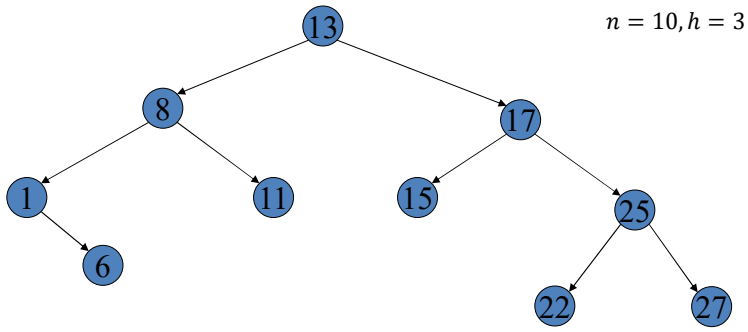
Alberi rosso-neri

Algoritmi e strutture dati

Ugo de'Liguoro, Andras Horvath

1

Alberi di ricerca

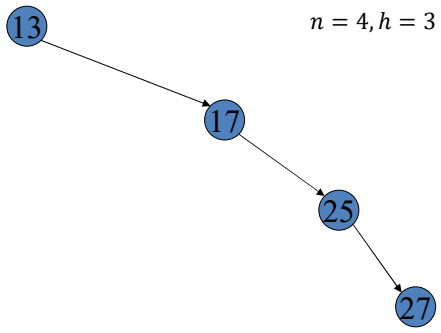


$n = 10, h = 3$

In un albero binario di ricerca con n nodi il costo delle operazione dipende dall'altezza dell'albero h, cioè dal numero di archi che compongono il ramo più lungo. Conviene avere rami che non hanno lunghezze troppo diverse.

2

Alberi di ricerca



In un albero binario di ricerca con n nodi il costo delle operazione dipende dall'altezza dell'albero h, cioè dal numero di archi che compongono il ramo più lungo. Conviene avere rami che non hanno lunghezze troppo diverse.

3

Alberi rosso-neri

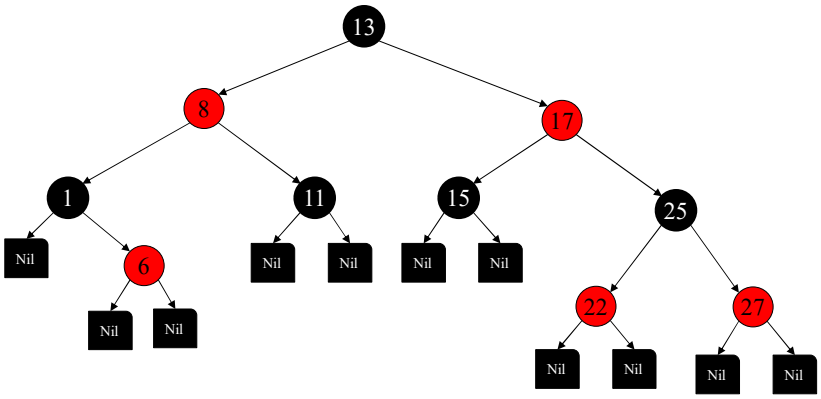
Def. Un *albero rosso-nero (R-N)* è un albero binario di ricerca aumentato, i cui vertici sono colorati di rosso o nero in modo che:

- (regola del ***nero***) la radice e tutte le foglie (i Nil) sono nere
- (regola del *rosso*) se un nodo è rosso tutti i suoi figli sono neri
- (regola del *cammino*) per ogni nodo x tutti i cammini da x ad una foglia hanno lo stesso numero di nodi neri

$\mathrm{bh}(x)$ = altezza nera di x
= il numero di nodi neri su un ramo da x ad una foglia (x escluso)

4

Alberi rosso-neri (R-N)



5

Proprietà degli alberi R-N

Prop. L'altezza massima di un albero R-N con n nodi è $2\log_2(n+1)$.

Dim. Consideriamo un albero R-N con n nodi interni.

- dimostriamo che per ogni nodo x il sottoalbero con radice in x ha almeno $2^{\mathrm{bh}(x)} - 1$ nodi, procediamo con induzione sull'altezza di x:
  - *caso base*: se $\mathrm{bh}(x) = 0$ (x è una foglia) allora è vero perché $2^0 - 1 = 0$
  - se x non è foglia allora i figli hanno altezza nera $\mathrm{bh}(x)$ oppure $\mathrm{bh}(x) - 1$ secondo il colore che hanno
  - *passo induttivo:* secondo l'ipotesi induttiva ogni figlio ha almeno $2^{(\mathrm{bh}(x)-1)} - 1$ nodi interni nel proprio sottoalbero
  - quindi almeno $2\left(2^{(\mathrm{bh}(x)-1)} - 1\right) + 1 = 2^{\mathrm{bh}(x)} - 1$ nodi interni nel sottoalbero con radice in x

6

Proprietà degli alberi R-N

Prop. L'altezza massima di un albero R-N con n nodi è $2\log_2(n+1)$.

- in un albero con altezza h, l'altezza nera della radice r soddisfa per via della regola del rosso

$$\mathrm{bh}(r) \geq \frac{h}{2}$$

(perché lungo un cammino al massimo metà dei nodi può essere rosso)

- quindi:

$$\begin{aligned} n &\geq 2^{h/2} - 1 \\ n+1 &\geq 2^{h/2} \\ \log_2(n+1) &\geq \log_2(2^{h/2}) = h/2 \\ 2\log_2(n+1) &\geq h \end{aligned}$$

□

7

Proprietà degli alberi R-N

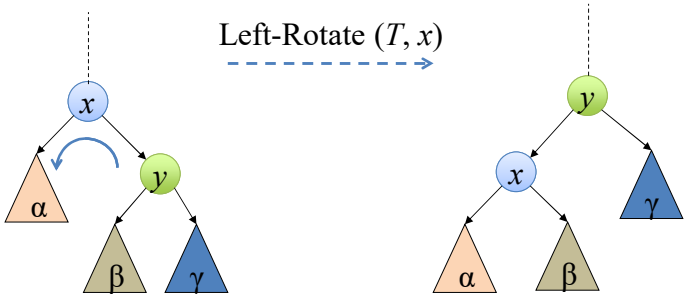
Prop. L'altezza massima di un albero R-N con n nodi è $2\log_2(n+1)$.

Quindi la ricerca in un albero R-N è $O(h) = O(\log n)$

Anche inserimento e cancellazione sono $O(h)$: è possibile senza violare le regole R-N ?

8

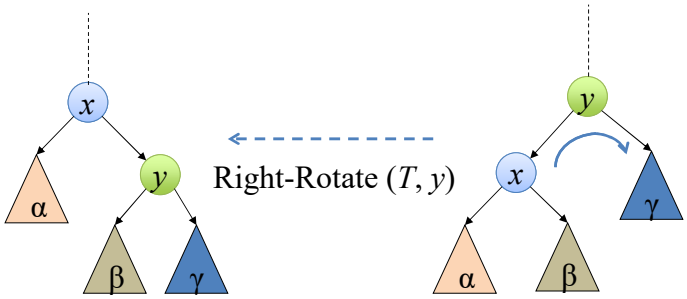
Rotazioni



Dopo una rotazione l'albero rimane di ricerca.

9

Rotazioni

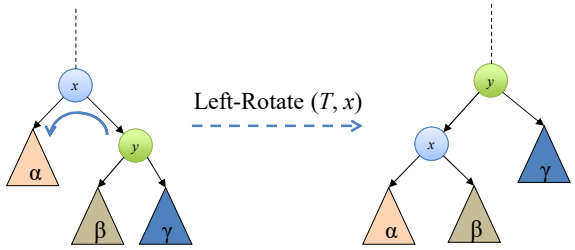


Dopo una rotazione l'albero rimane di ricerca.

10

Rotazioni

LEFT-ROTATE(T, x)
$y \leftarrow x.right$
$x.right \leftarrow y.left$
if $y.left \neq nil$ **then** $y.left.parent \leftarrow x$
end if
$y.parent \leftarrow x.parent$
if $x.parent = nil$ **then** $T \leftarrow y$
else
    if $x = x.parent.left$ **then** $x.parent.left \leftarrow y$
    else $x.parent.right \leftarrow y$
    end if
end if
$y.left \leftarrow x$
$x.parent \leftarrow y$

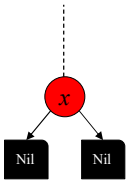


11

Inserimento

L' inserimento di x in T avviene in due fasi:

1. Inserimento di x rosso come per gli alberi di ricerca



2. Ripristino delle proprietà R-N con rotazioni e ricolorazioni

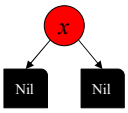
12

Inserimento

- *x:* il nuovo nodo
- *p* = *x.parent* (padre)
- *g* = *p.parent* (nonno)
- *u* = il fratello di *p* (zio)

13

Inserimento



Se l'inserimento è in radice basta cambiare il colore in nero.

14

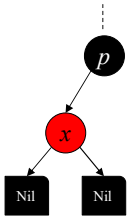
Inserimento

- i lucidi successivi elencano i vari casi
- per i casi 1, 2 e 3 assumiamo che *p* sia figlio sinistro
- per i casi 0 e 1 assumiamo che *x* sia figlio sinistro
- se non è così bisogna agire in modo «speculare»

