADDETTO AL CONTROLLO ESTRAE 10 PEZZI CON REIMBUSSOLAMENTO E SE NON CE NE SONO DI DIFETTOSI NON FERMA LA MACCHINA.
CON CHE PROB. LA MACCHINA NON VIENE FERMATA PUR AVENDO INIZIATO A PRODURRE PEZZI DIFETTOSI CON PROB. 0,1?

$p = 0{,}1$ PROB. DI SUCCESSO.

$n = 10$

X: CONTA IL N° DI PEZZI DIFETTOSI.

$$X \sim Bin(10, 0.1)$$

n p

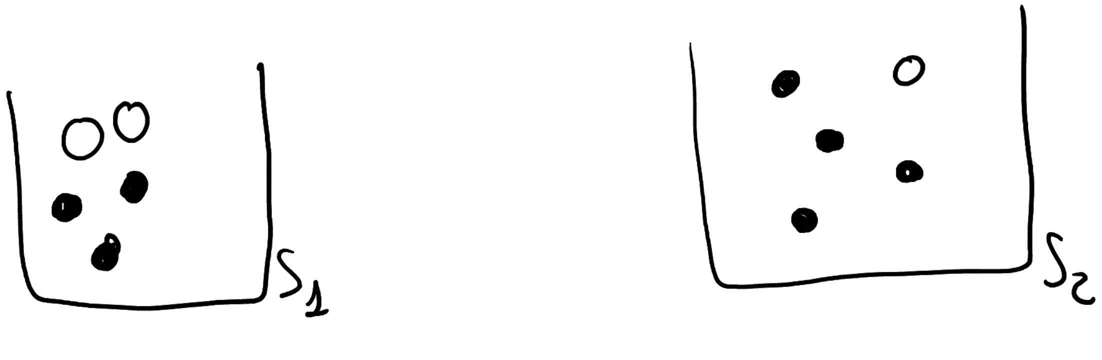
$$\mathbb{P}(X = 0) = \underbrace{\binom{10}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10-0}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$

$= 0.3487$

R

DBINOM(0, 10, 0.1)

ESERCIZIO SI CONSIDERINO 2 SCATOLE. LA SCATOLA S_1 CONTIENE 2 PALLINE BIANCHE E 3 NERE. LA SCATOLA S_2 CONTIENE 1 PALLINA BIANCA E 4 NERE



SCELGO A CASO (UNIFORMEMENTE) UNA DELLE 2 SCATOLE E POI PROCEDO AD ESTRARRE CON REIMBUSSOLAMENTO PALLINE FINO AD OTTENERE LA PRIMA PALLINA BIANCA.

1. CALCOLARE LA PMF DI X CHE CONTA IL NUMERO DI ESTRAZIONI DI PALLINE FATTE.

2. SE HO FATTO DUE ESTRAZIONI, CON CHE PROB. HO ESTRATTO LE PALLINE DA S_2?

$\forall k \in \mathrm{Im}(X)$

$k \in \mathrm{Im}(X) = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \mathbb{P}(X = k \mid S_1)\underbrace{\mathbb{P}(S_1)}_{=1/2} + \mathbb{P}(X = k \mid S_2)\underbrace{\mathbb{P}(S_2)}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X = k \mid S_1) + \mathbb{P}(X = k \mid S_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right]$$

2. $$\mathbb{P}(S_2 \mid X = 2) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(X = 2 \mid S_2)\overbrace{\mathbb{P}(S_2)}^{=1/2}}{\mathbb{P}(X = 2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{2-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}\right]}$$

$$= \underline{0.4}$$

<u>OSS</u>||

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(S_2 \mid X=2) = 0.4 \\ \mathbb{P}(S_2) = 0.5 \end{array}\right\} \longrightarrow \{S_2\} \text{ e } \{X=2\}$$

SONO EVENTI DIPENDENTI.

V.A. DISCRETE

V.A POISSON

ARRIVI ALEATORI

OCCORRENZA DI EVENTI NEL TEMPO

X = N° DI PERSONE ENTRATE AL TEMPO $t \in \mathbb{R}_+$

$\sim Po(\lambda)$

→ DURANTE $(0, t] = F$

→ FINESTRA DI OSSERVAZIONE

PROPRIETÀ SE $X \sim Po(\lambda)$ E CON FINESTRA DI OSSERVAZIONE F ALLORA LA V.A. Y CHE CONTA IL N° DI EVENTI NELLA FINESTRA DILATATA $K \cdot F$, $K \in \mathbb{R}_+$ → $K \cdot (0, t] = (0, Kt]$

È ANCORA POISSON MA CON PARAMETRO $K \cdot \lambda$.

ESERCIZIO

UN GIORNALAIO VENDE IN UN'ORA UN N° DI GIORNALI CHE È DISTRIBUITO COME UNA V.A. DI POISSON DI PARAMETRO 0,5. CALCOLARE LA PROB. CHE VENDA PIÙ DI 3 GIORNALI IN DUE ORE.

$X \sim Po(0,5)$

X: CONTA IL N° DI GIORNALI VENDUTI IN 1 ORA

Y: CONTA IL N° DI GIORNALI VENDUTI IN 2 ORE.

COEFF. DI DILATAZIONE $K = 2$.

$$Y \sim Po(2 \cdot 0,5) = Po(1)$$

$$I_m(Y) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(Y > 3)$$

$$= \mathbb{P}(\{Y=4\} \cup \{Y=5\} \cup \dots)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=4}^{+\infty} \{Y=k\}\right) = \sum_{k=4}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\{Y>3\}^c) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(Y=3) + \mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=0)\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1^3}{3!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^0}{0!}e^{-1}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{e}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1\right] = \boxed{0,0189}8$$

MODO 2: (USO R)

PUNTO DELL'IMMAGINE

$$1 - dpois(3,1) - dpois(2,1) - dpois(1,1) - dpois(0,1)$$

$$= 0{,}01898$$

PARAMETRO.

MEDIA, VARIANZA, MOMENTI (DI V.A. DISCRETE)

STRUMENTI CHE RIASSUMONO L'INFORMAZIONE SULLA V.A. CONTENUTA NELLA PMF.

DEF (MEDIA)

CHIAMO MEDIA DELLA V.A. DISCRETA X LA QUANTITÀ:

VALORE ATTESO
ATTESA
VALOR MEDIO
SPERANZA MATEMATICA

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in I_m(X)} k \cdot p_X(k)$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$$

EXPECTATION

ES $X \sim Be(p)$, $p \in [0,1]$

$$I_m(X) = \{0,1\}$$

$$p_X(0) = (1-p)$$

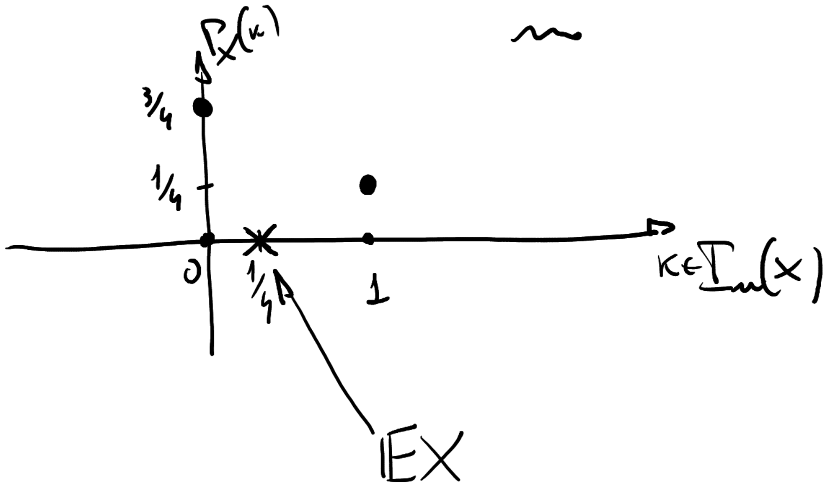
$$p_X(1) = p$$

$$\boxed{\mathbb{E}X} = \sum_{k\in\{0,1\}} k\cdot p^k(1-p)^{1-k} = 0\cdot \cancel{p^0(1-p)^{1-0}} + 1\cdot p^1(1-p)^{1-1}$$

$$= \underset{\sim}{p}$$

$p = \frac{1}{4}$

$(1-p) = \frac{3}{4}$



---

a_i	$P_X(a_i)$
a_1	p_1
a_2	p_2
a_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
a_n	p_n

$\Uparrow$

$I_m(X)$

GIRO LA RUOTA K VOLTE

(K ALTO)

ES: $a_1, a_{10}, a_3, a_{52}, a_1, \ldots$

HO OTTENUTO K_1 VOLTE a_1

$$\frac{a_1\cdot K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + \ldots + a_n\cdot K_n}{K}$$

$K_1 + \ldots + K_n = K$

MEDIA DEI VALORI

$$= a_1 \cdot \frac{K_1}{K} + a_2 \frac{K_2}{K} + a_3 \frac{K_3}{K} + \dots + a_n \frac{K_n}{K}$$

FREQUENZA RELATIVA

LEGGE DEI GRANDI NUMERI.

$$\frac{K_i}{K} \xrightarrow[K \to +\infty]{} P_X(a_i)$$

SOSTITUISCO LE FREQUENZE RELATIVE ~~CON~~ CON LE PROB E OTTENGO

$$\underbrace{a_1 P_X(a_1) + a_2 P_X(a_2) + \dots + a_n P_X(a_n)}_{\mathbb{E}X}$$

<u>DEF</u>: (VARIANZA)

CHIAMO VARIANZA DELLA V.A. DISCRETA X LA QUANTITÀ:

$$\mathbb{V}\text{ar}\, X = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(X - \mathbb{E}X)}^{2} \Big]$$

