Grafi: introduzione, rappresentazione

Corso di **Algoritmi e strutture dati**
Corso di Laurea in **Informatica**
Docenti: Ugo de'Liguoro, András Horváth

Indice

Sommario

Obiettivo:

- introdurre la definizione
- imparare la terminologia
- confrontare diversi modi di rappresentare un grafo

1. Definizione

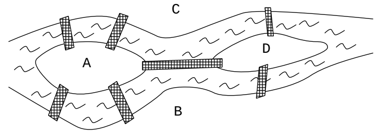
- **definizione astratta**: un grafo $G = (V, E)$ consiste in
  - un insieme V di vertici (nodi)
  - un insieme E di coppie di vertici (archi, spigoli): ogni arco connette due vertici
- V rappresenta un insieme di oggetti
- E rappresenta relazione tra questi oggetti
- due tipi di grafi:
  - orientati
  - non orientati (non diretti)

1. Esempi

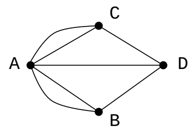
- Esempio I:
  $V = \{\text{persone che vivono in Italia}\}$,
  $E = \{\text{coppie di persone che si sono strette la mano}\}$
- Esempio II:
  $V = \{\text{persone che vivono in Italia}\}$,
  $E = \{(x, y) \text{ tale che } x \text{ ha inviato una mail a } y\}$

1. Storia

Ponti di Königsberg - 1736:



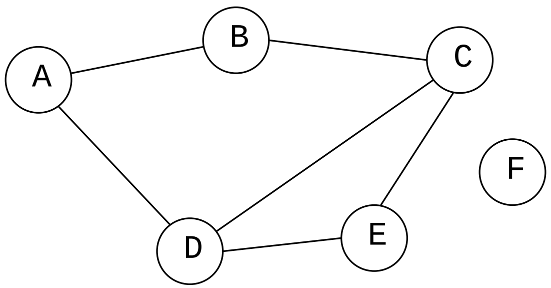
È possibile partire da A e ritornare in A attraversando tutti i ponti esattamente una volta?



Euler dimostrò che la passeggiata non era possibile. (Il grafo è un *multigrafo* perché ci sono due archi fra A e C e fra A e B.)

2. Terminologia

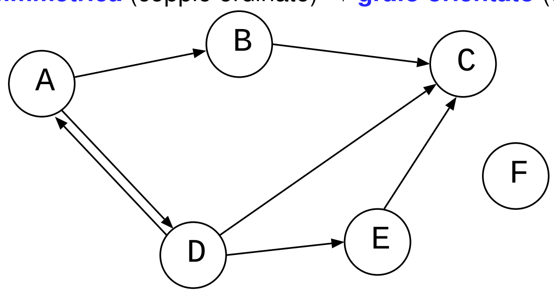
- **relazione simmetrica** (coppie non ordinate) $\rightarrow$ **grafo non orientato** (esempio I)



- $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (C, D), (C, E), (D, E)\}$
- (A, D) e (D, A) denotano lo stesso arco

2. Terminologia

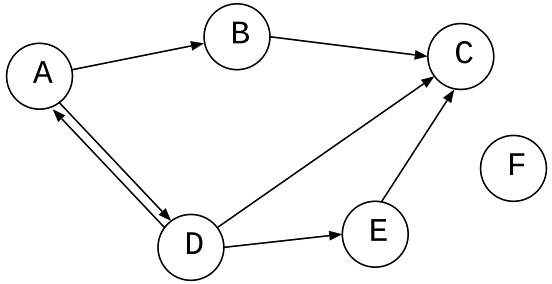
- **relazione non simmetrica** (coppie ordinate) $\rightarrow$ **grafo orientato** (esempio II)



- $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (D, C), (E, C), (D, E), (D, A)\}$
- (A, D) e (D, A) denotano due archi diversi

2. Terminologia

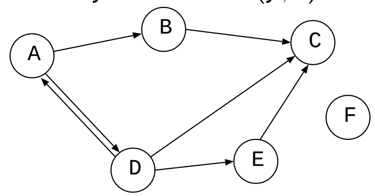
- in un grafo orientato,
  un arco (x, y) è **incidente** da x in y



