Relazioni di ricorrenza,
divide et impera, ordinamento in $O(n \log n)$

Algoritmi e strutture dati

Ugo de'Liguoro, Andras Horvath

1

Relazioni di ricorrenza

- calcolo ricorsivo del fattoriale

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- algoritmo corrispondente ha tempo di calcolo che soddisfa la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + d & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione tempo di un algoritmo ricorsivo è ricorsiva e può essere descritta tramite una **relazione di ricorrenza**.

Qual è l'ordine di grandezza di $T(n)$?

2

Relazioni lineari a partizione costante

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + d \\
&\qquad\qquad \text{(sappiamo che } T(n-1) = T(n-2) + d\text{)} \\
&= T(n-2) + d + d \\
&= T(n-2) + 2d \\
&\;\; \dots \\
&= T(n-k) + kd \qquad\qquad \text{con } \; k \le n
\end{aligned}
$$

scegliendo $k = n$

$$= T(0) + nd = c + nd \in \Theta(n)$$

3

Metodi di soluzione

- metodo dell'**iterazione**: applicare ripetutamente la ricorrenza fino a trovarne la soluzione
- abbiamo applicato il metodo dell'iterazione sul lucido precedente
- metodo della **sostituzione**: ipotizzare una soluzione e applicare il principio di induzione per verificare la soluzione ipotizzata
- lo vediamo sul lucido successivo

4

Metodo della sostituzione

- consideriamo la relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + d & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- dimostriamo con induzione che la soluzione sia

$$T(n) = c + nd$$

- caso base: $c + 0 \cdot d = c = T(0)$ ok!
- passo induttivo: dobbiamo dimostrare che

$$T(n) = c + nd \Rightarrow T(n+1) = c + (n+1)d$$

  - secondo la relazione di ricorrenza:

$$T(n+1) = T(n) + d =$$

  - utilizzando l'ipotesi induttiva:

$$= c + nd + d = c + (n+1)d$$

ok!

5

Relazioni lineari a partizione costante

$$T(n) = T(n-1) + d$$

```
MIN-RIC(A, i)
    ▷ Pre: 0 < n = length(A), 1 ≤ i ≤ n
    ▷ Post: ritorna il minimo in A[i..n]
if i = length(A) then        ▷ A[n..n] ha l'unico el. A[n]
    return A[i]
else
    return min(A[i], MIN-RIC(A, i + 1))
end if
```

Algoritmi ricorsivi di scansione di una struttura lineare hanno questa struttura.

6

Analisi dell'algoritmo di Hanoi

```
MoveTower(n, A, B, C)
if n ≥ 1 then
    MoveTower(n − 1, A, C, B)
    move 1 disk from A to C
    MoveTower(n − 1, B, A, C)
```

Tempo di calcolo:

$$T(n) = \begin{cases} b & n = 0 \\ cT(n-1) + d & n \geq 1 \end{cases}$$

dove $c = 2$ nel caso delle torri di Hanoi ma consideriamo un generale intero $c > 1$ (con $c > 1$ la ricorrenza è identica a quella precedente).

7

Metodo dell'iterazione

$$T(n) = cT(n-1) + d$$

8

Metodo dell'iterazione

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cT(n-1) + d \\
&= c(cT(n-2) + d) + d = c^2T(n-2) + cd + d = \\
&= c^2(cT(n-3) + d) + cd + d = c^3T(n-3) + c^2d + cd + d = \\
\text{dopo } k \le n \text{ iterazioni:} & \\
&= c^kT(n-k) + (c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots + c + 1)d \\
\text{dopo } n \text{ iterazioni:} & \\
&= c^nT(0) + (c^{n-1} + c^{n-2} + \cdots + c + 1)d \\
\text{con } c > 1: & \\
&= c^nb + \frac{c^n - 1}{c - 1}d
\end{aligned}
$$

9

Metodo della sostituzione

- sul lucido precedente abbiamo trovato la soluzione

$$T(n) = c^nb + \frac{c^n - 1}{c - 1}d$$

- verifichiamo la soluzione con induzione
- caso base: $c^0b + \frac{c^0-1}{c-1}d = b = T(0)$ ok!
- passo induttivo: dobbiamo dimostrare l'implicazione

$$T(n) = c^nb + \frac{c^n - 1}{c - 1}d \quad \Rightarrow \quad T(n+1) = c^{n+1}b + \frac{c^{n+1}-1}{c-1}d$$

