ESERCIZIO

ESTRAGGO 3 CARTE DA UN MAZZO DI 52 CARTE SENZA REIMBUSSOLAMENTO. CALCOLARE LA PROB. CHE NESSUNA DELLE 3 CARTE SIA DI CUORI.

A = " NESSUNA DELLE 3 CARTE ESTRATTE È CUORI"

NO ORDINE

ESTRAZIONE IN BLOCCO

$$52 = \underset{\text{NON CUORI}}{39} + \underset{\text{CUORI}}{13}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39!}{\cancel{3!}\,36!}}{\frac{52!}{\cancel{3!}\,49!}} = \frac{\frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot \cancel{36!}}{\cancel{36!}}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot \cancel{49!}}{\cancel{49!}}} = \frac{39\cdot 38\cdot 37}{52\cdot 51\cdot 50}$$

ESTRAZIONI SUCCESSIVE

A

A_1 = " NON ESTRAGGO CUORI ALLA 1^a ESTRAZIONE"

A_2 = " " " " " 2^a " "

A_3 = " " " " " 3^a ESTRAZIONE"

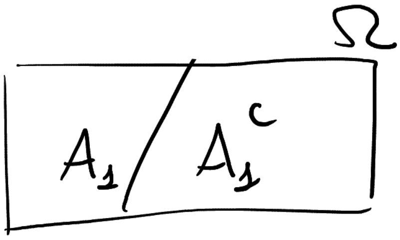
$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{39}{52}$$

$$\mathbb{P}(A_2) =$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{38}{51}$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c) = \frac{39}{51}$$



$$= \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c)$$

$$= \frac{38}{51}\,\frac{39}{52} + \frac{39}{51}\,\frac{13}{52} = \frac{39(38+13)}{51 \cdot 52}$$

$$= \frac{39 \cdot \cancel{51}}{\cancel{51} \cdot 52} = \frac{39}{52}$$

PROBABILITÀ MARGINALE

$$\mathbb{P}(A_3) =$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{37}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c) = \frac{38}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) = \frac{38}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) = \frac{39}{50}$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2)\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c)\underbrace{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)}_{= \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c)} = \dots = \frac{39}{52}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$
$$= \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$$
$$= \frac{37}{50} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{39}{52}$$

<u>ESERCIZIO</u> LANCIO UN DADO EQUO A 4 FACCE. SE ESCE 1 OPPURE 2 LO LANCIO DI NUOVO, UNA VOLTA SOLA ALTRIMENTI MI FERMO. CALCOLARE LA PROB. CHE LA SOMMA DEI NUMERI OTTENUTI SIA ALMENO 4.

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,4)$$
$$(2,1), \dots, (2,4), (3,0),$$
$$(4,0) \}$$

0 = "NON LANCIO IL DADO LA 2ª VOLTA"

$\mathbb{P} \longrightarrow$ NON USO LA PROB. UNIFORME DISCRETA

$\Downarrow$

SINGOLETTI NON EQUIPROBABILI.

A_1 = "ESCE 1 AL PRIMO LANCIO"

A_2 = "ESCE 2 AL PRIMO LANCIO"

A_3 = "ESCE 3 AL PRIMO LANCIO"

A_4 = "ESCE 4 AL PRIMO LANCIO"

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$A_4 = \{(4,0)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(\{(4,0)\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = \{(3,0)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(\{(3,0)\}) = 1/4$$

$$A_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\{(2,1)\}) + \mathbb{P}(\{(2,2)\}) + \mathbb{P}(\{(2,3)\}) + \mathbb{P}(\{(2,4)\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\{(2,1)\}) = \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \mathbb{P}(\{(2,3)\}) = \mathbb{P}(\{(2,4)\}) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \mathbb{P}(\{(1,3)\}) = \mathbb{P}(\{(1,4)\}) = \frac{1}{16}$$

HO COSTRUITO LA $\mathbb{P}$ RAGIONANDO SULL'ESPERIMENTO PROBABILISTICO.

$$\mathbb{P}(A = \text{"SOMMA ALMENO 4"}) = \mathbb{P}(\{(1,3),(1,4),\ldots\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(1,3)\}) + \mathbb{P}(\{(1,4)\}) + \mathbb{P}(\{(4,0)\}) + \ldots$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ESERCIZIO

UN TEST È AL 99% EFFICACE NEL RILEVARE UNA CERTA MALATTIA QUANDO IL SOGGETTO È EFFETTIVAMENTE MALATO. TUTTAVIA RESTITUISCE UN FALSO POSITIVO NE 2% DEI CASI QUANDO

LA MALATTIA NON È PRESENTE.

