Logica

- Modello
- Conseguenza
- Inferenza
- Algoritmo di inferenza
- Grounding

Modello

- **Modello = mondo possibile**
- Un modello fissa i valori di verità delle formule, quindi i modelli possibili sono definiti da tutti i modi in cui è possibile assegnare valori agli elementi che determinano il valore di verità delle formule,
- Esempio consideriamo la formula $x + y = 4$:
  - Vera nei modelli $x = 1, y = 3$ oppure $x = 2, y = 2$ oppure $x = 0, y = 4$, …
  - Falsa nei modelli $x = 0, y = 0$ oppure $x = 1, y = 0$ oppure …
- Quando l'universo di riferimento è fisico (reale), il modello è un'astrazione matematica (simbolica) significativa di quella realtà
- Dati un modello m e una formula α:
  m è un modello di α se α è vera in m
- Indichiamo con M(α) l'insieme dei modelli di α

Conseguenza (implicazione logica)

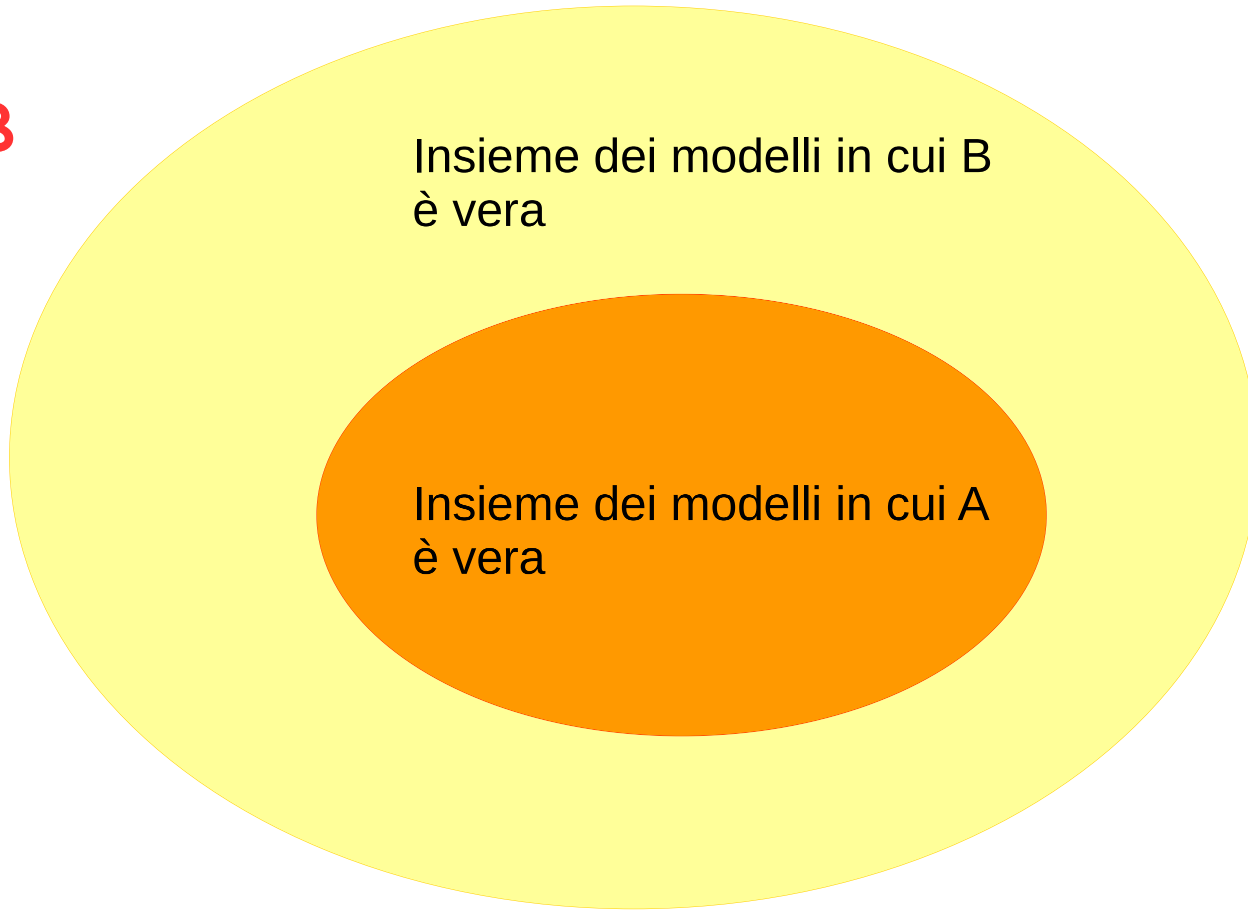
- **Conseguenza logica**: è una relazione fra due formule che dice che in <u>tutti i modelli</u> in cui la prima formula è vera, è vera anche la seconda, il fatto che da <u>A consegue B</u> è denotato: $\mathbf{A} \models \mathbf{B}$
- Esempio: $(x+y=4) \models (x+y<5)$
- Attenzione al significato di $\mathbf{A} \not\models \mathbf{B}$ che coinvolge una nozione di <u>direzionalità</u> ...