10

Metodo della sostituzione

secondo la relazione di ricorrenza:

$$T(n+1) = cT(n) + d$$

Metodo della sostituzione

secondo la relazione di ricorrenza:

$$T(n+1) = cT(n) + d$$

utilizzando l'ipotesi induttiva:

$$= c\left(c^n b + \frac{c^n - 1}{c-1} d\right) + d$$

$$= c^{n+1} b + \frac{c^{n+1} - c}{c-1} d + d$$

$$= c^{n+1} b + \frac{c^{n+1} - c + c - 1}{c-1} d$$

$$= c^{n+1} b + \frac{c^{n+1} - 1}{c-1} d$$

Analisi dell'algoritmo di Hanoi

- la soluzione è

$$T(n) = c^n b + \frac{c^n - 1}{c - 1} d$$

- cui ordine di grandezza è c^n, cioè $T(n) \in \Theta(c^n)$
- se ci interessa **l'ordine di grandezza del tempo di calcolo** di un algoritmo che stampi le mosse a video allora $b = 1, c = 2$ e d $= 1$ con le quali otteniamo 2^n
- se ci interessa il **numero di mosse necessarie** allora $b = 0, c = 2$ e d $= 1$ con le quali otteniamo $2^n - 1$

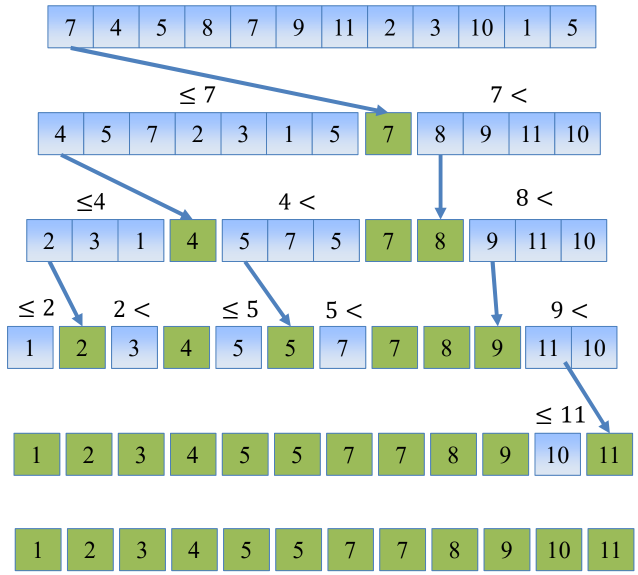
13

Quick-Sort

- l'idea dell'algoritmo dato $A[1..n]$:
  - se $n \leq 1$ non fare niente (il vettore è ordinato)
  - scegli un elemento del vettore, chiamato perno, sia il valore di questo elemento q
  - riorganizza il vettore in modo tale da avere all'inizio elementi $\leq q$, seguito da q e in fondo gli elementi $> q$
  - questo implica che q è al posto giusto
  - sia p la posizione di q, e quindi abbiamo
    $A[1..p-1] \leq A[p] < A[p+1..n]$
  - ripeti tutto su $A[1..p-1]$ e $A[p+1..n]$

14

Quick-Sort



15

Partizionamento

- il partizionamento può essere effettuato in tanti modi
- di seguito sviluppiamo un algoritmo che lo effettua
- questo algoritmo non è quello che vedete applicato sul lucido precedente!

16

Partizionamento

- l'idea del partizionamento di $A[1..n]$:
  - come perno scegliamo $A[1]$
  - due indici per seguire il partizionamento, i e j, tali che
    - elementi in $A[2..i-1]$ sono già esaminati e $A[2..i-1] \leq A[1]$
    - elementi in $A[i..j]$ sono elementi da esaminare
    - elementi in $A[j+1..n]$ sono già esaminati e $A[1] < A[j+1..n]$

17

Partizionamento

- l'idea del partizionamento di $A[1..n]$ (cont.):
  - si parte con $i = 2, j = n$
  - i e j si spostano secondo le regole se $i \leq j$:
    - se $A[i] \leq A[1]$ incrementa i
    - se $A[i] > A[1] \land A[j] > A[1]$ decrementa j
    - se $A[i] > A[1] \land A[j] \leq A[1]$ scambia $A[i]$ e $A[j]$, incrementa i, decrementa j
  - quando per la prima volta $i > j$ scambia $A[1]$ e $A[j]$

