(X, Y)

INDIPENDENZA / DIPENDENZA FRA V.A.

ESERCIZIO:

UN PRODOTTO VIENE CLASSIFICATO A SECONDA DEL NUMERO DI DIFETTI CHE CONTIENE E DELLA FABBRICA CHE LO PRODUCE.

CHIAMIAMO X_1 LA V.A. CHE CONTA IL N° DI DIFETTI E X_2 LA V.A. CHE CODIFICA LA FABBRICA.

LA PMF CONGIUNTA È QUESTA:

$X_1 \backslash X_2$	1	2
0	$1/8$	$1/16$
1	$1/16$	$1/16$
2	$3/16$	$1/8$
3	$1/8$	$1/4$

1. TROVARE LA PMF MARGINALE DI X_1
2. CALCOLARE $\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}X_2$, $\mathrm{Var}\,X_1$, $\mathrm{Var}\,X_2$, $\mathbb{E}X_1^2$
3. X_1 E X_2 SONO INDIPENDENTI?

SOL

1. $Im(X_1) = \{0,1,2,3\}$

DEVO, $\forall x \in Im(X_1)$, DETERMINARE $P_{X_1}(x)$

$x=0$

$$P_{X_1}(0) = \sum_{y \in Im(Y)} P_{(X_1,X_2)}(0,y)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$x=1$

$$P_{X_1}(1) = \sum_{y \in Im(Y)} P_{(X_1,X_2)}(1,y)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$$

$x=2$

$$P_{X_1}(2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

$x=3$

$$P_{X_1}(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

CIOÈ

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}, & x=0, \\ \frac{2}{16}, & x=1, \\ \frac{5}{16}, & x=2, \\ \frac{6}{16}, & x=3 \end{cases}$$

PMF MARGINALE DI X_2:

$$Im(X_2) = \{1, 2\}$$

$$p_{X_2}(1) = \sum_{x \in Im(X_1)} p_{(X_1,X_2)}(x, 1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$p_{X_2}(2) = \frac{1}{2}$$

---

2. $$\mathbb{E}X_1 = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot p_{X_1}(x)$$

$$= \cancel{0 \cdot \frac{3}{16}} + 1 \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{16}_{8}} + \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{16}_{8}} + 3 \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

$\mathbb{E}X_2 \longrightarrow$ FATELO VOI

$\mathbb{V}\text{ar}\, X_1$

USO LA DEFINIZIONE

$$\mathbb{V}\text{ar}\, X_1 = \mathbb{E}\left[X_1 - \mathbb{E}X_1\right]^2$$

$$= \sum_{x \in I_m(X_1)} (x - \mathbb{E}X_1)^2 \, p_{X_1}(x)$$

TEOREMA

$$\mathbb{V}\text{ar}\, X_1 = \mathbb{E}X_1^2 - \left(\mathbb{E}X_1\right)^2$$

TEOREMA

$$\mathbb{E}X_1^2 = \sum_{x \in I_m(X_1)} x^2 \, p_{X_1}(x)$$

$$= \cancel{0^2 p_{X_1}(0)} + 1^2 p_{X_1}(1) + 2^2 p_{X_1}(2) + 3^2 p_{X_1}(3)$$

$$= \frac{2}{16} + 4\,\frac{5}{16} + 9\,\frac{6}{16}$$

$$= \frac{2+20+54}{16} = \frac{76}{16}$$

$$\mathrm{Var}\,X_1 = \mathbb{E}X_1^2 - \left(\mathbb{E}X_1\right)^2$$

$$= \frac{76}{16} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = 1,234375$$

$\mathrm{Var}\,X_2 \longrightarrow$ DA SOLI

.3 DEF. X_1 E X_2 SONO INDIP.

SE $\{X_1 = x\}$ E $\{X_2 = y\}$

SONO INDIP $\forall x \in \mathrm{Im}(X_1)$ E $y \in \mathrm{Im}(X_2)$

EQUIVALE A CHIEDERE CHE

$$P_{(X_1,X_2)}(x,y) = P_{X_1}(x) \cdot P_{X_2}(y)$$

$$\forall (x,y) \in \mathrm{Im}(X_1) \times \mathrm{Im}(X_2)$$

$(0,1)\quad(0,2)\quad(1,1)\quad(1,2)\quad(2,1)\quad(2,2)$

- - - - -

PER ES. $(0,1)$

$$P_{(X_1,X_2)}(0,1) \overset{?}{=} P_{X_1}(0)\cdot P_{X_2}(1)$$

$$\frac{1}{8} \neq \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ X_1 E X_2 SONO DIPENDENTI

PERCHÉ $\exists$ UNA COPPIA (x,y) PER CUI LA FATTORIZZAZIONE DELLA PMF CONGIUNTA NON VALE.