Conseguenza (implicazione logica)

- **A** $\not\models$ **B** coinvolge una nozione di direzionalità:
  - il fuoco è posto sui modelli in cui A è vera, in almeno alcuni di questi B è falsa
  - $(x+y=4) \not\models (x<3)$ infatti:
    - Nel modello $x=4,\ y=0$ la prima formula è vera e la seconda è falsa
    - Non è rilevante che esista il modello $x=2,\ y=8$ in cui la prima formula è falsa ma la seconda è vera
  - Il fatto che B non sia sempre vera in tutti i modelli in cui è vera A **non vuol dire che B sia sempre falsa**.
    Possono esistere modelli in cui B è vera e A falsa, esempio:
    - $(x+y=4) \not\models (x>4)$ and $(y>0)$: ad esempio B è vera nel modello $x=5,\ y=11$

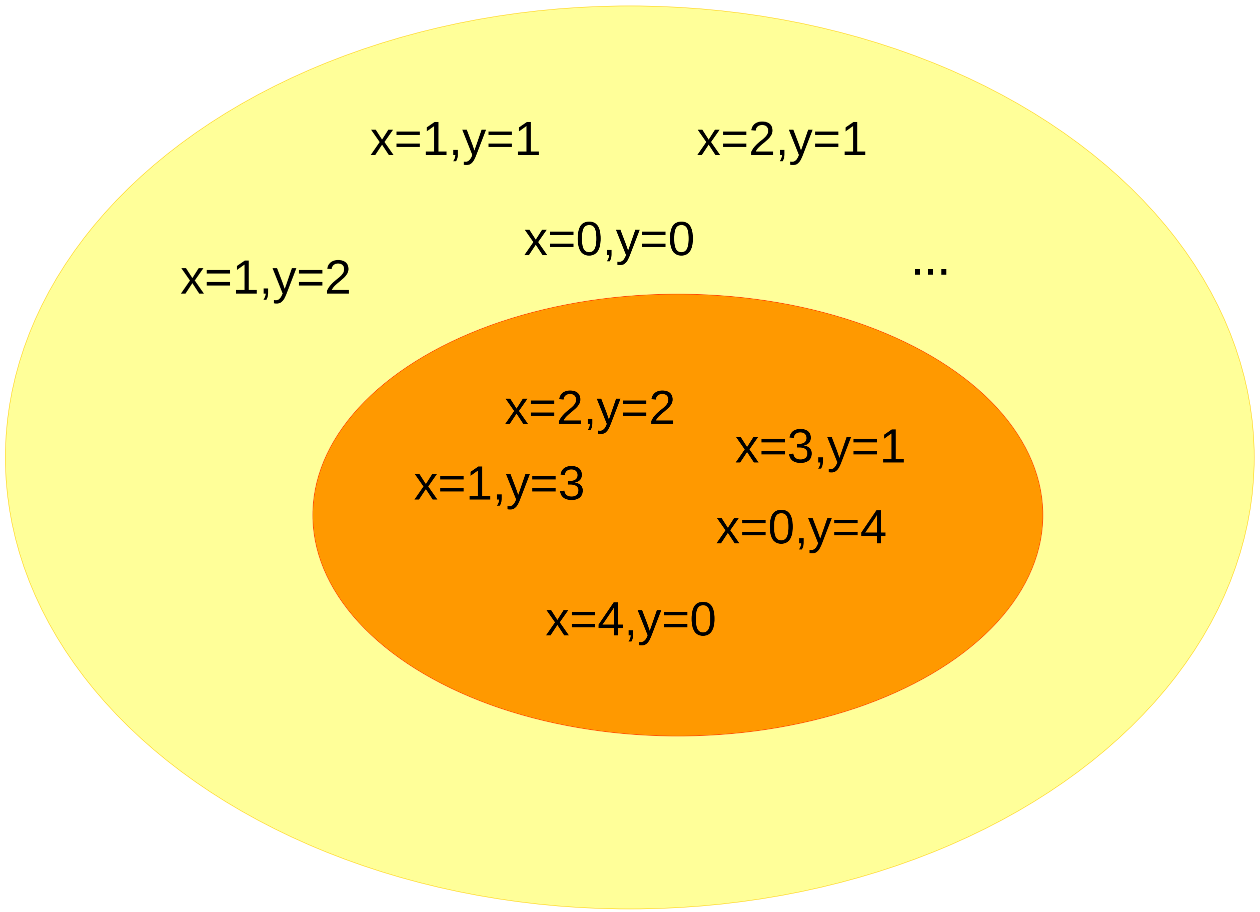
Visione insiemistica

A ⊨ B



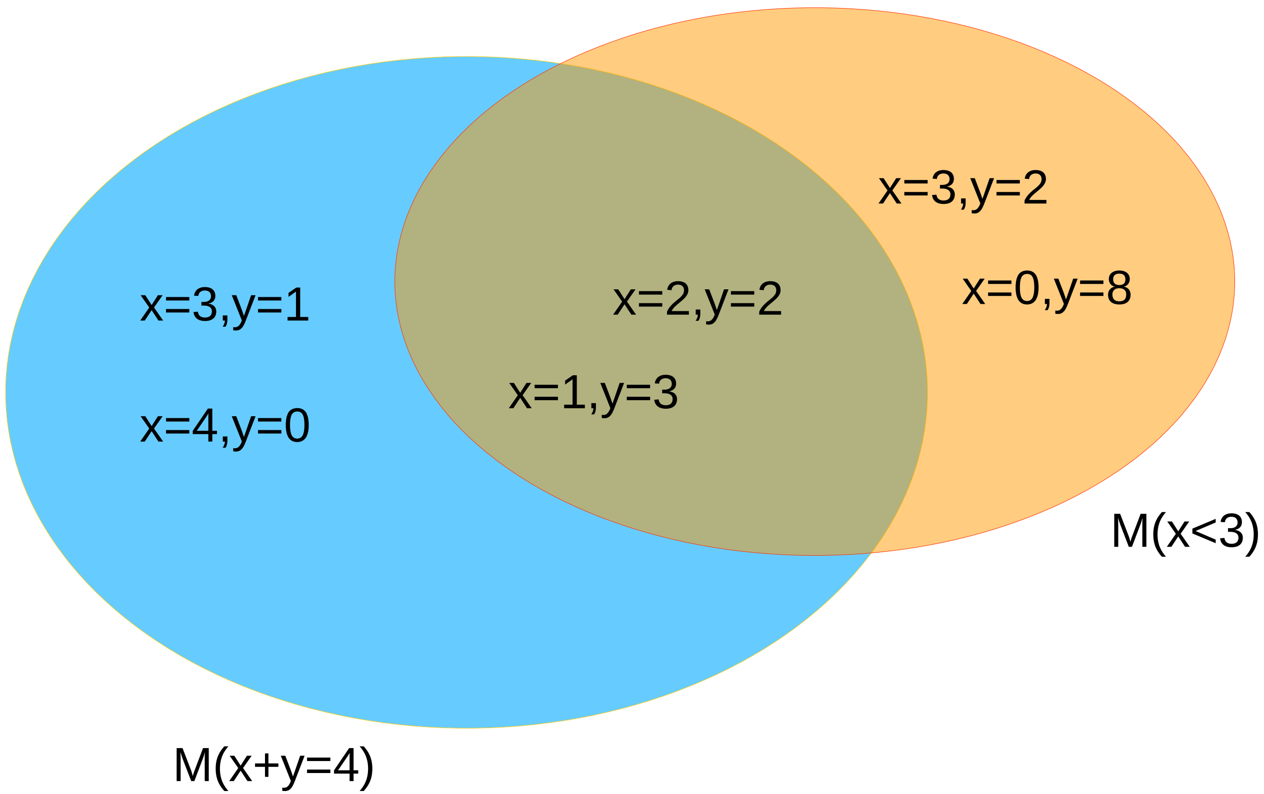
Visione insiemistica

$(x+y=4) \models (x+y<5)$



Visione insiemistica

$(x+y=4) \models (x<3)$



Equivalenza

$A \equiv B$ se e solo se $A \models B$ e $B \models A$

In altri termini due formule sono equivalenti quando sono vere negli stessi modelli. Insiemisticamente: M(A) = M(B)