18

Partizionamento

7	4	5	8	7	9	11	2	3	10	1	5
	i										*j*
7	4	5	8	7	9	11	2	3	10	1	5
		i									*j*
7	4	5	8	7	9	11	2	3	10	1	5
			i								*j*
7	4	5	5	7	9	11	2	3	10	1	8
				i						*j*	
7	4	5	5	7	9	11	2	3	10	1	8
					i					*j*	
7	4	5	5	7	1	11	2	3	10	9	8
						i			*j*		

19

Partizionamento

7	4	5	5	7	1	11	2	3	10	9	8
						i		*j*			
7	4	5	5	7	1	3	2	11	10	9	8
							i=j				
7	4	5	5	7	1	3	2	11	10	9	8
							j < *i*				
2	4	5	5	7	1	3	7	11	10	9	8

20

Partizionamento

```
PARTITION(A[1..n])
i ← 2, j ← n
while i ≤ j do
    if A[i] ≤ A[1] then
        i ← i + 1
    else
        if A[j] > A[1] then
            j ← j − 1
        else
            scambia A[i] con A[j]
            i ← i + 1, j ← j − 1
        end if
    end if
end while
scambia A[1] con A[j]
return j
```

21

Partizionamento, correttezza

- correttezza con invariante di ciclo:
  $$A[2..i-1] \leq A[1] \wedge A[1] < A[j+1..n]$$
- inizializzazione: $i = 2, j = n$, i due sottovettori sono vuoti ok!
- mantenimento: il ciclo si esegue solo se $i \leq j$ e effettua una e una sola operazione fra i seguenti
  - se $A[i] \leq A[1]$ incrementa i, altrimenti
  - se $A[1] < A[j]$ decrementa j, altrimenti
  - scambia $A[i]$ e $A[j]$, incrementa i, decrementa j
- è evidente che con tutte le tre $A[2..i-1] \leq A[1] \wedge A[1] < A[j+1..n]$ viene mantenuto ok!
- all'uscita: $i = j + 1$ ($j = i - 2$ non può succedere) l'invariante implica che
  $$A[j] \leq A[1] < A[j+1]$$
  e quindi lo scambio finale e l'invariante garantiscono
  $$A[1..j-1] \leq A[j] < A[j+1..n]$$
  e quindi è corretto restituire j (il perno finisce nella posizione j) ok!

22

Quick-Sort

```
QUICK-SORT(A[1..n])
if n > 1 then
    p ← PARTITION(A[1..n])      ▷ partizionamento porta il perno nella posizione p
    if p > 2 then      ▷ se prima del perno ci sono almeno 2 elementi
        QUICK-SORT(A[1..p − 1])
    end if
    if p < n − 1 then      ▷ se dopo il perno ci sono almeno 2 elementi
        QUICK-SORT(A[p + 1..n])
    end if
end if
```

23

Quick-Sort, correttezza

- correttezza con induzione completa assumendo che il partizionamento funzioni correttamente
- caso base: con $n \leq 1$ il vettore in input è ordinato ok!
- passo induttivo:

  corretto con dimensione $< n \Rightarrow$ corretto con dimensione $= n$

  – dalla correttezza del partizionamento dopo la chiamata a Partition:

  $$A[1..p-1] \leq A[p] < A[p+1..n]$$

  – dall'ipotesi induttiva:
    - se $A[1..p-1]$ ha più di 1 elemento, sarà ordinato correttamente con la prima chiamata ricorsiva di Quick-Sort perché ha meno di n elementi
    - se $A[p+1..n]$ ha più di 1 elemento, sarà ordinato correttamente con la seconda chiamata ricorsiva di Quick-Sort perché ha meno di n elementi

  – segue che $A[1..n]$ è ordinato ok!

24

Quick-Sort, complessità

- complessità del partizionamento:
  - Partition scansiona una volta il vettore su cui opera (una parte da sinistra e l'altra da destra)
  - l'ordine di grandezza del tempo di calcolo (ovvero il numero di operazioni) è lineare
  - porteremo avanti i calcoli con

$$T_P(n) = an$$

con a costante

25

Quick-Sort, complessità

- dopo il partizionamento le due chiamate ricorsive lavorano con dimensione $p-1$ e $n-p$
- le due situazioni "estremi" sono
  - $A[1..p-1]$ e $A[p+1..n]$ hanno circa lo stesso numero di elementi
  - $A[1..p-1]$ ha $n-1$ elementi e $A[p+1..n]$ è vuoto (o vice versa)
- le seconda situazione, con **partizioni sbilanciate**, dà luogo ad una relazione di ricorrenza simile a quelle già studiate:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ T(n-1) + T_P(n) + b & n > 1 \end{cases} = \begin{cases} c & n = 1 \\ T(n-1) + an + b & n > 1 \end{cases}$$

