INDIPENDENZA FRA EVENTI

COSTRUIRE PROB. SU SPAZI PRODOTTO

ES

UN DADO A 6 FACCE COSTRUITO IN MODO CHE OGNI FACCIA PARI SIA DOPPIAMENTE PROBABILE RISPETTO AD UNA FACCIA DISPARI. TUTTE LE FACCE PARI SONO EQUIPROB. E TUTTE LE FACCE DISPARI SONO EQUIPROBABILI. SI LANCI IL DADO 3 VOLTE E SI CALCOLA LA PROB. CHE LA SOMMA SIA INFERIORE A 6.

$$\Omega^1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$p = \mathbb{P}^1(\{1\}) = \mathbb{P}^1(\{3\}) = \mathbb{P}^1(\{5\})$$

$$2p = \mathbb{P}^1(\{2\}) = \mathbb{P}^1(\{4\}) = \mathbb{P}^1(\{6\})$$

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) + \mathbb{P}^1(\{2\}) + \mathbb{P}^1(\{3\}) + \mathbb{P}^1(\{4\}) + \mathbb{P}^1(\{5\}) + \mathbb{P}^1(\{6\})$$

$$= 1$$

sse

$$p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1$$

sse

$$9p = 1$$

sse

$$p = 1/9$$

$$\mathbb{P}^1(\{i\}) = 1/9 \quad , \quad i \in \{1,3,5\}$$

$$\mathbb{P}^1(\{i\}) = \frac{2}{9} \quad , \; i \in \{2,4,6\}$$

$$\Omega = \Omega^1 \times \Omega^1 \times \Omega^1 = \{ (i,j,k) \quad , \; i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\} \}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$$

TALE CHE

$$\mathbb{P}(\{(i,j,k)\}) = \mathbb{P}^1(\{i\}) \cdot \mathbb{P}^1(\{j\}) \cdot \mathbb{P}^1(\{k\})$$

A = "LA SOMMA DEI TRE LANCI < 6"

$$= \{ (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1) \}$$

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(\{(1,1,1)\})} + \mathbb{P}(\{(1,1,2)\}) + \dots + \mathbb{P}(\{(3,1,1)\})$$

$$= \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\}) + \mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}^1(\{2\})$$

$$+ \dots + \mathbb{P}^1(\{3\})\mathbb{P}^1(\{1\})\mathbb{P}(\{1\})$$

$$= \overbrace{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}}^{\left(\frac{1}{9}\right)^3} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{2}{9} + \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^3$$

INDIPENDENZA (DI COLLEZIONI DI EVENTI)

DEF: LA COLLEZIONE DI EVENTI $\left(A_i\right)_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, SI DICE COMPOSTA DA EVENTI "INDIPENDENTI DUE A DUE" SE

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right) \quad \forall i,j \,/\, i \neq j$$

OSS equiv. A

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_j\right)$$

DEF (MUTUA INDIPENDENZA)(INDIPENDENZA COLLETTIVA)

(ANCHE INDIPENDENZA)

LA COLLEZIONE $\left(A_i\right)_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, È UNA COLLEZIONE DI EVENTI (MUTUAMENTE) INDIPENDENTI SE

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}\left(A_i\right) \qquad \forall S$$

DOVE S È QUALUNQUE SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DEGLI INDICI $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

---

3 EVENTI A_1 A_2 A_3 $(n = 3)$

$\{1, 2, 3\}$ ← L'INSIEME DEGLI INDICI

$S = \{1,2\}$, $S = \{1,3\}$, $S = \{2,3\}$ ...

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ $\quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$ $\quad \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

$S = \{1\}$ $\quad S = \{2\}$ $\quad S = \{3\}$ $\quad S = \{1,2,3\}$

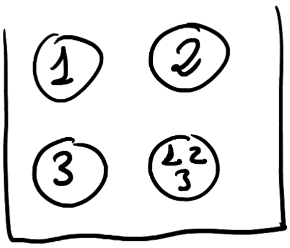
$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

OSS: SE $(A_i)_{i=1}^{n}$ COLL. DI EVENTI (MUTUAMENTE INDIP.)

$\Rightarrow$ $(A_i)_{i=1}^{n}$ SONO INDIP. DUE A DUE.

ES:



SCELGO A CASO UNA PALLINA

$A_1 =$ "ESTRAGGO IL N° 1"

$A_2 =$ "ESTRAGGO IL N° 2"

$A_3 =$ "ESTRAGGO IL N° 3"

$$(A_i)_{i=1}^{3} = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

STESSO RAGIONAMENTO PER LE ALTRE COPPIE.