15

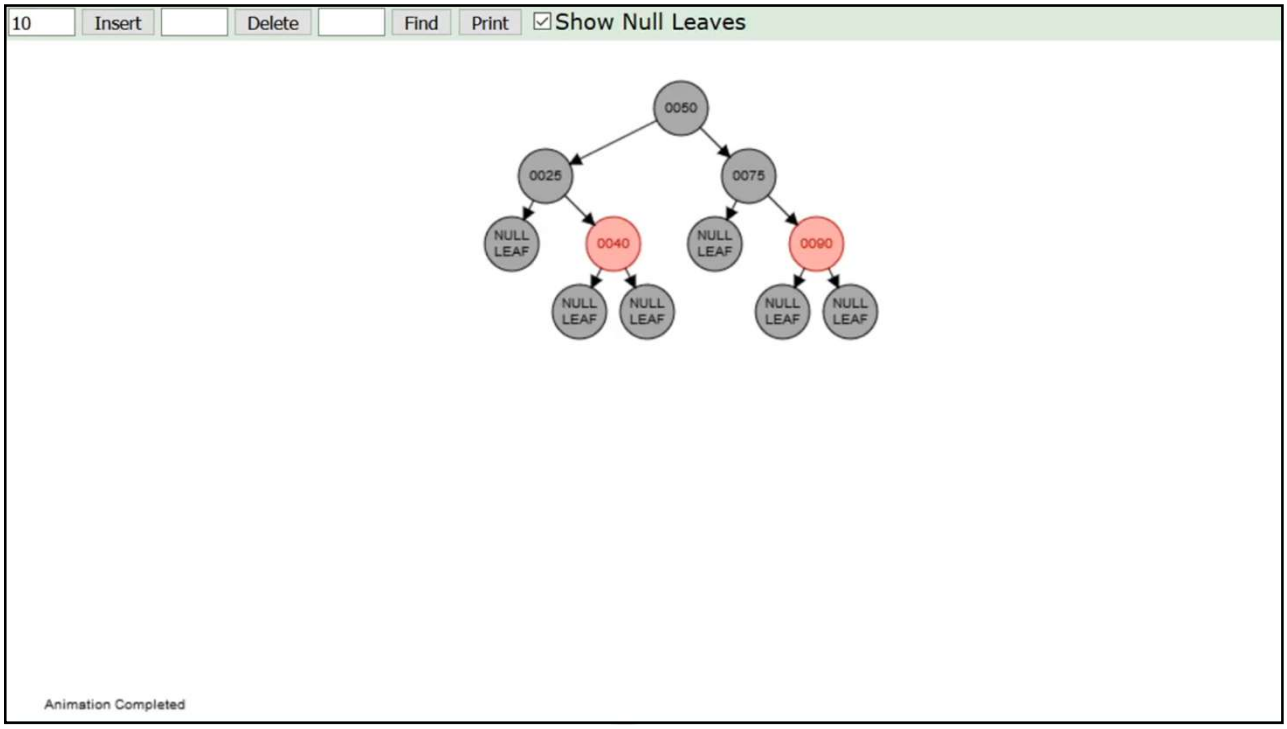
Inserimento

- Caso 0: il padre *p* è nero

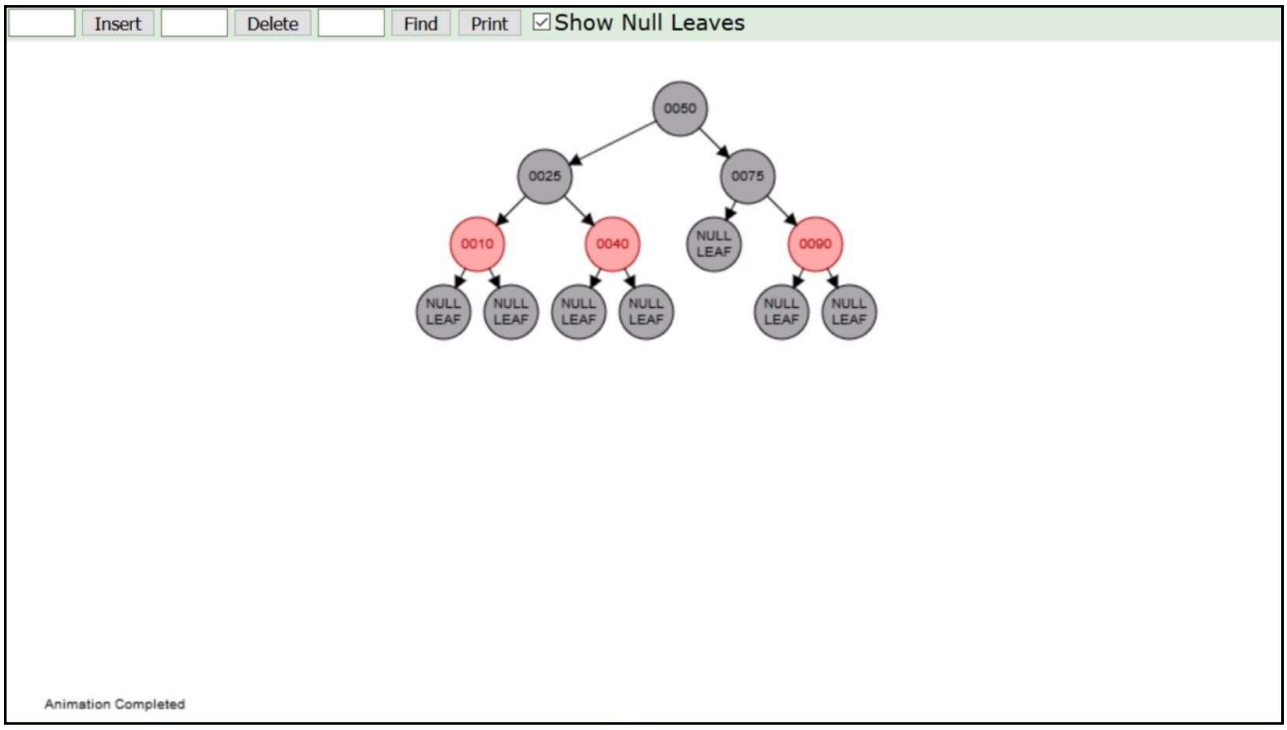


- altezza nera di *p* non cambia
- nessun regola viene violata, non bisogna fare niente

16


10
Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0050
0025
0075
NULL LEAF
0040
NULL LEAF
0090
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
Animation Completed

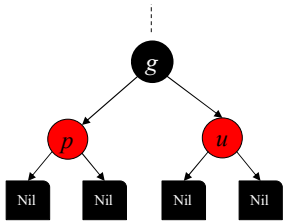
17


Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0050
0025
0075
0010
0040
NULL LEAF
0090
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
NULL LEAF
Animation Completed

18

Inserimento

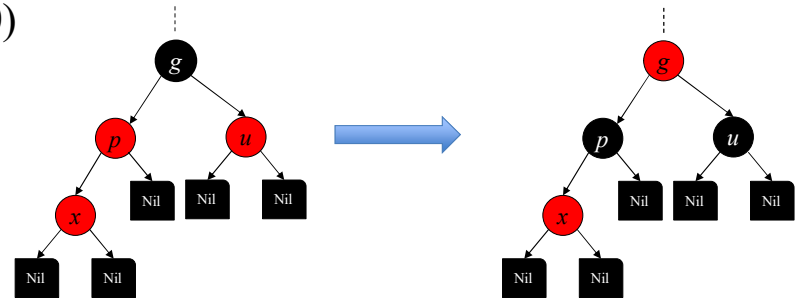
- Caso 1 a livello foglia prima dell'inserimento: lo zio *u* è rosso (e *p* è rosso, altrimenti sarebbe il caso 0)



19

Inserimento

- Caso 1: lo zio *u* è rosso (e *p* è rosso, altrimenti sarebbe il caso 0)

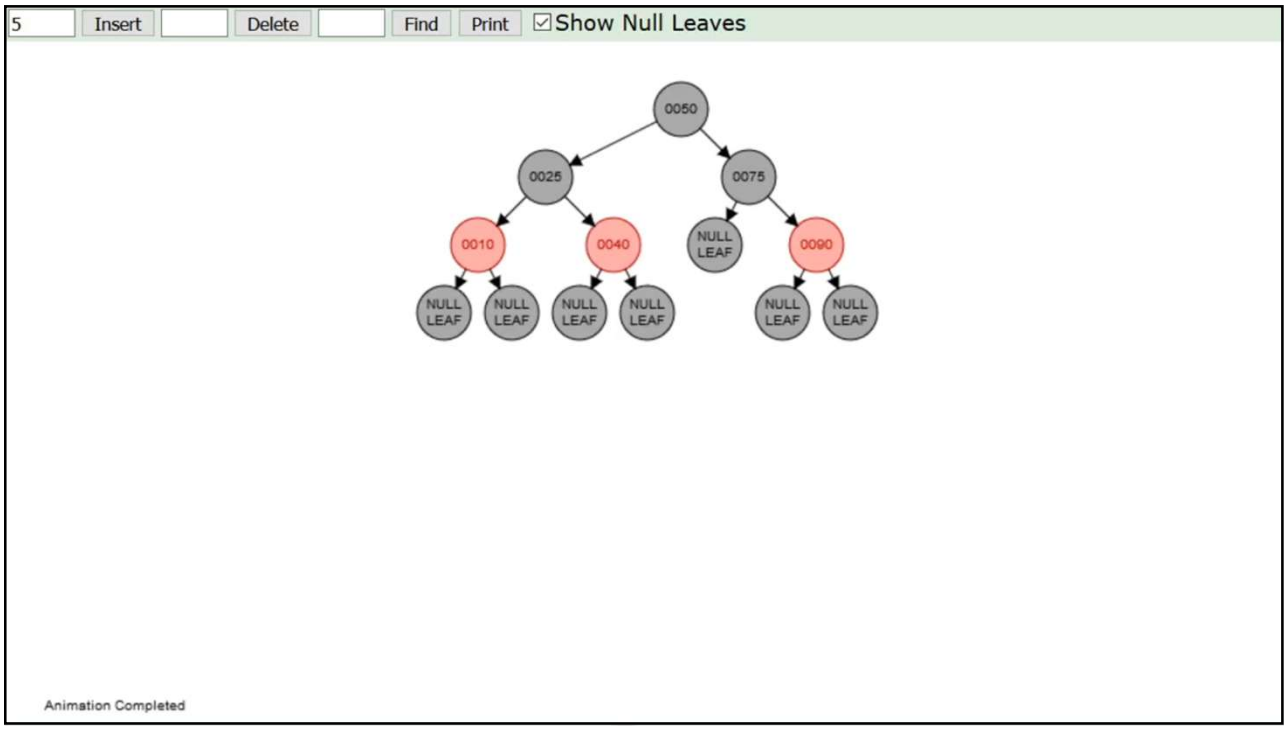


20

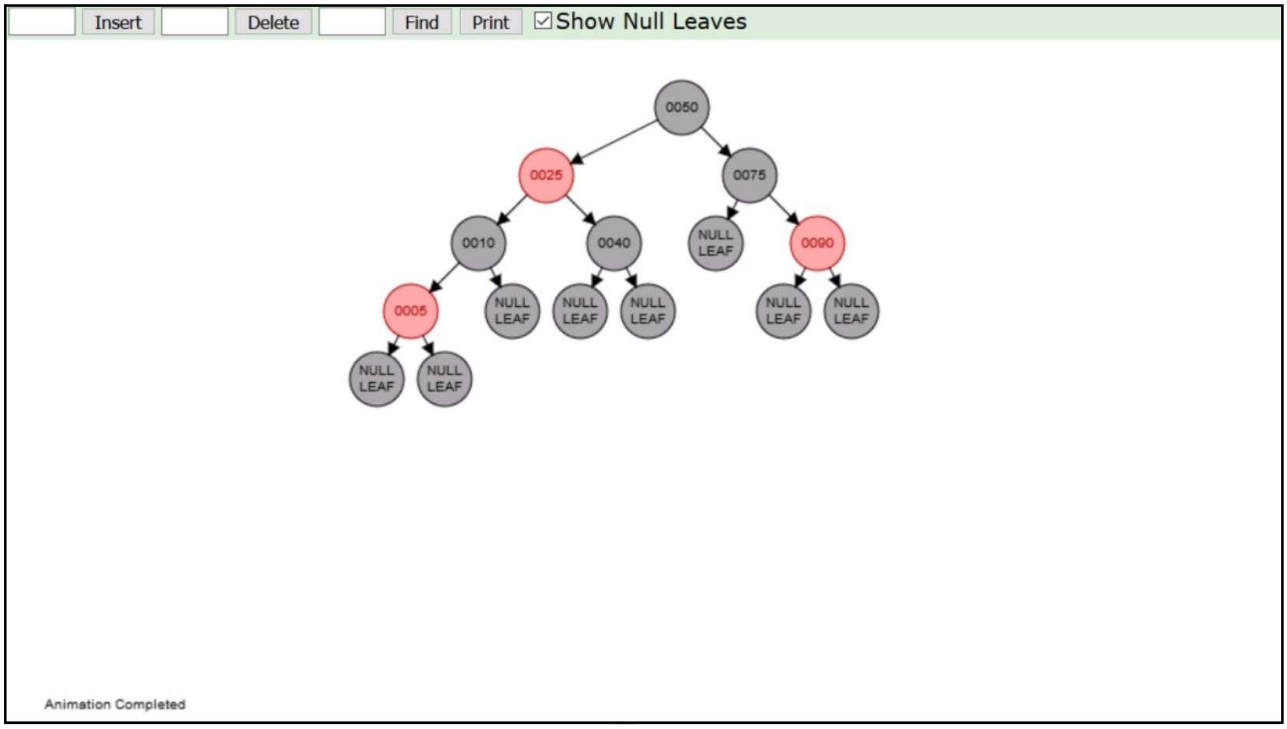
Inserimento

- Caso 1:
- dopo le modifiche
  - le regole localmente (da *g* in giù) sono rispettate
  - l'altezza nera del padre di *g* non cambia
- se il padre di *g* è nero allora le regole sono rispettate
- se il padre di *g* è rosso allora la regola del rosso è violata
- se *g* è la radice allora bisogna colorarlo di nero e l'albero è ok

21



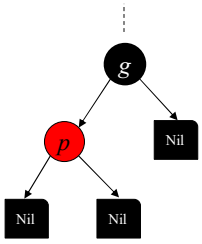
22



23

Inserimento

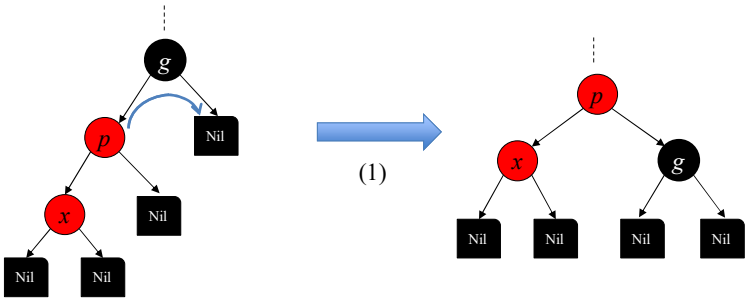
- Caso 2 a livello foglia prima dell'inserimento: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* sarà figlio sinistro



