UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Carlos Iago Bueno [GRR20190171]
Gabriel Lüders [GRR20190172]

MODELAGEM DO PROBLEMA DO DESPACHO HIDROTÉRMICO DO SISTEMA ELÉTRICO DE UMA CIDADE

CURITIBA
2021

RESUMO

A energia elétrica no Brasil é majoritariamente produzida por hidrelétricas e termelétricas [Santos, J. R. 2018]. A produção energética de origem hídrica é refém da sazonalidade, pois para manter uma maior produtividade e consequentemente reduzir o desperdício energético é necessário manter os reservatórios em níveis elevados [Moraes, R. A. 2020]. Quando a hidrelétrica não mantém níveis suficientes de abastecimento, é necessário recorrer às termelétricas. O problema de otimização do recurso hídrico e minimização do custo de geração de energia elétrica é conhecido como despacho hidrotérmico.

Neste trabalho, iremos modelar e implementar uma solução para este problema, considerando as restrições físicas advindas das hidrelétricas e termelétricas e também os custos ambientais atrelados.

Palavras-chave: Despacho Hidrotérmico, Planejamento Elétrico, Programação Linear, Modelagem, Otimização.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No Brasil, a maior parte das fontes de energia disponíveis são predominantemente renováveis. Em relação à matriz elétrica, a fonte hídrica é a mais representativa e a maior parte da energia elétrica é proveniente de hidrelétricas e termelétricas [Santos, J. R. 2018]. Este trabalho tem como objetivo modelar e implementar uma solução para o problema do despacho hidrotérmico do sistema elétrico de uma cidade, levando em consideração as restrições físicas advindas das hidrelétricas e termelétricas.

Porém, o problema de despacho hidrotérmico é apenas um contexto para entendermos como alguns problemas do mundo real são modelados através da programação linear.

A programação linear, diferente do que o nome sugere, não está diretamente relacionada à programação em computadores. O termo surgiu na década de 50, num contexto de lapidação da logística militar. Naquele momento, o termo se referia aos planos ou cronogramas militares, descritos por funções lineares. O termo hoje aparece em diversos contextos de atividades econômicas, na matemática e na ciência da computação [Matoušek, J. 2006].

A programação linear pode ser descrita como uma ferramenta que disponibiliza métodos para resolver problemas de otimização, com restrições, em que a função objetivo é linear.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considerando o contexto de otimização do recurso hídrico e minimização do custo de geração de energia elétrica, considera-se que uma cidade qualquer é abastecida por uma usina hidrelétrica e uma usina termelétrica.

O custo de geração de energia da hidrelétrica é nulo. Porém, necessita atender a restrições de balanço hídrico, advindas da sazonalidade já mencionada anteriormente. Já a termelétrica, tem um custo associado a cada $kMWatt$ gerado.

Neste cenário, o objetivo é fornecer um plano de geração mensal em um período indefinido de meses que minimize o custo total de geração de energia. Este plano será fornecido através da modelagem de um programa linear.

Há diversas formas de resolver um programa linear. Porém, a resolução de problemas de programação linear está fora do escopo deste relatório. Nosso programa será resolvido pelo algoritmo simplex e eventualmente teremos que fazer ajustes em nossa modelagem para de adequar a este algoritmo. Estes ajustes serão mencionados quando necessários, mas não estamos preocupados com o funcionamento deste algoritmo neste momento.

DADOS DO PROBLEMA

Para que possamos formular um modelo ou programa linear adequado, há de se identificar as variáveis que descrevem este problema. Ou seja, descrever conceitualmente quais fatores influenciam nosso cenário.

A quantidade de meses é indefinida, portanto podemos associar uma variável a esta quantidade de meses:

$$Quantidade\ de\ meses\ =\ N$$

O reservatório começa com um volume inicial de água e possui limites físicos que descrevem a sua capacidade máxima e mínima:

$$Volume\ inicial\ do\ reservatório\ de\ água\ =\ vini$$
$$Volume\ mínimo\ do\ reservatório\ =\ vmin$$
$$Volume\ máximo\ do\ reservatório\ =\ vmax$$

A cada mês há uma variação no volume da reserva de água advindo das chuvas, afluências e demais condições ambientais, além da quantidade de água turbinada para gerar energia:

$$Volume\ reserva\ =\ \{r1,\ r2,\ ...,\ rn\}\ =\ Ri$$
$$Afluências\ =\ \{a1,\ a2,\ ...,\ an\}\ =\ Ai$$
$$Quantidade\ de\ água\ turbinada\ =\ \{o1,\ o2,\ ...,\ on\}\ =\ Oi$$
$$Variações\ da\ água\ =\ \{v1,\ v2,\ ...,\ vn\}\ =\ Vi$$

