Equações Diferenciais Ordinárias

ISIG 2002

Eng. de Sistemas Decisionais

Eng. de Informática

Vasco A. Simões

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

Muitos problemas reais envolvem derivadas. Uma equação onde figurem derivadas é chamada Equação Diferencial. Se nela figuram Derivadas Parciais é chamada Equação Diferencial Parcial, caso contrário diz-se Equação Diferencial Ordinária.

Neste capítulo vamos estudar alguns métodos para a resolução de muitas equações diferenciais ordinárias que ocorrem em variadíssimos problemas reais. Vejamos alguns exemplos:

A segunda lei de Newton para partículas de massa constante tem a forma vectorial

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se escrevermos a aceleração na forma $\frac{d\vec{v}}{dt}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade, ou na forma $\frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2}$ onde $\vec{r}$ é o vector de posição, obtemos uma equação diferencial (ou um conjunto de equações diferenciais, uma para cada componente do vector).

A taxa à qual o calor Q escapa através de uma janela é proporcional à área e à taxa de variação da temperatura T com a distância na direcção do fluxo de calor. Temos então

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{dT}{dx}$$

(k é chamada condutividade térmica e depende do material).

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada que nela figura. Assim, as equações

$$y' + xy^2 = 1$$

$$xy' + y = e^x$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

são equações de primeira ordem, e

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr$$

é de segunda ordem.

A solução de uma equação diferencial (com variáveis x e y) é a relação entre essas variáveis que, substituída na equação, a transforma numa identidade.

Por exemplo, a relação $y = \sin x + 3$ é solução da equação diferencial $y' = \cos x$, uma vez que se substituirmos a primeira relação na equação obtemos a identidade $\cos x = \cos x$.

Repare-se no entanto que $y = \sin x + 123$ ou $y = \sin x - 42$ são também solução da equação diferencial proposta, isto é, em geral, a solução de uma equação diferencial não é única.

EXERCÍCIO

Verifique se $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = Ae^x + Be^{-x}$ são ou não soluções da equação diferencial

$$y' = y$$

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem envolvem a função $y(x)$, a variável x e a primeira derivada $y'(x)$, são pois equações do tipo:

$$f\,(\,x, y, y'\,) = 0$$

Este tipo de equações dividem-se em dois grandes grupos, a saber;

- Equações resolvidas, se é possível explicitar y' em função de x e de y

Por exemplo: $3\,x\,y' + 3\,y = x^3$ que se pode escrever na forma

$$y' = \frac{x^2}{3} - \frac{y}{x}$$

- Equações não resolvidas, se tal não é possível, como por exemplo no caso

$$y'^2 + x^2\,e^{y'} = x\,y$$

Comecemos por estudar o caso das equações resolvidas, que se podem portanto escrever na forma

$$y' = f(x, y)$$

e tentemos tirar algumas conclusões a partir do problema invertido, isto é, como aparece uma equação diferencial.

Considere-se uma equação em x e y, $g(x, y) = 0$.

(a) Podemos diferenciar esta equação:

$$dg = 0$$

e obtêm-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0$$

Chamemos $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ respectivamente ás derivadas $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$, então, a equação diferencial terá a forma

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

(b) Podemos derivá-la em ordem a x e obter

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x, y(x))\right] = 0$$

isto é:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \textbf{(1.2)}$$

e as equações obtidas em (a) e em (b) são idênticas, são a equação diferencial ordinária de primeira ordem correspondente à equação inicial $g(x, y) = 0$.

EXEMPLO

A partir da equação $x^2 y^3 + 3 y e^x = 5$ obtém-se por diferenciação

$$(2xy^3 + 3y e^x)\, dx + (3x^2 y^2 + 3 e^x)\, dy = 0$$

ou, por derivação em ordem a *x*:

$$(2xy^3 + 3y e^x) + (3x^2 y^2 + 3 e^x) \frac{dy}{dx} = 0$$

O problema que nos propomos resolver é o de encontrar a equação inicial $g(x, y) = 0$, dadas qualquer uma das equações **(1.1)** ou **(1.2)**.

2.1. Equações diferenciais de variáveis separáveis

Sempre que se avalia o integral $y = \int f(x)\, dx$ está-se a resolver a equação diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$$

trata-se de um exemplo simples de uma equação que se pode escrever

$$dy = f(x)\, dx$$

onde em cada membro apenas figuram termos com uma só das variáveis *x* ou *y*. Sempre que podemos separar as variáveis numa equação diferencial, dizemos que a equação é separável e obtém-se a solução por integração dos dois membros da equação separada.

EXEMPLO

A taxa à qual uma substância radioactiva decai é proporcional ao número de átomos dessa substância que restam depois do decaimento. Se tivermos inicialmente N_0 átomos (no instante $t = 0$), quantos átomos teremos num instante qualquer posterior t ?

A equação diferencial é $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ onde λ é apenas uma constante de proporcionalidade. Esta equação é separável, com efeito podemos escrevê-la

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

e, integrando ambos os membros obtém-se

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt$$

$$\log N = -\lambda t + C$$

que é a solução geral da equação. Agora, é obvio que esta solução deve depender do número N_0 de átomos de que dispúnhamos à partida. Como, para $t = 0$ é $N = N_0$, a solução fica

$$\log N_0 = -\lambda \times 0 + C = C$$

e temos assim determinada a constante C a partir das condições particulares do problema em questão

$$C = \log N_0$$

obtemos então uma solução particular da equação substituindo C na solução geral:

$$\log N = -\lambda t + \log N_0$$

ou seja

$$\log \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

ou ainda

$$N = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

EXEMPLO

Considere-se a equação $x\,y' = y + 1$.

Podemos escrevê-la $\dfrac{y'}{y+1} = \dfrac{1}{x}$ e ficou assim separada. Integrando ambos os membros fica:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log(y+1) = \log x + C$$

que é a solução geral procurada. Esta solução geral é uma família de curvas planas. Se chamarmos à constante $C = \log A$ podemos simplificar a solução obtida:

$$\log(y+1) = \log x + \log A = \log(A\,x)$$

e a solução geral também se pode escrever

$$y + 1 = A\,x \quad \text{ou} \quad y = A\,x - 1$$

que é a família de rectas que passam pelo ponto (0, -1).

Neste mesmo caso, encontrar uma solução particular significa pois seleccionar uma destas rectas o que se consegue estabelecendo um valor fixo para a constante A, o declive das rectas[1].

EXERCÍCIOS (resolvidos)

Determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais seguintes, e para cada uma delas seleccione a solução particular que satisfaz a condição dada.

(a) $x\,y' = x$, com $y(2) = 3$

Resposta:

$x\,y' = x \;\Rightarrow\; y' = 1$, portanto $y = x + C$ (ou $dy = dx \Rightarrow \int dy = \int dx \Rightarrow y = x + C$)

Solução geral: $y = x + C$

Para obter a solução particular, devemos seleccionar de entre as soluções em geral, aquela que verifica a condição $y(2) = 3$, isto é, aquela que passa no ponto (2, 3):

$$3 = 2 + C \;\Rightarrow\; C = 1$$

e a solução particular procurada será:

$$y = x + 1$$

(b) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ com $y = \frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{2}$

Resposta:

A equação é separável: $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Integrando ambos os membros:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} \;\Rightarrow\; -\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} + C$$ que é a solução geral.

Quanto à solução particular, tem-se

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} = C$$

e a solução particular será

$$-\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} - \sqrt{3}$$

ou: $$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = \sqrt{3}$$

[1] Veja Apêndice 1 – Soluções Singulares

(c) $y' \sin x = y \log y$ com $y(\pi/3) = e$

Resposta:

A equação pode escrever-se

$$\frac{dy}{y \log y} = \operatorname{cosec} x \, dx \quad \Rightarrow \quad \log \log y = \log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) + C$$

ou:

$$\log \log y = \log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) + \log A$$

$$\log \log y = \log (A \operatorname{cosec} x - A \operatorname{cotg} x)$$

$$\log y = A \operatorname{cosec} x - A \operatorname{cotg} x$$

Usando agora a condição $y(\pi/3) = e$ obtém-se $A = \sqrt{3}$ e a solução particular será

$$\log y = \sqrt{3} \operatorname{cosec} x - \sqrt{3} \operatorname{cotg} x$$

EXERCÍCIOS (propostos)

(a) $(1 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$ com $y(5) = 0$

R: $x\sqrt{1 + y^2} = C$ com $C = 5$

(b) $x y' - xy = y$ com $y(1) = 1$

R: $\log y = \log x + x + C$ com $C = -1$

(c) $y' = \dfrac{2xy^2 + x}{x^2 y - y}$ com $y(\sqrt{2}) = 0$

R: $2y^2 + 1 = C(x^2 - 1)^2$ com $C = 1$

(d) $y\, dy + (xy^2 - 8x)\, dx = 0$ com $y(1) = 3$

R: $y^2 - 8 = Ce^{-x^2}$ com $C = e$

(e) $y' + 2xy^2 = 0$ com $y = 1$ se $x = 2$

R: $-\dfrac{1}{y} + x^2 = C$ com $C = 3$

(f) $(1 + y)\, y' = y$ com $y(1) = 1$

R: $y e^y = C e^x$ com $C = 1$

(g) $\cos x \cos y\, dx = \sin x \sin y\, dy$ com $y(\pi/2) = \pi$

R: $\sin x \cos y = C$ com $C = -1$

2.2. Equações diferenciais exactas

Se a equação diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = 0$ foi obtida diferenciando uma equação $F(x,y) = 0$, isto é, se

$$dF = P\,dx + Q\,dy$$

a equação diz-se *diferencial exacta*.

Neste caso, a partir de $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = 0$ pode escrever-se imediatamente

$$d\,F = 0$$

e a solução fica, imediatamente:

$$F = C\,.$$

O problema consiste então em determinar a função $F(x,y)$.

Antes de passarmos à determinação de F, vejamos como é possível identificar se uma equação diferencial é ou não é diferencial exacta.

Se $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = 0$ é diferencial exacta, então existe a função $F(x,y)$ tal que o seu diferencial $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$, e deve-se então ter

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

então, se P e Q forem funções continuas e deriváveis com derivadas parciais continuas em certo domínio deverá também ter-se que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e portanto a equação será diferencial exacta se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

EXEMPLO

(a) Considere-se a equação $(4xy - y - 1)\,dx + (2x^2 - x)\,dy = 0$

Tem-se $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e portanto trata-se de uma equação diferencial exacta.

