V.A. DISCRETE

V.A POISSON

ARRIVI ALEATORI

OCCORRENZA DI EVENTI NEL TEMPO

X = N° DI PERSONE ENTRATE AL TEMPO $t \in \mathbb{R}_+$ $\to$ DURANTE $(0, t] = F$ $\to$ FINESTRA DI OSSERVAZIONE

$\sim Po(\lambda)$

PROPRIETÀ SE $X \sim Po(\lambda)$ E CON FINESTRA DI OSSERVAZIONE F ALLORA LA V.A. Y CHE CONTA IL N° DI EVENTI NELLA FINESTRA DILATATA $K \cdot F$, $K \in \mathbb{R}_+$ $\to$ $k \cdot (0, t] = (0, kt]$

È ANCORA POISSON MA CON PARAMETRO $K \cdot \lambda$.

ESERCIZIO

UN GIORNALAIO VENDE IN UN'ORA UN N° DI GIORNALI CHE È DISTRIBUITO COME UNA V.A. DI POISSON DI PARAMETRO 0,5. CALCOLARE LA PROB. CHE VENDA PIÙ DI 3 GIORNALI IN DUE ORE.

$X \sim Po(0,5)$

X: CONTA IL N° DI GIORNALI VENDUTI IN 1 ORA

Y: CONTA IL N° DI GIORNALI VENDUTI IN 2 ORE.

COEFF. DI DILATAZIONE $K = 2$.

$$Y \sim Po(2 \cdot 0,5) = Po(1)$$

$$I_m(Y) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(Y > 3)$$

$$= \mathbb{P}(\{Y=4\} \cup \{Y=5\} \cup \dots)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=4}^{+\infty} \{Y=k\}\right) = \sum_{k=4}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\{Y>3\}^c) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(Y=3) + \mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=0)\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1^3}{3!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^0}{0!}e^{-1}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{e}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1\right] = \boxed{0,0189}8$$

MODO 2: (USO R)

PUNTO DELL'IMMAGINE

$$1 - \text{dpois}(3,1) - \text{dpois}(2,1) - \text{dpois}(1,1) - \text{dpois}(0,1)$$

PARAMETRO.

$$= 0{,}01898$$

MEDIA, VARIANZA, MOMENTI (DI V.A. DISCRETE)

STRUMENTI CHE RIASSUMONO L'INFORMAZIONE SULLA V.A. CONTENUTA NELLA PMF.

DEF (MEDIA)

CHIAMO MEDIA DELLA V.A. DISCRETA X LA QUANTITÀ:

VALORE ATTESO
ATTESA
VALOR MEDIO
SPERANZA MATEMATICA

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in I_m(X)} k \cdot p_X(k)$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$$

EXPECTATION

ES $X \sim Be(p)$, $p \in [0,1]$

$$I_m(X) = \{0,1\}$$

$$p_X(0) = (1-p)$$

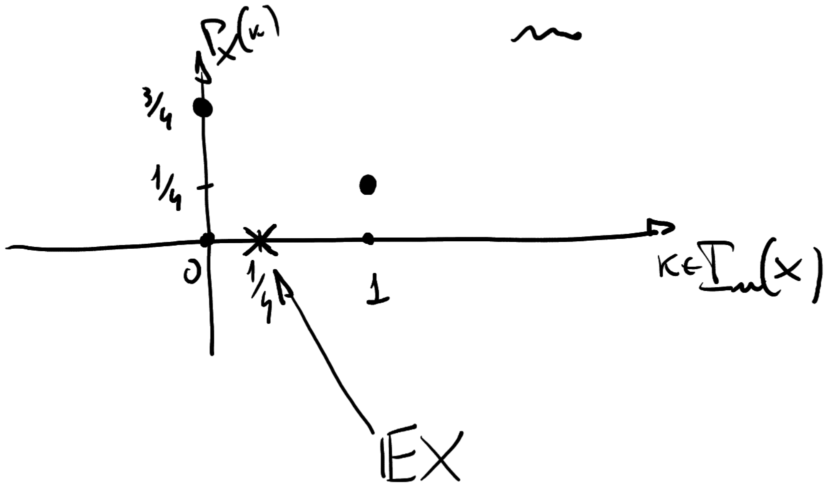
$$p_X(1) = p$$

$$\boxed{\mathbb{E}X} = \sum_{k \in \{0,1\}} k \cdot p^k (1-p)^{1-k} = \cancel{0 \cdot p^0 (1-p)^{1-0}} + 1 \cdot p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$= p$$