26

Quick-Sort, complessità

- con metodo dell'iterazione:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + an + b \\
&= T(n-2) + a(n-1) + b + an + b = \\
&= T(n-3) + a(n-2) + b + a(n-1) + b + an + b =
\end{aligned}
$$

dopo $k \leq n$ iterazioni:

$$
= T(n-k) + a\sum_{i=0}^{k-1}(n-i) + kb
$$

dopo $n-1$ iterazioni:

$$
\begin{aligned}
&= T(1) + a\sum_{i=0}^{n-2}(n-i) + (n-1)b \\
&= c + a\sum_{i=0}^{n-2}(n-i) + (n-1)b = c + a\sum_{i=2}^{n} i + (n-1)b
\end{aligned}
$$

- quindi $T(n) \in \Theta(n^2)$ (che è il suo caso peggiore come vedremo)

27

Relazioni lineari a partizione costante

I coefficienti a_i sono costanti

Partizione costante: i è limitato da h

$$
T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \leq m \leq h \\ \sum_{1 \leq i \leq h} a_i T(n-i) + cn^{\beta} & \text{se } n > m \end{cases}
$$

Ordine costante h

Lavoro polinomiale di divisione/combinazione

Linare: n ha grado 1

28

Relazioni lineari a partizione costante

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \le m \le h \\ \sum_{1 \le i \le h} a_i T(n-i) + cn^{\beta} & \text{se } n > m \end{cases}$$

Teorema. Se $c > 0, \beta \ge 0, a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$ allora $\begin{cases} T(n) \in O(n^{\beta+1}) & \text{se } a = 1 \\ T(n) \in O(a^n n^{\beta}) & \text{se } a \ge 2 \end{cases}$

Il teorema si chiama teorema master per relazioni lineari a partizione costante.

29

Relazioni lineari a partizione costante

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \le m \le h \\ \sum_{1 \le i \le h} a_i T(n-i) + cn^{\beta} & \text{se } n > m \end{cases}$$

Teorema. Se $c > 0, \beta \ge 0, a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$ allora $\begin{cases} T(n) \in O(n^{\beta+1}) & \text{se } a = 1 \\ T(n) \in O(a^n n^{\beta}) & \text{se } a \ge 2 \end{cases}$

Quick-Sort (caso peggiore):

con $h = 1, a = a_1 = 1, \beta = 1, c = 1$

$$\boxed{T(n) \in O(n^{\beta+1}) = O(n^2)}$$

30

Relazioni lineari a partizione costante

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \le m \le h \\ \sum_{1 \le i \le h} a_i T(n-i) + cn^\beta & \text{se } n > m \end{cases}$$

Teorema. Se $c > 0, \beta \ge 0, a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$ allora $\begin{cases} T(n) \in O(n^{\beta+1}) & \text{se } a = 1 \\ T(n) \in O(a^n n^\beta) & \text{se } a \ge 2 \end{cases}$

Minimo ricorsivo:

con $h = 1, a = a_1 = 1, \beta = 0, c = 1$

$$\boxed{T(n) \in O(n^{\beta+1}) = O(n)}$$

31

Relazioni lineari a partizione costante

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \le m \le h \\ \sum_{1 \le i \le h} a_i T(n-i) + cn^\beta & \text{se } n > m \end{cases}$$

Teorema. Se $c > 0, \beta \ge 0, a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$ allora $\begin{cases} T(n) \in O(n^{\beta+1}) & \text{se } a = 1 \\ T(n) \in O(a^n n^\beta) & \text{se } a \ge 2 \end{cases}$

Torri di Hanoi:

con $h = 1, a = a_1 = 2, \beta = 0, c = 1$

$$\boxed{T(n) \in O(a^n n^\beta) = O(2^n)}$$

32

Divide et Impera

"Per meglio dominare occorre dividere gli avversari"
Ossia: suddividi il problema in sottoproblemi di dimensione circa uguale; risolvi i sottoproblemi in maniera ricorsiva, infine combina i risultati

```
DivideEtImpera (P, n)  // Pre: n è la dimensione di P
if n ≤ k then risolvi direttamente P
else
    dividi P nei sottoproblemi P_1,…, P_h di dimensioni n_1,…, n_h
    for i ← 1 to h do
        R_i ← DivideEtImpera (P_i, n_i)
    return combinazione di R_1, …, R_h
```