24

Inserimento

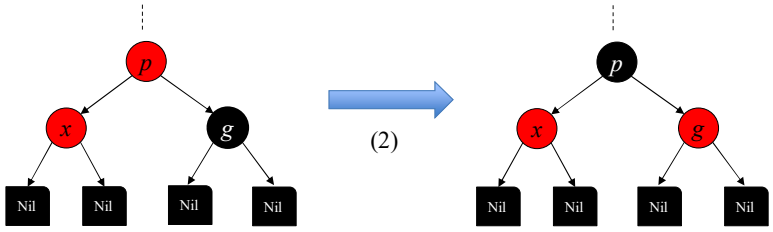
- Caso 2 a livello foglia: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* è figlio sinistro



25

Inserimento

- Caso 2 a livello foglia: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* è figlio sinistro

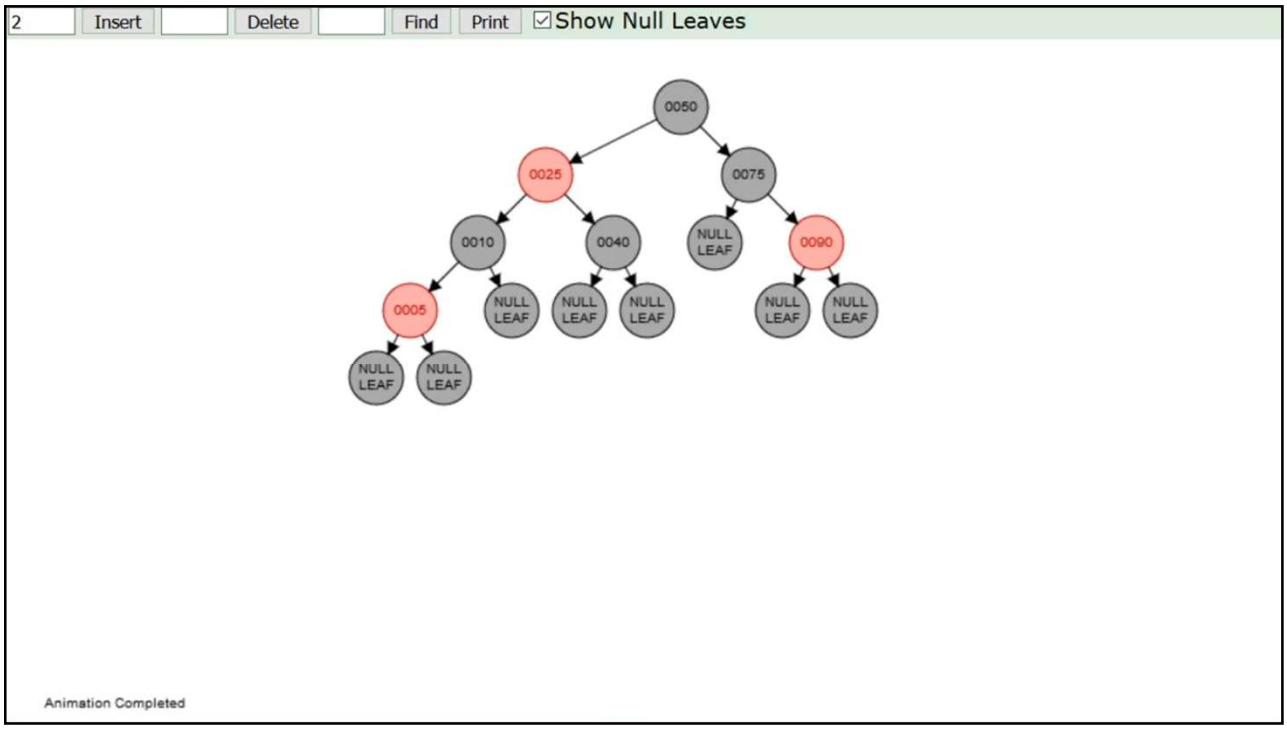


26

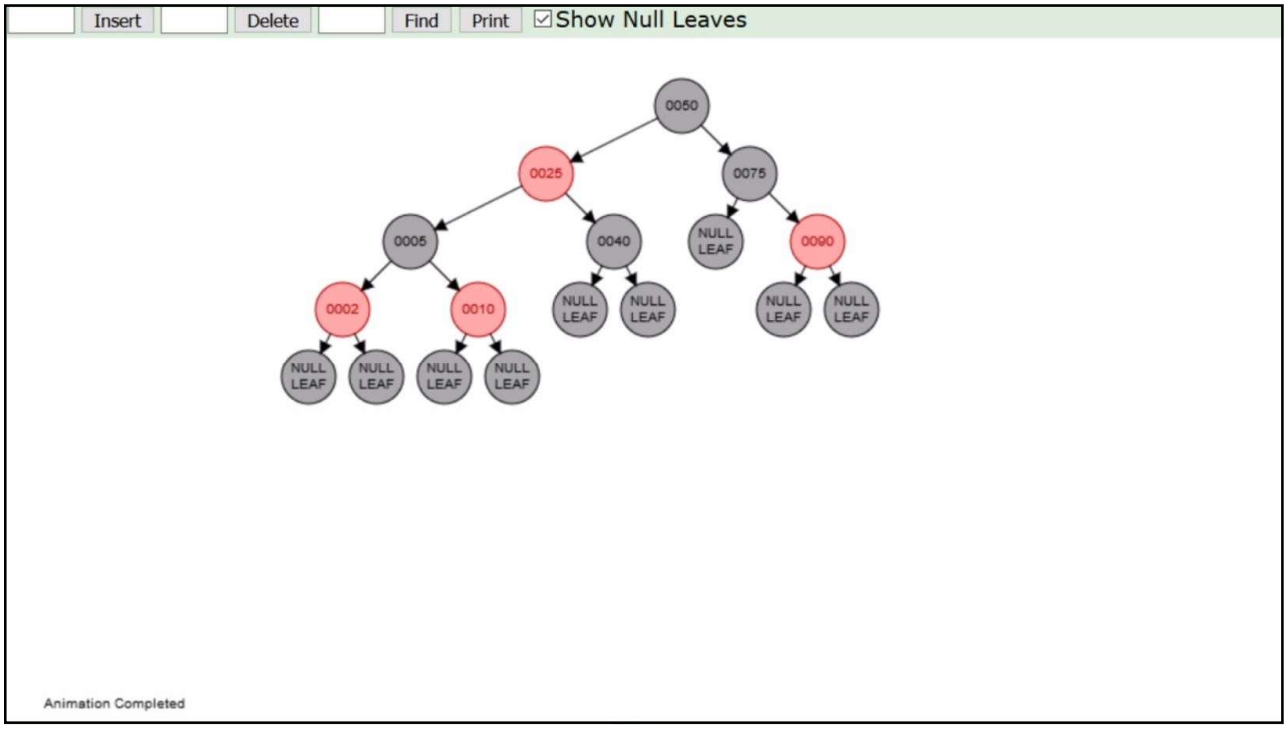
Inserimento

- Caso 2:
- dopo le modifiche
  - le regole localmente (da *p* in giù) sono rispettate
  - l'altezza nera del padre di *p* non cambia
  - visto che *p* diventa nero anche la regola di rosso viene rispettata
- l'albero è ok

27



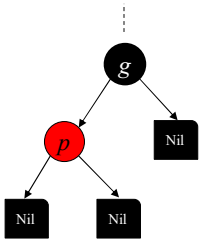
28



29

Inserimento

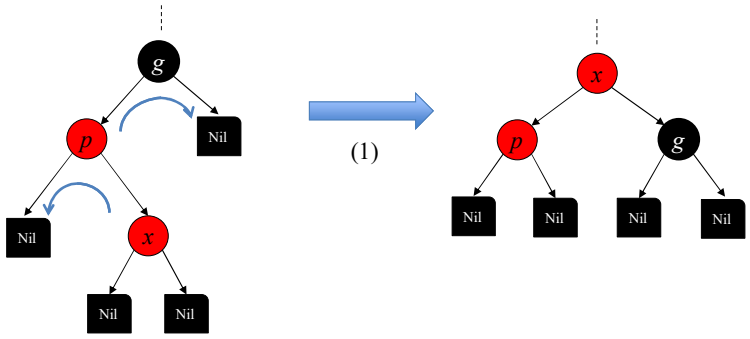
- Caso 3 a livello foglia prima dell'inserimento: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* è figlio destro



30

Inserimento

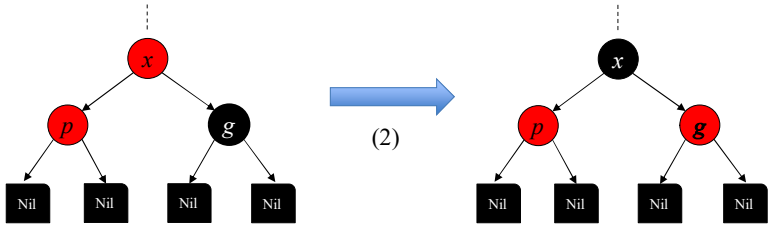
- Caso 3 a livello foglia: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* è figlio destro