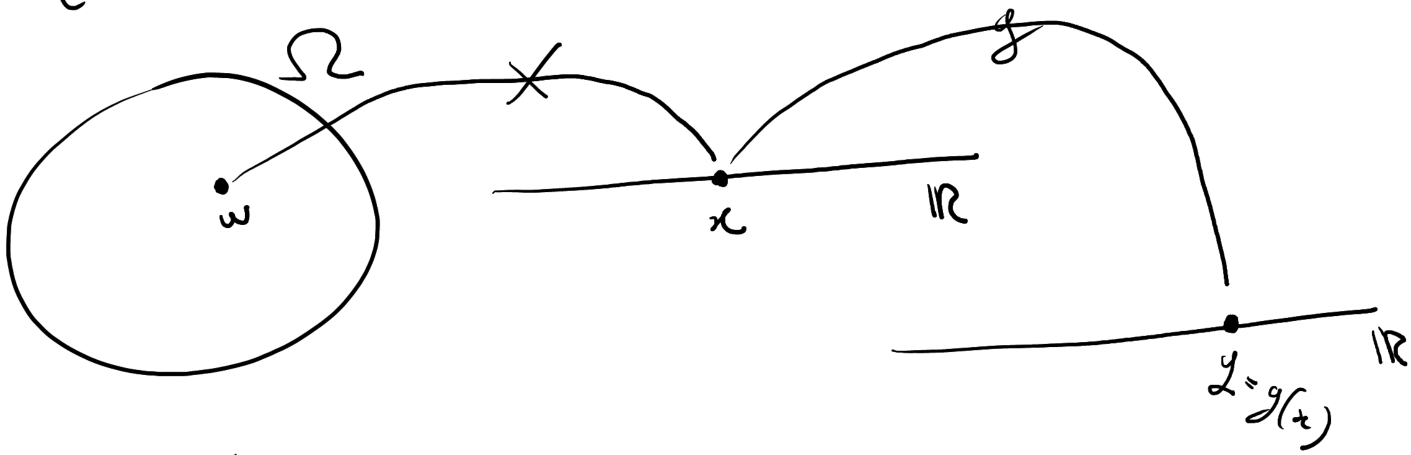
$$Y = X - c$$

$$I_m(Y) = \{-c, 1-c\}$$

$$\mathbb{P}(Y = -c) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

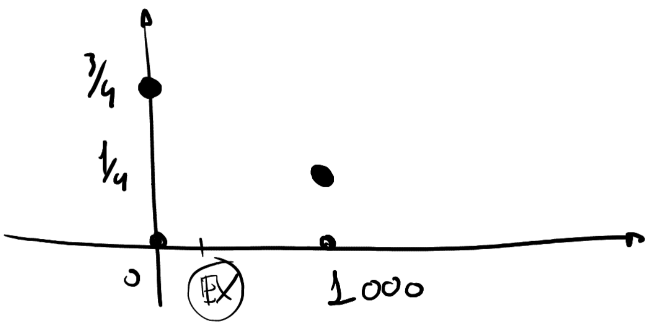
$$\mathbb{P}(Y = 1-c) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

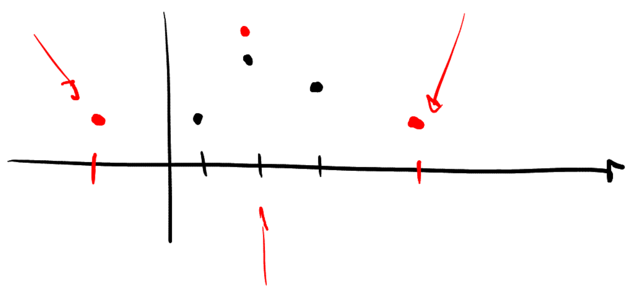
OSS $\mathbb{E}[g(X)]$ $\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



caso della Varianza:

$$g(x) = \underbrace{(x-\mathbb{E}X)}_{\text{SCARTO QUADRATICO}}{}^2$$





$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{(X-\mathbb{E}X)^2}_{Z}\Big] = \sum_{k\in I_m(Z)} k\, p_Z(k)$$

TEOREMA: SE $Z = g(X)$

ALLORA

$$\mathbb{E}Z = \sum_{k \in I_m(X)} g(k)\, p_X(k)$$

USO IL TEOREMA E QUINDI

$$\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}X\right)^2\right] = \sum_{k \in I_m(X)} \underbrace{(k - \mathbb{E}X)^2}_{g(k)} p_X(k)$$

ESEMPIO:

$X \sim B_e(p)$ $\qquad I_m(X) = \{0, 1\}$

$\mathbb{E}X = p$

$$\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}X\right)^2\right]$$

$$= \sum_{k \in \{0,1\}} (k - \mathbb{E}X)^2 p^k (1-p)^{1-k}$$

$$= (0-p)^2 p^0 (1-p)^{1-0} + (1-p)^2 p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$= p^2(1-p) + (1-p)^2 p$$

$$= p(1-p)\left[\cancel{p} + 1 - \cancel{p}\right] = p(1-p)$$

ATTN:

$\mathbb{E}X$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}X$ NON HANNO LA STESSA UNITÀ DI MISURA.

INVECE

$$\mathrm{STDEV}(X) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}X}$$

HA LA STESSA UNITÀ DI MISURA DI $\mathbb{E}X$

DEVIAZIONE STANDARD

MOMENTI

ALTRO TIPO DI FUNZIONE g:

$$\mathbb{E}g(X)$$

SCELGO $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

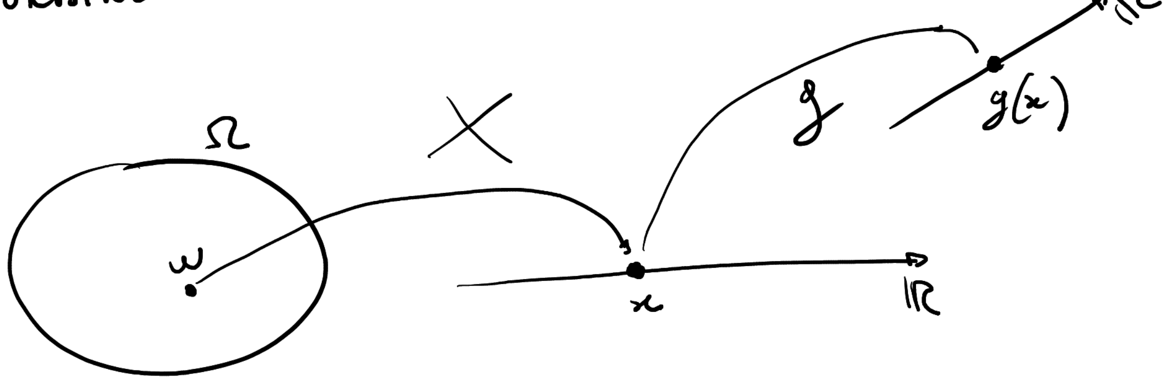
(k=1) $\mathbb{E}X$

(k=2) $\mathbb{E}X^2$

MOMENTO DI ORDINE K DELLA V.A. X:

$$\mathbb{E}X^k$$

DEF



SE DEFINISCO $Z = X^k$

$$= \mathbb{E}Z = \sum_{k \in \mathrm{Im}(Z)} k \cdot p_Z(k)$$

TEO

$$= \sum_{r \in \mathrm{Im}(X)} g(r)\, p_X(r) = \sum_{r \in \mathrm{Im}(X)} r^k\, p_X(r)$$

X v.a. discreta $\quad \mathrm{Im}(X)$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} k \cdot \underbrace{p_X(k)}_{\text{PMF}}$$

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(X - \mathbb{E}X)^2}_{Z}\Big] = \sum_{k \in \mathrm{Im}(Z)} k \cdot p_Z(k)$$

$$\overset{\text{Th. visto}}{=} \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} (k - \mathbb{E}X)^2 p_X(k)$$

$$\mathbb{E}g(X) \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\overset{\text{Th}}{=} \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} g(k) \cdot p_X(k)$$

$$g(x) = x^n \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

momento primo (cioè $n = 1$)

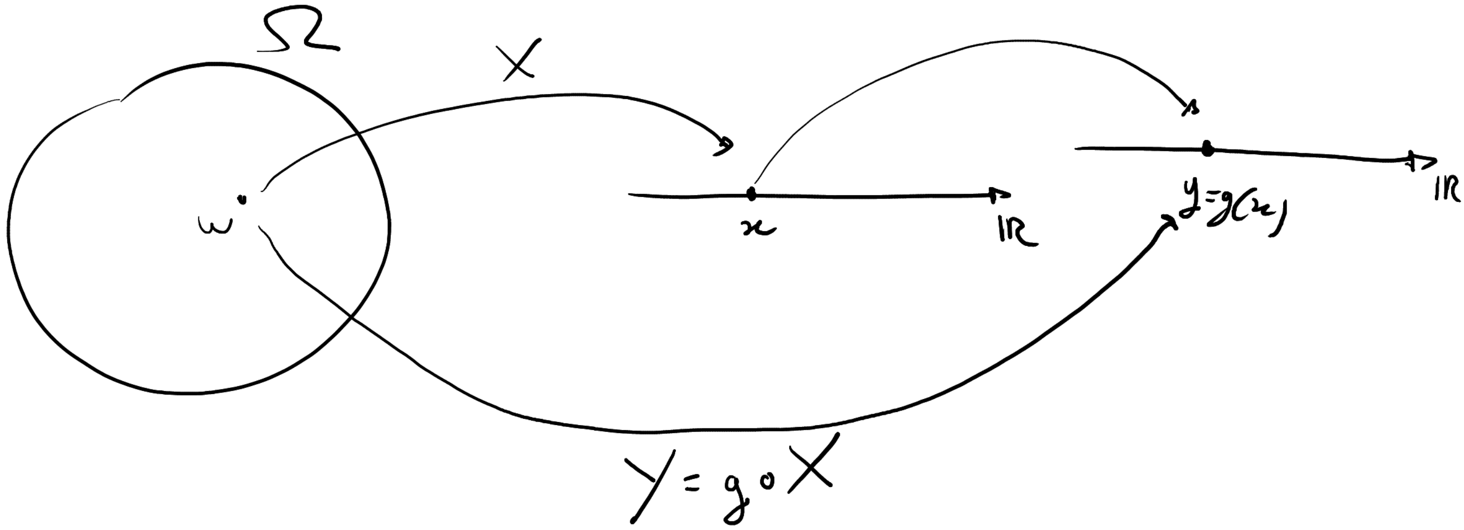
$$\mathbb{E}X^1 = \mathbb{E}X$$

secondo

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} k^2 p_X(k)$$

DEF: CHIAMO MOMENTO DI ORDINE $n \in \mathbb{N}$ DELLA V.A. X LA QUANTITÀ:

$$m_n(X) = \mathbb{E}X^n \underset{\text{TH.}}{=} \sum_{k \in I_m(X)} k^n p_X(k)$$



