

VEREIN
DEUTSCHER
INGENIEURE

Konstruktionsmethodik
Technisch-wirtschaftliches Konstruieren
Bemessungslehre

VDI 2225

Blatt 4

Design engineering methodics
Engineering design at optimum cost
Dimensioning

Inhalt

	Seite
Vorbemerkung	2
1 Einführung und Übersicht	2
2 Die Methode der Bemessungslehre	3
2.1 Einführungsbeispiel: Bemessung eines Balkens auf zwei Stützen	3
2.2 Aufstellung der Beanspruchungsgleichung	7
2.3 Aufstellung der Kostengleichung	7
2.4 Aufstellung und Auswertung der Bemessungsgleichung	8
2.5 Varianten zum Einführungsbeispiel	8
2.6 Zusammenfassung: Anwendung der Bemessungslehre	11
3 Anwendungsbeispiele	12
3.1 Bemessung von Trägern und Wellen	12
3.2 Kostenvergleich für Träger ohne und mit Mittelstütze	17
3.3 Bemessung eines Wärmeaustauschers	19
3.4 Bemessung von Druckbehältern	26
3.5 Bemessung von Schwungringen	39
3.6 Bemessung von Zahnrädern	41
3.7 Bemessung von Stromschienen	42
4 Zusammenfassung und Ausblick	43
Schrifttum	43

Vorbemerkung

Unter dem Begriff „Technisch-wirtschaftliches Konstruieren“ werden verschiedene Methoden zusammengefaßt, die die Aufgabe des Konstrukteurs erleichtern sollen, nicht nur technisch, sondern auch wirtschaftlich (d.h. kostenmäßig) hochwertige Produkte zu schaffen. Erste Arbeiten wurden um das Jahr 1930 von Dr.sc.techn. Dr.-Ing. E.h. *Fritz Kesselring*, seinerzeit Technischer Direktor des Schaltwerkes der Siemens-Schuckertwerke in Berlin, durchgeführt mit ersten Veröffentlichungen ab 1937.

Die Richtlinie VDI 2225 „Technisch-wirtschaftliches Konstruieren“ wurde von einem VDI-Ausschuß unter der Leitung von Dr. *Fritz Kesselring* erarbeitet und erschien erstmals 1964. Sie bestand ursprünglich aus zwei Blättern, Blatt 1: Anleitung und Beispiele, Blatt 2: Tabellenwerk. Im Lauf der Jahre erschienen von der Richtlinie mehrere Neuausgaben, in denen jeweils die Ergebnisse der Erfahrungen und Diskussionen der Zwischenzeit, insbesondere auch aus dem VDI-Bildungswerk-Lehrgang „Technisch-wirtschaftliches Konstruieren“, berücksichtigt wurden. Dadurch wuchs der Umfang der Richtlinie immer mehr an. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Inhalt der Richtlinie nun auf vier Blätter aufgeteilt:

- Blatt 1: Vereinfachte Kostenermittlung
- Blatt 2: Tabellenwerk
- Blatt 3: Technisch-wirtschaftliche Bewertung
- Blatt 4: Bemessungslehre

Nach Blatt 1 und Blatt 3 liegt nun auch Blatt 4 als Entwurf vor. Sämtliche Blätter wurden vom Ausschuß „Technisch-wirtschaftliches Konstruieren“ erarbeitet. Der Ausschuß hat bei seiner Arbeit zahlreiche Herren aus Industrie und Hochschulen um Kritik, Anregungen sowie Verbesserungsvorschläge gebeten. Er dankt allen, die diese Arbeit unterstützt und gefördert haben. Der Ausschuß bittet mit der Vorlage dieses Entwurfes erneut um Kritik und Anregungen.

VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE

1 Einführung und Übersicht

Der Konstrukteur ist es gewohnt, technische Forderungen zu realisieren und seine Konstruktionen so weit möglich nach technischen Gesichtspunkten zu optimieren. Wegen der immer härter werdenden Konkurrenz auf den meisten Gebieten des Maschinenbaus wird aber vom Konstrukteur auch immer mehr und immer dringender „Kostendenken“ gefordert, also die Berücksichtigung wirtschaftlicher Forderungen neben den technischen.

Der Konstrukteur ist dieser zusätzlichen Forderung gegenüber in der Regel sehr skeptisch; er kennt vielleicht die Arbeit der Kalkulationsabteilung seiner Firma aus eigener Anschauung und weiß, welchen Aufwand es bedeutet, die Kosten für ein Produkt genau zu ermitteln. Der Konstrukteur ist für klare Arbeitsteilung: Er konstruiert eine Maschine, die den technischen Anforderungen optimal entspricht, der Kostenrechner ermittelt, zu welchem Preis diese Maschine verkauft werden soll.

Dieses Verfahren ist sicher für beide am bequemsten, hat aber einen großen Nachteil: Wenn sich bei der nachträglichen Kostenberechnung herausstellt, daß das Produkt zu teuer geworden ist, daß es sich am Markt nicht durchsetzen kann, dann kann es für eine neue, kostengünstigere Konstruktion schon zu spät sein, und es ist oft auch nicht mehr möglich, die vorhandene Konstruktion nachträglich dem Marktpreis entsprechend zu verbilligen, ohne sie zugleich zu verschlechtern, so daß sie sich wieder nicht verkaufen läßt – diesmal aus technischen Gründen.

Der Grund für dieses Dilemma liegt darin, daß der Konstrukteur in seinen Entwürfen einen Teil der erforderlichen Material- und Fertigungskosten festlegt und daß die gesamten Herstellkosten schon nahezu vollständig festgelegt sind, wenn der Konstrukteur seine fertigen Zeichnungen an den Kostenrechner gibt. Der Konstrukteur muß also darauf achten, daß er von verschiedenen, technisch gleichwertigen Entwürfen den kostengünstigsten auswählt, und er muß

bei der Ausarbeitung dieses Entwurfes die zu erwartenden Kosten wenigstens so weit vorherschätzen, daß die Herstellkosten im zulässigen Rahmen bleiben.

Selbstverständlich wird der Konstrukteur versuchen, alle Kostenabschätzungen mit möglichst geringem Aufwand durchzuführen, möglichst schnell und mit möglichst wenig erforderlichen Unterlagen. Er kann also in der Regel nicht die sehr genauen, aber doch auch sehr aufwendigen Verfahren der Kostenrechner (etwa nach REFA) übernehmen.

Die Richtlinie VDI 2225 „Technisch-wirtschaftliches Konstruieren“ bietet dem Konstrukteur zwei Verfahren an, die speziell entwickelt wurden, damit er mit hinreichender Zuverlässigkeit und möglichst kleinem Aufwand eine technisch und wirtschaftlich optimale konstruktive Lösung auswählen und ausarbeiten kann: Die Methode der „technisch-wirtschaftlichen Bewertung“ (VDI 2225 Blatt 3) und die etwas aufwendigere, aber auch genauere Methode der „Bemessungslehre“ (VDI 2225 Blatt 4), die im Abschnitt 2 ausführlich erläutert wird.

Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.1 die Bemessungslehre an einem einfachen, speziellen Beispiel angewendet. In den Abschnitten 2.2 bis 2.4 wird die Methode der Bemessungslehre, ausgehend von diesem Beispiel, in ihren einzelnen Schritten allgemein erläutert. In Abschnitt 2.5 werden diese Schritte auf verschiedene Varianten des Einführungsbeispiels angewendet, um ihre vielseitige Anwendbarkeit zu zeigen. In Abschnitt 2.6 wird zusammenfassend dargestellt, wann und wie die Bemessungslehre nützlich angewendet werden kann.

In Abschnitt 3 werden Anwendungsbeispiele verschiedener Art, unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades und in unterschiedlicher Ausführlichkeit behandelt. Nach Zusammenfassung und Ausblick in Abschnitt 4 folgt schließlich eine Übersicht über ergänzendes und weiterführendes Schrifttum.

2 Die Methode der Bemessungslehre

Die Methode wird zunächst in Abschnitt 2.1 an einem einfachen Beispiel vorgestellt und anschließend in den Abschnitten 2.2 bis 2.6 allgemein erläutert.

2.1 Einführungsbeispiel:

Bemessung eines Balkens auf zwei Stützen

Aufgabenstellung

Zunächst soll ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Bemessungslehre ausführlich behandelt werden: Ein Biegeträger mit Rechteckquerschnitt (Bild 1 und 2) soll die lichte Weite l überbrücken. Er soll mittig eine Last F_1 aufnehmen.

Die Beanspruchungsgleichung (I)

In technischer Hinsicht wird vom Biegeträger gefordert, daß er der durch die Belastung hervorgerufenen Biegebeanspruchung standhält. In der sogenannten „Beanspruchungsgleichung“ (Bild 1) wird der Zusammenhang zwischen Beanspruchung, Material und Abmessungen des Trägers rechnerisch formuliert. Wenn der Biegeträger extrem schmal und hoch ist, besteht die Gefahr, daß er bei voller Biegebeanspruchung instabil wird und seitlich „auskippt“ (Bild 1, unten). Ob diese Gefahr im Einzelfall akut wird, läßt sich nicht sogleich erkennen, es werden jedoch zur Sicherheit Grenzwerte für die Höhe des Biegeträgers und für das Verhältnis von Höhe zu Breite angegeben, die man wegen der Kippgefahr nicht überschreiten sollte, vgl. [11]. Als Beanspruchungsgleichung wird im vorliegenden Fall die Gleichung für die Biegespannung, Gl.(2) in Bild 1, verwendet. Die Art der Einspannung und damit der Zahlenwert von z_1 wird zunächst noch offengelassen.

Die Kostengleichung (II)

In wirtschaftlicher Hinsicht wird gefordert, daß der Biegeträger möglichst geringe Kosten verursacht. Dazu werden hier die Materialkosten ermittelt, die dem Bruttomaterialvolumen V_b des Biegeträgers pro-

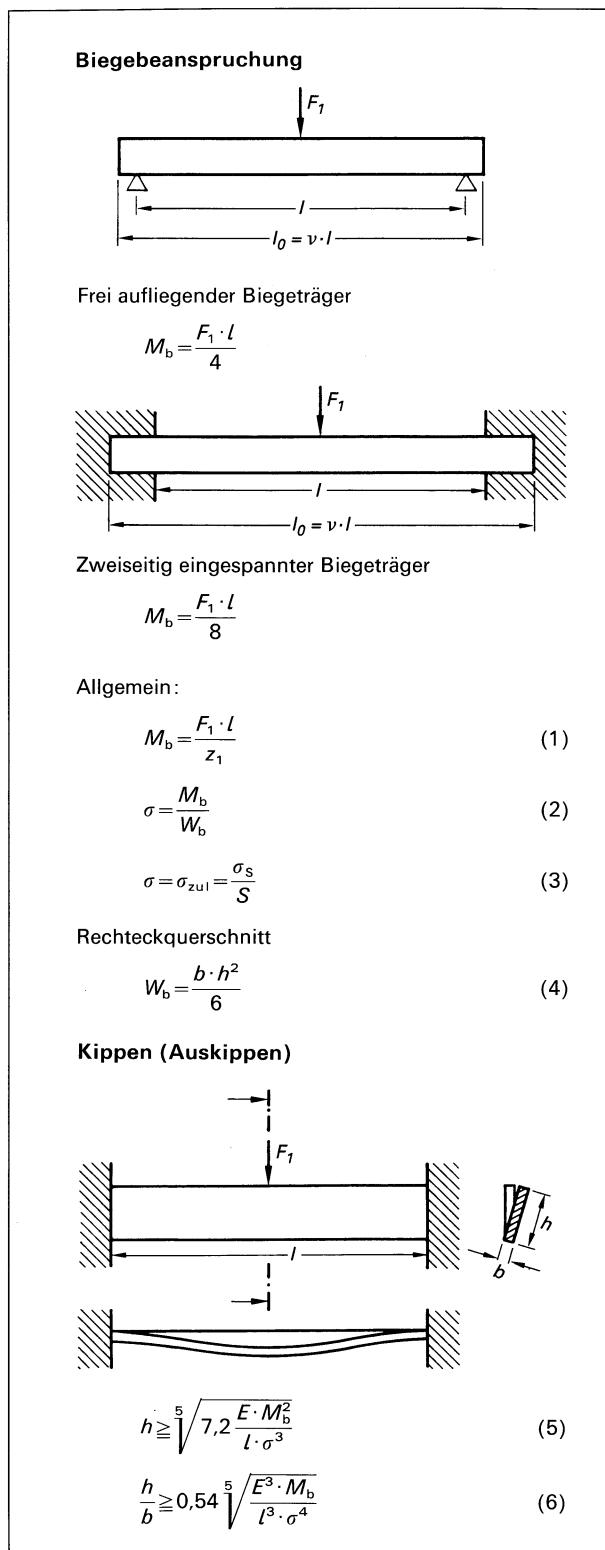


Bild 1. Biegeträger, Beanspruchungsgleichung (I)

portional sind, Gl.(7) in Bild 2. Das Bruttomaterialvolumen lässt sich als Länge × Breite × Höhe leicht ermitteln. Die Gesamtlänge l_0 des Trägers ist sicher größer als die Spannweite l , das Verhältnis $l_0/l = v$ hängt von der Auflagerung des Biegeträgers ab und wird deshalb zunächst noch unbestimmt gelassen.

Den Zahlenwert der spezifischen Werkstoffkosten k_v entnimmt man der Richtlinie VDI 2225 Blatt 1, der Werkstoffgemeinkostenzuschlag $(1 + \bar{g}_w)$ ist unternehmensspezifisch.

Die Bemessungsgleichung (III)

Technisch-wirtschaftlich bemessen heißt, sowohl technische als auch wirtschaftliche Forderungen bei der Auslegung quantitativ zu berücksichtigen. Rechnerisch bedeutet diese Forderung, daß die Beanspruchungsgleichung und die Kostengleichung durch Einsetzen miteinander verknüpft werden müssen, wodurch eine einzige Gleichung, die sogenannte „Bemessungsgleichung“, entsteht. Dieses Einsetzen bereitet keine Schwierigkeiten, weil sowohl in der Beanspruchungsgleichung als auch in der Kostengleichung Abmessungen vorkommen, z.B. die Breite b des Biegeträgers. Durch Elimination dieser Abmes-

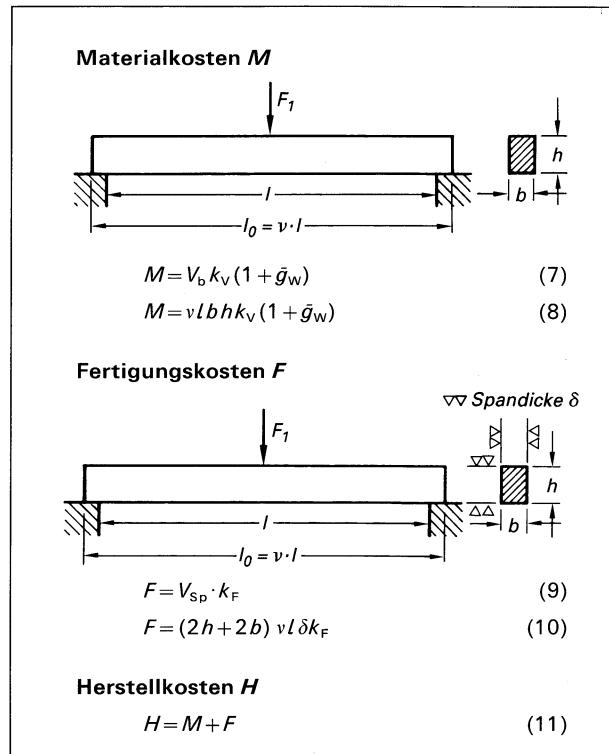


Bild 2. Biegeträger, Kostenabschätzung (II)

sung aus Beanspruchungsgleichung und Kostengleichung erhält man die Bemessungsgleichung, Gl.(15) in Bild 3.

Der Bemessungsgleichung ist zu entnehmen, in welcher Weise die Kosten von den einzelnen technischen und wirtschaftlichen Einflußgrößen abhängen. Diese Einflußgrößen sind hier (Bild 3) für die Diskussion zu Faktoren zusammengefaßt:

- Der Aufgabenfaktor $F_1 l^2$: Die Herstellkosten sind

proportional der Last F_1 und proportional dem Quadrat der Spannweite l des Trägers. Spannweite und Belastung sind die Anforderungen an den Biegeträger. Das Gesetz, nach dem die Kosten bei wachsenden Anforderungen zunehmen, wird „Wachstumsgesetz“ genannt. Derartige Wachstumsgesetze sind von Bedeutung für die Diskussion der Frage, ob eine bewährte konstruktive Lösung auch noch für wesentlich veränderte – in der Regel gesteigerte – Anforderungen verwendet werden kann oder ob eine andersartige Lösung entwickelt werden sollte.

- Der Einspannfaktor v/z_1 entspricht dem Einfluß, den die gewählte Einspannung auf die Materialkosten hat. In Bild 4 werden zwei Einspannmöglichkeiten, die hier in Betracht kommen, miteinander verglichen: Beim frei aufliegenden Biegeträger ist der Wert von z_1 halb so groß, das maximale

Biegemoment also doppelt so groß, wie beim zweiseitig fest eingespannten Biegeträger. Der frei aufliegende Balken muß etwas – hier sei angenommen um 10% – länger sein als die überbrückte Spannweite l . Beim zweiseitig fest eingespannten Träger muß an den Balkenenden ein Biegemoment übertragen werden; der Biegeträger muß in diesem Fall also erheblich – hier sei angenommen um 30% – länger sein, als die überbrückte Spannweite l . Beim frei aufliegenden Biegeträger ergibt sich damit ein Einspannfaktor von $v/z_1 = 0,28$, beim zweiseitig eingespannten Biegeträger ein Einspannfaktor von $v/z_1 = 0,16$. Der zweiseitig eingespannte Biegeträger ist also hinsichtlich der Materialkosten, Gl.(15), Bild 3, erheblich günstiger.

- Der Werkstofffaktor k_V/σ : Der Werkstoff soll weder allein nach dem wirtschaftlichen Kennwert,

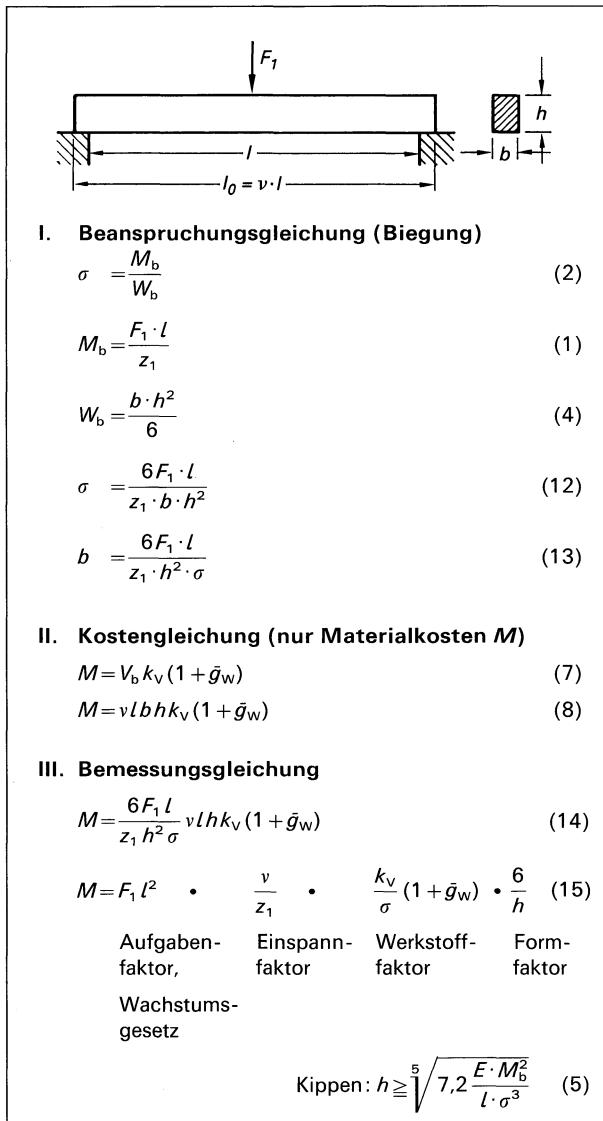


Bild 3. Biegeträger, optimale Bemessung unter Berücksichtigung der Materialkosten (III)

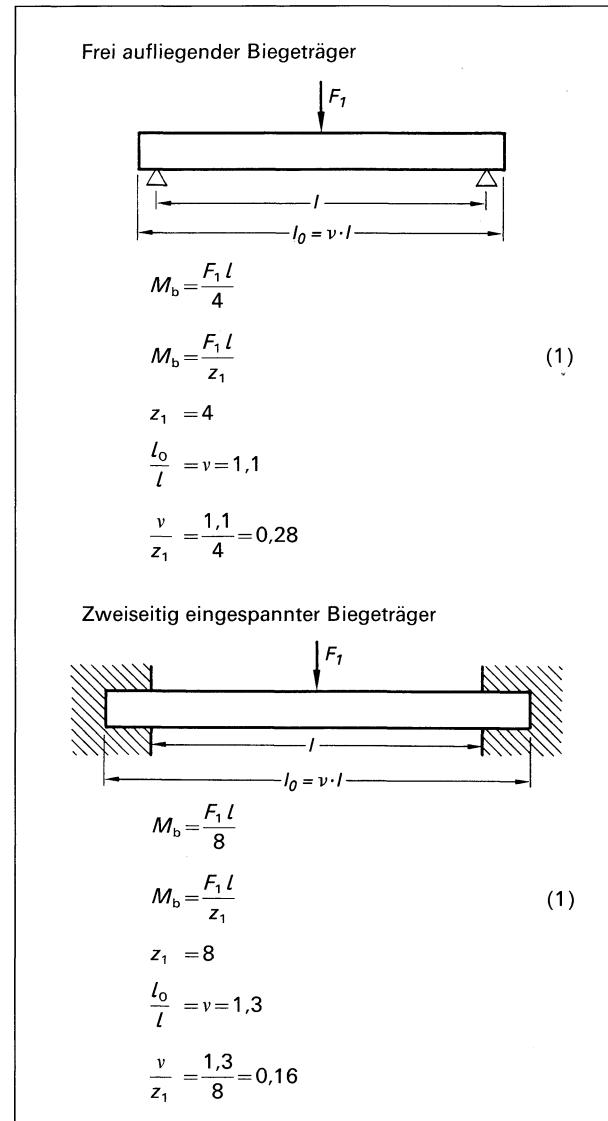


Bild 4. Biegeträger, Einspannfaktoren

den spezifischen Werkstoffkosten, ausgewählt werden noch allein nach dem technischen Kennwert, der zulässigen Biegespannung. Das bestgeeignete Material ist vielmehr gekennzeichnet durch einen möglichst günstigen (d.h. kleinen) Zahlenwert des Verhältnisses aus spezifischen Werkstoffkosten k_v und zulässiger Spannung σ . In der Richtlinie VDI 2225 Blatt 1 sind für die wichtigsten Werkstoffe die relativen Werkstoffkosten tabelliert (aus denen man die spezifischen Werkstoffkosten leicht ermitteln kann) sowie die Mindest-Streckgrenze des Materials, die der zulässigen Biegespannung σ proportional ist. In Tabelle 1 sind diese Daten für verschiedene Werkstoffe nach der Richtlinie VDI 2225 Blatt 1 zusammengestellt und daraus die jeweiligen Werkstofffaktoren $k_v/\sigma_{S_{min}}$ ermittelt. Bei warmgewalztem Flachstahl ergibt sich als günstigster Werkstoff (bei allen Abmessungen) der Stahl St 50-2. Bei gezogenem Flachstahl liegt zwar die

Streckgrenze höher, aber auch die spezifischen Werkstoffkosten. Der maßgebende Werkstofffaktor k_v/σ ist insgesamt ungünstiger als beim Stahl 50-2. Von den verschiedenen gezogenen Flachstählen ist (wieder bei allen Abmessungen) der Werkstoff St 60-2 K am günstigsten.

- Durch den Faktor $(1 + \bar{g}_w)$ werden zusätzlich zum Einkaufspreis des Materials die Kosten berücksichtigt, die in Warenannahme und Werkstofflager anfallen. In den meisten Unternehmen wird hier ein fester Zahlenwert von z.B. 1,1 oder 1,2 verwendet. Dieser Faktor kann durch Rationalisierungsmaßnahmen verbessert (d.h. verkleinert) werden, die der Konstrukteur aber kaum beeinflussen kann. Zur Vereinfachung wird im folgenden der Wert von $\bar{g}_w = 0$ und damit der Faktor $(1 + \bar{g}_w) = 1$ gesetzt.
- Der Formfaktor $6/h$: Die Materialkosten M sind umgekehrt proportional der Querschnittshöhe h

Tabelle 1. Biegeträger, Werkstoffauswahl ($k_{vo} = 0,0064 \text{ DM/cm}^3$)

Halbzeug	Maß-norm	Ab-weichungen (Toleranzen)	Werkstoff	Abmes-sungen	relative Werkstoff-kosten k_v^*	spezifische Werkstoff-kosten k_v DM/cm ³	Mindest-streck-grenze $\sigma_{S_{min}}$ kN/cm ²	Werkstoff-kennwert $k_v/\sigma_{S_{min}}$ DM/kNm	Bewertung
Flachstahl, warmgewalzt	DIN 1017	Euronorm 35 – 62 ($\pm 0,5 \text{ mm}$ bis $\pm 2,5 \text{ mm}$)	U St 37-2	klein	1,3	0,0083	21,5	0,00039	
			St 50-2	klein	1,4	0,0090	27,5	0,00033	*
			U St 37-2	mittel	1,1	0,0070	21,5	0,00033	
			St 50-2	mittel	1,2	0,0077	27,5	0,00028	*
			U St 37-2	groß	1,15	0,0074	21,5	0,00034	
			St 50-2	groß	1,25	0,0080	27,5	0,00029	*
Flachstahl, gezogen	DIN 174	DIN 174 ($\pm 0,05 \text{ mm}$ bis $\pm 0,25 \text{ mm}$)	St 37-2 K + G	klein	3,1	0,0198	19,5	0,00102	
			St 37-2 K	klein	2,9	0,0186	23,5	0,00079	
			St 60-2 K + G	klein	3,6	0,0230	29,5	0,00078	
			St 60-2 K	klein	3,4	0,0218	34,5	0,00063	*
			St 37-2 K + G	mittel	1,8	0,0115	19,5	0,00059	
			St 37-2 K	mittel	1,65	0,0106	23,5	0,00045	
			St 60-2 K + G	mittel	2,1	0,0134	29,5	0,00045	
			St 60-2 K	mittel	1,9	0,0122	34,5	0,00035	*
			St 37-2 K + G	groß	1,9	0,0122	19,5	0,00063	
			St 37-2 K	groß	1,75	0,0112	23,5	0,00048	
			St 60-2 K + G	groß	2,2	0,0141	29,5	0,00048	
			St 60-2 K	groß	2,05	0,0131	34,5	0,00038	*

des Trägers (Bild 3). Die Querschnittshöhe h sollte man also möglichst groß wählen, darf jedoch wegen der Knickgefahr, Gl.(5) u. (6) in Bild 1, eine bestimmte Grenze nicht überschreiten.

Nach diesem einführenden Beispiel werden in den folgenden Abschnitten 2.2 bis 2.4 die einzelnen Arbeitsschritte der Bemessungslehre allgemein erläutert.

2.2 Aufstellung der Beanspruchungsgleichung

Die Bemessungslehre beschäftigt sich damit, für besonders kostenintensive Bauteile oder Baugruppen einer Konstruktion Material, Form und Abmessungen rechnerisch so festzulegen, daß sie sowohl den technischen als auch den wirtschaftlichen Forderungen optimal entsprechen.

In technischer Hinsicht wird von Bauteilen meist gefordert, daß sie bestimmten mechanischen Beanspruchungen standhalten. Beim Biegeträger im Einführungsbeispiel (Abschnitt 2.1) war das die Biegebeanspruchung. Aus der Diskussion des Beispiels ergibt sich, daß man hier u.U. auch an die Knickbeanspruchung hätte denken müssen.

Gelegentlich kommen jedoch auch im Maschinenbau thermische, elektrische oder andere Beanspruchungen vor. Der Konstrukteur entscheidet, welche Beanspruchung im vorliegenden Fall wesentlich ist und stellt – etwa nach den Regeln der Festigkeitslehre – eine entsprechende Gleichung auf. In der Bemessungslehre heißt diese Gleichung „Beanspruchungsgleichung“ (und wird in der Regel mit I bezeichnet).

2.3 Aufstellung der Kostengleichung

Auch die wirtschaftlichen Forderungen an das zu optimierende Bauteil werden als Gleichung formuliert. Im Einführungsbeispiel war das die vereinfachte Gleichung zur Ermittlung der Materialkosten. In der Bemessungslehre heißt diese Gleichung „Kostengleichung“ (und wird in der Regel mit II bezeichnet).

Bevor der Konstrukteur diese Gleichung formuliert, muß er prüfen, welche Art von Kosten hier wesentlich ist. Es wird deshalb hier zunächst etwas ausführlicher behandelt, welche Arten von Kosten in Betracht kommen und wie man sie ermitteln kann.