31

Inserimento

- Caso 3 a livello foglia: lo zio *u* è nero (ed è nil) e *x* è figlio destro

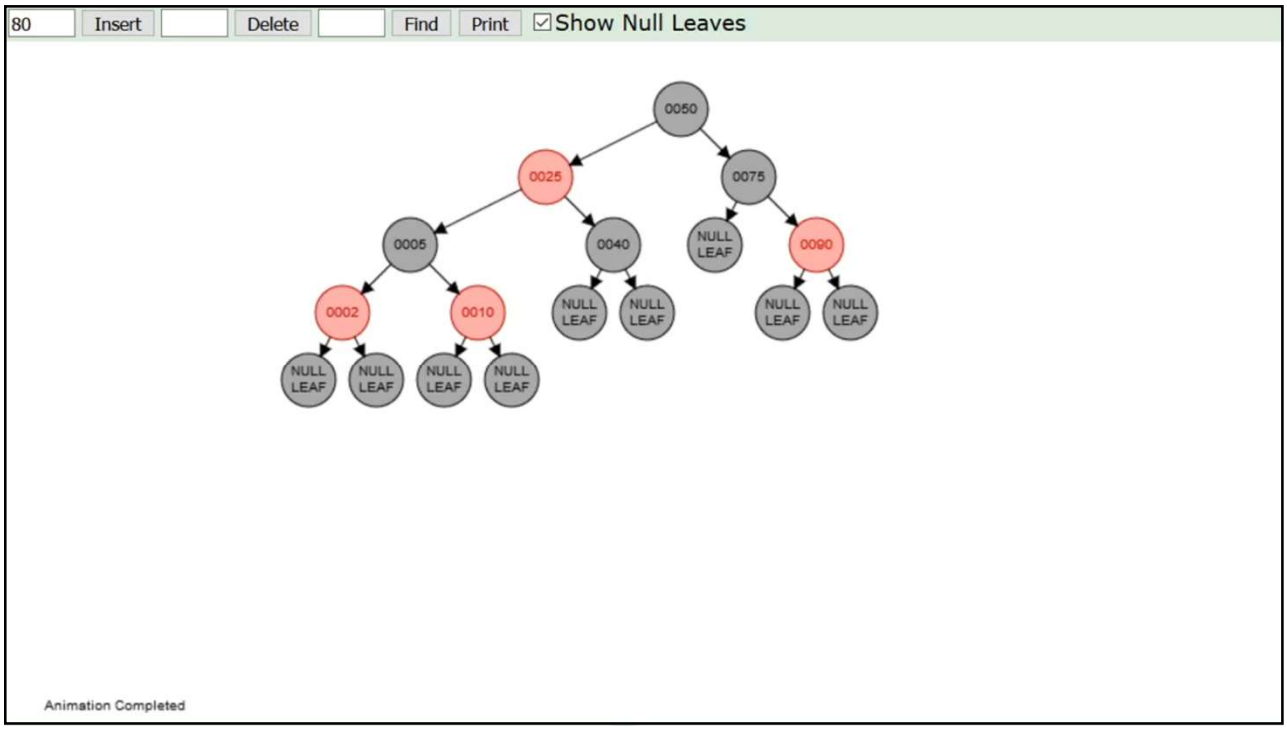


32

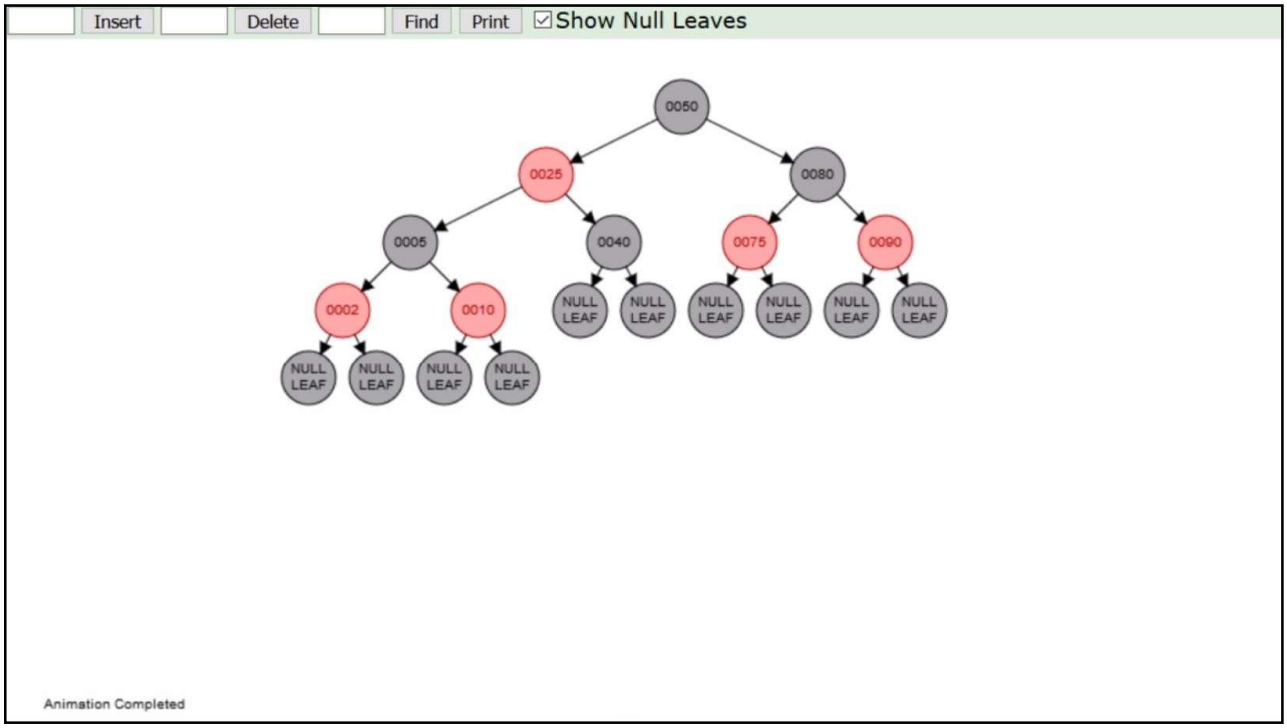
Inserimento

- Caso 3:
- dopo le modifiche
  - le regole localmente (da *x* in giù) sono rispettate
  - l'altezza nera del padre di *x* non cambia
  - visto che *x* diventa nero anche la regola di rosso viene rispettata
- l'albero è ok

33



34



35

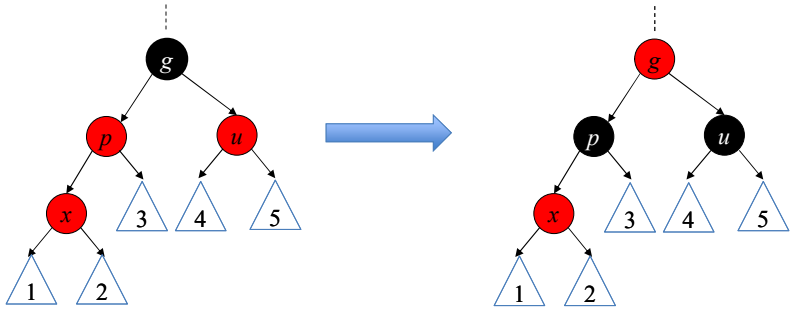
Inserimento

- nel caso 1 può capitare che la regola del rosso è violata se il padre di *g* è rosso
- se è così abbiamo i stessi tre casi da risolvere con la differenza che i *nil* sono sottoalberi non vuoti
- appena incontriamo il caso 2 o il caso 3 le modifiche mettono a posto l'albero

36

Inserimento

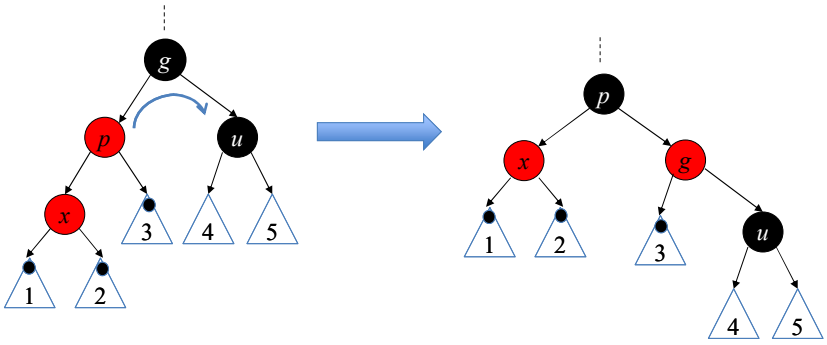
- Caso 1 a qualsiasi livello: lo zio *u* è rosso



37

Inserimento

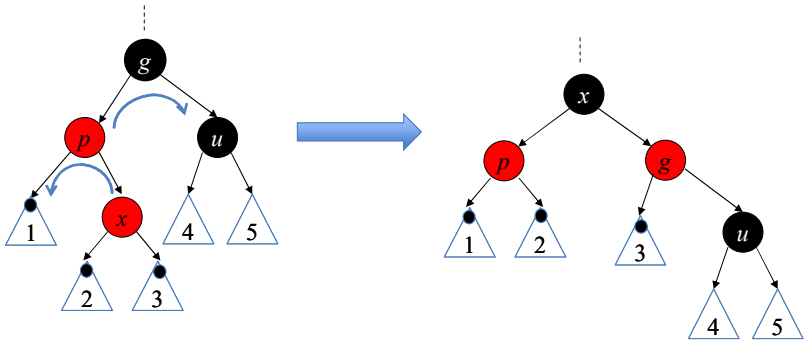
- Caso 2 a qualsiasi livello: lo zio *u* è nero e *x* è figlio sinistro



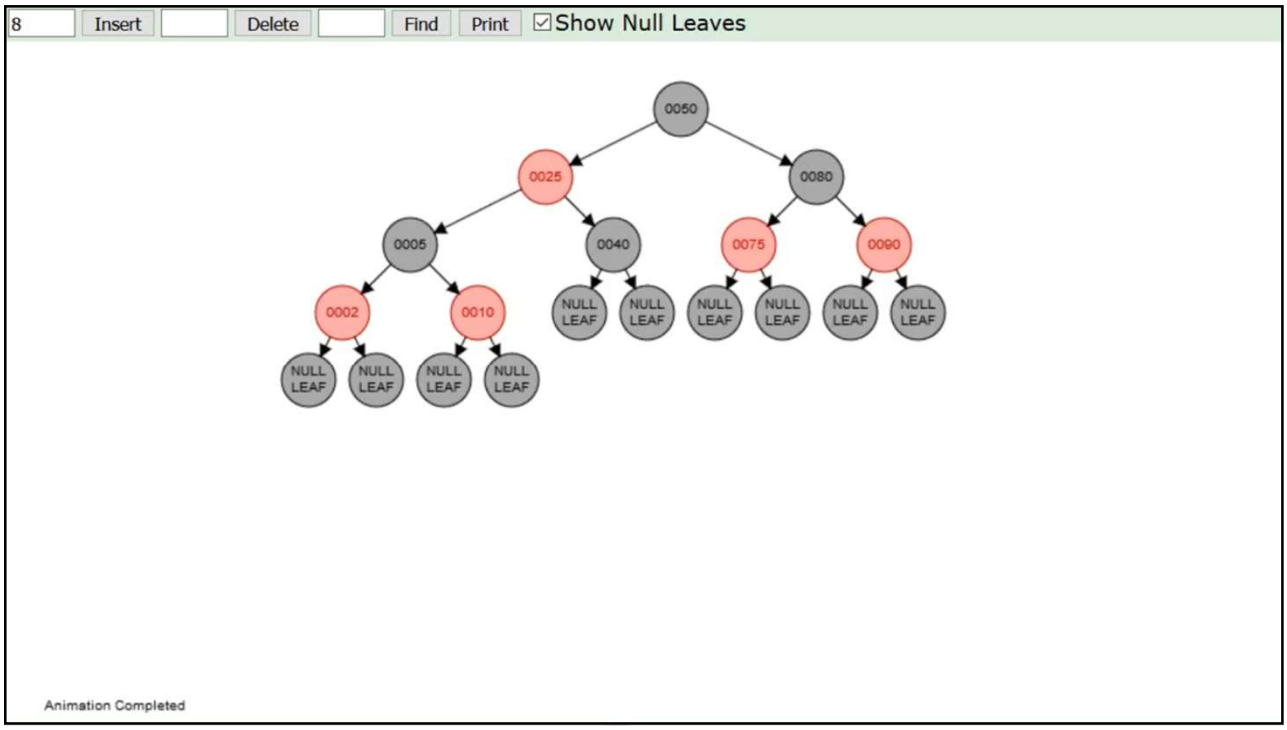
38

Inserimento

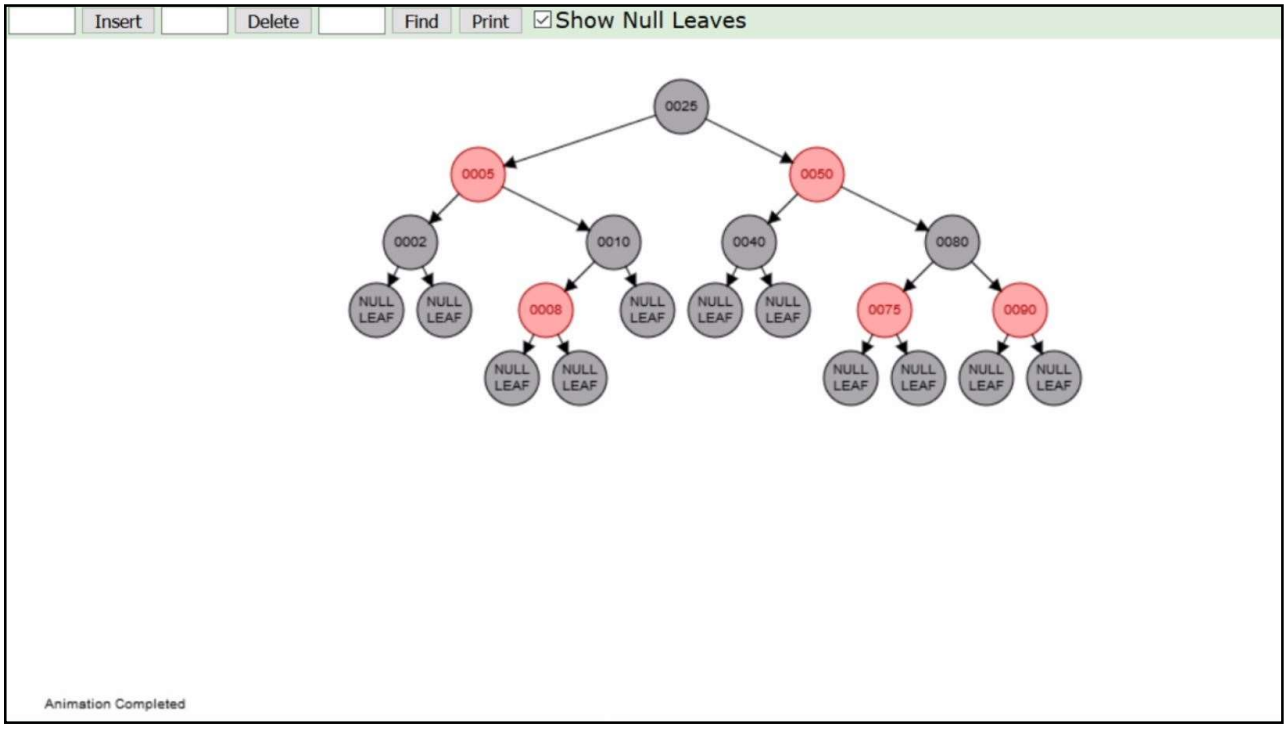
- Caso 3 a qualsiasi livello: lo zio *u* è nero e *x* è figlio destro