- (A, B) è incidente da A a B
- (A, D) è incidente da A in D
- (D, A) è incidente da D in A

2. Terminologia

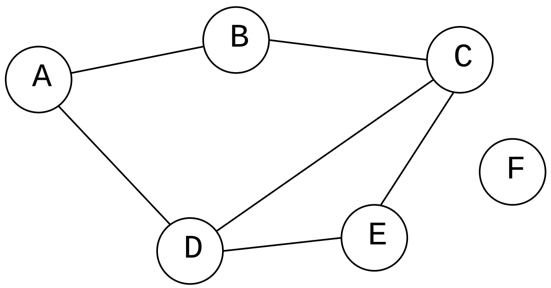
- un vertice x si dice **adiacente** a y se e solo se $(y, x) \in E$



- B è adiacente ad A
- C è adiacente a B, a D e ad E
- A è adiacente a D e viceversa
- B non è adiacente a D
- F non è adiacente ad alcun vertice

2. Terminologia

- in un grafo non orientato, la relazione di adiecenza è simmetrica



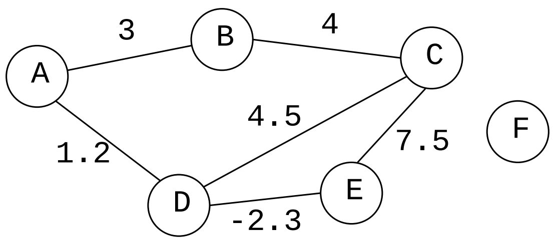
- B è adiacente ad A e viceversa
- A è adiacente a D e viceversa
- F non è adiacente ad alcun vertice

2. Grado

- in un grafo non orientato:
  - il grado di un vertice è il numero di archi che da esso si dipartono
- in un grafo orientato:
  - il grado entrante (uscente) di un vertice è il numero di archi incidenti in (da) esso
  - il grado di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente

2. Peso

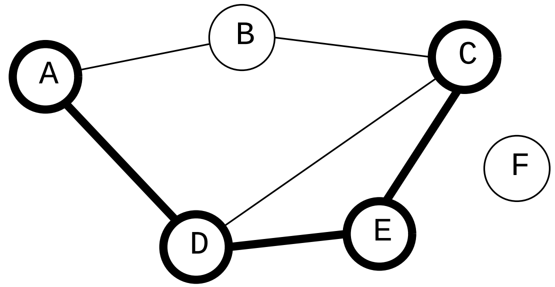
- associamo ad ogni arco un peso
- grafo pesato: (G, W) dove
  - G è un grafo
  - W è la funzione peso: $W : E \to R$ dove R è l'insieme dei numeri reali



- $W((A, B)) = 3$, $W((D, E)) = -2.3$, $W((C, F)) = \infty$

2. Sottografo

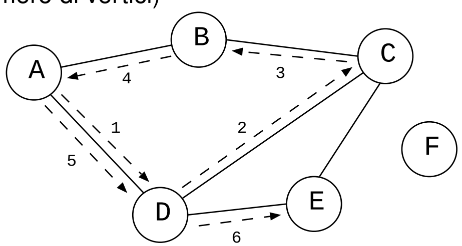
- sia $G = (V, E)$ un grafo
- un sottografo di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$
- poichè H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$



- $V^* = \{A, C, D, E\}$, $E^* = \{(A, D), (D, E), (E, C)\}$

2. Cammino in grafo non orientato

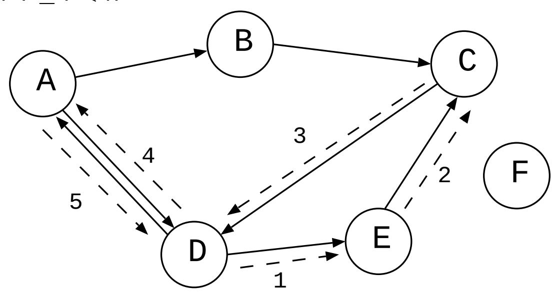
- sia $G = (V, E)$ un grafo
- un cammino nel grafo G è una sequenza di vertici $v_1, v_2, ..., v_n$ tale che $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i < n$
- la lunghezza del cammino è il numero totale di passaggi ad un vertice al altro (uno in meno del numero di vertici)