Die Materialkosten ermittelt der Konstrukteur nach Richtlinie VDI 2225 Blatt 1: Aus seiner Zeichnung oder maßstäblichen Skizze wird das Brutto-Materialvolumen der Bauteile ermittelt, d.h. das Volumen, das die Teile vor der Bearbeitung haben. In der Richtlinie VDI 2225 Blatt 1 wird für die wichtigsten Werkstoffe angegeben, wieviel ein Kubikzentimeter kostet („spezifische Werkstoffkosten k_V “ mit der Dimension DM/cm^3). Damit erhält der Konstrukteur die Werkstoffkosten und nach Multiplikation mit ei-

nem firmenspezifischen Zuschlagsfaktor (Werkstoff-Gemeinkostenfaktor) die gesuchten Materialkosten.

Die Fertigungskosten bestimmt der Kostenrechner dadurch, daß er zunächst den Zeitaufwand für die Bearbeitung des Rohteiles und daraus über einen Geldfaktor die Kosten bestimmt. Der Kostenrechner unterscheidet hier im wesentlichen drei Zeitanteile: die Hauptzeit, die Nebenzeiten und die Rüstzeit. Die „Hauptzeit“ ist die Zeit, in der das Werkstück auf der Werkzeugmaschine tatsächlich bearbeitet wird. Zeiten für das Ein- und Ausspannen des Werkstückes, für das Messen usw. bezeichnet man als „Nebenzeiten“. Diese fallen um so weniger ins Gewicht, je größer das zu zerspanende Volumen ist. Die „Rüstzeit“ ist erforderlich, um die Werkzeugmaschine einzurichten. Sie ist also je Teilelos nur einmal erforderlich und fällt weniger ins Gewicht, wenn das Los groß ist.

Der Konstrukteur muß dieses Verfahren zur Ermittlung der Fertigungskosten erheblich vereinfachen. Mit der Annahme, daß die Fertigungskosten etwa dem zerspannten Materialvolumen proportional sind, lassen sich die Fertigungskosten analog zu den Materialkosten bestimmen: Aus der Zeichnung oder der maßstäblichen Skizze wird das Spanvolumen für das zu bearbeitende Teil ermittelt und mit einem Faktor multipliziert, der angibt, wieviel es kostet, einen Kubikzentimeter zu zerspanen („spezifische Fertigungskosten“ k_F mit der Dimension DM/cm^3). Dieser Faktor hängt ab vom Werkstoff, der Werkzeugmaschine und der Genauigkeit der Bearbeitung. Die Zahlenwerte dieses Faktors beschafft sich der Konstrukteur für die ihn interessierenden Werkzeugmaschinen bei den Betriebsingenieuren oder Kostenrechnern seines Unternehmens.

Dieses Verfahren zur Ermittlung der Fertigungskosten entspricht formal dem anfangs beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Materialkosten, ist also mit geringem Aufwand durchführbar. Die Genauigkeit des Verfahrens ist geringer als beim aufwendigeren Verfahren der Kostenrechner. Die Genauigkeit ist aber für die Zwecke der Bemessungslehre hinreichend, wenn die Stückzahl je Los und das Zerspanvolumen je Stück groß genug sind. Wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, ist das Teil meist gar nicht so kostenintensiv, daß sich die Anwendung der Bemessungslehre lohnte.

Die Herstellkosten ergeben sich als Summe von Materialkosten und Fertigungskosten. Es ist für den Konstrukteur am bequemsten, im Rahmen der Bemessungslehre nur die Materialkosten zu berücksichtigen. In den meisten Fällen wird er jedoch den etwas größeren Aufwand treiben müssen, um die Herstellkosten zu berücksichtigen, weil das die Kosten sind,

die er mit seiner Konstruktion festlegt. In manchen Fällen genügt jedoch auch die Berücksichtigung der Herstellkosten nicht.

Wenn der Kunde vor dem Kauf einer Maschine nicht nur an die Anschaffungskosten denkt, sondern bei seiner Kaufentscheidung vor allem die laufenden Kosten berücksichtigt, die die Maschine verursachen wird, dann sollte auch der Konstrukteur im Rahmen der Bemessungslehre schon die Betriebskosten berücksichtigen.

Die Betriebskosten setzen sich im wesentlichen aus zwei Anteilen zusammen: den Kapitalkosten und den laufenden Kosten. Zur Ermittlung der Kapitalkosten werden zunächst die Herstellkosten bestimmt. Die Unternehmenspolitik strebt ein bestimmtes Verhältnis von Verkaufspreis zu Herstellkosten an. Über den entsprechenden firmenspezifischen Faktor kann man also von den Herstellkosten auf den Preis schließen, den der Kunde zahlen soll, und damit auf die jährlichen Abschreibungskosten, die ihm durch den Kauf der Maschine entstehen. Der Konstrukteur muß weiterhin abschätzen, welche laufenden Kosten darüber hinaus entstehen werden, etwa als Wartungskosten oder Energiekosten, und diese zu den Kapitalkosten addieren, um die jährlichen Betriebskosten zu erhalten.

Der Konstrukteur muß sich entscheiden, welche Kosten in seinem Fall wesentlich sind: Wenn die Herstellkosten im wesentlichen durch die Materialkosten bestimmt sind, genügt es häufig, diese allein zu berücksichtigen. In den meisten Fällen spielen jedoch auch die Fertigungskosten eine erhebliche Rolle, so daß dann die Herstellungskosten als Summe von Material- und Fertigungskosten zu berücksichtigen sind. Wenn höhere Betriebskosten geringeren Herstellkosten entsprechen und umgekehrt, dann ist zu prüfen, ob statt der Herstellkosten die Betriebskosten für die wirtschaftliche Optimierung der Konstruktion maßgebend sind. Nach der Entscheidung, welche Kosten wesentlich sind, formuliert der Konstrukteur die Kostengleichung.

2.4 Aufstellung und Auswertung der Bemessungsgleichung

Die Beanspruchungsgleichung (I) repräsentiert die wesentlichen technischen Forderungen an das optimal zu bemessende Bauteil, die Kostengleichung (II) die wirtschaftlichen Forderungen. Beide Forderungen müssen zugleich berücksichtigt werden. Mathematisch bedeutet das, daß die beiden Gleichungen – etwa durch Einsetzen – zu einer Gleichung zusammengefaßt werden müssen. In der Bemessungslehre heißt diese Gleichung die „Bemessungsgleichung“ (und wird in der Regel mit III bezeichnet).

Bemessungsgleichungen werden dazu verwendet, um wesentliche kostenintensive Bauteile oder Baugruppen einer Konstruktion technisch und wirtschaftlich optimal auszulegen. Je nach Aufgabenstellung kann die Bemessungsgleichung verschieden ausgewertet werden:

- In vielen Fällen, wie etwa auch im Einführungsbeispiel in Abschnitt 2.1, genügt eine einfache Diskussion der Bemessungsgleichung, aus der bei geeigneter Formulierung direkt abzulesen ist, welcher Werkstoff, welche Form, welche Abmessungen optimal sind.
- In anderen Fällen läßt sich das anzustrebende Optimum nicht direkt aus der Bemessungsgleichung ablesen, sondern muß daraus nach dem üblichen mathematischen Verfahren durch Differenzieren und Nullsetzen abgeleitet werden.
- Im Einführungsbeispiel in Abschnitt 2.1 ließ sich zusätzlich aus dem sogenannten Aufgabenfaktor der Zusammenhang zwischen wesentlichen Daten der Aufgabenstellung und den Kosten ablesen: Ein Biegeträger mit dreifacher Tragkraft würde etwa die dreifachen Kosten verursachen, ein Biegeträger mit dreifacher Spannweite die neunfachen Kosten. In diesem Sinne lassen sich die meisten Bemessungsgleichungen auch im Sinne von „Wachstumsgesetzen“ verstehen, die angeben, wie die Kosten mit der Aufgabenstellung wachsen. Wenn man die Übertragung einer bewährten Konstruktion in einen anderen Leistungsbereich plant, ist natürlich die Information sehr nützlich, ob dabei die Kosten etwa proportional steigen oder über- oder seltener auch unterproportional.

2.5 Varianten zum Einführungsbeispiel

In Abschnitt 2.1 wurde als Einführungsbeispiel die Bemessung eines Biegeträgers in einfacher Weise behandelt. Aus den drei folgenden Abschnitten 2.2 bis 2.4 geht hervor, daß sich die Aufgabenstellung auch anders hätte formulieren lassen:

- Bezuglich der Belastung hätte man nicht nur die Nutzlast, sondern auch das Eigengewicht berücksichtigen können.
- Bezuglich der Beanspruchung hätte man auch an die Knickbeanspruchung denken können.
- Bezuglich der Kosten hätte man die Materialkosten allein, die Fertigungskosten allein oder die Herstellkosten als Summe davon berücksichtigen können.

Der Konstrukteur wird hier, je nachdem wie sein Einzelfall gelagert ist, immer so entscheiden, daß er möglichst wenig Rechenaufwand hat, daß aber die wesentlichsten Einflußgrößen berücksichtigt werden.

In diesem Abschnitt 2.5 wird deshalb das Einführungsbeispiel noch einmal unter verschiedenen Bedingungen bezüglich Belastung, Beanspruchung und Kosten erörtert, um zu zeigen, daß die Methode der Bemessungslehre sich immer in derselben Weise vorteilhaft anwenden läßt. (Der eilige Leser, der schon einen positiven Eindruck vom Nutzen der Bemessungslehre hat, mag diesen Abschnitt überspringen.)

2.5.1 Oberseitig bearbeiteter Biegeträger

Zusätzlich zum Einführungsbeispiel in Abschnitt 2.1 wird nun angenommen, der Balken müsse, etwa um die Last aufzunehmen, an der Oberseite bearbeitet werden, und deshalb sollen in der Kostengleichung nicht nur die Materialkosten berücksichtigt werden, sondern die Herstellkosten als Summe von Material- und Fertigungskosten. Zur Vereinfachung wird in der Beanspruchungsgleichung hier nur die Biegebeanspruchung berücksichtigt.

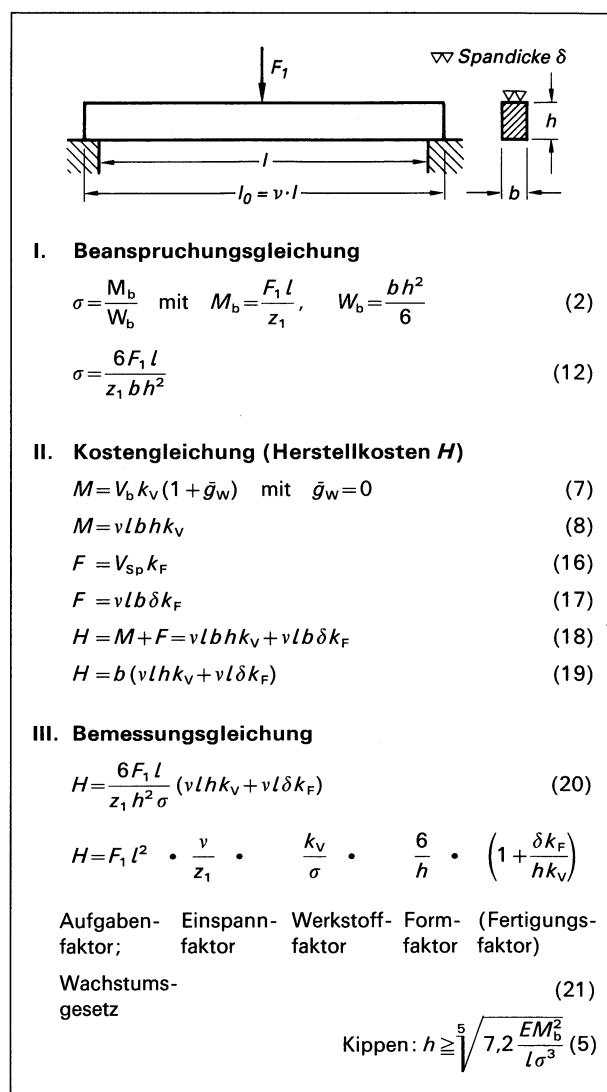


Bild 5. Biegeträger, oberseitig bearbeitet, optimale Bemessung unter Berücksichtigung der Herstellkosten

Das Vorgehen ist in diesem Fall (Bild 5) dasselbe, wie im Einführungsbeispiel: Zunächst wird die Beanspruchungsgleichung I ermittelt, dann die Kosten-Gleichung II, dann werden beide zur Bemessungsgleichung III vereinigt, die dann nach Zerlegung in Faktoren diskutiert wird. Hier ergibt sich erwartungsgemäß ein zusätzlicher Faktor $\delta k_F/h k_v$, der „Fertigungsfaktor“ genannt werden könnte, weil er im wesentlichen durch das Verhältnis von spezifischen Fertigungskosten k_F zu spezifischen Materialkosten k_v bestimmt wird. Die Diskussion dieses Faktors führt zu der Forderung, daß das Verhältnis δ/h von Spanndicke zu Balkenhöhe möglichst klein sein soll und daß das Verhältnis k_F/k_v möglichst klein sein soll.

2.5.2 Allseitig bearbeiteter Biegeträger

In Erweiterung des vorigen Beispiels sei nun angenommen, der Biegeträger müsse an allen vier Längsflächen bearbeitet werden (Bild 6), und die entsprechenden Fertigungskosten sollten bei der Bemessung berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise ist hier genauso, wie im vorigen Beispiel, nur müssen bei der Kostengleichung die Fertigungskosten für drei zusätzlich zu bearbeitende Flächen berücksichtigt werden.

Durch Einsetzen der Beanspruchungsgleichung in die Kostengleichung ergibt sich die Bemessungsgleichung, Gl.(23) in Bild 6, und daraus nach einfacher Umformung Gl.(24). Diese Gleichung ist formal etwas komplizierter als die Bemessungsgleichungen der vorigen Beispiele. Das optimale Ergebnis läßt sich nicht mehr direkt aus der Gleichung ablesen: Würde der Wert von h zu groß gewählt, so wären die ersten beiden Terme der Bemessungsgleichung zwar klein, der dritte aber groß; würde der Wert von h zu klein gewählt, so wäre der dritte Term klein, die beiden ersten aber groß. Zwischen einem zu großen und einem zu kleinen Wert von h muß es einen Optimalwert der Herstellkosten geben.

Der optimale Wert der Querschnittshöhe h ergibt sich durch Differenzieren der Herstellkosten H nach h und Nullsetzen des Ergebnisses, Gl.(25) in Bild 6. Diese Gleichung läßt sich durch einige (hier weggelassene) Umformungen vereinfachen zu Gl.(26), die sich näherungsweise nach h/b auflösen läßt, Gl.(27) in Bild 6.

Hieraus läßt sich derjenige Wert des Verhältnisses h/b von Höhe zu Breite des Rechteckquerschnittes ermitteln, der den kleinstmöglichen Herstellkosten H (das heißt Materialkosten M + Fertigungskosten F) entspricht. Zur Kontrolle der Kippgefahr dient wieder Gl.(6) aus Bild 1.

Nun genügt es aber noch nicht, die theoretisch optimalen Abmessungen dies Biegeträgers festzulegen. Es

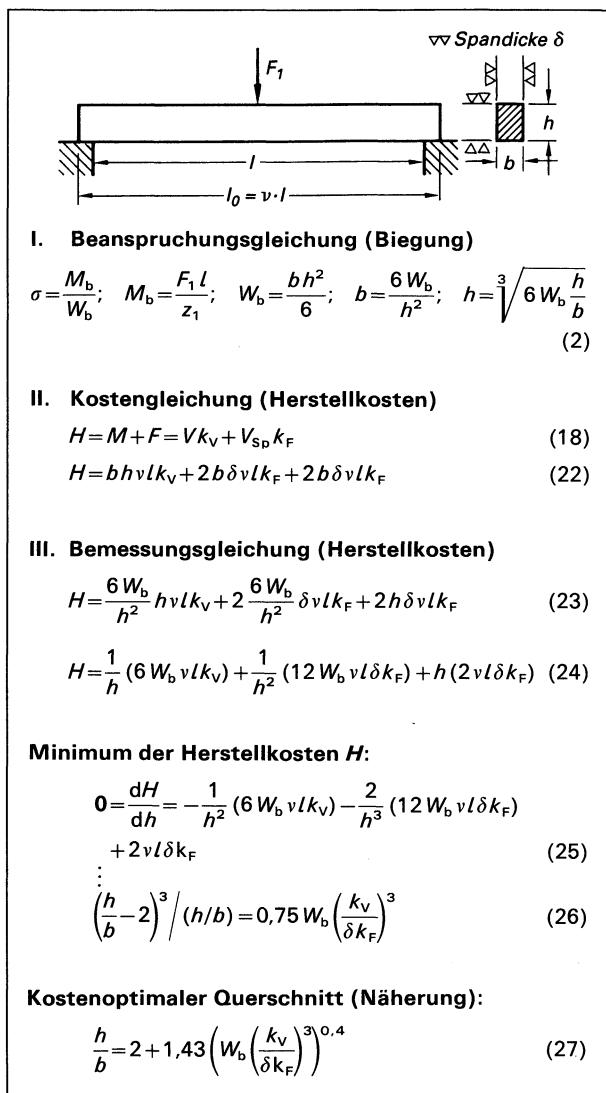


Bild 6. Biegeträger, komplett bearbeitet, optimale Bemessung unter Berücksichtigung der Herstellkosten

ist vielmehr zu berücksichtigen, daß die Abmessungen des unbearbeiteten Halbzeuges aus der entsprechenden Maßnorm ausgewählt werden müssen. In Bild 7 werden für ein bestimmtes Zahlenbeispiel die theoretisch optimalen Abmessungs- und Kostenwerte den Werten gegenübergestellt, die sich unter Berücksichtigung der einschlägigen Maßnorm ergeben.

Die durchgezogenen Linien in Bild 7 sind die errechneten Material-, Fertigungs- und Herstellkosten entsprechend Gl.(18). Da in der entsprechenden Maßnorm DIN 1017 nur eine Auswahl bestimmter Abmessungen enthalten ist, läßt sich nicht jeder beliebige Wert von Querschnittshöhe h und -breite b realisieren. Es wurden deshalb aus der Maßnorm eine Reihe von Querschnitten ausgewählt, die den rechnerischen Werten möglichst gut entsprechen. Für diese einzelnen Querschnitte wurden nach Gl.(18) entsprechende Werte der Materialkosten M , der Fertigungs-

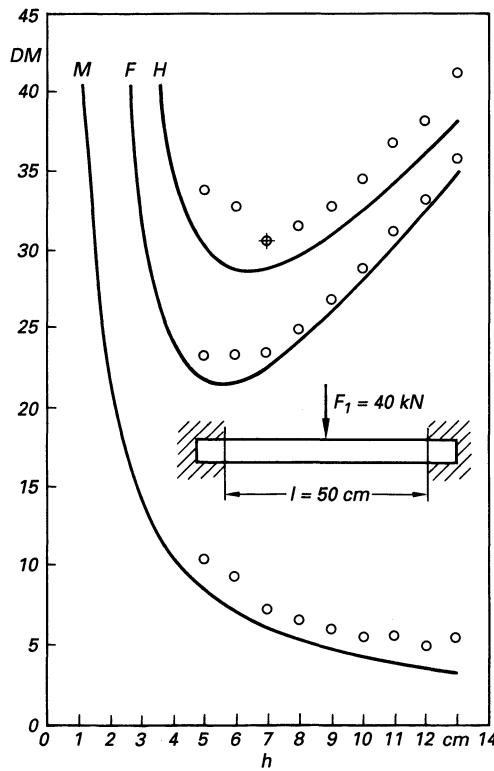


Bild 7. Biegeträger, optimale Bemessung unter Berücksichtigung der Herstellkosten – Kontrolle

- Kostenverlauf, theoretisch (ohne Bearbeitungszugabe)
- + genormtes Halbzeug (Flachstahl DIN 1017 – St 50-2)

kosten F und der Herstellkosten H ermittelt und in Bild 7 als kleine Kreise eingetragen. Die Kostenwerte liegen über den theoretischen Werten. Das liegt an den Abweichungen der Maße in der Norm von den theoretisch optimalen Werten, an den relativ großen Abmessungstoleranzen des Halbzeuges und den Bearbeitungszugaben.

Man erkennt jedoch aus der Darstellung in Bild 7, daß der kostengünstigste Querschnitt \oplus von allen realisierbaren Querschnitten dem rechnerischen Optimum am nächsten kommt. Damit ist das hier verwendete Rechenverfahren bestätigt, das theoretische Optimum des Querschnittes entsprechend Gl.(27) in Bild 6 zu bestimmen und dann aus der Maßnorm einen Querschnitt auszuwählen, der diesem Optimum möglichst nahe kommt.

2.5.3 Biegeträger unter Streckenlast und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes

Abweichend von den bisherigen Beispielen sei nun angenommen, daß der Biegeträger durch eine Streckenlast beansprucht wird und daß zusätzlich dazu sein Eigengewicht berücksichtigt werden soll.

Bild 8 zeigt das Ergebnis eines durchgerechneten Zahlenbeispieles: Man erkennt deutlich, welche Profile hier günstig, welche ungünstig sind; man erkennt, wie mit zunehmender Spannweite und damit zuneh-

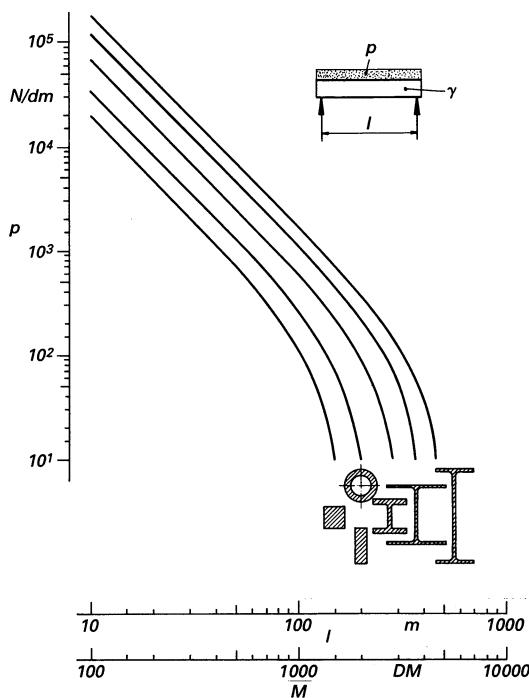


Bild 8. Belastbarkeit (Streckenlast p), Stützweite l und Materialkosten M verschiedener Profile gleicher Querschnittsfläche A

$$\begin{aligned} A &\approx 1 \text{ dm}^3, \quad \sigma_{\text{bzul}} = 150 \text{ N/mm}^2, \\ \gamma &= 78,5 \text{ N/dm}^3, \quad k_v = 10 \text{ DM/dm}^3 \end{aligned}$$

menden Materialkosten eines bestimmten Trägers seine Tragfähigkeit stark überproportional abnimmt und schließlich sogar zu Null wird, wenn das Eigengewicht des Trägers ihn schon allein bis zur zulässigen Biegebeanspruchung belastet.

In Tabelle 2 sind die Formelzeichen für die wichtigsten Einflußgrößen in diesem Abschnitt 2 zusammengestellt.

2.6 Zusammenfassung: Anwendung der Bemessungslehre

An dem Beispiel der optimalen technisch-wirtschaftlichen Bemessung eines einfachen Biegeträgers wurde ausführlich das Vorgehen bei der Behandlung von Aufgaben der Bemessungslehre behandelt und an Zahlenbeispielen erläutert. Damit sollte vor allem das Verfahren der Bemessungslehre demonstriert werden: I. Aufstellung der Beanspruchungsgleichung, II. Aufstellung der Kostengleichung und III. Zusammenfassung beider zur Bemessungsgleichung, aus der durch Diskussion oder durch mathematische Ableitung die wesentlichen Merkmale der technisch-wirtschaftlich optimalen Lösung abgeleitet werden.

Das Verfahren ist bei allen Aufgaben der Bemessungslehre im Prinzip dasselbe. Wie es an diesem einfachen Beispiel des Biegeträgers gezeigt wurde, läßt

Tabelle 2. Biegeträger, Formelzeichen
der Einflußgrößen

Symbol	Einheit	Größe
b	cm	Balkenbreite
F	DM	Fertigungskosten
F_1	kN	Belastungskraft
\bar{g}_w	1	mittlerer Werkstoffgemeinkostenfaktor
h	cm	Balkenhöhe
H	DM	Herstellkosten
k_F	DM/cm ³	Bearbeitungskosten je Volumeneinheit
k_V^*	1	relative Werkstoffkosten
k_V	DM/cm ³	spezifische Werkstoffkosten
l	cm	Spannweite
l_0	cm	Gesamtlänge
M	DM	Materialkosten
M_b	kNm	(maximales) Biegemoment
S	1	Sicherheit; $S = \sigma_s / \sigma$
V_b	cm ³	Bruttomaterialvolumen
V_{sp}	cm ³	zu zerspanendes Volumen
W_b	cm ³	Biegewiderstandsmoment
z_1	1	Einspannziffer
δ	cm	Spantiefe
v	1	Verhältnis l_0 / l
σ	kN/cm ²	zulässige Spannung = Nennspannung
σ_s	kN/cm ²	(Mindest-)Streckgrenze

es sich auch auf andersartige Beispiele anwenden. Für den Konstrukteur bleiben bei der Anwendung der Bemessungslehre jedoch noch eine Reihe von Aufgaben, die er zu lösen, von Fragen, die er zu beantworten hat.

Zunächst sollte er prüfen, ob im vorliegenden Fall die Bemessungslehre überhaupt angewendet werden soll oder ob das betreffende Bauteil oder die betreffende Baugruppe doch nicht so kostenintensiv ist, daß sich der Rechenaufwand für die Durchführung der Bemessungslehre lohnt. Bei dieser Prüfung kann sich umgekehrt auch ergeben, daß es besser ist, nicht nur ein bestimmtes Bauteil, sondern lieber gleichzeitig das Bauteil und die wichtigsten benachbarten Bauteile, also eine sogenannte Gestaltungszone, mit Hilfe der Bemessungslehre zu optimieren. Beim Beispiel des Biegeträgers könnte das etwa die Forderung bedeuten, nicht den Biegeträger für sich allein zu optimieren, sondern zugleich die Bauteile, an denen er befestigt oder eingespannt ist.

Viele Bauteile sind nicht nur einer einzigen, sondern verschiedenen und zusammengesetzten Beanspruchungen ausgesetzt. Der Konstrukteur wird hier prüfen, welche dieser Beanspruchungen so wichtig ist, daß sie bei der Bemessung berücksichtigt werden muß. Vor der Aufstellung der Kostengleichung soll der Konstrukteur prüfen, ob hier die Materialkosten, die Herstellkosten oder die Betriebskosten wesentlich sind.

Bei der Aufstellung der Beanspruchungsgleichung und der Kostengleichung wird der Konstrukteur anstreben, mit möglichst einfachen Annahmen und

Formeln auszukommen, um den Rechenaufwand gering zu halten. Der Rechenaufwand ist der Grund dafür, daß die Bemessungslehre bisher nicht so häufig angewendet wurde, wie es ihrer Bedeutung entspricht. Durch die Verwendung elektronischer Taschenrechner oder anderer Kleinrechner wird der Aufwand für das Rechnen erheblich verringert und damit die Anwendung der Bemessungslehre sehr erleichtert.

Der Konstrukteur sollte nun andererseits aber auch nicht den Ehrgeiz haben, mit Hilfe der Bemessungslehre Abmessungen auf Zehntelprozente genau zu ermitteln: Die endgültigen Abmessungen werden meist unter Verwendung von Normen und Lagerlisten festgelegt, wobei ein zu genaues Rechenergebnis doch wieder gerundet werden muß.

Anschließend soll die allgemeinere Frage nach dem möglichen Anwendungsbereich der Bemessungslehre angesprochen werden, Bild 9 und Bild 10: In jeder Maschine müssen physikalische Effekte realisiert

werden. Dazu muß man konstruktiv bestimmte Randbedingungen vorsehen, das sind in der Regel bestimmte Wirkflächen. Die physikalischen Effekte haben Beanspruchungen des Materials zur Folge, die bestimmte Querschnitte der Bauteile erfordern. Es läßt sich in der Regel also eine Beanspruchungsgleichung aufstellen, die den Zusammenhang zwischen den technischen Anforderungen an die Konstruktion und gewissen Flächen und Querschnitten, allgemein gewissen Abmessungen, wiedergibt.

Diese Abmessungen werden gewöhnlich in Skizzen oder Zeichnungen dargestellt. Aus den Abmessungen und aus der Art des gewählten Materials kann auf die Materialkosten geschlossen werden. In vielen Fällen lassen sich nach den Abmessungen auch die Fertigungskosten abschätzen. Damit wird es möglich, Kostengleichungen aufzustellen, die den Zusammenhang zwischen den Kosten (z.B. den Herstellkosten oder den Betriebskosten) und den Abmessungen einer bestimmten Konstruktion wiedergeben.

Da sowohl in der Beanspruchungsgleichung als auch in der Kostengleichung Abmessungen vorkommen, läßt sich durch Elimination einer Abmessung aus der Beanspruchungsgleichung und der Kostengleichung zu einer Bemessungsgleichung kommen, in der der Zusammenhang zwischen Anforderungen, Beanspruchungen und Kosten einer Konstruktion formelmäßig dargestellt wird, so daß sich hiernach die optimale Kombination von Werkstoffen und Abmessungen im einzelnen festlegen läßt.