Verità delle formule

- Validità
- Insoddisfacibilità
- Soddisfacibilità

Validità (tautologia)

- Una formula P è **valida** se è vera in tutti i modelli
- *True* è una formula valida
- Sono valide tutte le formule P tali che: $P \equiv True$
- Esempio
  - $Q \vee \neg Q$ è valida, si dice anche che è una tautologia

Insoddisfacibilità (contraddizione)

- Una formula P è **insoddisfacibile** se è <u>falsa in tutti i modelli</u>
- *False* è una formula insoddisfacibile
- Sono insoddisfacibili (contraddizioni) tutte le P tali che:

  $P \equiv False$

- Esempio: $Q \land \neg Q$ è una contraddizione per come sono definiti gli operatori
- ***NB: P è valida se e solo se ¬ P è insoddisfacibile***

Soddisfacibilità

- Una formula P è **soddisfacibile** se esiste qualche modello in cui è vera
- Quando una formula P è vera nel modello m, si dice che:
  - *m soddisfa P*
  - o anche che *m è un modello di P*
- **Esempio**:
  nei CSP si cerca un modello (assegnamento di valori a variabili) tale per cui i suoi vincoli risultano tutti veri

Inferenza

Inferenza *(dal latino "in ferre", portare dentro): è il processo con il quale da una proposizione, accolta come vera, si passa a una seconda proposizione la cui verità è derivata dalla prima*

NB: *l'inferenza è sintattica, lavora sulla struttura delle formule secondo il linguaggio di rappresentazione scelto*

Esempio

Supponendo vero che "tutti gli uomini sono mortali" e che "Socrate è un uomo" posso inferire che "Socrate è mortale".

Posso farlo perché "vedo" un collegamento catturabile come regola generale di ragionamento:

$$\frac{\text{uomo}(X) \supset \text{mortale}(X) \qquad \text{uomo}(X)}{\text{mortale}(X)}$$

Regola di inferenza: modus ponens

$$\frac{A \supset B \qquad A}{B}$$

MODUS PONENS:
Da un'implicazione e dalla sua premessa, derivo la conseguenza

Lavora sulla struttura delle formule: cioè $A \supset B$ e A sono supposte vere

È il fondamento del ragionamento deduttivo:

Se piove, allora la strada è bagnata.

Piove.

La strada è bagnata

Regola di inferenza: eliminazione degli and

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

ELIMINAZIONE DEI CONGIUNTI:
Da una congiunzione posso derivare un qualsiasi congiunto

Ancora una volta lavoriamo sulla struttura delle formule: cioè A ∧ B è supposta vera

---

Se piove e tira vento.

Piove.

Inferenza

- **Sia i un algoritmo di inferenza**
- **KB** $\vdash_i$ **A**
  (A è derivabile da KB utilizzando l'algoritmo i)
  se tale algoritmo permette di produrre una sequenza di passi che, partendo da KB, porta a A
- Si dice anche:
  - *A segue da KB*
  - *A può essere inferito da KB*
  - *Esiste una dimostrazione (una prova) di A a partire da KB*

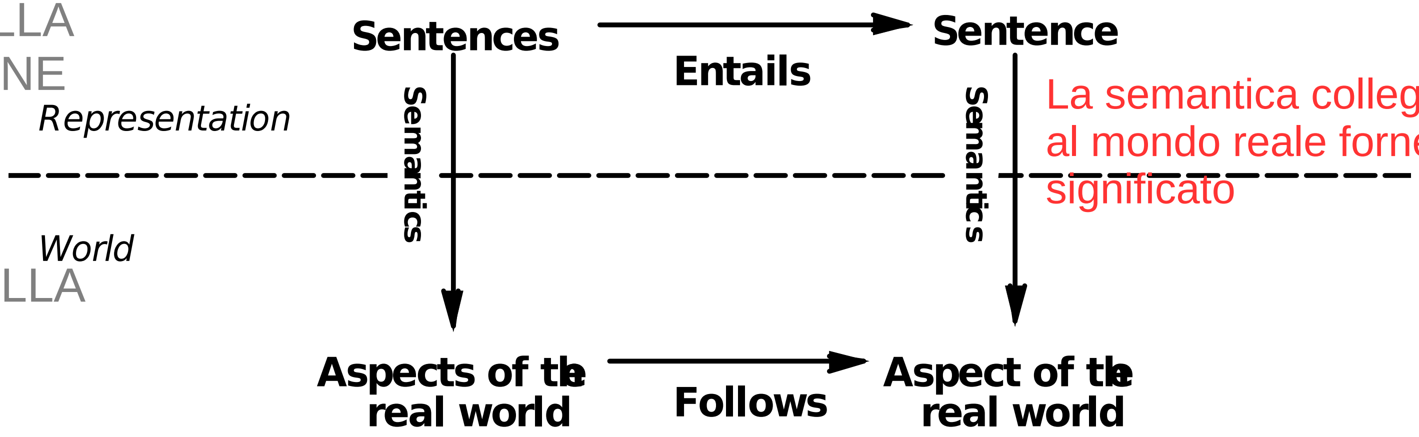
Proprietà desiderate dell'algoritmo di inferenza

