EVENTI $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}(A) \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

VARIABILI ALEATORIE

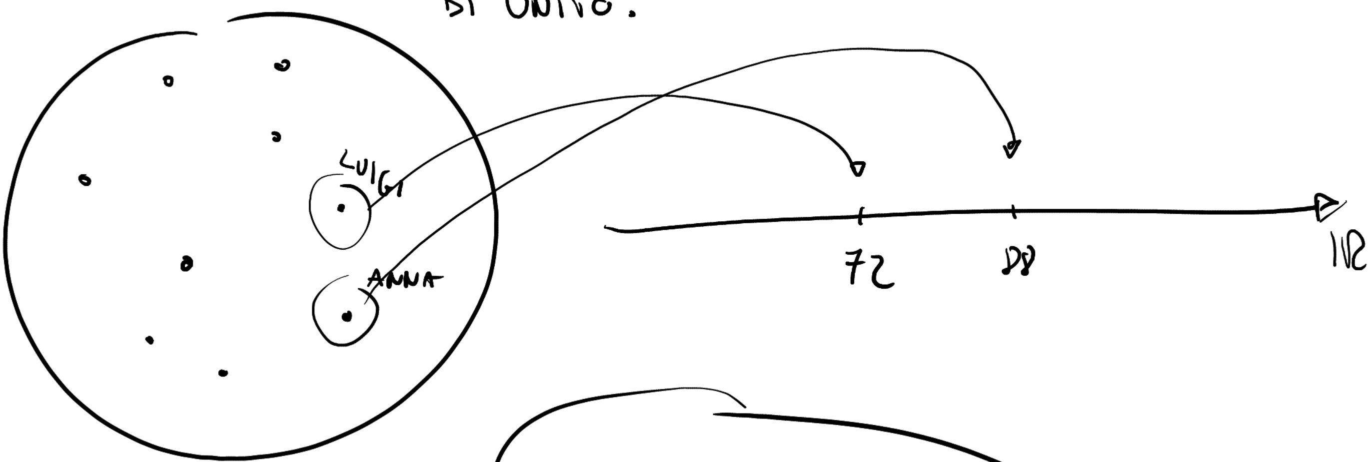
ALEA → DADO

→ STOCASTICO → STOCHASTICS

→ CASUALE

$x \in \mathbb{R}$

Ω = STUDENTI DEL 2° ANNO DEL C.D.L. INFORMATICA DI UNITO.



VOTO DI MATURITÀ

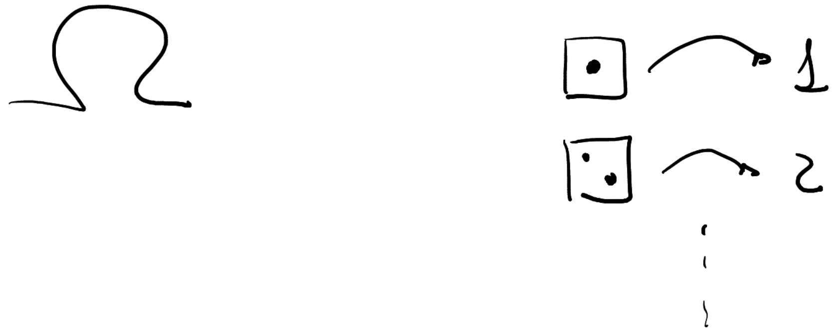
STO DEFINENDO UNA FUNZIONE

ES LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA.
SONO INTERESSATO AL "N° DI TESTE"

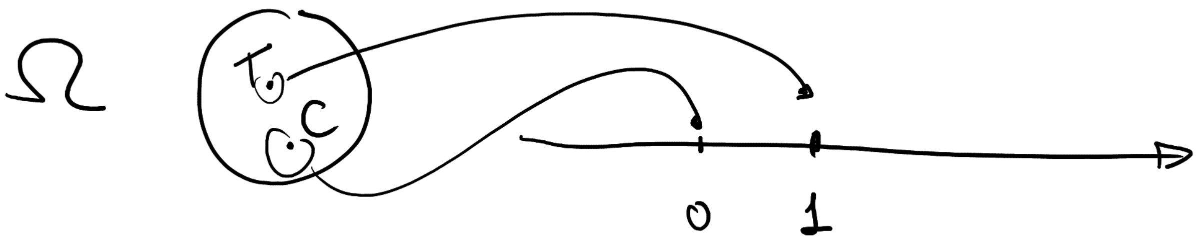
$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5), \ \omega_i \in \{T, C\}, \ i = 1, \dots, 5\}$$

$$\omega' = (T, T, T, C, C) \qquad 3$$

ES LANCIO DI UN DADO:



ES LANCIO DI UNA MONETA:



DEF (VARIABILE ALEATORIA) (V.A.) RANDOM VARIABLE (R.V.)