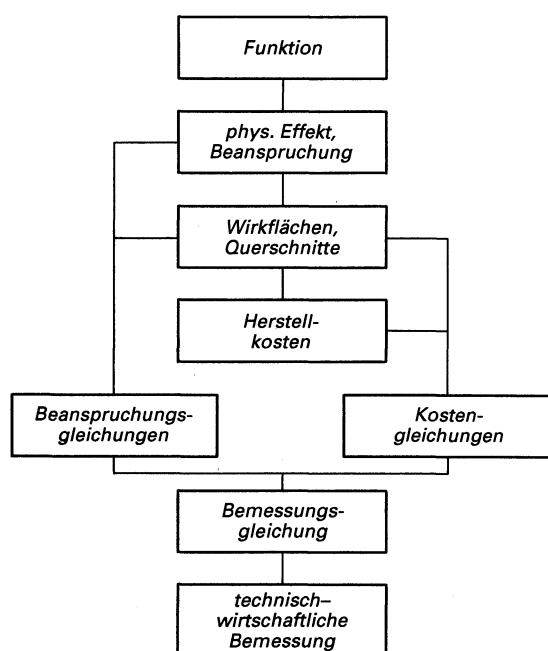


Bild 9. Technisch-wirtschaftliche Bemessung, schematisch

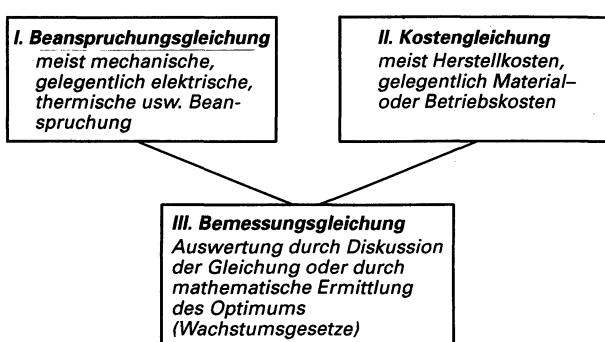


Bild 10. Bemessungslehre, schematisch

3 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden für die Anwendung der Bemessungslehre einige Beispiele zusammengestellt.

3.1 Bemessung von Trägern und Wellen

Träger und Wellen sind einfache Bauteile, die in vielen Konstruktionen vorkommen und für die es sich deshalb lohnt, Bemessungsgleichungen aufzustellen, um mit ihrer Hilfe diese Bauteile kostengünstig zu gestalten. In Abschnitt 2 wurde beispielhaft bereits eine Bemessungsgleichung für einen Biegeträger mit Rechteckquerschnitt abgeleitet, wobei sowohl dessen Materialkosten als auch die Fertigungskosten für einen Bearbeitungsgang an diesem Träger mit einzogen wurden.

In den folgenden Ausführungen wird dargestellt, wie man allgemein gültige Bemessungsgleichungen für Träger und Wellen mit unterschiedlichen Beanspruchungstypen, Einspannungen und Querschnitten aufstellen kann und welche Gesichtspunkte bei Anwendung dieser Bemessungsgleichungen zu beachten sind.

3.1.1 Beanspruchungsarten

Bei der Biegebelastung eines Trägers wie auch bei der Torsionsbelastung einer Welle ist zwischen Beanspruchung auf Festigkeit und Beanspruchung auf Steifigkeit zu unterscheiden.

Bei der Beanspruchung auf Festigkeit sind die auftretenden Biegespannungen σ_b oder Torsionsspannungen τ kennzeichnend bzw. deren zulässige Werte maßgebend, bei der Beanspruchung auf Formsteifigkeit sind es die Durchbiegungen f oder die Verdrehwinkel ψ .

3.1.2 Einspannungen

Bei der Auslegung von Biegeträgern sind frei aufliegende Träger oder einseitig und beidseitig eingespannte Träger möglich. Die Art der Einspannung bestimmt die Lage und Größe des maximalen Biegemomentes und damit der maximalen Biegespannung $\sigma_{b\max}$, die für die Berechnung des erforderlichen Widerstandsmomentes W_x gebraucht wird. Ebenso bestimmt die Art der Einspannung die Lage und Größe der größten Durchbiegung f_{\max} der Träger, die für die Berechnung des erforderlichen Trägheitsmoments

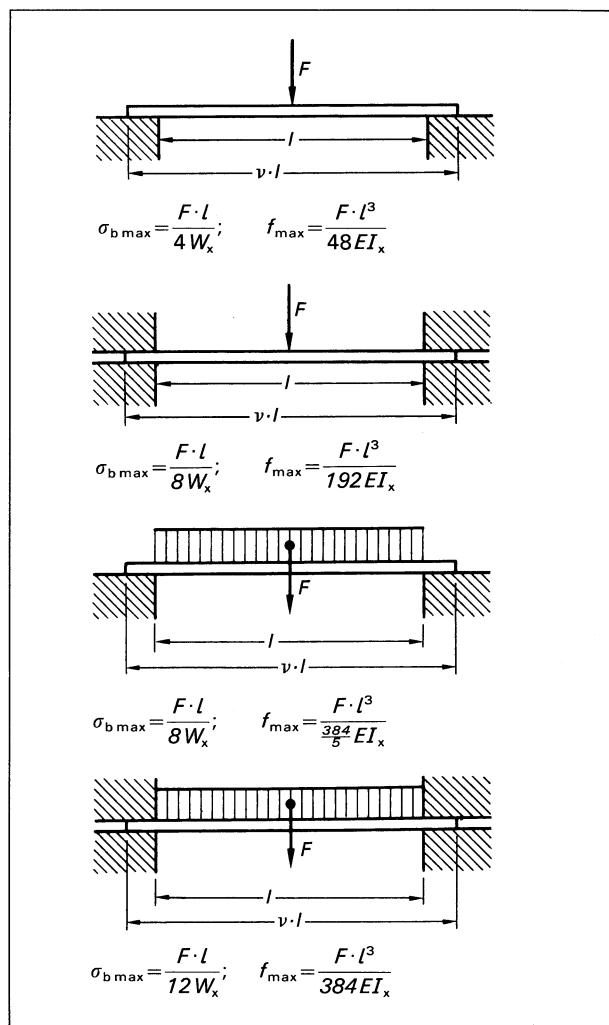


Bild 11. Einspannarten für Träger

des I_x benötigt wird. Beispielhaft sind einige symmetrische Einspannarten und die dafür geltenden Gleichungen in Bild 11 gezeigt.

Zusammenfassend lässt sich schreiben:

$$\sigma_{b\max} = \frac{F \cdot l}{z_1 \cdot W_x} \quad (28)$$

und

$$f_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{z_2 \cdot E \cdot I_x} \quad (29)$$

mit z_1 und z_2 als von der Einspannung abhängigen Ziffern, W_x als dem erforderlichen Widerstandsmoment, I_x als dem erforderlichen Trägheitsmoment und E als dem Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes. Der Verlängerungsfaktor v bestimmt die Gesamtlänge $v \cdot l$ des jeweiligen Trägers. Dieser Faktor v ist abhängig von den konstruktiven bzw. baulichen Gegebenheiten der Einspannung und wird bei den frei aufliegenden Trägern z. B. von der zulässigen Flächenpressung zwischen Träger und Auflage bestimmt.

Auch bei auf Torsion beanspruchten Wellen lassen sich entsprechende Gleichungen angeben, Bild 12. Hierin sind τ_{\max} die maximale Verdrehspannung, T das angreifende Verdrehmoment, W_t das erforderliche Widerstandsmoment gegen Verdrehung, I_t der Drillungswiderstand und G der Gleitmodul des verwendeten Werkstoffes. Auch hier gibt es den Verlängerungsfaktor v .

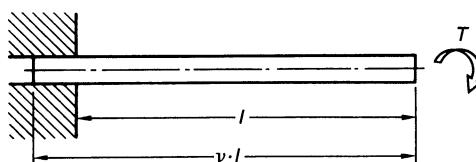


Bild 12. Auf Torsion beanspruchte Welle

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}; \quad \psi_{\max} = \frac{T \cdot l}{I_t \cdot G}$$

3.1.3 Querschnitte

Für Träger und Wellen können die unterschiedlichsten Querschnitte benutzt werden. Die Querschnittsabmessungen werden bestimmt von der Größe des Biege- oder Verdrehmomentes und der zulässigen Biegespannung σ_b bzw. Torsionsspannung τ an der kritischen Stelle des jeweiligen Querschnittes oder auch von der zulässigen Durchbiegung f bzw. Verdrehung ψ und dem Elastizitätsmodul E bzw. dem Gleitmodul G des verwendeten Werkstoffes. Die Auslegung und Bemessung von Trägern und Wellen lässt sich erheblich vereinfachen, wenn für alle möglichen Querschnitte bestimmte dimensionslose Kennzahlen eingeführt werden, z. B.

- für einen beliebigen auf Festigkeit beanspruchten Biegeträgerquerschnitt

$$\beta_1 = \frac{S \cdot y}{W_x} \quad (30)$$

mit S als der Querschnittsfläche, y als dem doppelten Abstand der am höchsten belasteten Biegefaser von der Biegeachse und W_x als dem Widerstandsmoment bei Biegung um die x -Achse

- für einen beliebigen auf Formsteifigkeit beanspruchten Biegeträgerquerschnitt

$$\beta_2 = \frac{S \cdot y^2}{I_x} \quad (31)$$

mit I_x als dem Trägheitsmoment bei Biegung um die x -Achse

- für einen beliebigen auf Festigkeit beanspruchten Wellenquerschnitt

$$\beta_3 = \frac{S \cdot x}{W_t} \quad (32)$$

mit x als dem doppelten Achsabstand der am höchsten belasteten Stelle des Querschnittes und W_t als dem Widerstandsmoment gegen Verdrehung

- für einen beliebigen auf Formsteifigkeit beanspruchten Wellenquerschnitt

$$\beta_4 = \frac{S \cdot x^2}{I_t} \quad (33)$$

mit I_t als dem Drillungswiderstand.

Diese Kennzahlen eignen sich besonders gut für vergleichende Betrachtungen, aber auch für die Aufstellung von Bemessungsgleichungen, die ja das eigentliche Ziel dieser Betrachtungen sind.

3.1.4 Zusammenstellung von Beanspruchungsgleichungen (I)

Für folgende vier Beanspruchungen lassen sich unter Beachtung der voranstehenden Ausführungen folgende Beanspruchungsgleichungen angeben:

- für einen auf Festigkeit beanspruchten Biegeträger

$$(I) \quad \sigma_b = \frac{M_{b\max}}{W_x} = \frac{F \cdot l}{z_1} \cdot \frac{\beta_1}{S \cdot y} \quad (34)$$

- für einen auf Formsteifigkeit beanspruchten Biegeträger

$$(I) \quad f = \frac{F \cdot l^3}{z_2 \cdot E \cdot I_x} = \frac{F \cdot l^3}{z_2 \cdot E} \cdot \frac{\beta_2}{S \cdot y^2} \quad (35)$$

- für eine auf Festigkeit beanspruchte Welle

$$(I) \quad \tau = \frac{T}{W_t} = T \cdot \frac{\beta_3}{S \cdot x} \quad (36)$$

- für eine auf Verdrehung beanspruchte Welle

$$(I) \quad \psi = \frac{T \cdot l}{I_t G} = \frac{T \cdot l}{G} \cdot \frac{\beta_4}{S \cdot x^2} \quad (37)$$

3.1.5 Ermittlung der Kostengleichungen (II)

Sowohl für Träger als auch für Wellen lässt sich allgemein folgende Kostengleichung angeben:

$$(II) \quad M = S \cdot v l \cdot k_v \quad (38)$$

mit k_v als den spezifischen Werkstoffkosten.

3.1.6 Ermittlung der Bemessungsgleichungen (III)

Die Beanspruchungsgleichungen (I) werden nach dem Querschnitt S aufgelöst und in die Kostengleichung (II) eingesetzt. Die entstehenden Terme werden auf bestimmte, noch zu erläuternde Weise geordnet. Es ergeben sich folgende Bemessungsgleichungen:

- für die Festigkeit beanspruchte Biegeträger

$$(III) \quad M = F \cdot l^2 \cdot \frac{v}{z_1} \cdot \frac{\beta_1}{y} \cdot \frac{k_v}{\sigma_b} \quad (39)$$

- für auf Formsteifigkeit beanspruchte Biegeträger

$$(III) \quad M = F \cdot l^4 \cdot \frac{v}{z_2} \cdot \frac{\beta_2}{y^2} \cdot \frac{k_v}{E} \quad (40)$$

- für auf Festigkeit beanspruchte Wellen

$$(III) \quad M = T l \cdot v \cdot \frac{\beta_3}{x} \cdot \frac{k_v}{\tau} \quad (41)$$

- für auf Formsteifigkeit beanspruchte Wellen

$$(III) \quad M = \frac{T l^2}{\psi} \cdot v \cdot \frac{\beta_4}{x^2} \cdot \frac{k_v}{G} \quad (42)$$

Diese Bemessungsgleichungen sind vom Aufbau her identisch und enthalten die in Tabelle 3 zusammengestellten Faktoren. Sie eignen sich dazu, gezielt kostensenkende Maßnahmen zu ergreifen.

Tabelle 3. Faktoren in Bemessungsgleichungen für Träger und Wellen

Gleichung	(39)	(40)	(41)	(42)
Faktor				
Aufgabenfaktor	$F \cdot l^2$	$F \cdot l^4$	$T \cdot l$	$\frac{T \cdot l^2}{\psi}$
Einspannfaktor	$\frac{v}{z_1}$	$\frac{v}{z_2}$	v	v
Formfaktor	$\frac{\beta_1}{y}$	$\frac{\beta_2}{y^2}$	$\frac{\beta_3}{x}$	$\frac{\beta_4}{x^2}$
Techn.-wirtsch. Kennzahl	$\frac{k_v}{\sigma_b}$	$\frac{k_v}{E}$	$\frac{k_v}{\tau}$	$\frac{k_v}{G}$

Dabei soll zunächst von den Aufgabenfaktoren absehen werden, denn sie enthalten die Aufgabenforderungen, die nicht ohne weiteres geändert werden können. (Über sich hier anbietende Möglichkeiten der Kostensenkung wird im Beitrag „Kostenvergleich für Träger ohne und mit Mittelstütze“, Abschnitt 3.2, berichtet.) Die Einflußmöglichkeiten sind bei den Einspannfaktoren meistens gering. Besonders interessant für kostensenkende Maßnahmen sind aber die Formfaktoren und die technisch-wirtschaftlichen Kennzahlen.

Man wird also nach kleinen Werten von $\beta_1 \dots \beta_4$, d.h. nach entsprechend günstigen Querschnitten zu suchen haben. In Tabelle 4 sind diese und weitere interessante Querschnittswerte angegeben, die eine Querschnittsauswahl hinsichtlich kleiner Werte β ermöglichen; für die Werte y und x sind dabei die jeweiligen, ebenfalls in der Tafel angegebenen Größen in die Bemessungsgleichungen einzusetzen.

Die technisch-wirtschaftlichen Kennzahlen lassen sich anhand des Tabellenwerkes der Richtlinie VDI 2225 Blatt 2 leicht für jeden der dort angegebenen Halbzeugquerschnitte und Werkstoffe bestimmen.

Es gilt, in den Bemessungsgleichungen für Träger und Wellen jeden der jeweiligen Faktoren so klein wie möglich zu machen, um möglichst kleine Kosten zu erhalten. Bei diesem Vorgehen ist jedoch zu berücksichtigen, daß die einzelnen Faktoren der Bemessungsgleichungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern sich z.T. gegenläufig ändern, wenn ein Faktor im Sinne einer Kostensenkung geändert wird, z.B. wachsen die k_v -Werte, wenn bei Biegeträgern die Höhe h im Sinne einer Kostensenkung erhöht wird (allerdings nur bei wesentlicher Erhöhung von h !).

3.1.7 Variierbare und nicht variierbare Querschnitte

Viel wichtiger als die gegenseitige Abhängigkeit von Größen der Bemessungsgleichungen ist folgender Zusammenhang. Die Bemessungsgleichungen sind nur dann mit Erfolg anwendbar, wenn mit sogenannten variierbaren Querschnitten gearbeitet wird, d.h. Querschnitten, die durch mindestens zwei unterschiedliche Abmessungen gekennzeichnet sind, also z.B. ein Rechteckquerschnitt ($b \cdot h$) statt eines quadratischen Querschnittes (a^2). In der Bemessungsgleichung kommt in der Regel nur eine dieser Abmessungen vor, z.B. h in der Bemessungsgleichung für die auf Festigkeit beanspruchten Biegeträger:

$$(III) \quad M = F \cdot l^2 \cdot \frac{v}{z_1} \cdot \frac{\beta_1}{h} \cdot \frac{k_v}{\sigma_b} \quad (43)$$

Wenn zur Kostensenkung die Höhe h vergrößert wird, dann kann die in der Gleichung nicht vorkom-

mende Breite b so geändert werden, daß das für die Lösung der Aufgabe erforderliche Widerstandsmoment $W_x = b h^2 / 6$ konstant bleibt.

Dies geht natürlich nicht unbegrenzt; denn bei Vergrößerung von h nimmt b quadratisch ab. Der Träger wird immer schmäler und wird von einer bestimmten Grenze an instabil, d.h. er wird nicht mehr nur auf Biegung, sondern zusätzlich auf Beulung beansprucht. Dafür gelten dann andere Beanspruchungs- und damit auch andere Bemessungsgleichungen (vgl. auch Abschnitt 2).

Ähnlich verhält es sich bei der Bemessungsgleichung für die auf Formsteifigkeit beanspruchten Wellen:

$$(III) \quad M = \frac{T \cdot l^2}{\psi} \cdot v \cdot \frac{\beta_4}{D^2} \cdot \frac{k_v}{G} \quad (44)$$

Die Vergrößerung des Durchmessers D führt nur dann zu einer Kostensenkung, wenn keine Vollwelle – mit nichtvariierbarem Querschnitt – vorliegt. Es ist einleuchtend, daß sich bei einer Vollwelle mit Vergrößerung von D , die zur quadratischen Vergrößerung des Querschnitts bzw. des Wellenvolumens führt, die Kosten erhöhen. Dabei wird gleichzeitig der Drillungswiderstand I_t erhöht. Entsprechend verringert sich also der unter Belastung auftretende Verdrehwinkel ψ , der in der Bemessungsgleichung im Nenner steht. ψ verkleinert sich mit der 4. Potenz von D , so daß insgesamt – wie zu erwarten war – die Materialkosten in diesem Fall mit D^2 wachsen und nicht fallen.

Anders wird das Ergebnis, wenn die Welle einen Rohrquerschnitt aufweist, also einen variierbaren Querschnitt. Dieser ist durch zwei Maße – D und d – gekennzeichnet; d ist in der Bemessungsgleichung nicht enthalten und kann sich bei Veränderung von D unter Einhaltung des Drillungswiderstandes I_t frei ändern. Auch hier gilt aber, daß dabei das Rohr nicht zu dünnwandig werden darf; dann wäre es nicht allein der Torsionsbeanspruchung ausgesetzt, sondern auch zusätzlichen Beulbeanspruchungen.

3.1.8 Wachstumsgesetze

Jede der vorher abgeleiteten Bemessungsgleichungen stellt ein Wachstumsgesetz der Materialkosten in Abhängigkeit von anderen Faktoren (Parametern) dar, wobei die Abhängigkeit von den Aufgabenfaktoren als besonders wichtig anzusehen ist. Die Materialkosten für auf Festigkeit beanspruchte Biegeträger sind proportional zu F und l^2 , siehe Gl.(39), und für auf Formsteifigkeit beanspruchte Biegeträger proportional zu F und l^4 , siehe Gl.(40). Für Wellen gilt analog die Proportionalität zu T und l , Gl.(41), bzw. zu T , l^2 und $1/\psi$, Gl.(42). Die Proportionalität

S	$y=h$ $x=b$	$\frac{bh}{2}$	πab	H^2-h^2	$\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$\pi(ab-a_1b_1)$ $\approx \pi s \times (a+b-s)$	$BH-bh$	$BH+bh$	
W_x	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{\pi}{4}a^2b$	$\frac{H^4-h^4}{6H}$	$\frac{\pi}{32}\frac{D^4-d^4}{D}$ $\approx 0.8d^2s$	$\approx \frac{\pi}{4}s a \times (a+3b)$	$\frac{BH^3-bh^3}{6H}$	$\frac{BH^3+bh^3}{6H}$	
I_x	$\frac{bh^2}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\pi}{4}a^3b$	$\frac{H^4-h^4}{12}$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\approx \frac{\pi}{4}s a^2 \times (a+3b)$	$\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$\frac{BH^3+bh^3}{12}$	
W_t	$\approx \frac{\varepsilon^3}{3+1,8\varepsilon}h^3$	—	$\frac{\pi}{2}ab^2$	$\approx \frac{H+h}{8}(H^2-h^2)$	$\approx \frac{\pi}{8}s a \times (2b-3a)$	$\approx \frac{s}{2}(B+b)(H+h)$	$\text{für } s \ll b$ $\approx \frac{s}{4}(B+b)^2(H+h)$	$\text{für } s \ll b$ $\approx \frac{s}{4}(B+b)^2(H+h)$	
I_t	$\approx \frac{\varepsilon^3}{3+1,4\varepsilon+2,7\varepsilon^2}h^4$	—	$\frac{\pi}{a^2+b^2}a^3b^3$	$\approx \frac{H^4-h^4}{8}$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$ $\approx \frac{\pi}{4}s d^3$	$\approx \frac{4a^2b^2\pi s}{a+b}$	$\approx \frac{s}{4}(B+b)^2(H+h)$	$\text{für } s \ll b$ $\approx \frac{s}{4}(B+b)^2(H+h)$	
$\beta_1 = \frac{S_y}{W_x}$	6	12	8	$\frac{6}{1+\alpha^2}$	$\frac{12}{1+\alpha^2}$	$\approx 8 \frac{1+\varepsilon}{1+3\varepsilon}$	$\approx 8 \frac{1-\alpha'\alpha}{1-\alpha'\alpha^3}$	$\approx 6 \frac{1+\alpha'\alpha}{1+\alpha'\alpha^3}$	
$\beta_2 = \frac{S_y^2}{I_x}$	12	18	16	$\frac{12}{1+\alpha^2}$	$\frac{24}{1+\alpha^2}$	$\approx 16 \frac{1+\varepsilon}{1+3\varepsilon}$	$\approx 16 \frac{1-\alpha'\alpha}{1-\alpha'\alpha^3}$	$\approx 12 \frac{1-\alpha'\alpha}{1-\alpha'\alpha^3}$	
$\beta_3 = \frac{S_y}{W_t}$	$\approx 3+1,8\varepsilon$	—	4	$\frac{4}{1+\alpha^2}$	$\approx 1+\varepsilon$	$\square \text{ für } s \ll b$ $\approx 1+\varepsilon$	$\square \text{ für } s \ll b$ $\approx 1+\varepsilon$	$\square \text{ für } s \ll b$ $\approx 1+\varepsilon$	
$\beta_4 = \frac{S_y^2}{I_t}$	$\approx 3+1,4\varepsilon+2,7\varepsilon^2$	—	$4(1+\varepsilon^2)$	$\frac{8}{1+\alpha^2}$	$\approx (1+\varepsilon)^2$	$\approx (1+\varepsilon)^2$	$\square \text{ für } s \ll b$ $\approx (1+\varepsilon)^2$	$\square \text{ für } s \ll b$ $\approx (1+\varepsilon)^2$	
							$\alpha = \frac{h}{H} \text{ bzw. } \frac{d}{D}; \alpha' = \frac{b}{B}$	$\varepsilon = \frac{b}{a} \text{ bzw. } \frac{b}{h}$	$b < a \text{ bzw. } b < H$

zu Faktoren mit Exponenten, die deutlich größer als 1 sind, z. B. l^2 und l^4 , ist dabei besonders bedeutsam, weil bereits kleine Änderungen dieser Faktoren erhebliche Kostenveränderungen zur Folge haben. Das gilt nicht nur für die Aufgabenfaktoren, sondern auch für andere Parameter der Bemessungsgleichungen (z.B. $1/D^2$ in Gl.(42) für Wellen, die auf Formsteifigkeit beansprucht werden).

Diese Faktoren mit absolut oder relativ größten Exponenten können als sogenannte empfindliche Größen bezeichnet werden. Die geschilderte Proportionalität ist jedoch nur dann wirklich gegeben, wenn die übrigen Größen der Bemessungsgleichungen jeweils konstant und damit als unabhängig von den Aufgabengrößen gesetzt werden können. Dies ist nicht immer ohne weiteres oder nur in bestimmten Grenzen möglich und muß jeweils untersucht werden.

3.2 Kostenvergleich für Träger ohne und mit Mittelstütze

In diesem Beispiel wird gezeigt, daß eine Bemessungsgleichung auch Anlaß zur Diskussion der Aufgabenstellung sein kann und daß durch die geänderte Aufgabenstellung die Kosten des zu schaffenden Erzeugnisses gesenkt werden können.

Bild 13 zeigt einen Träger mit der Spannweite l , auf den eine gleichmäßig verteilte Last F' (Streckenlast) wirkt, während Bild 14 eine ähnliche Anordnung mit zwei Trägern der Spannweite $l/2$ und einer Mittelstütze darstellt. Die Werkstoffkosten beider Anordnungen sollen miteinander verglichen werden.

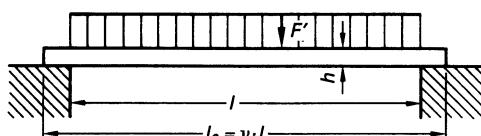


Bild 13. Träger ohne Mittelstütze

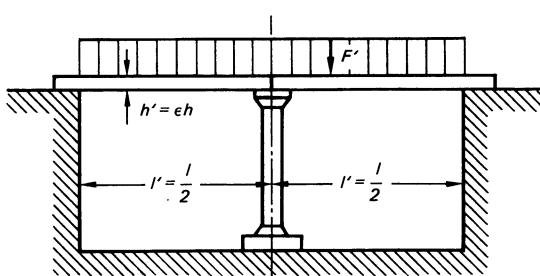


Bild 14. Träger mit Mittelstütze

3.2.1 Träger ohne Mittelstütze

In Anlehnung an Gleichung (38) in Abschnitt 3.1 ergeben sich die Werkstoffkosten für eine beliebige Länge l und Höhe h eines Rechteckträgers mit $F = F' \cdot l$ zu

$$W_b = F' \cdot l^3 \cdot \frac{v}{z_1} \cdot \frac{\beta_1}{h} \cdot \frac{k_v}{\sigma_{bzul}} \quad (45)$$

Die Werkstoffkosten W_b steigen also mit l^3 und sind gleichzeitig umgekehrt proportional h , das heißt, der Einfluß der Länge l , die man hier als „empfindliche Größe“ bezeichnen kann, ist groß. Der Faktor l^3 in der Bemessungsgleichung (45) gehört jedoch zum so genannten Aufgabenfaktor $F' \cdot l^3$ und darf nicht ohne weiteres geändert werden. Im folgenden sei angenommen, daß die in Bild 14 dargestellten Anordnung mit zwei kurzen Trägern und Mittelstütze als Alternative zulässig ist.

Der nachstehende Vergleich wird zunächst für einen rechteckigen Trägerquerschnitt $S = b \cdot h$ durchgeführt. Einer beliebig gewählten Trägerhöhe h entspricht eine ganz bestimmte Trägerbreite b , die aus

$$W_b = S v l k_v \\ \text{mit } b = \frac{W_b}{v l h k_v} \quad (46)$$

berechnet werden kann. Eine große Höhe h ergibt demnach eine kleine Breite b des Trägerquerschnittes, wobei jedoch das Widerstandsmoment W immer dem nach der Beziehung

$$F' \cdot l^2 = z_1 \sigma_{bzul} W \quad (47)$$

geforderten Wert entspricht (Wesen der Bemessungsgleichung).

3.2.2 Träger mit Mittelstütze

Für die Anordnung nach Bild 14 ist $l' = l/2$. Ferner sei $h' = \varepsilon \cdot h$, wobei ε wegen der geringeren Trägerlänge stets < 1 sein kann. Da alle übrigen Größen in Gleichung (45) trotz der veränderten Anordnung konstant bleiben, betragen die Werkstoffkosten W_b^* für die Anordnung mit Mittelstütze

$$W_b^* = 2 \left[F' \left(\frac{l}{2} \right)^3 \cdot \frac{v}{z_1} \cdot \frac{\beta_1}{\varepsilon h} \cdot \frac{k_v}{\sigma_{bzul}} \right] + M_{St} \quad (48)$$

bzw.

$$W_b^* = \frac{2}{2^3 \varepsilon} W_b + M_{St} = \frac{W_b}{4 \varepsilon} + M_{St} \quad (48a)$$

Mit M_{St} werden die zunächst noch unbekannten Materialkosten für die Mittelstütze und das Zubehör (Fundament und Verbindungselemente) erfaßt.

Um beurteilen zu können, bei welchem Wert M_{St} die beiden Ausführungen gleiche Werkstoffkosten haben, wird $W_b = W_b^*$ gesetzt:

$$W_b = \frac{W_b}{4 \varepsilon} + M_{St}$$

aufgelöst nach M_{St} ergibt sich

$$M_{St} = \left(1 - \frac{1}{4 \varepsilon} \right) \cdot W_b \quad (49)$$

Beispiel

Wird $h' = 0,75 h$ gesetzt ($\varepsilon = 0,75$), ergibt sich aus der Gleichung (49)

$$M_{St} = \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 0,75}\right) \cdot W_b = \frac{2}{3} W_b$$

Unter der getroffenen Annahme $\varepsilon = 0,75$ liegen also die Werkstoffkosten der Anordnung nach Bild 14 unter denen der Anordnung nach Bild 13, wenn die Mittelstütze nebst Zubehör weniger als $2/3$ der sehr teuren Ausführung mit langem Träger kostet. Bild 15 zeigt den Verlauf von W_b und $(W_b^* - M_{St})$ für $\varepsilon = 0,75$ in Abhängigkeit von l . Sofern für eine beliebige Länge l^* die Materialkosten M_{St} kleiner als die Differenz ΔW_b sind, ist die Anordnung nach Bild 14 wirtschaftlich günstiger.