(b) Considere-se a equação $2xy^2 dx - xy\,dy = 0$

Neste caso $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy \neq -y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e portanto a equação não é diferencial exacta.

Vejamos então como determinar a função F e consequentemente a solução $F = C$ da equação.

A equação diferencial exacta pode escrever-se

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

temos portanto $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. Se integrarmos a primeira equação em ordem a x , obtém-se

$$F_1 = \int P(x,y)\,dx$$

esta primitiva resultará certamente numa função de *x* e *y*, a que chamaremos $\Lambda_1(x,y)$ mais uma função exclusivamente de *y*, que funciona como constante de integração. A função $\Lambda_1(x,y)$, por sua vez, só poderá ser a soma de uma função com termos onde figuram *x* e *y* simultaneamente, e uma função exclusivamente de x :

$$F_1 = \Lambda_1(x,y) + C_1(y) = \alpha_1(x,y) + \beta_1(x) + C_1(y) \qquad \textbf{(1.3)}$$

De igual forma, obtemos simultaneamente que

$$F_2 = \int Q(x,y)\,dy$$

ou seja:

$$F_2 = \Lambda_2(x,y) + C_2(x) = \alpha_2(x,y) + \beta_2(y) + C_2(x) \qquad \textbf{(1.4)}$$

Mas, como F_1 e F_2 tem que ser a mesma função, deve ter-se:

i. $\alpha_1(x,y) = \alpha_2(x,y) \; = \alpha(x,y)$

ii. $\beta_1(x) = C_2(x)$

iii. $C_1(y) = \beta_2(y)$

e conclui-se pois que:

$$F = F_1 = \alpha(x,y) + \beta_1(x) + \beta_2(y)$$

a partir de **(1.3)** , ou, o que é o mesmo:

$$F = F_2 = \alpha(x,y) + \beta_2(y) + \beta_1(x)$$

a solução procurada será pois

$$\alpha\;(x,y) + \beta_1(x) + \beta_2(y) = C$$

EXEMPLO

Considere-se a equação $(3x^2 + 20x^3y^2)\,dx + (10x^4y - 1)\,dy = 0$

É fácil ver que se trata de uma equação diferencial exacta, temos então:

$$F_1 = \int (3x^2 + 20x^3y^2)\,dx = 5x^4y^2 + x^3 + C_1(y)$$

e:
$$F_2 = \int (10x^4y - 1)\,dy = 5x^4y^2 - y + C_2(x)$$

onde se identificam facilmente as funções $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha(x, y)$, $\beta_1(x) = x^3$ e $\beta_2(y) = -y$.

Devemos então ter $\beta_2 = C_1$ e $\beta_1 = C_2$, portanto a função F será:

$$F(x, y) = 5x^4y^2 + x^3 - y$$

e a solução procurada é:
$$5x^4y^2 + x^3 - y = C$$

EXERCÍCIOS (resolvidos)

(a) Considere-se a equação $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$

Tem-se $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1$, portanto é diferencial exacta.

$$F_1 = \int (x + y)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy + C_1(y)$$

$$F_2 = \int (x - y)\,dy = xy - \frac{y^2}{2} + C_2(x)$$

então: $F = xy + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}$ e a solução procurada será:

$$xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$$

ou:
$$2xy + x^2 - y^2 = C$$

(repare-se que, como não podia deixar de ser, na função F, o termo em que figuram simultaneamente x e y é igual em F_1 e em F_2)

(b) $(3x^2y^2 + y\,e^{xy})\,dx + (2x^3y + x\,e^{xy})\,dy = 0$ é diferencial exacta (verifique), então

$F_1 = \int (3x^2 y^2 + y e^{xy})\, dx = x^3 y^2 + e^{xy} + C_1(y)$

$F_2 = \int (2x^3 y + x e^{xy}) dy = x^3 y^2 + e^{xy} + C_2(x)$

neste caso, para que se trate da mesma função, devem ser nulos os termos C_1 e C_2, portanto a solução será

$$x^3 y^2 + e^{xy} = C$$

(c) $(y e^{y^2} - 2x)\, dx + (3y^2 + x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2})\, dy = 0$ é diferencial exacta (verifique)

$F_1 = \int (y e^{y^2} - 2x)\, dx = xy e^{y^2} - x^2 + C_1(y)$

$F_2 = \int (3y^2 + x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2})\, dy$ o calculo deste integral pode simplificar-se muito se atendermos a que o termo onde figuram simultaneamente x e y é forçosamente igual ao de F_1. Com efeito:

$F_2 = \int (3y^2 + x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2})\, dy = \int (x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2})\, dy + \int 3\, y^2\, dy$

o primeiro integral é, forçosamente $xy e^{y^2}$, o termo de F_1 em que figuram x e y. Resta apenas calcular o segundo integral e obtém-se:

$$F_2 = xy e^{y^2} + y^3 + C_2(x)$$

e a solução será: $xy e^{y^2} + y^3 - x^2 = C$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $(x + y)\, dx + (y + x + 1)\, dy = 0$ R: $2xy + x^2 + y^2 + 2y = C$

(b) $(2x e^{3y} + e^x)\, dx + (3x^2 e^{3y} - y^2)\, dy = 0$ R: $x^2 e^{3y} + e^x - \frac{y^3}{3} = C$

(c) $(\cos x \cos y + \sin^2 x)\, dx - (\sin x \sin y + \cos^2 y)\, dy = 0$

R: $4 \sin x \cos y + 2x - 2y - \sin 2x - \sin 2y = C$

(d) $(y \sec^2 x + 2xy + 1)\, dx + (\operatorname{tg} x + x^2)\, dy = 0$ R: $y \operatorname{tg} x + x^2 y + x = C$

(e) $(3x^2 + \frac{1}{x^2} + 2xy^2 + \frac{2x}{y^2})\, dx + (3y^2 + \frac{1}{y^2} + 2x^2 y - \frac{2x^2}{y^3})\, dy = 0$

R: $x^2 y^2 + x^3 + y^3 + \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C$

2.3. Factor Integrante

Considere-se a equação diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, tal que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, isto é, não se trata de uma equação diferencial exacta.

Suponhamos que a equação é tal que é possível encontrar uma função $\lambda(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\,(P\lambda)}{\partial\, y} = \frac{\partial(Q\,\lambda)}{\partial\, x}$$

isso significa que a equação $P\,\lambda\; dx + Q\,\lambda\, dy = 0$ é diferencial exacta, e esta nova equação já sabemos como resolver.

À função $\lambda(x,y)$ que multiplicada por ambos os membros da equação diferencial inicial a transforma numa equação diferencial exacta chama-se Factor Integrante.

EXEMPLO

Seja $(3xy^2 + 2y^5)\,dx + (2x^2 y + 5xy^4)\,dy = 0$.

É fácil ver que não se trata de uma equação diferencial exacta pois que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy + 10y^4 \quad \neq \quad 4xy + 5y^4 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

mas, multiplicando a equação por x obtém-se

$$(3x^2 y^2 + 2xy^5)\,dx + (2x^3 y + 5x^2 y^4)\,dy = 0$$

onde:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 y + 10\,xy^4 \quad = \quad 6x^2 y + 10\,xy^4 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

isto significa que a equação inicial admite a função $\lambda(x,y) = x$ como factor integrante, e teremos

$$F_1 = \int (3x^2 y^2 + 2xy^5)\,dx = x^3 y^2 + x^2 y^5 + C_1(y)$$

$$F_2 = x^3 y^2 + x^2 y^5 + C_2(x)$$

e a solução será:

$$x^3 y^2 + x^2 y^5 = C$$

Vejamos se é possível determinar o factor integrante para uma dada equação diferencial.

Suponhamos que a equação $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ admite um factor integrante $\lambda(x,y)$, então

$$P\lambda\ dx + Q\lambda\, dy = 0$$

é diferencial exacta, isto é:

$$\frac{\partial\,(P\lambda)}{\partial\, y} = \frac{\partial(Q\lambda)}{\partial\, x}$$

$$\frac{\partial\, P}{\partial\, y}\lambda + P\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial\, x}\lambda + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Esta equação, no caso geral, é bastante complicada de resolver por forma a obter λ.

Deixemos pois de lado o caso geral e vamos estudar apenas os dois casos particulares seguintes:

i. λ é apenas função de x

ii. λ é apenas função de y

No primeiro caso temos $\lambda \equiv \lambda(x)$, portanto em (1.5) tem-se $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$ pelo que a equação fica

$$\frac{\partial\, P}{\partial\, y}\lambda = \frac{\partial Q}{\partial\, x}\lambda + Q\frac{d\,\lambda}{d\,x}$$

e esta equação já é de fácil resolução:

$$\lambda\left(\frac{\partial\, P}{\partial\, y} - \frac{\partial Q}{\partial\, x}\right) = Q\frac{d\,\lambda}{d\,x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial\, P}{\partial\, y} - \dfrac{\partial Q}{\partial\, x}}{Q}\,dx = \frac{d\,\lambda}{\lambda}$$

e integrando ambos os membros fica:

$$\log\lambda = \int \frac{\dfrac{\partial\, P}{\partial\, y} - \dfrac{\partial Q}{\partial\, x}}{Q}\,dx$$

ou seja,

$$\lambda\ (x) = e^{\int \frac{\frac{\partial\, P}{\partial\, y} - \frac{\partial Q}{\partial\, x}}{Q}\,d\,x}$$

que é o factor integrante.

É fácil ver que no caso de λ ser apenas função de y, um raciocínio em tudo semelhante a este conduz a um factor integrante da forma:

$$\lambda\,(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}\,dy}$$

Repare-se que num e noutro caso partimos da hipótese de que o factor integrante seria uma função exclusiva de x ou de y, no entanto é fácil ver a partir da equação diferencial inicial se temos um destes casos ou não, e em caso afirmativo qual deles.

Se $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ for função só de x, então $\lambda \equiv \lambda(x)$

Se $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ for função só de y, então $\lambda \equiv \lambda(y)$

EXEMPLO

Voltemos á equação do exemplo anterior $(3xy^2 + 2y^5)\,dx + (2x^2 y + 5xy^4)\,dy = 0$

Tem-se $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{6xy + 10y^4 - 4xy - 5y^4}{2x^2 y + 5xy^4} = \frac{1}{x},$$

portanto existe um factor integrante que é função exclusiva de x.

