

# Esercitazioni di Fisica

(+richiami di Vettori e Meccanica)

[martino.gagliardi@unito.it](mailto:martino.gagliardi@unito.it)

# Grandezze scalari e vettoriali

**Grandezze scalari:** sono completamente definite da un numero (con unità di misura).

Esempi: massa, temperatura, energia...

## Grandezze vettoriali:

Sono definite da:

- un numero  $\geq 0$  con unità di misura (modulo)
- una direzione
- un verso

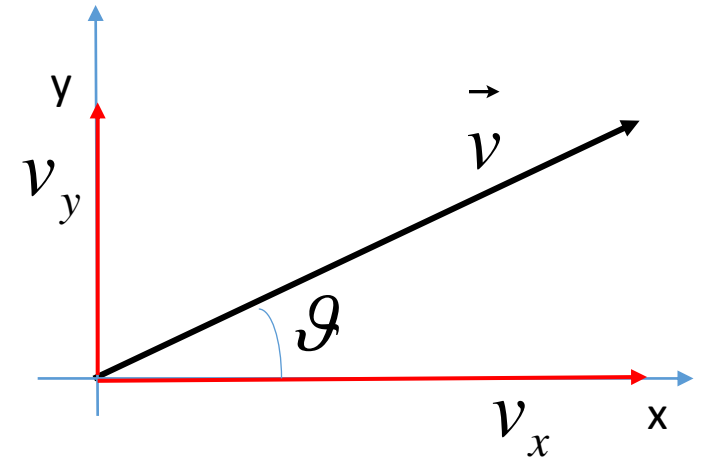
Esempi: posizione, spostamento, velocità, forza, accelerazione, campo elettrico, campo magnetico...

I vettori si possono descrivere mediante le loro componenti rispetto a un dato sistema di riferimento, e.g. per vettori in 2D:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

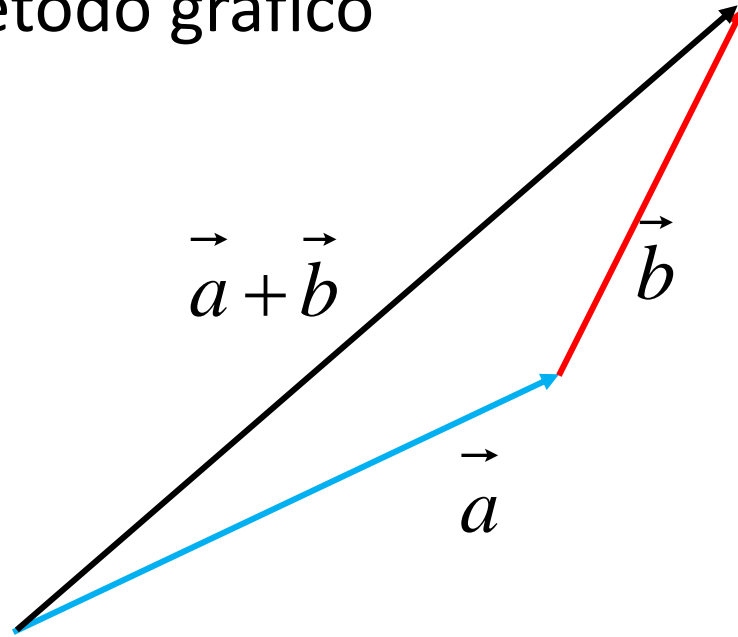
$$v_x = |\vec{v}| \cos \vartheta$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin \vartheta$$



# Somma e differenza di vettori

- Somma di vettori: metodo grafico



# Somma e differenza di vettori

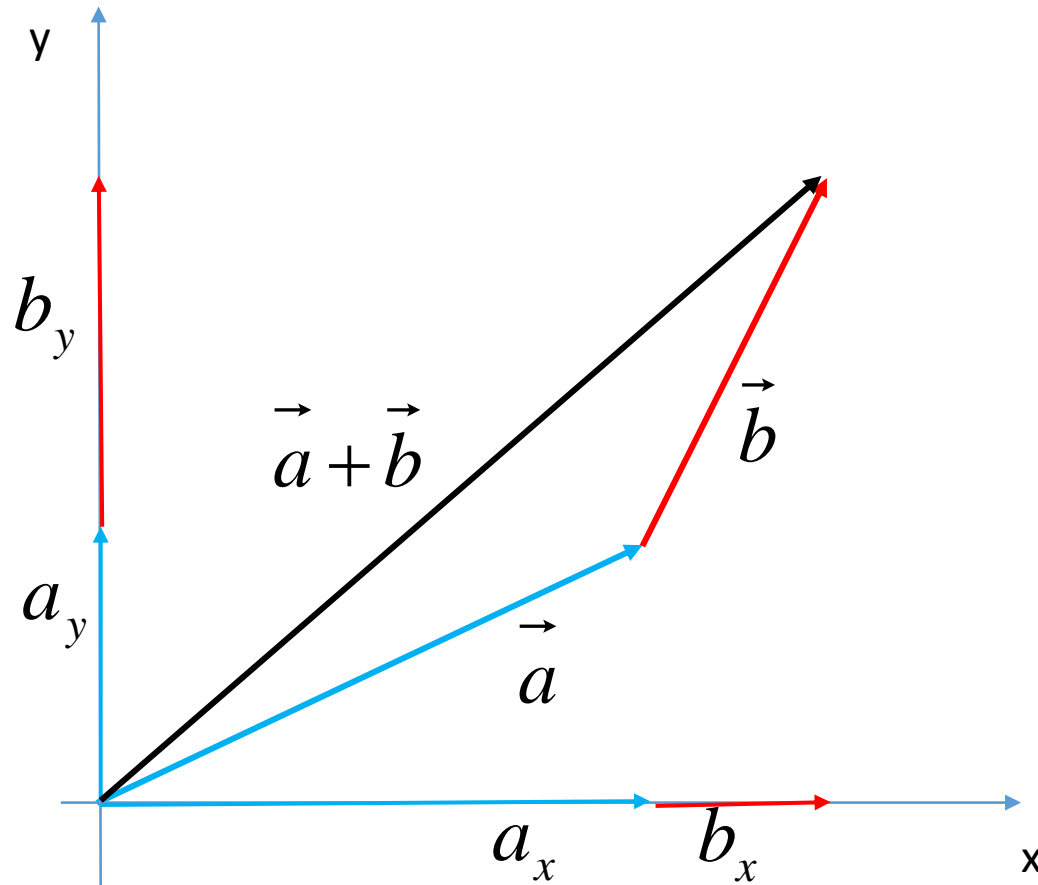
- Somma e differenza di vettori in componenti