SUPPONENDO CHE LA MALATTIA SIA PRESENTE NEL 5% DELLA POPOLAZIONE, QUAL È LA PROB. DI ESSERE MALATO SE SI È RISULTATI POSITIVI AL TEST?

M = "IL SOGGETTO È MALATO"

M^C = "IL SOGGETTO È SANO"

P = "IL TEST È POSITIVO"

P^C = "IL TEST È NEGATIVO"

$$\mathbb{P}(P|M^c) = 0{,}02$$

$$\mathbb{P}(M) = 0{,}05$$

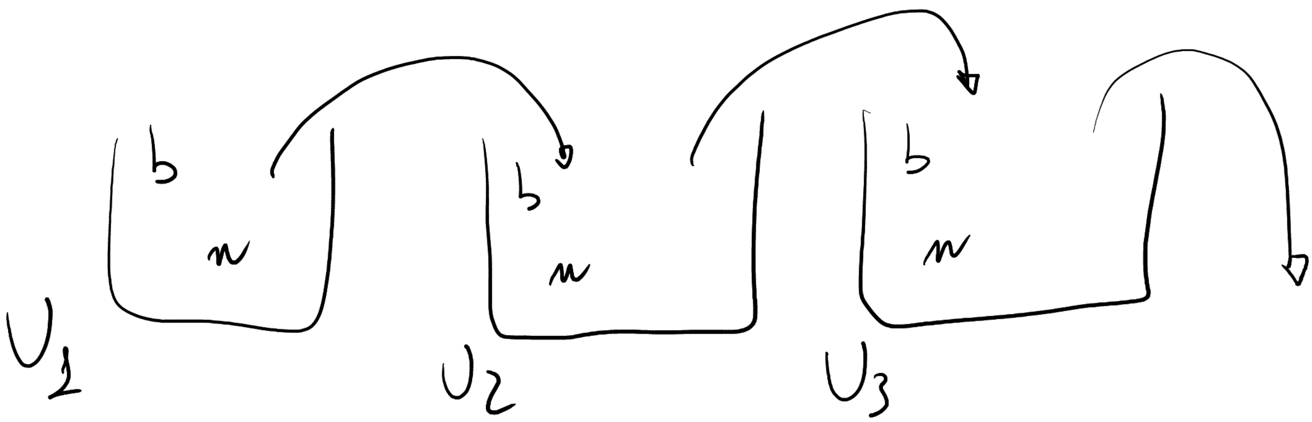
$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(P)} \overset{\text{TH. BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(P|M^c)\mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}02 \cdot 0{,}95} = 0{,}7226.$$

ESERCIZIO

OGNUNA DI 3 URNE CONTIENE b PALLINE BIANCHE E n PALLINE NERE. PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA PRIMA URNA E LA METTO NELLA SECONDA. POI PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA SECONDA URNA E LA METTO NELLA TERZA. INFINE PRENDO A CASO UNA PALLINA DALLA TERZA URNA.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE UNA PALLINA BIANCA ALLA TERZA ESTRAZIONE.



$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_i \in \{B, N\} \}$$

A_3 = "LA 3^a PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

$$= \{ \omega \,/\, \omega = (\omega_1, \omega_2, B), \quad \omega_1 \in \{B, N\}, \omega_2 \in \{B, N\} \}$$

A_2 = "LA 2^a PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

A_1 = "LA 1^a PALLINA ESTRATTA È BIANCA"

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{b+1}{b+1+n}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c) = \frac{b}{b+n+1}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) = \frac{b+1}{b+1+n}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) = \frac{b}{n+1+b}$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c)\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2)\,\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2)$$
$$+ \mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c)\,\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)$$

DOVE

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) = \frac{b+1}{b+1+n} \cdot \frac{b}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{b+1+n} \cdot \frac{b}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1^c)\,\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{b}{b+n+1} \cdot \frac{n}{b+n}$$
$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1^c)\,\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{n+1}{b+n+1} \cdot \frac{n}{b+n}$$

FACCIO I ~~CONTI~~ E OTTENGO

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{b}{b+n}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \text{FACCIO I CONTI} = \frac{b}{b+n}$$