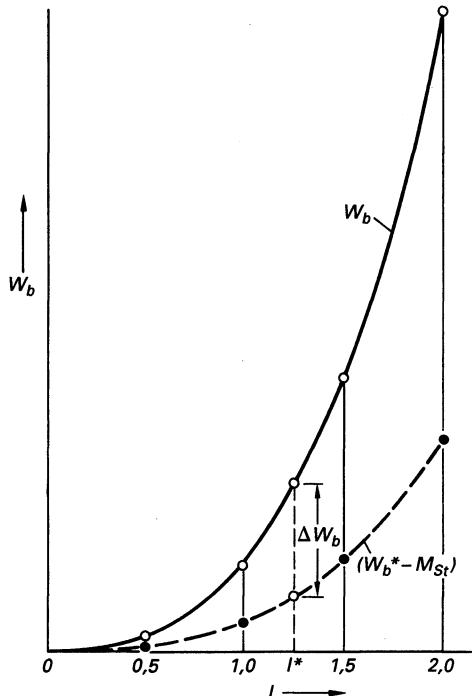


Bild 15. Materialkosten für Träger mit und ohne Mittelstütze (Beispiel für $\varepsilon = 0,75$)

Setzt man $\varepsilon = 1$, d.h. behält man die ursprüngliche Trägerhöhe bei, so können die Kosten für die Stütze sogar bis zu $3/4 W_b$ betragen.

Wird den Überlegungen ein nichtvariierbarer Querschnitt, z.B. ein Rechteckträger mit konstantem Seitenverhältnis $\alpha = b/h$ oder ein Profilträger zugrunde gelegt, ist folgendermaßen vorzugehen:

- Rechteckträger mit konstantem Seitenverhältnis $\alpha = b/h$.

Es ist

$$F' \cdot l^2 = z_1 W \sigma_{bzul} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{F' l^2}{z_1 \sigma_{bzul}} \quad (50)$$

Andererseits gelten die Gleichungen

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{\alpha \cdot h^3}{6} \quad (51)$$

und

$$S = \alpha \cdot h^2 \quad (52)$$

Aus Gleichung (51) folgt

$$h = \sqrt[3]{\frac{6W}{\alpha}} = \left(\frac{6W}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (53)$$

Eingesetzt in die Gleichung (52) ergibt sich

$$S = \alpha \cdot \left(\frac{6W}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = 3,3 \sqrt[3]{\alpha \cdot W^2} \quad (54)$$

Zusammen mit Gleichung (50) führt dies zu nachstehender Bemessungsgleichung:

$$\begin{aligned} W_b^0 &= 3,3 \sqrt[3]{\alpha} \left(\frac{F' l^2}{z_1 \sigma_{bzul}}\right)^{\frac{2}{3}} v l k_v \\ &= k_1 \cdot l^{\frac{7}{3}} = k_1 \cdot l^{2,33} \end{aligned} \quad (55)$$

- Profilträger, z.B. I-Träger

Zwischen den Querschnitten S und den Widerstandsmomenten W_x besteht bei den Profilträgern ein Zusammenhang in Form einer Potenzgleichung. Aus den Tabellen, z.B. für schmale I-Träger der I-Reihe (DIN 1025), werden deshalb zwei zusammengehörige Paare von Querschnitten S und Widerstandsmomenten W_x herausgesucht (Tabelle 5) und dann die Größen k und n in nachstehender Potenzgleichung ermittelt:

$$S = k \cdot W^n \quad (56)$$

Aus $10,6 = k \cdot 34,2^n$ und $69,1 = k \cdot 653^n$ folgen

$$n = 0,635 \quad \text{und} \quad k = 1,125$$

Eingesetzt in Gleichung (56) ergibt sich

$$S = 1,125 W^{0,635} \quad (57)$$

Zusammen mit Gleichung (50), die auch hier gilt, führt dies zu nachstehender Bemessungsgleichung

$$W_b^I = 1,125 \left(\frac{F' l^2}{z_1 \sigma_{bzul}}\right)^{0,635} v l k_v = k_2 \cdot l^{2,27} \quad (58)$$

wobei jeweils das der Größe

$$W = \frac{F' l^2}{z_1 \sigma_{bzul}} \quad (50)$$

am nächsten liegende Trägerprofil zu wählen ist.

Tabelle 5

Kurzzeichen	Querschnitt S cm^2	Widerstandsmoment W_x cm^3
I100	10,6	34,2
I300	69,1	653

Die Bemessungsgleichungen (55) und (58) sind ebenfalls allgemein gültig. Man erkennt, daß durch die Benutzung nichtvariierbarer Querschnitte der Einfluß der Trägerlänge auf die Kosten – und damit auch die Möglichkeit der Kostenbeeinflussung durch veränderte Trägerlängen – kleiner geworden ist (siehe Exponenten von l in den Gleichungen (45), (55) und (58)).

Zahlenbeispiel

Ein Einschnitt von $l=400$ cm Breite soll durch frei aufliegende schmale I-Träger für ruhende Streckenlast von $F'=150$ N/cm bei einer zulässigen Biegebeanspruchung von $\sigma_{bzul}=14000$ N/cm² einmal durch einen einzelnen Träger, ein andermal durch zwei kurze Träger und eine Mittelstütze geschlossen werden. Wie unterscheiden sich die Kosten für die Träger allein bzw. welche Kosten dürfen bei gleichwertiger Lösung für die Stütze aufgewendet werden, wenn das Verhältnis $v=l_0/l=1,1$ beträgt?

- *Träger ohne Mittelstütze*

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W_x = \frac{150 \cdot 400^2}{8 \cdot 14000} = 214 \text{ cm}^3 \triangleq \text{I 200 (DIN 1025)}$$

mit $W_x=214$ cm³. Nach Gleichung (58) betragen die Werkstoffkosten:

$$W_{b1} = 1,125 \cdot 214^{0,635} \cdot 1,1 \cdot 400 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 149,40 \text{ DM}$$

- *Träger mit Mittelstütze*

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W_{x2} = \frac{150 \cdot 200^2}{8 \cdot 14000} = 53,5 \text{ cm}^3 \triangleq \text{I 120 (DIN 1025)}$$

mit $W_x=54,7$ cm³. Die Kosten für die zwei kurzen Träger betragen

$$W_{b2} = 2 \cdot 1,125 \cdot 54,7^{0,635} \cdot 1,1 \cdot 200 \cdot 1,0 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 62,80 \text{ DM}$$

- Ergebnis:

Kostenverhältnis der Träger:

$$\frac{W_{b1}}{W_{b2}} = \frac{95,60}{40,20} = \frac{2,4}{1}$$

Zulässige Kosten für eine Stütze:

$$M_{st} = 149,40 \text{ DM} - 62,80 \text{ DM} = 86,60 \text{ DM}$$

3.3 Bemessung eines Wärmeaustauschers

In einem Wärmeaustauscher nach Bild 16 wird warmes Wasser durch ein Rohrbündel gepumpt, gleichzeitig wird kalte Luft quer zu den Rohren durch den

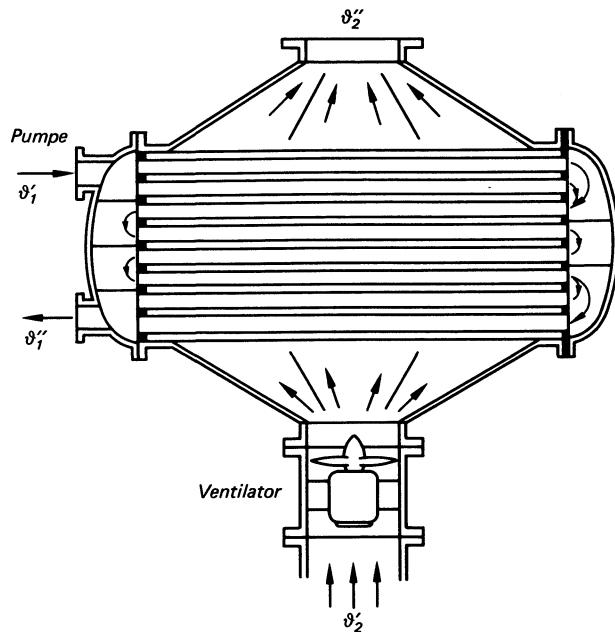


Bild 16. Wärmeaustauscher (Lufterhitzer)

θ'_1 Wassereintrittstemperatur

θ'_2 Wasseraustrittstemperatur

θ''_1 Lufteintrittstemperatur

θ''_2 Luftaustrittstemperatur

Tabelle 6. Wärmeaustauscher, Zusammenhang zwischen den wichtigsten Einflußgrößen

	Bestimmung der Wärmeleistung	Diagramm
(I)	$P_w = k A \Delta \vartheta_m$	(59) 4, 10
	$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$	(60) 1
	w, A in Anlehnung an ausgeführte Geräte	5
	$\alpha_2 \approx 6 \frac{w^{0,6}}{d^{0,4}}$	(61) 2
(IIa)	Bestimmung der Herstellkosten	
	$H = F + M$	(62) 9
	$F = F(A)$	(63) 7
	$M \approx (1 + \varepsilon) M_R = (1 + \varepsilon) \cdot (1 + \bar{g}_w) W_{bR}$	(64) 8
	$W_{bR} \approx A \delta k_v$	(65) 6
	$\delta k_v \approx \frac{9,8}{d^{0,45}}$ (k_v hier in DM/cm ³)	(66) 3
(IIb)	Bestimmung der Betriebskosten	
	$K_b = K_k + K_e$	(67) 16
	$K_k = z' \beta H$	(68) 17
	$K_e = \frac{P_w \zeta n_1 \varrho w^2 e t_m}{2 c_{v2} 49 \cdot \eta}$	(69) 11, 14, 15, 18...21
(III)	Wärmeleistung, Herstellkosten, Betriebskosten (Wachstumsgesetze)	
	$H = H(P_w)$	(70) 13
	$K_b = K_b(P_w)$	(71) 12

Wärmeaustauscher geblasen. Das Wasser gibt Wärme an die Luft ab, die Wassertemperatur sinkt, die Lufttemperatur steigt. Die wichtigsten Formeln für die rechnerische Bemessung des Wärmeaustauschers [14; 21] sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

Die Wärmeleistung hängt im wesentlichen ab von den Temperaturen der beiden strömenden Medien, von der Strömungsgeschwindigkeit der Luft und von den Abmessungen der wärmeübertragenden Rohrflächen.

Die Herstellkosten setzen sich zusammen aus den Materialkosten und den Fertigungskosten. Die Materialkosten für die Rohre lassen sich nach Richtlinie VDI 2225 Blatt 1 ermitteln. Das Verhältnis der Materialkosten des Kessels zu den Materialkosten der Rohre ist empirisch bekannt. Die Fertigungskosten hängen in erster Linie von der Größe der wärme-

übertragenden Rohrflächen ab; diese Abhängigkeit lässt sich für eine bestimmte Wärmeaustauscherausbauart in einer bestimmten Fabrik empirisch ermitteln.

Nun sind aber bei der Bemessung eines Wärmeaustauschers nicht nur die Herstellkosten, sondern insbesondere auch die Betriebskosten zu berücksichtigen. Diese setzen sich zusammen aus den Kapitalkosten und den Energiekosten. Die Kapitalkosten, das sind die Kosten für die Verzinsung oder Abschreibung des für den Wärmetauscher investierten Kapitals; sie lassen sich aus den Herstellkosten ermitteln. Die Energiekosten sind im wesentlichen durch den Energieverbrauch des Gebläses bestimmt. Die Gleichungen sind zusammengestellt in Tabelle 6, die verwendeten Symbole in Tabelle 7.

Tabelle 7. Wärmetauscher, Zusammenstellung der wichtigsten Einflußgrößen

Symbol	Einheit	Größe	Zahlenwert (Beispiel)
A	m^2	Heizfläche (Gesamtoberfläche der Rohre)	30,29 m^2
c_{v1}	$\text{Ws}/\text{m}^3\text{K}$	spezifische Wärmekapazität, Wasser	$1,155 \cdot 10^3 \text{Ws}/\text{m}^3\text{K}$
c_{v2}	$\text{Ws}/\text{m}^3\text{K}$	spezifische Wärmekapazität, Luft	
d	m	(mittlerer) Rohrdurchmesser	0,02 m
e	DM/Ws	Kosten je Energieeinheit	$1,67 \cdot 10^{-8} \text{ DM}/\text{Ws}$
F	DM	Fertigungskosten	2778 DM
\bar{g}	1	mittlerer Fertigungsgemeinkostenfaktor	4
\bar{g}_w	1	mittlerer Werkstoffgemeinkostenfaktor	0,15
H	DM	Herstellkosten	10000 DM
k	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	Wärmedurchgangszahl	94,86 $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$
k_v	DM/m^3	spezifische Werkstoffkosten (auch DM/cm^3)	
k_e	DMs^2/am^2	spezifische Energiekosten	9,26 DMs^2/am^2
k_k	(DM/a) $(\text{m}/\text{s})^{0,45}$	spezifische Kapitalkosten	5600 $(\text{DM}/\text{a}) (\text{m}/\text{s})^{0,45}$
K_b	DM/a	jährliche Betriebskosten	2787,08 DM/a
K_e	DM/a	jährliche Energiekosten	507,08 DM/a
K_k	DM/a	jährliche Kapitalkosten	2800 DM/a
M_R	DM	Materialkosten (Rohre)	
M_K	DM	Materialkosten (Kessel)	
M	DM	Materialkosten (Rohre + Kessel)	2778 DM
n_1	1	Anzahl der hintereinanderliegenden Rohre (Querstrom)	20
P_w	W	Wärmeleistung	10^5W
t_m	s/a	mittlere Benutzungsdauer	$0,26 \cdot 10^8 \text{s}/\text{a}$
w	m/s	Strömungsgeschwindigkeit der Luft im engsten Querschnitt	7,4 m/s
W_{DR}	DM	Brutto-Werkstoffkosten (Rohre)	1726,53 DM
z	%	Verhältnis Kapitalkosten pro Jahr zu Verkaufspreis	12%
z'	1	Verhältnis Kapitalkosten pro Jahr zu Verkaufspreis	0,12
α_1	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	Wärmeübergangszahl Wasser-Rohr	
α_2	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	Wärmeübergangszahl Rohr-Luft	94,86 $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$
β	1	Verhältnis Verkaufspreis zu Herstellkosten	1,9
δ	m	Wanddicke der Rohre (auch mm)	2 mm
ε	1	Verhältnis M_K zu M_R	0,4
ζ	1	Widerstandszahl (Luftströmung)	0,45
η	1	Wirkungsgrad (Ventilator, Wasserumlauf)	0,7
ϑ_1	°C	Eintrittstemperatur Wasser	90 °C
ϑ_1'	°C	Austrittstemperatur Wasser	50 °C
ϑ_2	°C	Eintrittstemperatur Luft	20 °C
ϑ_2'	°C	Austrittstemperatur Luft	50 °C
$\Delta\vartheta_a$	°C	Temperaturdifferenz am Anfang der Rohre	
$\Delta\vartheta_e$	°C	Temperaturdifferenz am Ende der Rohre	
$\Delta\vartheta_l$	°C	Temperaturdifferenz der Luft	30 °C
$\Delta\vartheta_m$	°C	für den Wärmeübergang maßgebende Temperaturdifferenz	34,8 °C
λ	W/mK	Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials	0,027 W/mK
ϱ	kg/m^3	Dichte der Luft (mittlere Temperatur)	1,15 kg/m^3

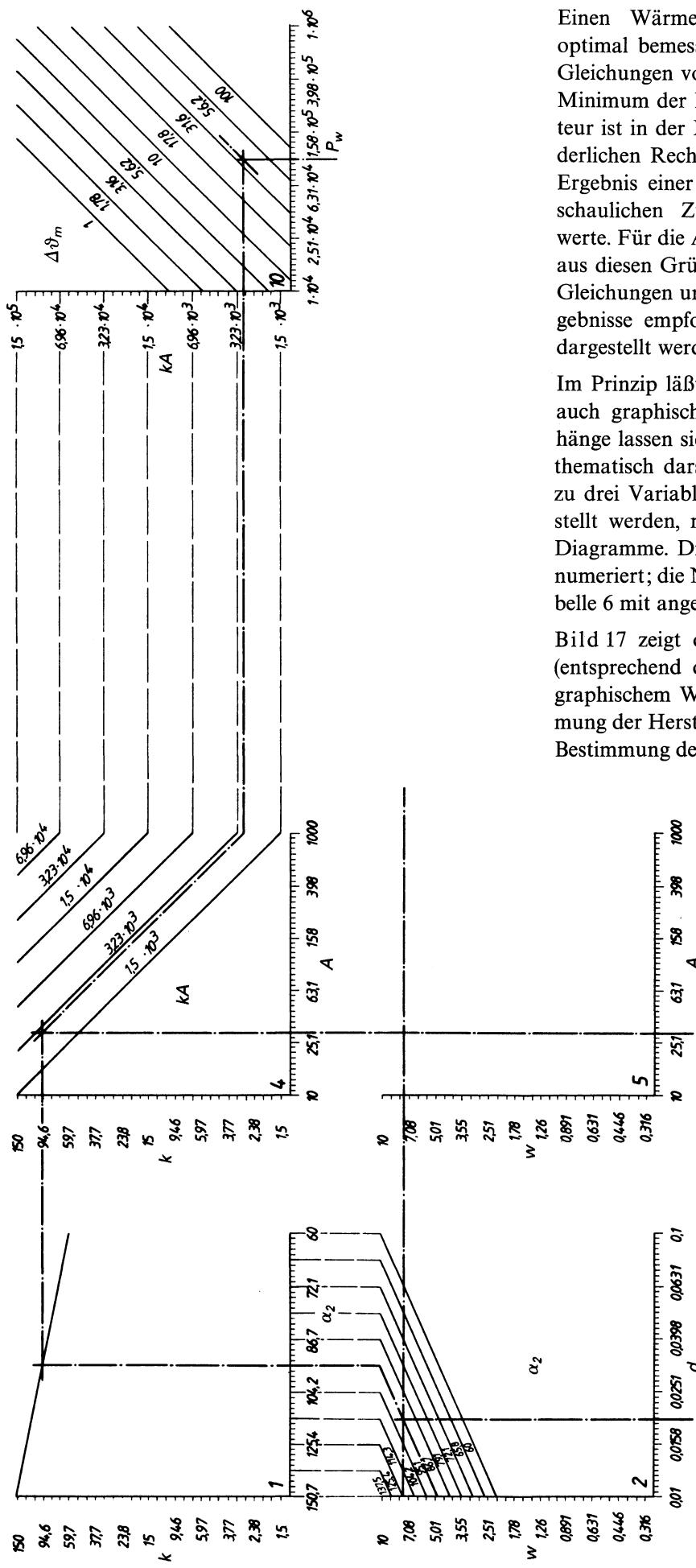


Bild 17. Wärmeaustauscher, Bestimmung der Wärmeleistung

Einen Wärmeaustauscher technisch-wirtschaftlich optimal bemessen heißt also, die Parameter in den Gleichungen von Tabelle 6 so festlegen, daß sich ein Minimum der Betriebskosten ergibt. Der Konstrukteur ist in der Regel nicht begeistert von dem erforderlichen Rechenaufwand und auch nicht von dem Ergebnis einer solchen Rechnung, einer wenig anschaulichen Zusammenstellung einzelner Zahlenwerte. Für die Anwendung in der Konstruktion wird aus diesen Gründen die graphische Auswertung der Gleichungen und die graphische Darstellung der Ergebnisse empfohlen, was im folgenden ausführlich dargestellt werden soll [3]:

Im Prinzip läßt sich jede mathematische Gleichung auch graphisch darstellen. Empirische Zusammenhänge lassen sich meist graphisch bequemer als mathematisch darstellen. Der Zusammenhang von bis zu drei Variablen kann in einem Diagramm dargestellt werden, mehr Variable erfordern meist mehr Diagramme. Die Diagramme werden zur Übersicht numeriert; die Nummern der Diagramme sind in Tabelle 6 mit angegeben.

Bild 17 zeigt die Bestimmung der Wärmeleistung (entsprechend den Gleichungen von Tabelle 6) auf graphischem Wege, Bild 18 die graphische Bestimmung der Herstellkosten und Bild 19 die graphische Bestimmung der Betriebskosten. In Bild 20 sind alle