ESERCIZIO

UN SET DI 5 TRANSISTOR VIENE TESTATO UNO ALLA VOLTA IN ORDINE CASUALE PER VEDERE QUALI SIANO DIFETTOSI.

SI SUPPONGA CHE 3 DI ESSI SIANO DIFETTOSI.

INDICHIAMO CON N_1 LA V.A. CHE CONTA IL N° DI TEST CHE DEVO FARE PER TROVARE IL PRIMO TRANSISTOR DIFETTOSO.

INDICHIAMO CON N_2 IL N° DI TEST

AGGIUNTIVI PER TROVARE IL SECONDO TRANSISTOR DIFETTOSO.

CALCOLARE LA PMF CONGIUNTA DI N_1 E N_2.

$3\,D$

$2\,D^c$

ESTRAZIONI SUCCESSIVE SENZA REIMBUSSOLAMENTO.

DD	$(N_1 = 1,\ N_2 = 1)$	$(1,1)$
DD^cD	$(N_1 = 1,\ N_2 = 2)$	$(1,2)$
DD^cD^cD	$(N_1 = 1,\ N_2 = 3)$	$(1,3)$
D^cDD	$(N_1 = 2,\ N_2 = 1)$	$(2,1)$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$

$$P_{(N_1,N_2)}(1,1) = \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTRAZ. 1"}} \cap \underset{D}{\text{"ESTR. 2"}}\right)$$

PMF CONGIUNTA

$$= \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTR. 2"}} \,\middle|\, \underset{D}{\text{"ESTR. 1"}}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\underset{D}{\text{"ESTR. 1"}}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$P_{(N_1,N_2)}(1,2) =$ A VOI

ESERCIZIO

IL N° DI VOLTE IN CUI UN INDIVIDUO CONTRAE IL RAFFREDDORE IN UN ANNO È UNA V.A. DI POISSON DI PARAMETRO 3. VIENE TESTATO UN NUOVO FARMACO CHE RIDUCE IL PARAMETRO DELLA POISSON A 2,5 SUL 75% DELLA POPOLAZIONE. PER IL RIMANENTE 25% NON HA EFFETTO.

SE UN INDIVIDUO PRENDE IL FARMACO E IN UN ANNO NON CONTRAE RAFFREDDORI, CON CHE PROB. IL FARMACO HA EFFETTO SU DI LUI?

$S =$ "IL FARMACO HA EFFETTO" $\qquad \mathbb{P}(S) = 0{,}75$

$S^c =$ "IL FARMACO NON HA EFFETTO" $\qquad \mathbb{P}(S^c) = 0{,}25$

$X =$ "CONTA IL N° DI RAFFR. IN UN ANNO"

$$X \mid S \sim \text{Poisson}(2{,}5)$$

$$X \mid S^c \sim \text{Poisson}(3)$$

$$\mathbb{P}(S \mid \underbrace{X = 0}) \qquad \{X = 0\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 0\}$$

BAYES

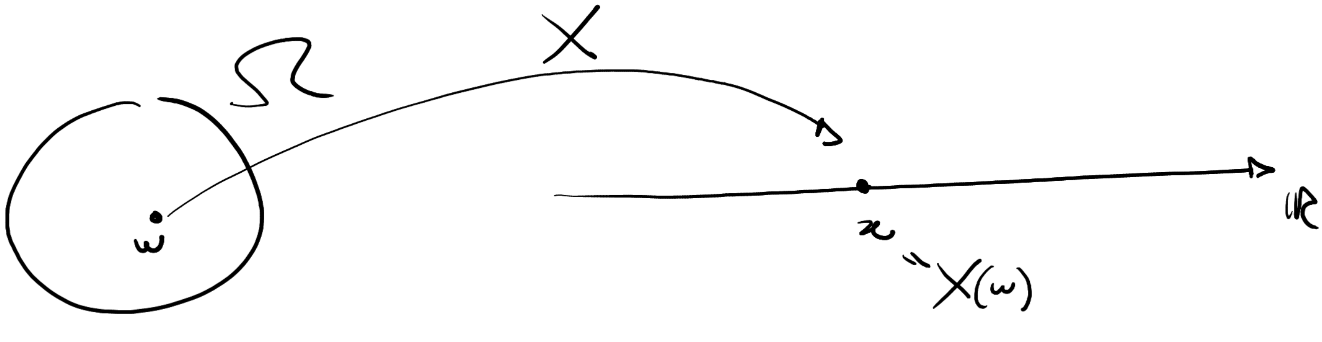
$$= \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(X=0 \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(X=0 \mid S^c)\,\mathbb{P}(S^c)}$$

