INDIPENDENZA:

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ — SPAZIO DI PROBABILITÀ

DEF:

SIANO A, B DUE EVENTI.

A E B SI DICONO INDIPENDENTI SE

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\cdot|B)) \qquad (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\cdot))$$

OSS

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\text{INDIP}}{=} \mathbb{P}(A)$$

$$\frac{\mathbb{P}(B|A)\cancel{\mathbb{P}(A)}}{\mathbb{P}(B)} = \cancel{\mathbb{P}(A)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

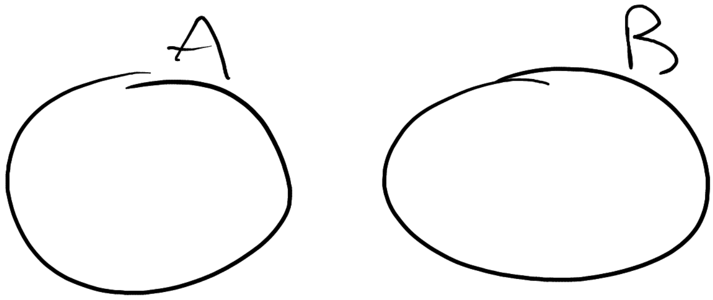
OSS A, B INDIP.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI INDIPENDENZA FRA A E B.

ATTN!!



$$A \cap A^c = \emptyset \qquad \mathbb{P}(A) > 0$$

$$\mathbb{P}(A^c) > 0$$

$$\mathbb{P}(A \cap A^c) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad /^{0}$$

$$0 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(A^c)$$

$$\mathbb{P}(A \mid A^c) = 0 \qquad\qquad \mathbb{P}(A)$$

A A^C SONO <u>DIPENDENTI</u>

ESEMPIO: LANCIO DUE DADI EQUI A 4 FACCE.

A_i = "IL 1° LANCIO RESTITUISCE i"

B_i = "IL 2° LANCIO RESTITUISCE i"

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\Omega = \{(i,j) \ , \ i,j \in \{1,2,3,4\}\}$$

EQUITA' $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA.

(a)

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \frac{\#(A_i \cap B_j)}{\#\Omega} = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\#A_i}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B_j) = \frac{\#B_j}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$A_i = \{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\}$$

$$B_j = \{(1,j),(2,j),(3,j),(4,j)\}$$

$$A_i \cap B_j = \{(i,j)\}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$$

$\Rightarrow$ A_i E B_j SONO INDIPENDENTI.

(b) A_1 = "IL PRIMO LANCIO RESTITUISCE 1"

B = "LA SOMMA FA 5"

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$A_1 \cap B = \{(1,4)\}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \frac{\#(A_1 \cap B)}{\#\Omega} = \frac{1}{16} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{=\mathbb{P}(A_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{=\mathbb{P}(B)}$$

$\Rightarrow$ A_1 E B SONO INDIPENDENTI.

ⓒ A_1

C = "LA SOMMA FA 4"

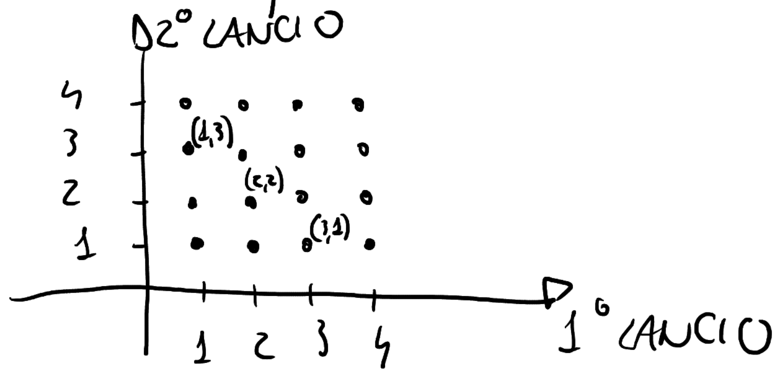
$$\mathbb{P}(A_1) = 1/4 \qquad \mathbb{P}(C)$$

$$C = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$(3, 1)$ $\quad$ $(2\ 2)$

$(1, 3)$ $\quad$ $(2, 2)$

$(3, 1)$



$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{16}$$

$$A_1 \cap C = \{(1,3)\}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(A_1)$$

A_1 E C SONO DIPENDENTI.