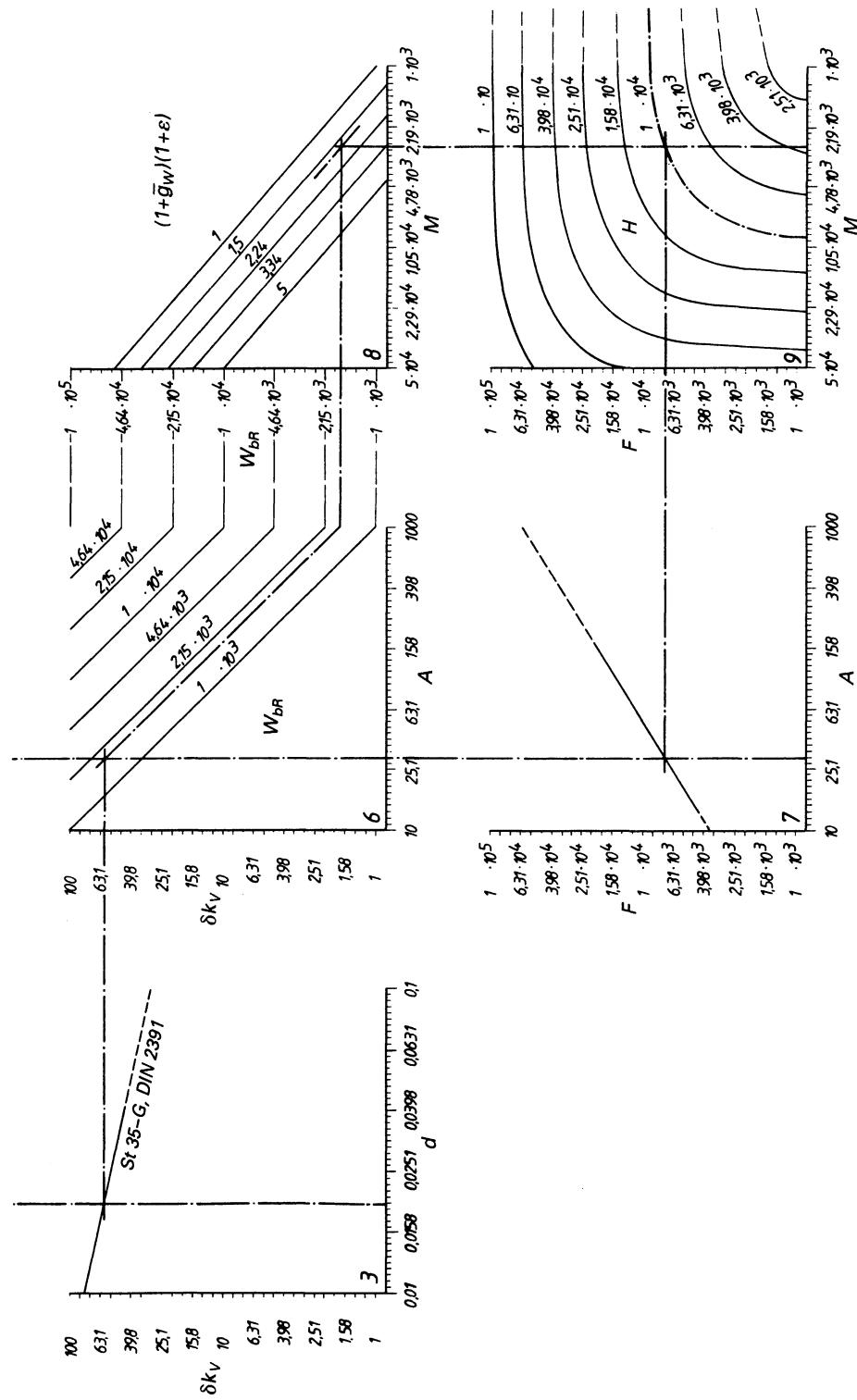


Bild 18. Wärmeaustauscher,
Bestimmung der Herstellkosten

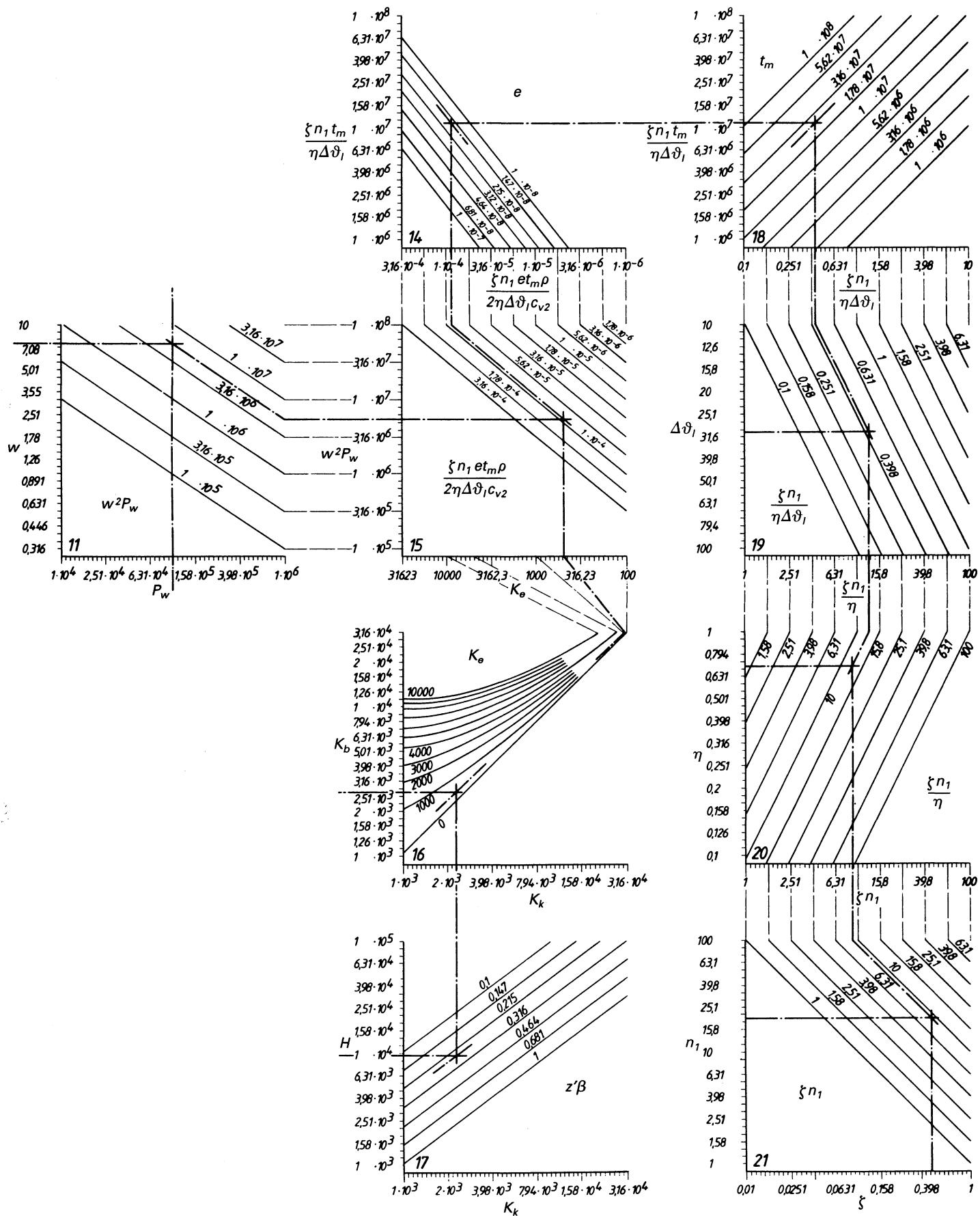


Bild 19. Wärmeaustauscher, Bestimmung der Betriebskosten

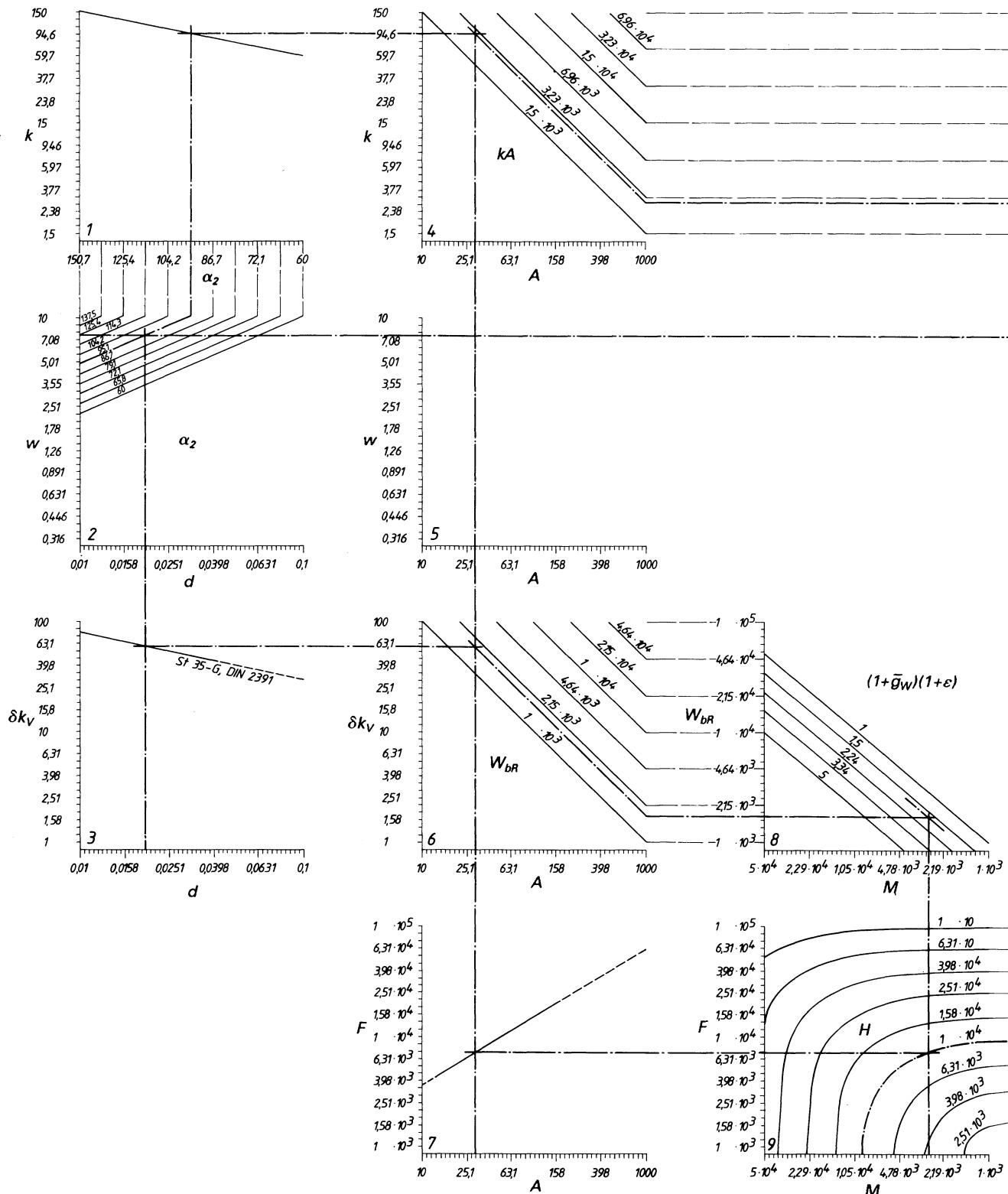


Bild 20. Wärmeaustauscher, Auslegungsdiagramm

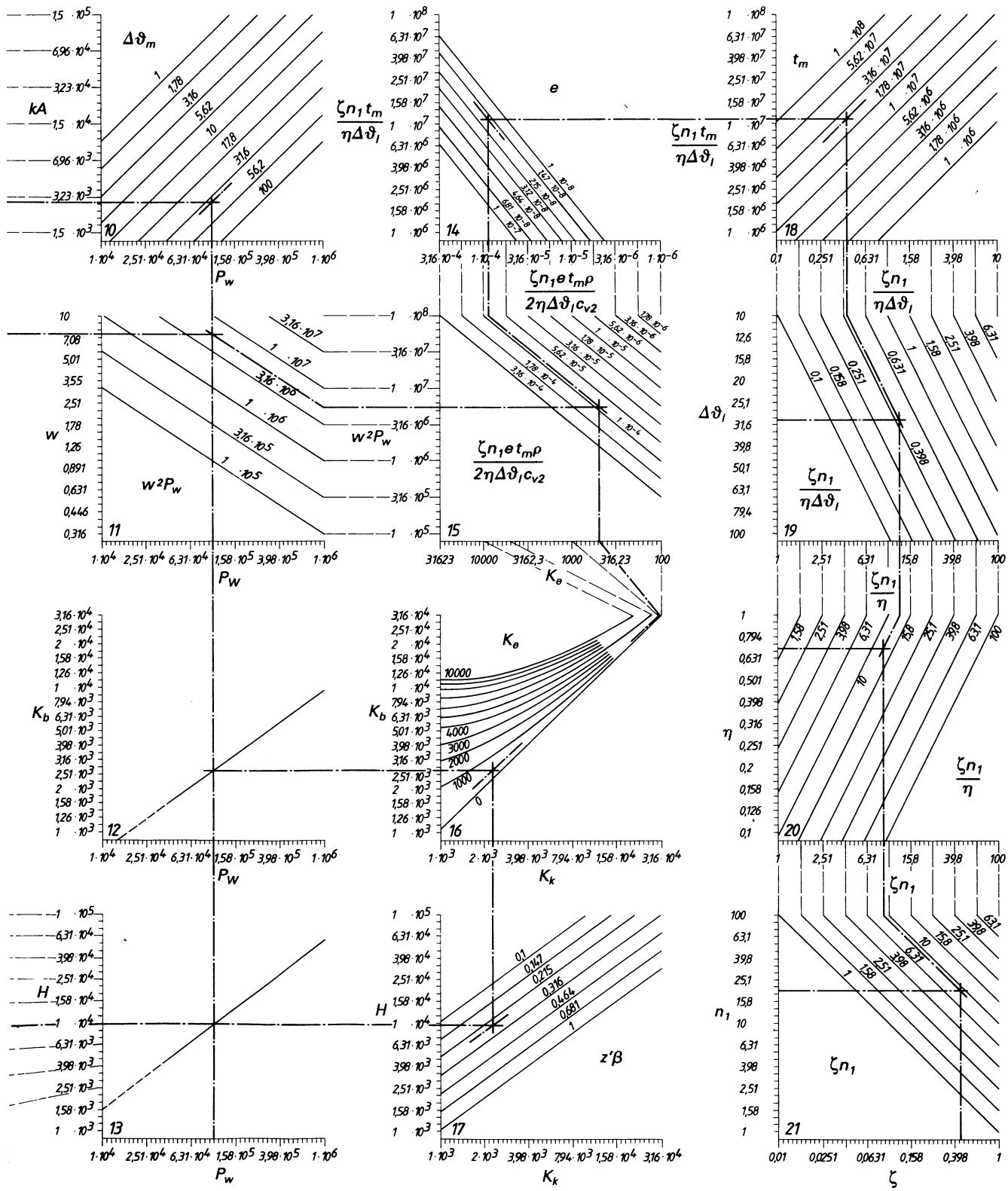


Diagramme zu einem sogenannten „Auslegungsdiagramm“ zusammengefaßt. Dieses Diagramm stellt also graphisch genau denselben Zusammenhang zwischen denselben Einflußgrößen dar, wie die Gleichungen in Tabelle 6.

Ist ein derartiges Auslegungsdiagramm einmal entworfen und getestet, dann lassen sich damit schnell, einfach und anschaulich die wesentlichen zusammengehörigen Auslegungsdaten für einen bestimmten Wärmeaustauscher ermitteln. Ein Beispiel entsprechend den Zahlenwerten von Tabelle 7 ist in Bild 20 eingetragen.

In einem derartigen Auslegungsdiagramm lassen sich darüber hinaus auch ohne großen Aufwand einzelne Auslegungsparameter variieren, sofort die Auswirkungen feststellen und auf diese Weise die technisch-wirtschaftlich optimale Gesamtlösung für bestimmte Voraussetzungen und Forderungen ermitteln.

Schließlich läßt sich ein derartiges Auslegungsdiagramm auch dazu verwenden, um – ausgehend von einer bewährten Bauart eines bestimmten Wärmeaustauschers – durch Variation der Daten der Aufgabenstellung die Wachstumsgesetze für diese Art von Wärmeaustauschern zu ermitteln (Bild 20 und 21).

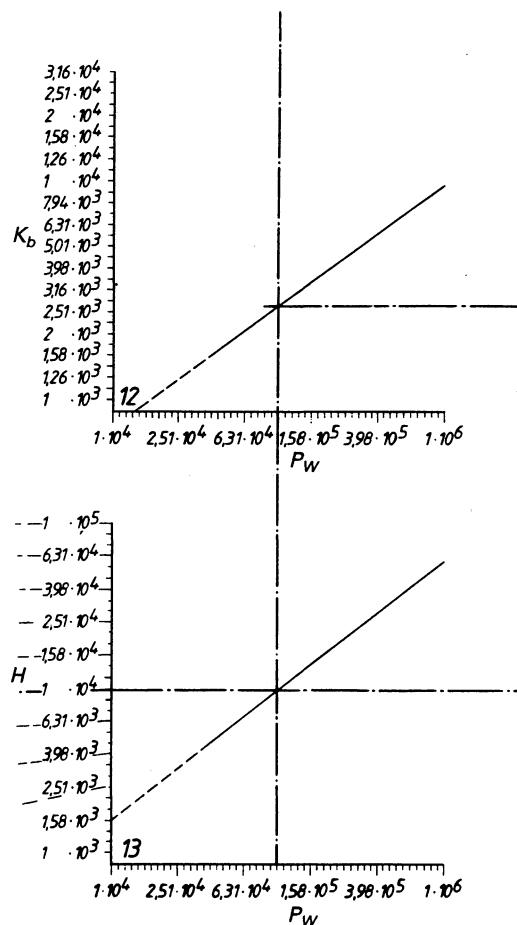


Bild 21. Wärmeaustauscher: Wärmeleistung, Herstellkosten und Betriebskosten (Wachstumsgesetze)

Ein Auslegungsdiagramm ist also ein nützliches, mehrfach und vielseitig anwendbares Hilfsmittel für die Bemessung, sobald nur einmal ein derartiges Auslegungsdiagramm entworfen wurde. Der Entwurf von Auslegungsdiagrammen von Hand ist aber oft recht mühsam, und das ist wohl auch der Grund dafür, daß Auslegungsdiagramme bisher nicht häufiger angewendet wurden. Mit Hilfe eines (Klein-)Rechners aber ist der Entwurf eines Auslegungsdiagramms heute kein Problem mehr, sobald einmal ein allgemeines Rechenprogramm zur Herstellung beliebiger Diagramme entwickelt oder beschafft wurde. Die Diagramme zu den hier behandelten Beispielen wurden z.B. auf einem programmierbaren Schreibautomaten hergestellt, wie er heute in vielen Schreibbüros eingesetzt wird.

3.4 Bemessung von Druckbehältern

Das folgende Beispiel wird sehr ausführlich behandelt. Anhand dieses Beispiels werden exemplarisch eine Reihe von Fragen und Zusatzforderungen behandelt, die in manchen Fällen bei der Anwendung der Bemessungslehre auftreten.

3.4.1 Aufgabenstellung

Ein Druckbehälter soll ein bestimmtes Fassungsvermögen V haben und einem bestimmten Innendruck p standhalten. Neben diesen technischen Forderungen soll er wirtschaftlich möglichst günstig ausgelegt werden, d.h. die Herstellkosten H bzw. die Betriebskosten K_b sollen möglichst klein sein.

In Bild 22 werden die Druckbehälter skizziert, die hier in Betracht gezogen werden sollen: Sie bestehen aus einem zylindrischen, aus Blech gerollten Mantel, der zwischen zwei Böden eingeschweißt ist.

Drei Formen von Böden sind üblich [18; 20]: Halbkugelböden, Korbbogenböden und Klöpperböden (Bild 22). Alle drei Formen von Böden haben im wesentlichen die Form von Kugelkappen (Kugelkalotten); sie unterscheiden sich im wesentlichen nur durch den Wölbungsradius, genauer gesagt: durch das Verhältnis von Kugelradius R zu Zylinderradius r . Beim Halbkugelboden ist dieses Verhältnis $R:r = 1:1$, beim Korbbogenboden ist $R:r = 1,6:1$ und beim Klöpperboden ist $R:r = 2:1$. Korbbogenboden und Klöpperboden haben einen kurzen zylindrischen Ansatz, die sogenannte Krempe, die mit dem zylindrischen Blechmantel verschweißt wird. Beim Halbkugelboden ist eine Krempe nicht nötig, weil der gewölbte Boden tangential in den Zylindermantel übergeht.

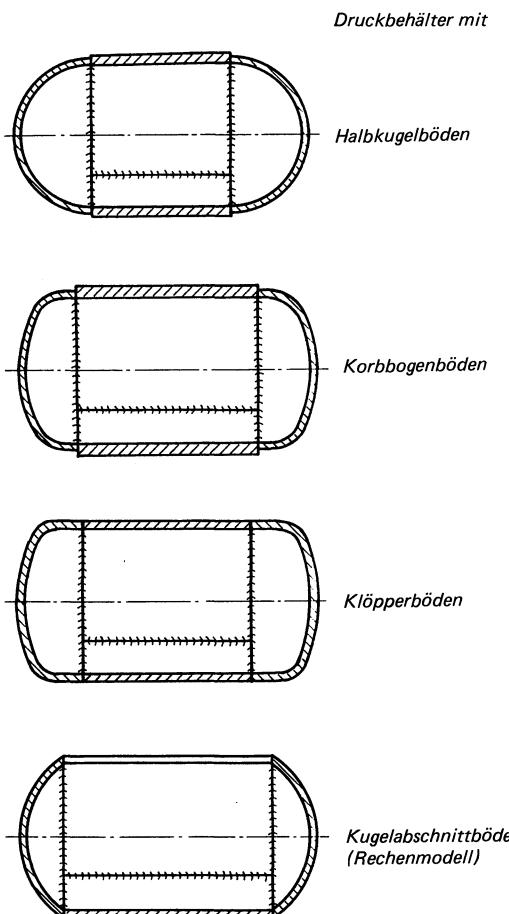


Bild 22. Druckbehälter mit verschiedenen Böden, Rechenmodell

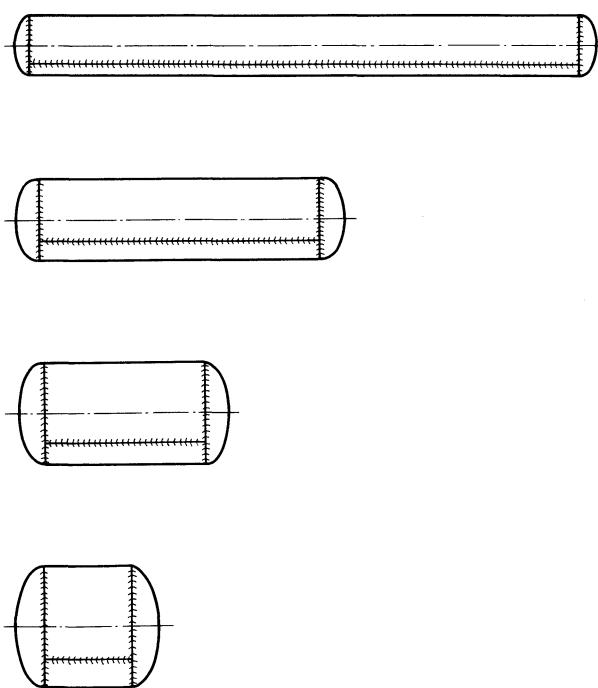


Bild 23. Druckbehälter mit gleichem Volumen (Fassungsvermögen)

Für vorgegebenes Volumen (Rauminhalt) V und Druck p des Druckbehälters lassen sich je nach Wahl des Verhältnisses von Länge zu Durchmesser sehr verschiedene Formen von Druckbehältern entwerfen (vgl. z. B. Bild 23), die alle den technischen Forderungen nach V und p entsprechen, sich aber kostenmäßig erheblich unterscheiden. Es wird im folgenden untersucht, welche dieser verschiedenen technisch möglichen Formen wirtschaftlich am günstigsten kommt.

3.4.2 Geometrie des Druckbehälters

Zur Erleichterung der folgenden rechnerischen Ableitung sollten alle drei Bodenformen nach einem allgemeinen, vereinfachten Modell berechnet werden. Dieses Rechenmodell ist in Bild 22 unten skizziert: Der Druckbehälter wird vereinfacht so behandelt, als bestünde er nur aus einem zylindrischen Teil und zwei Böden in Form von Kugelkappen. Ausrundung und Krempe am Übergang zwischen Kugelabschnitt und Zylinder, die festigkeitsmäßig erforderlich sind, werden rechnerisch nicht berücksichtigt.

In Bild 24 sind die geometrischen Formeln zusammengestellt, die im folgenden gebraucht werden. Das Verhältnis h/r (Höhe h zu Radius r) des Bodens ist in den Formeln offengelassen. Je nachdem, welche Zahlenwerte hier eingesetzt werden, ergeben sich aus den allgemeinen geometrischen Formeln die speziellen Formeln für die üblichen Ausführungen des Bodens als Halbkugelboden, Gl.(74), Korrbogenboden, Gl.(75) oder Klöpperboden, Gl.(76). Nach den einschlägigen Sicherheitsvorschriften [18] sind auch Böden anderer Form, also mit anderem Verhältnis von h/r zulässig, auch wenn sie nicht handelsüblich sind und aus Kostengründen meist nicht in Betracht kommen. Wenn jedoch ein derartiger Boden entworfen und hergestellt werden sollte, ließen sich die speziellen Formeln dafür ebenfalls durch Einsetzen des speziellen gewählten Wertes von h/r in die hier (Bild 24) zusammengestellten allgemeinen Gleichungen erhalten.

Für das allgemeine Rechenmodell der Druckbehälter werden nun die Formeln für Volumen (Rauminhalt), Oberfläche und Grundfläche zusammengestellt (Bild 24): Das Volumen V eines Druckbehälters setzt sich zusammen aus dem Volumen V_M des zylindrischen Teils plus zweimal dem Volumen V_B eines Bodens, Gl.(77) bis (79). Die Oberfläche A eines Druckbehälters setzt sich zusammen aus der Oberfläche A_M des Zylinders plus zweimal der Oberfläche A_B eines Bodens, Gl.(80) bis (82). Schließlich wird noch die Formel für die Grundfläche $L \cdot D$ (Länge L mal Durchmesser D) ermittelt, die der liegende Druckbe-

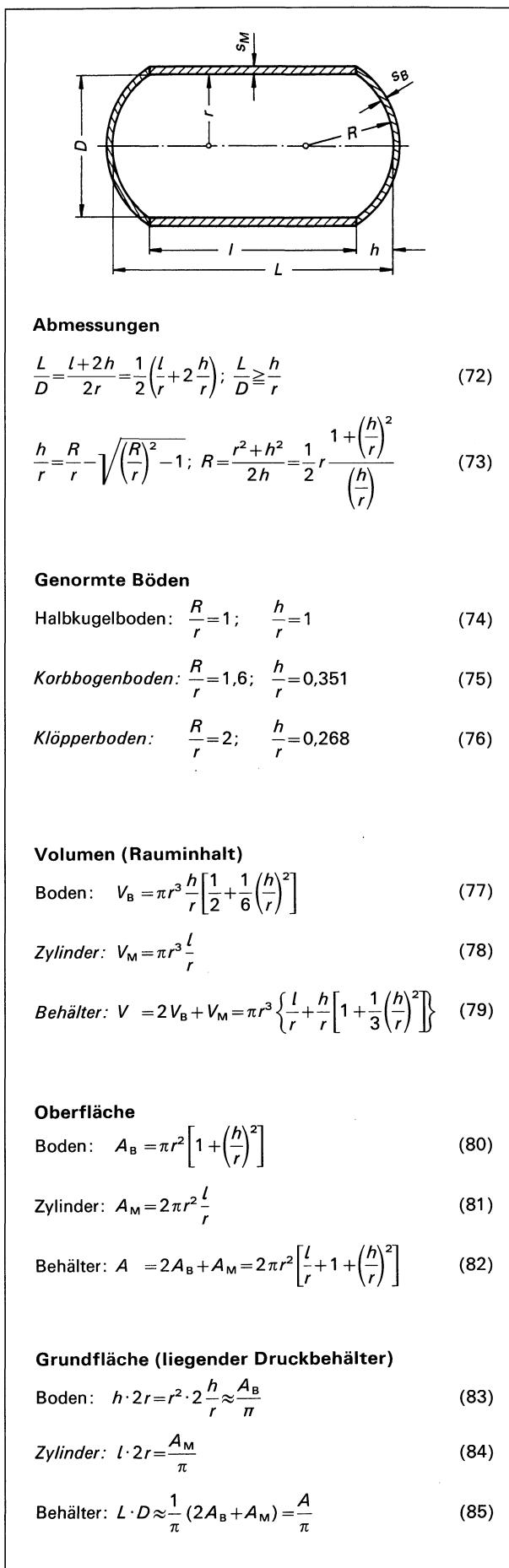


Bild 24. Druckbehälter, Geometrie (Rechenmodell)

hälter beansprucht, Gl.(83) bis (85). Die Grundfläche $L \cdot D$ ist in guter Näherung proportional der Oberfläche A des Druckbehälters.

(Alle verwendeten Kurzzeichen und Symbole sind in Tabelle 12 zusammengestellt.)

3.4.3 Die Beanspruchungsgleichungen (I)

Nach den Regeln der Bemessungslehre muß nun die Beanspruchungsgleichung (I) für den Druckbehälter aufgestellt werden und die wesentliche Kostengleichung (II). Beide Gleichungen werden vereinigt zur Bemessungsgleichung (III), die dann zur technisch-wirtschaftlich optimalen Bemessung des Druckbehälters ausgewertet wird.

Die Beanspruchungsgleichungen werden in Bild 25 abgeleitet: Auf der linken Seite des Bildes ist ein Schnitt durch den zylindrischen Teil des Druckbehälters skizziert. Die Beanspruchung entsteht durch den Innendruck p , der auf die Querschnittsfläche $2rl$ wirkt. Dieser Beanspruchung wird das Gleichgewicht erhalten durch die Zugspannung σ , die im Blechquerschnitt $2s_M l$ herrscht, Gl.(86) und (87). Aus dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich die Beanspruchungsgleichung für den zylindrischen Teil, Gl.(88).

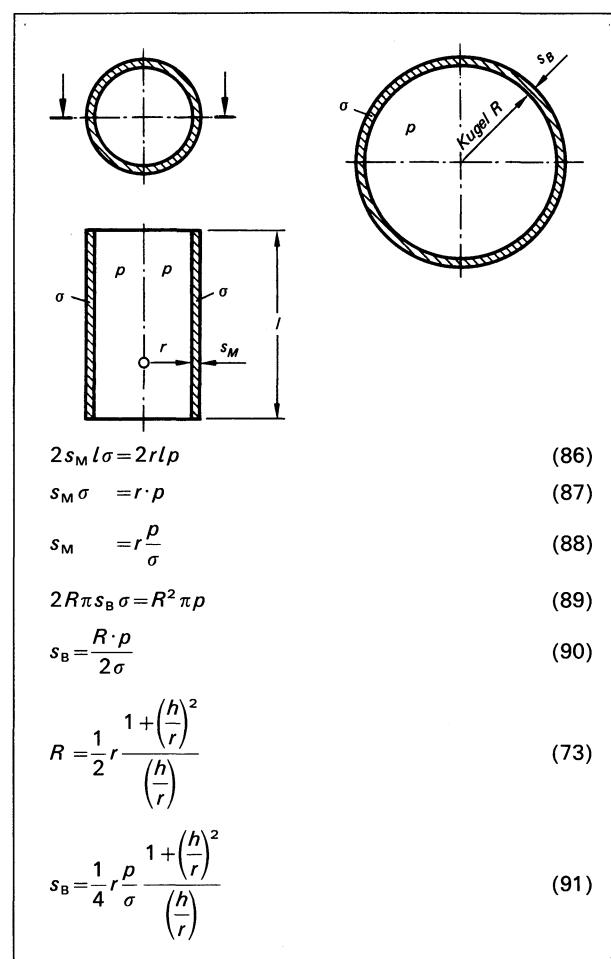


Bild 25. Druckbehälter, Beanspruchungsgleichungen (I)

Auf der rechten Seite von Bild 25 ist ein Schnitt durch einen kugelförmigen Druckbehälter (oder ein Teil davon) skizziert. Die Beanspruchung entsteht durch den Innendruck p , der auf die Querschnittsfläche πR^2 wirkt. Dieser Beanspruchung wird das Gleichgewicht gehalten durch die Zugspannung σ , die im Querschnitt $2\pi R s_B$ herrscht, Gl.(89). Aus dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich die Beanspruchungsgleichung für den Boden, Gl.(90). Wenn in dieser Gleichung das Verhältnis h/r von Höhe h zu Radius r des Bodens berücksichtigt wird, Gl.(73) ergibt sich die allgemeine Gleichung (91), die die erforderliche Wanddicke s_B in einem beliebigen kugelförmig gewölbten Boden angibt.

3.4.4 Die Kostengleichungen (II)

Nach den Regeln der Bemessungslehre müssen nun die Kostengleichungen (II) aufgestellt werden, Tabelle 8. Am einfachsten lassen sich die Materialkosten ermitteln als Produkt von Bruttomaterialvolumen und spezifischen Werkstoffkosten, Gl.(92). Das Bruttomaterialvolumen ergibt sich als Produkt aus Oberfläche und Wanddicke. Den Zahlenwert der spezifischen Werkstoffkosten des gewählten Werkstoffes entnimmt man der Richtlinie VDI 2225 Blatt 1. (Werkstoffgemeinkosten lassen sich durch einen entsprechend höheren Ansatz der spezifischen Werkstoffkosten berücksichtigen: Wenn die Werkstoffgemeinkosten z.B. 10% betragen, ist rechnerisch ein Zuschlag von 10% zu den spezifischen Werkstoffkosten zu machen.)

Tabelle 8. Druckbehälter, Kostengleichung (II)

Materialkosten	$M = 2A_B s_B k_{VB} + A_M s_M k_{VM}$	(92)
Herstellkosten	$H = \frac{H}{M} (2A_B s_B k_{VB} + A_M s_M k_{VM})$	(93)
Betriebskosten	$K_b = K_r + K_k$	(94)
Oberflächenkosten	$K_r = k_r (2A_B + A_M)$	(95)
Kapitalkosten	$K_k = z' \beta H$	(96)
Betriebskosten	$K_b = z' \beta \frac{H}{M}$ · $(2A_B s_B k_{VB} + A_M s_M k_{VM})$ + $k_r (2A_B + A_M)$	(97)

Das Fertigungsverfahren ist für alle betrachteten Druckbehälter gleich: Die Böden werden fertig bezogen, die Mäntel aus Blech gerollt und eingeschweißt. Das Verhältnis von Herstellkosten H zu Materialkosten M ist also annähernd konstant. Unter Verwendung des entsprechenden Wertes von H/M kann also von den Materialkosten direkt auf die Herstellkosten H geschlossen werden, Gl.(93).

Bei praktischen Anwendungen muß dazu oft der Zahlenwert von H/M oder von M/H abgeschätzt werden. In Abschnitt 3.4.10 wird untersucht werden,

welchen Einfluß hier ein Schätzfehler hat: M/H sollte auf 10% genau abgeschätzt werden.

Der Druckbehälter soll nun aber nicht nach möglichst geringen Herstellkosten H , Gl.(93), optimiert werden, sondern nach möglichst geringen Betriebskosten K_b , Gl.(94), und zwar aus folgendem Grund: Würde ein Druckbehälter allein unter Berücksichtigung der Herstellkosten H optimal bemessen, so ergebe das extrem lange, schlanke Formen von Druckbehältern. Diese haben aber eine relativ große Oberfläche und erfordern deshalb hohe Kosten für den Korrosionsschutz. Sie verursachen hohe Energiekosten, wenn das Medium im Druckbehälter eine andere Temperatur als die Umgebung haben soll; sie erfordern hohe Raumkosten, weil die Grundfläche des liegenden Druckbehälters der Oberfläche etwa proportional ist, Gl.(85). Alle diese laufenden Kosten, die der Oberfläche des Druckbehälters proportional sind, werden im folgenden „Oberflächenkosten K_r “ genannt. Sie haben die Einheit DM/Jahr (DM/a). Der entsprechende Proportionalitätsfaktor, die spezifischen Oberflächenkosten pro m^2 und Jahr, wird k_r genannt und hat die Einheit DM/ m^2 a. Die Oberflächenkosten K_r ergeben sich rechnerisch also als Produkt der Oberfläche A des Druckbehälters nach Gl.(82) mit den spezifischen Oberflächenkosten k_r , Gl.(85).

In die Betriebskosten K_b , Gl.(94) gehen neben den Oberflächenkosten K_r , Gl.(95), noch die Kapitalkosten K_k , Gl.(96), ein. Diese lassen sich aus den bereits ermittelten Herstellkosten H herleiten: Das Verhältnis β von Preis zu Herstellkosten ist in einem bestimmten Unternehmen bekannt. Der Verzinsungsfaktor z' gibt an, welche jährlichen Kosten aus den einmaligen Investitionskosten für den Druckbehälter folgen (Abschreibung, kalkulatorische Verzinsung des eingesetzten Kapitals). Das ergibt die Kapitalkosten K_k durch Multiplikation der Herstellkosten H mit β und z' , Gl.(96).

Die Ausdrücke für die Oberflächenkosten K_r , Gl.(95), und die Kapitalkosten K_k , Gl.(96), werden in den Ansatz für die Betriebskosten K_b eingesetzt. Damit ergibt sich als endgültige Kostengleichung die Gleichung für die Betriebskosten K_b , Gl.(97).

3.4.5 Die Bemessungsgleichung (III)

Die wirtschaftliche Forderung, der Druckbehälter solle möglichst geringe jährliche Betriebskosten K_b verursachen, wird durch die Kostengleichung (97) ausgedrückt. Die technische Forderung, der Druckbehälter solle einem bestimmten Druck p standhalten, wird durch die Beanspruchungsgleichungen (88) bzw. (91) ausgedrückt, der geforderte Rauminhalt V des Behälters durch Gleichung (79).