ES. MOMENTO DI ORDINE 2 DI $X \sim Be(p)$

$\mathbb{E}X = p \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = p(1-p)$

$$m_2(X) = \mathbb{E}X^2 = \sum_{x \in I_m(X)} x^2 p_X(x)$$

$$= \cancel{0^2(1-p)} + 1^2 p = p$$

$$m_3(X) = \mathbb{E}X^3$$

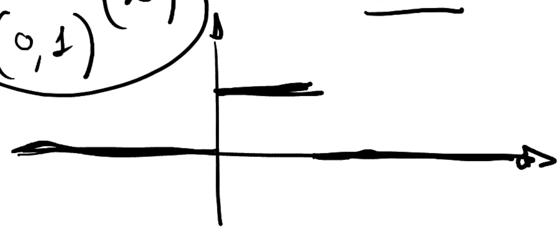
$($

$X \sim Be(p)$

$\mathbb{1}_{\{s\}}$

$p = \mathbb{P}(\{succ\})$

$\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}$



$$m_n(X) = \mathbb{E}X^n = p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROPRIETÀ DI MEDIA E VARIANZA:

1. SIANO X, Y V.A, $a, b \in \mathbb{R}$. ALLORA

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

[LINEARITÀ]

2. $$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}X^2 - [\mathbb{E}X]^2$$

3. SIA X V.A E $a, b \in \mathbb{R}$. ALLORA

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}X$$

↳ OPERATORE QUADRATICO INVARIANTE PER TRASLAZIONI

MEDIA E VAR DI ALCUNE V.A. NOTE:

$X \sim Be(p)$ $\quad \mathbb{E}X = p \quad , \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = p(1-p)$

$X \sim Bin(n,p)$ $\quad \mathbb{E}X = np \quad , \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = np(1-p)$

$X \sim Ge(p)$ $\quad \mathbb{E}X = 1/p \quad , \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = \frac{(1-p)}{p^2}$

$X \sim Po(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}X = \lambda \quad , \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = \lambda$

ESERCIZIO

SE $\mathbb{E}X = 2 \quad , \quad \mathbb{E}X^2 = 8$,

CALCOLARE

(a) $\mathbb{E}\left[(2+4X)^2\right]$

(b) $\mathbb{E}\left[X^2 + (X+1)^2\right]$

(c) $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, X$

—

(a) $\mathbb{E}\left((2+4X)^2\right) = \mathbb{E}\left[4 + 16X^2 + 16X\right]$

LINEARITÀ

$= \mathbb{E}[4] + 16\,\mathbb{E}X^2 + 16\,\mathbb{E}X$

$= 4 + 16 \cdot 8 + 16 \cdot 2 = \boxed{164}$

(b) $\mathbb{E}\left[X^2+(X+1)^2\right]=\mathbb{E}\left[X^2+X^2+2X+1\right]$

$=\mathbb{E}\left[2X^2+2X+1\right] \underset{\text{LINEARITÀ}}{=} 2\,\mathbb{E}X^2+2\,\mathbb{E}X+1$

$=2\cdot 8+2\cdot 2+1 = \boxed{21}$

(c)

$\mathbb{V}\text{AR}\,X=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2\right] \qquad \left(=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2\right)$

$=\mathbb{E}\left[X^2+(\mathbb{E}X)^2-2X\,\mathbb{E}X\right]$

LINEARITÀ

$=\mathbb{E}X^2+(\mathbb{E}X)^2-2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}X$

$=\mathbb{E}X^2+(\mathbb{E}X)^2-2(\mathbb{E}X)^2$

$=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 = 8-2^2=8-4=\boxed{4}$

ESERCIZIO

SIA X UNA V.A. CON PMF

$$P_X(x)=\begin{cases}1/4, & x=1,2\\ 1/3, & x=3\\ 1/6, & x=4\end{cases}$$

$$\mathrm{Im}(X) = \{1, 2, 3, 4\}$$

CALCOLARE $\mathbb{E}X$ e $\mathrm{Var}X$.

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot p_X(x)$$

$$= 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X=3) + 4 \cdot \mathbb{P}(X=4)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{3 + 6 + 12 + 8}{12} = \boxed{\frac{29}{12}}$$

$$\mathrm{Var}X = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} (x - \mathbb{E}X)^2 p_X(x)$$

$$= \left(1 - \frac{29}{12}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{29}{12}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{29}{12}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{29}{12}\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$= 1.0764$$

---

es.1 $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ $\mathbb{E}X = 7$, $\mathrm{Var}X = 2.1$

CALCOLARE $\mathbb{P}(X = 4)$

$\mathbb{P}(X > 12)$

$\mathbb{E}X = np \qquad \mathrm{Var}\,X = np(1-p)$

$$\begin{cases} np = 7 \\ np(1-p) = 2.1 \end{cases}$$

$7(1-p) = 2.1$

$1-p = \frac{2.1}{7} = \frac{\cancel{21}^{3}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{7}}$

$= \frac{3}{10}$

$p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$n \frac{7}{10} = 7$

$\boxed{n = 10}$

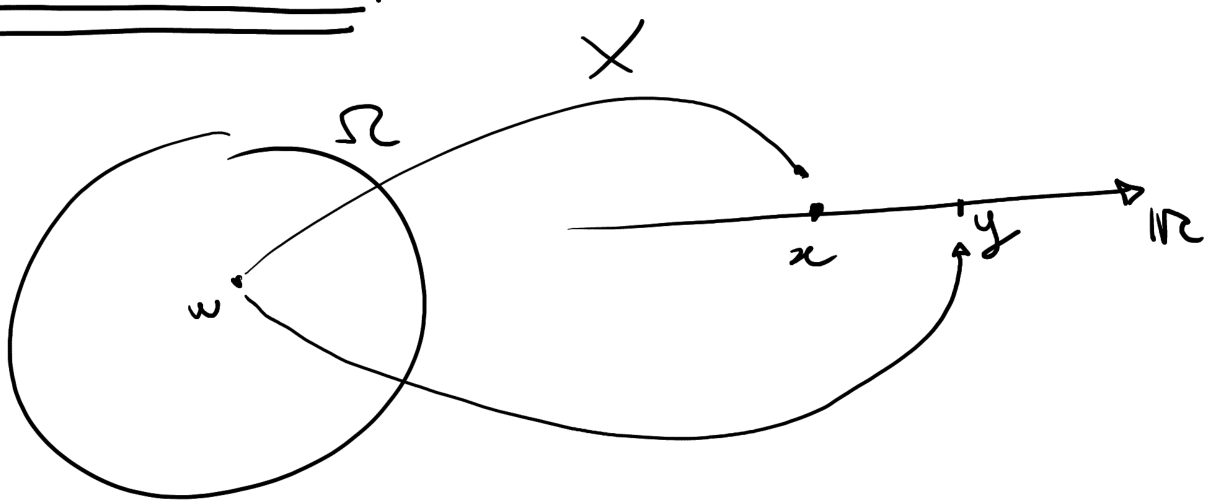
cioè $\quad X \sim \mathrm{Bin}\left(10, \frac{7}{10}\right)$

$$\mathbb{P}(X=4) = p_X(4) = \binom{10}{4}\left(\frac{7}{10}\right)^4\left(\frac{3}{10}\right)^6$$

$$= 0{,}0368$$

$$\mathbb{P}(X > 12) = 0$$

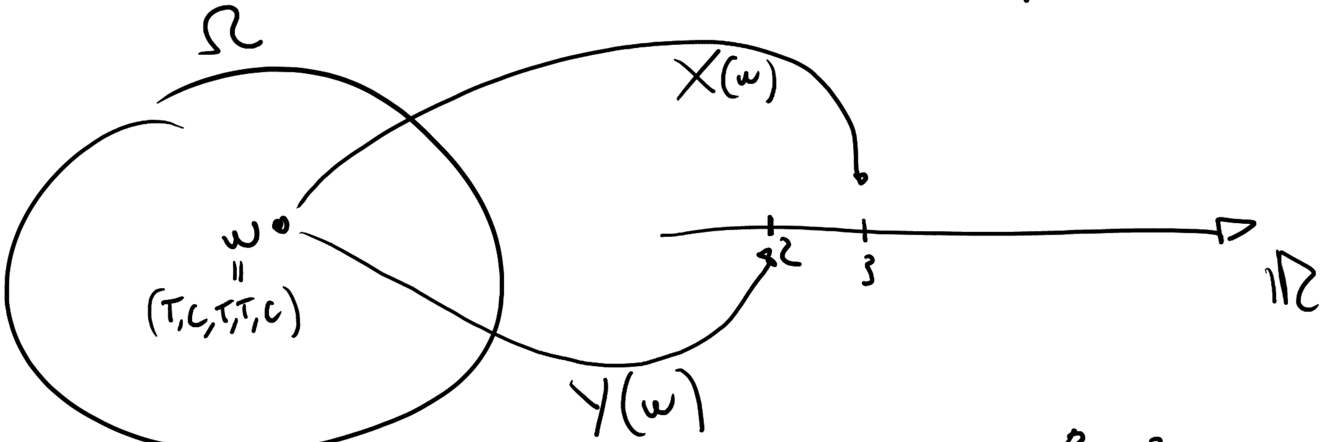
PMF CONGIUNTE:



ESEMPIO: LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA.

