ESEMPIO QUESTIONARIO – SOLUZIONI

Nella città di Torino si deve organizzare la raccolta giornaliera dei tamponi per il Covid-19. Sono predisposti cinque ambulatori: Molinette, Amedeo di Savoia, Città della Salute, San Giovanni Bosco e Regina Margherita. Sono altresì predisposti tre laboratori di analisi. Nella giornata di oggi i cinque ambulatori M, AS, CS, SGB, RM hanno raccolto rispettivamente $\boxed{85, 21, 19, 77, 40}$ tamponi, che devono essere analizzati. I tre laboratori L_1, L_2, L_3 sono in grado di analizzare al più $\boxed{100, 90, 52}$ tamponi rispettivamente, entro i termini prestabiliti.

T_i P_j

Il costo di trasporto di ogni singolo tampone è dato dalla tabella seguente:

	L_1	L_2	L_3
M	12	7	2
AS	3	2	8
CS	10	4	9
SGB	5	11	7
RM	9	1	2

$\rightarrow c_{ij}$ (RIGA i, COLONNA j)

1. Formulare il programma lineare che serva al comune di Torino per garantire l'analisi di tutti i tamponi al minimo costo giornaliero.
2. Supponendo che l'ospedale San Giovanni Bosco SGB disponga di soli due mezzi dedicati al trasporto dei tamponi, modificare il modello affinché i tamponi collezionati nel suo ambulatorio possano essere trasportati al più in due laboratori.

x_{ij} = # NUM TAMPONI DELL'AMBULATORIO i ANALIZZATI DAL LABORATORIO j

$i \in \{M, AS, CS, SGB, RM\}$ $\quad j \in \{L_1, L_2, L_3\}$ $\quad x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$

$$\min z = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \quad \text{s.t.}$$

$$\sum_j x_{ij} = T_i \qquad \forall i \in \{M, AS, CS, SGB, RM\}$$

$$\sum_i x_{ij} \le P_j \qquad \forall j \in \{L_1, L_2, L_3\}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE SPEDISCO TAMPONI DA } i \text{ A } j \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad y_{ij} \in \{0, 1\}$$

$M >>> 0$ GRANDE A PIACERE

$$\min z = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \quad \text{s.t.}$$

