Alberi

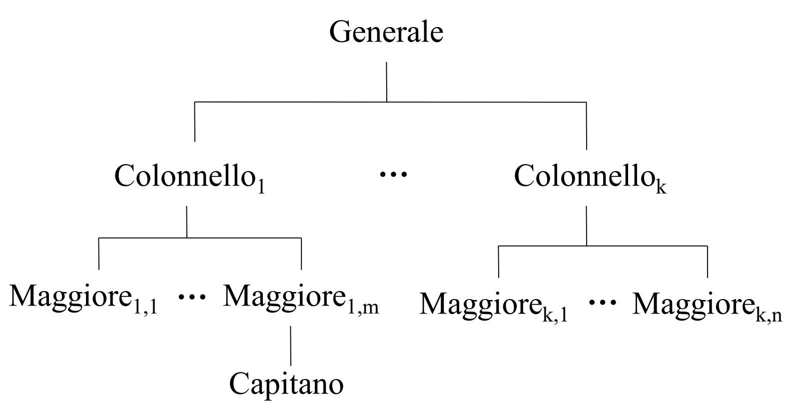
Algoritmi e strutture dati

Ugo de'Liguoro, Andras Horvath

1

Cosa sono gli alberi?

Strutture gerarchiche di ogni tipo:



2

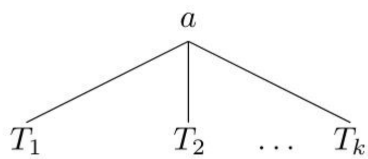
Definizione

Dato un insieme A di etichette, l'insieme degli alberi su A, denotato con $T(A)$, è definito induttivamente:

$$a \in A \wedge T_1 \in T(A) \wedge T_2 \in T(A) \wedge \cdots \wedge T_k \in T(A) \quad \text{con } k \geq 0$$

$$\Downarrow$$

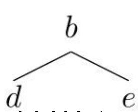
$$\{a, T_1, T_2, ..., T_k\} \in T(A)$$



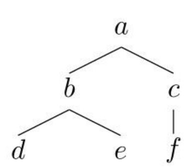
3

Utilizzo della definizione

- sia $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- allora $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}$ sono alberi che fanno parte di $T(A)$ (contengono un nodo solo)
- allora $\{b, \{d\}, \{e\}\}$ e $\{c, \{f\}\}$ sono alberi che fanno parte di $T(A)$



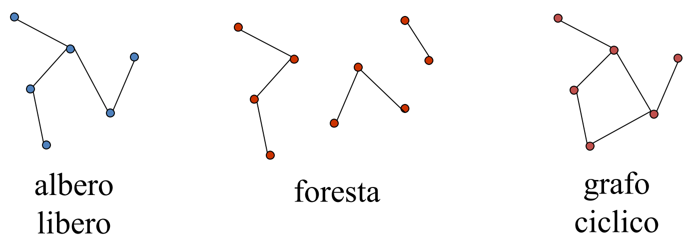
- allora $\{a, \{b, \{d\}, \{e\}\}, \{c, \{f\}\}\}$ è un albero che fanno parte di $T(A)$



4

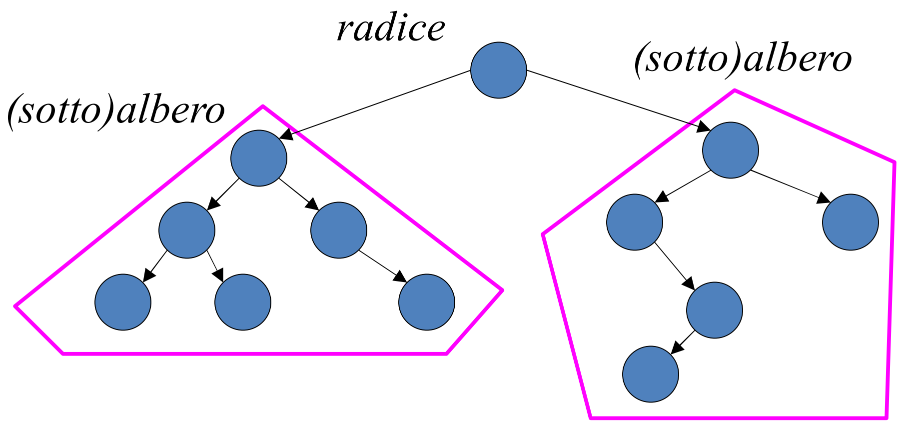
Alberi come grafi

- un ***albero*** è un grafo connesso aciclico
- un insieme di alberi è una ***foresta***