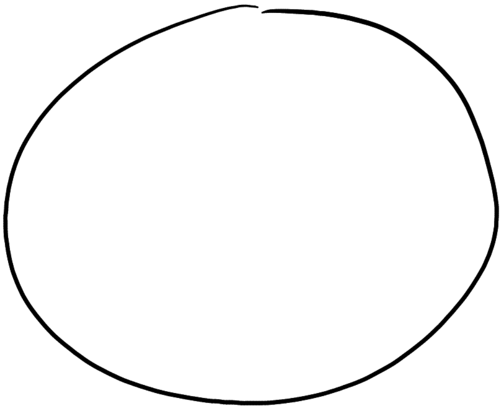
UNA V.A. X È UNA FUNZIONE A VALORI REALI DEFINITA COSÌ:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

OSS $Im(X) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, \exists \, \omega \in \Omega \text{ t.c. } X(\omega) = x \}$

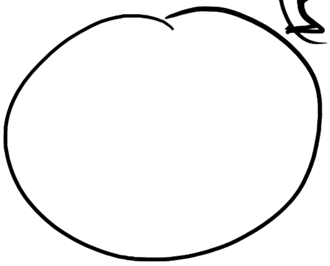
OSS $Im(X)$:

- DISCRETA ($Im(X)$ È AL PIÙ NUMERABILE) $\Rightarrow$ V.A. DISCRETE
- CONTINUA ($Im(X)$ È NON NUMERABILE) $\Rightarrow$ V.A. CONTINUE



$$X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

$(\Omega, \mathbb{P})$



V.A. DISCRETE

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) \text{ AL PIÙ NUMERABILE.}$$

ES LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA E CONTO IL $\boxed{\text{N° DI TESTE OTTENUTE}}$. $\to X$

$$X\big(\{(T,T,C,C,C)\}\big) = 2$$

$\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA.

A = "OTTENGO 2 TESTE"

$$A = \{(T,T,C,C,C), (T,C,T,C,C), \dots\}$$

$\# A = \binom{5}{2}$ $\qquad\qquad$ $\# \Omega = 32$

(T, T, C, C, C)

(T, T, C, C, C)

$X = 2$

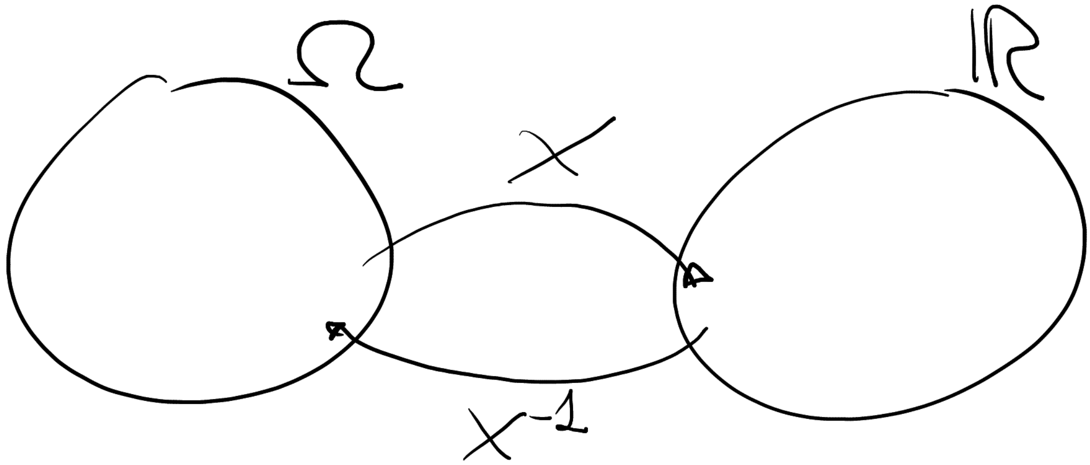
$$A = \underbrace{\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 2\}}_{\substack{\text{CONTRO-IMMAGINE} \\ \text{IMMAGINE INVERSA} \\ \text{DI } \{2\} \in \mathbb{R}}}$$

$= X^{-1}(2)$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# X^{-1}(2)}{\# \Omega}$$

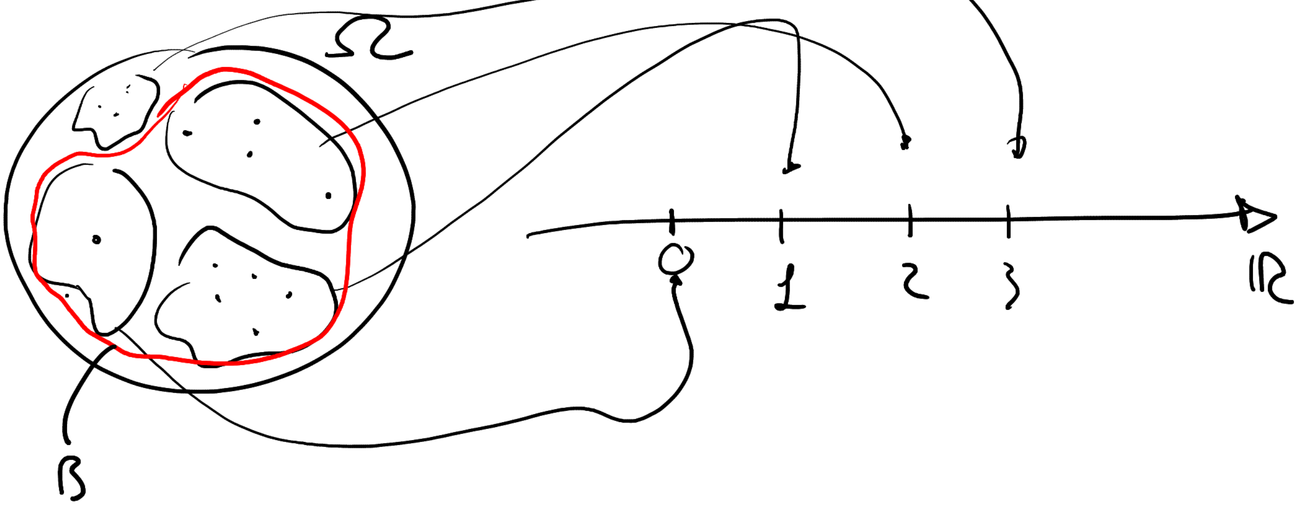
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 2\}) = \mathbb{P}(X = 2)$$