Zur optimalen Bemessung des Druckbehälters sollen sowohl die technischen als auch die wirtschaftlichen Forderungen erfüllt werden. Nach den Regeln der Bemessungslehre müssen deshalb nun (Tabelle 9) die Beanspruchungsgleichungen (I) und die Kostengleichung (II) zur sogenannten „Bemessungsgleichung“ (III) zusammengefaßt werden. Aus den Gleichungen (88), (91), (79), (97) und unter Berücksichtigung der geometrischen Beziehungen von Bild 24 ergibt sich — nach einigen, hier weggelassenen Zwischenrechnungen — die Bemessungsgleichung (98).

Diese Bemessungsgleichung gibt also mathematisch den Zusammenhang wieder zwischen den technischen Forderungen (V und p), den wirtschaftlichen Forderungen (nach geringem K_b), den wesentlichen Daten der gewählten Werkstoffe (σ , k_{VM} , k_{VB} , k_r) sowie Form und Abmessungen (h , r , l) des Druckbehälters.

(Alle in diesem Abschnitt verwendeten Kurzzeichen und Symbole sind in Tabelle 12 zusammengestellt.)

3.4.6 Der kostengünstigste Druckbehälter

Die Bemessungsgleichung (98) gibt allgemein den Zusammenhang wieder, der zwischen den wesentlichen

geometrischen, technischen und wirtschaftlichen Daten des Druckbehälters besteht. Es können also etwa zunächst Form und Radius des Bodens beliebig festgelegt und aus den Formeln in Bild 24 die Abmessungen h und l ermittelt werden, dann aus Gl.(98) in Tabelle 9 die jährlichen Betriebskosten K_b für den Druckbehälter mit diesen Abmessungen.

Nun entsteht aber die Frage, welche Form der Druckbehälter haben muß, damit er bei Erfüllung der vorgegebenen Werte von Rauminhalt V und Innendruck p die geringsten Betriebskosten K_b verursacht. Dazu werden die Betriebskosten K_b nach dem Zylindradius r differenziert und das Ergebnis gleich Null gesetzt. Unter Berücksichtigung von Gl.(79) ergibt sich nach einigen (hier weggelassenen) Umrechnungen die Gleichung (99), die den Zusammenhang zwischen den technischen, den wirtschaftlichen und den optimalen geometrischen Daten eines Druckbehälters wiedergibt.

Erwünscht wäre eine direkte Auflösung dieser Gleichung etwa nach dem Wert l/r oder noch besser — unter Verwendung von Gleichung (72) — nach dem Verhältnis L/D von Länge L zu Durchmesser D des Druckbehälters. Die Auflösung der Gleichung (99)

Tabelle 9. Druckbehälter, Bemessungsgleichung (III)

I. Beanspruchungsgleichungen

$$s_M = r \frac{p}{\sigma} \quad (88)$$

$$V = 2V_B + V_M = \pi r^3 \left\{ \frac{l}{r} + \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] \right\}$$

$$s_B = \frac{1}{4} r \frac{p}{\sigma} \frac{1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2}{\frac{h}{r}} \quad (91)$$

(79)

II. Kostengleichung

$$K_b = z' \beta \frac{H}{M} (2A_B s_B k_{VB} + A_M s_M k_{VM}) + k_r (2A_B + A_M) \quad (97)$$

III. Bemessungsgleichung

$$\frac{K_b}{k_r V^{2/3}} = \sqrt[3]{V} \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{VM}}{k_r} \frac{\frac{1}{2} \frac{k_{VB}}{k_{VM}} \frac{1}{\left(\frac{h}{r} \right)} \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^2 + 2 \frac{l}{r}}{\frac{h}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^3 + \frac{l}{r}} + \frac{2 \pi^{1/3} \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{l}{r} \right]}{\left[\frac{h}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^3 + \frac{l}{r} \right]^{2/3}} \quad (98)$$

Kostengünstigste Abmessungen: $\frac{dK_b}{dr} \stackrel{!}{=} 0$ mit Gleichungen (79) und (72)

$$\frac{3}{4} \frac{k_{VB}}{k_{VM}} \frac{1}{\left(\frac{h}{r} \right)} \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^2 - 3 \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] + 2 + 2 \left(\frac{h}{r} \right)^2 - 3 \frac{h}{r} - \left(\frac{h}{r} \right)^3 - \frac{l}{r} = 0 \quad (99)$$

$$\frac{\sqrt[3]{V} p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{VM}}{k_r} \frac{\frac{3}{4} \frac{k_{VB}}{k_{VM}} \frac{1}{\left(\frac{h}{r} \right)} \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^2 - 3 \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]}{\pi^{1/3} \left(\frac{h}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^3 + \frac{l}{r} \right)^{1/3}} \stackrel{3/4}{=} \left(\sqrt[3]{V} \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{VM}}{k_r} \right)^{3/4} \quad (100)$$

$$\frac{L}{D} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^3 + 0,376 \left\{ \frac{3}{4} \frac{k_{VB}}{k_{VM}} \frac{1}{\left(\frac{h}{r} \right)} \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^2 - 3 \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] \right\}^{3/4} \left(\sqrt[3]{V} \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{VM}}{k_r} \right)^{3/4} \quad (100)$$

ist leider mathematisch nicht exakt möglich, sondern nur eine Näherungslösung oder eine graphische Lösung; beide Verfahren werden im folgenden durchgeführt.

Eine allgemeine Näherungslösung wird durch Gleichung (100) wiedergegeben. Diese Gleichung ist für die praktische Anwendung zu kompliziert, kann aber wesentlich vereinfacht werden: In den allermeisten praktischen Anwendungsfällen wird man sich für eine der üblichen Formen des Druckbehälters-Bodens (Bild 22) entscheiden. Damit ist aber gleichzeitig der Zahlenwert von h/r festgelegt, Gl.(74) bis (76). Sobald die Werkstoffe für die Böden und den Zylindermantel gewählt sind, ist damit auch der Zahlenwert des Verhältnisses der entsprechenden spezifischen Werkstoffkosten k_{VB}/k_{VM} festgelegt.

Werden nun in die umständliche Gleichung (100) feste Zahlenwerte für h/r und k_{VB}/k_{VM} eingesetzt, erhält man die einfachen, bequem anwendbaren Auslegungsgleichungen (101) bis (112) in Tabelle 10. Diese Gleichungen werden zunächst kurz allgemein diskutiert.

Die technisch-wirtschaftlich optimale Form eines Druckbehälters wird anschaulich am besten charakterisiert durch das Verhältnis L/D von Länge L zu Durchmesser D des Druckbehälters. Dieses Verhältnis L/D hängt nach den Gleichungen von Tabelle 10 von drei verschiedenen Einflußgrößen ab:

- von der Form des gewählten Bodens, charakterisiert durch den Wert von h/r . In Tabelle 10 sind die drei üblichen Formen der Druckbehälterböden berücksichtigt; es lassen sich bei Bedarf aus Gl.(100) auch Formeln für andere Bodenformen (mit anderen Werten von h/r) ableiten.
- Das optimale Verhältnis L/D hängt ab vom Verhältnis aus den spezifischen Werkstoffkosten k_{VB} des Bodens und den spezifischen Werkstoffkosten

k_{VM} des Werkstoffes des Mantels. Dieses Verhältnis k_{VB}/k_{VM} wird im folgenden „Werkstoffkostenfaktor“ genannt. In der Formelübersicht in Tabelle 10 sind einige typische Zahlenwerte dieses Werkstoffkostenfaktors k_{VB}/k_{VM} berücksichtigt, weitere Zahlenwerte könnte man bei Bedarf durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung (100) berücksichtigen.

- Vor allem hängt die Form L/D des Druckbehälters ab von einer dimensionslosen Kombination der vorgegebenen Größen $V, p, \sigma, z', \beta, H/M, k_{VM}, k_r$, Gl.(113), die hier kurz „Aufgabenfaktor t “ genannt wird.

Die Formeln in Tabelle 10 lassen sich unmittelbar dazu verwenden, aus den durch die Aufgabenstellung vorgegebenen Daten die technisch und wirtschaftlich optimale Form eines Druckbehälters zu ermitteln: Zunächst werden aus den vorgegebenen bzw. bekannten Daten der Aufgabenfaktor t und der Werkstoffkostenfaktor k_{VB}/k_{VM} ermittelt. Anschließend wird eine bestimmte Form des Bodens gewählt (in der Regel Halbkugel-, Korrbogen- oder Klöpperböden). Danach wird in Tabelle 10 die entsprechende Formel ausgewählt, mit welcher der optimale Wert von L/D für die vorliegende Aufgabenstellung zu ermitteln ist. Schließlich werden aus den Formeln in Bild 24 und 25 bzw. aus den einschlägigen Normblättern [20] die restlichen Abmessungen des Druckbehälters bestimmt.

Die allgemeine Optimierungsgleichung (100) lässt sich nicht exakt auflösen, sondern nur näherungsweise, was bisher besprochen wurde (Tabelle 10) oder graphisch, was im folgenden behandelt wird.

Zur Vereinfachung der umständlichen Ausgangsgleichung (100) werden wieder diskrete typische Werte für den Werkstoffkostenfaktor k_{VB}/k_{VM} eingesetzt

Tabelle 10. Druckbehälter, kostengünstigste Form L/D ; Näherungsformeln

$\frac{k_{VB}}{k_{VM}}$	Halbkugelböden	Korrbogenböden	Klöpperböden
2,0	$\frac{L}{D} \approx 1 + 0,6 t^{0,75}$ (101)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 1,1 t^{0,75}$ (105)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 1,3 t^{0,75}$ (109)
1,666	$\frac{L}{D} \approx 1 + 0,3 t^{0,75}$ (102)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 0,9 t^{0,75}$ (106)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 1,1 t^{0,75}$ (110)
1,333	$\frac{L}{D} = 1$ (103)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 0,7 t^{0,75}$ (107)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 0,9 t^{0,75}$ (111)
1,0	$\frac{L}{D} = 1$ (104)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 0,5 t^{0,75}$ (108)	$\frac{L}{D} \approx 0,9 + 0,7 t^{0,75}$ (112)
$t = \sqrt[3]{V \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{VM}}{k_r}}$ (113)			

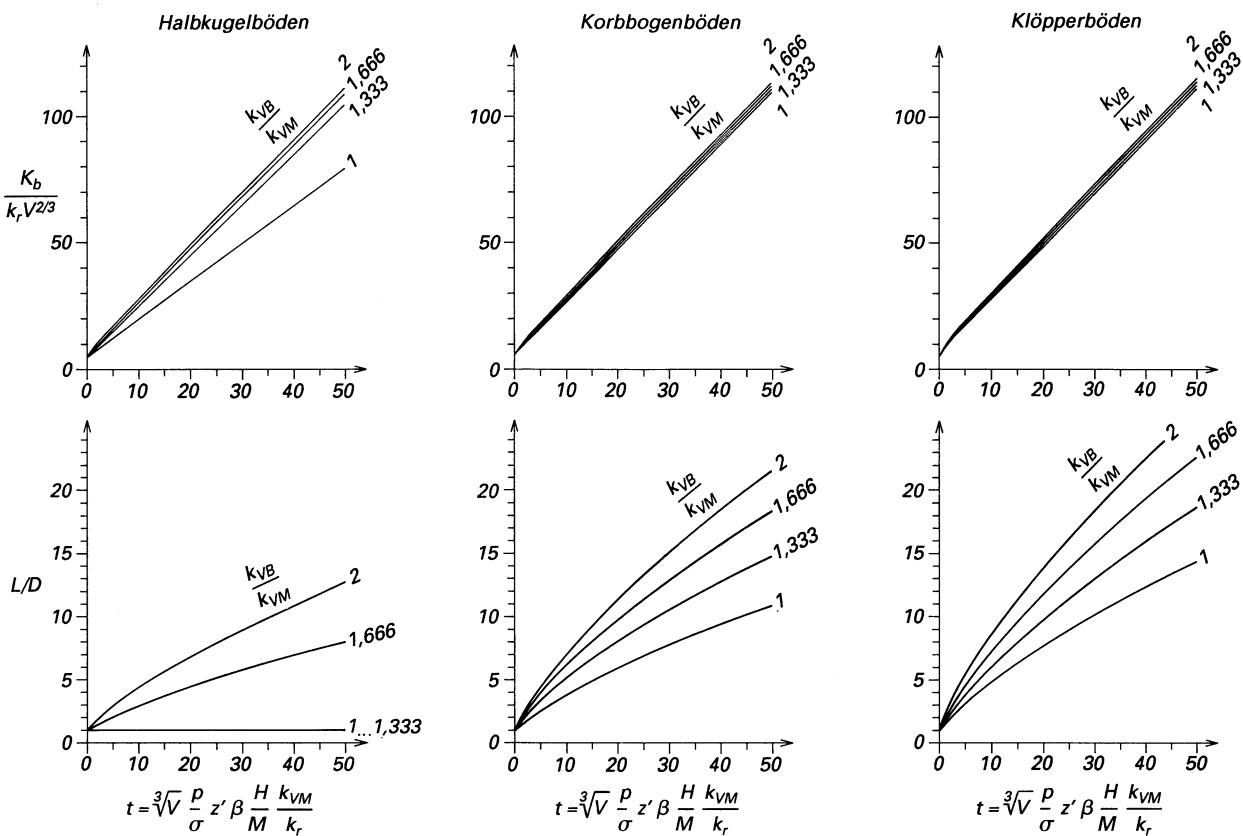


Bild 26. Zylindrische Druckbehälter mit verschiedenen Böden; kostenoptimale Form L/D ; Relativkosten $K_b / (k_r V^{2/3})$

und für das Verhältnis h/r diejenigen Zahlenwerte, die den üblichen Bodenformen entsprechen.

Aus der Optimierungsgleichung (100) wurde nun für einzelne Werte von k_{VB}/k_{VM} , h/r und t jeweils das optimale Verhältnis L/D von Länge zu Durchmesser des Druckbehälters ermittelt und das Ergebnis graphisch dargestellt, Bild 26. Aus dieser graphischen Darstellung lässt sich also nach Festlegung der Bodenform ablesen, welches optimale Verhältnis L/D einer bestimmten Kombination von vorgegebenen bzw. bekannten Ausgangsgrößen entspricht (Bild 26, untere Diagramme).

Zusätzlich ist in Bild 26 graphisch dargestellt, welche Betriebskosten K_b , Gl.(98), entstehen werden, wenn der Druckbehälter für die vorgegebenen Daten und mit dem ermittelten optimalen Verhältnis L/D ausgelegt wird (Bild 26, obere Diagramme).

Die Betriebskosten K_b werden in Bild 26 nicht in Absolutbeträgen angegeben, sondern auf das Produkt $k_r V^{2/3}$ der beiden im Rahmen einer Aufgabenstellung konstanten Größen (spezifische Oberflächenkosten k_r und Volumen V des Druckbehälters) bezogen und dadurch dimensionslos gemacht. Die Verwendung von Relativkosten erleichtert den Vergleich zwischen verschiedenen Lösungsvarianten.

Bild 26 kann zur Optimierung und Beurteilung von Druckbehältern verwendet werden: Zunächst wer-

den aus den vorgegebenen bzw. bekannten Daten der Aufgabenfaktor t und der Werkstoffkostenfaktor k_{VB}/k_{VM} ermittelt. Dann wird eine bestimmte Form des Bodens festgelegt (Halbkugel-, Korrbogen- oder Klöpperboden). Aus dem entsprechenden Diagramm (Bild 26, untere Reihe) ergibt sich der optimale Wert von L/D für den Druckbehälter und aus den Formeln in Bild 24 und 25 bzw. den entsprechenden Normblättern [20] seine übrigen Abmessungen. Schließlich ergibt sich aus dem entsprechenden Diagramm in der oberen Reihe von Bild 26, mit welchen relativen Betriebskosten in diesem Fall zu rechnen ist.

In diesem Abschnitt wurde zunächst allgemein die kostengünstigste Form des Druckbehälters formelmäßig abgeleitet. Die entsprechende Gleichung, Gl.(100), lässt sich zwar nicht exakt mathematisch auflösen, wohl aber näherungsweise oder graphisch. Beides wurde hier durchgeführt. Bei praktischen Aufgaben sollten entweder die Näherungsformeln nach Tabelle 10 oder die graphische Darstellung nach Bild 26 oder auch, etwa zur Kontrolle, beide Methoden verwendet werden.

Ehe nun in Abschnitt 3.4.8 ein Zahlenbeispiel durchgerechnet wird, werden diese Ergebnisse in Abschnitt 3.4.7 allgemeindiskutiert, d.h. es werden qualitative Regeln zur Ermittlung von technisch und wirtschaftlich optimalen Formen von Druckbehältern abgeleitet.

3.4.7 Regeln zum Entwurf

kostengünstiger Druckbehälter

Aus Tabelle 10 und Bild 26 lassen sich folgende Regeln ablesen:

- Wenn die spezifischen Werkstoffkosten k_{VB} des Bodens höchstens das 1,333fache der spezifischen Werkstoffkosten k_{VM} des Mantels betragen, ist für jede beliebige Kombination der sonstigen vorgegebenen Größen ein Kugelbehälter (zwei Halbkugelböden) am günstigsten.

Verwendet man handelsübliche Halbkugelböden, dann ist dies sicher nicht der Fall, denn die spezifischen Werkstoffkosten k_{VB} für den (bereits verformten) Halbkugelboden dürften immer erheblich höher sein als die spezifischen Werkstoffkosten k_{VM} für das Blech des Zylindermantels. Wenn aber keine fertigen Böden verwendet werden können, etwa weil extrem große Behälter gebaut werden sollen, wenn also der ganze Behälter aus demselben Blechwerkstoff hergestellt werden muß, dann sind die spezifischen Werkstoffkosten k_{VB} und k_{VM} von Boden und Mantel gleich, der Werkstoffkostenfaktor $k_{VB}/k_{VM} = 1$, und die reine Kugelform ist am günstigsten. Ähnliches ergibt sich bei Druckbehältern für extrem hohe Drücke.

- Wenn die Oberflächenkosten K_r für die Bemessung ausschlaggebend sind und die Herstellkosten H demgegenüber keine Rolle spielen, d.h. wenn die spezifischen Oberflächenkosten k_r sehr groß gegen die spezifischen Werkstoffkosten k_{VM} des Mantels werden, so daß der Aufgabenfaktor t , Gl.(113), gegen Null geht, dann sollte das Verhältnis L/D für jede Bodenform so klein wie möglich gewählt werden, und wenn die Bodenform frei wählbar ist, sollten auch hier zwei Halbkugelböden vorgesehen werden.

Dieser Fall tritt etwa dann auf, wenn Behälter für Flüssigkeiten von extrem tiefer Temperatur gebaut werden sollen, also z.B. bei Flüssiggastankern [5]. Die Betriebskosten K_b werden hier im wesentlichen durch die Wärmeverluste („Kälteverluste“) bestimmt, die der Oberfläche A des Behälters proportional sind.

- Die beiden ersten Fälle waren Extremfälle. Nun sei der allgemeine Fall angenommen, daß das Verhältnis k_{VB}/k_{VM} für den Halbkugelboden größer als 1,333 ist und sowohl die Oberflächenkosten K_r als auch die Herstellkosten H von Bedeutung sind. (Anders ausgedrückt: Das Verhältnis k_{VM}/k_r , der entsprechenden spezifischen Werte soll weder Null noch Unendlich sein.) Außerdem sei angenommen, über die Form des zu verwendenden Bodens sei bereits entschieden, etwa in dem Sinne, daß nur Klöpperböden verwendet werden können.

In diesem allgemeinen Fall hängt die optimale Form L/D des Druckbehälters von zwei dimensionslosen Größen ab, dem Aufgabenfaktor t , Gl.(113), und dem Werkstoffkostenfaktor k_{VB}/k_{VM} . Je nach dem Betrag dieser beiden Faktoren kann man eine Reihe weiterer Regeln formulieren:

- Je größer der Werkstoffkostenfaktor k_{VB}/k_{VM} ist, desto größer wird das optimale Verhältnis L/D , desto länger und schlanker werden also die Druckbehälter. Bei extrem teuren Böden besteht der „Druckbehälter“ also vorzugsweise aus einem langen Rohr, das an den Enden mit kleinen (und deshalb einigermaßen billigen) Böden verschlossen ist.
- Je größer der Aufgabenfaktor t wird, Gl.(113), desto größer wird das optimale Verhältnis von L/D , also desto länger und schlanker wird der Druckbehälter. Je kleiner der Aufgabenfaktor t ist, desto kleiner wird das optimale Verhältnis von L/D und desto kürzer und gedrungener (dicker) der Druckbehälter.

Der Aufgabenfaktor t wird groß, wenn eine oder mehrere der Größen im Zähler verhältnismäßig groß werden. Daraus ergibt sich eine Reihe weiterer Regeln, die im folgenden zusammengestellt sind. Der Aufgabenfaktor t wird klein, wenn eine (oder mehrere) der Größen im Nenner relativ groß wird. Daraus ergeben sich weitere Regeln, die anschließend zusammengestellt sind.

- Der Druckbehälter wird umso länger und schlanker, je größer das Volumen V wird oder der Innendruck p oder die jährliche Verzinsungsrate z' oder das Verhältnis β oder das Verhältnis H/M oder die spezifischen Werkstoffkosten k_{VM} .

Die spezifischen Werkstoffkosten k_{VM} werden z.B. relativ hoch, wenn der Druckbehälter ein aggressives Medium aufnehmen soll und deshalb aus hochwertigem Material sein muß; hier ist also ein relativ schlanker Druckbehälter zu bauen.

Das Verhältnis k_{VM}/k_r wird z.B. dann hoch, wenn der Druckbehälter aus einem hochwertigen Material gebaut wird, damit keine Wartungskosten anfallen oder damit er im Freien aufgestellt werden kann (am besten, abweichend von den bisherigen Annahmen, stehend), so daß die Raumkosten (Mietkosten) klein werden.

In diesen Fällen, die etwa in der chemischen Industrie häufiger vorkommen, sind also relativ lange, schlanke Behälter mit einem relativ hohen Wert von L/D am günstigsten. Beispiele für sehr schlanke Druckbehälter enthalten z.B. die Normen über Druckgasflaschen [19]. Eine interessante konstruktive Sonderausführung eines Be-

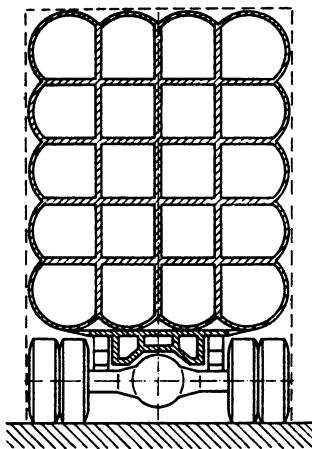


Bild 27. Druckbehälter nach Leyer

hälters mit sehr großem Wert von L/D ist in Bild 27 dargestellt [12].

- Der Druckbehälter wird allgemein umso kürzer und dicker, je größer die (rechnerisch zulässige) Spannung σ wird oder das Verhältnis M/H oder je größer die spezifischen Oberflächenkosten k_r werden.

Wenn also z.B. ein neuartiger Werkstoff verwendet werden kann, der bei sonst gleichen Daten eine größere Spannung σ zuläßt, sind die Druckbehälter kürzer und dicker zu bauen.

Praktische Vorgehensweise in einem bestimmten Fall

Aus den vorgegebenen bzw. bekannten Daten wird mit Gl.(113) der Zahlenwert des Aufgabenfaktors t ermittelt. Für die einzelnen in Betracht kommenden Bodenformen wird der Wert des Materialkostenfaktors k_{VB}/k_{VM} ermittelt. Wenn unter den verschiedenen Arten von Böden noch gewählt werden darf, wird unter Verwendung der Diagramme von Bild 26, obere Reihe, entschieden, welche Bodenform am günstigsten ist. Wenn die Form des Bodens festgelegt ist, wird aus dem entsprechenden Diagramm von Bild 26, untere Reihe, der optimale Wert von L/D abgelesen oder aus der entsprechenden Gleichung in Tabelle 10 berechnet. Die übrigen Abmessungen des Druckbehälters werden unter Verwendung der Formeln von Bild 24 und 25 ermittelt oder aus den entsprechenden Normblättern [20] entnommen.

Ein Anwendungsbeispiel für diese Vorgehensweise zur optimalen Bemessung eines Druckbehälters wird in Abschnitt 3.4.8 durchgerechnet.

3.4.8 Anwendungsbeispiel

Es sollen die kostengünstigsten Abmessungen für einen Druckbehälter mit Klöpperböden nach DIN 28011 ermittelt werden, und zwar für ein Volumen von $V=5 \text{ m}^3$ und für einen Innendruck von

Vorgegeben

$$\begin{aligned} V &= 5 \text{ m}^3 & \frac{H}{M} &= \frac{1}{0,4} = 2,5 \\ p &= 20 \text{ bar} = 200 \text{ N/cm}^2 & k_{VM} &= 0,007 \text{ DM/cm}^3 \\ \sigma &= 10000 \text{ N/cm}^2 & \frac{k_{VB}}{k_{VM}} &= 1,333 \\ z' \beta &= 0,2 \text{ a}^{-1} & k_r &= 30 \text{ DM/m}^2 \text{ a} \end{aligned}$$

Ergebnis

$$\begin{aligned} D_a &= 1300 \text{ mm} & r_1 &= 130 \text{ mm} \\ R &= 1300 \text{ mm} & L &= 4090 \text{ mm} \\ D &= 1274 \text{ mm} & h_1 &= 50 \text{ mm} \\ s_M &= 13 \text{ mm} & h_2 &= 245 \text{ mm} \\ s_B &= 13 \text{ mm} & l_M &= 3500 \text{ mm} \end{aligned}$$

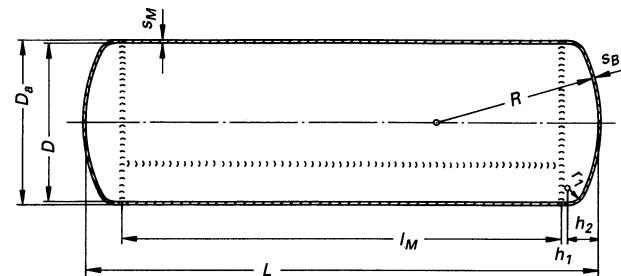


Bild 28. Kostengünstigste Ausführung eines Druckbehälters mit Klöpperböden nach DIN 28011

$p=20$ bar. Die übrigen vorgegebenen Daten sind in Bild 28 zusammengestellt.

Aus den vorgegebenen Daten wird der Aufgabenfaktor t ermittelt. Aus Gl.(113) ergibt sich der Wert $t=4$. Der Werkstofffaktor k_{VB}/k_{VM} beträgt 1,333. Mit diesen Werten ergibt sich aus Gl.(111) (oder graphisch aus Bild 26) für den optimalen Wert von $L/D \approx 3,44$ und daraus mit den Gleichungen (79) und (72) für den Innendurchmesser $D \approx 1244$ mm. Genau dieser Durchmesser D ist (erwartungsgemäß) nach Norm oder Lagerliste nicht möglich; es wird ein größerer zulässiger Außendurchmesser D_a festgelegt, hier z.B. $D_a = 1300$ mm.

Aus den Gleichungen (88) und (91) ergeben sich die zugehörigen optimalen Wanddicken zu $s_B = s_M = 12,7$ mm. Diese Wanddicke ist (erwartungsgemäß) nicht möglich; es wird der nächstgrößere mögliche Wert gewählt, hier z.B. $s_B = s_M = 13$ mm. Für den genormten Klöpperboden mit $D_a = 1300$ mm und $s_B = 13$ mm liefert die einschlägige Norm (DIN 28011) die Werte $h_1 = 50$ mm und $h_2 = 245$ mm (Bild 28). Aus den Gleichungen (79) und (72) ergibt sich $L = 4090$ mm und $l = 3500$ mm.

Damit sind die wesentlichen Abmessungen des kostengünstigsten Druckbehälters für die vorgegebenen Daten ermittelt. Der Druckbehälter ist in Bild 28 skizziert. Die wichtigsten Zahlenwerte dieses Beispieles sind noch einmal in Tabelle 11, Zeile 3, zusammengestellt.