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y)$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

$$\Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$



Nota: per vettori in 3 dimensioni:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

# Moltiplicazione di un vettore per un numero reale

Moltiplicando un vettore  $\mathbf{v}$  per un numero  $\alpha$  si ottiene un nuovo vettore  $\alpha\mathbf{v}$ , che ha:

Modulo:

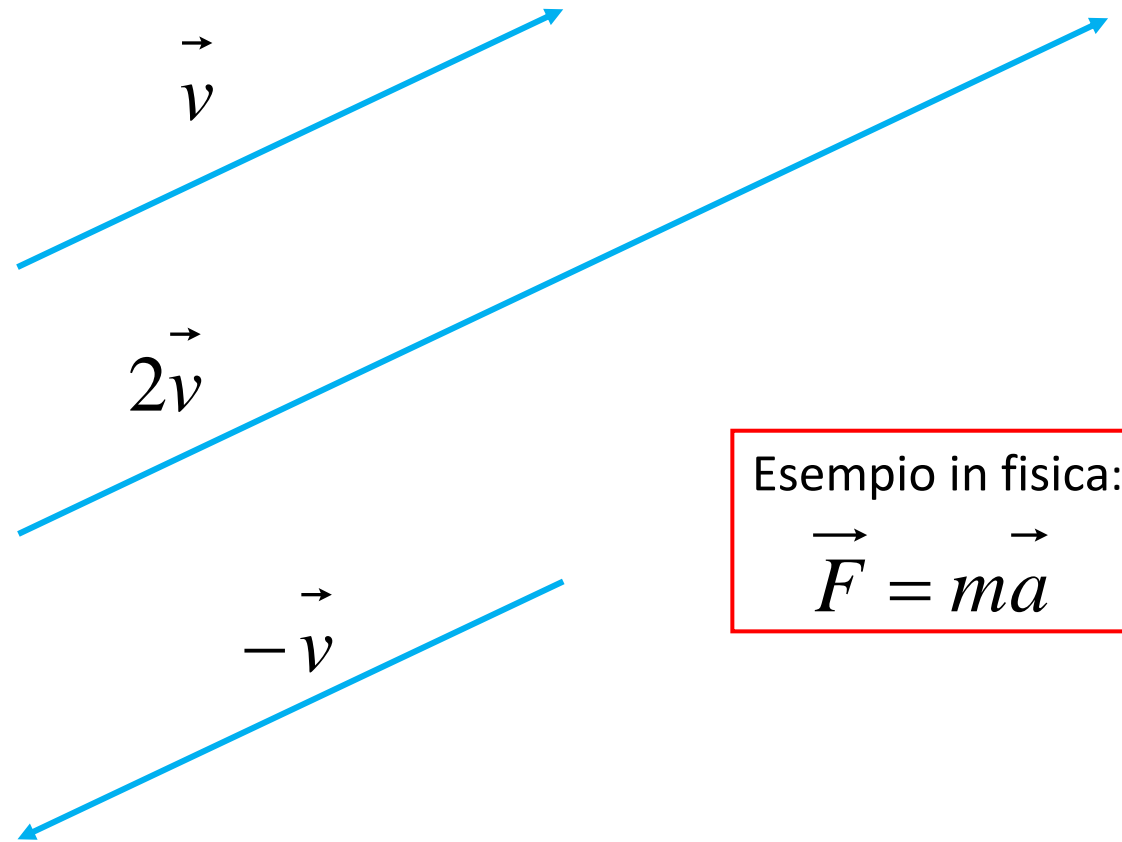
$$|\alpha\vec{v}| = |\alpha| |\vec{v}|$$

Direzione: la stessa di  $\mathbf{v}$

Verso:

- lo stesso di  $\mathbf{v}$  se  $\alpha > 0$
- opposto a  $\mathbf{v}$  se  $\alpha < 0$

In componenti:  $\vec{v} = (v_x, v_y) \Rightarrow \alpha\vec{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y)$



Esempio in fisica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Divisione di un vettore  
per un numero:  
definizione analoga

$$\frac{\vec{v}}{\alpha} = \left( \frac{v_x}{\alpha}, \frac{v_y}{\alpha} \right)$$

