Grafi, cammini minimi in grafi pesati e orientati

Corso di **Algoritmi e strutture dati**
Corso di Laurea in **Informatica**
Docenti: Ugo de'Liguoro, András Horváth

Indice

Sommario

Obiettivo:

- capire il concetto "cammino minimo"
- sviluppare algoritmi per trovare cammini minimi da un singolo sorgente

1. Cammini minimi

- sia dato un un grafo orientato e pesato
- distanza di un vertice u da un vertice v: $\delta(v, u)$, il peso di un cammino di peso minimo tra tutti i cammini da v a u
- $\delta(v, u) = \min\{W(p) | p \text{ è un cammino da } v \text{ a } u\}$ dove $W(p)$ è la somma dei pesi degli archi che formano il cammino
- $\delta(v, u)$ è ben definito solo se nessun cammino da v ad u contiene un ciclo di peso negativo

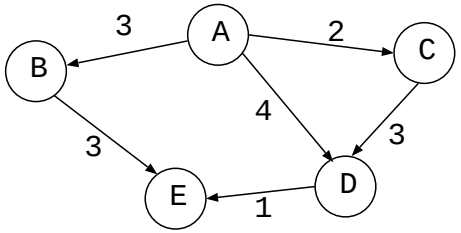
2. Algoritmo per trovare cammini minimi da un dato nodo

- input:
  - grafo orientato e pesato
  - un nodo (sorgente)
- output: $\forall v \in V(G)$ l'attributo $v.d$ indica la distanza di v dal vertice sorgente
- l'attributo $v.d$ mantiene una stima (maggiore o uguale) della distanza di v da s

2. L'idea dell'algoritmo

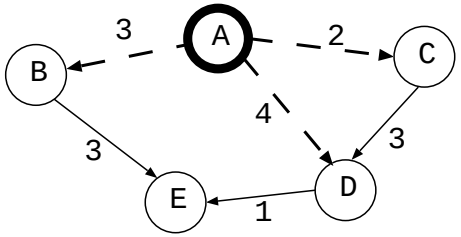
- inizialmente: $s.d$=0, $\forall v \in V(G), v \neq s : v.d$=$\infty$
- si costruisce un albero, di radice s, in cui viene inserito un vertice per volta
- l'albero è memorizzato implicitamente come l'insieme dei suoi archi $(v.\pi, v)$
- quando un vertice u è inserito nell albero, si aggiornano le stime delle distanze dei vertici v ad esso adiacenti, in quanto potrebbe esistere un cammino da s a v, attraverso il vertice u, meno pesante del cammino da s a v considerato fino a quel momento

2. Un esempio



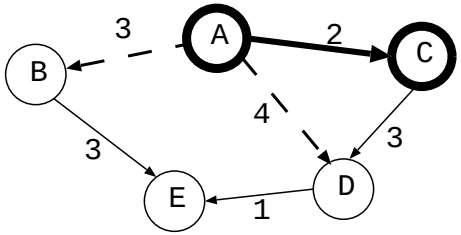
- nodo di partenza: A
- distanze: $A.d$=0, $B.d$=∞, $C.d$=∞, $D.d$=∞, $E.d$=∞
- da scegliere: A
- nuove distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=∞

2. Un esempio



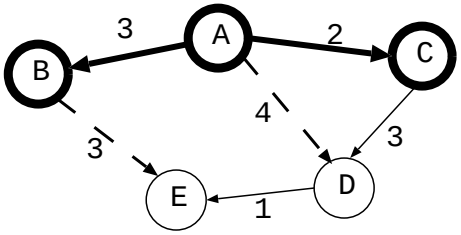
- distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=∞
- da scegliere: C
- nuove distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=∞

2. Un esempio



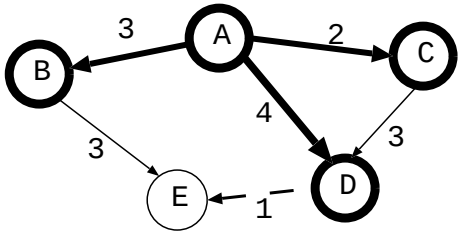
- distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=∞
- da scegliere: B
- nuove distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=6

2. Un esempio



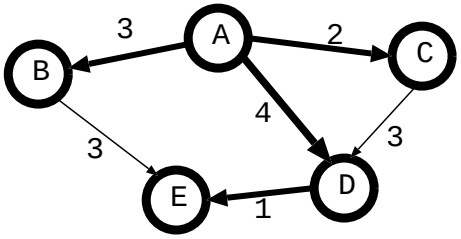
- distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=6
- da scegliere: D
- nuove distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=5