A cada metro cúbico de água turbinada, gera-se $kMWatt$ de energia, em que k é uma constante dada:

$$Coeficiente\ de\ geração\ =\ k$$

Há também uma capacidade máxima de geração mensal da termelétrica. Esta também é uma constante dada:

$$Capacidade\ máxima\ de\ geração\ mensal\ da\ termelétrica\ =\ tmax$$

As demandas mensais também são constantes dadas, que devem ser atendidas pela geração de energia da hidrelétrica e da termelétrica:

$$Demandas \ = \ \{d1,\ d2,\ ..., dn\} \ = \ Di$$

Os custos de geração de 1 $kMWatt$ pela termelétrica (CT) e os custos da variação de 1 m³ no reservatório (CA) são constantes dadas:

$$Custo\ termelétrica\ (por\ MWatt) \ = \ CT$$
$$Custo\ ambiental\ (pela\ variação\ de\ 1m^3) \ = \ CA$$

Todo mês há uma quantidade de energia elétrica gerada pela termelétrica e pela hidrelétrica:

$$Quantidade\ de\ energia\ gerada\ pela\ termelétrica \ = \ \{t1,\ t2,\ ...,\ tn\} \ = \ Ti$$
$$Quantidade\ de\ energia\ gerada\ pela\ hidrelétrica \ = \ \{o1\ *\ k,\ o2\ *\ k,\ ...,\ on\ *\ k\} \ = \ Hi$$

MODELAGEM

Uma vez definidas as variáveis do problema, podemos começar a descrever a nossa função objetivo. Como precisamos minimizar os custos de geração, precisamos primeiro calcular este custo:

$$CT * Ti + CA * |Vi|$$

Ou seja, o custo de geração da termelétrica pela quantidade de energia gerada, somados ao custo ambiental pela variação de água.
Então, sabemos a quantia do que queremos minimizar. Porém, precisamos lembrar que esta quantia ocorre todos os n meses. Portanto, podemos descrever a nossa função objetivo através do seguinte somatório:

$$Min: \Sigma(CT * Ti + CA * |Vi|)$$

E finalmente, as restrições. Vamos começar definindo quanto de água nós temos em cada mês:

$$r0 = vini$$
$$ri = r(i - 1) + vi$$
$$vi = ai - oi$$

Ou seja, a reserva do mês vigente é igual a reserva do mês anterior mais a variação de água daquele mês que por sua vez é a diferença de quanta água entrou via afluências e quanta água saiu via turbinadas.

Além disso, a reserva deve ser menor ou igual que o limite máximo do reservatório e menor ou igual que o limite mínimo do reservatório:

$$ri \geq vmin$$
$$ri \leq vmax$$

Como a variação vi pode ser uma variável negativa, já que podemos turbinar mais água do que recebemos via afluência, e o simplex não aceita esse tipo de construção, precisamos utilizar um artifício aprendido em sala:

$$vi = yi - zi$$
$$yi - zi = ai - oi$$
$$|vi| = yi + zi$$

A subtração de duas variáveis positivas nos garante que o valor da variação mensal não vai ser alterado e que o *simplex* funcionará corretamente. Reescrevendo a função objetivo e as restrições de reserva temos:

$$Min\text{: } \Sigma(CT * Ti + CA * (yi + zi))$$
$$r0 = vini$$
$$ri = r(i - 1) + ai - oi$$
$$ri \geq vmin$$
$$ri \leq vmax$$

Após a definição da quantidade de água disponível, falta definirmos as restrições para geração de energia em si:

$$k * oi + Ti \geq di$$
$$Ti \leq tmax$$

Ou seja, a geração de energia pela hidrelétrica ($k * oi$) somada a quantidade de energia da termelétrica daquele mês deve ser maior ou igual que a demanda requisitada. Maior ou igual aqui porque o problema define que não há problemas em gerar excesso de energia, já que às vezes isso é necessário para controlar os limites de água do reservatório e o excesso de energia pode simplesmente ser mandado para outra grade elétrica.

Por fim, precisamos definir as restrições de não negatividade:

$$ri \geq 0$$
$$yi \geq 0$$
$$zi \geq 0$$
$$oi \geq 0$$
$$ti \geq 0$$

Juntando tudo temos o seguinte programa linear:

$$Min{:}\ \Sigma(CT\ *\ Ti\ +\ CA\ *\ (yi\ +\ zi))$$
$$r0\ =\ vini$$
$$ri\ =\ r(i\ -\ 1)\ +\ ai\ -\ oi$$
$$ri \geq vmin$$
$$ri \leq vmax$$
$$k\ *\ oi\ +\ Ti \geq di$$
$$Ti \leq tmax$$
$$ri \geq 0$$
$$yi \geq 0$$
$$zi \geq 0$$
$$oi \geq 0$$
$$ti \geq 0$$

Lembrando que $1 \leq i \leq n$ já que precisamos calcular o custo mínimo para uma quantidade de meses arbitrária n.