5

Alberi come grafi



6

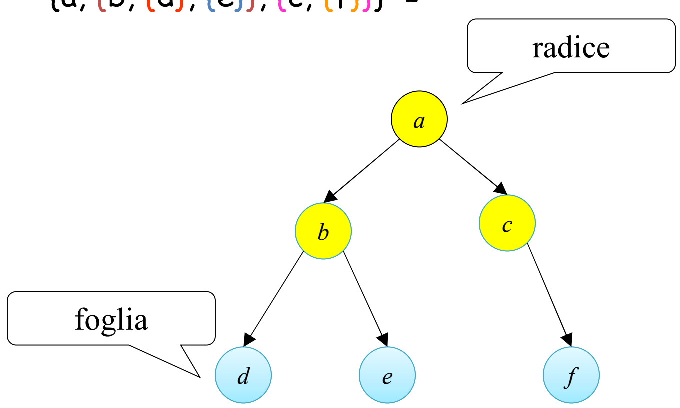
Alberi radicati

- la ***radice*** è un nodo privilegiato di un albero
- una ***foglia*** è un nodo da cui non esce alcun arco
- un nodo che non sia una foglia si dice ***interno***

7

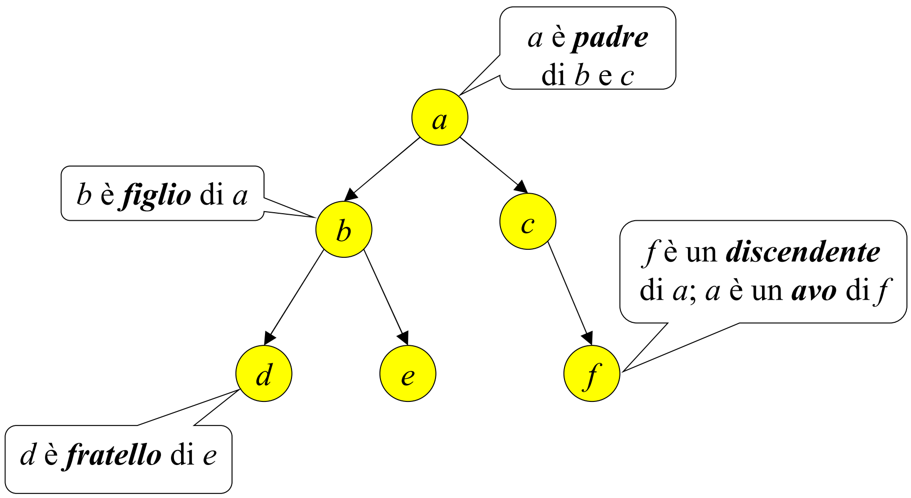
Alberi come grafi

{a, {b, {d}, {e}}, {c, {f}}} =



8

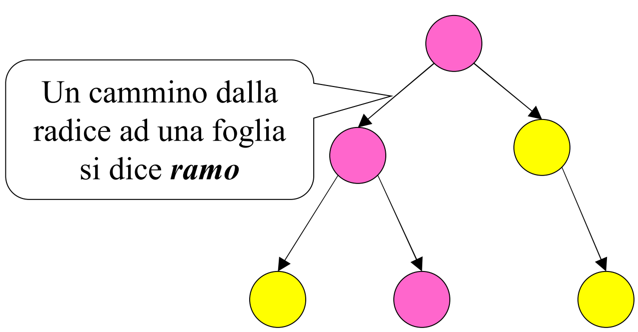
Parentele



9

Cammini

Cammino: sequenza di archi ciascuno incidente sul vertice di quello successivo

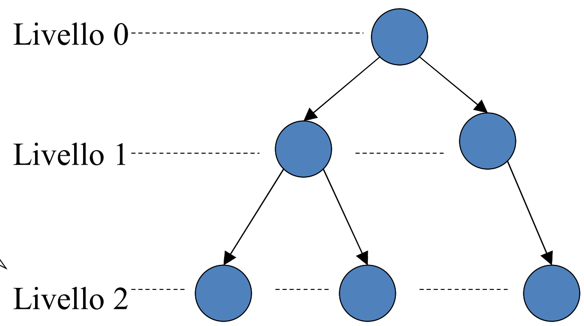


10

Livelli

Livello: insieme di vertici equidistanti dalla radice

L'***altezza*** è la massima distanza dalla radice di un livello non vuoto (in questo caso 2)