O factor integrante será:

$$\lambda\,(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\log x} = x$$

que foi a função utilizada para transformar a equação em diferencial exacta.

EXERCÍCIOS (resolvidos)

(a) Resolver a equação $y\,dx + (y - x)\,dy = 0$

Tem-se $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, portanto não é Diferencial Exacta.

Vejamos se admite factor integrante função só de x:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2}{y - x}$$ não é função exclusiva de x.

Vejamos então se admite factor integrante função só de y:

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\frac{2}{y}$$ é função exclusivamente de y, portanto a equação admite factor integrante

$$\lambda(y)=e^{-\int\frac{2dy}{y}}=e^{-2\log y}=e^{\log y^{-2}}=e^{\log\frac{1}{y^2}}=\frac{1}{y^2}$$

multiplicando a equação por este factor integrante obtém-se

$$\frac{dx}{y}+\frac{y-x}{y^2}dy=0$$ que é diferencial exacta, então

$$F_1=\int\frac{dx}{y}=\frac{x}{y}+C_1(y)\quad,\qquad F_2=\int\frac{y-x}{y^2}dy=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{x\,dy}{y^2}=\frac{x}{y}+\log y+C_2(x)$$

e a solução será:

$$\frac{x}{y}+\log y=C$$

(b) Resolver a equação $(2+\dfrac{6x}{y})\,dx-(\dfrac{x}{y}+\dfrac{4x^2}{y^2})\,dy=0$ sabendo que admite factor integrante função de y/x, ou seja $\lambda(x,y)\equiv\varphi(y/x)$.

Se φ é factor integrante, então $\dfrac{\partial(P\varphi)}{\partial y}=\dfrac{\partial(Q\varphi)}{\partial x}$, ou seja

$$\frac{\partial P}{\partial y}\varphi+P\varphi'\frac{1}{x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\varphi-Q\varphi'\frac{y}{x^2}$$

$$-\frac{6x}{y^2}\varphi+\left(2+\frac{6x}{y}\right)\varphi'\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{y}+\frac{8x}{y^2}\right)\varphi-\left(\frac{-x}{y}-\frac{4x^2}{y^2}\right)\varphi'\frac{y}{x^2}$$

$$\left(\frac{2x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)\varphi=\left(-\frac{2}{y}-\frac{1}{x}\right)\varphi'$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\xi}\qquad\text{com}\qquad\xi=\frac{y}{x}$$

integrando ambos os membros em ordem á variável ξ obtém-se

$$\log\varphi=-\int\frac{d\xi}{\xi}=-\log\xi\qquad\Rightarrow\qquad\varphi=\frac{1}{\xi}=\frac{x}{y}$$

Conhecido o factor integrante tem-se a equação diferencial exacta

$$\left(\frac{2x}{y}+\frac{6x^2}{y^2}\right)dx-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{4x^3}{y^3}\right)dy=0$$

que se resolve facilmente para dar a solução:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{2x^3}{y^2} = C$$

O problema colocado no exercício anterior é bastante comum pelo que merece uma resolução teórica mais geral.

Consideremos então que a equação diferencial $P\,dx + Q\,dy = 0$ admite um factor integrante função de $\alpha(x,y)$, isto é: $\lambda = \varphi(\alpha(x,y))$. Então, a equação $P\varphi\,dx + Q\varphi\,dy = 0$ é diferencial exacta e tem-se sucessivamente:

$$\frac{\partial(P\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\varphi)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\varphi + P\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\varphi + Q\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\varphi + P\,\varphi'\alpha'_y = \frac{\partial Q}{\partial x}\varphi + Q\,\varphi'\alpha'_x$$

$$(P\alpha'_y - Q\alpha'_x)\,\varphi' = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\varphi$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\alpha'_y - Q\alpha'_x}$$

e o factor integrante fica: $$\lambda = \varphi = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\alpha'_y - Q\alpha'_x}\,d\alpha}$$

EXERCÍCIO (resolvido)

Resolva a equação $4xy\,dx + (x^2 + 3y)\,dy = 0$ sabendo que admite um factor integrante função de $x^2 + y$.

Tem-se $P = 4xy,\quad Q = x^2 + 3y,\quad \alpha = x^2 + y \;\Rightarrow\; \alpha'_x = 2x \;\wedge\; \alpha'_y = 1$

Então o factor integrante será:

$$\lambda = e^{\int \frac{2x-4x}{4xy-(x^2+3y)2x}d\alpha} = e^{\int \frac{d\alpha}{y+x^2}} = e^{\int \frac{d\alpha}{\alpha}} = \alpha = x^2 + y$$

Então:

$(4x^3y + 4xy^2)\,dx + (x^4 + 4x^2y + 3y^2)\,dy = 0$ é diferencial exacta e:

$$F_1 = \int (4x^3y + 4xy^2)\,dx = x^4y + 2x^2y^2 + C_1(y)$$

$$F_2 = x^4y + 2x^2y^2 + 3\int y^2 dy = x^4y + 2x^2y^2 + y^3 + C_2(x)$$

e a solução será:

$$x^4y + 2x^2y^2 + y^3 = C.$$

EXERCÍCIO

Resolva a equação do exercício anterior procurando um factor integrante função exclusiva de *x* ou de *y*.

R: $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ e a solução é: $x^2\sqrt{y} + y\sqrt{y} = C$

(note-se que , quadrando a equação, obtemos a solução anterior)

Os dois exercícios anteriores mostram que em geral, uma equação diferencial pode admitir diversos factores integrantes.

EXERCÍCIOS (propostos)

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y^2\,dx - (2xy + 3)\,dy = 0$ R: $xy + 1 = C\,y^3$

(b) $(y + xy + 2y^2)\,dx + (x + 4y)\,dy = 0$ R: $xy + 2y^2 = C\,e^{-x}$

(c) $x^2y' + 2xy\log y = 0$ com $y(1) = 2$ R: $x^2\log y = \log 2$

2. Determine k sabendo que $\lambda = \dfrac{y^k}{x}$ é factor integrante da equação

$$y\,dx + (xy^2 - x\log x)\,dy = 0$$

e, de seguida, resolva-a para $y(1) = 2$.

R: $k = -2$, $y + \dfrac{\log x}{y} = C$ com $C = 2$

2.4. Equações Lineares

Uma equação diferencial de primeira ordem linear é uma equação da forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

Trata-se de um caso particular de equação que admite factor integrante função exclusiva de x, e por ser tão frequente é muito útil resolvê-la em particular.

A equação linear pode escrever-se

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

$$dy + P(x)\,y\,dx = Q(x)\,dx$$

$$\left[P(x)\,y - Q(x)\right]dx + dy = 0$$

portanto temos a equação:

$$\Pi(x,y)\,dx + \mathrm{K}(x,y)\,dy = 0$$

com $\quad \Pi(x,y) = P\,y - Q, \quad \mathrm{K}(x,y) = 1\,.$

Então $\dfrac{\dfrac{\partial \Pi}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}}{\mathrm{K}} = \dfrac{P-0}{1} = P(x)$ é função exclusiva de x, e o factor integrante será:

$$\lambda(x) = e^{\int P\,dx}$$

e obtemos assim uma equação diferencial exacta:

$$(\,P\,y - Q\,)\,e^{\int P\,dx}\,dx + e^{\int P\,dx}\,dy = 0$$

Arrumando os termos da equação fica

$$P\,y\,e^{\int P\,dx}\,dx - Q\;e^{\int P\,dx}\,dx + e^{\int P\,dx}\,dy = 0$$

$$P\,y\,e^{\int P\,dx}\,dx + e^{\int P\,dx}\,dy = Q\;e^{\int P\,dx}\,dx$$

No primeiro membro figura o diferencial da função $y\,e^{\int P\,dx}$, com efeito:

$$\begin{aligned} d\,(\,y\,e^{\int P\,dx}\,) &= y\,\frac{\partial}{\partial x}e^{\int P\,dx}\,dx + e^{\int P\,dx}\,dy \\ &= y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P\,dx\right)e^{\int P\,dx}dx + e^{\int P\,dx}\,dy \\ &= y\,P\,e^{\int P\,dx}\,dx + e^{\int P\,dx}\,dy \end{aligned}$$

portanto podemos escrever a equação diferencial na forma

$$y\, e^{\int P\,dx} = \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx$$

ou seja: $y\,\lambda = \int Q\,\lambda\,dx$ que é a solução procurada.

A vantagem de, à partida, identificarmos uma equação diferencial de primeira ordem como sendo linear é o facto de sabermos imediatamente qual é o factor integrante e qual é a sua solução.

EXEMPLO

Pretende-se resolver a equação $y' + \dfrac{4y}{x} = x^5$. É uma equação linear com $P = \dfrac{4}{x}$ e $Q = x^5$, portanto temos imediatamente:

$$\lambda = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\log x} = x^4$$

e a solução será:

$$y\,x^4 = \int x^5 x^4\, dx$$

$$y\,x^4 = \frac{x^{10}}{10} + C$$

É de notar que não há, à partida, nenhuma razão para que o papel das variáveis x e y não possa ser trocado, o que significa que uma equação com a forma

$$x' + P(y)\,x = Q(y)$$

é também linear, e tem-se neste caso $\lambda = e^{\int P\,dy}$, e a solução será:

$$x\,\lambda = \int Q\,\lambda\,dy\,.$$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as seguintes equações:

(a) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$ R: $y \sec x = \mathrm{tg}\,x + C$

(b) $(xy - x^3)\,dx + dy = 0$ R: $y - x^2 + 2 = C\,e^{-x^2/2}$

(c) $(xy - x^3 + 1)\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0$ R: $y = \dfrac{3x^4 + x^2 - 2}{15} - \dfrac{\log\left|\sqrt{x^2+1} + x\right|}{\sqrt{x^2+1}} + C$

(d) $(2x^2 y + 2x + y)\,dx + x\,dy = 0$ R: $y\,x = C\,e^{-x^2} - 1$

(e) $y' = \dfrac{y}{2y\log y + y - x}$ R: $x\,y = y^2 \log y + C$

2.5. Mudança de Variável

Tal como em muitos outros domínios da matemática, também no que respeita á resolução de equações diferenciais, uma técnica bastante útil é a da mudança de variável.

A equação $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ envolve as variáveis x e y. Se fizermos, por exemplo:

$$y = f(x,t)$$

tendo em conta que:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

a equação fica: $$P(x,f)\,dx + Q(x,f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt\right) = 0$$

isto é, uma equação que envolve as variáveis x e t. Por vezes esta nova equação em x e t é de resolução bastante mais simples que a equação original.