Acreditamos que as restrições descritas acima são suficientes para modelar o problema de modo a obedecer todas as imposições propostas pelo problema e a garantir os resultados desejados, como pode ser observado nos resultados discutidos na próxima sessão.

RESULTADOS

Dado o seguinte contexto fornecido no enunciado do trabalho:

> *Considerando um período de 3 meses, com demandas 900, 1000 e 950, e afluências previstas de 500, 800 e 200. Considerando também que o reservatório da hidrelétrica inicia com volume 500 e tem restrições de volume mínimo 200 e volume máximo 1000 e coeficiente de geração de "1.1". E considerando que a termelétrica tem capacidade de geração máxima de 1000* $kMWatt$ *e custo de geração de 0.2 R$ por* $kMWatt$ *gerado. Por fim, considerando que o custo ambiental convertido é de 0.005 R$ pela variação de 1* m^3 *do reservatório de um mês para o seguinte. O arquivo de entrada seria como abaixo.*

Representado pelo seguinte *input*:

> *3*
> *900 1000 950*
> *500 800 200*
> *500 200 1000 1.1*
> *1000 0.2*
> *0.005*

Nosso trabalho produz o seguinte programa linear:

```
min: 0.005 y1 + 0.005 z1 + 0.005 y2 + 0.005 z2 + 0.005 y3 + 0.005
z3 + 0.2 prodTermo1 + 0.2 prodTermo2 + 0.2 prodTermo3;

reserva0 = 500;
limiteMinimo = 200;
limiteMaximo = 1000;
prodTermoMaxima = 1000;

demanda1 = 900;
demanda2 = 1000;
demanda3 = 950;

afluencia1 = 500;
afluencia2 = 800;
```

```
afluencia3 = 200;

y1 - z1 = afluencia1 - aguaTurbinada1;
reserva1 = reserva0 + afluencia1 - aguaTurbinada1;
reserva1 >= limiteMinimo;
reserva1 <= limiteMaximo;
prodTermo1 <= prodTermoMaxima;
1.1 aguaTurbinada1 + prodTermo1 >= demanda1;
y1 >= 0;
z1 >= 0;
prodTermo1 >= 0;
aguaTurbinada1 >= 0;

y2 - z2 = afluencia2 - aguaTurbinada2;
reserva2 = reserva1 + afluencia2 - aguaTurbinada2;
reserva2 >= limiteMinimo;
reserva2 <= limiteMaximo;
prodTermo2 <= prodTermoMaxima;
1.1 aguaTurbinada2 + prodTermo2 >= demanda2;
y2 >= 0;
z2 >= 0;
prodTermo2 >= 0;
aguaTurbinada2 >= 0;

y3 - z3 = afluencia3 - aguaTurbinada3;
reserva3 = reserva2 + afluencia3 - aguaTurbinada3;
reserva3 >= limiteMinimo;
reserva3 <= limiteMaximo;
prodTermo3 <= prodTermoMaxima;
1.1 aguaTurbinada3 + prodTermo3 >= demanda3;
y3 >= 0;
z3 >= 0;
prodTermo3 >= 0;
aguaTurbinada3 >= 0;
```

Tomamos a liberdade de tornar os nomes das variáveis utilizados no *output* do trabalho mais legíveis que os apresentados na modelagem.

A saída do *lp_solve* esperada para esse *input*, de acordo com o enunciado do trabalho, é a seguinte:

> *Para este exemplo um plano ótimo tem custo de 175.5 R$ e precisa gerar energia na termoelétrica nos meses 1 e 3, respectivamente, 350 $kMWatt$ e 520 $kMWatt$. O volume de água turbinado a cada mês na hidrelétrica é: 500 m^3, 909.091 m^3 e 390.909 m^3.*

Ao fornecer o resultado da nossa modelagem ao *lp_solve*, `./despacho < exemploEnunciado.txt | lp_solve`, obtivemos o seguinte:

```
Value of objective function: 175.50000000

Actual values of the variables:
y1                             0
z1                             0
y2                             0
z2                       109.091
y3                             0
z3                       190.909
prodTermo1                   350
prodTermo2                     0
prodTermo3                   520
reserva0                     500
limiteMinimo                 200
limiteMaximo                1000
prodTermoMaxima             1000
demanda1                     900
demanda2                    1000
demanda3                     950
afluencia1                   500
afluencia2                   800
afluencia3                   200
aguaTurbinada1               500
reserva1                     500
aguaTurbinada2           909.091
reserva2                 390.909
aguaTurbinada3           390.909
reserva3                     200
```