33

Divide et Impera

"Per meglio dominare occorre dividere gli avversari"
Ossia: suddividi il problema in sottoproblemi di dimensione circa uguale; risolvi i sottoproblemi in maniera ricorsiva, infine combina i risultati

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \leq k \\ D(n) + C(n) + \sum_{i=1}^{h} T(n_i) & \text{se } n > k \end{cases}$$

Tempo per dividere

Tempo per combinare

Somma dei tempi dei sottoproblemi

34

Minimo e Massimo

L'algoritmo **DI-Min-Max** calcola il min e max in A[p..q].

DI-Min-Max (A, p, q)
if p = q **then return** (A[p], A[p])
if p = q – 1 **then**
  if A[p] < A[q] **then return** (A[p], A[q])
  else return (A[q], A[p])
r ← (p + q)/2
(*min1*, *max1*) ← **DI-Min-Max** (A, p, r)
(*min2*, *max2*) ← **DI-Min-Max** (A, r +1, q)
return (min (*min1*, *min2*), max(*max1*, *max2*))

Quanti sono i confronti?

35

Minimo e Massimo

Se n = q – p + 1 allora i confronti $C(n)$ sono:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + 2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Per $n = 2^k$ con $k \geq 1$ con il metodo dell'iterazione:

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right) + 2 = 2\left(2C\left(\frac{n}{4}\right) + 2\right) + 2 = 4C\left(\frac{n}{4}\right) + 4 + 2 =$$

$$= 4\left(2C\left(\frac{n}{8}\right) + 2\right) + 4 + 2 = 8C\left(\frac{n}{8}\right) + 8 + 4 + 2 = \cdots$$

$$= 2^{j}C\left(\frac{n}{2^{j}}\right) + 2^{j} + 2^{j-1} + \cdots + 2 =$$

con $\frac{n}{2^j} = 2 \Rightarrow j = \log_2 n - 1$

$$C(n) = 2^{\log_2 n - 1}C\left(\frac{n}{2^{\log_2 n - 1}}\right) + 2^{\log_2 n - 1} + 2^{\log_2 n - 2} + \cdots + 2 =$$

36

Minimo e Massimo

Se n = q – p + 1 allora i confronti $C(n)$ sono:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + 2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Per $n = 2^k$ con $k \geq 1$ con il metodo dell'iterazione (cont.):

$$C(n) = 2^{\log_2 n - 1} C\left(\frac{\mathrm{n}}{2^{\log_2 n - 1}}\right) + 2^{\log_2 n - 1} + 2^{\log_2 n - 2} + \cdots + 2 =$$

$$= \frac{n}{2} C(2) + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + 2 = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + 2 + 1\right) - 1 =$$

$$= \frac{n}{2} + \left(2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1\right) - 1 =$$

$$= \frac{n}{2} + n - 1 - 1 = \frac{3}{2} n - 2$$

37

Minimo e Massimo

Se n = q – p + 1 allora i confronti $C(n)$ sono:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + 2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Per $n = 2^k$ con $k \geq 1$ abbiamo ottenuto $C(n) = \frac{3}{2} n - 2$.

Controlliamo con induzione se va bene:

Caso base: $C(2) = \frac{3}{2} 2 - 2 = 3 - 2 = 1$

ok!

Passo induttivo: $C\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2} - 2 \Rightarrow C(n) = \frac{3}{2} n - 2$

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right) + 2 = 2\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2} - 2\right) + 2 = \frac{3}{2} n - 4 + 2 = \frac{3}{2} n - 2$$

ok!