39



40



41

```
RB-INSERT-FIXUP(T, x)          ▷ x è il nodo che può creare problemi
  while x.p.color = red do
    if x.p = x.p.p.left then                ▷ padre di x è figlio sinistro?
      u ← x.p.p.right                       ▷ u è lo zio di x
      if u.color = red then                 ▷ caso 1?
        x.p.color ← black                   ▷ caso 1
        u.color ← black                     ▷ caso 1
        x.p.p.color ← red                   ▷ caso 1
        x ← x.p.p                           ▷ caso 1
      else
        if x = x.p.right then               ▷ caso 3?
          x ← x.p                           ▷ caso 3
          LEFT-ROTATE(T, x)                 ▷ caso 3
        x.p.color ← black                   ▷ caso 2 e 3
        x.p.p.color ← red                   ▷ caso 2 e 3
        RIGHT-ROTATE(T, x.p.p)              ▷ caso 2 e 3
    else
      {tutto il corpo del if esterno con
      left e right scambiati}               ▷ padre di x è figlio destro
  T.root.color ← black
```

Inserimento in pseudo codice

42

Alberi rosso-neri

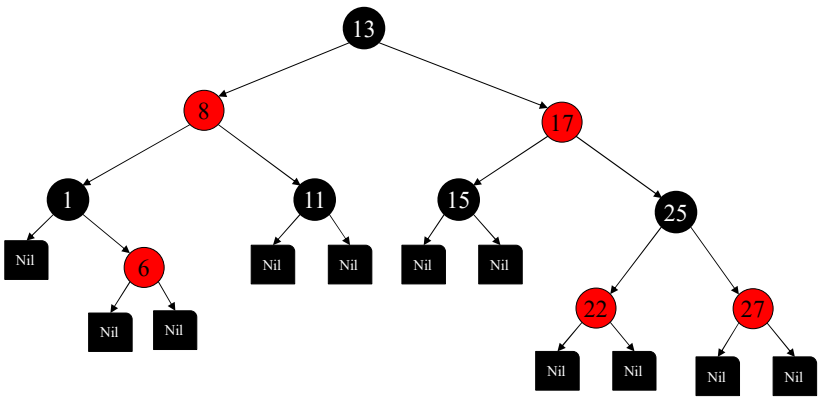
Def. Un *albero rosso-nero (R-N)* è un albero binario di ricerca aumentato, i cui vertici sono colorati di rosso o nero in modo che:

- (regola del ***nero***) la radice e tutte le foglie (i Nil) sono nere
- (regola del *rosso*) se un nodo è rosso tutti i suoi figli sono neri
- (regola del *cammino*) per ogni nodo x tutti i cammini da x ad una foglia hanno lo stesso numero di nodi neri

Inserimento e cancellazione sono accompagnati da meccanismi tali da rendere l'albero un albero rosso-nero corretto.

43

Alberi rosso-neri (R-N)



44

Cancellazione

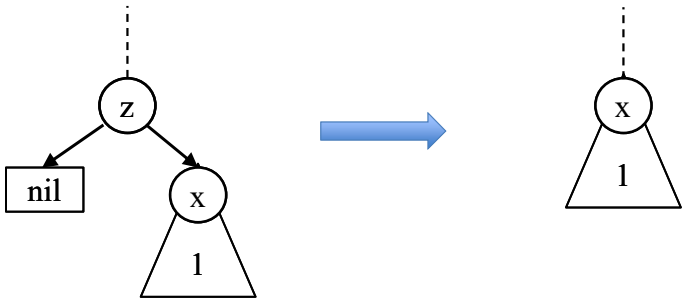
Come l'inserimento, anche la cancellazione avviene in due fasi:

1. Cancellazione come in un albero di ricerca ordinario
2. Ripristino delle regole per ricolorazioni/rotazioni

45

Cancellazione «normale»

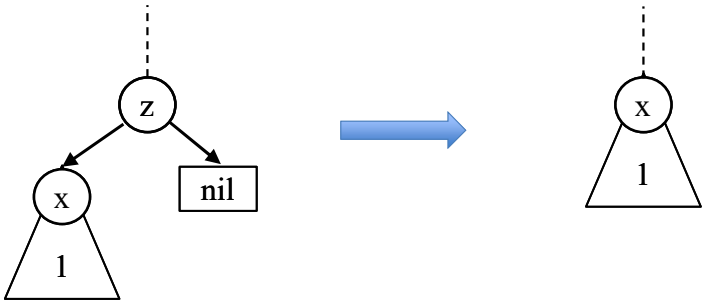
- Caso A: nodo da cancellare non ha figlio sinistro ma ha figlio destro



46

Cancellazione «normale»

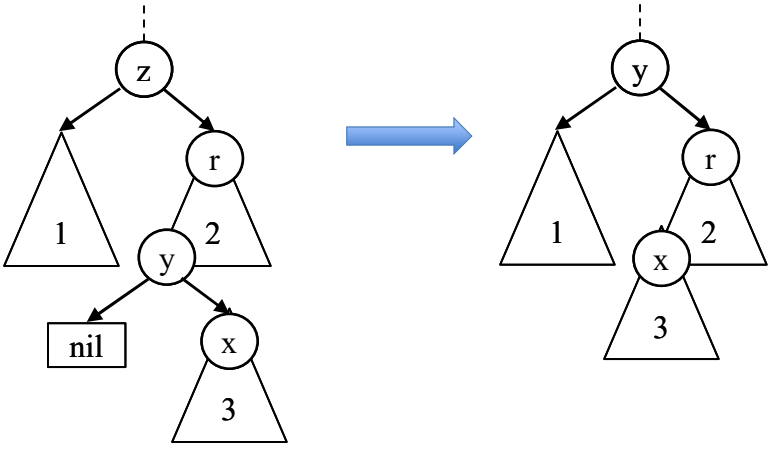
- Caso B: nodo da cancellare non ha figlio destro ma ha figlio sinistro



47

Cancellazione «normale»

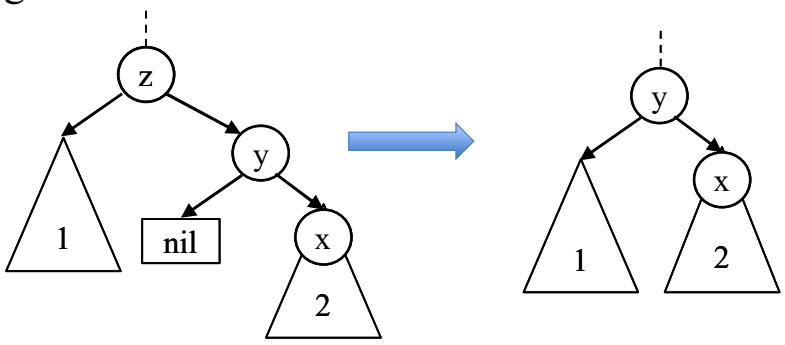
- Caso C: nodo da cancellare ha due figli e il suo successore non è suo figlio



48

Cancellazione «normale»

- Caso D: nodo da cancellare ha due figli e il suo successore è suo figlio



49

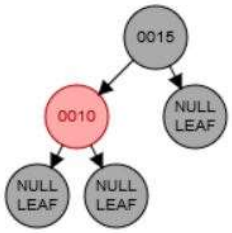
Cancellazione, fix-up

- caso A e B: *z* ha un figlio, *x*, che prende il suo posto
- caso C e D: *z* ha due figli; il suo successore, *y*, prende il suo posto e il figlio di *y*, *x*, prende il posto di *y*
- durante la cancellazione «normale»:
  - *x* mantiene il suo colore
  - *y* prende il colore di *z*
  - una variabile *lost-color* per memorizzare il colore del nodo effettivamente perso: nel caso A e B è il colore di *z*, nel caso C e D è il colore di *y*

50

Cancellazione, violazioni delle regole

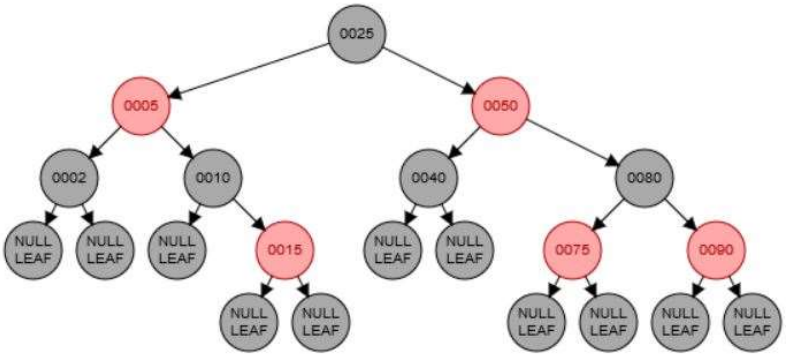
– la radice diventa rosso se cancelliamo il nodo 15
– la radice può diventare rosso



51

Cancellazione, violazioni delle regole

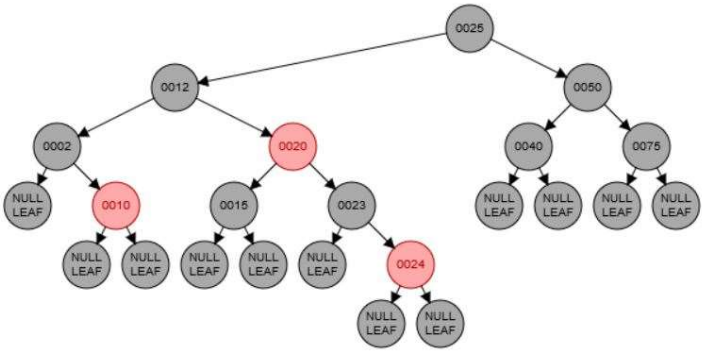
– se cancello il nodo 5, il nodo 10 prende il suo posto e il suo colore
– il nodo 15 rimane rosso e questo viola la regola del rosso
– *x* può essere rosso e può diventare figlio di un nodo rosso



52

Cancellazione, violazioni delle regole

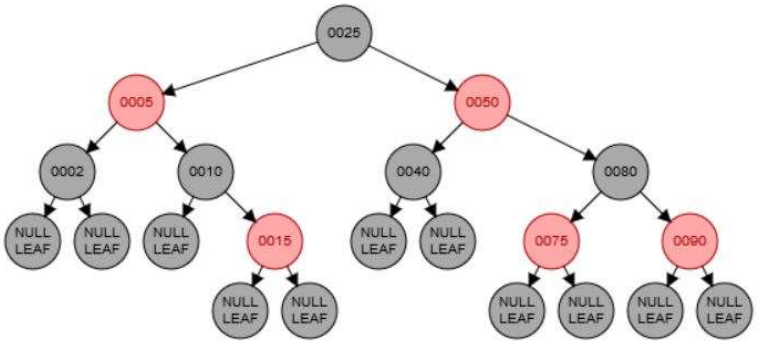
– se cancello il nodo 12, il nodo 15 viene tolto, regola del cammino si viola
– se il nodo tolto era nero allora i cammini che lo contenevano hanno altezza nera diminuita che può violare la regola del cammino



53

Cancellazione, fix-up, caso -1

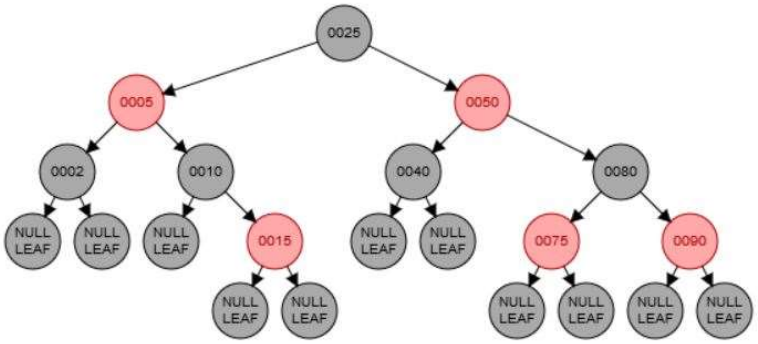
- canc. il nodo 50: sua etichetta diventa 75, nodo 75 sostituito da Nil
- Caso -1: il colore memorizzato in *lost-color* è rosso
- bisogna agire?
- no, l'albero è ok



54

Cancellazione, fix-up, caso 0

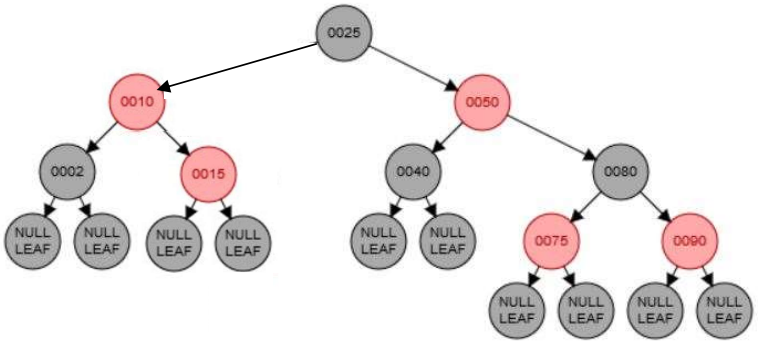
- canc. il nodo 5 (*z*)*:* la sua etichetta diventa 10 (*y*), 15 sale al suo posto (*x*)
- Caso 0: *lost-color* è nero e il nodo *x* è rosso
- bisogna agire?