# Versori

- Dato un vettore  $\mathbf{v}$ , si definisce “versore di  $\mathbf{v}$ ” ( $\mathbf{u}_v$ ) il vettore  $\mathbf{v}$  diviso per il suo modulo:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \frac{v_z}{|\vec{v}|} \right)$$

- Proprietà:

- stessa direzione e stesso verso di  $\mathbf{v}$

- 
$$|\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$$

Il versore ha modulo 1 e non ha unità di misura, si utilizza per indicare una direzione e un verso nello spazio

# Versori degli assi

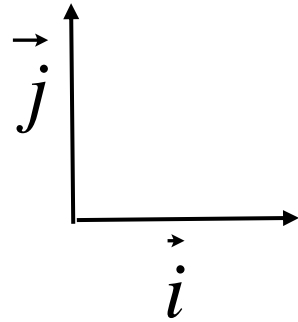
In 2 D

Versore dell'asse x:

$$\vec{i} = (1,0)$$

Versore dell'asse y:

$$\vec{j} = (0,1)$$



I versori degli assi possono essere usati per rappresentare un vettore qualsiasi. Per esempio, in 2D:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{v} &= (v_x, v_y) = (v_x, 0) + (0, v_y) \\ &= v_x(1,0) + v_y(0,1) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\end{aligned}$$

In 3 D

Versore dell'asse x:

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

Versore dell'asse y:

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

Versore dell'asse z:

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Vettore posizione: ha per componenti le coordinate di un punto, misurate rispetto a un dato sistema di riferimento.

Nel piano (2 dimensioni):

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

Vettore spostamento

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

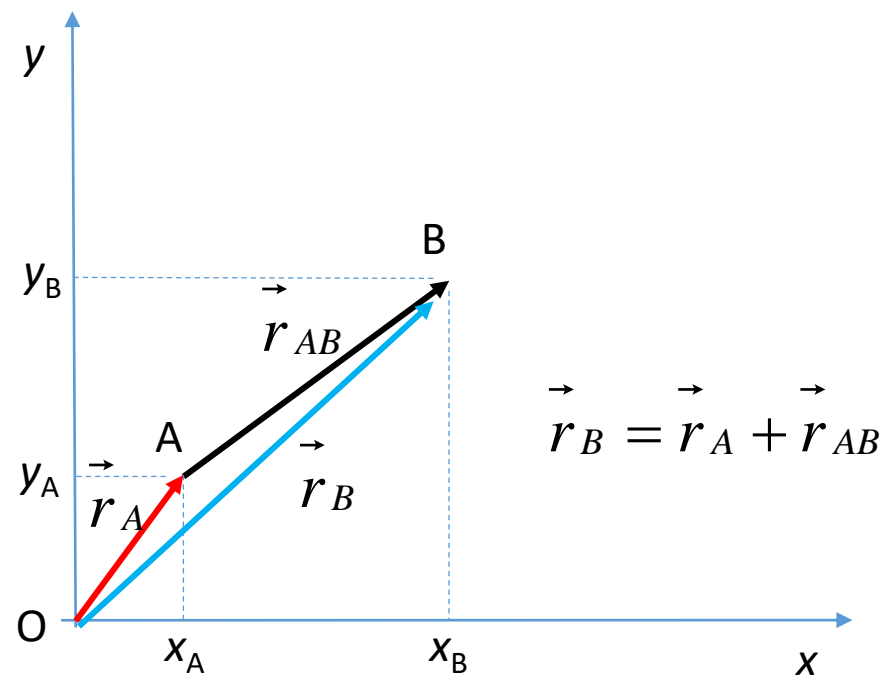
$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j} = -\vec{r}_{AB}$$

Distanza tra due punti

$$r_{AB} = |\vec{r}_{AB}| = |\vec{r}_{BA}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Versore che va dal punto A al punto B

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$





Vettore posizione: ha per componenti le coordinate di un punto, misurate rispetto a un dato sistema di riferimento.

Nel piano (2 dimensioni):

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

Vettore spostamento

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

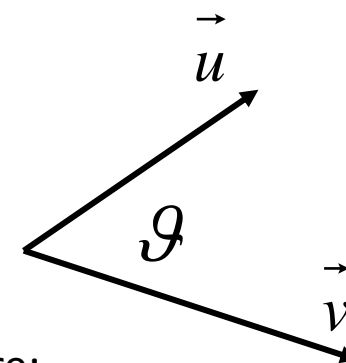
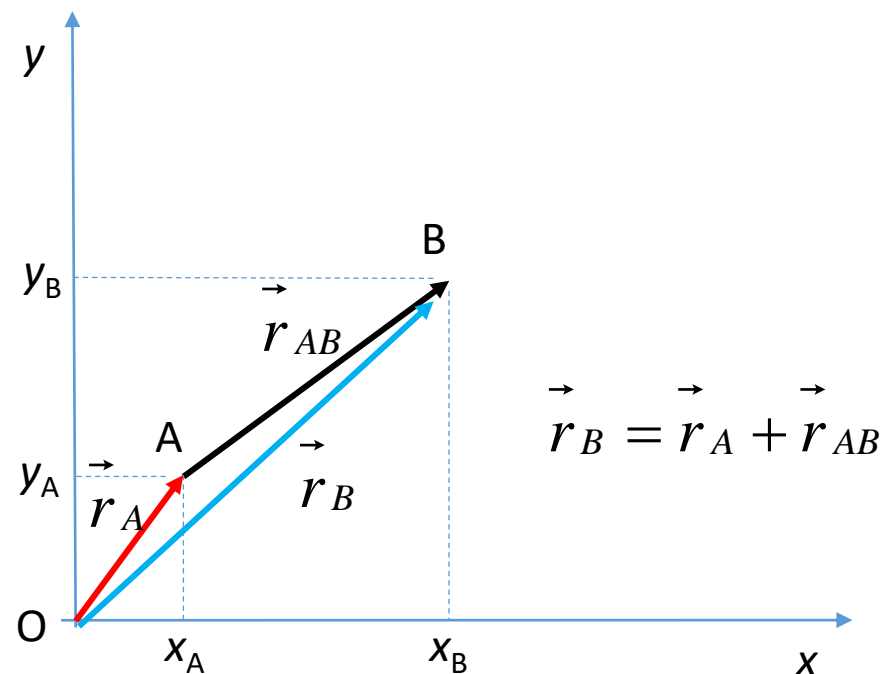
$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j} = -\vec{r}_{AB}$$