38

Relazioni lineari a partizione bilanciata

```
BinSearch-Ric(x, A, i, j)
    ▷ Pre: A[i..j] ordinato
    ▷ Post: true se x ∈ A[i..j]
if i > j  then        ▷ A[i..j] = ∅
    return false
else
    m ← ⌊(i + j)/2⌋
    if x = A[m] then
        return true
    else
        if x < A[m] then
            return BinSearch-Ric(x, A, i, m − 1)
        else      ▷ A[m] < x
            return BinSearch-Ric(x, A, m + 1, j)
        end if
    end if
end if
```

39

Relazioni lineari a partizione bilanciata

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n \leq 1 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + d & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + d \\ &= T\left(\frac{n}{4}\right) + d + d = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2d \\ &\dots \\ &= T\left(\frac{n}{2^k}\right) + dk \quad \text{se} \quad k \leq \log_2 n \end{aligned}$$

con $k = \log_2 n$ (assumiamo n sia potenza di 2)

$$= T(1) + d \cdot \log_2 n = c + d \cdot \log_2 n$$

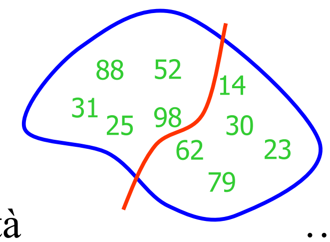
quindi

$T(n) \in \Theta(\log n)$

(con $T(n) = T(n/b) + d$ viene lo stesso ordine di grandezza)

40

Ordinamento per fusione



dividi l'insieme
in due

Affida una metà
ad un amico …

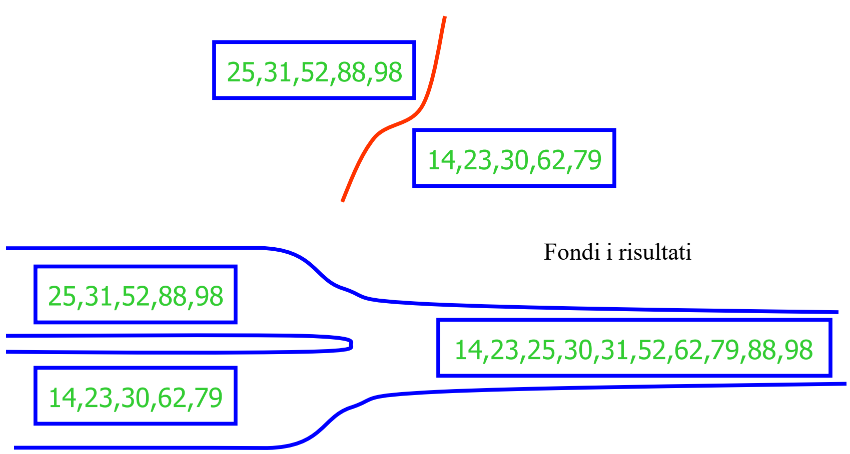
… e l'altra metà
ad un altro

25,31,52,88,98

14,23,30,62,79

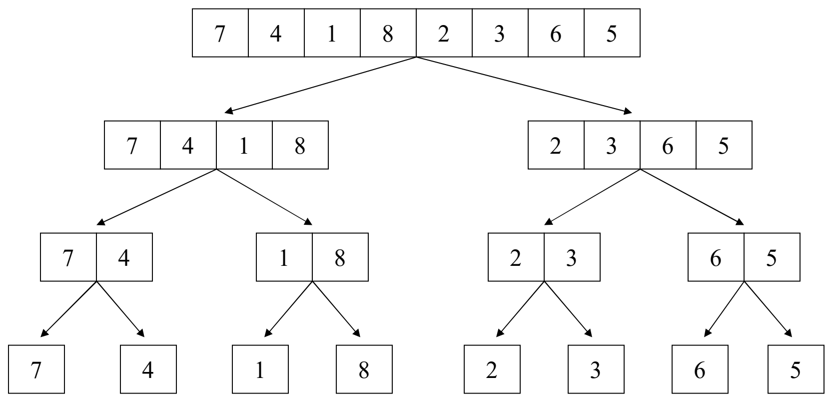
41

Ordinamento per fusione



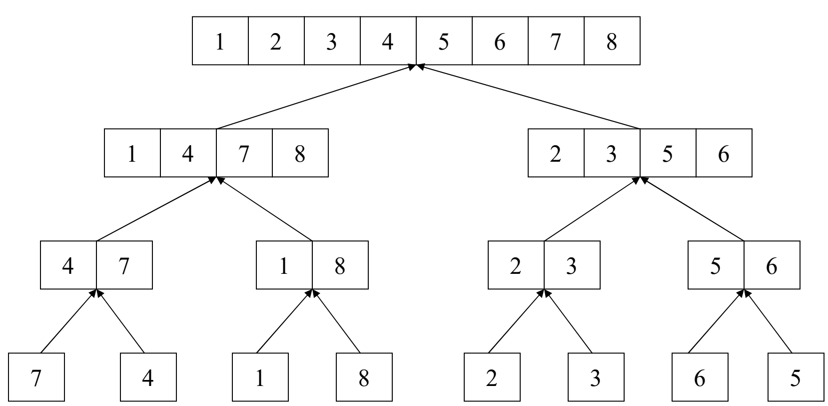
42

Merge Sort: esecuzione



43

Merge Sort: esecuzione



44

Ordinamento per fusione

```
MERGE-SORT(A)
if length(A) = 1 then
    return A
else
    k ← ⌊length(A)/2⌋
    B ← MERGE-SORT(A[1..k])
    C ← MERGE-SORT(A[k + 1..length(A)])
    return MERGE(B, C)
end if
```