2. Un esempio



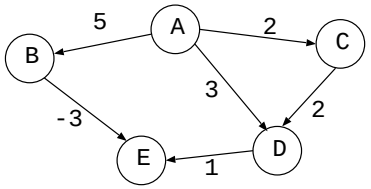
- distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=5
- da scegliere: E
- nuove distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=5

2. Un esempio



- distanze: $A.d$=0, $B.d$=3, $C.d$=2, $D.d$=4, $E.d$=5

2. L'idea non funziona con pesi negativi



- partendo da A
- $A.d$=0, $B.d$=∞, $C.d$=∞, $D.d$=∞, $E.d$=∞: $\rightarrow A$
- $A.d$=0, $B.d$=5, $C.d$=2, $D.d$=3, $E.d$=∞: $\rightarrow C$
- $A.d$=0, $B.d$=5, $C.d$=2, $D.d$=3, $E.d$=∞: $\rightarrow D$
- $A.d$=0, $B.d$=5, $C.d$=2, $D.d$=3, $E.d$=4: $\rightarrow E$
- $A.d$=0, $B.d$=5, $C.d$=2, $D.d$=3, $E.d$=4: $\rightarrow B$

2. Algoritmo di Dijkstra

- applica l'idea vista in precedenza
- funzione se tutti i pesi sono maggiori o uguali a 0

2. Algoritmo di Dijkstra

Dijkstra(G, s)
  $Q \leftarrow V$
  for $\forall v \in V$ **do** $v.d \leftarrow \infty$, $v.\pi \leftarrow nil$
  $s.d \leftarrow 0$
  $s.\pi \leftarrow$ nil
  while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ togli nodo con d minimo da Q
    for $\forall v \in$ adj[u] **do**
      if $v \in Q$ e $u.d + W(u,v) < v.d$ **then**
        $v.d \leftarrow u.d + W(u,v)$
        $v.\pi \leftarrow u$

2. Complessità dell'algoritmo di Dijkstra

- l'algoritmo di Dijstra è molto simile a quello di Prim

MST_Prim(G, s)
  $Q \leftarrow V$
  for $\forall v \in V$ **do** $v.d \leftarrow \infty$, $v.\pi \leftarrow nil$
  $s.d \leftarrow 0$
  $s.\pi \leftarrow$ nil
  while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ togli nodo con d minimo da Q
    for $\forall v \in$ adj[u] **do**
      if $v \in Q$ e ~~$u.d$~~ $+W(u,v) < v.d$ **then**
        $v.d \leftarrow$ ~~$u.d$~~ $+W(u,v)$
        $v.\pi \leftarrow u$

- complessità dell'algoritmo di Dijkstra è uguale a quella di Prim

3. Correttezza dell'algoritmo

- proprietà I: un sottocammino di un cammino minimo è minimo
- dimostrazione:
  - siano x e y due vertici qualunque in un cammino minimo p da u a v: $p = u \rightsquigarrow_{p_1} x \rightsquigarrow_{p_2} y \rightsquigarrow_{p_3} v = p_1 p_2 p_3$
  - $W(p) = W(p_1) + W(p_2) + W(p_3)$
  - se il sottocammino p_2 da x a y non fosse minimo, ne esisterebbe un altro p_2' di peso inferiore
  - in tal caso il cammino $p' = p_1 p_2' p_3$ sarebbe un cammino da u a v con $W(p') < W(p)$
  - allora p non è un cammino minimo, assurdo

3. Correttezza dell'algoritmo

- proprietà II: invarianti del ciclo:
  1. $\forall v \in V(G) : v \notin Q \Rightarrow v.d$ non viene modificato
  2. $\forall v \in Q : v.\pi \neq nil \Rightarrow v.\pi \notin Q$
  3. $\forall v \in V(G) - \{s\} : v.d \neq \infty \Leftrightarrow v.\pi \neq nil$
  4. $\forall v \in V(G) - \{s\} : v.d \neq \infty \Rightarrow v.d = v.\pi.d + W(v.\pi, v)$
- sono ovvii esaminando il ciclo dell'algoritmo