X : N° DI TESTE $\qquad X \sim Bin(5, 1/2)$

Y : N° DI CROCI $\qquad Y \sim Bin(5, 1/2)$



$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(Y=2) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned} \right\}$$

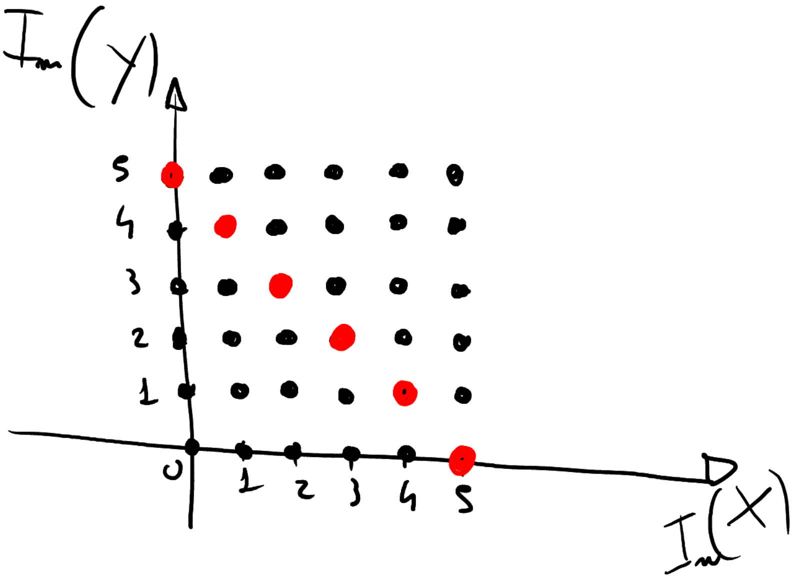
$$\mathbb{P}\left(\{X=3\} \cap \{Y=1\}\right) = 0$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}(X=3, Y=1)$$

NOTAZIONE

$$\begin{array}{ccc} (X,Y) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega \in \Omega & \longmapsto & (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$



$(\cancel{X},Y)$

$\mathrm{Im}((X,Y))$

$(3,0)$

PMF CONGIUNTE

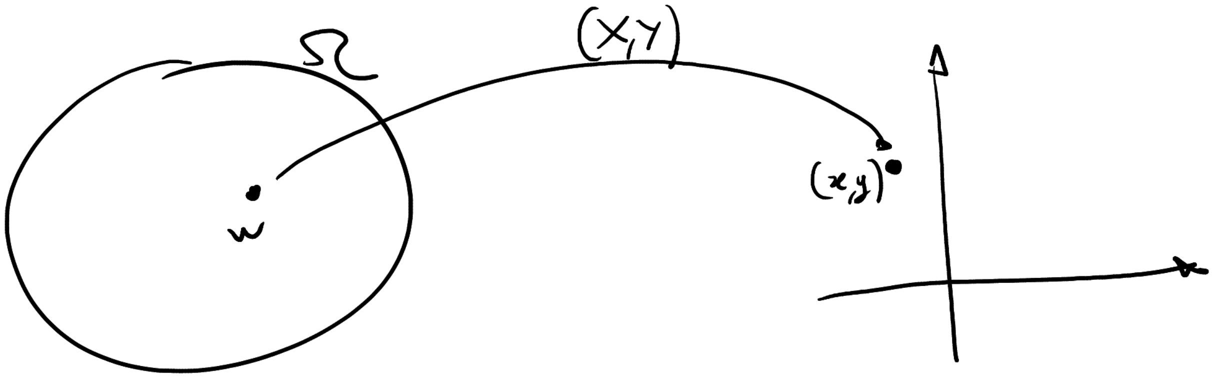
(X,Y) $\qquad$ X, Y V.A.

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\omega \longmapsto (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

ω', ω''

$$Im((X,Y)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) = (x,y)$$



ES: LANCIO UNA MONETA EQUA 5 VOLTE.

X : CONTA IL N° DI TESTE

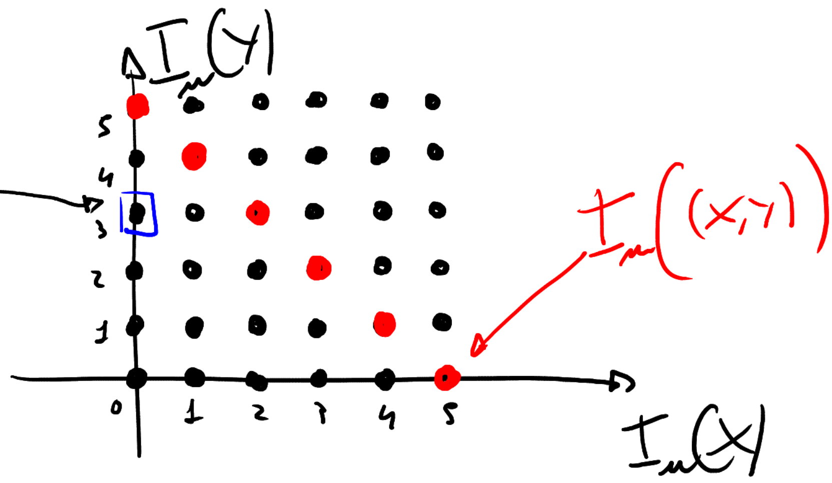
Y : CONTA IL N° DI CROCI

(X,Y)

$Im(X) = \{0,1,2,3,4,5\}$

$Im(Y) = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$I_m((X,Y)) \subseteq I_m(X) \times I_m(Y)$$



$$\mathbb{P}(X=0, Y=3) = 0$$

$$\mathbb{P}((X,Y)=(0,3)) = P_{(X,Y)}(0,3)$$

DEFINIAMO LA PMF CONGIUNTA DI (X,Y):

DEF: CHIAMO PMF CONGIUNTA DI (X,Y) [OPPURE DELLE V.A. X E Y] LA FUNZIONE

$$P_{(X,Y)} : I_m((X,Y)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto P_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$

$$= \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

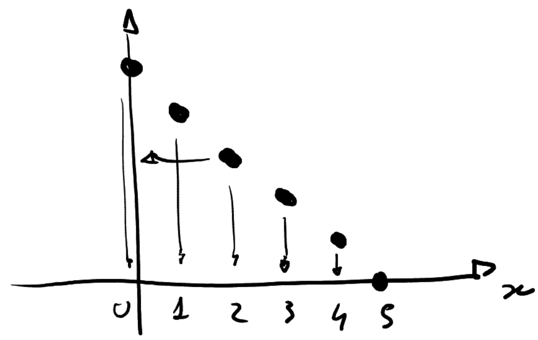
NOTAZIONE E

MI RENDO SUBITO CONTO CHE

PER DEDURRE LA PMF CONGIUNTA NON BASTANO LE PMF MARGINALI DELLE SINGOLE COMPONENTI.

IL VICEVERSA È INVECE POSSIBILE. SE ABBIAMO LA PMF CONGIUNTA POSSIAMO OTTENERE LE PMF MARGINALI:

$$P_{(X,Y)}(x,y) \qquad \forall \ (x,y) \in I_m((X,Y))$$



$$I_m(X) = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$I_m(Y) = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P_X(x) = \mathbb{P}(X=x) \qquad \forall \ x \in I_m(X)$$

$$\{X=x\} = \{X=x\} \cap \Omega$$

$$= \{X=x\} \cap \bigcup_{y \in I_m(Y)} \{Y=y\}$$

NB SIANO $y', y'' \in I_m(Y)$ ALLORA $\{Y=y'\} \cap \{Y=y''\} = \emptyset$

$$= \bigcup_{y \in I_m(Y)} \left(\underbrace{\{X=x\} \cap \{Y=y\}} \right)$$

NB SONO DISGIUNTI!

$$\{X=x\}\cap\{Y=y'\}$$

$$\cap$$

$$\{X=x\}\cap\{Y=y''\}$$

$$\| $$

$$\emptyset$$

QUINDI

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x)} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{y\in I_m(Y)}\left(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\right)\right)$$

$$\|$$

$$P_X(x)$$

$$\overset{\text{ADD.}}{=} \sum_{y\in I_m(Y)} \mathbb{P}\left(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\right)$$

$$= \sum_{y\in I_m(Y)} \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \boxed{\sum_{y\in I_m(Y)} P_{(X,Y)}(x,y)}$$

ANALOGAMENTE:

$$P_Y(y) = \sum_{x\in I_m(X)} P_{(X,Y)}(x,y)$$

ESERCIZIO: SI CONSIDERINO LE V.A. X, Y CON PMF CONGIUNTA FATTA COSÌ:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
5	$1/20$	$1/20$	$1/20$	0
6	$1/20$	$2/20$	$3/20$	$1/20$
7	$1/20$	$2/20$	$3/20$	$1/20$
8	0	$1/20$	$1/20$	$1/20$

$P_{(X,Y)}(4,6) = \mathbb{P}(X=4, Y=6)$

CON $\quad I_m(X) = \{1,2,3,4\}$

$I_m(Y) = \{5,6,7,8\}$

ⓐ CALCOLARE LA PMF MARGINALE DI X E DI Y.

$P_X(x) \qquad \forall x \in I_m(X) = \{1,2,3,4\}$

$$P_X(1) = P_{(X,Y)}(1,5) + P_{(X,Y)}(1,6) + P_{(X,Y)}(1,7) + P_{(X,Y)}(1,8)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + 0 = \frac{3}{20}$$

$$P_X(2) = P_{(X,Y)}(2,5) + P_{(X,Y)}(2,6) + P_{(X,Y)}(2,7) + P_{(X,Y)}(2,8)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$$

$P_X(3) = \frac{8}{20}$

$P_X(4) = \frac{3}{20}$

NB $\left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = 1 \right)$

$\underline{P_Y(y)}$? $\quad \forall y \in I_m(Y) = \{5, 6, 7, 8\}$

$$P_Y(5) = \sum_{x \in I_m(X)} P_{(X,Y)}(x, 5) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + 0 = \frac{3}{20}$$

$P_Y(6) = \frac{7}{20}$

$P_Y(7) = \frac{7}{20}$

$P_Y(8) = \frac{3}{20}$

5 CALCOLARE $\quad \mathbb{P}(X=2, Y=6) = P_{(X,Y)}(2,6) = \frac{2}{20}$

$$\mathbb{P}(X>2, Y=6) = \mathbb{P}(X=3, Y=6) + \mathbb{P}(X=4, Y=6)$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20}$$

$$\mathbb{P}(X<2, Y>6) = \mathbb{P}(X=1, Y=7) + \mathbb{P}(X=1, Y=8)$$

$$= \frac{1}{20} + 0 .$$

INDIPENDENZA DI V.A.

NB A, B EVENTI.

A E B SONO INDIP. SE

1) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

2) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

3) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

DEF: LE V.A. DISCRETE X E Y SONO INDIPENDENTI SE GLI EVENTI

$$\{X = x\} \quad \text{e} \quad \{Y = y\}$$

SONO INDIPENDENTI $\forall \; x \in I_m(X)$ e $\forall y \in I_m(Y)$

CIOÈ

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \, \mathbb{P}(\{Y = y\})$$

$$\parallel$$

$$P_{(X,Y)}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

OSS

SE X, Y INDIP. ALLORA $I_m((X,Y)) = I_m(X) \cdot I_m(Y)$

INDIPENDENZA, MEDIA, VARIANZA:

SIANO X, Y DUE V.A. INDIPENDENTI.