45

Ordinamento per fusione

```
MERGE(B, C)
if B = [] then
    return C
else
    if C = [] then
        return B
    else
        if B[1] ≤ C[1] then
            return [B[1], MERGE(B[2..length(B)], C)]
        else
            return [C[1], MERGE(B, C[2..length(C)])]
        end if
    end if
end if
```

$T_{Merge}(n) = T_{Merge}(n-1) + d$
dove n è il numero totale di elementi in B e C

46

Ordinamento per fusione

MergeSort(A, $primo$, $ultimo$)
// Pre: A è un vettore, $primo \leq ultimo <$ dimensione di A
// Post: ordina A in senso non decrescente
if $primo < ultimo$ **then**
  $mezzo \leftarrow \lfloor (primo + ultimo) / 2 \rfloor$
  MergeSort(A, $primo$, $mezzo$)
  MergeSort(A, $mezzo + 1$, $ultimo$)
  Merge(A, $primo$, $ultimo$, $mezzo$)

47

Ordinamento per fusione

Merge (A, $primo$, $ultimo$, $mezzo$)
//Pre: $primo \leq mezzo \leq ultimo <$ dimensione di A
  $A[primo..mezzo]$, $A[mezzo + 1..ultimo]$ ordinati
//Post: A $[primo..ultimo]$ è ordinato
$i \leftarrow primo$, $j \leftarrow mezzo + 1$, $k \leftarrow 0$
while $i \leq mezzo$ **and** $j \leq ultimo$ **do**
  if $A[i] \leq A[j]$ **then** $B[k] \leftarrow A[i]$, $i \leftarrow i + 1$
    else $B[k] \leftarrow A[j]$, $j \leftarrow j + 1$
  $k \leftarrow k + 1$
if $i \leq mezzo$ **then** // $j > ultimo$, dunque $A[j..ultimo] = \varnothing$
  $B[k.. ultimo - primo] \leftarrow A[i..mezzo]$
else // $i > mezzo$, dunque $A[i..mezzo] = \varnothing$
  $B[k.. ultimo - primo] \leftarrow A[j..ultimo]$
$A[primo..ultimo] \leftarrow B[0..ultimo - primo]$

inv. $A[i..mezzo]$, $A[j..ultimo]$ ordinati, $B[1..k-1]$ ordinato ed i suoi el. sono quelli di $A[primo..i-1]$ e $A[mezzo+1..j-1]$

48

Complessità di Merge-Sort

$$T(n) = 2T(n/2) + T_{\text{Merge}}(n)$$

E' facile vedere che $T_{\text{Merge}}(n) \in \Theta(n)$ e dunque:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

49

Complessità di Merge-Sort

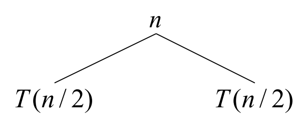
$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(n)$$

50

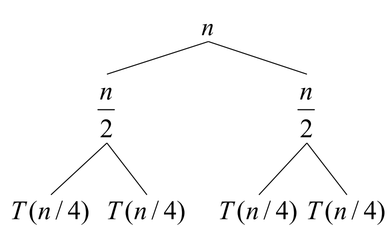
Complessità di Merge-Sort

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$



Complessità di Merge-Sort

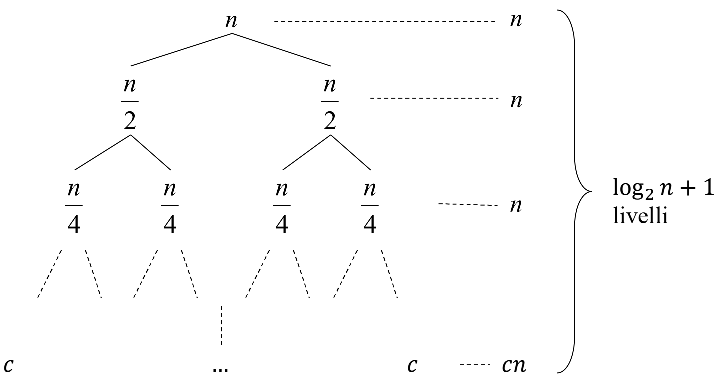
$$T(n) = 2T(n/2) + n$$



Complessità di Merge-Sort

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Albero di ricorsione



$$\log_2 n \cdot n + cn \in \Theta(n \log n)$$

Si può fare meglio di Merg-Sort?