NOTAZIONE



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(2)\right)$$

B = "OTTENGO MENO DI 3 TESTE"



$$B = X^{-1}\left(\{0,1,2\}\right)$$

SONO DISGIUNTI.

X È UNA FUNZIONE E QUINDI

$X^{-1}(0)$, $X^{-1}(1)$, $X^{-1}(2)$

SONO DISGIUNTI

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{0,1,2\})\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(0)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(1)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(2)\right)$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega / X(\omega) < 3\}\right) = \mathbb{P}(X < 3)$$

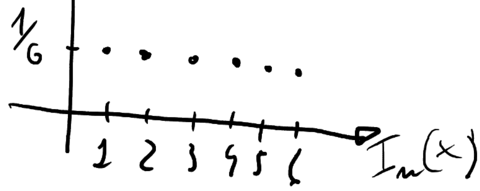
DEF (FUNZIONE DI MASSA DI PROB.
(PROBABILITY MASS FUNCTION - PMF))

DENSITÀ DISCRETA

LA PMF DI X È DEFINITA COSÌ:

$$P_X : \mathrm{Im}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &\cup\\ &k \longmapsto P_X(k) = \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$



DADO 6 FACCE

$$\Omega = \{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \}$$

X = "N° PALLINI SULLA FACCIA SUPERIORE"

$$\mathrm{Im}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y = "CONTA IL N° PALLINI E AGGIUNGE 0.1"

$\hookrightarrow \quad Im(Y) = \{1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1\}$

$$k \in Im(Y)$$

ES LANCIO 5 VOLTE UNA MONETA EQUA.
CONTO IL N° DI TESTE.

DETERMINARE LA PMF DI X = "N° DI TESTE"

1. $Im(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $\forall k \in Im(X)$ DETERMINO $p_X(k)$.

$\underline{k=0}$

$$\underbrace{p_X(0)} = \underbrace{\mathbb{P}(X=0)} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = 0\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(C, C, C, C, C)\}) = \frac{1}{32}$$

$\underline{k=1}$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(T, C, C, C, C), (C, T, C, C, C), \dots)$$

$$= \frac{\binom{5}{1}}{32}$$

$k = 2$

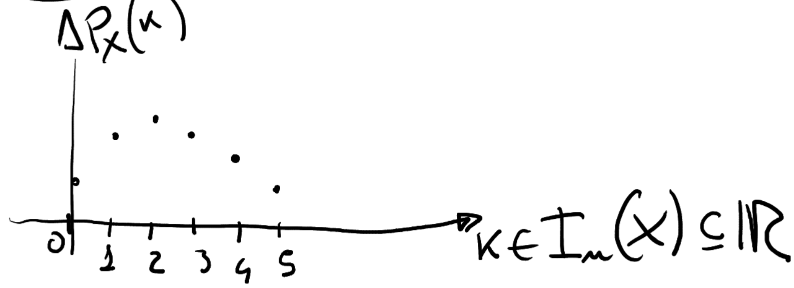
$$P_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 2\})$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{32}$$

$\underline{k \in I_m(X)}$

$$P_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = k\})$$

$$= \frac{\binom{5}{k}}{32}$$



$$\{X = k\} = \underbrace{X^{-1}(k)}_{\subset \Omega} \qquad k \in I_m(X)$$

$$\bigcup_{k \in I_m(X)} X^{-1}(k) = \Omega$$

$$X^{-1}(k) \cap X^{-1}(h) = \emptyset$$

con $h, k \in I_m(X),\ h \neq k$

HO IN PRATICA DEFINITO UNA PARTIZIONE DI Ω INDOTTA DA X

$A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{k \in I_m(X)} X^{-1}(k)\right)$$

$$\overset{\text{ADD.}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} X^{-1}(k)\right)$$

$$= \sum_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} \mathbb{P}\left(X^{-1}(k)\right)$$

$$= \sum_{\substack{k \in I_m(X) \text{ e} \\ X^{-1}(k) \subseteq A}} \mathbb{P}(X = k)$$