$p = \frac{1}{4}$

$(1-p) = \frac{3}{4}$



a_i	$P_X(a_i)$
a_1	p_1
a_2	p_2
a_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
a_n	p_n

$\Uparrow$

$I_m(X)$

GIRO LA RUOTA K VOLTE

(K ALTO)

ES: $a_1, a_{10}, a_3, a_{52}, a_1, \ldots$

HO OTTENUTO k_1 VOLTE a_1

$$\frac{a_1 \cdot k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \ldots + a_n \cdot k_n}{K}$$

$k_1 + \ldots + k_n = K$

MEDIA DEI VALORI

$$= a_1 \cdot \frac{K_1}{K} + a_2 \frac{K_2}{K} + a_3 \frac{K_3}{K} + \dots + a_n \frac{K_n}{K}$$

FREQUENZA RELATIVA

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$$\frac{K_i}{K} \xrightarrow[K \to +\infty]{} P_X(a_i)$$

SOSTITUISCO LE FREQUENZE RELATIVE ~~CON~~ CON LE PROB E OTTENGO

$$\underbrace{a_1 P_X(a_1) + a_2 P_X(a_2) + \dots + a_n P_X(a_n)}_{\mathbb{E}X}$$

DEF: (VARIANZA)

CHIAMO VARIANZA DELLA V.A. DISCRETA X LA QUANTITÀ:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\, X = \mathbb{E}\left[\underbrace{(X - \mathbb{E}X)}^{2}\right]$$

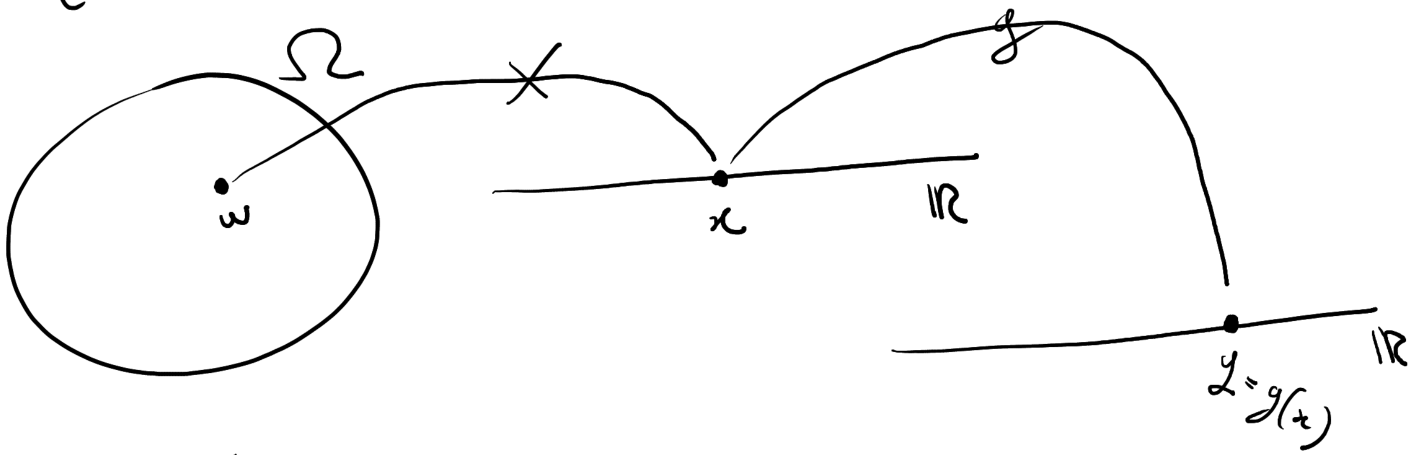
$$Y = X - c$$

$$\mathrm{Im}(Y) = \{-c,\ 1-c\}$$

$$\mathbb{P}(Y = -c) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

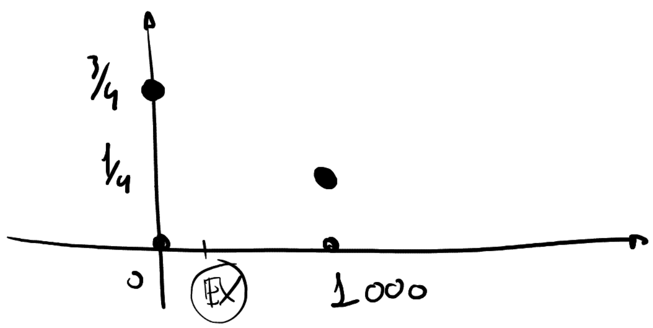
$$\mathbb{P}(Y = 1-c) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