$$\sum_j x_{ij} = T_i \qquad \forall i \in \{M, AS, CS, SGB, RM\}$$

$$\sum_i x_{ij} \leq P_j \qquad \forall j \in \{L_1, L_2, L_3\}$$

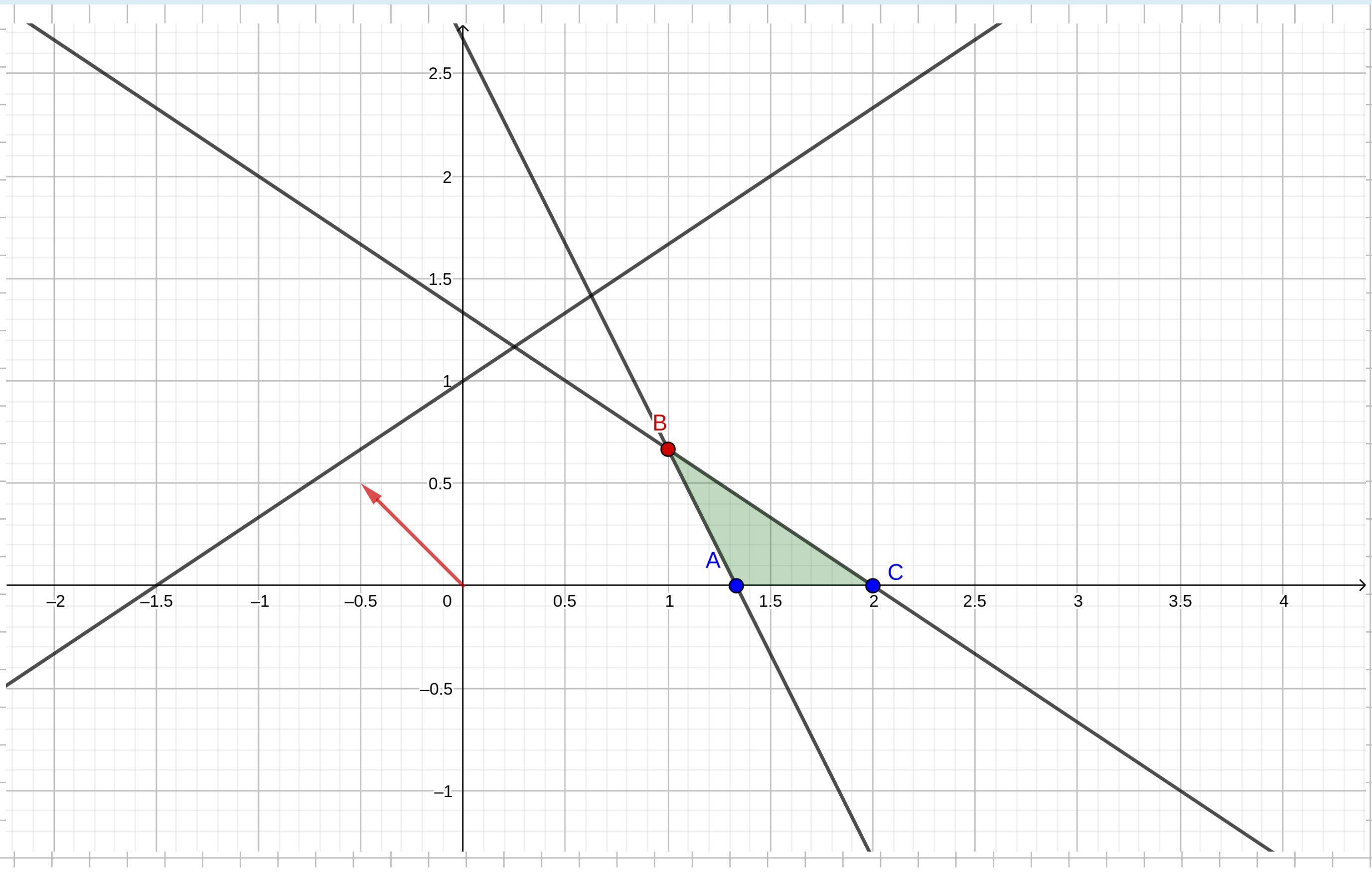
$$x_{ij} \leq M y_{ij} \qquad \forall i \in \{M, AS, CS, SGB, RM\}, \ \forall j \in \{L_1, L_2, L_3\}$$

$$\sum_j y_{ij} \leq 2 \qquad i = SGB$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}$$

Risolvere il seguente modello di Programmazione Lineare, in due variabili $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, col metodo grafico; poi rispondere alle domande.

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & \\
\text{soggetto a:} & & & & & \\
& 3x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & \geq & 4 \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & \leq & 2
\end{array}$$



Se esiste una soluzione ottima, a quale dei seguenti punti corrisponde? In caso contrario, dire se il problema risulta illimitato o non ammette soluzione.

- ☒ $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$
- ○ $x_1 = 2, x_2 = 0$
- ○ $x_1 = \frac{8}{9}, x_2 = \frac{5}{7}$
- ○ problema illimitato
- ○ nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

OTTIMO: $\left(x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{3}\right) \quad z = -\frac{1}{6}$

Quale delle seguenti rappresenta la trasformazione in forma standard del problema?

- [a]

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \\
\text{soggetto a:} \\
& -3x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
& -x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \\
\text{soggetto a:} \\
& 3x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & - & x_3 & & & & & = & 4 \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
& x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \\
\text{soggetto a:} \\
& -3x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & x_3 & & & & & = & 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & & & = & 3 \\
& -x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \\
\text{soggetto a:} \\
& 3x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
& x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & & & & & - & x_5 & = & 2
\end{array}$$

○ a ☒ b ○ c ○ d ○ nessuna tra quelle indicate

$$\max z = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x_1 + \frac{3}{2}x_2 & - & x_3 & & & & & = & 4 \\
-2x_1 + 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
x_1 + \frac{3}{2}x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

$$x_1 \ldots x_5 \geq 0$$

Associare a ciascuno dei seguenti punti la corrispondente base del problema in forma standard.

$(x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 0)$ [ ] $x_1 = 4/3,\ x_3 = \frac{17}{3},\ x_5 = 2/3$ (A)

$(x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{6}{7})$ [ ] NESSUNA

$(x_1 = 2, x_2 = 0)$ [ ] $x_1 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 7$ (C)

$(x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3})$ [ ] $x_1 = 1,\ x_2 = 2/3,\ x_4 = 3$ (B)

$(x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{1}{2})$ [ ] NESSUNA

Considerare il seguente modello di Programmazione Lineare, con variabili $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$, in forma standard.

$$\begin{array}{rl} \max z = & \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a:} & \\ & 2x_1 + x_3 = 5 \\ & \frac{3}{2}x_2 - x_4 = 1 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - x_5 = 3 \end{array}$$

Quale delle seguenti rappresenta la riformulazione del problema nella base (x_2, x_3, x_4)?