- A, D, C, B, A, D, E è un cammino nel G di lunghezza 6

2. Cammino in grafo orientato

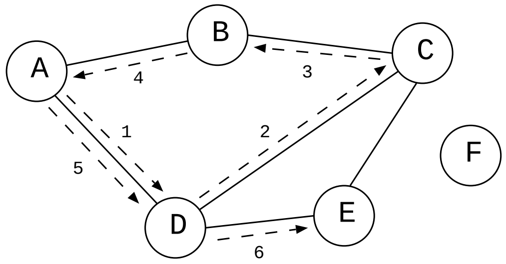
- sia $G = (V, E)$ un grafo orientato
- un cammino nel grafo G è una sequenza di vertici $v_1, v_2, ..., v_n$ tale che $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i < n$



- D, E, C, D, A, D è un cammino nel G
- D, E, C, B, A, D non è un cammino nel G

2. Cammino in grafo non orientato

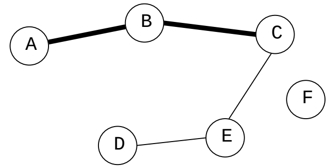
- un cammino è un **cammino semplice** se tutti suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza) eccetto al più il primo e l'ultimo che possono essere lo stesso



- A, D, C, B, A, D, E è un cammino non semplice
- A, D, C, B, A è un cammino semplice

2. Raggiungibilità

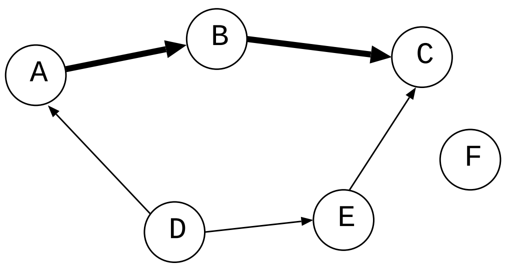
- se esiste un cammino p tra i vertici x e y, si dice che y è raggiungibile da x e si scrive $x \to y$



- A è raggiungibile da C e viceversa
- per definizione: A è raggiungibile da A
- in un grafo non orientato la relazione di raggiungibilità è simmetrica
- non confondere raggiungibilità con adiacenza
- (Cormen et alii usa $\rightsquigarrow$ invece di $\to$)

2. Raggiungibilità

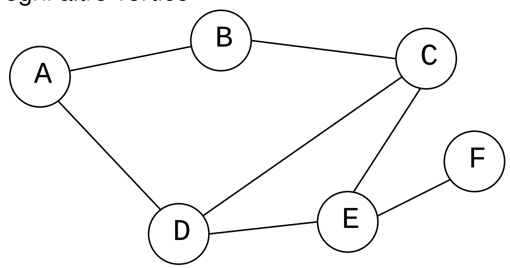
- se esiste un cammino p tra i vertici x e y, si dice che y è raggiungibile da x e si scrive $x \to y$



- C è raggiungibile da A ma A non è raggiungibile da C
- in un grafo orientato la relazione di raggiungibilità non è simmetrica

2. Grafo connesso

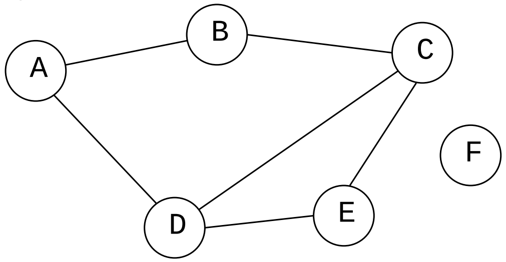
- se G è un grafo non orientato, definiamo G connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice



- questo grafo è connesso

2. Grafo connesso

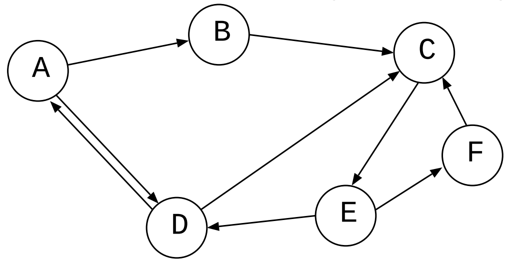
- se G è un grafo non orientato, definiamo G connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice



- questo grafo non è connesso

2. Grafo fortemente connesso

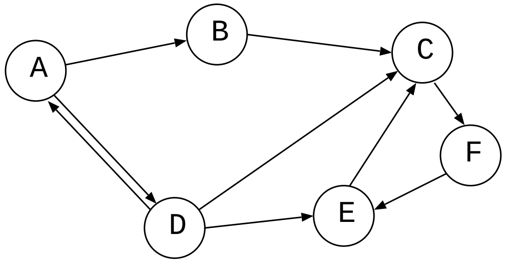
- se G è un grafo orientato, definiamo G fortemente connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice



- questo grafo è fortemente connesso

2. Grafo fortemente connesso

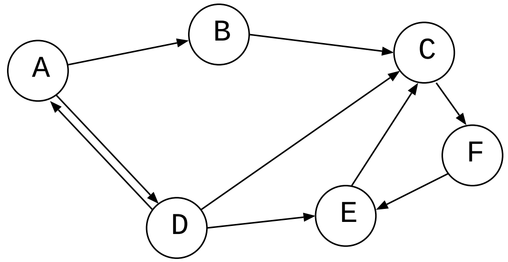
- se G è un grafo orientato, definiamo G fortemente connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice



- questo grafo non è fortemente connesso
- non esiste cammino da F ad A

2. Grafo debolmente connesso

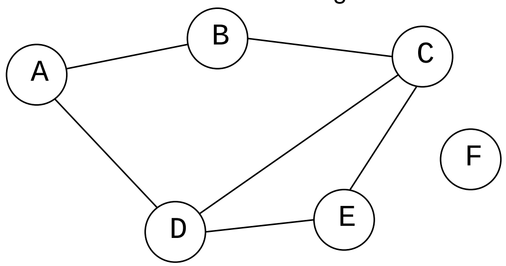
- se G è un grafo orientato, definiamo G debolmente connesso se il grafo ottenuto da G dimenticando la direzione degli archi è connesso



- questo grafo è debolmente connesso

2. Ciclo

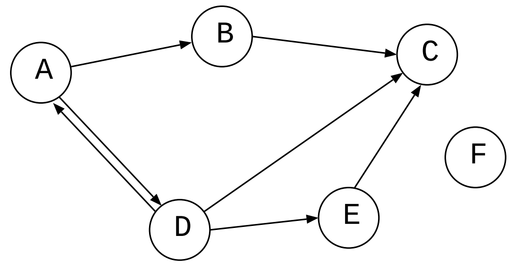
- in un grafo orientato un ciclo è un cammino $x_1, ..., x_n$ con $n > 2$ e $x_1 = x_n$
- in un grafo non orientato un ciclo è un cammino $x_1, ..., x_n$ con $n > 2$ e $x_1 = x_n$ che non attraversa lo stesso arco due volte di seguito



- il cammino A, B, C, D, A è un ciclo

2. Grafo aciclico

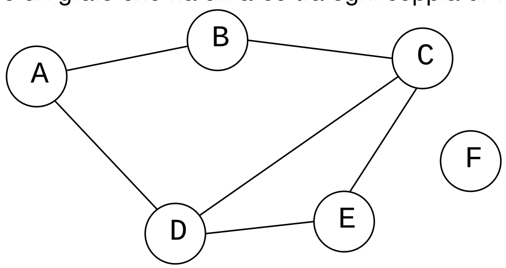
- un grafo senca cicli è detto aciclico



- questo grafo non è aciclico perché esiste il ciclo A, D, A
- un grafo orientato aciclico è spesso chiamato directed acyclic graph (DAG)