(d)

D = "IL MASSIMO FRA I DUE LANCI È 2"

E = "IL MINIMO FRA I DUE LANCI È 2"

$$D = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$E = \{(2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2)\}$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16} \qquad \mathbb{P}(E) = \frac{5}{16}$$

$$D \cap E = \{(2,2)\}$$

$$\mathbb{P}(D \cap E) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{16} = \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(E)$$

$\Rightarrow$ D ED E SONO DIPENDENTI
(NON SONO INDIPENDENTI)

PROPOSIZIONE:
SIANO A, B EVENTI INDIPENDENTI. ALLORA

A E B^C SONO INDIPENDENTI

A^C E B SONO INDIPENDENTI

A^C E B^C SONO INDIPENDENTI.

COSTRUZIONE DI MISURE DI PROBABILITÀ SU PRODOTTI CARTESIANI

$$A \times B = \{(a,b), \ a \in A, b \in B\}$$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{1,2,3,4\}$

$$A \times B = \{(i,j), \ i,j \in \{1,2,3,4\}\}$$

ES

LANCIO DUE DADI A 4 FACCE TRUCCATI:

DADO 1: 4 ESCE CON PROB. $1/2$
1,2,3 ESCONO CON PROB. $1/6$.

DADO 2: 1 ESCE CON PROB $1/2$
2,3,4 ESCONO CON PROB. $1/6$.

- SUPPONGO DI LANCIARE SOLO IL DADO 1:

$$\Omega^1 = \{1,2,3,4\} \qquad (\Omega^1, \mathcal{P}(\Omega^1), \mathbb{P}^1)$$

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}^1(\{2\}) = \mathbb{P}^1(\{3\})$$

$$\mathbb{P}^1(\{4\}) = \frac{1}{2}$$

- SUPPONGO DI LANCIARE SOLO IL DADO 2:

$$\Omega^2 = \{1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \mathbb{P}^2(\{3\}) = \mathbb{P}^2(\{4\}) = \frac{1}{6}$$

OSS $\mathbb{P}^1 \neq \mathbb{P}^2$

- LANCIO I DUE DADI:

$$\Omega = \{(i,j) \,,\quad i,j \in \{1,2,3,4\}\}$$

$\mathbb{P}$? $\longrightarrow$ LA COSTRUISCO TRAMITE $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$ E L'INDIPENDENZA.

DICO CHE

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{(i,j)\}}_{\in\, \mathcal{P}(\Omega)}) = \mathbb{P}^1(\underbrace{\{i\}}_{\in\, \mathcal{P}(\Omega^1)}) \cdot \mathbb{P}^2(\underbrace{\{j\}}_{\in\, \mathcal{P}(\Omega^2)})$$

ES

$$\mathbb{P}\left(\{(3,1)\}\right) = \mathbb{P}^1\left(\{3\}\right) \cdot \mathbb{P}^2\left(\{1\}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$\mathbb{P}$ È UNA MISURA DI PROB.

COERENZA

$$A_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

$\cap$

$\mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right) \quad ?$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}\left(\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{(1,1)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,2)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(1,4)\}\right)$$

$$= \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\mathbb{P}^2\left(\{1\}\right) + \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\mathbb{P}^2\left(\{2\}\right) + \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\mathbb{P}^2\left(\{3\}\right) + \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\mathbb{P}^2\left(\{4\}\right)$$

$$= \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\left[\mathbb{P}^2\left(\{1\}\right) + \mathbb{P}^2\left(\{2\}\right) + \mathbb{P}^2\left(\{3\}\right) + \mathbb{P}^2\left(\{4\}\right)\right]$$

$$= \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\mathbb{P}^2\left(\{1,2,3,4\}\right) = \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)\underbrace{\mathbb{P}^2\left(\Omega^2\right)}_{=1}$$

$$= \mathbb{P}^1\left(\{1\}\right)$$

$\mathbb{P}$ SI CHIAMA LEGGE DI PROB. CONGIUNTA

$\mathbb{P}^1$
SI CHIAMANO LEGGI DI PROB. MARGINALI.
$\mathbb{P}^2$