55

Cancellazione, fix-up, caso 0

- la regola del cammino violata perché *lost-color* è nero
- può essere che *x* è la radice ed è rosso (regola del nero violata)
- può essere che *x* è rosso e suo padre anche (la regola del rosso violata)
- colora il 15 di nero
- basta colorare *x* di nero

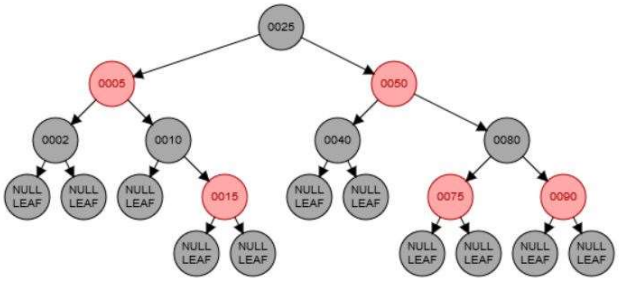


56

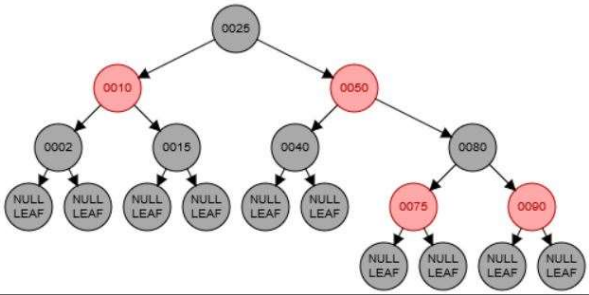
Cancellazione, fix-up, caso 0

- canc. il nodo 5 (*z*)*:* la sua etichetta diventa 10 (*y*), 15 sale al suo posto (*x*)
- basta colorare il nodo 15 (*x*) di nero

prima



dopo



57

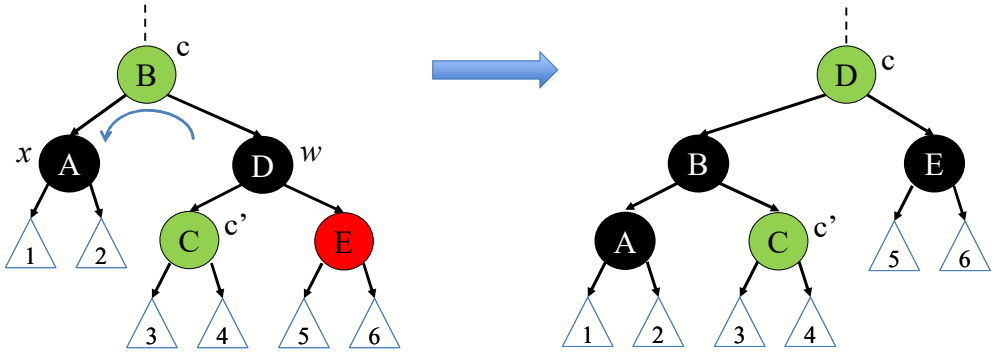
Cancellazione, fix-up

- analizziamo i casi che si possono capitare se *lost-color* è nero e il nodo *x* è nero
- come nel caso dell'inserimento i casi possono capitare da *x* in su
- c'è un caso solo che può provocare violazione ai livello più alti
- i lucidi fanno vedere i casi ad un livello qualsiasi
- *w* denota il fratello di *x* assumiamo che *x* è figlio sinistro (se è destro bisogna il caso analogo speculare)
- il colore di certi nodi non sarà definito: quelli verdi
- le variabili accanto i nodi verdi rappresentano il colore del nodo

58

Cancellazione, fix-up, caso 1

- caso 1: *w* è nero e il figlio destro di *w* è rosso

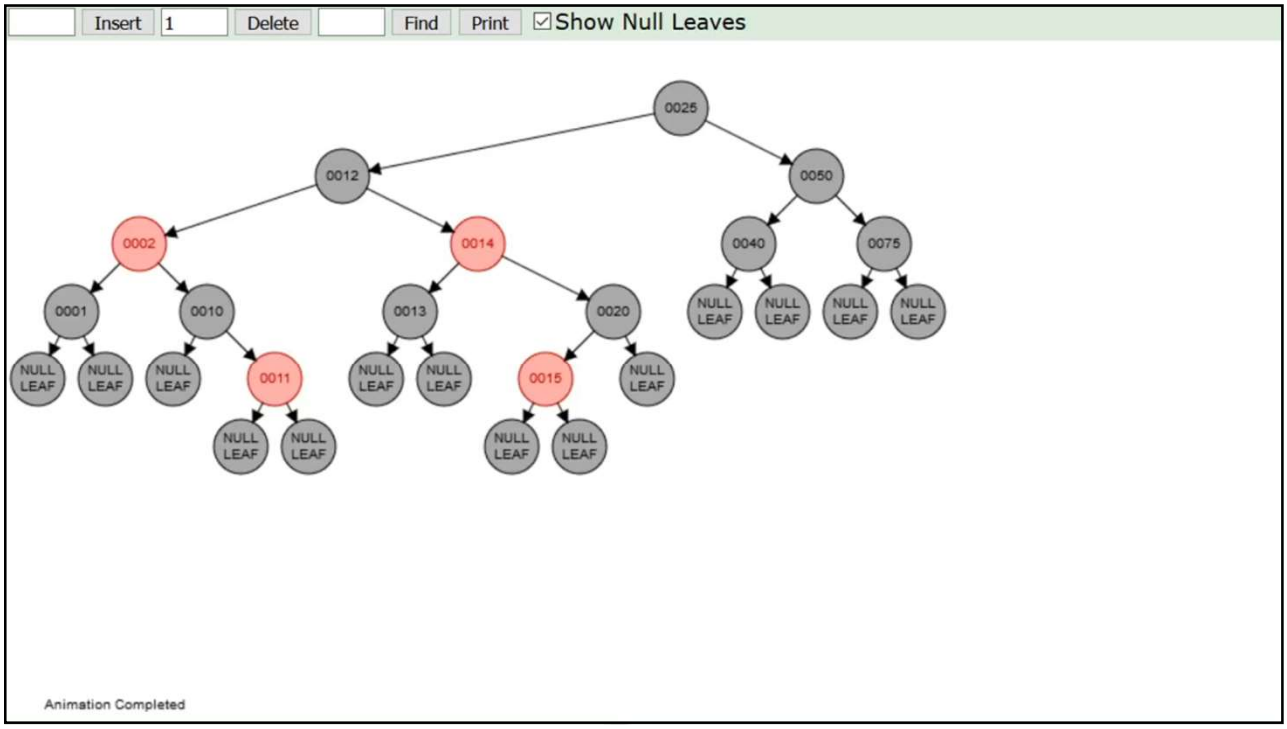


59

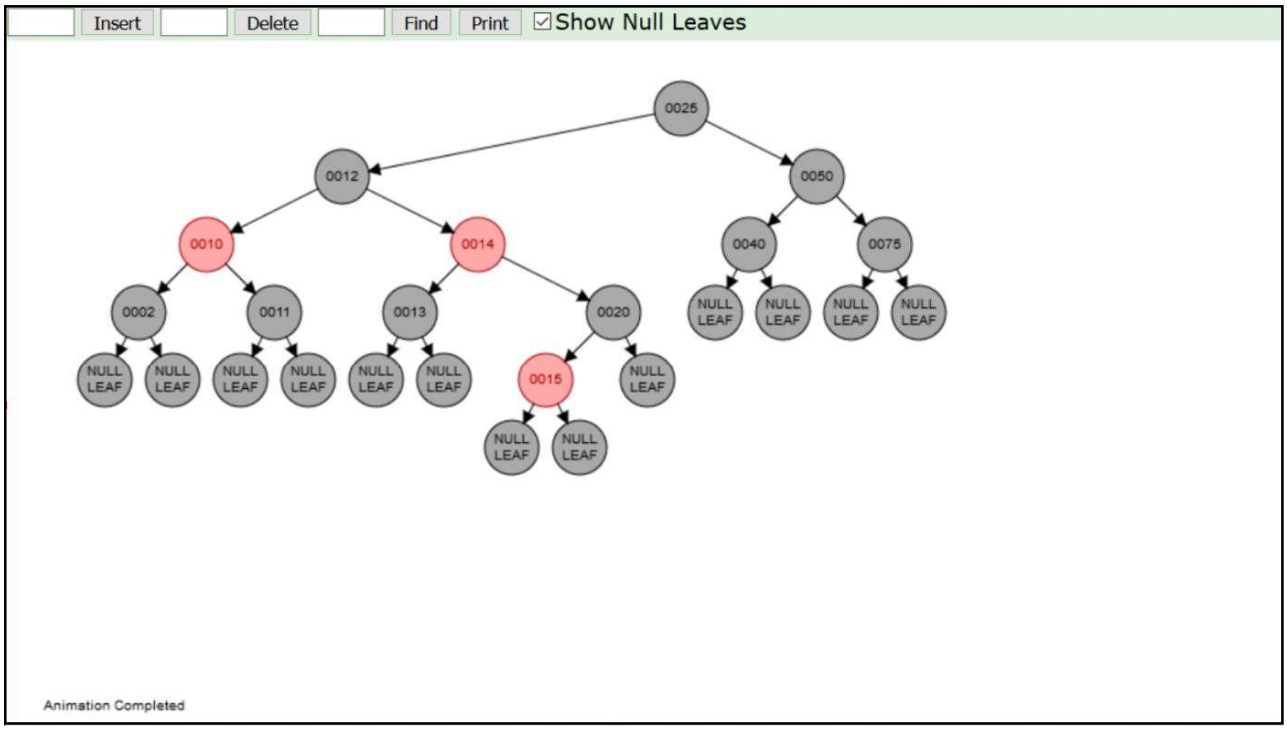
Cancellazione, fix-up , caso 1

- la regola dei cammini è violata perché dal *x* in giù manca un nero
- con le modifiche viene aggiunto un nodo nero (B) sui rami che attraversano *x*
- colorando il nodo E di nero, sulla destra di D manteniamo lo stesso numero di neri sui rami
- regola dei cammini non è più violata
- se D è la radice ed è rosso allora bisogna colorarlo di nero
- l'albero è ok
- nuovo *x*: *T.root* (perché solo al livello della radice può esserci ancora un problema se la radice è diventata rossa)

60


Insert
1
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0002
0014
0040
0075
0001
0010
0013
0020
0011
0015
NULL LEAF
Animation Completed

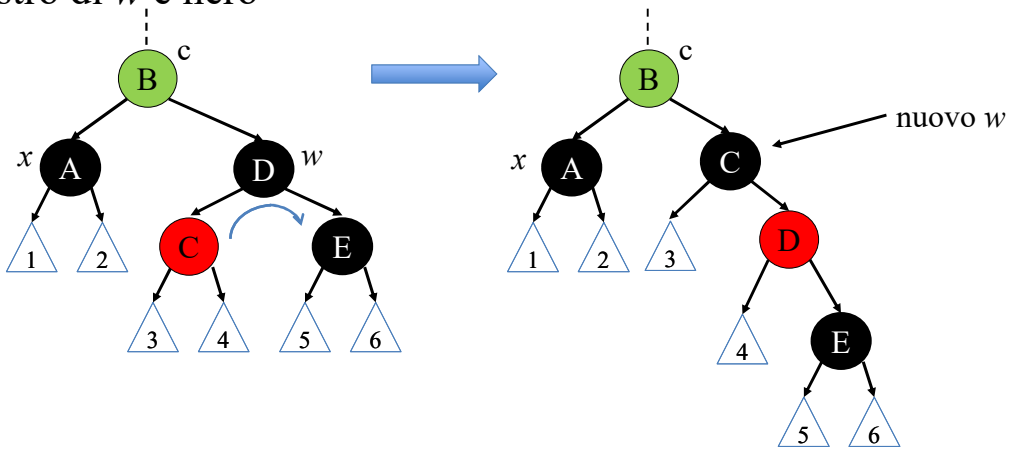
61


Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0014
0040
0075
0002
0011
0013
0020
0015
NULL LEAF
Animation Completed