Como podemos ver, o resultado foi idêntico ao ótimo descrito no enunciado:

- O valor da função objetivo ficou em R$175,00
- A termelétrica teve usos prodTermo1 = 350, prodTermo2 = 0 e prodTermo = 520 como desejado
- Os volumes de água turbinada foram aguaTurbinada1 = 500, aguaTurbinada2 = 909.091 e aguaTurbinada3 390.909, como previsto

Já no exemplo fornecido pelo professor com um contexto de excesso de água (portanto a hidrelétrica teria que gerar energia todo mês) representado pelo seguinte *input*:

5
1000 1000 1000 1000 1000
500 500 500 500 500
500 200 1000 2.0
1000 0.2
0.005

Temos o seguinte resultado quando fornecemos a nossa modelagem ao *lp_solve*, `./despacho < exemploExcessoAgua.txt | lp_solve`:

```
Value of objective function: 0

Actual values of the variables:
y1                              0
z1                              0
y2                              0
z2                              0
y3                              0
z3                              0
y4                              0
z4                              0
y5                              0
z5                              0
prodTermo1                0
prodTermo2                0
```

```
prodTermo3              0
prodTermo4              0
prodTermo5              0
reserva0                     500
limiteMinimo            200
limiteMaximo            1000
prodTermoMaxima         1000
demanda1                1000
demanda2                1000
demanda3                1000
demanda4                1000
demanda5                1000
afluencia1              500
afluencia2              500
afluencia3              500
afluencia4              500
afluencia5              500
aguaTurbinada1          500
reserva1                     500
aguaTurbinada2          500
reserva2                     500
aguaTurbinada3          500
reserva3                     500
aguaTurbinada4          500
reserva4                     500
aguaTurbinada5          500
reserva5                     500
```

Podemos notar que a termelétrica nunca foi usada e que todo mês houve água turbinada. Vale ressaltar também que como há 500 m^3 de água mensal entrando via afluência e 500 m^3 sendo turbinados para geração de 1000 $kMWatt$, não há variação do nível da água geral, o que resulta em uma função objetivo = 0, já que não há custo para geração de energia hidrelétrica em si.

Como último exemplo gostaríamos de discutir um caso de seca, no qual a termelétrica teria que ser usada todo mês, representado pelo seguinte *input*:

3
900 1000 950
0 0 0
500 500 1000 1.1
1000 0.2
0.005

O *lp_solve* nos fornece o seguinte após aplicada nossa modelagem, `./despacho < exemploSeca.txt | lp_solve`:

```
Value of objective function: 570.00000000

Actual values of the variables:
y1                             0
z1                             0
y2                             0
z2                             0
y3                             0
z3                             0
prodTermo1                     900
prodTermo2                     1000
prodTermo3                     950
reserva0                       500
limiteMinimo                   500
limiteMaximo                   1000
prodTermoMaxima                1000
demanda1                       900
demanda2                       1000
demanda3                       950
afluencia1                     0
afluencia2                     0
afluencia3                     0
aguaTurbinada1                 0
reserva1                       500
aguaTurbinada2                 0
reserva2                       500
```

```
aguaTurbinada3          0
reserva3                500
```

Como esperado, nenhum volume de água foi turbinado no período, uma vez que isso violaria a restrição do limite inferior do reservatório, e apenas a termelétrica foi utilizada, resultando no maior custo visto nos três exemplos.

CONCLUSÃO

Dados os *outputs* fornecidos pelo *lp_solve* após aplicada a nossa modelagem para cada um dos exemplos, podemos com segurança concluir que a modelagem proposta fornece os resultados desejados e supre todas as restrições e imposições apresentadas no enunciado do trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Introduction to lp_solve 5.5.2.11. Disponível em: <http://lpsolve.sourceforge.net/> Acesso em 24 de Julho de 2022.

Matoušek, J. 2006. Understanding and Using Linear Programming. *Springer.*

Santos, J. R. 2018. Despacho hidrotérmico considerando restrições de gás natural. Disponível em: <https://www.monografias.ufop.br/bitstream/35400000/842/1/MONOGRAFIA_DespachoHidrométricoConsiderando.pdf> Acesso em 24 de Julho de 2022.

Moraes, R. A. 2020. Despacho hidrotérmico para horizonte de curto prazo integrado às restrições não-lineares da rede elétrica e alocação de reserva girante. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/70718> Acesso em 24 de Julho de 2022.