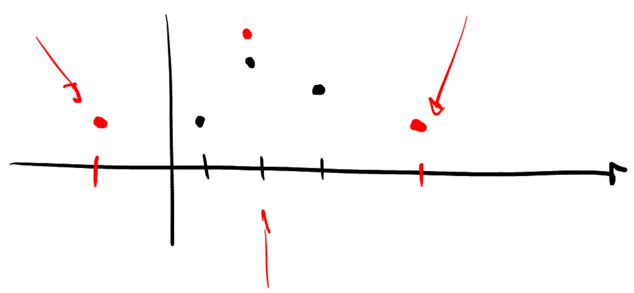
OSS $\mathbb{E}[g(X)]$ $\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



caso della varianza:

$$g(x) = \underbrace{\left(x - \mathbb{E}X\right)^2}_{\text{SCARTO QUADRATICO}}$$





$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{\left(X - \mathbb{E}X\right)^2}_{Z}\Big] = \sum_{k \in \mathrm{Im}(Z)} k\, p_Z(k)$$

TEOREMA: SE $Z = g(X)$

ALLORA

$$\mathbb{E}Z = \sum_{k \in I_m(X)} g(k)\, p_X(k)$$

USO IL TEOREMA E QUINDI

$$\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2\right] = \sum_{k \in I_m(X)} \underbrace{(k-\mathbb{E}X)^2}_{g(k)} p_X(k)$$

ESEMPIO:

$X \sim B_e(p)$ $\qquad I_m(X) = \{0,1\}$

$\mathbb{E}X = p$

$$\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2\right]$$

$$= \sum_{k \in \{0,1\}} (k-\mathbb{E}X)^2 p^k (1-p)^{1-k}$$

$$= (0-p)^2 p^0 (1-p)^{1-0} + (1-p)^2 p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$= p^2(1-p) + (1-p)^2 p$$

$$= p(1-p)\left[\cancel{p} + 1 - \cancel{p}\right] = p(1-p)$$

ATTN!:

$\mathbb{E}X$ E $\mathrm{Var}X$ NON HANNO LA STESSA UNITÀ DI MISURA.

INVECE

$$\mathrm{STDEV}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}X}$$

HA LA STESSA UNITÀ DI MISURA DI $\mathbb{E}X$

DEVIAZIONE STANDARD

MOMENTI

ALTRO TIPO DI FUNZIONE g:

$\mathbb{E}g(X)$

SCELGO $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

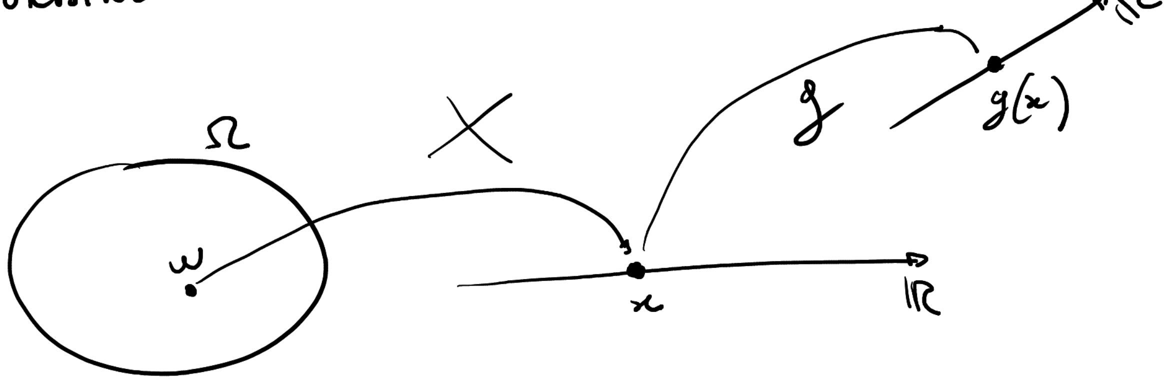
$k=1$ $\mathbb{E}X$

$k=2$ $\mathbb{E}X^2$

MOMENTO DI ORDINE K DELLA V.A. X:

$\mathbb{E}X^k$

DEF



SE DEFINISCO $Z = X^k$

$$= \mathbb{E}\, Z = \sum_{k \in I_m(Z)} k \cdot p_Z(k)$$

TEO

$$= \sum_{r \in I_m(X)} g(r)\, p_X(r) = \sum_{r \in I_m(X)} r^k\, p_X(r)$$