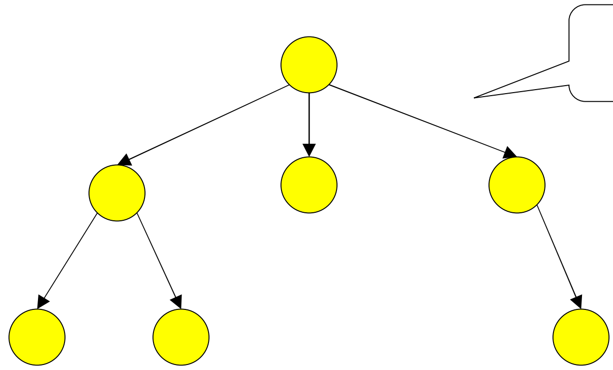


11

Alberi di grado *k* (*k*-ari)

Grado = massimo numero di figli di qualche nodo

albero ternario

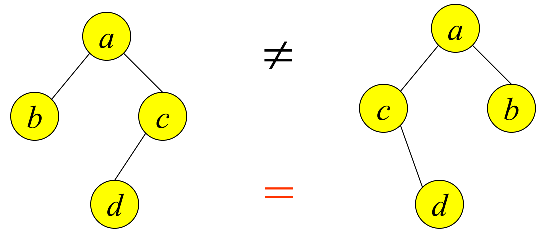


12

Alberi ordinati

Un albero è ***ordinato*** quando lo sono (linearmente) i suoi livelli.

Come alberi non ordinati sono =, cioè uguali.



Come alberi ordinati sono ≠, cioè diversi.

In ogni caso i sottoalberi che hanno radice in *c* sono uguali (si tratta di alberi non posizionali, vedi lucido successivo).

13

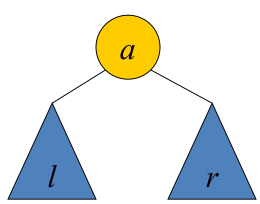
Alberi binari posizionali

L'insieme degli alberi binari etichettati in A, BT(A), è definito induttivamente:

a) $\varnothing \in \mathrm{BT}(A)$ (albero vuoto)