Um conjunto de equações que se simplificam grandemente usando uma mudança de variável são as chamadas equações homogéneas.

A equação $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ diz-se homogénea se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ forem funções homogéneas do mesmo grau, isto é, se:

$$P(kx,ky) = k^n\,P(x,y) \quad \text{e} \quad Q(kx,ky) = k^n\,Q(x,y) \quad \text{com} \quad n \in \mathrm{N}$$

este tipo de equações transformam-se em equações de variáveis separadas mediante a mudança de variável $y = u\,x$.

EXEMPLO

A equação $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$ é homogénea, então, fazendo $y = ux$ fica:

$$(x+ux)\,dx + (x-ux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x + 2ux - u^2x)\,dx + (x^2 - ux^2)\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{u^2 - 2u - 1}du$$

que é de variáveis separadas.

EXERCÍCIO: Resolva a equação do exemplo anterior.

R: $y^2 - 2xy - x^2 = C$

Muitas outras equações que não são homogéneas também se podem resolver mediante mudanças de variável criteriosamente escolhidas. Vejamos alguns exemplos:

Seja a equação $x\,dy-(x^2+y)\,dx=0$. Se fizermos $y=u\,x^2$ a equação fica[2]

$$x(x^2\,du+2ux\,dx)-(x^2+ux^2)\,dx=0$$

e facilmente se separam as variáveis:

$$\frac{du}{3u-1}+\frac{dx}{x}=0$$

portanto teremos a solução: $\frac{1}{3}\log\left|3u-1\right|+\log\left|x\right|=C$

ou seja $\frac{1}{3}\log\left|\frac{3y-x^2}{x^2}\right|+\log\left|x\right|=C \quad\Leftrightarrow\quad 3xy-x^3=A$

Vejamos outro caso.

A equação

$$y'+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$$

resolve-se fazendo: $y=x+\frac{1}{z}$

Se inicialmente $y\equiv y(x)$ deve ter-se $z\equiv z(x)$, portanto $y'=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}z'$, isto é:

$$y'=1-\frac{z'}{z^2}$$

e a equação fica:

$$1-\frac{z'}{z^2}+x\left(x+\frac{1}{z}\right)^2-(2x^2+1)\left(x+\frac{1}{z}\right)+x^3+x-1=0$$

$$\frac{z'}{z^2}-x\left(x^2+\frac{1}{z^2}+2\frac{x}{z}\right)+2x^3+2\frac{x^2}{z}+x+\frac{1}{z}-x^3-x=0$$

$$z'-x^3z^2-x-2x^2z+2x^3z^2+2x^2z+xz^2-x^3z^2-xz^2+z=0$$

obtendo-se por fim a equação linear

---

[2] A derivação deve ser feita com cuidado. Na equação original, tem-se $y\equiv y(x)$, então, se $y=ux^2$, u deve ser função de x, isto é $u\equiv u(x)$, portanto $y'=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}u'$.

$$z' + z = x$$

que tem resolução imediata:

$$\lambda = e^{\int dx} = e^x \qquad \Rightarrow \qquad z\,e^x = \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

e desfazendo a substituição, a solução fica:

$$\frac{e^x}{y-x} = (x-1)\,e^x + C$$

ou, o que é idêntico: $$\frac{1}{y-x} = x - 1 + C\,e^{-x}$$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as seguintes equações diferenciais utilizando as mudanças de variável indicadas:

(a) $y' + 2y^2 = 4xy + \dfrac{y}{x} - 2x^2$ fazendo $y = x + \dfrac{1}{z}$ R: $\dfrac{x}{y-x} = x^2 + C$

(b) $xz' + z + x^2 z^2 - x^3 z^2 = 0$ fazendo $z = \dfrac{1}{x^2 - y}$ R: $x^2 - \dfrac{1}{z} = \dfrac{x^3}{2} + C\,x$

2.6. Equação de Bernoulli

Chama-se equação de Bernoulli a uma equação diferencial de primeira ordem com a forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

Trata-se de uma equação diferencial que se transforma numa equação linear mediante a mudança de variável $y^{1-n} = z$. Com efeito, podemos escrever a equação na forma:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\,\frac{y}{y^n} = Q(x)$$

$$y^{-n}\,y' + P(x)\,y^{1-n} = Q(x)$$

fazendo agora $$y^{1-n} = z \quad \Rightarrow \quad (1-n)y^{-n}\,y' = z' \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{z'\,y^n}{1-n}$$

a equação fica:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)\,z = Q(x)$$

$$z' + (1-n)\,P(x)\,z = (1-n)\,Q(x)$$

fazendo $(1-n)\,P(x) = \Pi(x), \quad (1-n)\,Q(x) = \mathrm{K}(x)$:

$$z' + \Pi(x)\,z = \mathrm{K}(x) \qquad \text{que é linear.}$$

A solução é então imediata:

$$z\ e^{\int \Pi\,dx} = \int K\ e^{\int \Pi\,dx}\,dx$$

ou, desfazendo a substituição:

$$y^{1-n}\ e^{\int \Pi\,dx} = \int K\,e^{\int \Pi\,dx}\,dx$$

EXEMPLO

Considere-se a equação $y' + \frac{2}{x}y = xy^3$. Trata-se de uma equação de Bernoulli.

Dividindo por y^3 fica:

$$y^{-3}\,y' + \frac{2}{x}\,y^{-2} = x$$

fazendo agora $z = y^{-2} \;\Rightarrow\; z' = -2\,y^{-3}\,y' \quad\Leftrightarrow\quad y' = -\frac{1}{2}y^3\,z'$

obtém-se $-\frac{1}{2}\,y^{-3}y^3\,z' + \frac{2}{x}\,z = x$

$$z' - \frac{4}{x}\,z = -2x$$

esta ultima equação é linear, terá factor integrante

$$\lambda = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\log x} = \frac{1}{x^4}$$

e solução: $\frac{z}{x^4} = \int -2x\frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{x^2} + C$

Desfazendo a substituição fica finalmente:

$$\frac{1}{x^4y^2} = \frac{1}{x^2} + C$$

EXEMPLO

A equação $dx + (2xy - 4x^3 y^3)\, dy = 0$ pode escrever-se

$$x' + 2y\,x = 4y^3\,x^3$$

que é uma equação de Bernoulli (é da forma $x' + P(y)\;x = Q(y)\;x^3$).

Dividindo por x^3:

$$x^{-3}\,x' + 2y\;x^{-2} = 4y^3$$

então, fazendo $z = x^{-2} \;\Rightarrow\; z' = -2\,x^{-3}\,x' \;\Leftrightarrow\; x' = -\dfrac{z'}{2\,x^{-3}}$ fica

$$z' - 4y\,z = -8y^3$$

que é linear, então $\lambda = e^{-4\int y\,dy} = e^{-2y^2}$, e a solução será:

$$z\,e^{-2y^2} = -\int 8y^3\,e^{-2y^2}\,dy = \int (2y^2)\cdot(-4y\;e^{-2y^2})\,dy = 2y^2 e^{-2y^2} - 2\int 2y\;e^{-2y^2}\,dy$$

$$z\,e^{-2y^2} = 2y^2 e^{-2y^2} + e^{-2y^2} + C$$

e como $z = \dfrac{1}{x^2}$ a solução fica:

$$\frac{1}{x^2} - 2y^2 - 1 = C\,e^{2y^2}$$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as seguintes equações:

(a) $y' + 2xy - xy^2 = 0$ R: $\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2}\right) e^{-x^2} = C$

(b) $y' + 2y\,\mathrm{tg}\,x = \sqrt{y}\,\sin(2x)$ R: $\sec x\;\sqrt{y} + \cos x = C$

(c) $(1 - x^2)\,y' - xy = xy^2$ R: $1 + y = C\,y\,\sqrt{1 - x^2}$

3. EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM n

Chama-se equação diferencial linear de ordem n a uma equação do tipo

$$P_0(x)\,y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = Q(x)$$

É de toda a conveniência tratarmos este tipo de equações em duas etapas, primeiro as chamadas Equações Lineares Homogéneas[3], nas quais se tem $Q(x) = 0$, e de seguida as não Homogéneas.

3.1. Equações homogéneas de coeficientes constantes

As equações lineares homogéneas são então da forma geral

$$P_0(x)\,y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = 0$$

Para este tipo de equações vale o princípio de sobreposição que estabelece que, se existirem n soluções linearmente independentes[4] $y_1, \ldots, y_n$, então o integral geral da equação será

$$y_{GH} = C_1 y_1 + \ldots. + C_n y_n$$

EXERCÍCIO

Considere a equação $y'' - 2y' - 3y = 0$

(a) Mostre que e^{3x} e e^{-x} são duas soluções da equação.

(b) Mostre que $5e^{3x} + 17e^{-x}$ também é solução da equação.

Se numa equação linear de ordem n, os coeficientes $P_i(x)$ são constantes, a equação diz-se linear homogénea de coeficientes constantes e terá a forma geral:

---

[3] Note-se que a designação Homogéneas aqui não tem o significado de homogeneidade à Euler utilizado no parágrafo 2.5.

[4] Recorde-se que $y_1, \ldots, y_n$ são linearmente independentes se $C_1 y_1 + \ldots.. + C_n y_n = 0 \Rightarrow C_i = 0, \forall_i$.

Por exemplo, as funções $y_1 = e^x$ e $y_2 = \sin x$ são linearmente independentes, com efeito:

$$C_1 e^x + C_2 \sin x = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = C_2 = 0$$

Já as funções $y_1 = 2x^2$, $y_2 = 5x^2$ não são linearmente independentes, com efeito:

$$A(2x^2) + B(5x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; (2A + 5B)x^2 = 0 \;\Rightarrow 2A + 5B = 0$$

portanto temos soluções diferentes de zero.

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \qquad , \quad a_i \in \mathrm{R}$$

Se for uma equação de primeira ordem já a sabemos resolver.

Seja

$$a_0\, y' + a_1\, y = 0$$

tem-se então:

$$a_0\, dy + a_1\, y\, dx = 0$$

$$\frac{a_0\, dy}{y} + a_1 dx = 0$$

que é de variáveis separadas e portanto

$$a_0 \log y + a_1\, x = C$$

$$\log y = C - \frac{a_1}{a_0} x$$

$$y = e^{C - \frac{a_1}{a_0} x} = C\, e^{-\frac{a_1}{a_0} x}$$

Portanto, a equação de primeiro grau tem soluções do tipo exponencial.