- [a]

$$\begin{array}{rl} \max z = & -\frac{4}{3} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{5}x_5 \\ \text{soggetto a:} & \\ x_2 = & 8 + \frac{9}{4}x_1 + 2x_5 \\ x_3 = & 6 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_4 = & \frac{5}{6} - 4x_1 - \frac{1}{5}x_5 \end{array}$$

- [b]

$$\begin{array}{rl} \max z = & -6 + \frac{5}{7}x_1 - x_5 \\ \text{soggetto a:} & \\ x_2 = & 0 + \frac{1}{5}x_1 - \frac{8}{9}x_5 \\ x_3 = & 0 + \frac{1}{2}x_1 + 2x_5 \\ x_4 = & 8 - 7x_1 + \frac{2}{3}x_5 \end{array}$$

- [c]

$$\begin{array}{rl} \max z = & 4 + \frac{7}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_5 \\ \text{soggetto a:} & \\ x_2 = & 2 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_3 = & 5 - 2x_1 \\ x_4 = & 2 + \frac{1}{2}x_1 + x_5 \end{array}$$

- [d]

$$\begin{array}{rl} \max z = & 1 - \frac{4}{3}x_1 - \frac{8}{9}x_5 \\ \text{soggetto a:} & \\ x_2 = & \frac{8}{3} - \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = & \frac{4}{7} + \frac{7}{4}x_1 + \frac{5}{9}x_5 \\ x_4 = & 0 + x_1 + \frac{2}{3}x_5 \end{array}$$

○ a ○ b X c ○ d ○ nessuna tra quelle indicate

$$\max z = 4 + \frac{7}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_5 \quad s.t.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \qquad\qquad - \frac{2}{3}x_5 &= 2 \\ 2x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 5 \\ -\frac{1}{2}x_1 \qquad\qquad + x_4 - x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$\max z = 4 + \frac{7}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_5 \quad s.t.$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_3 &= 5 - 2x_1 \\ x_4 &= 2 + \frac{1}{2}x_1 + x_5 \end{aligned}$$

Considerando la riformulazione al punto precedente, si risponda alle seguenti domande dopo aver eseguito una singola iterazione dell'algoritmo del simplesso come visto a lezione.

Quale valore assume la funzione obiettivo?

- $z = -1$
- $z = -\frac{9}{7}$
- $z = 2$
- $z = \frac{3}{4}$
- $z = +\infty$ ✗
- nessuna tra quelle indicate

Quale valore assumono invece le variabili in base?

- $(x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{4}{7})$
- $(x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{4}{9}, x_3 = \frac{4}{5})$
- $(x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = \frac{8}{9})$
- $(x_1 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{5}{4}, x_4 = \frac{9}{2})$
- problema illimitato ✗
- nessuna tra quelle indicate

Al termine dell'iterazione del simplesso, l'algoritmo...

- ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_3 e facendo entrare x_1.
- ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_4 e facendo entrare x_1.
- ...ha eseguito un cambio di base, facendo uscire di base x_2 e facendo entrare x_5.
- ...termina, verificando la condizione di base ottima.
- ...termina, verificando la condizione di base illimitata. ✗

VARIABILE ENTRANTE: $x_5 \rightarrow$ ILLIMITATO

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & & & = 2 \\ & -x_2 & - \; 2x_3 & = 5 \\ x_1 & + \; x_2 & + \; \frac{3}{2}x_3 & = 4 \end{cases}$$

Indicare la risposta corretta. Il sistema:

- ammette infinite soluzioni
- ammette una soluzione unica
- non ammette soluzione

Tra le soluzione indicate, individuare quella **corretta**.

- $x_1 = -\frac{1}{2}$
- $x_1 = -\frac{2}{5}$
- $x_1 = -\frac{1}{3}$
- nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

Tra le soluzione indicate, individuare quella **corretta**.

- $x_3 = -\frac{1}{2}$
- $x_3 = \frac{5}{4}$
- $x_3 = -\frac{5}{4}$
- nessuna tra quelle indicate / non ammette soluzione

PIVOT SCELTI: $(1,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (3,3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 15 \\ x_3 = -10 \end{cases}$$