62

Cancellazione, fix-up, caso 2

- caso 2: *w* è nero e il figlio sinistro di *w* è rosso e il figlio destro di *w* è nero

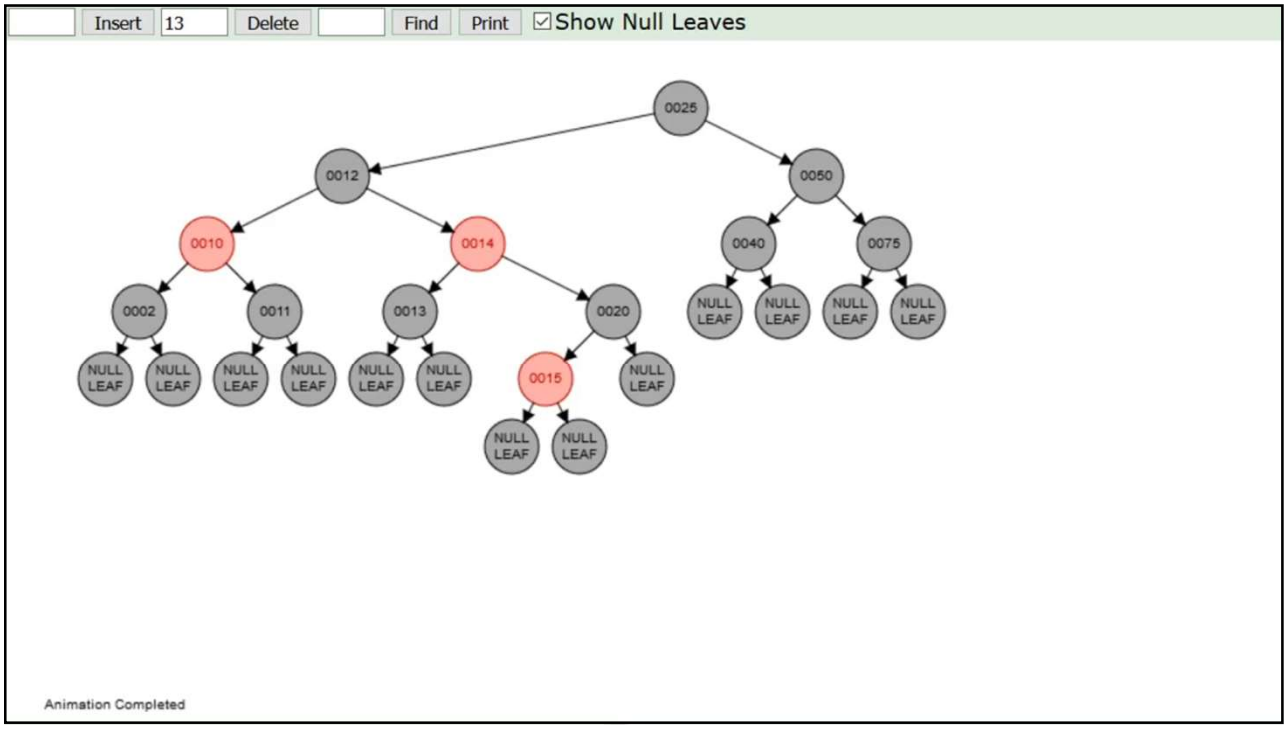


63

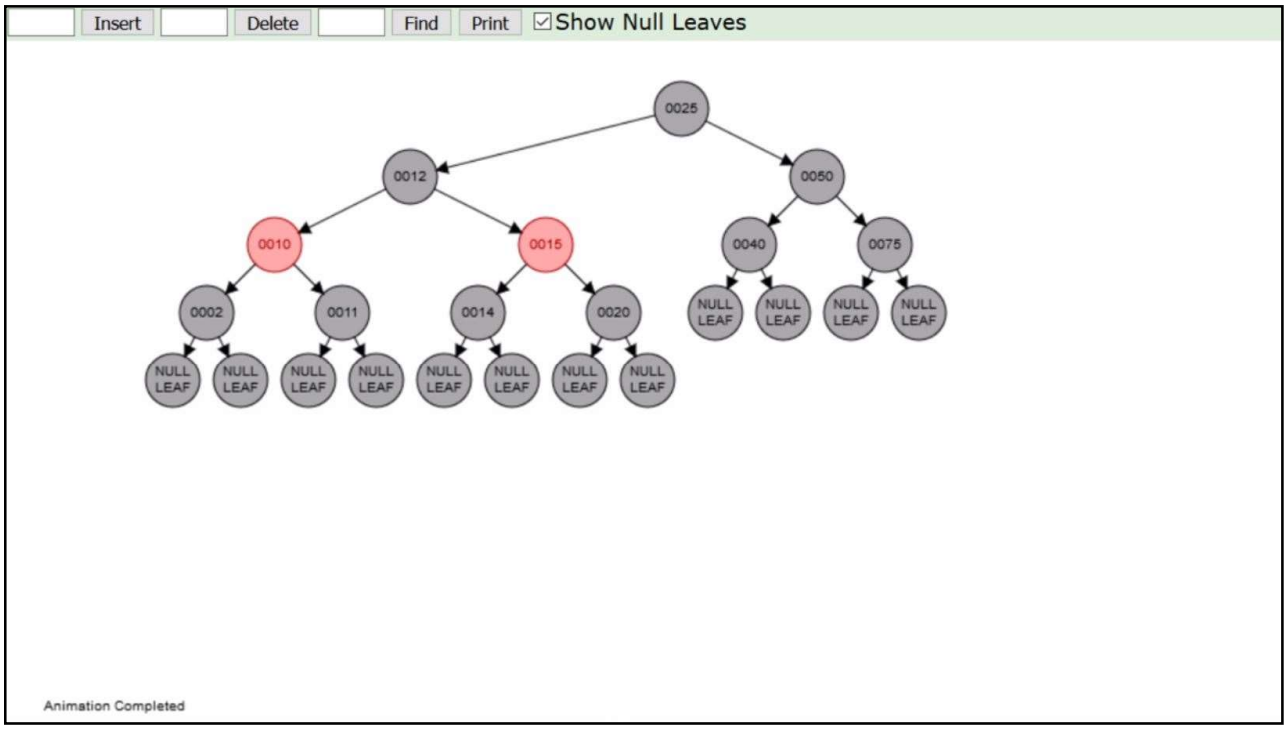
Cancellazione, fix-up, caso 2

- la regola dei cammini è violata perché dal *x* in giù manca un nero
- con le modifiche ci troviamo nella situazione del caso 1
- il nuovo *w* è il nodo C
- dopo le modifiche del caso 1, l'albero è ok

64


Insert
13
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0014
0040
0075
0002
0011
0013
0020
0015
NULL LEAF
Animation Completed

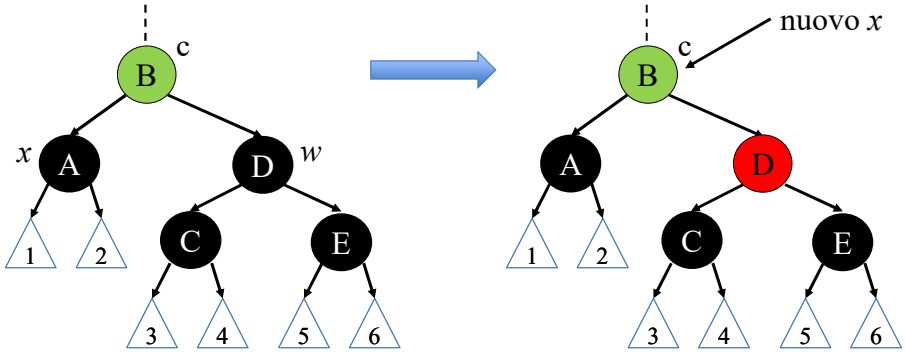
65


Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0015
0040
0075
0002
0011
0014
0020
NULL LEAF
Animation Completed