- Correttezza (soundness):
  l'algoritmo deriva *solo* formule che sono anche conseguenze logiche (preserva la verità):
  - Se **KB** $\vdash_i$ **A** allora **KB** $\models$ **A**
- Completezza (completeness):
  l'algoritmo permette di derivare *tutte* le formule che sono anche conseguenze logiche
  - Se **KB** $\models$ **A** allora **KB** $\vdash_i$ **A**

Inferenza e realtà

Le formule sono astrazioni usate per regionare sul mondo

PIANO DELLA ASTRAZIONE



La semantica collega le formule al mondo reale fornendole di significato

PIANO DELLA REALTÀ

I modelli catturano il mondo reale, insieme alla relazione di conseguenza

NOTE: (1) le logiche devono **sempre garantire la correttezza** (le inferenze devono corrispondere a reali conseguenze nel mondo); (2) **non sempre garantiscono la completezza** (cioè di catturare tutte le conseguenze possibili).

Grounding

- Cattura il legame fra la rappresentazione simbolica, formale e l'ambiente reale che essa rappresenta
- Possiamo immaginare il grounding come derivante dalla percezione
- Esempio:
  - quando piove le strade sono bagnate.
  - **Vedo** che piove e quindi concludo che **nel mondo reale** le strade sono bagnate

Logica proposizionale

- È uno dei più semplici tipi di logica. Le formule non includono variabili.
- Ne vedremo:
  1) Sintassi
  2) Semantica
  3) Inferenza
  4) Equivalenza, validità, soddisfacibilità

Logica proposizionale: formule

- **Formule atomiche:**
  - **simboli proposizionali:** ognuno rappresenta una formula che può essere vera o falsa
  - Hanno un nome che inizia con la maiuscola
- **Formule complesse:** sono costruite componendo altre formule tramite gli **operatori della logica:**
  - **Negazione:** il termine letterale indica formule atomiche eventualmente negate
  - **Congiunzione:** le formule composte tramite questo operatore sono dette congiunti
  - **Disgiunzione:** le formule composte tramite questo operatore sono dette disgiunti
  - **Implicazione:** correla una formula detta premessa (o antecedente) a una formula detta conclusione (o conseguente)
  - **Biimplicazione** (o equivalenza)

Sintassi della logica proposizionale

- Grammatica:
  - formula → formulaAtomica | formulaComplessa
  - formulaAtomica → True | False | simbolo
  - simbolo → P | Q | R | …
  - formulaComplessa → ¬ formula
    | (formula ∧ formula)
    | (formula ∨ formula)
    | (formula ⇒ formula)
    | (formula ⇔ formula)

Sintassi della logica proposizionale

- Grammatica:
  - formula → formulaAtomica | formulaComplessa
  - formulaAtomica → True | False | simbolo
  - simbolo → P | Q | R | …
  - formulaComplessa → ¬ formula NEGAZIONE
    | (formula ∧ formula) CONGIUNZIONE
    | (formula ∨ formula) DISGIUNZIONE
    | (formula ⇒ formula) IMPLICAZIONE
    | (formula ⇔ formula) EQUIVALENZA

Sintassi della logica proposizionale

- Grammatica:
  - formula $\rightarrow$ formulaAtomica | formulaComplessa
  - formulaAtomica $\rightarrow$ True | False | simbolo
  - simbolo $\rightarrow$ P | Q | R | …
  - formulaComplessa $\rightarrow$ $\neg$ formula

    | (formula $\wedge$ formula)

    | (formula $\vee$ formula)

    | (formula $\Rightarrow$ formula)

    | (formula $\Leftrightarrow$ formula)

Ordine di precedenza degli operatori dal più forte al più debole, **es: $\neg$ Q $\vee$ P equivale a (($\neg$ Q)$\vee$ P)**