b) $a \in A,\ l \in \mathrm{BT}(A),\ r \in \mathrm{BT}(A) \Rightarrow$

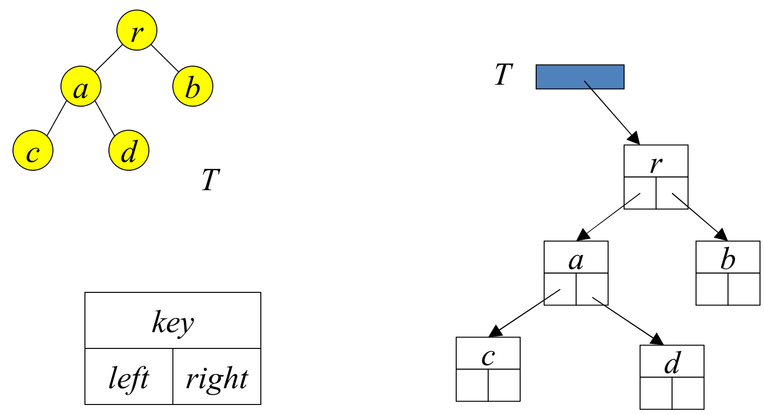
$\{a, l, r\} \in \mathrm{BT}(A)$



Si introduce la nozione di ***sottoalbero sinistro*** e ***destro***

14

Alberi binari realizzati con puntatori



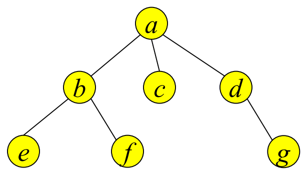
15

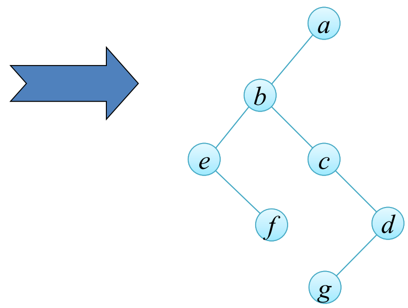
Alberi *k*-ari realizzati con puntatori

- per rappresentare un alberi *k*-ario in ogni nodo:
  - etichetta (key)
  - *k* puntatori
- bisogna sapere *k* a priori e i nil possono occupare tanta memoria
- come alternativa in ogni nodo si può avere:
  - etichetta (key)
  - una lista di puntatori

16

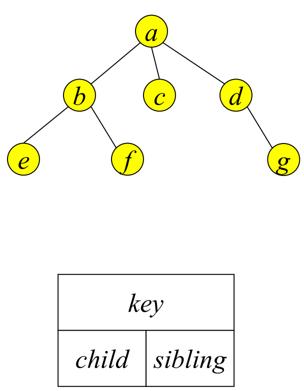
Codifica binaria di alberi *k*-ari

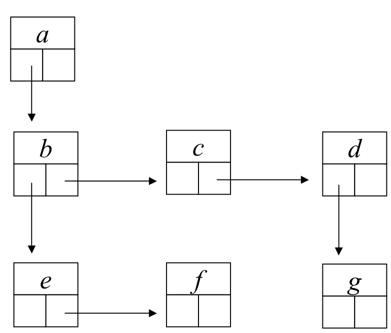




17

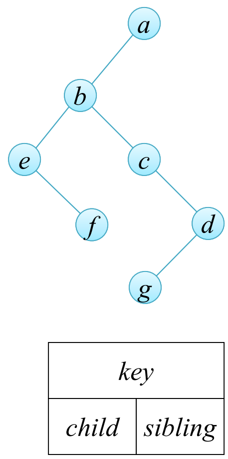
Codifica binaria di alberi *k*-ari

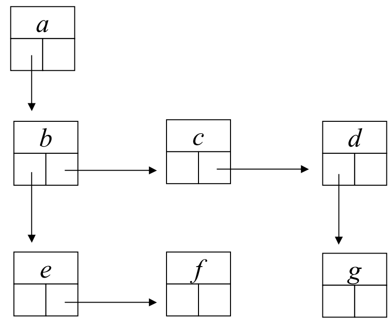




18

Codifica binaria di alberi *k*-ari





19

Cardinalità, alberi binari

La **cardinalità** di un albero è il numero dei suoi nodi.

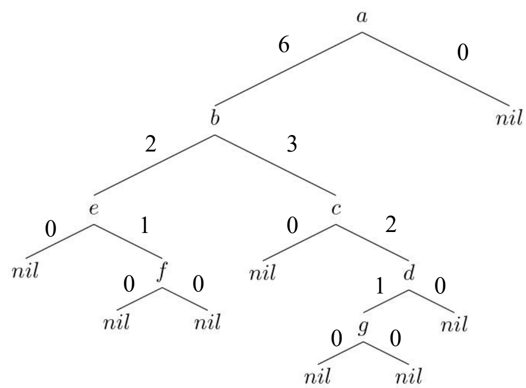
2-TREE-CARD(2-Tree T)
if $T = nil$ **then**
  return 0
else
  $l \leftarrow$ 2-TREE-CARD($T.left$)
  $r \leftarrow$ 2-TREE-CARD($T.right$)
  return $l + r + 1$
end if

20

Cardinalità, alberi binari

2-TREE-CARD(2-Tree T)
if $T = nil$ **then**
  return 0
else
  $l \leftarrow$ 2-TREE-CARD($T.left$)
  $r \leftarrow$ 2-TREE-CARD($T.right$)
  return $l + r + 1$
end if

Risultato finale: **7**



Cardinalità, alberi *k*-ari

La **cardinalità** di un albero è il numero dei suoi nodi.

k-TREE-CARD(k-Tree T)
if $T = nil$ **then**
  return 0
else
  $card \leftarrow 1$
  $C \leftarrow T.child$
  while $C \neq nil$ **do**
    $card \leftarrow card + k$-TREE-CARD(C)
    $C \leftarrow C.sibling$
  end while
  return $card$
end if

Visto che usiamo la rappresentazione binaria funzionerebbe anche l'algoritmo precedente sostituendo *left* con *child* e *right* con *sibling*.