UN VETTORE ALEATORIO (X,Y) A COMPONENTI INDIPENDENTI

PROP:
$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}g(X,Y) \quad , \quad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

PROP:
$$\mathbb{V}\text{AR}(X+Y) = \mathbb{V}\text{AR}\,X + \mathbb{V}\text{AR}\,Y$$

(X,Y)

INDIPENDENZA / DIPENDENZA FRA V.A.

ESERCIZIO:

UN PRODOTTO VIENE CLASSIFICATO A SECONDA DEL NUMERO DI DIFETTI CHE CONTIENE E DELLA FABBRICA CHE LO PRODUCE.

CHIAMIAMO X_1 LA V.A. CHE CONTA IL N° DI DIFETTI E X_2 LA V.A. CHE CODIFICA LA FABBRICA.

LA PMF CONGIUNTA È QUESTA:

$X_1 \backslash X_2$	1	2
0	$1/8$	$1/16$
1	$1/16$	$1/16$
2	$3/16$	$1/8$
3	$1/8$	$1/4$

1. TROVARE LA PMF MARGINALE DI X_1
2. CALCOLARE $\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}X_2$, $\mathrm{Var}X_1$, $\mathrm{Var}X_2$, $\mathbb{E}X_1^2$
3. X_1 E X_2 SONO INDIPENDENTI?

Sol

1. $Im(X_1) = \{0,1,2,3\}$

DEVO, $\forall x \in Im(X_1)$, DETERMINARE $P_{X_1}(x)$

$x=0$

$$P_{X_1}(0) = \sum_{y \in Im(Y)} P_{(X_1,X_2)}(0, y)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$x=1$

$$P_{X_1}(1) = \sum_{y \in Im(Y)} P_{(X_1,X_2)}(1, y)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$$

$x=2$

$$P_{X_1}(2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

$x=3$

$$P_{X_1}(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

CIOÈ

$$P_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}, & x=0, \\ \frac{2}{16}, & x=1, \\ \frac{5}{16}, & x=2, \\ \frac{6}{16}, & x=3 \end{cases}$$

PMF MARGINALE DI X_2:

$$I_m(X_2) = \{1, 2\}$$

$$P_{X_2}(1) = \sum_{x \in I_m(X_1)} P_{(X_1, X_2)}(x, 1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P_{X_2}(2) = \frac{1}{2}$$

---

2. $$\mathbb{E}X_1 = \sum_{x \in I_m(X)} x \cdot P_{X_1}(x)$$

$$= \cancel{0 \cdot \frac{3}{16}} + 1 \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{16}_{8}} + \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{16}_{8}} + 3 \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

$\mathbb{E}X_2 \longrightarrow$ FATELO VOI

$\mathbb{V}\text{ar}\, X_1$

USO LA DEFINIZIONE

$$\left(\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}\, X_1 &= \mathbb{E}\left[X_1 - \mathbb{E}X_1\right]^2 \\ &= \sum_{x \in I_m(X_1)} \left(x - \mathbb{E}X_1\right)^2 P_{X_1}(x) \end{aligned} \right)$$

TEOREMA

$$\mathbb{V}\text{ar}\, X_1 = \mathbb{E}X_1^2 - \left(\mathbb{E}X_1\right)^2$$

TEOREMA

$$\mathbb{E}X_1^2 = \sum_{x \in I_m(X_1)} x^2 P_{X_1}(x)$$

$$= \cancel{0^2 P_{X_1}(0)} + 1^2 P_{X_1}(1) + 2^2 P_{X_1}(2) + 3^2 P_{X_1}(3)$$

$$= \frac{2}{16} + 4\,\frac{5}{16} + 9\,\frac{6}{16}$$

$$= \frac{2+20+54}{16} = \frac{76}{16}$$

$$\text{VAR}\, X_1 = \mathbb{E}X_1^2 - \left(\mathbb{E}X_1\right)^2$$

$$= \frac{76}{16} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = 1,234375$$

$\text{VAR}\, X_2 \longrightarrow$ DA SOLI

.3 DEF. X_1 E X_2 SONO INDIP.

SE $\{X_1 = x\}$ E $\{X_2 = y\}$

SONO INDIP $\forall x \in \text{Im}(X_1)$ E $y \in \text{Im}(X_2)$

EQUIVALE A CHIEDERE CHE

$$P_{(X_1, X_2)}(x,y) = P_{X_1}(x) \cdot P_{X_2}(y)$$

$$\forall (x,y) \in \text{Im}(X_1) \times \text{Im}(X_2)$$

$(0,1)\quad(0,2)\quad(1,1)\quad(1,2)\quad(2,1)\quad(2,2)$

.....

PER ES. $(0,1)$

$$P_{(X_1,X_2)}(0,1) \stackrel{?}{=} P_{X_1}(0)\cdot P_{X_2}(1)$$

$$\frac{1}{8} \neq \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ X_1 E X_2 SONO DIPENDENTI PERCHÉ $\exists$ UNA COPPIA (x,y) PER CUI LA FATTORIZZAZIONE DELLA PMF CONGIUNTA NON VALE.

ESERCIZIO

UN SET DI 5 TRANSISTOR VIENE TESTATO UNO ALLA VOLTA IN ORDINE CASUALE PER VEDERE QUALI SIANO DIFETTOSI.

SI SUPPONGA CHE 3 DI ESSI SIANO DIFETTOSI.

INDICHIAMO CON N_1 LA V.A. CHE CONTA IL N° DI TEST CHE DEVO FARE PER TROVARE IL PRIMO TRANSISTOR DIFETTOSO.

INDICHIAMO CON N_2 IL N° DI TEST

AGGIUNTIVI PER TROVARE IL SECONDO TRANSISTOR DIFETTOSO.

CALCOLARE LA PMF CONGIUNTA DI N_1 E N_2.

3 D
2 D^c

ESTRAZIONI SUCCESSIVE SENZA REIMBUSSOLAMENTO.

$$DD \rightarrow (N_1 = 1 \, , N_2 = 1) \qquad (1,1)$$

$$DD^cD \rightarrow (N_1 = 1 \, , N_2 = 2) \qquad (1,2)$$

$$DD^cD^cD \rightarrow (N_1 = 1 \, , N_2 = 3) \qquad (1,3)$$

$$D^cDD \rightarrow (N_1 = 2 \, , N_2 = 1) \qquad (2,1)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P_{(N_1,N_2)}(1,1) = \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTRAZ. 1"}} \cap \underset{D}{\text{"ESTR. 2"}} \right)$$

PMF CONGIUNTA

$$= \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTR. 2"}} \;\middle|\; \underset{D}{\text{"ESTR. 1"}} \right) \cdot \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTR. 1"}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P_{(N_1,N_2)}(1,2) = \rightarrow \text{A VOI}$$

ESERCIZIO

IL N° DI VOLTE IN CUI UN INDIVIDUO CONTRAE IL RAFFREDDORE IN UN ANNO È UNA V.A. DI POISSON DI PARAMETRO 3. VIENE TESTATO UN NUOVO FARMACO CHE RIDUCE IL PARAMETRO DELLA POISSON A 2,5 SUL 75% DELLA POPOLAZIONE. PER IL RIMANENTE 25% NON HA EFFETTO.

SE UN INDIVIDUO PRENDE IL FARMACO E IN UN ANNO NON CONTRAE RAFFREDDORI, CON CHE PROB. IL FARMACO HA EFFETTO SU DI LUI?

S = "IL FARMACO HA EFFETTO" $\qquad \mathbb{P}(S) = 0{,}75$

S^c = "IL FARMACO NON HA EFFETTO" $\qquad \mathbb{P}(S^c) = 0{,}25$

X = "CONTA IL N° DI RAFFR. IN UN ANNO"

$$X \mid S \sim \text{Poisson}(2{,}5)$$

$$X \mid S^c \sim \text{Poisson}(3)$$

$$\mathbb{P}(S \mid \underbrace{X = 0}) \qquad \{X = 0\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 0\}$$

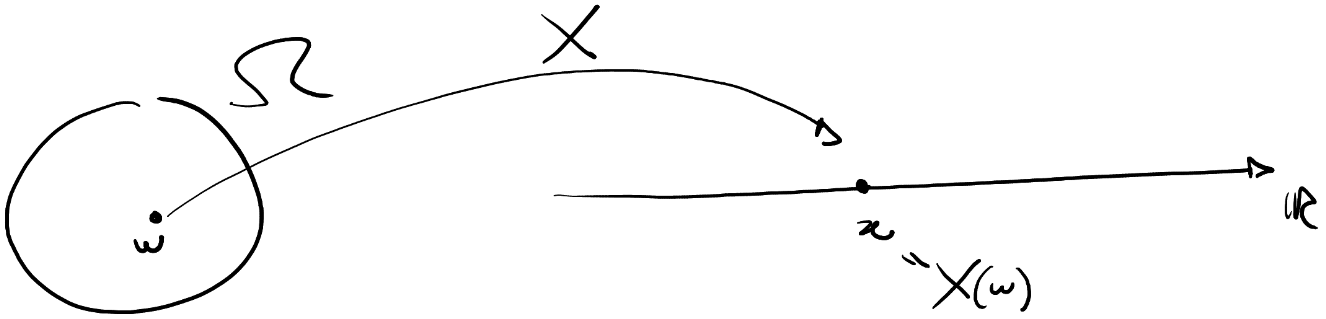
$$\overset{\text{BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(X=0 \mid S^c)\,\mathbb{P}(S^c)}$$

$$= \frac{\text{DPOIS}(0, 2.5) \cdot 0.75}{\text{DPOIS}(0, 2.5) \cdot 0.75 + \text{DPOIS}(0, 3) \cdot 0.25}$$

$$= 0.83182$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE:



$$\mathrm{Im}(X) \begin{cases} \text{DISCRETO} \rightsquigarrow \text{V.A. DISCRETE} \\ \text{CONTINUO} \rightsquigarrow \text{V.A. CONTINUE} \end{cases}$$