2. Grafo completo

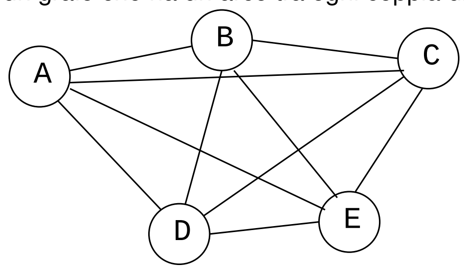
- un grafo completo è un grafo che ha un arco tra ogni coppia di vertici



- questo grafo non è completo

2. Grafo completo

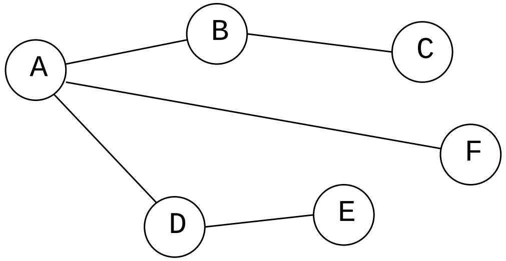
- un grafo completo è un grafo che ha un arco tra ogni coppia di vertici



- questo grafo è completo
- numero di archi in un grafo completo con n vertici: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2. Albero libero

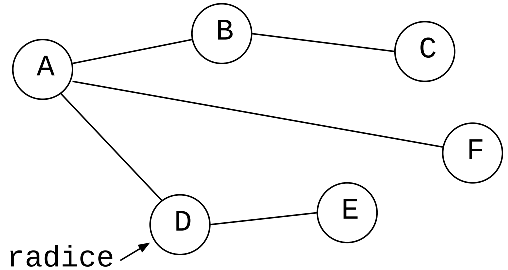
- un albero libero è un grafo non orientato, connesso, aciclico



- libero si riferisce al fatto che non è definito quale vertice è la radice

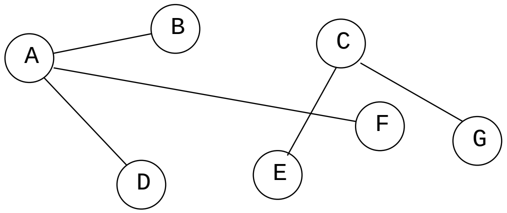
2. Albero radicato

- un albero radicato è un grafo non orientato, connesso, aciclico con un vertice designato ad essere radice



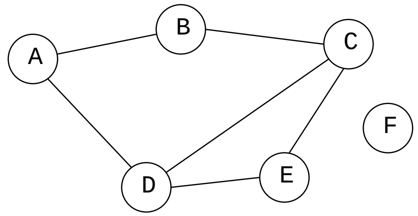
2. Foresta

- una foresta è un grafo non orientato, aciclico ma non necessariamente connesso



- questo grafo è una foresta che contiene due alberi
- un albero è una foresta

3. Matrice di adiacenza, grafo non orientato

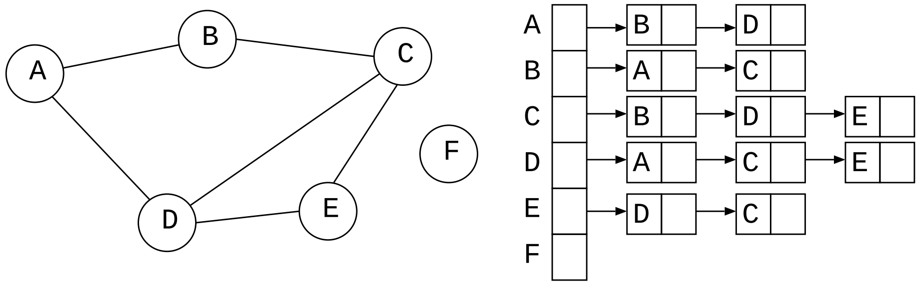


$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

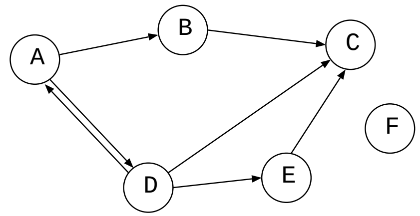
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