Distanza tra due punti

$$r_{AB} = |\vec{r}_{AB}| = |\vec{r}_{BA}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Versore che va dal punto A al punto B

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



Prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \vartheta \\ &= u_x v_x + u_y v_y (+u_z v_z) \end{aligned}$$

1. Un corpo compie un percorso ABCA nel piano xy. Le coordinate dei punti sono: A(2,3), B(4,5), C(7,-9).

- Scrivere il vettore spostamento per ciascuno dei tratti del percorso e calcolarne la lunghezza.
- Individuare il versore corrispondente a ciascuno spostamento.
- Calcolare l'angolo tra i tratti AB e BC e tra i tratti BC e CA.

1. Un corpo compie un percorso ABCA nel piano xy. Le coordinate dei punti sono: A(2,3), B(4,5), C(7,-9).

- Scrivere il vettore spostamento per ciascuno dei tratti del percorso e calcolarne la lunghezza.

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (4 - 2)\vec{i} + (5 - 3)\vec{j} = \boxed{2\vec{i} + 2\vec{j}}$$

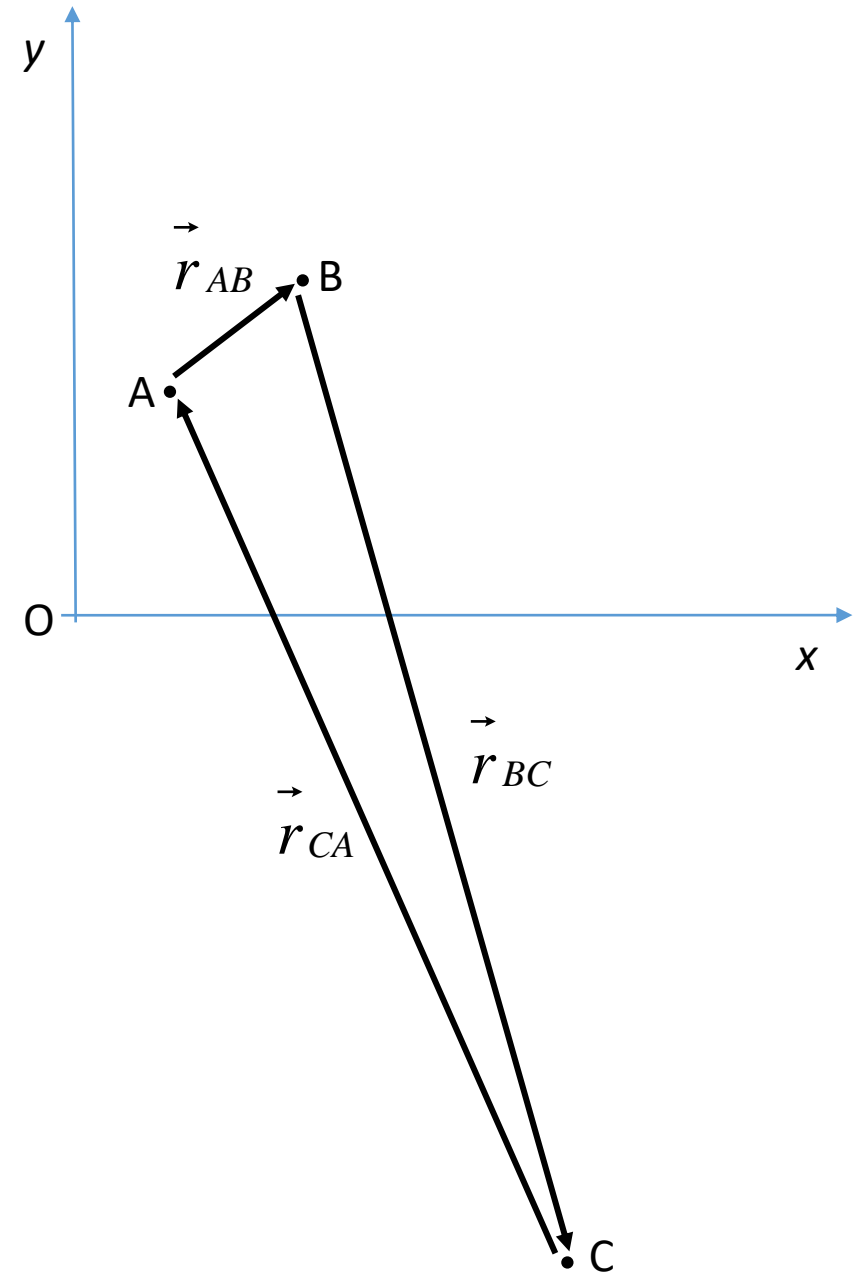
$$r_{AB} = |\vec{r}_{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = \boxed{3\vec{i} - 14\vec{j}}$$

$$r_{BC} = |\vec{r}_{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{3^2 + (-14)^2} = \sqrt{205} \approx \boxed{14.3}$$

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = (x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j} = \boxed{-5\vec{i} + 12\vec{j}}$$

$$r_{CA} = |\vec{r}_{CA}| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \boxed{13}$$



- Individuare il versore corrispondente a ciascuno spostamento.

