Notes sur le problème de retour au point L2

Olivier Cots

27 février 2018

On s'intéresse au problème suivant : rejoindre le point L_2 depuis une configuration donnée par la commande `propagate2Hill.m` en maximisant la masse finale. La commande `propagate2Hill.m` retourne la configuration initiale dont la position se trouve à une certaine distance (donnée comme paramètre) du barycentre Terre-Lune (noté EMB). On considère la masse initiale libre, le temps final libre et on introduit dans la dynamique la variation de la masse. L'état du système est $x = (q, m)$ avec (q_1, q_2, q_3), (q_4, q_5, q_6) et m les positions, vitesses et masse du spacecraft. Les coordonnées sont données dans le repère tournant et la dynamique est celle des 3 corps (Terre-Lune-Spacecraft) perturbés par le Soleil.

$$
(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} \min J(m_0, t_f, u(\cdot)) = -m(t_f) \\[1em] \dot{x}(t) = F_0(q(t)) + \dfrac{T_{\max}}{m(t)} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i(t)\, F_i(q(t)) + (-\beta T_{\max} |u(t)|)\, \dfrac{\partial}{\partial m}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0\,, t_f], \\[1em] x(0) = (q_0, m_0), \\[1em] q(t_f) = q_f = (x_{L_2}, 0, 0, 0, 0, 0), \end{cases}
$$

où $\beta = (I_{sp}\, g_0)^{-1}$ avec I_{sp} l'impulsion spécifique et g_0 la gravité à la surface de la Terre. On note :

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(q_1 + \mu)^2 + q_2^2 + q_3^2}, \\
r_2 &= \sqrt{(q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2 + q_3^2}, \\
\theta_S &= \theta_{S,0} + \omega_S\, t, \\
r_S &= \sqrt{(q_1 - \rho_S \cos(\theta_S))^2 + (q_2 - \rho_S \sin(\theta_S))^2 + q_3^2}, \\
\mu &= \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_E}, \quad \mu' = \frac{\mu_S}{\mu_M + \mu_E},
\end{aligned}
$$

où $\rho_S(\cos\theta_{S,0}, \sin\theta_{S,0}, 0)$ est la position du Soleil dans le repère tournant à l'instant initial $t = 0$, ω_S est la vitesse de rotation du Soleil et μ_M, μ_E et μ_S sont les constantes gravitationnelles respectivement de la Lune, la Terre et le Soleil. Les champs de vecteurs sont alors donnés par :

$$
\begin{aligned}
F_0(q) = & q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_4 \frac{\partial}{\partial q_2} + q_5 \frac{\partial}{\partial q_3} + \\
& \left(2q_5 + q_1 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{r_2^3} - \mu' \frac{q_1 - \rho_S \cos\theta_S}{r_S^3} - \mu' \frac{\cos\theta_S}{\rho_S^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_4} + \\
& \left(-2q_4 + q_2 - (1 - \mu) \frac{q_2}{r_1^3} - \mu \frac{q_2}{r_2^3} - \mu' \frac{q_2 - \rho_S \sin\theta_S}{r_S^3} - \mu' \frac{\sin\theta_S}{\rho_S^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_5} + \\
& \left(-(1 - \mu) \frac{q_3}{r_1^3} - \mu \frac{q_3}{r_2^3} - \mu' \frac{q_3}{r_S^3} \right) \frac{\partial}{\partial q_6},
\end{aligned}
$$

Paramètres			
x_{L_2}		1.155681950839609	LD
$T_{\max}$	50 N	$50 \times 10^{-3} \times \alpha^2/384400 = 18366.18111740180$	kg LD UT^{-2}
I_{sp}	375 s	$375/\alpha = 0.0009979646294757921$	UT
g_0	9.80665 m s^{-2}	$9.80665 \times 10^{-3} \times \alpha^2/384400 = 3602.214201099366$	LD UT^{-2}
μ		0.012150529811497	
μ'		328900.5726315398	
ρ_S		389.1724003642039	LD
ω_S		-0.921184149932464	rad UT^{-1}

TABLE 1 – 1 LD = 384400 km et 1 UT = $2.361 \times 10^6/2\pi$ s = α s. Le paramètre $\theta_{S,0}$ est donné par la fonction `Helio2CR3BP.m`.

et

$$F_i = \frac{\partial}{\partial q_{3+i}}, \quad i = 1:3,$$

et les valeurs des paramètres sont données par la table 1. On pourra s'intéresser au problème plus simple suivant :

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases} \min J(t_f, u(\cdot)) = \displaystyle\int_0^{t_f} |u(t)| \, \mathrm{d}t \\ \dot{q}(t) = F_0(q(t)) + \dfrac{T_{\max}}{m_0} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i(t) \, F_i(q(t)), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0\,, t_f], \\ q(0) = q_0, \\ q(t_f) = q_f = (x_{L_2}, 0, 0, 0, 0, 0), \end{cases}$$

où la masse initiale m_0 est fixée et on considère la masse constante.