66

Cancellazione, fix-up, caso 3

- caso 3: *w* è nero e i figli di *w* sono neri

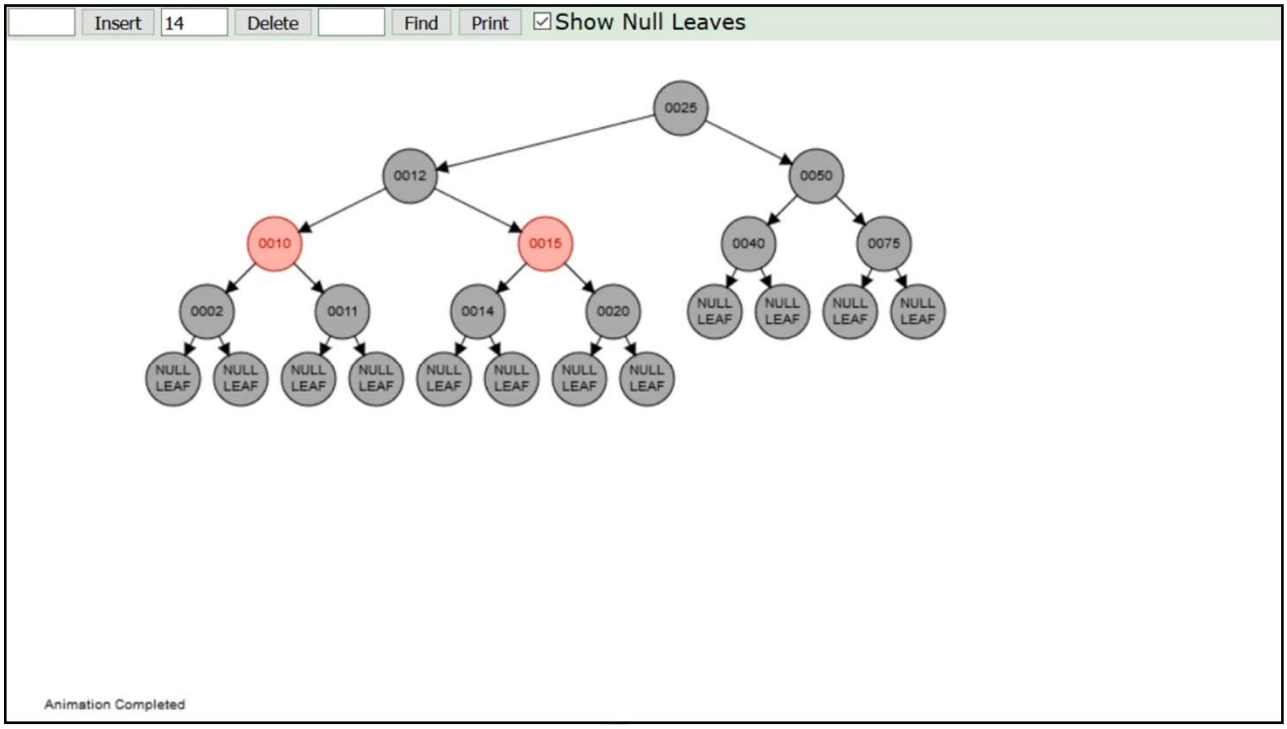


67

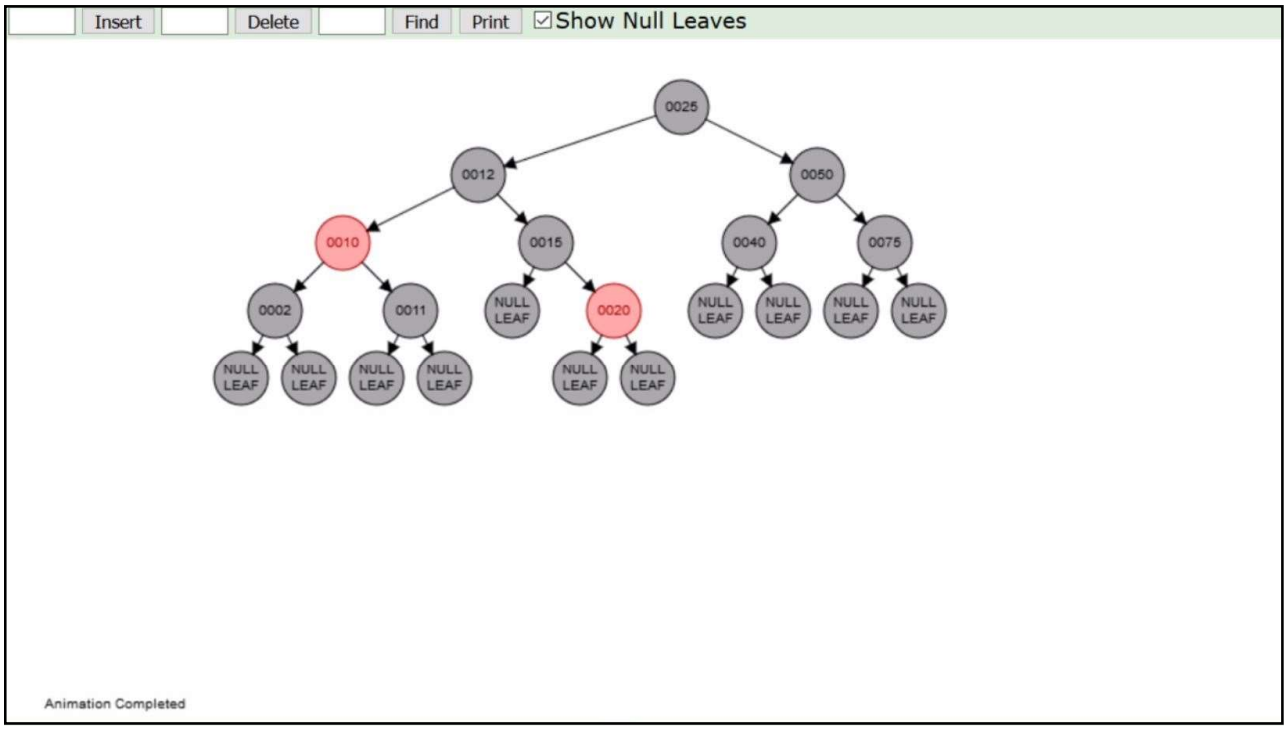
Cancellazione, fix-up, caso 3

- la regola dei cammini è violata perché dal *x* in giù manca un nero
- l'unica modifica è che il nodo D viene colorato di rosso
- di conseguenza il nodo B non viola più la regola dei cammini e il nero manca dal livello di B in su
- se B è rosso allora basta colorarlo di nero e l'albero è a posto
- se B è nero allora si ricomincia dal livello di B
- il nuovo nodo *x* è B

68


Insert
14
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0015
0040
0075
0002
0011
0014
0020
NULL LEAF
Animation Completed

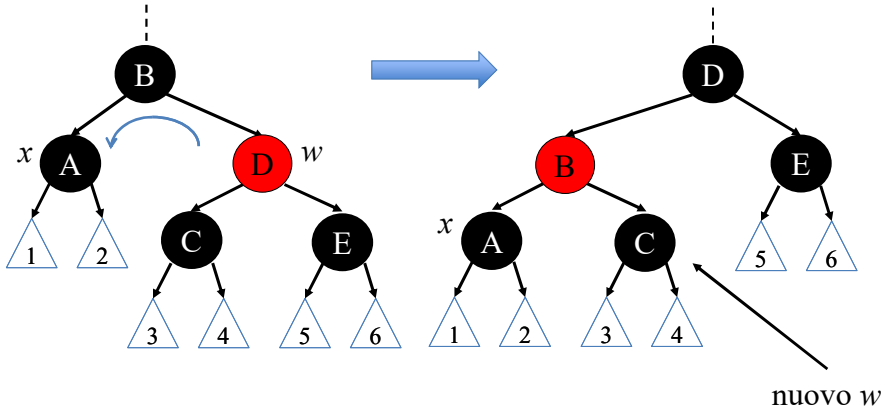
69


Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0015
0040
0075
0002
0011
0020
NULL LEAF
Animation Completed

70

Cancellazione, fix-up, caso 4

- caso 4: *w* è rosso (e quindi i figli di *w* sono neri)

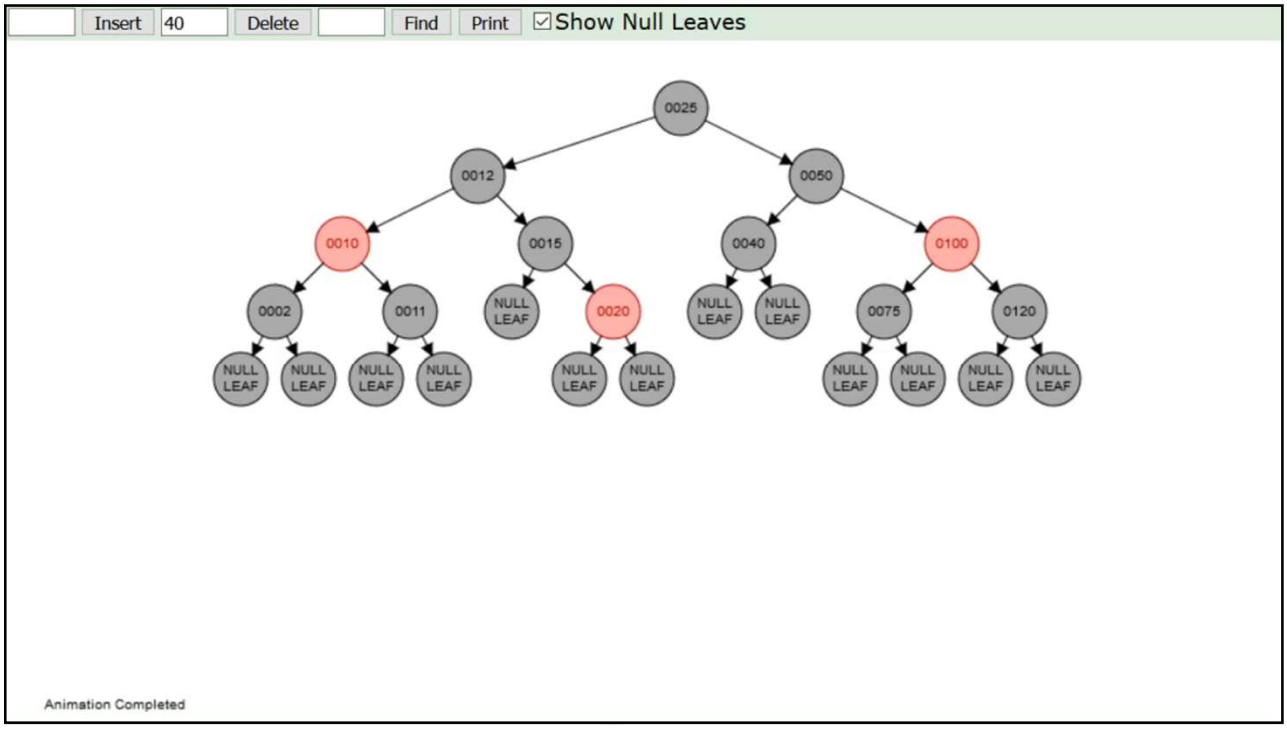


71

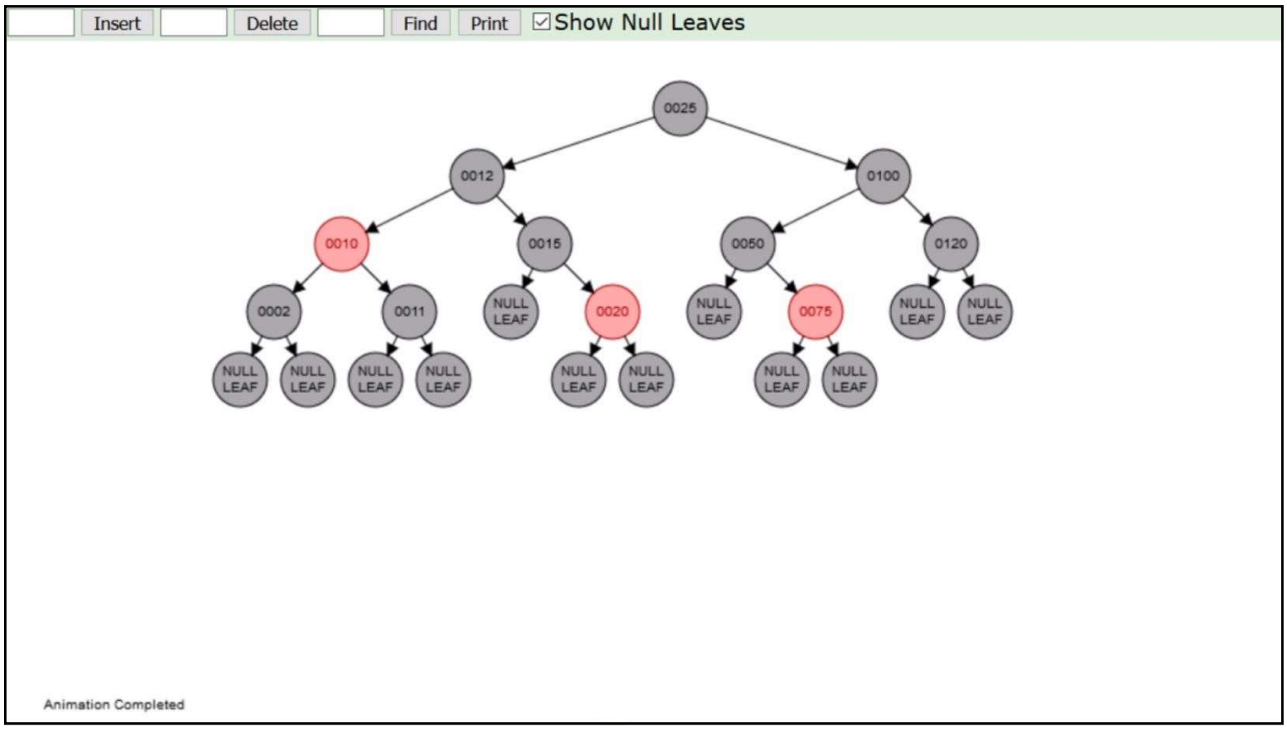
Cancellazione, fix-up, caso 4

- la regola dei cammini è violata perché dal *x* in giù manca un nero
- le modifiche portano ad uno dei 3 casi precedenti perché il fratello di *x* ora è nero
- il nuovo nodo *w* è C

72


Insert
40
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0050
0010
0015
0040
0100
0002
0011
NULL LEAF
0020
NULL LEAF
NULL LEAF
0075
0120
Animation Completed

73


Insert
Delete
Find
Print
Show Null Leaves
0025
0012
0100
0010
0015
0050
0120
0002
0011
NULL LEAF
0020
NULL LEAF
0075
NULL LEAF
NULL LEAF
Animation Completed

74

Cancellazione in pseudo codice

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)                          ▷ x è il nodo che può creare problemi
  while x ≠ T.root ∧ x.color = black do
    if x = x.p.left then                                          ▷ x è figlio sinistro?
      w ← x.p.right                                               ▷ w è il fratello di x
      if w.color = red then                                       ▷ caso 4?
        w.color ← black; x.p.color ← red                          ▷ caso 4
        LEFT-ROTATE(T, x.p); w ← x.p.right                        ▷ caso 4
      if w.left.color = black ∧ w.right.color = black then        ▷ caso 3?
        w.color ← red; x ← x.p                                    ▷ caso 3
      else
        if w.right.color = black then                             ▷ caso 2?
          w.left.color ← black; w.color ← red                     ▷ caso 2
          RIGHT-ROTATE(T, w); w ← x.p.right                       ▷ caso 2
        w.color ← x.p.color; x.p.color ← black                    ▷ caso 1
        w.right.color ← black; LEFT-ROTATE(T, x.p)                ▷ caso 1
        x ← T.root                                                ▷ caso 1
    else
      {tutto il corpo del if esterno con left e right scambiati}
  x.color ← black
```

75

Complessità

- altezza di un albero rosso-nero con n nodi è $O(\log n)$
- l'algoritmo di ricerca scende lungo un ramo e quindi è $O(\log n)$
- gli algoritmi di inserimento è cancellazione
  - scendono lungo un ramo e
  - risalgono al massimo fino la radice effettuando rotazioni e/o ricolorazioni (operazioni $O(1)$)
  - quindi sono operazioni $O(2\log n) = O(\log n)$

76