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}}$$

$$\vec{u}_{BC} = \frac{\vec{r}_{BC}}{|\vec{r}_{BC}|} = \frac{3\vec{i} - 14\vec{j}}{\sqrt{205}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{205}}\vec{i} - \frac{14}{\sqrt{205}}\vec{j}}$$

$$\vec{u}_{CA} = \frac{\vec{r}_{CA}}{|\vec{r}_{CA}|} = \frac{-5\vec{i} + 12\vec{j}}{13} = \boxed{-\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}}$$

- Calcolare l'angolo tra i tratti AB e BC e tra i tratti BC e CA.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \mathcal{G} = u_x v_x + u_y v_y$$

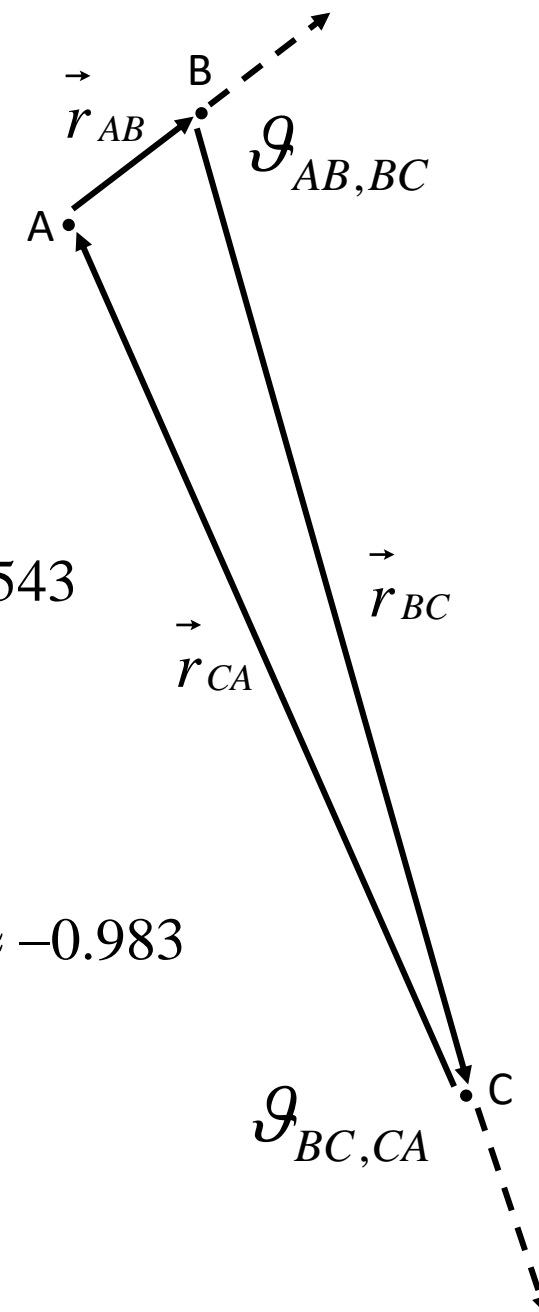
$$\rightarrow \cos \mathcal{G} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\cos \mathcal{G}_{AB,BC} = \frac{\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{BC}}{r_{AB} r_{BC}} = \frac{r_{AB,x} \cdot r_{BC,x} + r_{AB,y} \cdot r_{BC,y}}{r_{AB} r_{BC}} = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot (-14)}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{205}} = \frac{-22}{2\sqrt{410}} \approx -0.543$$

$$\rightarrow \mathcal{G}_{AB,BC} \approx \arccos(-0.543) \approx \boxed{2.145 \text{ rad} \approx 123^\circ}$$

$$\cos \mathcal{G}_{BC,CA} = \frac{\vec{r}_{BC} \cdot \vec{r}_{CA}}{r_{BC} r_{CA}} = \frac{r_{BC,x} \cdot r_{CA,x} + r_{BC,y} \cdot r_{CA,y}}{r_{BC} r_{CA}} = \frac{3 \cdot (-5) + (-14) \cdot 12}{\sqrt{205} \cdot 13} = \frac{-183}{13\sqrt{205}} \approx -0.983$$

$$\rightarrow \mathcal{G}_{BC,CA} \approx \arccos(-0.983) \approx \boxed{2.958 \text{ rad} \approx 169^\circ}$$



**2.** Un escursionista percorre in un giorno 40 km in direzione SE. Il giorno successivo percorre 25 km in direzione N60°E.

Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento,

- scrivere i vettori corrispondenti ai due spostamenti, e i rispettivi versori;
- scrivere il vettore posizione dell'escursionista alla fine del secondo giorno;
- calcolare la distanza dal punto di partenza alla fine del secondo giorno.