Vamos agora investigar se uma equação de ordem n poderá ter soluções do tipo exponencial, da forma genérica $e^{k\,x}$.

Para tal derivamos n vezes a função $e^{k\,x}$

$$y = e^{kx},\ y' = k\, e^{kx}\ ,\ y'' = k^2\, e^{kx}\ ,\ \dots\dots\dots\ ,\ y^{(n)} = k^n\, e^{kx}$$

e a equação escreve-se então:

$$a_0\, k^n e^{kx} + a_1\, k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_{n-1}\, k\, e^{kx} + a_n\, e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}\,(a_0\, k^n + a_1\, k^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, k + a_n) = 0$$

$$a_0\, k^n + a_1\, k^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, k + a_n = 0$$

e portanto temos de facto soluções do tipo exponencial e^{kx} para todos os valores de k que sejam raízes do polinómio $Pc(k) = a_0\, k^n + a_1\, k^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, k + a_n$. Este polinómio chama-se polinómio característico da equação diferencial, e a equação $a_0\, k^n + a_1\, k^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, k + a_n = 0$ é a equação característica da equação diferencial.

Esta equação característica obtém-se facilmente a partir da equação diferencial substituindo cada derivada de ordem *i*, $y^{(i)}$, pela potência *i* de *k*, k^i.

EXEMPLO

Considere a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0$$

a equação característica é

$$k^2 - k - 2 = 0$$

que tem raízes -1 e 2, então teremos a solução geral

$$y = A\, e^{-x} + B\, e^{2x}$$

onde A e B são constantes de integração.

A solução será idêntica se as raízes do polinómio característico forem complexas. Neste caso é de notar que as raízes complexas aparecem sempre aos pares $a+bi$ e $a-bi$. Considere-se então uma equação diferencial qualquer, tal que o seu polinómio característico admita raízes complexas conjugadas $a+bi$ e $a-bi$. A sua solução será então

$$y = A\, e^{(a+bi)x} + B\, e^{(a-bi)x}$$

Normalmente esta solução é apresentada noutra forma. Recordando a Fórmula de Euler

$$e^{\pm i\alpha} = \operatorname{cis}(\pm\alpha) = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$$

a solução obtida pode escrever-se:

$$\begin{aligned} y &= A\, e^{ax} e^{ibx} + B\, e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} \left[A\, e^{ibx} + B\, e^{-ibx} \right] \\ &= e^{ax} \left[A(\cos bx + i \sin bx) + B(\cos bx - i \sin bx) \right] \\ &= e^{ax} \left[(A+B)\cos bx + (A-B)\, i \sin bx \right] \end{aligned}$$

fazendo $A + B = C_1$, $(A-B)\, i = C_2$ fica:

$$y = e^{ax}\,(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

ou, se as raízes complexas conjugadas do polinómio característico forem indicadas por $K, \overline{K}$:

$$y = e^{\operatorname{Re}(K)x} \left[C_1 \cos(\operatorname{Im} K\, x) + C_2 \sin(\operatorname{Im} K\, x) \right]$$

EXEMPLO

Seja a equação $y'' + 2y' + 2y = 0$.

A equação característica $k^2 + 2k + 2 = 0$ admite soluções complexas $-1 \pm i$, então, $\operatorname{Re} K = -1$, $\operatorname{Im} K = 1$ e a solução geral será:

$$y = e^{-x}\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Vejamos agora o caso de termos raízes múltiplas do polinómio característico.

Suponhamos que a raiz $k = k_1$ do polinómio característico é dupla. Então, além de ser raiz do polinómio característico é também raiz da derivada do polinómio, isto é:

$$Pc(k_1) = 0 \quad \wedge \quad Pc'(k_1) = 0$$

devemos pois ter que, além de

$$e^{kx}\, Pc(k) = 0$$

também
$$x\, e^{kx}\; Pc(k) + e^{kx}\, Pc'(k) = 0$$

esta igualdade é garantida se *k* for raiz dupla da equação característica.

Posto isto, se temos uma equação

$$a_0 \frac{d^n\, e^{kx}}{d\, x^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\, e^{kx}}{d\, x^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

que é verificada para determinado *k* raiz dupla da equação característica *e* a derivamos em ordem a *k*:

$$a_0 \frac{d^n\, xe^{kx}}{d\, x^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\, xe^{kx}}{d\, x^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

esta equação verifica-se para o mesmo *k*, e conclui-se que, no caso de *k* ser raiz dupla da equação característica tanto a função e^{kx} como a função $x\, e^{kx}$ são soluções da equação diferencial. Como se trata de funções linearmente independentes, a solução geral será

$$y = C_1 e^{kx} + C_2\, x\, e^{kx}$$

$$y = e^{kx}\, (C_1 + C_2 x)$$

que é do tipo geral $e^{kx} \times polinómio\, de\, grau\, (multiplicidade - 1)$

Um raciocínio semelhante permite concluir que, se k for uma raiz de multiplicidade n da equação característica, a solução será:

$$y = e^{kx} \times \; polinómio\, de\, grau\, (n-1)$$

EXEMPLO

Para a equação diferencial $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ a equação característica é

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = (k-1)^3 = 0$$

que admite a raiz tripla $k = 1$, então a solução geral será

$$y = e^x\, (\, A + Bx + Cx^2)$$

EXEMPLO

Se bem que nos exercícios que vamos resolver não aparecem equações características com raízes complexas múltiplas, o processo para a sua resolução é semelhante ao das raízes reais múltiplas. Por exemplo, se o par $a \pm bi$ é duplo, a solução será

$$y = \left[A\,e^{(a+bi)x} + B\,e^{(a-bi)x}\right](C + D\,x)$$
$$= e^{ax}\left[E\cos bx + F\sin bx\right](C + D\,x)$$
$$= e^{ax}\left[(C_1 + C_2 x)\cos bx + (C_3 + C_4 x)\sin bx\right]$$

EXERCÍCIOS (propostos)

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ R: $y = B\,e^{3x} + C\,e^{-x}$

(b) $y'' - 4y' + 13y = 0$ R: $y = e^{2x}\,(A\cos 3x + B\sin 3x)$

(c) $y''' + y' = 0$ R: $y = A + B\cos x + C\sin x$

(d) $y'' - 6y' + 9y = 0$ R: $y = A\,e^{3x} + B\,x\,e^{3x}$

(e) $y^{(V)} - y''' = 0$ R: $y = A + Bx + Cx^2 + D\,e^{-x} + E\,e^{x}$

(f) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$ R: $y = A + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

(g) $y''' - y = 0$ R: $y = A\,e^{x} + e^{-x/2}\,(B\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + C\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2})$

2. A equação característica correspondente a uma equação diferencial homogénea de coeficientes constantes, admite como raízes : 0 – tripla e $\pm i$

(a) Escreva a equação diferencial.

(b) Determine a sua solução geral.

(c) Determine o integral particular que satisfaz $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(\pi) = \frac{1}{2}\,y'''(\pi/2)$

R: (a) $y^{(V)} + y''' = 0$

(b) $y = A + Bx + Cx^2 + D\cos x + E\sin x$

(c) $y_p = -1 + \frac{3x^2}{2} + 2\cos x + \sin x$

3.2. Equações não homogéneas de coeficientes constantes

Como já foi dito atrás, uma equação não homogénea, ou completa, de coeficientes constantes é da forma geral

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = Q(x) \qquad , \quad a_i \in \mathrm{R}$$

ou

$$y^{(n)} + b_1\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y' + b_n\, y = Q(x)$$

Já vimos como determinar a solução geral da equação homogénea correspondente

$$y^{(n)} + b_1\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y' + b_n\, y = 0$$

Chamemos-lhe y_{gh}, isso significa que se tem:

$$y_{gh}{}^{(n)} + b_1\, y_{gh}{}^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y'_{gh} + b_n\, y_{gh} = 0 \tag{1.6}$$

Suponhamos agora que, de alguma forma, conhecemos uma solução particular da equação completa, chamando-lhe y_p, teremos

$$y_p{}^{(n)} + b_1\, y_p{}^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y'_p + b_n\, y_p = Q(x) \tag{1.7}$$

Somando (1,6) e (1,7) membro a membro obtém-se

$$y_{gh}{}^{(n)} + b_1\, y_{gh}{}^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y'_{gh} + b_n\, y_{gh} + y_p{}^{(n)} + b_1\, y_p{}^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y'_p + b_n\, y_p = Q(x)$$

isto é:

$$(y_{gh} + y_p)^{(n)} + b_1\,(y_{gh} + y_p)^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\,(y_{gh} + y_p)' + b_n\,(y_{gh} + y_p) = Q(x)$$

portanto, a função:

$$y = y_{gh} + y_p$$

é solução da equação completa. De facto é mesmo a solução geral da equação completa uma vez que nela vão figurar n constante de integração arbitrárias.

Em resumo, a solução geral de uma equação diferencial linear de ordem n e coeficientes constantes é a soma da solução geral da equação homogénea correspondente com uma solução particular da equação completa.

EXEMPLO

A equação $y'' + 2y' - 3y = x$ não é homogénea.

A equação homogénea correspondente $y'' + 2y' - 3y = 0$ tem uma equação característica que admite raízes 1 e -3, portanto $y_{gh} = Ae^{x} + Be^{-3x}$.

Pode facilmente verificar-se que a equação completa admite a solução particular $y_p = -\dfrac{3x+2}{9}$

E teremos a solução geral da equação completa:

$$y = Ae^{x} + Be^{-3x} - \frac{3x+2}{9}$$

Como se pode verificar neste exemplo, o problema consiste em determinar uma solução particular da equação completa. É a esta tarefa que nos vamos dedicar de seguida.

3.2.1. Soluções particulares

Como foi visto, a resolução das equações lineares de ordem n envolve a determinação de uma solução particular y_p.

Um método geral para obter a solução é o método da variação das constantes de que falaremos mais adiante, no entanto há grupos de funções $Q(x)$ que permitem de uma forma rápida obter y_p.

Em geral, quando procuramos uma solução particular, tentamos encontrá-la do tipo do termo da equação diferencial que quebra a homogeneidade, isto é, do tipo de $Q(x)$.