53

Relazioni lineari a partizione bilanciata

Lineare

Lavoro polinomiale di divisione/combinazione

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^{\beta} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Coefficiente costante

Partizioni bilanciate

54

Relazioni lineari a partizione bilanciata

Teorema. Se $a \geq 1; b \geq 2; c > 0; d, \beta \geq 0$, posto $\alpha = \log a / \log b$ allora:

$$\begin{cases} T(n) \in O(n^{\alpha}) & \text{se } \alpha > \beta \\ T(n) \in O(n^{\alpha} \log n) & \text{se } \alpha = \beta \\ T(n) \in O(n^{\beta}) & \text{se } \alpha < \beta \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^{\beta} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Si intravedono applicazioni?

55

Relazioni lineari a partizione bilanciata

Teorema. Se $a \geq 1; b \geq 2; c > 0; d, \beta \geq 0$, posto $\alpha = \log a / \log b$ allora:

$$\begin{cases} T(n) \in O(n^{\alpha}) & \text{se } \alpha > \beta \\ T(n) \in O(n^{\alpha} \log n) & \text{se } \alpha = \beta \\ T(n) \in O(n^{\beta}) & \text{se } \alpha < \beta \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^{\beta} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Ricerca binaria

$$T(n) = T(n/2) + c$$

$$a = 1, b = 2, \alpha = \log 1 / \log 2 = 0 = \beta$$

$$T(n) \in O(n^{\alpha} \log n) \\ = O(\log n)$$

56

Relazioni lineari a partizione bilanciata

Teorema. Se $a \geq 1; b \geq 2; c > 0; d, \beta \geq 0$, posto $\alpha = \log a / \log b$ allora:

$$\begin{cases} T(n) \in O(n^{\alpha}) & \text{se } \alpha > \beta \\ T(n) \in O(n^{\alpha} \log n) & \text{se } \alpha = \beta \\ T(n) \in O(n^{\beta}) & \text{se } \alpha < \beta \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^{\beta} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Merge Sort

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

$$a = b = 2, \alpha = \log 2 / \log 2 = 1 = \beta$$

$$T(n) \in O(n^{\alpha} \log n) = O(n \log n)$$

Quick Sort

QUICK-SORT(A)
if $length(A) > 1$ **then**
  $p \leftarrow$ PARTITION(A)
  QUICK-SORT($A[1..p-1]$)
  QUICK-SORT($A[p+1..length(A)]$)
end if

Quick Sort, caso medio

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 1 \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T(k-1)+T(n-k)) + bn + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + bn + c$$

$$nT(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + bn^2 + cn$$

sostituendo n con $n-1$:

$$(n-1)T(n-1) = 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + b(n-1)^2 + c(n-1)$$

59

Quick Sort, caso medio

$$nT(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + bn^2 + cn$$

Sottraendo

$$(n-1)T(n-1) = 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + b(n-1)^2 + c(n-1)$$

si ottiene

$$nT(n) - (n-1)T(n-1) = \left(2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + bn^2 + cn\right) - \left(2\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + b(n-1)^2 + c(n-1)\right)$$

$$nT(n) - (n-1)T(n-1) = 2T(n-1) + c + b(2n-1)$$

$$nT(n) = (n+1)T(n-1) + c + b(2n-1)$$

60

Quick Sort, caso medio

dividendo a $n(n+1)$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{c + b(2n-1)}{n(n+1)}$$

Introducendo $D(n) = T(n)/(n+1)$ abbiamo

$$D(n) = D(n-1) + \frac{c + b(2n-1)}{n(n+1)}$$

dove $\frac{c+b(2n-1)}{n(n+1)} \in O(1/n)$. Di conseguenza

$$D(n) \in O\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \in O(\log n)$$

e quindi

$$T(n) \in O(n \log n)$$

61