**2.** Un escursionista percorre in un giorno 40 km in direzione SE. Il giorno successivo percorre 25 km in direzione N60°E.

Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento,

- scrivere i vettori corrispondenti ai due spostamenti, e i rispettivi versori;

$$r_1 = |\vec{r}_1| = 40 \text{ km}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = 25 \text{ km}$$

$$\vec{r}_1 = r_1 \cos(-45^\circ) \vec{i} + r_1 \sin(-45^\circ) \vec{j} = \frac{40 \text{ km}}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{40 \text{ km}}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

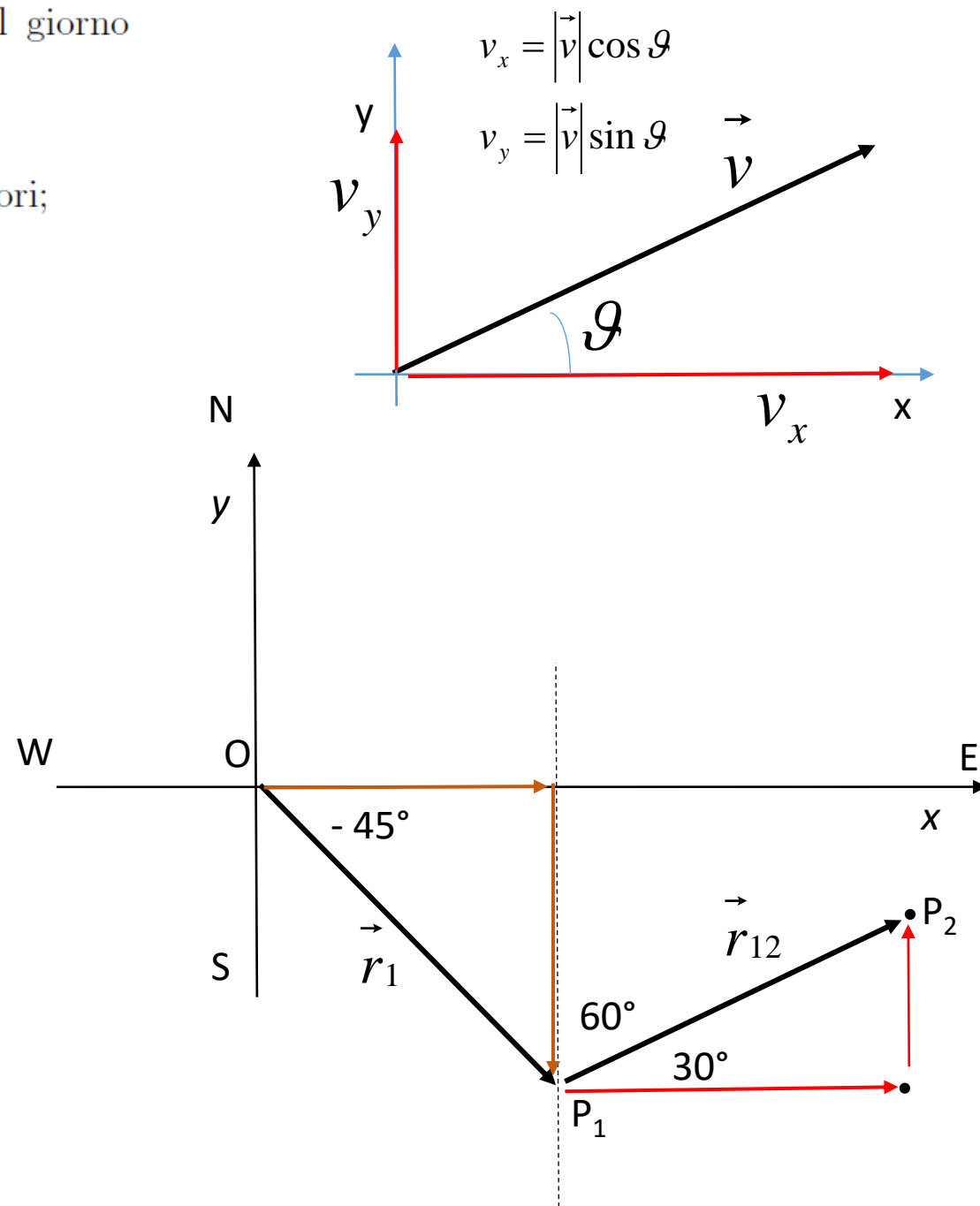
$$= \left( \frac{40}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}} \vec{j} \right) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{12} = r_{12} \cos 30^\circ \vec{i} + r_{12} \sin 30^\circ \vec{j} = 25 \text{ km} \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + 25 \text{ km} \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$= \left( 12.5\sqrt{3} \vec{i} + 12.5 \vec{j} \right) \text{ km}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \cos(-45^\circ) \vec{i} + \sin(-45^\circ) \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

