GIURIA

15 PERSONE

5 PERSONE

6 UOMINI

9 DONNE

$$\mathbb{P}\left(\overset{A}{\text{"3 UOMINI E 2 DONNE"}}\right) = \frac{}{\#\Omega}$$

$$\#\Omega = \binom{15}{5}$$

$$\#A = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$$

ESERCIZIO

SE $n \in \mathbb{N}$ PERSONE SONO PRESENTI IN UNA STANZA, QUAL È LA PROB. CHE NESSUNO ABBIA LO STESSO GIORNO DI COMPLEANNO?

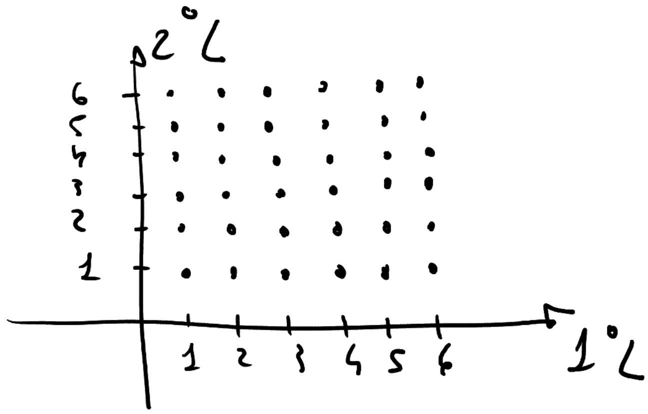
PROBABILITÀ CONDIZIONATA:

VORREMMO CALCOLARE DELLE PROBABILITÀ CHE TENGANO CONTO DI INFORMAZIONI PARZIALI SULL'ESITO DELL'ESPERIMENTO.

ES LANCIO DUE DADI EQUI A SEI FACCE DISTINGUIBILI.

$$\rightarrow \quad \Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots\}$$

$$\# \Omega = 36$$



$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{"LA SOMMA FA 9"}}_{A}) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$A = \{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\}$$

$$B = \text{"IL PRIMO DADO HA DATO 6"}$$
$$= \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\} \qquad \# B = 6$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(A \text{ SAPENDO } B)}$$ → PROBABILITÀ DI A CONDIZIONATA A B

__DEF__: DATO $(\Omega, \mathbb{P})$ MODELLO PROBABILISTICO E DATO B UN EVENTO TALE CHE $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
DEFINISCO "PROBABILITÀ CONDIZIONATA ALL'EVENTO B" (E LA INDICO CON $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$) LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}_B(\cdot)$$

$$\underline{\mathbb{P}(A \mid B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\} \cap \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\right)}{1/6}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{(6,3)\})}{1/6} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

DIMOSTRO CHE $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ È UNA MISURA DI PROB.

① $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

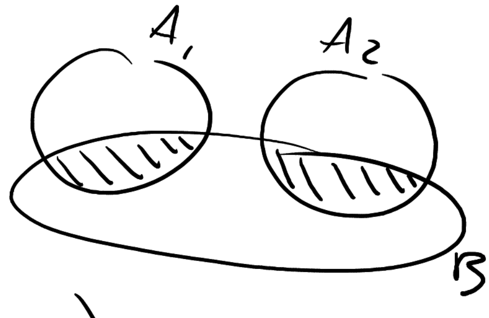
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\overset{\geq 0}{\mathbb{P}(A \cap B)}}{\mathbb{P}(B) \geq 0} \geq 0 \qquad \text{OK}$$

② $$\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = 1 \qquad \text{OK}$$

③ SIANO A_1, A_2 EVENTI DISGIUNTI

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid B)} = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$



$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A_1 | B)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_2 | B)}$$

OK

$\Rightarrow \mathbb{P}(\cdot | B) = \mathbb{P}_B(\cdot)$ È UNA MISURA DI PROBABILITÀ ASSOCIATA A Ω.

$(\Omega, \mathbb{P})$ $\quad B \quad$ $\mathbb{P}(\cdot | B)$

$$(\Omega, \mathbb{P}(\cdot | B))$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}$$

$$= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

3 EVENTI $\quad A_1, A_2, A_3$

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2}\cap \underbrace{A_3}) = \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}$$

$$= \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

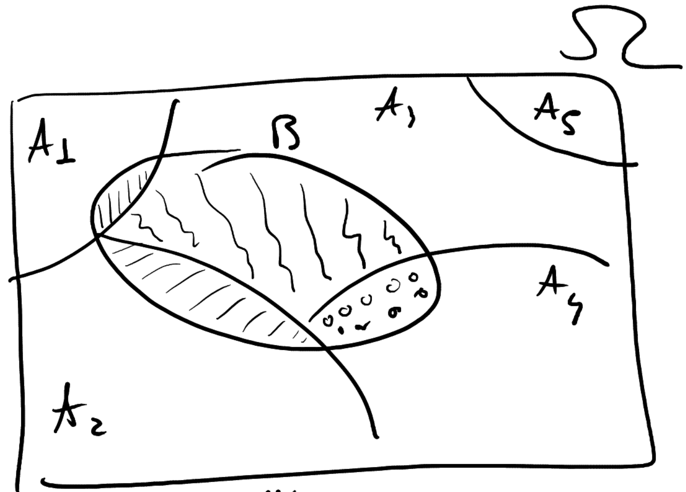
REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

DATA $(A_i)_{i=1}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω.

SIA B UN EVENTO. ALLORA

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

TEOREMA DI BAYES

SIA $(A_i)_{i=1}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω

E SIA B UN EVENTO. ALLORA

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

ESERCIZIO

LANCIO UNA MONETA EQUA 3 VOLTE.
DEFINISCO 2 EVENTI:

A = "ESCONO PIÙ TESTE CHE CROCI"

B = "IL PRIMO LANCIO RESTITUISCE T"

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \ , \ \omega_i \in \{T, C\}\}$$

$$\#\Omega = 2^3 = 8$$

$\mathbb{P}$ È UNIFORME DISCRETA.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A = \{ (TTT), (TTC), (TCT), (CTT) \}$$

$$B = \{ (TTT), (TCT), (TTC), (TCC) \}$$

$$\#B = 4.$$

ESCONO PIÙ TESTE CHE CROCI SAPENDO CHE AL PRIMO LANCIO È USCITA UNA TESTA.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(TTT), (TCT), (TTC)\})}{\frac{\#B}{\#\Omega}}$$

$$= \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\cancel{\#\Omega}}}{\frac{\#B}{\cancel{\#\Omega}}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$