$$= \frac{\text{DPOIS}(0,\ 2.5)\cdot 0.75}{\text{DPOIS}(0,\ 2.5)\cdot 0.75 + \text{DPOIS}(0,\ 3)\cdot 0.25}$$

$$= 0.83182$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE:



$I_m(X)$ → DISCRETO ⟿ V.A. DISCRETE

$I_m(X)$ → CONTINUO ⟿ V.A. CONTINUE

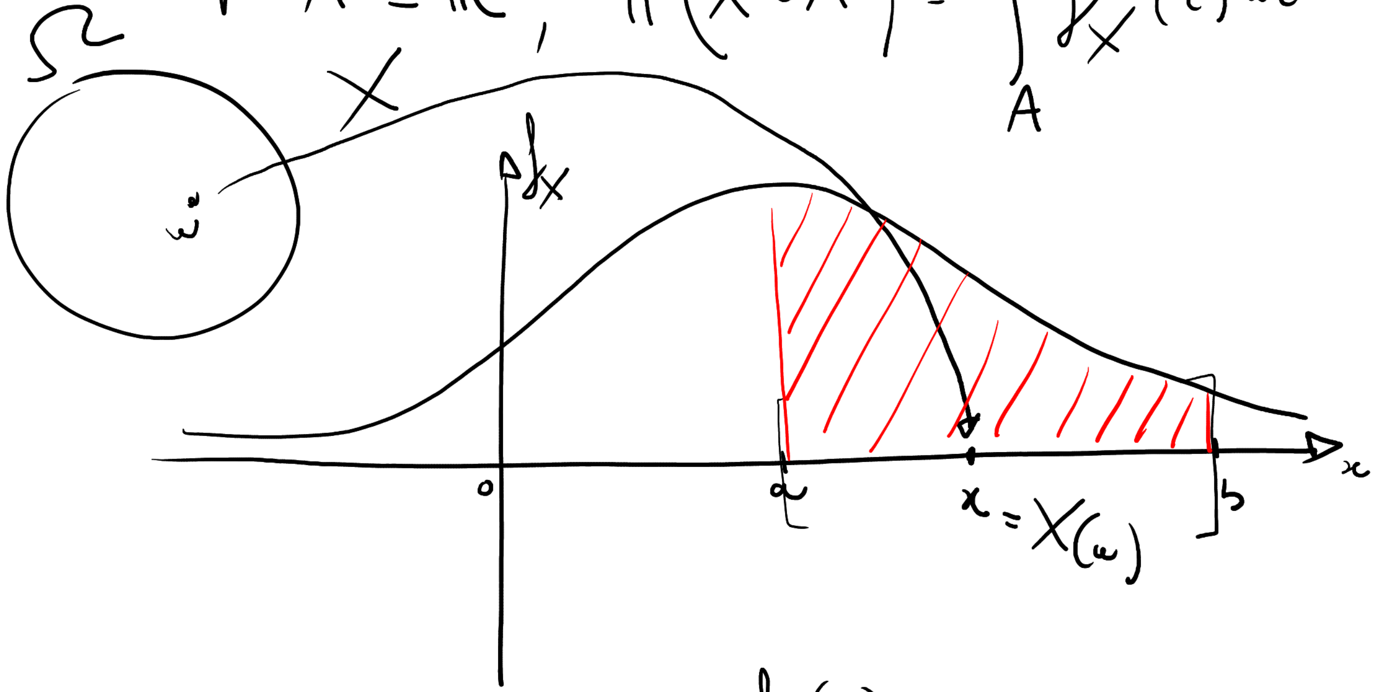
DEF: SIA X V.A. CONTINUA. CHIAMO "FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLA V.A. X (PDF)

LA FUNZIONE:

$$f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

TALE CHE

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(t)\,dt$$



$f_X(x)$

ES||

$$A = [a, b], \quad a < b$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_a^b f_X(t)\,dt$$