3. Lista di adiacenza, grafo non orientato

$L(x)$ è la lista di adiacenza del vertice x e contiene ogni y tale che $(x, y) \in E$



3. Matrice di adiacenza, grafo orientato

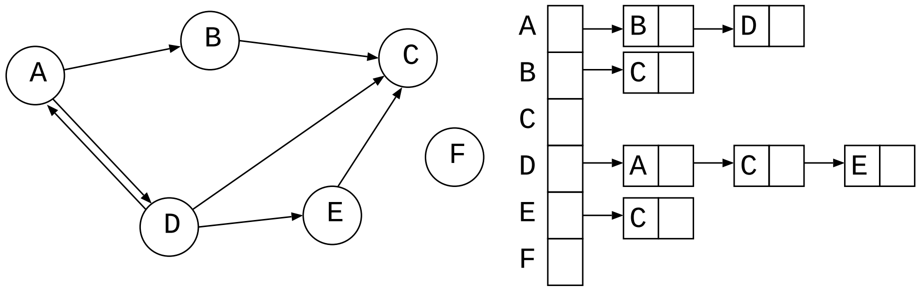


$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

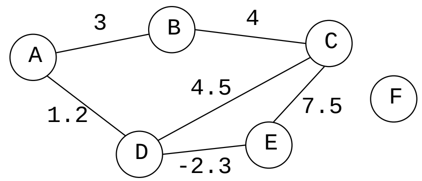
$$\begin{array}{c|cccccc|} A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Lista di adiacenza, grafo orientato

$L(x)$ è la lista di adiacenza del vertice x e contiene ogni y tale che $(x, y) \in E$



3. Matrice di adiacenza, grafo pesato

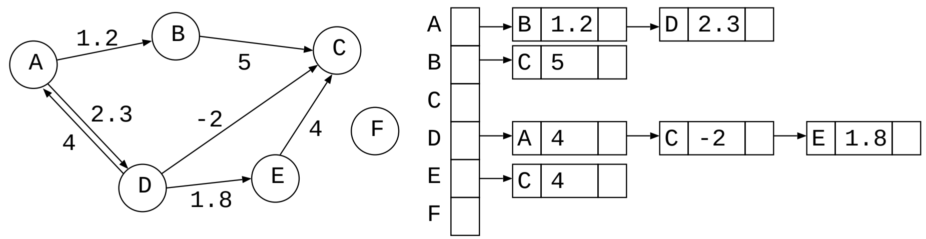


$$M(x, y) = W(x, y)$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} A & 0 & 3 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ B & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 4 & 0 & 4.5 & 7.5 & 0 \\ D & 1.2 & 0 & 4.5 & 0 & -2.3 & 0 \\ E & 0 & 0 & 7.5 & -2.3 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Lista di adiacenza, grafo pesato

$L(x)$ è la lista di adiacenza del vertice x e contiene ogni coppia (y, w) tale che $(x, y) \in E$ e $w = W((x, y))$



3. Possibili operazioni, grafo non orientato

in caso di lista di liste di adiecenza:

operazione	**tempo di esecuzione**
grado(x)	$O(\delta(x))$
archiIncidenti(x)	$O(\delta(x))$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(\min(\delta(x), \delta(y)))$
aggiungiVertice(x)	$O(1)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(x)	$O(m)$
rimuoviArco(x, y)	$O(\delta(x) + \delta(y))$

dove $\delta(x)$ è il numero degli adiacenti di x, dove n è il numero di vertici e m è il numero di archi

3. Possibili operazioni, grafo non orientato

in caso di matrice di adiecenza:

operazione	**tempo di esecuzione**
grado(x)	$O(n)$
archiIncidenti(x)	$O(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(x)	$O(n^2)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(x)	$O(n^2)$
rimuoviArco(x, y)	$O(1)$

dove n è il numero di vertici