Altezza, alberi binari

2-TREE-HIGHT(2-Tree T) $\triangleright$ pre: T non è vuoto

if $T.left = nil$ **and** $T.right = nil$ **then**
    return 0 $\triangleright$ T ha un solo nodo
else
    $hl, hr \leftarrow 0$
    if $T.left \neq nil$ **then**
        $hl \leftarrow$ 2-TREE-HIGHT($T.left$)
    end if
    if $T.right \neq nil$ **then**
        $hr \leftarrow$ 2-TREE-HIGHT($T.right$)
    end if
    return $1 + \max\{hl, hr\}$
end if

L'altezza è il massimo dei livelli, ossia il massimo delle lunghezze dei rami

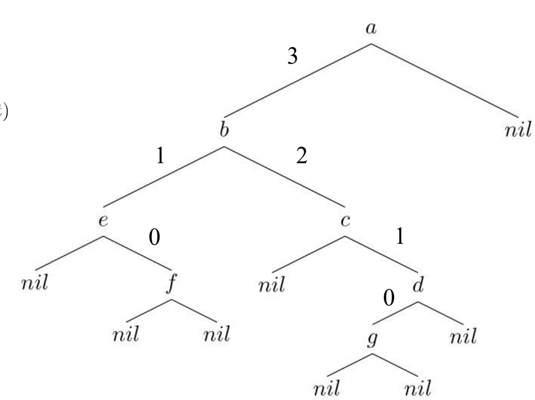
23

Altezza, alberi binari

2-TREE-HIGHT(2-Tree T) $\triangleright$ pre: T non è vuoto

if $T.left = nil$ **and** $T.right = nil$ **then**
    return 0 $\triangleright$ T ha un solo nodo
else
    $hl, hr \leftarrow 0$
    if $T.left \neq nil$ **then**
        $hl \leftarrow$ 2-TREE-HIGHT($T.left$)
    end if
    if $T.right \neq nil$ **then**
        $hr \leftarrow$ 2-TREE-HIGHT($T.right$)
    end if
    return $1 + \max\{hl, hr\}$
end if

Risultato finale: 4



24

Altezza, alberi *k*-ari

kTREE-HIGHT(T) ▷ pre: T non è vuoto
if $T.child = nil$ **then**
  return 0 ▷ T ha un solo nodo
else
  $h \leftarrow 0$
  $C \leftarrow T.child$
  while $C \neq nil$ **do**
    $h \leftarrow \max\{h, k\text{TREE-HIGHT}(C)\}$
    $C \leftarrow C.sibling$
  end while
  return $h + 1$
end if

L'altezza è il massimo dei livelli, ossia il massimo delle lunghezze dei rami

25

Visite

Qual è la complessità di questi algoritmi?

Per rispondere osserviamo che hanno tutti la struttura di una visita!

26

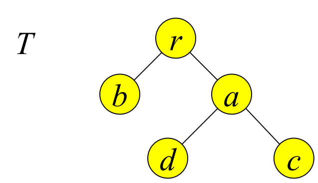
Visite

La ***visita*** (completa) di un albero consiste in un'ispezione dei nodi dell'albero in cui ciascun nodo sia "visitato" (ispezionato) esattamente una volta.

Visita in profondità (DFS): lungo i rami, dalla radice alle foglie
Visita in ampiezza (BFS): per livelli, da quello della radice in poi.