Tabelle 11. Druckbehälter, Beispiel; Variation der Vorgaben, Auswirkung auf kostengünstigste Form (L/D)

Fall Nr.	V m^3	p $\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$	σ $\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$	$z' \beta$	$\frac{M}{H}$	k_{VM} $\frac{\text{DM}}{\text{cm}^3}$	$\frac{k_{\text{VB}}}{k_{\text{VM}}}$	k_r $\frac{\text{DM}}{\text{m}^2 \text{a}}$	t 1	$\frac{L}{D}$ 1	Bemerkung	Fall Nr.
1	5	200	10000	0,2	0,5	0,007	1,333	30	3,19	3,02	Schätzung $\frac{M}{H}=0,5$	1
2	5	200	10000	0,2	0,45	0,007	1,333	30	3,55	3,22	Schätzung $\frac{M}{H}=0,45$	2
3	5	200	10000	0,2	0,4	0,007	1,333	30	4	3,44	Beispiel $(\frac{M}{H}=0,4)$	3
4	5	200	9523	0,2	0,4	0,007	1,333	30,7	4,09	3,49	AD-Zuschläge	4
5	5	200	10000	0,2	0,35	0,007	1,333	30	4,56	3,72	Schätzung $\frac{M}{H}=0,35$	5
6	5	200	10000	0,2	0,30	0,007	1,333	30	5,32	4,08	Schätzung $\frac{M}{H}=0,30$	6

$$t = \sqrt[3]{V \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{\text{VM}}}{k_r}}$$

Tabelle 12. Druckbehälter, Formelzeichen

A	Oberfläche des Druckbehälters
A_B	Oberfläche eines Bodens
A_M	Oberfläche des Mantels
D	Innendurchmesser des Druckbehälters
D_a	Außendurchmesser des Druckbehälters
H	Herstellkosten
h	Höhe eines Bodens (beim Rechenmodell)
h_1	Bordhöhe eines Bodens (DIN)
h_2	Wölbungshöhe eines Bodens (DIN)
K_b	Betriebskosten in DM/a
K_k	Kapitalkosten in DM/a
K_r	Oberflächenkosten in DM/a
k_r	spezifische Oberflächenkosten in $\text{DM}/\text{m}^2 \text{a}$
k_{VB}	spezifische Werkstoffkosten, Boden in DM/cm^3
k_{VM}	spezifische Werkstoffkosten, Mantel in DM/cm^3
L	Gesamtlänge (innen) des Druckbehälters
l	Länge des zylindrischen Teils des Druckbehälters
l_M	Länge des eingeschweißten Mantels
M	Materialkosten
p	Berechnungsdruck
R	Wölbungsradius eines Bodens
r	Innenradius des Druckbehälters
r_1	Übergangsradius
s_B	Wanddicke, Boden
s_M	Wanddicke, Mantel
t	Aufgabenfaktor; $t = \sqrt[3]{V \frac{p}{\sigma} z' \beta \frac{H}{M} \frac{k_{\text{VM}}}{k_r}}$
V	Volumen (Rauminhalt) des Druckbehälters
V_B	Volumen (Rauminhalt) eines Bodens
V_M	Volumen (Rauminhalt) des Mantels
z'	jährliche Verzinsung (Abschreibung) des Kapitals
β	Verkaufspreis/Herstellkosten
σ	Berechnungsspannung

3.4.9 Variation des Beispiels:

Berücksichtigung von „AD-Zuschlägen“

In den einschlägigen Sicherheitsvorschriften [18], den sogenannten „AD-Merkblättern“, werden zu den rechnerisch ermittelten Wanddicken noch verschiedene Sicherheitszuschläge gefordert. Diese Zuschläge sind zum Teil etwa proportional zur berechneten

Wanddicke, zum Teil werden sie als ein fester Betrag (z.B. 0,1 mm) hinzugefügt. Diese Zuschläge wurden in der bisherigen Ableitung nicht berücksichtigt, weil dadurch die allgemeine Optimierungsgleichung (100) noch erheblich komplizierter geworden wäre.

Praktisch sind aber natürlich die geforderten Zuschläge zur Wanddicke zu berücksichtigen. Deshalb soll in diesem Abschnitt der Frage nachgegangen werden, inwieweit sich dadurch das Optimum der Form des Druckbehälters verschiebt oder anders ausgedrückt: Ob und welcher Fehler dadurch entsteht, daß zunächst (wie im Beispiel, Abschnitt 3.4.8) ohne AD-Zuschläge optimiert wird und diese erst nachträglich berücksichtigt werden. Die Zahlenwerte für dieses „AD-korrigierte“ Beispiel sind in Tabelle 11, Zeile 4, zusammengestellt:

Statt eines prozentualen Zuschlages zur Wanddicke kann rechnerisch ebensogut ein Abschlag von der zulässigen Spannung um denselben prozentualen Betrag gemacht werden. In Anlehnung an die AD-Merkblätter [18] wird deshalb die rechnerisch zulässige Spannung σ nun von 10000 N/cm^2 heruntergesetzt auf 9523 N/cm^2 .

Ein konstanter additiver Zuschlag zur Wanddicke hat rechnerisch dieselbe Bedeutung, wie etwa eine Lackschicht, die man zusätzlich auf den Druckbehälter aufträgt, wodurch sich die spezifischen Oberflächenkosten k_r erhöhen. In Anlehnung an die Vorschriften der AD-Merkblätter [18] wird deshalb der im Beispiel verwendete Wert der spezifischen Oberflächenkosten k_r von $30 \text{ DM/m}^2 \text{a}$ heraufgesetzt auf $30,7 \text{ DM/m}^2 \text{a}$.

Mit diesen Daten ergibt sich (Tabelle 11, Zeile 4) für den Wert des Aufgabenfaktors $t=4,09$ und ein optimi-

maler Wert von $L/D = 3,49$. Diese Zahlenwerte weichen nur sehr wenig von denen des ohne AD-Zuschläge gerechneten Beispies (Tabelle 11, Zeile 3) ab: Dort war $t = 4$ und $L/D = 3,44$.

Es ist zu vermuten, daß diese relativ kleinen Unterschiede praktisch nicht ins Gewicht fallen, weil genormte Abmessungen verwendet werden sollen und deshalb die Abmessungen, die dem Kostenoptimum entsprechen, ohnehin nicht exakt realisiert werden können. Diese Vermutung wird durch die Überlegungen in Abschnitt 3.4.11 bestätigt. Es ist also erlaubt, die optimale Bemessung des Druckbehälters nach dem einfachen Schema von Abschnitt 3.4.8 durchzuführen und die AD-Zuschläge zur Wanddicke erst nachträglich zu berücksichtigen, ohne befürchten zu müssen, daß das Ergebnis sich dadurch nennenswert vom praktisch erreichbaren Optimum entfernt.

3.4.10 Variation des Beispiels: Unsicherheit bei der Ermittlung der Herstellkosten

Bisher wurde von der Annahme ausgegangen, daß das Verhältnis M/H von Materialkosten M zu Herstellkosten H konstant und bekannt ist. Im Beispiel (Abschnitt 3.4.8) wurde dieses Verhältnis zu $M/H = 0,4$ ($H/M = 2,5$) angenommen. (Die wichtigsten Zahlenwerte des Beispiel von Abschnitt 3.4.8 sind in Tabelle 11, Zeile 3, noch einmal zusammengestellt.)

In seinem Unternehmen kann der Konstrukteur einen Zahlenwert von M/H selbst ermitteln, abschätzen oder sich von der Kalkulationsabteilung geben lassen. Aber er könnte befürchten, daß dieser Zahlenwert nicht ganz richtig ist, sondern etwas von dem wirklichen Verhältnis M/H abweicht.

In diesem Abschnitt soll nun das Beispiel von Abschnitt 3.4.8 mit geänderten Werten des Verhältnisses von M/H durchgeführt werden, um zu ermitteln, wie groß der Fehler ist, der durch eine mehr oder weniger falsche Annahme dieses Wertes entsteht:

Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 zusammengestellt:

- In Zeile 2 ist angenommen, daß $M/H = 0,45$ beträgt (und nicht 0,4 wie beim Beispiel in Abschnitt 3.4.8). Es ergibt sich für den optimalen Wert von $L/D = 3,22$ (statt 3,44 im Beispiel von Abschnitt 3.4.8).
- In Zeile 5 ist angenommen, daß $M/H = 0,35$ beträgt (und nicht 0,4); für L/D ergibt sich 3,72 (statt 3,44).
- In Zeile 1 wird angenommen $M/H = 0,5$ (statt 0,4); es ergibt sich $L/D = 3,02$ (statt 3,44).
- In Zeile 6 wird angenommen $M/H = 0,3$ (statt 0,4); es ergibt sich $L/D = 4,08$ (statt 3,44).

Auch hier ist zu vermuten, daß die durch die falsche Annahme von M/H bewirkten Abweichungen von der kostengünstigsten Form L/D insgesamt nicht zu sehr ins Gewicht fallen, weil die optimale Form mit Rücksicht auf die Verwendung genormter Abmessungen doch nicht exakt erreicht werden kann. Im nächsten Abschnitt wird sich beim „Durchprobieren“ verschiedener Druckbehälter mit genormten Abmessungen herausstellen, daß es fürs Ergebnis praktisch nicht ins Gewicht fällt, wenn das Verhältnis M/H nur auf $\pm 5\%$ genau abschätzbar ist, und daß auch ein Fehler von $\pm 10\%$ noch keine erhebliche Verschiebung des Optimums bewirkt.

3.4.11 Variation des Beispiels: „Durchprobieren“ verschiedener Böden und Wanddicken

In Abschnitt 3.4.8 wurden für ein bestimmtes Aufgabenbeispiel rechnerisch optimale Abmessungen für den kostengünstigsten Druckbehälter ermittelt. Da praktisch nur Druckbehälter mit genormten Abmessungen möglich sind, muß von diesen Rechenwerten und damit vom rechnerischen Kostenoptimum immer wieder mehr oder weniger abgewichen werden.

In den Abschnitten 3.4.9 und 3.4.10 wurden weitere Abweichungen vom theoretischen Optimum behandelt, die zu erwarten sind, weil bei der Optimierung nicht alle Ausgangsdaten vollständig und richtig berücksichtigt wurden.

In diesem Abschnitt soll nun abgeschätzt werden, wie groß die durch die Berücksichtigung der Norm verursachten Abweichungen etwa sind, um die Frage entscheiden zu können, ob das einfache Optimierungsverfahren von Abschnitt 3.4.8 genau genug für die praktische Anwendung ist oder ob ein genauereres, dafür aber auch aufwendigeres Verfahren angewendet werden müßte.

In Bild 29, links unten, wird das Diagramm aus Bild 26 wiederholt, das den Zusammenhang darstellt zwischen dem Werkstofffaktor k_{VB}/k_{VM} , dem Aufgabenfaktor t nach Gl.(113) und dem kostengünstigsten Verhältnis L/D bei der Verwendung von Klöpperböden. Aus diesem Diagramm kann also (wie am Beispiel in Abschnitt 3.4.8 durchgeführt) aus den gegebenen Werten von k_{VB}/k_{VM} und t der gesuchte, rechnerisch optimale Wert von L/D abgelesen werden.

Im Diagramm rechts unten in Bild 29 ist abzulesen, welche Werte von L/D unter Verwendung der genormten (DIN 28011) Außendurchmesser D_a der Klöpperböden tatsächlich realisiert werden können, inwieweit also im Einzelfall der Norm zuliebe vom optimalen Wert abgewichen werden muß.

Im Diagramm rechts oben in Bild 29 ist schließlich (als durchgezogene Kurve) die Abhängigkeit der Re-

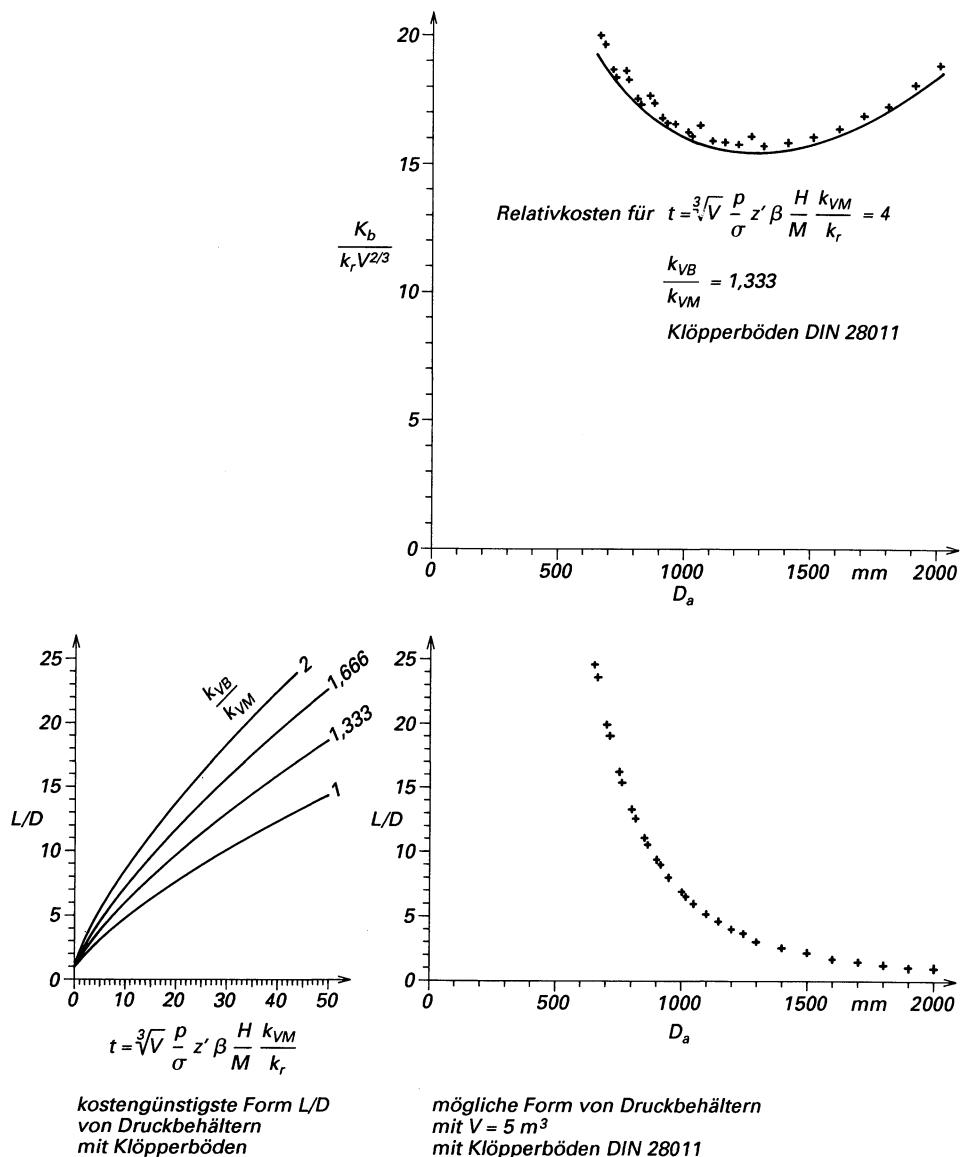


Bild 29. Kostengünstigste Ausführung eines Druckbehälters mit genormten Klöpperböden nach DIN 28011
links: kostengünstigste Form L/D
rechts: mögliche Form mit $V=5 m^3$

lativkosten vom gewählten Außendurchmesser D_a des Druckbehälters dargestellt. Das rechnerische Kostenoptimum liegt bei $L/D = 3,44$.

Im selben Diagramm (Bild 29, rechts oben) sind (als kleine Kreuze) die Relativkosten für die einzelnen Druckbehälter angegeben, die sich ergeben, wenn Klöpperböden mit genormten Durchmessern D_a und Wanddicken s_B verwendet werden. Da von der rechnerisch optimalen Wanddicke in der Regel aufzurunden ist zur nächsten genormten Wanddicke, sind die praktisch ausführbaren Druckbehälter meist etwas teurer als rechnerisch ermittelten.

Die Diagramme von Bild 29 können nun dazu verwendet werden, die Daten des Beispieles von Abschnitt 3.4.8 graphisch zu variieren, wie das in den

Abschnitten 3.4.9 und 3.4.10 rechnerisch durchgeführt wurde.

Es stellt sich heraus, daß die Fehler, die durch genauere Rechnung oder Annahmen vermieden werden könnten, in derselben Größenordnung liegen, wie die Fehler, die durch das unvermeidliche Anpassen der Rechenwerte an die genormten Abmessungen entstehen. Da die Kurve der Relativkosten in Bild 29 ein relativ flaches Optimum aufweist, fallen diese Abweichungen nicht zu sehr ins Gewicht.

Insgesamt entsteht aus diesen Fehlerabschätzungen der Eindruck, daß die Optimierung von Druckbehältern nach dem einfachen Verfahren von Abschnitt 3.4.8 wohl genügend genau ist und nicht durch ein genaueres, aber komplizierteres Verfahren ersetzt werden muß.

3.4.12 Verallgemeinerung des Beispiels

In Bild 28 waren die Vorgaben für das Beispiel von Abschnitt 3.4.8 zusammengestellt. Dieses Beispiel soll nun dadurch verallgemeinert werden, daß zwei der Vorgaben aufgegeben werden: Es wird nicht mehr vorgeschrieben, daß ein Klöpperboden verwendet werden muß, sondern es dürfen auch Korbogenböden verwendet werden oder Halbkugelböden. Außerdem wird die Annahme aufgegeben, der Werkstofffaktor k_{VB}/k_{VM} sei 1,33 und es sollen stattdessen die vier Werte 1; 1,333; 1,666 und 2 angenommen werden. Im übrigen bleiben die Vorgaben des Beispiels unverändert.

In Bild 30 ist für diese zwölf Fälle (drei Bodenformen mit jeweils vier verschiedenen Werten des Werkstofffaktors k_{VB}/k_{VM}) der Verlauf der Relativkosten darstellt. Das jeweilige Kostenoptimum läßt sich graphisch aus Bild 26 oder 30 ermitteln, der optimale

Wert von L/D graphisch aus Bild 26 oder rechnerisch aus Gl.(101) bis (112) in Tabelle 10 und daraus (unter Verwendung der Formeln von Bild 24 und 4) die übrigen Abmessungen des kostengünstigsten Druckbehälters. Die zwölf verschiedenen optimalen Druckbehälter, die sich auf diese Weise ergeben, sind in Bild 31 skizziert.

Bild 31 kann auch als eine Illustration zu den Regeln von Abschnitt 3.4.7 aufgefaßt werden. Dem Bild ist anschaulich zu entnehmen, wie die optimale Form und die Relativkosten eines Druckbehälters abhängen vom Aufgabefaktor t , vom Werkstofffaktor k_{VB}/k_{VM} und von der Art des gewählten Bodens. Da die optimalen Werte je nach Aufgabenstellung stark differieren, lohnt es sich, die Form von Druckbehältern nach den Regeln der Bemessungslehre festzulegen, wie sie in Abschnitt 3.4.6 abgeleitet und in Abschnitt 3.4.8 an einem Beispiel angewendet wurden.

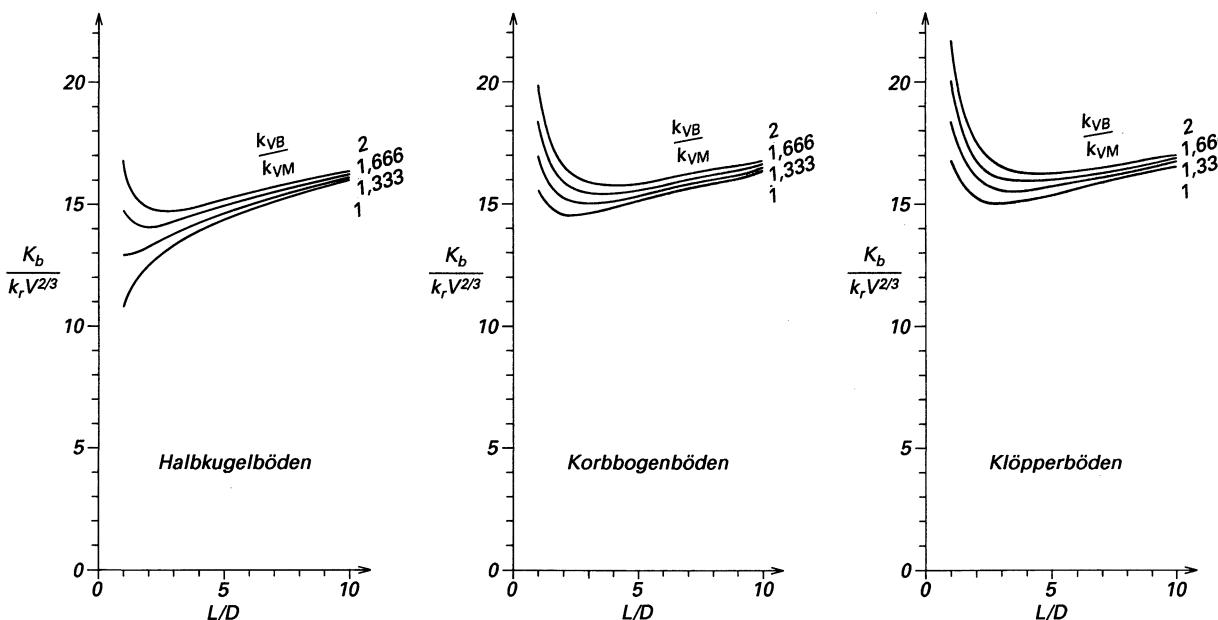
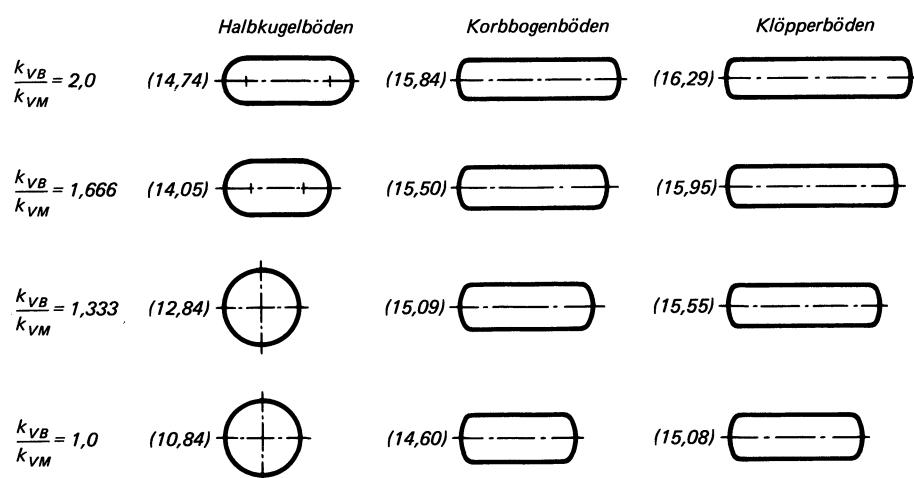


Bild 30. Zylindrische Druckbehälter mit verschiedenen Böden

Relativkosten in Abhängigkeit von der Form ($t=4$)Bild 31. Zylindrische Druckbehälter mit verschiedenen Böden, kostengünstigste Form ($t=4$) in Klammern: Relativkosten $K_b/(k_r V^{2/3})$

3.5 Bemessung von Schwungringen

In einem rotierenden Schwungrad oder Schwuntring wird kinetische Energie gespeichert. Diese Energiespeicherung ist heute wieder von Interesse, z.B. für Fahrzeugantriebe oder zur Erzeugung von sehr hohen, kurzzeitigen Leistungen [1; 6; 7; 13; 17].

Bild 32 gibt eine Übersicht über die wichtigsten Beanspruchungen, die in einem Schwungrad oder Schwuntring auftreten [8]. Aus dieser Darstellung ist zu erkennen, daß die gefährlichste Spannung in einem Schwunring immer die Tangentialspannung in der Bohrung ist und die gefährlichste Beanspruchung beim Schwungrad immer die Spannung in der Radachse. Diese Spannungen müssen also bei der Formulierung der Beanspruchungsgleichungen (Tabelle 13 und 14) berücksichtigt werden.

Als repräsentativ für die Kosten werden im Entwurfsstadium zunächst die Materialkosten allein verwendet. Analog zur Kostengleichung wird hier noch eine Gleichung für das Gewicht der Schwunräder

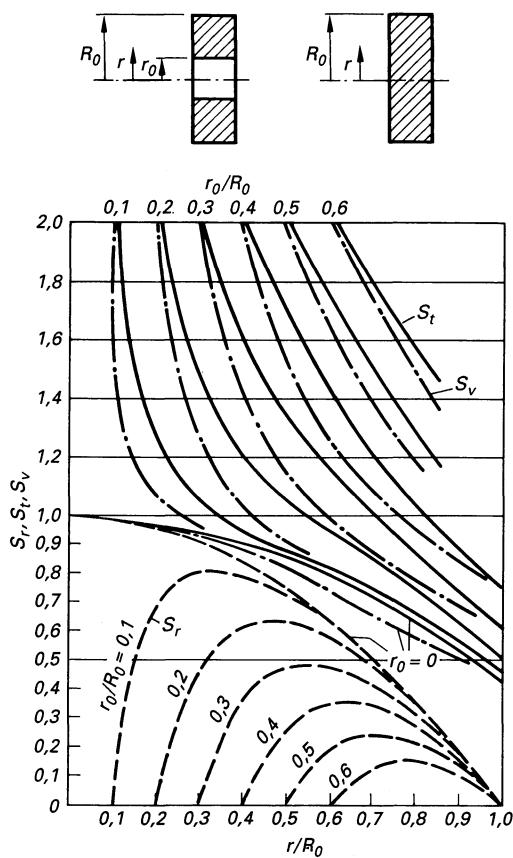


Bild 32. Schwungrad und Schwunring, Spannungen

σ_s größte Spannung im Schwungrad

σ_t Tangentialspannung im Schwuntring $S_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_s}$

σ_r Radialspannung im Schwunring $S_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_s}$

$\sigma_v = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t}$

Tabelle 13. Schwungrad (Schwuntring) als Energiespeicher, Gleichungen für die Bemessung

Beanspruchungsgleichungen (I)

$$\text{Schwungrad } W_k = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 R_0^2 V \left(1 + \frac{r_0^2}{R_0^2} \right)$$

$$\sigma = \frac{1}{8} \varrho \omega^2 R_0^2 (3 + \nu) 2 \left[1 + \frac{r_0^2}{R_0^2} \left(\frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right) \right]$$

$$\text{Schwungrad } W_k = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 R_0^2 V$$

$$\sigma = \frac{1}{8} \varrho \omega^2 R_0^2 (3 + \nu)$$

Kostengleichungen (II)

$$M = V k_V$$

$$G = V \gamma$$

Bemessungsgleichungen (III)

$$\text{Schwungrad } \frac{W_k}{M} = \frac{\sigma}{k_V} \cdot \frac{1 + \frac{r_0^2}{R_0^2}}{(3 + \nu) + \frac{r_0^2}{R_0^2} (1 - \nu)}$$

$$\frac{W_k}{G} = \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{1 + \frac{r_0^2}{R_0^2}}{(3 + \nu) + \frac{r_0^2}{R_0^2} (1 - \nu)}$$

$$\text{Schwungrad } \frac{W_k}{M} = \frac{\sigma}{k_V} \cdot \frac{2}{(3 + \nu)}$$

$$\frac{W_k}{G} = \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{2}{(3 + \nu)}$$

$$\text{Allgemein } \frac{W_k}{M} = \frac{\sigma}{k_V} \cdot f(\nu, \frac{r_0}{R_0})$$

$$\frac{W_k}{G} = \frac{\sigma}{\gamma} \cdot f(\nu, \frac{r_0}{R_0})$$

Tabelle 14. Schwungrad (Schwuntring) als Energiespeicher, wichtigste Einflußgrößen

Symbol	Dimension	Bedeutung
G	N	Gewicht
k_V	DM/m³	spezifische Werkstoffkosten
M	DM	Materialkosten
R_0	m	Außendurchmesser
r_0	m	Innendurchmesser (Bohrung)
S_B	1	Sicherheit gegen Bruch
V	m³	Volumen
W_k	Ws	kinetische Energie
γ	N/m³	spezifisches Gewicht
ν	1	Querkontraktionskoeffizient
ϱ	kg/m³	spezifische Masse
σ	N/m²	(größte) Spannung
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit

oder Schwunringe aufgestellt, die insbesondere im Hinblick auf Fahrzeugantriebe von Interesse ist.

Aus diesen verschiedenen Beanspruchungs- und Kostengleichungen ergeben sich durch Einsetzen die Bemessungsgleichungen für das Schwungrad bzw. den Schwuntring, und zwar jeweils unter Berücksichtigung der Materialkosten oder des Materialgewichtes als dem wirtschaftlichen Optimierungskriterium.