(a) ***Se Q(x) é um polinómio de grau n, procura-se uma solução particular também polinómio de grau n, desde que seja independente da solução geral da equação homogénea correspondente.***

Por exemplo, para $y'' - 4y' + 3y = x$ tem-se $y_{gh} = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$, e como $Q(x) = x$ é um polinómio de grau 1, tentamos obter uma solução particular com a forma:

$$y_p = ax + b$$

que é obviamente independente de y_{gh}. Agora resta encontrar os valores exactos das constantes *a* e *b*. Para tal, colocamos a solução particular na equação diferencial. Como $y_p' = a, \quad y_p'' = 0$
a equação diferencial fica

$$0 - 4a + 3(ax + b) = x$$

$$3ax + 3b - 4a = x$$

e portanto
$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 4/9 \end{cases}$$

então, a função $y_p = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ satisfaz a equação completa, é pois uma solução particular, e a solução geral será:

$$y_G = y_{gh} + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

Consideremos agora o caso em que a função y_p do tipo de Q não é independente de y_{gh}.

Seja $y'' - y' = 2x$. Tem-se então $y_{gh} = C_1 + C_2 e^x$. Como Q é um polinómio de primeiro grau, tentar-se-ia $y_p = ax + b$, mas uma inspecção a esta solução revela imediatamente que ela não é independente de y_{gh}, com efeito, em ambas figura um termo constante (C_1 em y_{gh}, b em y_p), portanto o polinómio geral do primeiro grau não vai ser solução da equação diferencial o que se pode verificar se substituirmos esta solução na equação e tentarmos encontrar os valores de *a* e *b* convenientes que conduzirá a impossibilidades. Com efeito, com esta solução, a equação fica:

$$-a = 2x \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \wedge a = 0$$

isto significa que não há valores de *a* e *b* que façam a função $y_p = ax + b$ ser solução da equação diferencial.

Quando isto sucede, passamos a tentar a nova solução particular que se obtém da anterior multiplicada por *x*, isto é, tenta-se

$$y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

esta função é independente de y_{gh} (com efeito em y_{gh} não figuram termos em x^2 nem em x), portanto esta deve ser a boa solução particular a procurar (se esta solução ainda não fosse independente de y_{gh}, tornava-se a multiplicar por *x* até obter uma solução independente).

$$y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a$$

a equação diferencial fica então

$$2a - 2ax - b = 2x \quad \Rightarrow \quad a = -1 \ \wedge \ b = -2$$

portanto, a boa solução particular é

$$y_p = -x^2 - 2x$$

e a solução geral procurada é

$$y_G = y_{gh} + y_p = C_1 + C_2 e^x - x^2 - 2x$$

(b) ***Se Q(x) é o produto de um polinómio por uma exponencial, continuando a escolher soluções particulares do tipo de Q, teremos também, á partida***

$$y_p = P_n(x)\ e^{kx}$$

desde que esta solução seja independente de y_{gh}**.**

Por exemplo, seja $y'' - 5y' + 4y = x e^{2x}$, tem-se

$$y_{gh} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

tendo em conta que Q é o produto de um polinómio de grau 1 com uma exponencial, tenta-se

$$y_p = (ax + b) e^{2x} = ax e^{2x} + b e^{2x}$$

esta solução é independente de y_{gh} e é pois a boa solução, resta encontrar a e b.

$$y_p' = (a + 2b + 2ax) e^{2x}, \qquad y_p'' = (4a + 4b + 4ax) e^{2x}$$

então tem-se

$$4ax + 4a + 4b - 10ax - 5a - 10b + 4ax + 4b = x$$

$$-2ax - a - 2b = x \quad \Rightarrow \quad a = -1/2 \ \wedge \ b = 1/4$$

a solução particular é $$y_p = \frac{1-2x}{4}\ e^{2x}$$

e a solução geral procurada é: $$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1-2x}{4}\ e^{2x}$$

Se por outro lado tivermos a equação $y'' - 3y' + 2y = e^x$, fica $y_{gh} = A e^x + B e^{2x}$, e como Q é o produto de um polinómio de grau zero (constante) por uma exponencial, tenta-se $y_p = C e^x$. Mas esta função não é independente de y_{gh} (constante$\times e^x$ figura em ambas), portanto passa-se a:

$$y_p = Cx\,e^x$$

que é independente de y_{gh} e portanto a boa solução particular.

Com esta solução particular obtém-se no final (exercício)

$$y_G = A\,e^x + B\,e^{2x} - x\,e^x$$

(c) Se em Q(x) figura a função $\sin kx$ ***ou*** $\cos kx$***, procuram-se soluções particulares que sejam combinações lineares de sin e cos de kx, desde que independente de*** y_{gh}***.***

Neste caso torna-se necessário que na solução particular figurem senos e cosenos uma vez que as derivadas sucessivas de Q são, exactamente, senos e cosenos.

Seja então $y'' - y' = x\sin 3x$. É fácil concluir que $y_{gh} = C_1 + C_2 e^x$, e como Q é o produto de um polinómio de grau 1 com $\sin 3x$ procura-se uma solução particular do tipo

$$y_p = (ax+b)(A\sin 3x + B\cos 3x)$$

$$y_p = (aAx + bA)\sin 3x + (aBx + bB)\cos 3x$$

$$y_p = (Dx + E)\sin 3x + (Fx + G)\cos 3x$$

que é manifestamente independente de y_{gh}.

Já para o caso da equação $y'' + y = 4\cos x$, tem-se $y_{gh} = C_1\cos x + C_2\sin x$ e como Q é o produto de um polinómio de grau zero por $\cos x$, tenta-se $y_p = a\sin x + b\cos x$ que não é obviamente independente de y_{gh}. Multiplicando então esta função por x fica

$$y_p = ax\sin x + bx\cos x$$

e esta sim, sendo independente de y_{gh}, é a boa solução particular a determinar.

(d) ***Se*** $Q(x) = Q_1 + ... + Q_n$ ***e cada*** Q_i ***é do tipo (a), (b),(c) ou mesmo do tipo polinómio vezes exponencial vezes sinusóide, a solução geral da equação homogénea é a mesma, e o princípio da sobreposição permite que se encontre a solução particular como sendo a soma das n soluções particulares correspondentes a cada termo*** Q_i ***individualmente.***

Vejamos um exemplo deste caso.

Seja $y'' - 4y' + 3y = x + e^{2x}$. Fica então $y_{gh} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Considere-se agora a equação

$$y'' - 4y' + 3y = x$$

procura-se $y_{p1} = ax + b$ e obtém-se $y_{p1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$.

Agora, considera-se a equação

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

e procura-se $y_{p2} = Ae^{2x}$, que permite concluir que (exercício) $y_{p2} = -e^{2x}$.

A solução geral da equação completa será pois

$$y_G = y_{gh} + y_{p1} + y_{p2} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{3x+4}{9} - e^{2x}$$

EXERCÍCIOS (propostos)

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $y'' - y' = 4\sin 2x$ R: $y = A + Be^x + \dfrac{2\cos 2x - 4\sin 2x}{5}$

(b) $y'' - 4y' + 3y = 4x$ R: $y = Ae^{3x} + Be^x + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{16}{9}$

(c) $y'' + y = x^2 + 1$ R: $y = x^2 - 1 + A\cos x + B\sin x$

(d) $y''' - y' = e^x$ R: $y = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{x}{2}\right)e^x + C_3 e^{-x}$

(e) $y''' + y'' = 2\sin x$ R: $y = A + Bx + Ce^{-x} - \sin x + \cos x$

(f) $y''' + y' = 2x + \cos x$ R: $y = A + B\cos x + C\sin x + x^2 - \dfrac{x}{2}\cos x$

(g) $y''' - y'' = 4x^2$ R: $y = A + Bx + Ce^x - \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{4x^3}{3} - 4x^2$

(h) $y''' + y'' = x + 1 + e^{-x} + xe^{3x}$ R: $y = A + Bx + \dfrac{x^3}{6} + (C + x)e^{-x} + \left(\dfrac{x}{36} - \dfrac{11}{432}\right)e^{3x}$

(i) $y''' - 4y'' + 3y' = e^x \cos x$ R: $y = A + Be^{3x} + \dfrac{C + \cos x - 3\sin x}{10}e^x$

2. Resolva a equação $xy'' - (1 + 8x^2)y' + 12x^3 y = 16x^3 e^{x^2}$ fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{t}$.

R: $y = A e^{3x^2} + (B - 2x^2) e^{x^2}$

3. Considere a equação $y^{(IV)} - 3y''' + 4y'' - 2y' = P(x)$

(a) Verifique que $y = e^x$ é solução da equação homogénea correspondente.

(b) Determine o integral geral da equação homogénea.

(c) Considere $P(x) = x + 2e^x$ e determine o integral geral da equação completa.

R: (b) $y_{gh} = C_1 + C_2\, e^x + e^x\,(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

(c) $y = C_1 + C_2\, e^x + e^x\,(C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x\,e^x - \dfrac{1}{4}x^2 - x$

3.2.2. Variação das constantes

O método que vamos expor de seguida é geral, mas por ser trabalhoso deve ser evitado sempre que seja possível obter as soluções procuradas por outra via.

Comecemos por um exemplo simples de uma equação que, para ilustrar a generalidade do método, nem sequer é de coeficientes constantes, a equação linear

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2$$

é fácil e quase imediato estabelecer a sua solução (Exercício):

$$x^3 y = \frac{x^6}{6} + C$$

Vejamos como resolvê-la utilizando o método da variação das constantes.

Primeiro obtém-se a solução da equação homogénea $y' + \dfrac{3}{x} y = x^2$ que, sendo de variáveis separáveis conduz a:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{3\,dx}{x} = 0$$

$$\log y + 3 \log x = C$$

$$y\,x^3 = C$$

portanto:

$$y_{gh} = \frac{C}{x^3}$$

Agora, vamos supor que a constante C é de facto uma função de x, $C \equiv C(x)$, para que a solução y_{gh} se transforme na solução da equação completa, isto é, estamos a supor que $y_G = \frac{C(x)}{x^3}$ é solução da equação completa.

