## 1. Aufgabe

Ein eingespannter Balken wird durch eine Streckenlast $p_0$ und eine Kraft $\vec{F}$ belastet.

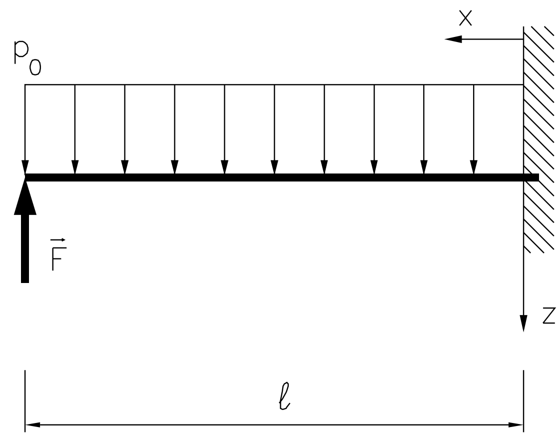
**Geg.:**

$\ell$, $p_0$, $F = p_0 \cdot \ell$, $E \cdot I$.

**Ges.:**

Bestimmen Sie eine Näherung der Biegelinie mit dem Ritz'schen Verfahren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung unter Verwendung der Differentialgleichung der Biegelinie.

Ansatzfunktion: $w(x) = [x^2,\ x^3,\ x^4] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$



## 2. Aufgabe

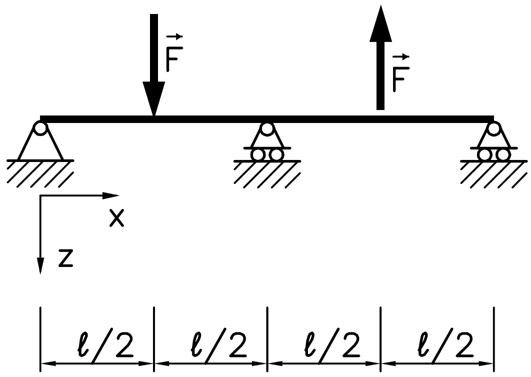
Ein gelagerter Balken wird mit zwei Kräften belastet.

**Geg.:**

$F$, $\ell$, $E \cdot I$.

**Ges.:**

Bestimmen Sie eine Näherung der Biegelinie mit dem Ritz'schen Verfahren. Bestimmen Sie die exakte Lösung der Verschiebung an der Stelle $x = \frac{\ell}{2}$ mit dem Satz von Betti (Hinweis: Benutzen Sie die in Übung 6 Aufgabe 2 ermittelten Biegelinien) und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der Näherungslösung.




## 3. Aufgabe

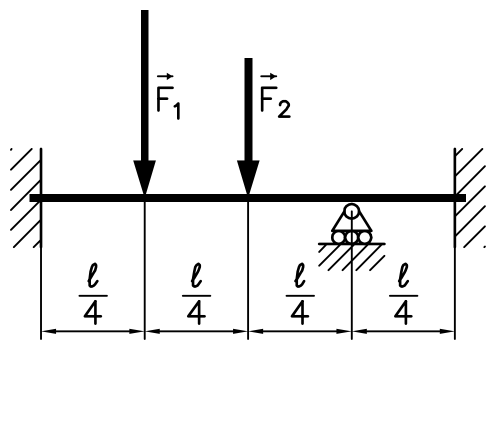
Ein zwischen zwei Wänden eingespannter Balken wird durch zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ belastet.

**Geg.:**

$F_1$, $F_2$, $\ell$, $E \cdot I$.

**Ges.:**

Bestimmen Sie eine Näherung der Biegelinie mit der Methode der Finiten Elemente. Teilen Sie den Balken in vier Bereiche ein und verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleitete Steifigkeitsmatrix für ein Balkenelement.



**Beispielaufgabe**

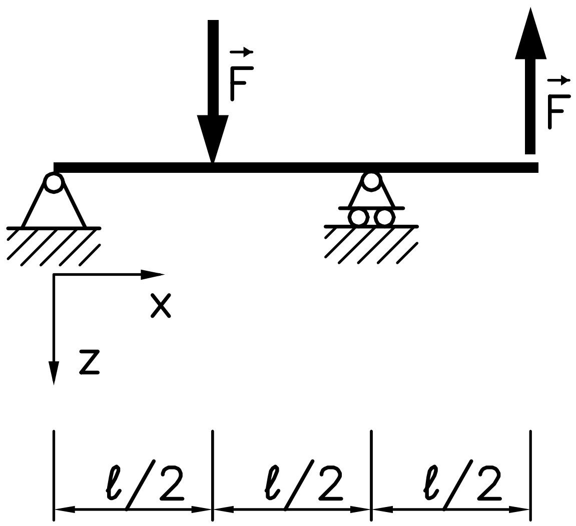
Ein gelagerter Balken wird durch zwei Kräfte entsprechend der Skizze belastet.