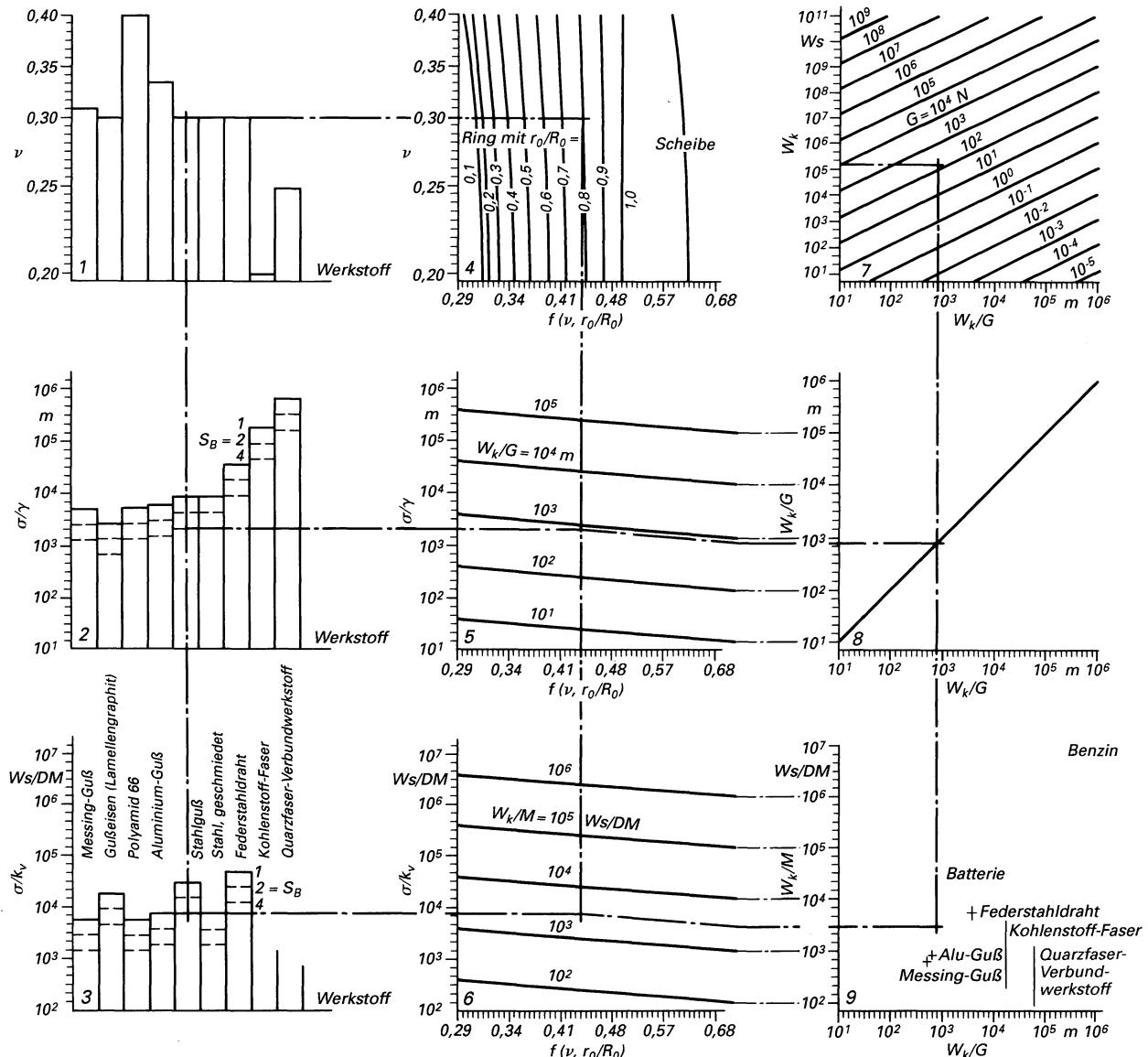


Bild 33. Schwungrad (Schwungring) als Energiespeicher, Auslegungsdiagramm

Mit demselben Verfahren, wie es am Beispiel des Wärmeaustauschers ausführlich behandelt wurde, lassen sich diese Zusammenhänge anschaulich in einem Auslegungsdiagramm (Bild 33) zusammenstellen, das abschließend kurz diskutiert werden soll.

Eingetragen sind als Beispiel die Zahlenwerte für ein Schwungrad mit einer maximal speicherbaren Energie von

$$1,86 \cdot 10^6 \text{ cm kp} = 0,1825 \cdot 10^6 \text{ Ws} \\ = 0,1825 \cdot 10^6 \text{ Nm.}$$

Es ist erkennbar, daß ein derartiges Schwungrad aus einem üblichen Werkstoff wie Stahlguß sowohl hinsichtlich der technischen als auch der wirtschaftlichen Wertigkeit nur knapp in die Größenordnung der entsprechenden Kennwerte einer üblichen Autobatterie kommt.

Durch die Verwendung eines unkonventionellen Ma-

terials wie Federstahldraht ließe sich die technische Wertigkeit eines Schwungrades bis zu den Werten einer Batterie hochtrimmen. Freilich würde der Entwurf eines Schwungrades aus Federstahldraht zunächst die Entwicklung geeigneter Konstruktionsprinzipien erfordern [13].

Sehr interessant sind hier sicher die neuartigen Faserwerkstoffe aus Bor oder Kohlenstoff, Bild 33. Diese sind jedoch leider heute noch – ein kg kostet in der Größenordnung von 100 DM – im Rahmen dieser Überlegungen unvergleichlich teuer. Wenn es gelänge, die Kosten drastisch zu senken und wenn die zusätzlichen Konstruktionsprobleme sich lösen ließen, wären diese Werkstoffe sicher das Material der Zukunft. Es wäre nicht zu erwarten, daß sich mit Schwungrädern aus derartigem Material die technische Wertigkeit der Speicherung von Energie durch flüssige Treibstoffe (etwa Benzin, vgl. Bild 33) errei-

chen ließe, es müßte sich jedoch die technische Wertigkeit der Speicherung von Energie mit elektrischen Batterien mindestens erreichen, vielleicht sogar übertreffen lassen.

3.6 Bemessung von Zahnrädern

In diesem Abschnitt wird überschlägig die Frage angesprochen, was der Konstrukteur tun kann, um Zahnräder kostengünstig festzulegen. Ein Zahnrad mit den hier verwendeten Abmessungen ist in Bild 34 skizziert, die Formeln für die Bemessung sind in Tabelle 15 zusammengestellt und die verwendeten Formelgrößen in Tabelle 16. Alle Überlegungen und Ableitungen dieses Abschnittes beziehen sich auf das Ritzel, das Ergebnis trifft jedoch auch auf das (Groß-)Rad zu.

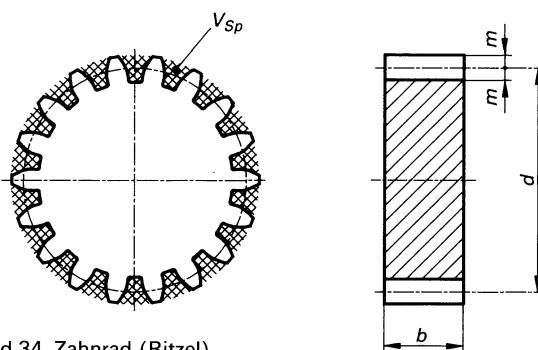


Bild 34. Zahnrad (Ritzel)

3.6.1 Beanspruchungsgleichungen

Die Gleichungen (114) und (115) (nach A. Seifried [16]) berücksichtigen die Zahnfußfestigkeit und die Flankenfestigkeit eines Zahnrades.

3.6.2 Kostengleichungen

Es wird vereinfachend angenommen, daß als Rohling für das Zahnrad eine Ronde mit dem Wälzkreisdurchmesser d_1 und der Zahnradbreite b_1 benötigt wird. Das Volumen V_b dieser Ronde, multipliziert mit den spezifischen Werkstoffkosten k_v des gewählten Werkstoffes ergibt überschlägig die Materialkosten M , Gl. (116) und (117) in Tabelle 15.

Weiterhin wird vereinfachend angenommen, daß das Spanvolumen V_{sp} (Bild 34) der Hälfte der Kreisringfläche zwischen Kopfkreis und Fußkreis des Zahnrades entspricht, wobei das Kopfspiel hier vernachlässigt wird. Die Fertigungskosten entsprechen dann etwa dem Spanvolumen, multipliziert mit den spezifischen Fertigungskosten (Zerspanungskosten) k_F , Gl. (118) bis (121).

Die Herstellkosten schließlich ergeben sich als Summe aus Materialkosten M und Fertigungskosten F Gl. (122) und (123).

Tabelle 15. Überschlägige Bemessung eines Zahnrades (Index 1 für Ritzel)

Beanspruchungsgleichungen (I)

$$b_1 d_1^2 = \frac{2 M_1}{K_F} \cdot \frac{u+1}{u} \quad (114)$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{K_F}{K_B} \cdot \frac{u}{u+1} \quad (115)$$

Kostengleichungen (II)

$$M = V_b \cdot k_v \quad (116)$$

$$M = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot b_1 \cdot k_v \quad (117)$$

$$F = V_{sp} \cdot k_F \quad (118)$$

$$F = \frac{1}{2} d_1 \pi \cdot 2m \cdot b_1 \cdot k_F \quad (119)$$

$$m = \frac{d_1}{z_1} \quad (120)$$

$$F = \pi d_1^2 \cdot b_1 \cdot \frac{1}{z_1} \cdot k_F \quad (121)$$

$$H = M + F \quad (122)$$

$$H = \pi d_1^2 \cdot b_1 \cdot \left(\frac{1}{4} k_v + \frac{1}{z_1} k_F \right) \quad (123)$$

Bemessungsgleichung (III)

$$H = \frac{2 M_1}{K_F} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} k_v + \frac{K_F}{K_B} \cdot \frac{u}{u+1} \cdot k_F \right) \quad (124)$$

$$H = M_1 \pi \left(\frac{u+1}{2u} \cdot \frac{k_v}{K_F} + 2 \frac{k_F}{K_B} \right) \quad (125)$$

Tabelle 16. Überschlägige Bemessung eines Zahnrades, Einflußgrößen (Formelgrößen)

b_1	Zahnbreite
d_1	Wälzkreisdurchmesser
F	Fertigungskosten
k_F	spezifische Fertigungskosten (Zerspanungskosten) in DM/cm ³
k_v	spezifische Werkstoffkosten in DM/cm ³
K_B	Dauerfestigkeitswert (Zahnfußfestigkeit) [16]
K_F	Dauerfestigkeitswert (Flankenfestigkeit) [16]
M	Materialkosten
M_1	Drehmoment
u	Zähnezahlverhältnis $z_2/z_1 \geq 1$
V_b	Bruttomaterialvolumen (geschätzt)
V_{sp}	Spanvolumen (geschätzt)
z_1	Zähnezahl des Ritzels
z_2	Zähnezahl des Rades

Index 1 Ritzel, Index 2 Rad

3.6.3 Bemessungsgleichung

Durch Einsetzen der Beanspruchungsgleichungen (114) und (115) in die Gleichung der Herstellkosten, Gl. (123), ergibt sich die Bemessungsgleichung (124), die sich durch Umformung noch etwas vereinfachen läßt, Gl. (125).

In dieser Bemessungsgleichung kommen außer den vorgegebenen Größen Drehmoment M_1 und Zähnezahlverhältnis u keine geometrischen Abmessungen mehr vor, sondern nur noch die vier Werkstoffkenn-

größen k_V , k_F , K_B und K_F . Um die Herstellkosten H , Gl. (125), gering zu halten, muß der Zahnradwerkstoff so gewählt werden, daß die beiden Verhältniszahlen k_V/K_F und k_F/K_B möglichst klein werden.

3.7 Bemessung von Stromschienen

In diesem Abschnitt wird kurz über ein Anwendungsbeispiel der Bemessungslehre aus der Elektrotechnik berichtet [10]. Die zu bemessende Stromschiene ist in Bild 35 skizziert, die Formeln für die Bemessung sind in Tabelle 17 zusammengestellt und die verwendeten Formelgrößen in Tabelle 18.

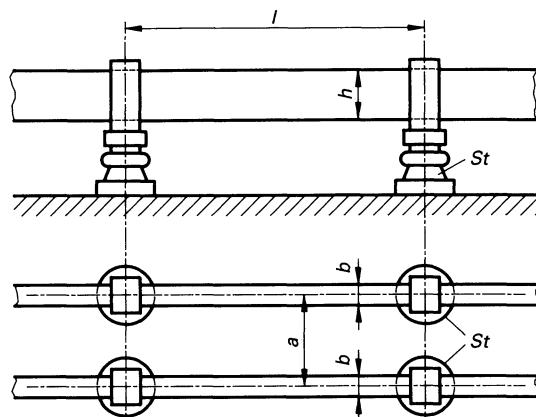


Bild 35. Stromschiene, Doppelleitung

Tabelle 17. Bemessung von Stromschienen (Doppelleitung)

Beanspruchungsgleichungen (I)	
$bh^2 = A^3$	(126)
$A^3 = \frac{0.5 I^2}{\Delta \vartheta \alpha \kappa}$	(127)
$b^2 h = B^3 l^2$	(128)
$B^3 = \frac{2.04 I_k^2 \cdot 10^{-18}}{8 \alpha \sigma_b}$	(129)
$h = \frac{A^2}{B} \cdot l^{-2/3}$	(130)
$b = \frac{B^2}{A} \cdot l^{4/3}$	(131)
Kostengleichung (II)	
$M = h \cdot b \cdot l \cdot k_V + M_{st}$	(132)
$M = A \cdot B \cdot l^{5/3} \cdot k_V + M_{st}$	(133)
$M^* = \frac{M}{l} = k_V \cdot A \cdot B \cdot l^{2/3} + M_{st} l^{-1}$	(134)
Bemessungsgleichung (III)	
$\frac{dM^*}{dl} = 0 = \frac{2}{3} k_V \cdot A \cdot B \cdot l^{-1/3} - M_{st} \cdot l^{-2}$	(135)
$l_{opt} = \left(\frac{2}{3} \frac{M_{st}}{k_V \cdot A \cdot B} \right)^{3/5}$	(136)
$M_{opt}^* = k_V \cdot A \cdot B \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{M_{st}}{k_V \cdot A \cdot B} \right)^{2/5} + M_{st}$	(137)

Tabelle 18. Bemessung von Stromschienen (Doppelleitung), Einflußgrößen (Formelgrößen)

A	Rechengröße, definiert in Gl. (126)
a	Abstand der beiden Stromschienen
B	Rechengröße, definiert in Gl. (129)
b	Breite einer Stromschiene
h	Höhe einer Stromschiene
I	Nennstrom
I_k	Kurzschlußstrom
k_V	spezifische Werkstoffkosten
l	Stützweite
l_{opt}	kostengünstigste Stützweite
M	Materialkosten (Schienenabschnitt + 1 Stützer)
M_{st}	Materialkosten (Zulieferkosten) pro Stützer
M^*	Kosten pro Längeneinheit
M_{opt}^*	geringste Kosten pro Längeneinheit
α	Wärmeübergangszahl
$\Delta \vartheta$	zulässige Übertemperatur
κ	elektrische Leitfähigkeit
σ	zulässige Biegespannung

3.7.1 Beanspruchungsgleichungen

In der Stromschiene entsteht durch die Ohmschen Verluste Wärme, die im wesentlichen über die Seitenflächen der Stromschiene abgeführt werden muß. Der Zusammenhang zwischen der zulässigen Erwärmung der Stromschiene und dem Nennstrom in der Schiene wird wiedergegeben durch die Gleichungen (126) und (127). Zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern entstehen Kräfte, die ihren größten Strom, also im Fall von Kurzschluß, erreichen. Der Zusammenhang zwischen dem Kurzschlußstrom und der Biegespannung in der Stromschiene ist in den Gleichungen (128) und (129) berücksichtigt.

Aus diesen Beanspruchungsgleichungen kann man die Querschnittsabmessungen h und b der Stromschiene in Abhängigkeit von der noch unbekannten Stützweite l ermitteln, Gl. (130) und (131).

3.7.2 Kostengleichungen

Zunächst werden die Kosten M pro Stützweite ermittelt, Gl. (132) und (133), das sind die Materialkosten für ein Stück der Stromschiene der Länge l (Stützweite) zuzüglich der Kosten M_{st} für einen Stützer. Diese Kosten M , dividiert durch die Länge l , ergeben die Kosten M^* pro Längeneinheit, Gl. (134).

3.7.3 Bemessungsgleichung

Die Kostengleichungen enthalten nur noch eine geometrische Größe, nämlich die Stützweite l . Es entsteht die Frage, wie diese Stützweite zu wählen ist, damit die Kosten am kleinsten werden. Dazu werden die Kosten pro Längeneinheit M^* nach der Stützweite l differenziert und das Ergebnis gleich Null gesetzt, Gl. (135). Es ergibt sich diejenige Stützweite l_{opt} , bei der die Kosten M^* am geringsten werden, Gl. (136). Durch Einsetzen der optimalen Stützweite l_{opt} in die Kostengleichung (134) ergeben sich die optimalen Kosten pro Längeneinheit M_{opt}^* , Gl. (137).

4 Zusammenfassung und Ausblick

Tabelle 19 soll abschließend zeigen, daß die technisch-wirtschaftliche Bemessungslehre prinzipiell der Methode der technisch-wirtschaftlichen Bewertung entspricht. Der Unterschied beider Methoden liegt vor allem im Aufwand: Während die technisch-wirtschaftliche Bewertung wegen ihrer mehr qualitativen Ausrichtung relativ wenig Aufwand erfordert, benötigt die technisch-wirtschaftliche Bemessung wegen des höheren Rechenaufwandes mehr Zeit und Arbeit.

Die Bemessungslehre dient einmal dazu, bei Neuentwürfen eine technisch-wirtschaftlich optimale Konstruktion anzustreben. Die Bemessungslehre kann weiterhin dazu dienen, die bisherigen Erfahrungen beim Entwurf bestimmter Bauteile oder Baugruppen zu interpretieren, besser zu verstehen und für Neuentwürfe bei veränderten Randbedingungen zu modifizieren.

Tabelle 19. Technisch-wirtschaftliche Bewertung und Bemessungslehre

Technisch-wirtschaftliche Bewertung	Bemessungslehre
Entwerfen vollständiger technischer Erzeugnisse	Optimieren von wesentlichen Einzelteilen
Technische Bewertung Wirtschaftliche Bewertung Gesamtbewertung	Beanspruchungsgleichung (I) Kostengleichung (II) Bemessungsgleichung (III)

Dieser höhere Aufwand ist nur in den Fällen zu vertreten, in denen eine einheitliche, mehrfach anwendbare Anwendungsregel oder ein entsprechendes Auslegungsdiagramm angestrebt wird oder in denen auf die möglichst exakte technisch-wirtschaftliche Optimierung eines wesentlichen Bauteiles oder einer wesentlichen Baugruppe einer Konstruktion besonderer Wert gelegt wird.

Schrifttum

- [1] Chironis, N.P.: Super flywheel configurations form heart of mechanical-powered drives. *Product Engineering* 42 (1971) Nr. 8, S. 54/56
- [2] Claussen, U.: Konstruieren mit Rechnern. Berlin: Springer 1971
- [3] Claussen, U.: Entwurf von Auslegungsdiagrammen für Maschinenelemente. *Konstruktion* 23 (1971) S. 448/452
- [4] Claussen, U.: Methodisches Auslegen. München: Hanser 1973
- [5] French, M.J.: Engineering Design. London: Heinemann 1971
- [6] Hagan, F., und P. Merker: Eine Rückgewinnung der Bremsenergie. *VDI-nachrichten* 1980, Nr. 13, S. 7
- [7] Hausmann, G., und E. Hau: Schwantrad-Energiespeicher für Straßenfahrzeuge. *VDI-nachrichten* 1977, Nr. 36, S. 18
- [8] Hohn, A.: Die Rotoren großer Dampfturbinen. *technica* 13 (1976) S. 909/916
- [9] Kesselring, F.: Bewertung von Konstruktionen. Düsseldorf: VDI-Verlag 1951
- [10] Kesselring, F.: Technische Kompositionsllehre. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1954
- [11] Leipholz, H.: Festigkeitslehre für den Konstrukteur. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1969
- [12] Leyer, A.: Maschinenkonstruktionslehre. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1963ff.
- [13] Post, R.F., und St.F. Post: Flywheels. *Scientific American* 229 (1973) Nr. 6, S. 17/23
- [14] Schmidt, E.: Thermodynamik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 6. Aufl. 1956
- [15] Schwaigerer, S.: Festigkeitsrechnung von Bauelementen des Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2. Auflage 1970
- [16] Seifried, A.: Über die Auslegung von Stirnradgetrieben. *VDI-Zeitschrift* 109 (1967) S. 231/236
- [17] Vau, G.: Einsatz von Schwungraden für die Energiespeicherung. In: *VDI-Berichte* 223 (1974) S. 87/94
- [18] AD-Merkblätter (AD = Arbeitsgemeinschaft Druckbehälter) Essen: Vereinigung Technischer Überwachungs-Vereine/Berlin: Beuth/Köln: Heymann
- [19] DIN 4661, DIN 4664, DIN 4800 bis DIN 4810, DIN 43687, DIN 43688: Druckbehälter
- [20] DIN 28011 bis DIN 28014: Gewölbte Böden
- [21] Hütte I. Berlin: Ernst und Sohn, 28. Aufl. 1955

größen k_V , k_F , K_B und K_F . Um die Herstellkosten H , Gl. (125), gering zu halten, muß der Zahnradwerkstoff so gewählt werden, daß die beiden Verhältniswerte k_V/K_F und k_F/K_B möglichst klein werden.

3.7 Bemessung von Stromschienen

In diesem Abschnitt wird kurz über ein Anwendungsbeispiel der Bemessungslehre aus der Elektrotechnik berichtet [10]. Die zu bemessende Stromschiene ist in Bild 35 skizziert, die Formeln für die Bemessung sind in Tabelle 17 zusammengestellt und die verwendeten Formelgrößen in Tabelle 18.

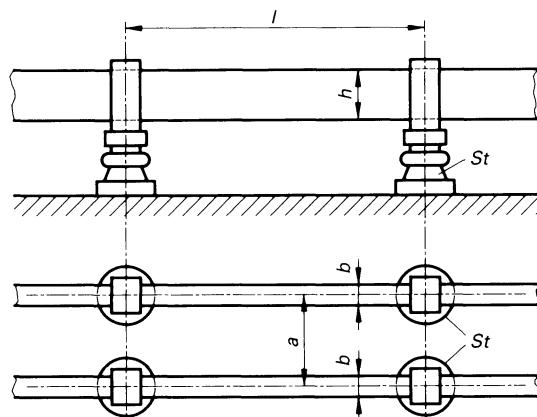


Bild 35. Stromschiene, Doppelleitung

Tabelle 17. Bemessung von Stromschienen (Doppelleitung)

Beanspruchungsgleichungen (I)	
$bh^2 = A^3$	(126)
$A^3 = \frac{0.5 I^2}{\Delta \vartheta \alpha \kappa}$	(127)
$b^2 h = B^3 l^2$	(128)
$B^3 = \frac{2.04 I_k^2 \cdot 10^{-18}}{8 \alpha \sigma_b}$	(129)
$h = \frac{A^2}{B} \cdot l^{-2/3}$	(130)
$b = \frac{B^2}{A} \cdot l^{4/3}$	(131)
Kostengleichung (II)	
$M = h \cdot b \cdot l \cdot k_V + M_{st}$	(132)
$M = A \cdot B \cdot l^{5/3} \cdot k_V + M_{st}$	(133)
$M^* = \frac{M}{l} = k_V \cdot A \cdot B \cdot l^{2/3} + M_{st} l^{-1}$	(134)
Bemessungsgleichung (III)	
$\frac{dM^*}{dl} = 0 = \frac{2}{3} k_V \cdot A \cdot B \cdot l^{-1/3} - M_{st} \cdot l^{-2}$	(135)
$l_{opt} = \left(\frac{2}{3} \frac{M_{st}}{k_V \cdot A \cdot B} \right)^{3/5}$	(136)
$M_{opt}^* = k_V \cdot A \cdot B \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{M_{st}}{k_V \cdot A \cdot B} \right)^{2/5} + M_{st}$	(137)

Tabelle 18. Bemessung von Stromschienen (Doppelleitung), Einflußgrößen (Formelgrößen)

A	Rechengröße, definiert in Gl. (126)
a	Abstand der beiden Stromschienen
B	Rechengröße, definiert in Gl. (129)
b	Breite einer Stromschiene
h	Hohe einer Stromschiene
I	Nennstrom
I_k	Kurzschlußstrom
k_V	spezifische Werkstoffkosten
l	Stützweite
l_{opt}	kostengünstigste Stützweite
M	Materialkosten (Schienenabschnitt + 1 Stützer)
M_{st}	Materialkosten (Zulieferkosten) pro Stützer
M^*	Kosten pro Längeneinheit
M_{opt}^*	geringste Kosten pro Längeneinheit
α	Wärmeübergangszahl
$\Delta \vartheta$	zulässige Übertemperatur
κ	elektrische Leitfähigkeit
σ	zulässige Biegespannung

3.7.1 Beanspruchungsgleichungen

In der Stromschiene entsteht durch die Ohmschen Verluste Wärme, die im wesentlichen über die Seitenflächen der Stromschiene abgeführt werden muß. Der Zusammenhang zwischen der zulässigen Erwärmung der Stromschiene und dem Nennstrom in der Schiene wird wiedergegeben durch die Gleichungen (126) und (127). Zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern entstehen Kräfte, die ihren größten Strom, also im Fall von Kurzschluß, erreichen. Der Zusammenhang zwischen dem Kurzschlußstrom und der Biegespannung in der Stromschiene ist in den Gleichungen (128) und (129) berücksichtigt.

Aus diesen Beanspruchungsgleichungen kann man die Querschnittsabmessungen h und b der Stromschiene in Abhängigkeit von der noch unbekannten Stützweite l ermitteln, Gl. (130) und (131).

3.7.2 Kostengleichungen

Zunächst werden die Kosten M pro Stützweite ermittelt, Gl. (132) und (133), das sind die Materialkosten für ein Stück der Stromschiene der Länge l (Stützweite) zuzüglich der Kosten M_{st} für einen Stützer. Diese Kosten M , dividiert durch die Länge l , ergeben die Kosten M^* pro Längeneinheit, Gl. (134).

3.7.3 Bemessungsgleichung

Die Kostengleichungen enthalten nur noch eine geometrische Größe, nämlich die Stützweite l . Es entsteht die Frage, wie diese Stützweite zu wählen ist, damit die Kosten am kleinsten werden. Dazu werden die Kosten pro Längeneinheit M^* nach der Stützweite l differenziert und das Ergebnis gleich Null gesetzt, Gl. (135). Es ergibt sich diejenige Stützweite l_{opt} , bei der die Kosten M^* am geringsten werden, Gl. (136). Durch Einsetzen der optimalen Stützweite l_{opt} in die Kostengleichung (134) ergeben sich die optimalen Kosten pro Längeneinheit M_{opt}^* , Gl. (137).

4 Zusammenfassung und Ausblick

Tabelle 19 soll abschließend zeigen, daß die technisch-wirtschaftliche Bemessungslehre prinzipiell der Methode der technisch-wirtschaftlichen Bewertung entspricht. Der Unterschied beider Methoden liegt vor allem im Aufwand: Während die technisch-wirtschaftliche Bewertung wegen ihrer mehr qualitativen Ausrichtung relativ wenig Aufwand erfordert, benötigt die technisch-wirtschaftliche Bemessung wegen des höheren Rechenaufwandes mehr Zeit und Arbeit.

Die Bemessungslehre dient einmal dazu, bei Neuentwürfen eine technisch-wirtschaftlich optimale Konstruktion anzustreben. Die Bemessungslehre kann weiterhin dazu dienen, die bisherigen Erfahrungen beim Entwurf bestimmter Bauteile oder Baugruppen zu interpretieren, besser zu verstehen und für Neuentwürfe bei veränderten Randbedingungen zu modifizieren.

Tabelle 19. Technisch-wirtschaftliche Bewertung und Bemessungslehre

Technisch-wirtschaftliche Bewertung	Bemessungslehre
Entwerfen vollständiger technischer Erzeugnisse	Optimieren von wesentlichen Einzelteilen
Technische Bewertung Wirtschaftliche Bewertung Gesamtbewertung	Beanspruchungsgleichung (I) Kostengleichung (II) Bemessungsgleichung (III)

Dieser höhere Aufwand ist nur in den Fällen zu vertreten, in denen eine einheitliche, mehrfach anwendbare Anwendungsregel oder ein entsprechendes Auslegungsdiagramm angestrebt wird oder in denen auf die möglichst exakte technisch-wirtschaftliche Optimierung eines wesentlichen Bauteiles oder einer wesentlichen Baugruppe einer Konstruktion besonderer Wert gelegt wird.

Schrifttum

- [1] Chironis, N.P.: Super flywheel configurations form heart of mechanical-powered drives. *Product Engineering* 42 (1971) Nr. 8, S. 54/56
- [2] Claussen, U.: Konstruieren mit Rechnern. Berlin: Springer 1971
- [3] Claussen, U.: Entwurf von Auslegungsdiagrammen für Maschinenelemente. *Konstruktion* 23 (1971) S. 448/452
- [4] Claussen, U.: Methodisches Auslegen. München: Hanser 1973
- [5] French, M.J.: Engineering Design. London: Heinemann 1971
- [6] Hagin, F., und P. Merker: Eine Rückgewinnung der Bremsenergie. *VDI-nachrichten* 1980, Nr. 13, S. 7
- [7] Hausmann, G., und E. Hau: Schwungrad-Energiespeicher für Straßenfahrzeuge. *VDI-nachrichten* 1977, Nr. 36, S. 18
- [8] Hohn, A.: Die Rotoren großer Dampfturbinen. *technica* 13 (1976) S. 909/916
- [9] Kesselring, F.: Bewertung von Konstruktionen. Düsseldorf: VDI-Verlag 1951
- [10] Kesselring, F.: Technische Kompositionelle Lehre. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1954
- [11] Leipholz, H.: Festigkeitslehre für den Konstrukteur. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1969
- [12] Leyer, A.: Maschinenkonstruktionslehre. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1963ff.
- [13] Post, R.F., und St.F. Post: Flywheels. *Scientific American* 229 (1973) Nr. 6, S. 17/23
- [14] Schmidt, E.: Thermodynamik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 6. Aufl. 1956
- [15] Schwaiger, S.: Festigkeitsrechnung von Bauelementen des Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2. Auflage 1970
- [16] Seifried, A.: Über die Auslegung von Stirnradgetrieben. *VDI-Zeitschrift* 109 (1967) S. 231/236
- [17] Vau, G.: Einsatz von Schwungrädern für die Energiespeicherung. In: *VDI-Berichte* 223 (1974) S. 87/94
- [18] AD-Merkblätter (AD = Arbeitsgemeinschaft Druckbehälter) Essen: Vereinigung Technischer Überwachungs-Vereine/Berlin: Beuth/Köln: Heymann
- [19] DIN 4661, DIN 4664, DIN 4800 bis DIN 4810, DIN 43687, DIN 43688: Druckbehälter
- [20] DIN 28011 bis DIN 28014: Gewölbte Böden
- [21] Hütte I. Berlin: Ernst und Sohn, 28. Aufl. 1955