Como

$$y' = \frac{C' x^3 - 3x^2 C}{x^6} = \frac{C'x - 3C}{x^4}$$

a equação completa fica:

$$\frac{C'x - 3C}{x^4} + \frac{3C}{x^4} = x^2$$

$$C'x - 3C + 3C = x^6$$

$$C' = x^5 \quad \Rightarrow \quad C = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + A$$

e portanto deve ser

$$y_G = \frac{C(x)}{x^3} = \frac{x^3}{6} + \frac{A}{x^3}$$

ou, escrito de outra forma

$$x^3 y = \frac{x^6}{6} + A$$

Vejamos então o que se passa no caso geral da equação

$$P_0(x)\, y^{(n)} + \ \ldots\ldots \ + P_n(x)\, y = Q(x)$$

que supomos admitir como solução geral da equação homogénea a função

$$y_{gh} = \sum_i C_i y_i$$

Supondo então que os C_i são funções de x, $C_i \equiv C_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, ter-se á

$$y = \sum_i C_i(x) y_i(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_i C_i' y_i + \sum_i C_i y_i'$$

como temos apenas n funções a determinar, $C_1(x), \ \ldots\ldots\ , C_n(x)$, podemos estabelecer uma relação arbitrária entre n termos de y', e faz-se

$$\sum_i C_i' y_i = 0 \qquad (1)$$

portanto:

$$y' = \sum_i C_i y_i'$$

neste caso a segunda derivada é

$$y'' = \sum_i C_i' y_i' + \sum_i C_i y_i''$$

e de novo podemos impor

$$\sum_i C_i' y_i' = 0 \tag{2}$$

ficando então

$$y'' = \sum_i C_i y_i''$$

Repetindo o processo, chega-se por fim à condição

$$\sum_i C_i' y_i^{(n-2)} = 0 \tag{n-1}$$

com

$$y^{(n-1)} = \sum_i C_i y_i^{(n-1)}$$

e finalmente:

$$y^{(n)} = \sum_i C_i' y_i^{(n-1)} + \sum_i C_i y_i^{(n)}$$

Colocando as sucessivas derivadas na equação diferencial completa, e tendo em conta que os y_i são soluções da equação homogénea, fica

$$P_0 \sum_i C_i' y_i^{(n-1)} + P_0 \sum_i C_i y_i^{(n)} + \ ..... \ + P_{n-1} \sum_i C_i y_i' + P_n \sum_i C_i y_i = Q(x)$$

ou, com $R_i = \dfrac{P_i}{P_0}, \ \forall i \neq 0$:

$$\sum_i C_i' y_i^{(n-1)} + \sum_i C_i y_i^{(n)} + \ ..... \ + R_{n-1} \sum_i C_i y_i' + R_n \sum_i C_i y_i = \frac{Q}{P_0}$$

mas, como os y_i são soluções da equação homogénea, fica apenas

$$\sum_i C_i' y_i^{(n-1)} = \frac{Q}{P_0}$$

que, juntamente com as condições (1), (2), …. , (n-1) impostas permite calcular os C_i', obtendo-se os C_i por integração.

EXEMPLO

Seja $y'' + y = \operatorname{tg} x$

É fácil ver que (exercício): $y_{gh} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Supondo então que C_1 e C_2 são funções de x ter-se-á

$$y' = C_1' \cos x + C_2' \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Impõe-se então que

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \qquad \text{(a)}$$

então: $$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

e

$$y'' = -C_1' \sin x + C_2' \cos x - C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

então a equação completa fica

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \qquad \text{(b)}$$

juntando (a) e (b):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \\ C_2' = \sin x \end{cases}$$

e portanto

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = -\int (\sec x - \cos x)\, dx = -\log\left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| + \sin x + A$$

$$C_2 = \int \sin x \, dx = -\cos x + B$$

pelo que, a solução procurada é

$$y_G = A \cos x + B \sin x - \log\left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| \cos x$$

EXERCÍCIOS (propostos)

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y''' + y' = \sec x$ R: $y = A + B\cos x + C \sin x + \log\left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| - x \cos x + \sin x \log\left| \cos x \right|$

(b) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$ R: $y = e^{3x}\,(A + Bx - \log|x|)$

(c) $y'' + y = \cos^{-3} x$ R: $y = A\sin x + B\cos x + \dfrac{2\sin^2 x - 1}{2\cos x}$

2. Resolva a equação $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$

(a) Usando o método da variação das constantes

(b) Fazendo a mudança de variável $y' = z$

R: $y = A + B e^x - \cos(e^x)$

3.3. Equação de Euler

A equação de Euler é um caso particular de uma equação diferencial linear de ordem n, onde os coeficientes $P_i(x)$ têm uma forma determinada, o que vai permitir resolvê-la de uma forma mais ou menos simples.

A sua forma é tal que, cada derivada $y^{(i)}$ aparece multiplicada por múltiplos inteiros da potência *i* de um polinómio de grau 1:

$$a_n P^n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1} P^{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 P(x)\, y' + a_0\, y = Q(x)$$

Para uma equação deste tipo, a substituição

$$P(x) = ax + b = e^t$$

transforma-a numa equação linear de ordem n e coeficientes constantes. Com efeito

$$P(x) = e^t \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dP}\,\frac{dP}{dx} = a\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dP}$$

Como $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{d}{dt}e^t = e^t$, então $\dfrac{dt}{dP} = e^{-t}$ e portanto:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = a\,\frac{dy}{dt}e^{-t} = a\; e^{-t}\;\, y'_t$$

e:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{d x}(a e^{-t}\, y'_t) = a\frac{d}{dt}(e^{-t}\, y'_t)\,\frac{d t}{d P}\frac{d P}{d x} = a^2\, e^{-t}\,\frac{d}{dt}(e^{-t}\, y'_t) = a^2(y''_t - y'_t)e^{-2t}$$

e:

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \ldots.. = a^3\,(y'''_t - 3y''_t + 2\,y'_t)\; e^{-3t}$$

etc …

Colocando estas derivadas na equação diferencial, obtém-se

$$\ldots\ldots + a_2\, e^{2t}\, a^2 (y'' - y')\, e^{-2t} + a_1\, e^t\, a\, e^{-t}\, y' + a_0\, y = Q(x)$$

ou seja:

$$\ldots\ldots + a_2\ a^2 (y'' - y') + a_1\ a\ \ y' + a_0\, y = Q(x)$$

$$\ldots\ldots + a_2\ a^2 y'' - a_2\, a^2 y' + a_1\, a\, y' + a_0\, y = Q(x)$$

$$\ldots\ldots + a_2\ a^2 y'' + (a_1\, a - a_2\, a^2)\, y' + a_0\, y = Q(x)$$

que é de coeficientes constantes:

$$\ldots\ldots + Ay'' + B\, y' + C\, y = Q(x)$$

EXEMPLO

Seja a equação $2(2x+1)^2\, y'' - (2x+1)\, y' + 3y = 0$

Fazendo $2x+1 = e^t \quad \Rightarrow \quad x' = \dfrac{1}{2} e^t$, $\dfrac{d\,t}{d\,x} = 2\, e^{-t}$, as derivadas ficam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = 2\, y'\, e^{-t}$$

e:

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{d}{dt}(2\, y'\, e^{-t})\ 2\, e^{-t} = (2\, y'' - 2y')\ 2\, e^{-2t}$$

então a equação fica:

$$4\, y'' - 10\, y' + 3y = 0 \qquad \text{que é de coeficientes constantes.}$$

Repare-se que apenas na equação original, as derivadas indicadas por y', y'' são em ordem a x, todas as outras são derivadas em ordem a t. Enquanto a equação original envolve variáveis y e x, a equação de coeficientes constantes final envolve veriáveis y e t.

EXERCÍCIOS (resolvidos)

1. Seja a equação $x^2\, \dfrac{d^2 y}{d\,x^2} + x\, \dfrac{dy}{dx} - y = x \log x$.

   Se $x = e^t$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\ e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

Substituindo na equação original, obtém-se uma equação em y e t:

$$e^{2t}\,(y'' - y')\,e^{-2t} + e^t\;y'\,e^{-t} - y = t\,e^t$$

$$y'' - y = t\,e^t$$

Para a equação homogénea tem-se a solução geral $y_{gh} = Ae^t + Be^{-t}$, e de seguida procura-se uma solução particular $y_p = (at+b)\,t\,e^t$ (exercício), obtendo-se:

$$y_p = \frac{t^2 - t}{4}\,e^t$$

portanto $$y = Ae^t + Be^{-t} + \frac{t^2-t}{4}\,e^t$$

e como $t = \log x$ fica

$$y = Ax + \frac{B}{x} + \frac{x(\log^2 x - \log x)}{4}$$

2. Seja $2(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = x$

Fazendo $x + 1 = e^t$ fica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}\,e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\,e^{-t}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

e a equação fica:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + y = e^t - 1$$

que é de coeficientes constantes. A equação característica tem soluções 1 e $\dfrac{1}{2}$, portanto

$$y_{gh} = Ae^t + Be^{t/2}$$

Procura-se de seguida soluções particulares do tipo do termo que quebra a homogeneidade, neste caso $Q(t) = e^t - 1$ tentar-se-ia $y_p = y_{p1} + y_{p2} = a\,e^t + b$, mas y_{p1} não é independente de y_{gh}, há pois que tentar

$$y_p = a\,t\,e^t + b$$

$$y_{p1} = a\,t\,e^t$$

$$y'_{p1} = (a + at)\,e^t$$

$$y''_{p1} = (2a + at)\,e^t$$

e a equação, com $Q_1 = e^t$ fica apenas $a = 1$

portanto

$$y_{p1} = t\,e^t$$

$$y_{p2} = C$$

$$y'_{p2} = y''_{p2} = 0$$

e a equação, com $Q_2 = -1$ fica apenas $C = -1$

portanto

$$y_{p2} = -1$$

Então $$y = A e^t + B e^{t/2} + t\ e^t - 1$$

ou, como $t = \log(x+1)$

$$y = (x+1)\big[\,A + \log(x+1)\,\big] + B\ \sqrt{x+1}\ - 1$$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as seguintes equações diferenciais

1. $x^3\,\dfrac{d^3y}{dx^3} + x^2\,\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\,\dfrac{dy}{dx} = x\log x$ R: $y = A + x\big[B\cos(\log x^2) + C\sin(\log x^2)\big] + \dfrac{\log x - 1}{4}\,x$

2. $x^3 y''' - x^2 y'' + xy' = 5 + \log x$ R: $y = A + x^2\,(B + C\log x) + \dfrac{\log^2 x}{8} + \dfrac{3\log x}{2}$

3. $x^3 y''' - x\,y' = 0$ R: $y = A + B\ x^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} + C\ x^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$

4. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4$ R: $y = \dfrac{x^4}{6} - Ax + Bx^2$

3.4. Redução de ordem conhecendo uma solução particular

Uma técnica particularmente útil em vários casos é a seguinte.