27

Varie visite DFS e BFS



DFS con preordine destro di T: r, a, c, d, b

DFS con preordine sinistro di T: r, b, a, d, c

BFS con livelli da sinistra a destra di T: r, b, a, d, c

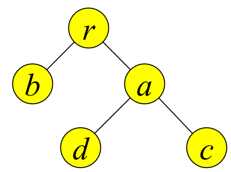
BFS con livelli da destra a sinistra di T: r, a, b, c, d

28

DFS (ricorsiva)

$\textsc{Tree-DFS}(k\text{-Tree } T)$
visita $T.key$
$C \leftarrow T.child$
while $C \neq nil$ **do**
  $\textsc{Tree-DFS}(C)$
  $C \leftarrow S.sibling$
end while

T



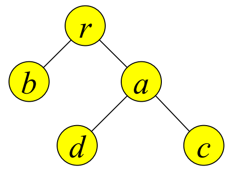
DFS con preordine sinistro di T: r, b, a, d, c

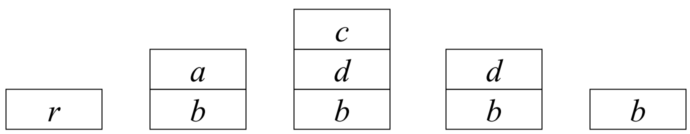
DFS con l'ausilio di una pila

$\textsc{Tree-DFS-Stack}(k\text{-Tree } T)$ $\triangleright$ pre: T non è vuoto
$S \leftarrow$ pila vuota
$Push(S, T)$
while $S \neq$ la pila vuota **do**
  $T' \leftarrow Pop(S)$
  visita $T'.key$
  for all C figlio di T' **do**
    $Push(S, C)$
  end for
end while

DFS con l'ausilio di una pila

T





DFS con preordine destro di T: r, a, c, d, b

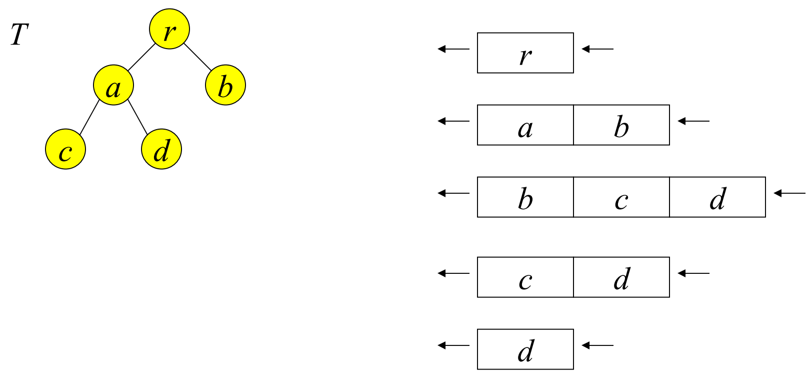
31

Visita in ampiezza (BFS)

Tree-BFS(k-Tree T) $\quad \triangleright$ pre: T non è vuoto
$Q \leftarrow$ coda vuota
$Enqueue(Q, T)$
while $Q \neq$ la coda vuota **do**
  $T' \leftarrow Dequeue(Q)$
  visita $T'.key$
  for all C figlio di T' **do**
    $Enqueue(Q, C)$
  end for
end while

32

BFS con l'ausilio di una coda



BFS con livelli da sinistra a destra di T: r, a, b, c, d

DFS versus BFS

TREE-DFS-STACK(k-Tree T)
$S \leftarrow$ pila vuota
$Push(S, T)$
while $S \neq$ la pila vuota **do**
  $T' \leftarrow Pop(S)$
  visita $T'.key$
  for all C figlio di T' **do**
    $Push(S, C)$
  end for
end while

TREE-BFS(k-Tree T)
$Q \leftarrow$ coda vuota
$Enqueue(Q, T)$
while $Q \neq$ la coda vuota **do**
  $T' \leftarrow Dequeue(Q)$
  visita $T'.key$
  for all C figlio di T' **do**
    $Enqueue(Q, C)$
  end for
end while

Complessità delle visite

- la dimensione n di un albero è la sua cardinalità
- per limitare il tempo possiamo contare quante operazioni Push/Pop ovvero Enqueue/Dequeue avvengono in una DFS o BFS
- ogni nodo dell'albero viene inserito ed estratto esattamente una volta
- dunque DFS e BFS hanno costo $O(2n) = O(n)$

35