QUINDI (A_1, A_2, A_3) SONO INDIPENDENTI DUE A DUE.

MA

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

ESERCIZIO

ESPERIMENTO:

- LANCIAMO UN DADO EQUO A SEI FACCE.
- SE ESCE 1 OPPURE 2 ESTRAIAMO CON REIMBUSSOLAMENTO TRE PALLINE DALLA SCATOLA S_1
- SE ESCE 3, 4, 5, 6 ESTRAIAMO 3 PALLINE CON REIMBUSSOLAMENTO DALLA SCATOLA S_2

S_1 È COMPOSTA DA 5 PALLINE VERDI E DUE NERE. S_2 È COMPOSTA DA 1 PALLINA VERDE E 3 NERE.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE 3 PALLINE VERDI.

CALCOLARE LA PROB DI ESTRARRE UNA PALLINA VERDE

ALLA PRIMA ESTRAZIONE.

CALCOLARE LA PROB. DI ESTRARRE UNA PALLINA VERDE ALLA SECONDA ESTRAZIONE.

SONO EVENTI INDIP?

A = "ESTRAGGO 3 PALLINE VERDI"

$$\Omega = \{ (d, e_1, e_2, e_3) \;,\; d \in \{1,2,3,4,5,6\} \;,\; e_i \in \{V, N\}, i = 1,2,3 \}$$

USO S_1

$$S_1 = \{ (d, e_1, e_2, e_3) \;,\; d \in \{1,2\} \;,\; e_i \in \{V, N\}, i = 1,2,3 \}$$

USO S_2

$$S_2 = \{ (d, e_1, e_2, e_3) \;,\; d \in \{3,4,5,6\} \;,\; e_i \in \{V, N\}, i = 1,2,3 \}$$

$$\Omega = S_1 \cup S_2 \qquad S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

(S_1, S_2) È UNA PARTIZIONE DI Ω.

USO LEGGE DELLE PROB. TOTALI:

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A|S_1)}\mathbb{P}(S_1) + \underbrace{\mathbb{P}(A|S_2)}\mathbb{P}(S_2)$$

$$\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{2}{6} + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{6} = 0{,}13189$$

4^a 0,1319

2^a 0,13

$A_1 =$ "VERDE ALLA PRIMA ESTRAZIONE"

$$\mathbb{P}(A_1) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 | S_1)}\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_1 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}^1(\{V\})\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}^1(\{\Omega^1\})}}\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}^1(\{\Omega^1\})}}$$

APPROX ALLA 4ª CIFRA DEC.

$$= 0{,}40476 = 0{,}4048$$

$A_2 =$ "VERDE ALLA SECONDA ESTRAZIONE"

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 | S_1)\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_2 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | S_1)}\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | S_2)\mathbb{P}(S_2)$$

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}$$

$$= 0{,}2117 \neq (0{,}4048)^2$$

A_1 e A_2 NON SONO INDIPENDENTI.

ES|| CHIEDIAMO AL NOSTRO VICINO DI ANNAFFIARE LE NOSTRE PIANTE MENTRE SIAMO IN VACANZA.

SENZA ACQUA MORIRANNO CON PROB. 0,8.

CON ACQUA MORIRANNO CON PROB. 0,15.

NOI SIAMO CERTI AL 90% CHE IL NOSTRO VICINO SI RICORDERÀ DI ANNAFFIARLE.

a) QUAL È LA PROB. CHE LE PIANTE SIANO VIVE AL NOSTRO RITORNO?

b) SE SONO MORTE, QUAL È LA PROB. CHE IL NOSTRO VICINO SI SIA DIMENTICATO DI ANNAFFIARLE?

W = "IL VICINO ANNAFFIA LE PIANTE"

W^c = "IL VICINO NON ANNAFFIA LE PIANTE"

M = "LE PIANTE MUOIONO"

M^c = "LE PIANTE NON MUOIONO"

$$\mathbb{P}(M \mid W^c) = 0{,}8$$

$$\mathbb{P}(M \mid W) = 0{,}15$$

$$\mathbb{P}(W) = 0{,}9$$

$$\mathbb{P}(M^c) = 1 - \mathbb{P}(M)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(M \mid W)\,\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(M \mid W^c)\,\mathbb{P}(W^c) \right]$$

$$= 1 - \left[0{,}15 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \right] = 0{,}785$$

$$\mathbb{P}(W^c \mid M) = \frac{\mathbb{P}(W^c, M)}{\mathbb{P}(M)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(M \mid W^c)\,\mathbb{P}(W^c)}{1 - \mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{1 - 0{,}785} = 0{,}3721$$