Suponhamos que, de alguma forma, conhecemos uma solução particular y_{ph} da equação homogénea correspondente a uma equação linear de ordem n, $f(y^{(n)},....,y',y,x) = 0$. Neste caso, é possível transformar a equação diferencial numa equação diferencial de ordem $n-1$ mediante a mudança de variável

$$y = y_{ph}\, z$$

Considere-se por exemplo a equação 4. dos exercícios propostos acima

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4$$

Observando a solução conclui-se que uma possível solução particular da equação homogénea correspondente é $y = x^2$.

Fazendo então $y = y_{ph}\, z = x^2 z$, $y' = 2xz + x^2 z'$, $y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$, a equação fica

$$2zx^2 + 4x^3 z' + x^4 z'' - 2x^3 z' = x^4$$

ou apenas:

$$x^4 z'' + 2x^3 z' = x^4$$

Se for então $w = z'$ ficamos com a equação de primeira ordem

$$x^4 w' + 2x^3 w = x^4$$

que é linear:

$$w' + \frac{2}{x}\, w = 1$$

temos pois o factor integrante $\lambda = e^{\int \frac{2}{x}\, dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$, e a solução

$$x^2\, w = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$w = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$$

como $z = \int w\, dx$:

$$z = \int \left(\frac{x}{3} + C\, x^{-2} \right) dx = \frac{x^2}{6} - \frac{C}{x} + D$$

e resta agora obter

$$y = x^2 z = \frac{x^4}{6} - Cx + D\, x^2$$

EXERCÍCIOS (propostos)

Resolva as equações diferenciais seguintes, uma vez conhecida a solução particular da equação homogénea correspondente indicada

(a) $x\,y'' - (1+10x^2)\,y' + 24\,x^3\,y = x^3$ sabendo que $y_{ph} = e^{2x^2}$ R: $y = \dfrac{1}{24} + A\,e^{3x^2} + B\,e^{2x^2}$

(b) $x^2\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$ sabendo que $y_{ph} = x^2$ R: $y = Ax + Bx^2 - x\log x$

(c) $x\,y'' - y' - 6x^2\,y' + 8x^3\,y = 0$ sabendo que $y_{ph} = e^{x^2}$ R: $y = A\,e^{2x^2} + B\,e^{x^2}$

Apêndice 1 – Soluções Singulares

Considere a equação diferencial $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

É uma equação de variáveis separáveis

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$$

cuja solução é

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$$

Apesar desta solução ser chamada solução geral, é fácil mostra que a função constante $y = \pm 1$ é solução da equação diferencial, com efeito a equação $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ pode escrever-se:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

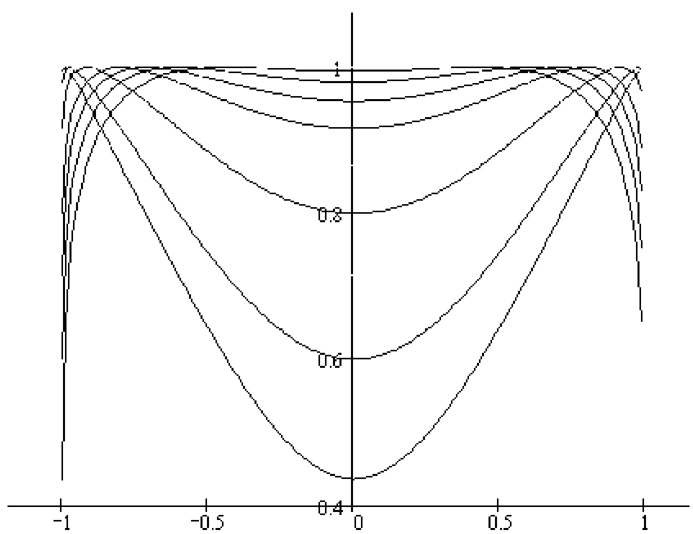
e, se $y = \pm 1$, tem-se $\frac{dy}{dx} = y' = 0$ e $\sqrt{1-y^2} = 0$ e portanto a equação transforma-se numa identidade $0 = 0$.

O que é de notar é que esta solução $y = \pm 1$ não pode ser obtida da solução geral $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$ por escolha precisa da constante *C*.

Ás soluções $y = 1$ e $y = -1$ chamam-se *soluções singulares*.

Fazendo um esboço de diversas soluções gerais, para vários valores de *C* podemos verificar uma propriedade interessante destas soluções singulares.

O gráfico das soluções singulares é tangente em cada ponto a um dos gráficos da solução geral.



No gráfico acima estão representados os ramos positivos de $y(x)$ para diversos valores de C entre 0 e 1. Todas as curvas são tangentes à solução singular $y = 1$.

Note-se que a equação usada não é linear. Para equações lineares, todas as soluções estão contidas na solução geral, mas as equações não lineares podem ter soluções que não estão contidas na sua solução geral. Isto significa que uma equação não linear de primeira ordem em x e y pode ter pode ter duas ou mais soluções que passam por um determinado ponto (x, y) enquanto que uma equação linear tem sempre apenas uma solução que passe por um determinado ponto.

EXERCÍCIO (Resolvido)

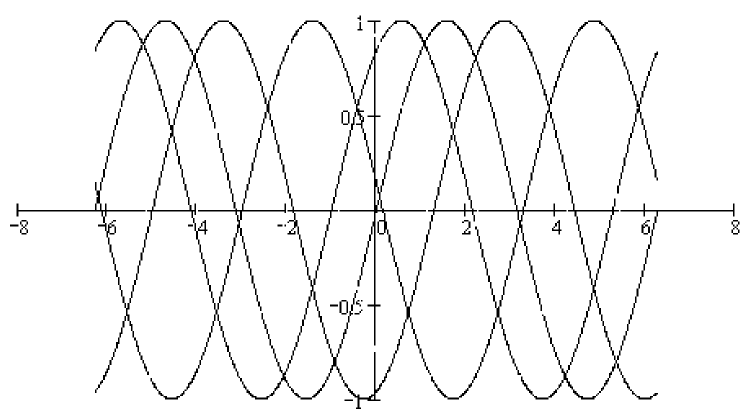
Determine soluções singulares da equação $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Tem-se

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin y = x + C$$

portanto

$$y = \sin(x + C)$$



Na figura estão diversas soluções gerais, e pode ver-se que as rectas $y = \pm 1$ são tangentes a todas elas, devem pois ser soluções singulares da equação. Com efeito

$$y = \pm 1 \;\Rightarrow\; y' = 0$$

e a equação reduz-se a uma identidade $0 = 0$.

Apêndice 2 - Exercícios variados

1. Resolva as seguintes equações diferenciais
(separáveis, exactas, homogéneas, factor integrante)

(a) $y' \cos x = \dfrac{y}{\log y}$ tal que $y(0) = 1$

(b) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

(c) $\dfrac{y'\, y}{x} + e^y = 0$ com $y(1) = 0$

(d) $(x^2 + 2xy)dx + xy\,dy = 0$

(e) $y' - \dfrac{y}{x} = \sin \dfrac{y}{x}$

(f) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

(g) $(x + \sin y)\,dx + (x \cos y - \sin y)\,dy = 0$

(h) $y e^x\,dx + (y + e^x)\,dy = 0$

(i) $(\arcsin x + 2xy)\,dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)\,dy = 0$

(j) $(e^{x+y} + 3x^2)\,dx + (e^{x+y} + 4y^3)\,dy = 0$

(k) $y\,dx - (x + y^2)\,dy = 0$

(l) $y\sqrt{1 - y^2}\,dx + (x\sqrt{1 - y^2} + y)\,dy = 0$

2. Resolva as seguintes equações
(de primeira ordem lineares e Bernoulli)

(a) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$

(b) $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x$

(c) $y' - \dfrac{y}{x \log x} = x \log x$ com $y(e) = \dfrac{e^2}{2}$

(d) $y'(1 + x^2) = \operatorname{arctg} x - y$

(e) $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

(f) $y'(x + y^2) = y$

(g) $(y^4 + 2x)\,y' = y$

(h) $y' = \dfrac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x} - \dfrac{y}{2x}$

(i) $4xy' + x^4 y^5 e^x + 3y = 0$

(j) $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0$

3. Resolva as equações
(lineares de ordem n)

(a) $y''' - 2y'' + y' = 0$

(b) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(c) $y^{(IV)} - 2y''' + y'' = 0$

(d) $y'' - 2y' + 10y = 0$ com $y(\frac{\pi}{6}) = 0, y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\pi/6}$

(e) $y'' - 2y' + 2y = x^2$

(f) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$ com $y(0) = 3, y'(0) = 9$

(g) $y'' + 4y = \sin 2x + 1$ com $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$ (h) $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

(i) $y'' + 4y = \operatorname{cotg} 2x$

4. Resolva as seguintes equações
(equação de Euller, redução de ordem)

(a) $x^2 y'' - xy' + y = 0$ (b) $(4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$

(c) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 3\log^2 x$ (d) $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$ com $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

(e) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x + x^2 \log x + x^3$ (f) $x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} - x\frac{dy}{dx} = 0$

5. Resolva as equações seguintes efectuando a mudança de variável indicada

(a) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = x$, $y = \frac{z}{x^2}$ (b) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$, $t = e^x$

(c) $x(1 + x\cos^2 y)\, y' = \operatorname{cotg} y$, $y = \arccos t$

6. Uma equação diferencial de 5ª ordem, linear homogénea de coeficientes constantes, admite como soluções $y = x^2$ e $y = \cos(2x)$. Determine a equação em causa.

7. Resolva a equação $(1-2x)^2\, y'' + 4(1-2x)\, y' + 8y = x$

(a) fazendo a substituição $1 - 2x = e^t$

(b) partindo do conhecimento que $y = 1 - 2x$ é uma solução da equação homogénea.

8. Seja $\varphi(x)$ uma função derivável. Resolva a equação

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} + \varphi'(x)\, y = \varphi(x)\,\varphi'(x)\, y^4$$

9. Considere a equação $x\,dx + (\,2x + y\,)\,dy = 0$. Sabendo que existe um factor integrante da forma

$$\lambda = (x+y)^k\,, \quad k \in \mathrm{R}$$

determine o valor de k e integre a equação.

Apêndice 3 – Aplicações

Apêndice 4

Soluções e indicações sobre os Exercícios e Aplicações dos apêndices 2 e 3