**Geg.:**

$F$, $\ell$, $E \cdot I$.

**Ges.:**

Bestimmen Sie eine Näherung der Biegelinie mit der Methode der Finiten Elemente. Verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleitete Steifigkeitsmatrix für ein Balkenelement.



# Lösungshilfen für 11. Übung Mechanik II 2007 :

## Aufgabe 1:

$$w(x) = -\frac{p_0\,\ell^2}{4\,E\,I} \cdot x^2 + \frac{p_0}{24\,E\,I} \cdot x^4$$

Näherungslösung ist identisch mit der exakten Lösung!

## Aufgabe 2:

Ritz: $w(x) = \dfrac{2 \cdot F \cdot \ell^3}{\pi^4 \cdot E \cdot I} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \qquad w\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = 0{,}0205 \cdot \dfrac{F \cdot \ell^3}{E \cdot I}$

Satz von Betti: $w\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = f_F = 0{,}0208 \cdot \dfrac{F \cdot \ell^3}{E \cdot I}$

Der Fehler liegt bei $\approx 1{,}4$ %.

## Aufgabe 3:

$$w_1 = 0$$

$$w_1' = 0$$

$$w_2 = \frac{7}{20736} \cdot \frac{\ell^3}{E \cdot I} \cdot (5F_1 + 4F_2)$$

$$w_2' = \frac{1}{3456} \cdot \frac{\ell^2}{E \cdot I} \cdot (19F_1 + 26F_2)$$

$$w_3 = \frac{1}{5184} \cdot \frac{\ell^3}{E \cdot I} \cdot (7F_1 + 11F_2)$$

$$w_3' = -\frac{1}{864} \cdot \frac{\ell^2}{E \cdot I} \cdot (5F_1 + 4F_2)$$

$$w_4 = 0$$

$$w_4' = -\frac{1}{384} \cdot \frac{\ell^2}{E \cdot I} \cdot (F_1 + 2F_2)$$

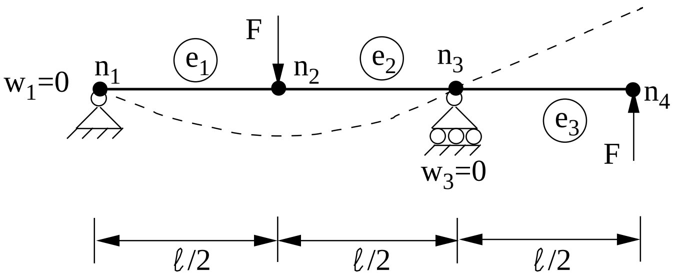
$$w_5 = 0$$

$$w_5' = 0$$

## Beispielaufgabe:

Der Balken wird in 3 Bereiche ("Finite Elemente") aufgeteilt.

$\Rightarrow$ 3 Elemente $e_i$, 4 Knoten (nodes) $n_i$




Für jedes Element wird dieselbe Ansatzfunktion für die Verschiebungen w in z-Richtung gewählt.

$w(\xi) = \{\varphi^e\}^T \cdot \{\alpha^e\}$

$\xi$ ist die auf das einzelne Element bezogene lokale Koordinate. Analog zum Vorgehen im Skript, Kapitel 10.2, ist zur Bestimmung der virtuellen Änderung der Formänderungsenergie $\delta U_\varepsilon$ die Steifigkeitsmatrix von Bedeutung.

Die Steifigkeitsmatrix für ein Balkenelement:

$$[k^e] = \frac{2 \cdot E \cdot I}{(\ell^e)^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \cdot \ell^e & -6 & 3 \cdot \ell^e \\ 3 \cdot \ell^e & 2\,(\ell^e)^2 & -3 \cdot \ell^e & (\ell^e)^2 \\ -6 & -3 \cdot \ell^e & 6 & -3 \cdot \ell^e \\ 3 \cdot \ell^e & (\ell^e)^2 & -3 \cdot \ell^e & 2\,(\ell^e)^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \ell^e \mathrel{\hat{=}} \text{Elementlänge}$$

hier: $\ell^e = \dfrac{\ell}{2}$

$$[k^e] = \frac{4 \cdot E \cdot I}{\ell^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 6 \cdot \ell & -24 & 6 \cdot \ell \\ 6 \cdot \ell & 2 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 \\ -24 & -6 \cdot \ell & 24 & -6 \cdot \ell \\ 6 \cdot \ell & \ell^2 & -6 \cdot \ell & 2 \cdot \ell^2 \end{bmatrix}$$

Als nächstes müssen die identischen Steifigkeitsmatrizen der drei Balkenelemente $[k^e]$ zu der globalen Steifigkeitsmatrix $[k]$ zusammengesetzt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, an welchen der vier Knoten die drei Elemente jeweils zusammenhängen. Sowohl die Element-Steifigkeitsmatrix als auch die globale Steifigkeitsmatrix sind symmetrisch.