Esempio: background knowledge proposizionale

R1) Piove ⇒ Atmosfera_umida

R2) Notte ∧ (¬ Vento) ⇒ Atmosfera_umida

R3) Atmosfera_umida ⇒ (Prato_bagnato ∧ Strada_bagnata)

R4) Innaffiatore_on ⇒ Prato_bagnato

R5) Piove ⇒ Ombrello_aperto

R6) Sole ∧ Vento ⇒ Innaffiatore_on

R7) Sole ∧ Vento ⇒ Atmosfera_asciutta

R8) Sole ⇒ ¬ Notte

R9) Notte ⇒ ¬ Sole

R10) Atmosfera_asciutta ⇒ ¬ Atmosfera_umida

Vero o falso?

- Si consideri la formula:

$$Piove \wedge Vento$$

- È vera oppure falsa?

Vero o falso?

- Si consideri la formula:

$$Piove \wedge Vento$$

- È vera oppure falsa?

Piove	Vento
T	T
T	F
F	T
F	F

?

Semantica della logica proposizionale

- Premesse:
  - La semantica definisce le regole con cui si calcolano i valori di verità di tutte le formule
  - Nella logica proposizionale i valori di verità delle formule sono calcolati a partire da un modello e un modello è un assegnamento di un valore di verità a ciascuno dei simboli proposizionali specificati
  - N simboli proposizionali, che possono valere vero o falso, possono produrre 2^N *diversi modelli*
  - La semantica è calcolata ricorsivamente

Regole per il calcolo della semantica

- Le formule atomiche
  - **True** e **False** sono rispettivamente vera e falsa in ogni modello
  - I valori di verità di tutti gli altri **simboli proposizionali** vanno specificati esplicitamente dal modello
- Formule complesse
  Siano P e Q due formule della logica proposizionale:
  - $\neg$ Q: è vera se e solo se Q è falsa nel modello
  - (Q $\wedge$ P): è vera se e solo se sia P che Q sono vere nel modello
  - (Q $\vee$ P): è vera se e solo se o P o Q è vera nel modello
  - (Q $\Rightarrow$ P): è sempre vera a meno che P sia vera e Q falsa nel modello
  - (Q $\Leftrightarrow$ P): è vera se P e Q sono entrambe vere o entrambe false nel modello
- Per le formule complesse si possono usare le tabelle di verità degli operatori

Tabelle di verità degli operatori

P	Q	¬ P	P ∧ Q	P ∨ Q	P⇒Q	P ⇔ Q
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	V	T	T	T

Implicazione

$$P \Rightarrow Q$$

E' equivalente a $\neg P \vee Q$
Va interpretata nel seguente modo:

- se P è falsa, non mi interessa affermare il valore di Q;
- se P è vera, affermo che anche Q è vera
- Quindi Q deve essere vera nei casi in cui P lo è. Quando P non lo è la verità di Q non interessa.

P	Q	⇒
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	F	F
T	**T**	**T**

Esempio: background knowledge proposizionale

R1) Piove ⇒ Atmosfera_umida   (¬ Piove ∨ Atmosfera_umida)

Piove	Atmosfera_umida	⇒
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Spiegazione dell'implicazione

P	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
P	$\boxed{\text{Vera}}$ →	Falsa	$\boxed{\text{Dipende da Q}}$	Vera se vera Q
P	Falsa →	Vera	Sempre vera, il valore di Q non importa	Vera per qualsiasi valore di Q

Serve per catturare quelle situazioni in cui il conseguente è vero ogni volta che lo è l'antecedente

Altri tipi di implicazione

- Esistono molti tipi di implicazione
- L'**implicazione logica** è un tipo di relazione che dipende dalle leggi della logica (non dipende dal significato delle parole)
- **Altri tipi di implicazione** dipendono dal significato delle parole:
  - Fido è un cane → fido è un mammifero
  - John ha vinto la partita → John ha giocato la partita
  - John è stato condannato per furto → il furto è un crimine

Tanti tipi di implicazione

- Esistono molti tipi di implicazione
- L'implicazione logica è un tipo di relazione che dipende dalle leggi della logica (non dipende dal significato delle parole)
- Altri tipi di implicazione dipendono dal significato delle parole:
  - Fido è un cane → fido è un mammifero
    ragionamento ontologico
  - John ha vinto la partita → John ha giocato la partita
    ragionamento temporale
  - John è stato condannato per furto → il furto è un crimine
    ragionamento causale