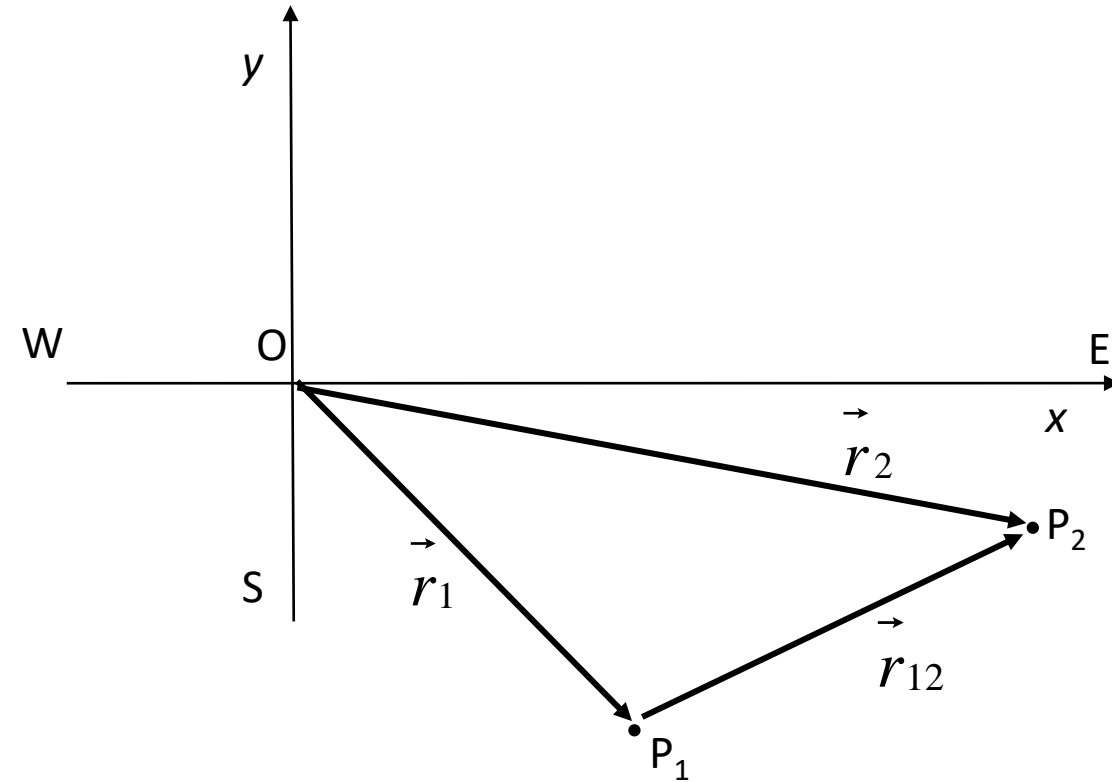


- scrivere il vettore posizione dell'escursionista alla fine del secondo giorno;
- calcolare la distanza dal punto di partenza alla fine del secondo giorno.

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \left( \frac{40}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}} \vec{j} + 12.5\sqrt{3} \vec{i} + 12.5 \vec{j} \right) \text{ km} = \\ &= \left[ \left( \frac{40}{\sqrt{2}} + 12.5\sqrt{3} \right) \vec{i} + \left( -\frac{40}{\sqrt{2}} + 12.5 \right) \vec{j} \right] \text{ km} \approx (49.9 \vec{i} - 15.8 \vec{j}) \text{ km} \end{aligned}$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{r_{2,x}^2 + r_{2,y}^2} \approx \sqrt{49.9^2 + (-15.8)^2} \text{ km} \approx 52.4 \text{ km}$$





## Moto uniformemente accelerato in 2 dimensioni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{x,0} \vec{i} + v_{y,0} \vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$y = y_0 + v_{0,y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_y = v_{0,y} + a_y t$$

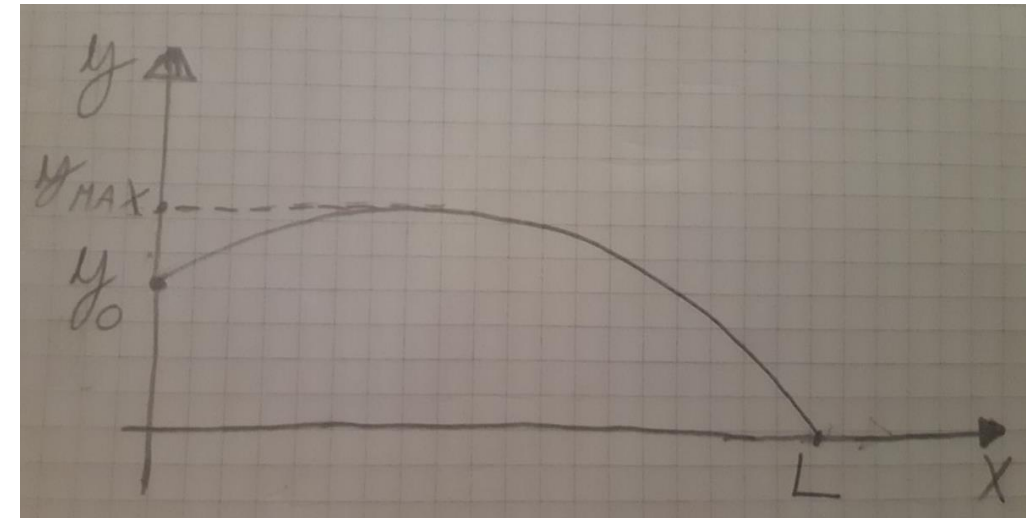
## Moto uniformemente accelerato in 2 dimensioni

3. Un corpo viene lanciato a  $t = 0$  da un'altezza di 20 m dal suolo, con una velocità iniziale di 12 m/s e direzione che forma un angolo di  $30^\circ$  verso l'alto con il suolo.