Zusammensetzen der globalen Steifigkeitsmatrix:

$$[k] = \frac{4 \cdot E \cdot I}{\ell^3} \cdot \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 24 & 6 \cdot \ell & -24 & 6 \cdot \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 \cdot \ell & 2 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -6 \cdot \ell & 48 & 0 & -24 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 4 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -6 \cdot \ell & 48 & 0 & -24 & 6 \cdot \ell \\ 0 & 0 & 6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 4 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & -6 \cdot \ell & 24 & -6 \cdot \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot \ell & \ell^2 & -6 \cdot \ell & 2 \cdot \ell^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_1* \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3* \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1* & w_1' & w_2 & w_2' & w_3* & w_3' & w_4 & w_4' \end{matrix} & \end{array}$$

Einbau der Randbedingungen:

$w_1 = 0 \quad \rightarrow \quad$ Festlager

$w_3 = 0 \quad \rightarrow \quad$ Loslager

Die entsprechend gekennzeichneten (*) Zeilen und Spalten werden in der globalen Steifigkeitsmatrix gestrichen. Nach Berücksichtigung der Randbedingungen und Betrachtung der äußeren Belastungen (siehe Skript) bleibt folgendes Gleichungssystem übrig:

$$\frac{4 \cdot E \cdot I}{\ell^3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 \cdot \ell & 48 & 0 & 6 \cdot \ell & 0 & 0 \\ \ell^2 & 0 & 4 \cdot \ell^2 & \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot \ell & \ell^2 & 4 \cdot \ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \cdot \ell & 24 & -6 \cdot \ell \\ 0 & 0 & 0 & \ell^2 & -6\ell & 2 \cdot \ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man die unbekannten Verschiebungen und Neigungen an den Balkenenden, die zugleich die gesuchten Parameter $\{\alpha^e\}$ der Ansatzfunktionen sind.

Das Gleichungssystem wird hier mit dem Verfahren nach Gauss gelöst, wozu zuerst eine sinnvolle Umordnung der Zeilen durchgeführt wird.

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \ell^2 & -6 \cdot \ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot \ell & \ell^2 & 4 \cdot \ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ -6 \cdot \ell & 48 & 0 & 6 \cdot \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \cdot \ell & 24 & -6 \cdot \ell \\ 0 & 0 & 0 & \ell^2 & -6\ell & 2 \cdot \ell^2 \\ \ell^2 & 0 & 4 \cdot \ell^2 & \ell^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix} = \frac{\ell^3}{4 \cdot E \cdot I} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (3)+\frac{3}{\ell}\cdot(1)\Rightarrow \\ \\ (5)+\frac{1}{6}\ell\cdot(4)\Rightarrow \\ (6)-\frac{1}{2}\cdot(1)\Rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 2\cdot\ell^2 & -6\cdot\ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot\ell & \ell^2 & 4\cdot\ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 30 & 3\cdot\ell & 6\cdot\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell & 24 & -6\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 3\cdot\ell & \frac{7}{2}\cdot\ell^2 & \ell^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix}=\frac{\ell^3}{4\cdot E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ -\frac{1}{6}F\ell \\ 0 \end{pmatrix}\qquad\begin{array}{r}(7)\\(8)\\(9)\\(10)\\(11)\\(12)\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (9)-\frac{5}{\ell}\cdot(8)\Rightarrow \\ \\ \\ (12)-\frac{1}{2}\cdot(8)\Rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 2\cdot\ell^2 & -6\cdot\ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot\ell & \ell^2 & 4\cdot\ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & -2\cdot\ell & -14\cdot\ell & 30 & -5\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell & 24 & -6\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 3\cdot\ell^2 & -\ell^2 & 3\cdot\ell & -\frac{1}{2}\cdot\ell^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix}=\frac{\ell^3}{4\cdot E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ -\frac{1}{6}F\ell \\ 0 \end{pmatrix}\qquad\begin{array}{r}(13)\\(14)\\(15)\\(16)\\(17)\\(18)\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ (18)+\frac{3}{2}\ell\cdot(15)\Rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 2\cdot\ell^2 & -6\cdot\ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot\ell & \ell^2 & 4\cdot\ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & -2\cdot\ell & -14\cdot\ell & 30 & -5\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell & 24 & -6\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & -22\ell^2 & 48\cdot\ell & -8\cdot\ell^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix}=\frac{\ell^3}{4\cdot E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ -\frac{1}{6}F\ell \\ \frac{3}{2}F\ell \end{pmatrix}\qquad\begin{array}{r}(19)\\(20)\\(21)\\(22)\\(23)\\(24)\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ (24)-\frac{11}{3}\ell\cdot(22)\Rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 2\cdot\ell^2 & -6\cdot\ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot\ell & \ell^2 & 4\cdot\ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & -2\cdot\ell & -14\cdot\ell & 30 & -5\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell & 24 & -6\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40\cdot\ell & 14\cdot\ell^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix}=\frac{\ell^3}{4\cdot E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ -\frac{1}{6}F\ell \\ \frac{31}{6}F\ell \end{pmatrix}\qquad\begin{array}{r}(25)\\(26)\\(27)\\(28)\\(29)\\(30)\end{array}$$