3. Correttezza dell'algoritmo

- proprietà III: invariante del ciclo: $\forall v \notin Q : v.d \neq \infty \Leftrightarrow$ esiste un cammino da s a v in G
- dimostrazione:
  - $\Rightarrow$:
    - inizializzazione: $Q = V$, non c'è nessun nodo che non fa parte di Q quindi è vero
    - mantenimento: supponiamo che l'asserzione sia vera un certo punto dell'esecuzione per ogni nodo che non fa parte di Q
    - dimostriamo che, se per il vertice u estratto dalla coda $u.d \neq \infty$, allora il cammino esiste
    - per ipotesi esiste un cammino da s a $u.\pi$
    - allora il cammino da s a $u.\pi$ più l'arco $(u.\pi, u)$ costituisce un cammino da s a u

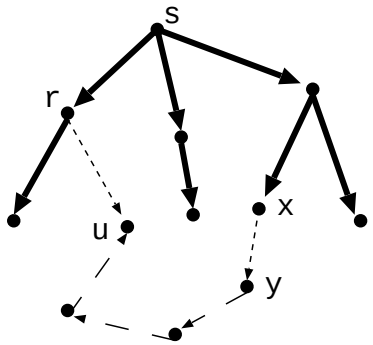
3. Correttezza dell'algoritmo

- proprietà III: invariante del ciclo: $\forall v \notin Q : v.d \neq \infty \Leftrightarrow$ esiste un cammino da s a v in G
- dimostrazione:
  - $\Leftarrow$:
    - se u viene estratto da Q con $u.d$=∞, allora tutti i vertici $t \in Q$ hanno $t.d$=∞
    - supponiamo che tra s e u vi sia almeno un cammino: $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots v_{k-1} \rightarrow v_k = u$
    - allora, tutti i vertici v_i sul cammino devono avere $v_i.d$=∞
    - (perché se v_l avesse $v_l.d \neq \infty$, allora $v_l \notin Q$, quindi anche v_{l+1} avrebbe $v_{l+1}.d \neq \infty$)
    - ma questo è assurdo perchè $s.d$=0

3. Correttezza dell'algoritmo

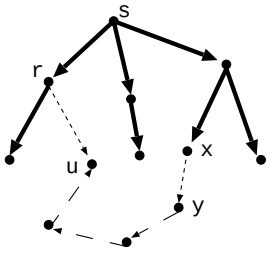
- invariante principale del ciclo: $\forall t \notin Q : t.d = \delta(s, t)$
- dimostrazione:
- il predicato è vero all'inizio poichè $Q = V(G)$
- supponiamo che sia vero quando l'albero è stato costruito parzialmente
- dimostriamo che per il nuovo vertice u estratto da Q, il predicato verrà mantenuto

3. Correttezza dell'algoritmo



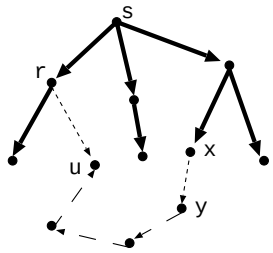
3. Correttezza dell'algoritmo

- caso I: $u.d \neq \infty$
  - sia $u.\pi = r$ (proprietà 2.3)
  - sappiamo allora (proprietà 2.2) che $r \notin Q$
  - $u.d = r.d + W(r, u)$ (proprietà 2.4)
  - supponiamo che tra s e u esista un cammino di peso minore di $u.d$
  - esso deve contenere un arco tra un vertice in $V(G) - Q$ e uno in Q: (x, y)



3. Correttezza dell'algoritmo

- caso I: $u.d \neq \infty$
  - cammino tra s e u può allora essere visto come la concatenazione di tre cammini: $s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u$
  - se $s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u$ è minimo, allora anche $s \rightsquigarrow x \to y$ è minimo (proprietà 1)
  - quindi $y.d = \delta(s, y)$
  - $W(s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u) = W(s \rightsquigarrow x \to y) + W(y \rightsquigarrow u)$
  - $W(s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u) = y.d + W(y \rightsquigarrow u)$
  - $W(s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u) \geq y.d$
  - $W(s \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow u) \geq y.d \geq u.d$ (u era astratto da Q)
  - $\Longrightarrow u.d = \delta(s, u)$



3. Correttezza dell'algoritmo

- caso II: $u.d = \infty$
  - se il vertice u viene estratto quando $u.d = \infty$, allora non esiste nessun cammino tra s e u (proprietà 3)
  - cioè $u.d = \infty = \delta(s, u)$