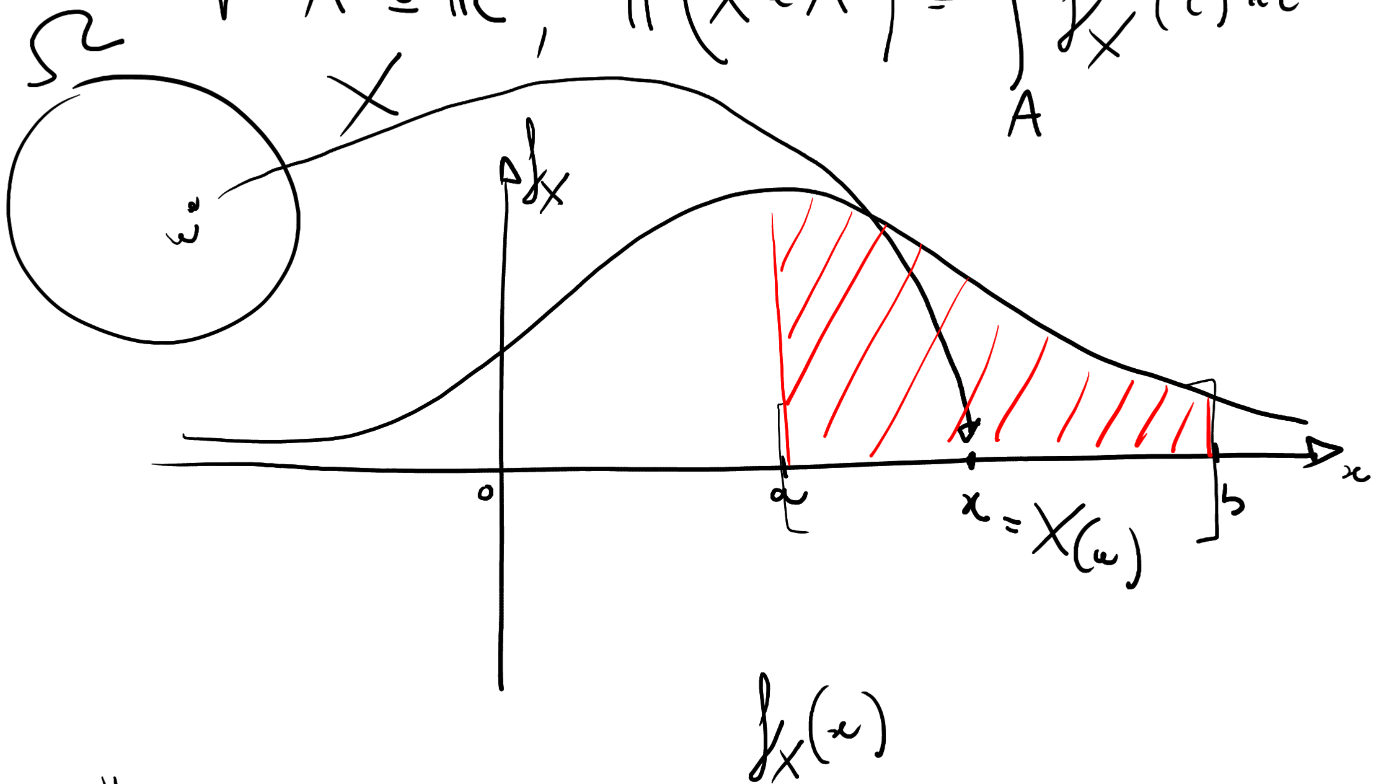
DEF: SIA X V.A. CONTINUA. CHIAMO "FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLA V.A. X (PDF)

LA FUNZIONE:

$$f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

TALE CHE

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(t)\, dt$$



ES||

$A = [a, b]$, $a < b$

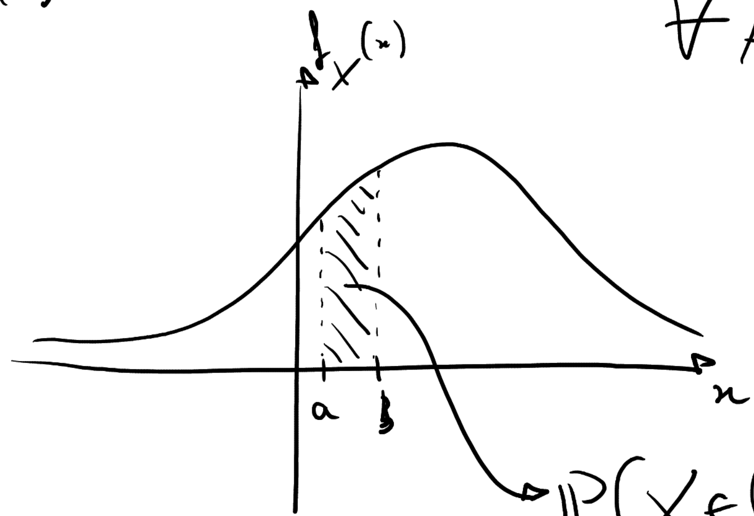
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_a^b f_X(t)\, dt$$

V.A. CONTINUE

PDF (F.NE DI DENSITA' DI PROB.)

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$



$\mathbb{P}(X \in (a,b))$ $\quad a<b$, $\; a,b \in \mathbb{R}$

$I_m(X)$ INSIEME DISCRETI

$I_m(X)$ INSIEME CONTINUO

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

f_X

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$

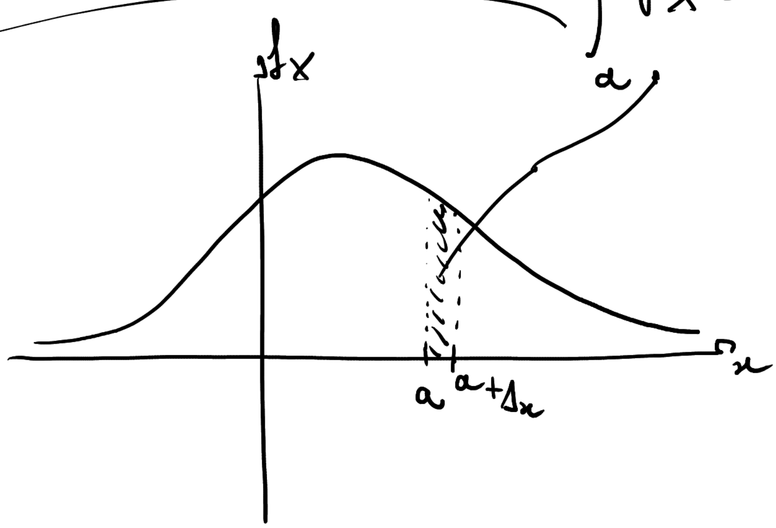
$A = \{a\}$

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$$

$(a, a+\Delta x)$ $\quad\quad$ $\Delta x > 0$

$$\mathbb{P}(X \in (a, a+\Delta x)) = \mathbb{P}(a < X < a+\Delta x)$$

$$= \int_a^{a+\Delta x} f_X(x)\,dx$$



OSS:

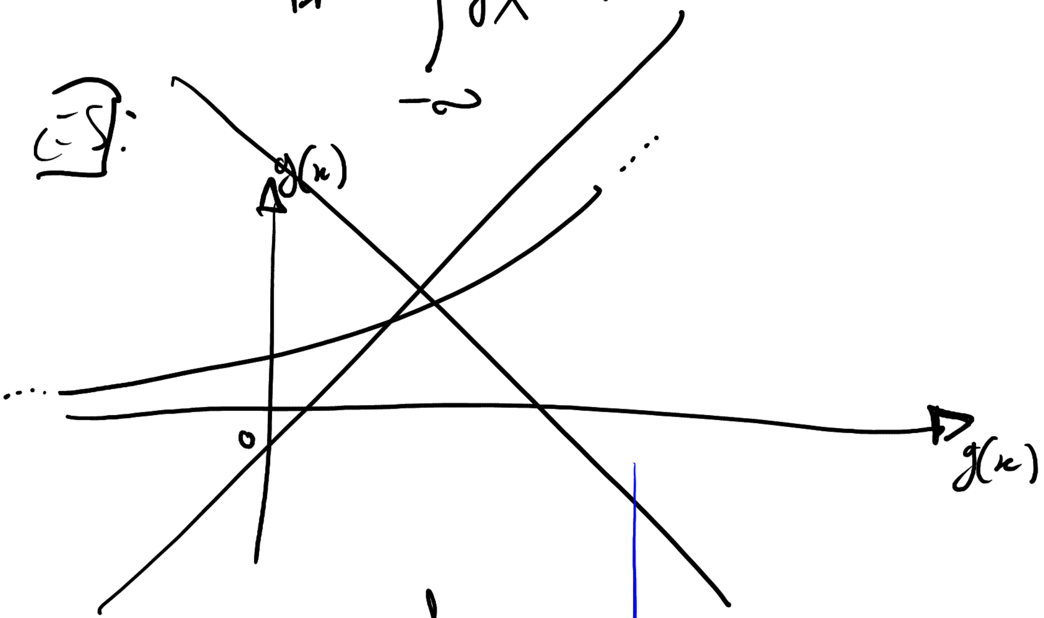
$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(-\infty < X < +\infty)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in \mathbb{R}\}\right)$$

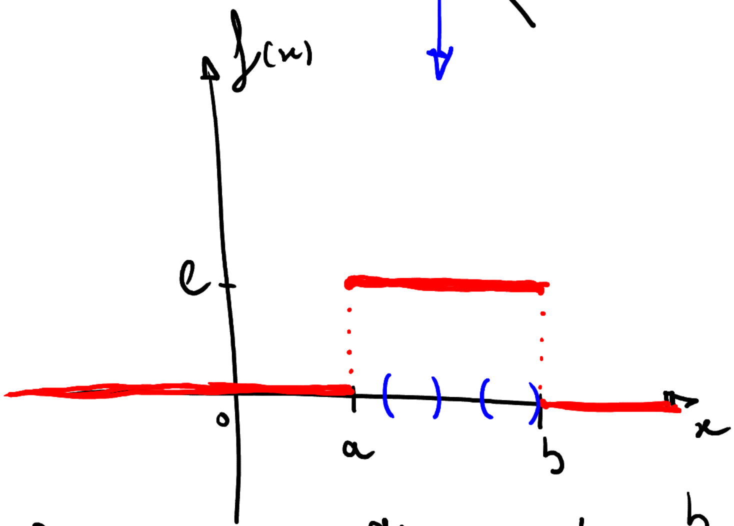
$$= \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

ES:



ES



$a, b \in \mathbb{R}$
$a < b$

$$\underset{\sim}{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx} + \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \cancel{\int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx}$$

$$= \int_a^b \ell \, dx = \ell \int_a^b dx = \ell \cdot [x]_a^b$$

$$= \ell \cdot (b - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{1}{b-a}$$

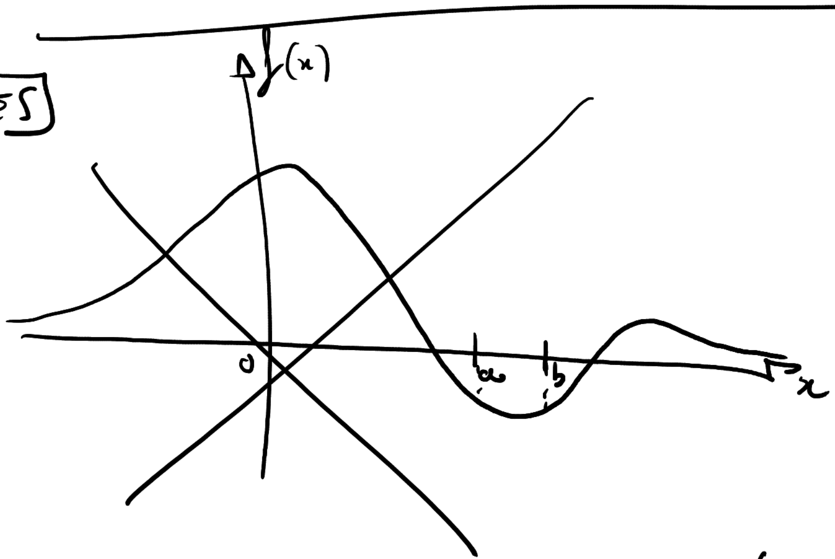
QUINDI LA PDF DI X È

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{ALTROVE}. \end{cases}$$

f È LA PDF DI UNA V.A. UNIFORME.

$$X \sim \mathrm{Un}((a,b))$$

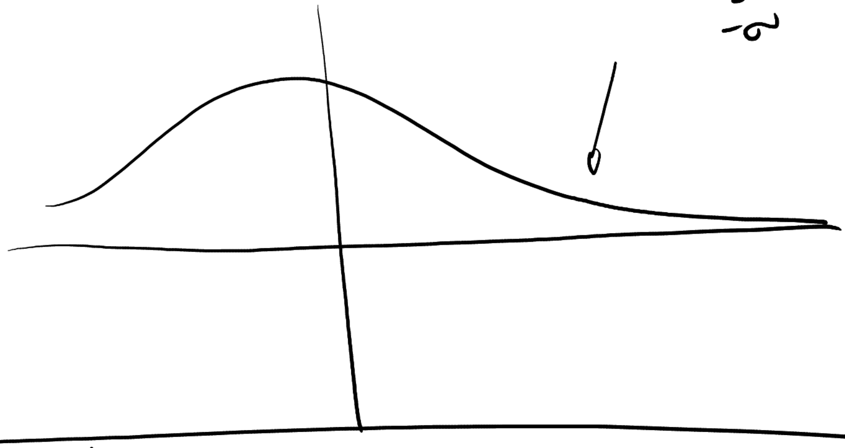
ES



$\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

SE $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = C > 0$ ALLORA $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{C}\,dx = 1$



V.A. NOTE:

$$X \sim \text{Uniforme}([a,b]) \qquad a,b \in \mathbb{R}, \ a<b.$$

LA PDF È

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & b<x, \end{cases}$$

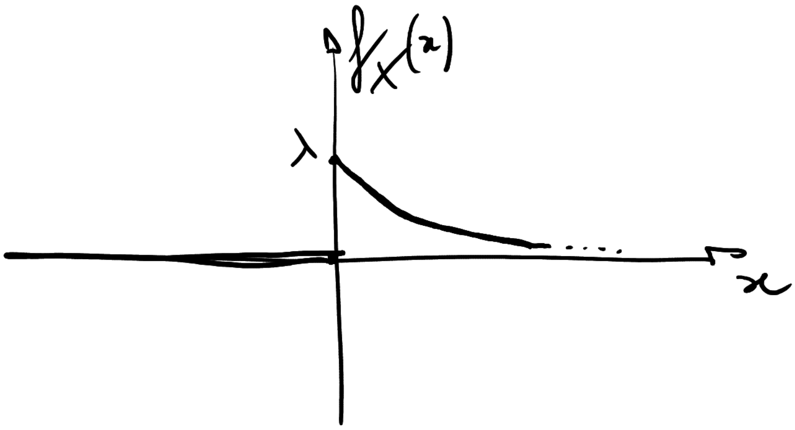
$$\| \qquad \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

V.A. ESPONENZIALE:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \qquad \lambda > 0$$

SE HA LA SEGUENTE PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



$$e^{-\lambda x} = \left(\frac{1}{e^{+\lambda}}\right)^{x}$$

- USATA PER RAPPRESENTARE TEMPI DI VITA
- $\mathbb{P}(X > m \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m - n)$

$m \in \mathbb{R}$ $\quad m > n$

$n \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI ASSENZA DI MEMORIA

V.A. NORMALE:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

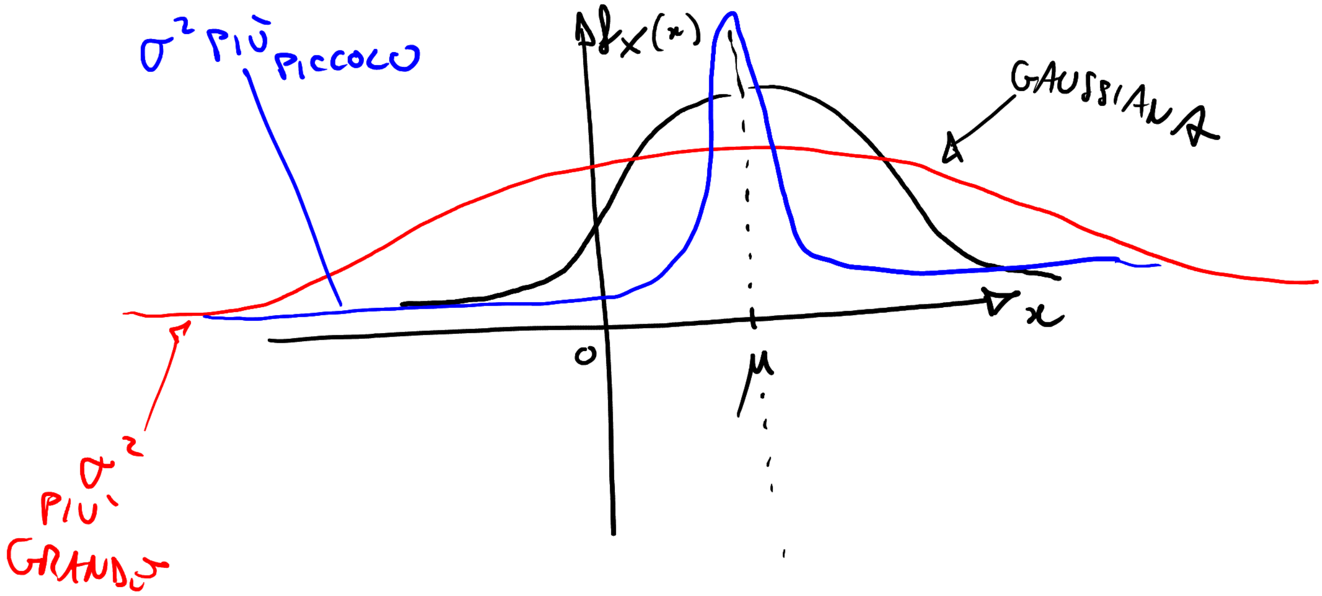
$\mu \in \mathbb{R}$

$\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$

HA PDF:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

GAUSSIANA



PROPRIETÀ:

SE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ALLORA $Y = a \cdot X + b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}.$

SI DISTRIBUISCE COME UNA

$$N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$$

NB LA V.A. NORMALE È "INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI LINEARI"

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$\mu = 0 \ , \sigma^2 = 1$

$$X \sim N(0, 1)$$ NORMALE STANDARD.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI LINEARI:

$a, b \in \mathbb{R}$

$$Y = aX + b$$

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

VALORE ATTESO / VARIANZA / MOMENTI DI UNA V.A. CONTINUA

DEF || (VALORE ATTESO (O MEDIA) DI UNA V.A. CONTINUA)

LA MEDIA DI X V.A. CONTINUA E' DEFINITA COSÍ:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt$$

ES $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

DEF (VARIANZA DI V.A. CONTINUA)

$$\mathbb{V}\text{ar}\, X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2 \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X)^2 f_X(t)\, dt$$

DEF (MOMENTI DI V.A. CONTINUE)

$$\mu_k(X) = \mathbb{E}X^k \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t)\, dt$$

(ES) $X \sim Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}\text{AR}\, X = \frac{1}{\lambda^2}$$

(ES2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}X = \mu, \quad \mathbb{V}\text{AR}\, X = \sigma^2$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA (ESISTE SIA PER V.A DISCRETE SIA PER V.A CONTINUE!)