L'implicazione non è una relazione causale

$$P \Rightarrow Q$$

Esempi:

l'implicazione può essere vera in casi poco intuitivi perché istintivamente le attribuiamo una valenza causale, quindi ci sembra sensato:

piove ⇒ strada_bagnata

Mentre ci sembra assurdo:

Torino è in Lombardia ⇒ Giulio Cesare governò Roma

Invece questa implicazione è vera perché la premessa è falsa

Biimplicazione

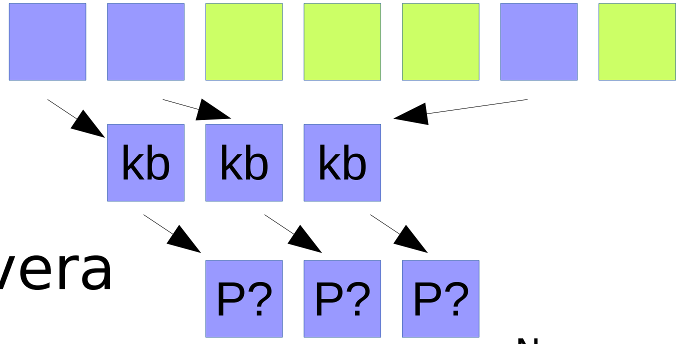
$$P \Leftrightarrow Q$$

Viene anche letta “se e solo se” perché è vera quando P e Q hanno lo stesso valore

Conseguenza logica?

Come dimostrare che KB ⊨ P?

1) Model Checking:



- Enumero i possibili modelli
- Seleziono quelli in cui KB è vera
- Verifico che in tutti questi P sia vera
- **Costoso**: dati N simboli proposizionali esistono 2^N modelli

2) Theorem proving:

- Permette di usare <u>regole di inferenza</u> per cercare una derivazione, senza costruire i modelli (più efficiente perché <u>ignora le proposizioni irrilevanti</u>, che possono essere numerose)

Theorem Proving: KB $\models$ P?

- È possibile grazie a due risultati fondamentali:
  - **Teorema di deduzione**
    permette di rispondere vero se si dimostra l'equivalenza **$(KB \Rightarrow P) \equiv True$**
  - **Dimostrazione per refutazione**
    permette di rispondere vero se si dimostra l'equivalenza **$(KB \wedge \neg P) \equiv False$**

Teorema di deduzione

Date due formule R e Q, **(R $\models$ Q)** se e solo se **(R $\Rightarrow$ Q) è valida**

- cioè: "Q è conseguenza logica di R" **se e solo se** "R implica Q"è valida (cioè è una tautologia)
- Quindi per verificare che KB $\models$ P:

  1) Posso dimostrare che KB $\Rightarrow$ P è una *formula valida*, cioè vera in ogni modello, enumerando i modelli (costoso)

  2) Equivalentemente, per definizione di tautologia, posso dimostrare per **inferenza sintattica** (cioè manipolando la forma delle formule, senza costruire i modelli) che (KB $\Rightarrow$ P) $\equiv$ True

     - qual è il procedimento?

Validità e soddisfacibilità

- **Validità** e **soddisfacibilità** sono concetti collegati dalla negazione, in particolare:
  - **A è valida se e solo se ¬ A è insoddisfacibile**
  - A è soddisfacibile se e solo se ¬ A non è valida

Dimostreremo la validità (1) applicando la negazione e (2) dimostrando l'insoddisfacibilità della formula ottenuta

- $(R \Rightarrow Q)$ equivale a $(\neg R \vee Q)$
- negata diventa $\neg (\neg R \vee Q)$
- che è equivalente a $(R \wedge \neg Q)$ per le leggi di De Morgan

Dimostrazione per refutazione

Date due formule R e Q, (R ⊨ Q) se e solo se (R ∧ ¬ Q) è insoddisfacibile

- È stata ottenuta ricordando che una contraddizione è la negazione di una tautologia
- Corrisponde a una *dimostrazione per refutazione (o per assurdo o per contraddizione):*

*P*er verificare che KB ⊨ P:

1) Assumo (per assurdo) ¬ P
2) dimostro che KB ∧ ¬ P è *insoddisfacibile,* cioè che ¬ P è in contraddizione con gli assiomi noti, cioè che partendo da KB ∧ ¬ P si dimostra False
3) La dimostrazione è del tutto analoga a una ricerca in uno spazio degli stati