$$(30) - 20 \cdot (29) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot\ell^2 & -6\cdot\ell & \ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot\ell & \ell^2 & 4\cdot\ell^2 & -6\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & -2\cdot\ell & -14\cdot\ell & 30 & -5\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell & 24 & -6\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\cdot\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4 \\ w_4' \end{pmatrix} = \frac{\ell^3}{4\cdot E\cdot I} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -F \\ -\frac{1}{6}F\ell \\ \frac{51}{6}F\ell \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (31) \\ (32) \\ (33) \\ (34) \\ (35) \\ (36) \end{matrix}$$

Somit folgen die unbekannten Parameter aus Gl. (31)-(36) zu:

$$w_1' = \frac{7}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I} \quad ; \quad w_2 = \frac{5}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I} \quad ; \quad w_2' = \frac{1}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I}$$

$$\underline{\underline{w_3' = -\frac{11}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I} \quad ; \quad w_4 = -\frac{5}{32}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I} \quad ; \quad w_4' = -\frac{17}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I}}}$$

Mit diesen Parametern und den Formfunktionen (Skript Gl. 10.27) sind die Biegelinien elementweise gegeben. Beispiel: Für das Element Nr.2 erhält man die Biegelinie als Funktion der lokalen Koordinate $\xi$ mit:

$$\begin{aligned} w_{e2}(\xi) &= w_2\cdot(1-3\xi^2+2\xi^3) + w_2'\cdot(\ell^e\xi - 2\ell^e\xi^2 + \ell^e\xi^3) + w_3\cdot(3\xi^2-2\xi^3) + w_3'\cdot(-\ell^e\xi^2+\ell^e\xi^3) \\ &= \frac{5}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(1-3\xi^2+2\xi^3) + \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(\xi-2\xi^2+\xi^3) - \frac{11}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(-\xi^2+\xi^3) \\ &= \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(5-15\xi^2+10\xi^3+\xi-2\xi^2+\xi^3+11\xi^2-11\xi^3) \\ w_{e2}(\xi) &= \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(5+\xi-6\xi^2) \end{aligned}$$

Zur Überprüfung:

$$\begin{aligned} w_{e2}(\xi=0) &= \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(5+0-6\cdot 0^2) = \frac{5}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I} = w_2 \\ w_{e2}(\xi=1) &= \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(5+1-6\cdot 1^2) = 0 = w_3 \end{aligned}$$

mit $\xi = \frac{1}{\ell^e}x = \frac{2}{\ell}x$ und $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell}$ folgt für die Neigung des Elements Nr.2:

$$\begin{aligned} w_{e2}'(\xi) &= \frac{dw_{e2}(\xi)}{dx} = \frac{dw_{e2}(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{96}\cdot\frac{F\cdot\ell^3}{E\cdot I}\cdot(1-12\xi)\cdot\frac{2}{\ell} = \frac{1}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I}\cdot(1-12\xi) \\ w_{e2}'(\xi=0) &= \frac{1}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I}\cdot(1-12\cdot 0) = \frac{1}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I} = w_2' \\ w_{e2}'(\xi=1) &= \frac{1}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I}\cdot(1-12\cdot 1) = -\frac{11}{48}\cdot\frac{F\cdot\ell^2}{E\cdot I} = w_3' \end{aligned}$$