DEF: SIA X V.A. (DISCRETA O CONTINUA). LA F.NE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA (CDF) È DEFINITA COSÌ:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

SE X DISCRETA

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{k \in I_m(X) \\ / k \leq x}} \underbrace{P_X(k)}_{= \mathbb{P}(X=k)}$$

SE X CONTINUA $\quad X \in (-\infty, x]$

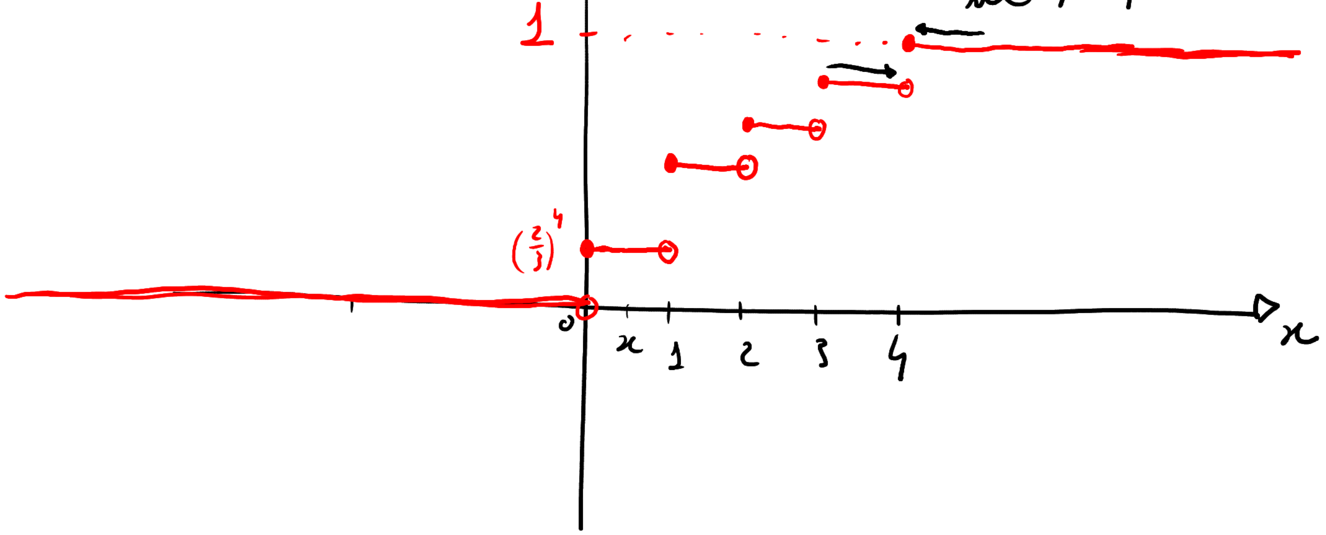
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{(-\infty, x]} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

CDF NEL CASO DI X DISCRETA

ES $\quad X \sim \mathrm{BIN}\left(4, \frac{1}{3}\right)$

$I_m(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \qquad \forall\, x \in (-\infty, 0)$$

$$F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = p_X(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} \qquad x = 0$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\underline{X \le x}) \qquad \underline{\forall x \in (0,1)}$$

$$= P_X(0)$$

$$F_X(1) = \mathbb{P}(X \le 1) = P_X(0) + P_X(1) \qquad \underline{x=1}$$

$$F_X(x) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) \qquad \forall x > 4$$

$$= 1$$

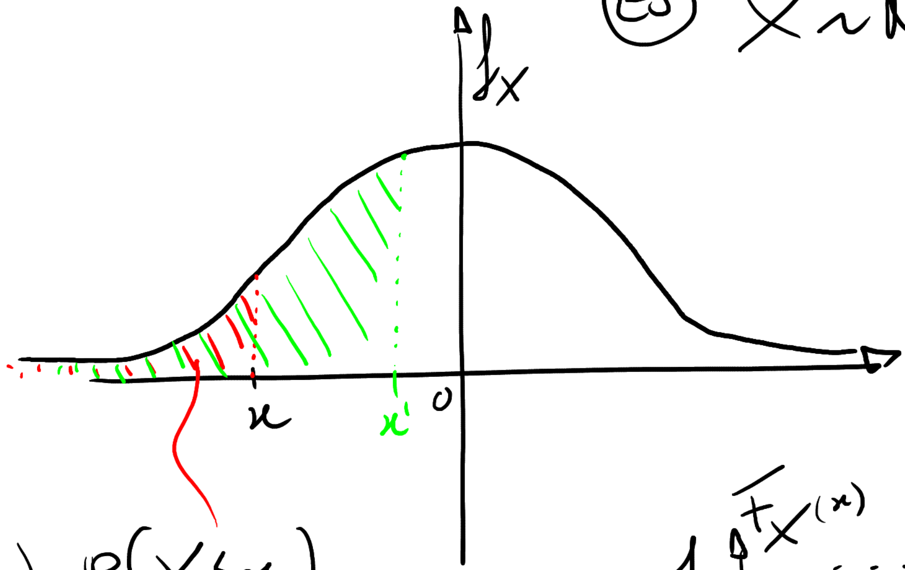
<u>PROPRIETÀ</u>

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. COSTANTE A TRATTI E CONTINUA A DESTRA
4. È NON DECRESCENTE

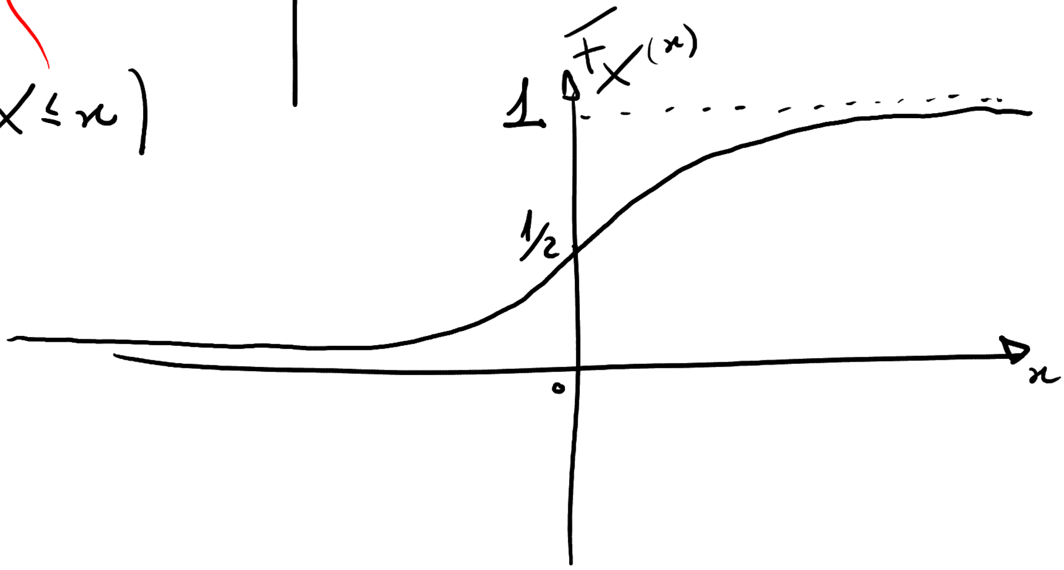
<u>~~SE~~ X V.A. CONTINUA</u>

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

ES $X \sim N(0,1)$



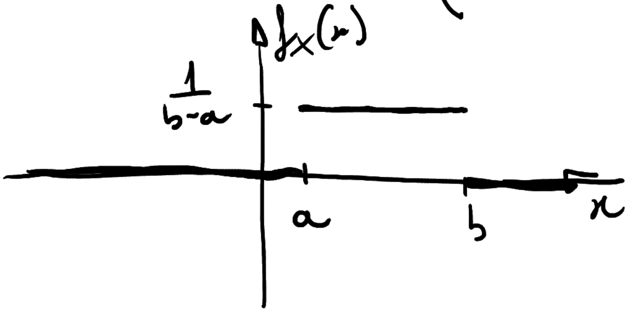
$\underline{F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)}$



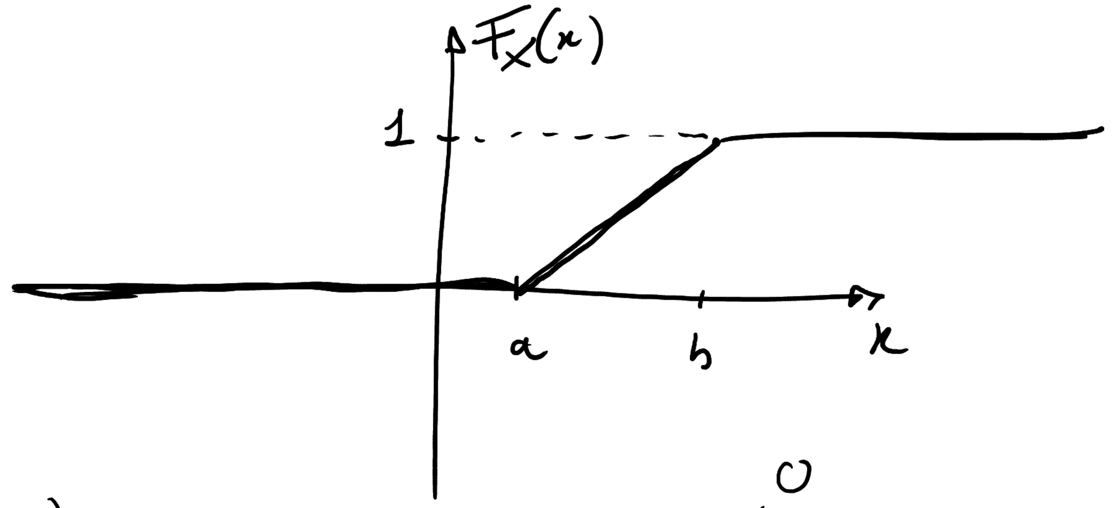
PROPRIETÀ

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. CONTINUA
4. NON DECRESCENTE

ES $X \sim \text{Uniforme}([a,b])$ $\quad a<b.$



$F_X(x)$



$\forall x \in (a,b)$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt}^{\,=0} + \int_{a}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^x dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^x$$

$$= \frac{1}{b-a}(x-a)$$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

ES $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 36)$

1. $\mathbb{P}(X > 5)$
2. $\mathbb{P}(4 < X < 16)$
3. $\mathbb{P}(X \le 8)$

④ $\mathbb{P}(X < 20)$

⑤ $\mathbb{P}(X \geq 16)$

$\mathbb{E}X = 10$

$\mathbb{V}\text{AR}\,X = 36$

$\text{STDEV}\,X = 6 = \sqrt{36}$

$X \in (5, +\infty)$

$$\mathbb{P}(X > 5) = \int_{5}^{+\infty} f_X(t)\,dt$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - F_X(5)$$

$$= 1 - \text{PNORM}(\underset{x}{5}, \underset{\mu}{10}, \underset{\sigma}{6})$$

$\sigma \rightarrow$ DEV. STANDARD.

$$= 0.797671 6 \ldots$$

$$= 0.797\underline{7}$$

$$\mathbb{P}(4 < X < 16) = \mathbb{P}(X \leq 16) - \mathbb{P}(X \leq 4)$$

$$= \int_{-\infty}^{16} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{4} f_X(t)\,dt$$

$= \text{PNORM}(16, 10, 6) - \text{PNORM}(4, 10, 6)$

$= 0.6826895....$

$= 0.682\underline{7}$

GLI ALTRI LI FATE VOI....

NB X DISCRETA

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$$