Inferenza e dimostrazioni

- Dalle premesse, applicare una <u>sequenza di passi</u> per raggiungere una determinata <u>conclusione</u>
- **Formulazione come problema di ricerca**:
  - **Stato iniziale**: background knowledge
  - **Azioni**: regole di inferenza
  - **Goal**: stato che contiene la formula da dimostrare
- <u>Importante</u>: ci focalizziamo su **logiche monotóne**, cioè tali che:
  - **Se (KB $\models$ P) allora (KB $\wedge$ Q $\models$ P)**
    cioè l'aggiunta di informazione (Q) non invalida mai le conclusioni precedenti, in altri termini l'insieme delle formule conseguenti può solo crescere con l'aggiunta di informazione

Regole di inferenza

- Abbiamo già citato modus ponens ed eliminazione dei congiunti. Altre regole di inferenza sono date dalle seguenti equivalenze logiche:

$(\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	$(\beta \lor \alpha)$	Commutatività $\lor$
$(\alpha \land \beta)$	$\equiv$	$(\beta \land \alpha)$	Commutatività $\land$
$((\alpha \land \beta) \land \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \land (\beta \land \gamma))$	Associatività $\land$
$((\alpha \lor \beta) \lor \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \lor (\beta \lor \gamma))$	Associatività $\lor$
$\neg(\neg\alpha)$	$\equiv$	α	Elim. doppio negato
$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	contrapposizione
$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \lor \beta)$	Elim. implicazione
$\neg(\alpha \land \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \lor \neg\beta)$	De Morgan
$\neg(\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \land \neg\beta)$	De Morgan
$(\alpha \land (\beta \lor \gamma))$	$\equiv$	$((\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma))$	distributività
$(\alpha \lor (\beta \land \gamma))$	$\equiv$	$((\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma))$	distributività
$(\alpha \Leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$((\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha))$	Elim. bicondizionale

Correttezza e completezza

- La dimostrazione avviene coniugando:
  1) un algoritmo di inferenza
  2) e un insieme di regole di inferenza
- L'insieme di tutte le regole di inferenza viste è <u>corretto</u> (derivano solo conseguenze vere) e <u>completo</u> (deriva tutte le conseguenze logiche)
- Sottoinsiemi di queste regole possono non riuscire a produrre tutte le inferenze lecite; in questi casi il metodo non sarà completo
  - Es. se non metto la regola del doppio negato non posso derivare: $P \vdash \neg\neg P$ (e quindi che $P \models \neg\neg P$)

Regola di risoluzione

- **Risoluzione**:
  - regola di inferenza che
  - unita a qualsiasi algoritmo di ricerca completo (cioè tale per cui se esistono soluzioni ne trova una)
  - produce un algoritmo di inferenza corretto (cioè tale per cui se $KB \vdash P$ allora $KB \models P$) e completo (cioè tale per cui se $KB \models P$ allora $KB \vdash P$)

Regola di risoluzione (o Resolution)

- La resolution permette di realizzare dimostrazioni per refutazione sia in logica proposizionale che in logica del prim'ordine
- **Regola di risoluzione**:

$$\frac{P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_{i-1} \vee P_i \vee P_{i+1} \vee \ldots \vee P_n \qquad Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee \mathbf{Q_{j-1}} \vee \mathbf{Q_j} \vee \mathbf{Q_{j+1}} \vee \ldots \vee Q_m}{P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee \mathbf{P_{i-1}} \vee \mathbf{P_{i+1}} \vee \ldots \vee P_n \vee Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee \mathbf{Q_{j-1}} \vee \mathbf{Q_{j+1}} \vee \ldots \vee Q_m}$$

Resolution

- Regola di resolution:

NB: i due letterali P_i e Q_j sono complementari (uno è la negazione dell'altro)

$$\frac{P_1 \lor P_2 \lor \ldots \lor P_{i-1} \lor P_i \lor P_{i+1} \lor \ldots \lor P_n \qquad Q_1 \lor Q_2 \lor \ldots \lor Q_{j-1} \lor Q_j \lor Q_{j+1} \lor \ldots \lor Q_m}{P_1 \lor P_2 \lor \ldots \lor P_{i-1} \lor P_{i+1} \lor \ldots \lor P_n \lor Q_1 \lor Q_2 \lor \ldots \lor Q_{j-1} \lor Q_{j+1} \lor \ldots \lor Q_m}$$

La formula derivata è detta **resolvent**, in essa *ogni letterale compare una volta sola*

Tutte le formule convolte sono **clausole**, cioè sono disgiunzioni di letterali