- Calcolare dopo quanto tempo il corpo raggiunge la massima quota;
- calcolare la massima quota raggiunta;
- calcolare dopo quanto tempo il corpo tocca terra;
- calcolare la velocità del corpo subito prima di toccare terra.

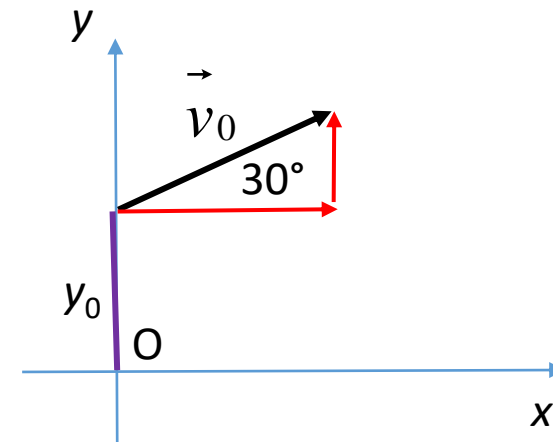
- Calcolare la coordinata orizzontale del corpo quando tocca terra (gittata)

- Scrivere l'equazione della traiettoria del corpo nel piano x-y



**3.** Un corpo viene lanciato a  $t = 0$  da un'altezza di 20 m dal suolo, con una velocità iniziale di 12 m/s e direzione che forma un angolo di  $30^\circ$  verso l'alto con il suolo.

- Calcolare dopo quanto tempo il corpo raggiunge la massima quota;
- calcolare la massima quota raggiunta;



$$v_0 \equiv |\vec{v}_0| = 12 \text{ m/s} \quad x = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_{0,x}t$$

$$v_{0,x} = v_0 \cos 30^\circ \approx 10.4 \text{ m/s} \quad v_x = v_{0,x} + a_x t = v_{0,x}$$

$$v_{0,y} = v_0 \sin 30^\circ = 6 \text{ m/s} \quad y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$a_x = 0; \quad a_y = -g$$

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 20 \text{ m} \quad v_y = v_{0,y} + a_y t = v_{0,y} - gt$$

Alla max quota:  $v_y = 0 \rightarrow v_{0,y} - gt_{\max} = 0 \rightarrow t_{\max} = \frac{v_{0,y}}{g} \approx 0.61 \text{ s}$

$$y_{\max} = y_0 + v_{0,y}t_{\max} - \frac{1}{2}gt_{\max}^2 = y_0 + \frac{v_{0,y}^2}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_{0,y}^2}{g^2} = y_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} \approx 21.8 \text{ m}$$

- calcolare dopo quanto tempo il corpo tocca terra;

$$y = 0 \rightarrow y_0 + v_{0,y}t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 = 0 \rightarrow t_0 = \frac{-v_{0,y} \pm \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}}{-g} =$$

$$\rightarrow t_0 = \frac{-v_{0,y} - \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}}{-g} \approx 2.72 \text{ s}$$

~~$$t_0 = \frac{-v_{0,y} + \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}}{-g} < 0$$~~

$$t_0 = \frac{-v_{0,y} - \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}}{-g} > 0$$

- calcolare la velocità del corpo subito prima di toccare terra.

$$\vec{v}(t_0) = v_x(t_0)\vec{i} + v_y(t_0)\vec{j}$$

$$v_x(t_0) = v_{0,x}$$

$$v_y(t_0) = v_{0,y} - gt_0 = v_{0,y} - g \frac{-v_{0,y} - \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}}{-g} = -\sqrt{v_{0,y}^2 + 2gy_0}$$

$$|\vec{v}(t_0)| = \sqrt{v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0)} = \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2 + 2gy_0} = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \approx 23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Calcolare la coordinata orizzontale  $L$  del corpo quando tocca terra

$$x = v_{0,x} t$$

$$\rightarrow L = v_{0,x} t_0 \approx 28.3 \text{ m}$$

- Scrivere l'equazione della traiettoria del corpo nel piano x-y

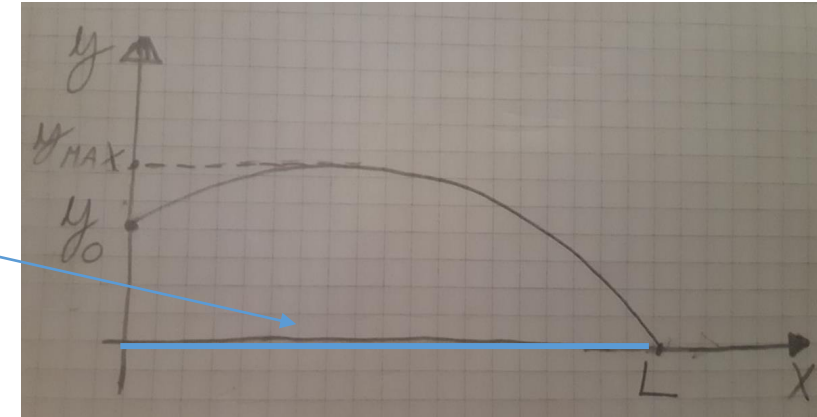
$$y = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{0,x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0,y} = v_0 \sin \theta$$

$$x = v_{0,x} t \rightarrow t = \frac{x}{v_{0,x}}$$

$$\rightarrow y = y_0 + v_{0,y} \frac{x}{v_{0,x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0,x}^2} = y_0 + x \tan \theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$



(equazione di una parabola)

Back-up