Auszug aus: Die schwache Formulierung der statischen Biegedifferentialgleichung und ihre numerische Anwendung

Michael Karow

May 31, 2012

Es war w_h die Approximation an $w(x)$ als Linearkombination der Basisfunktionen ϕ_k des endlichdimensionalen Funktionenraumes V_h:

$$w_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \phi_k$$

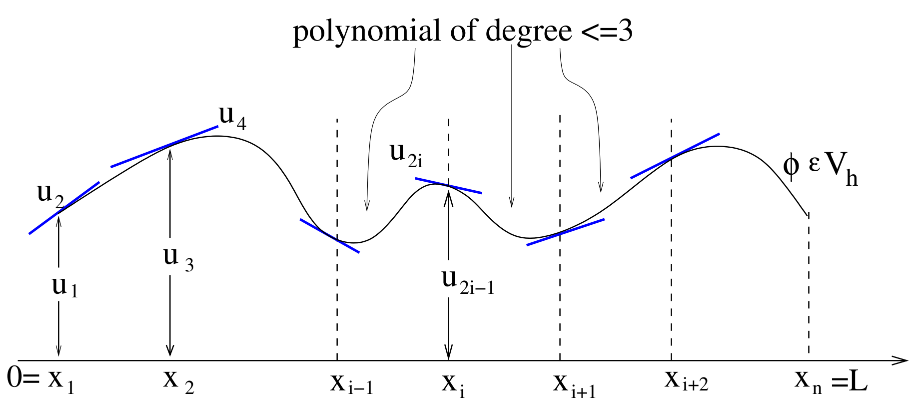
Die Wahl des Ansatzraums V_h. Grundsätzlich kann man als Ansatzraum V_h jeden endlichdimensionalen Unterraum von V wählen. Wünschenswert sind folgende Eigenschaften:

- V_h sollte natürlich eine gute Näherung an die exakte Lösung enthalten.
- Einfache Spezialfälle des Randwertproblems haben Polynome als Lösung. Polynome sollten also durch Funktionen aus V_h gut approximiert werden können.
- Möglichst viele Einträge des Steifigkeitsmatrix sollten 0 sein, damit der Rechenaufwand beim Lösen des Gleichungssystems durch spezielle Techniken klein gehalten werden kann.

Diese Forderung lassen sich durch folgenden Ansatz gut erfüllen:
Wähle $n \geq 2$. Setze $h = L/(n-1)$, $x_i = h(i-1)$, $i = 1, \ldots, n$ und

$$V_h \quad = \quad \{\, \phi \in V \mid \phi|_{]x_i, x_{i+1}[} \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 3,\ i = 1, \ldots, n-1 \,\}.$$

Die Stellen x_i nennt man Knoten. Jede Funktion $\phi \in V_h$ ist durch die Werte $u_{2i-1} := \phi(x_i)$ und $u_{2i} := \phi'(x_i)$ eindeutig festgelegt.



Jede Funktion $\phi \in V_h$ hat die Darstellung

$$\phi = \sum_{k=1}^{2n} u_k\, \phi_k = \sum_{i=1}^{n} (u_{2i-1}\, \phi_{2i-1} + u_{2i}\, \phi_{2i})$$

mit den folgenden Basisfunktionen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{2n-1}, \phi_{2n} \in V_h$: Für $i = 2, \ldots, n-1$,

$$\phi_{2i-1}(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \bar{\phi}_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \phi_{2i}(x) = \begin{cases} h\,\bar{\phi}_4\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h\,\bar{\phi}_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_1\left(\frac{x}{h}\right) & x \in [0, h] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \phi_2(x) = \begin{cases} h\,\bar{\phi}_2\left(\frac{x}{h}\right) & x \in [0, h] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\phi_{2n-1}(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_3\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right) & x \in [x_{n-1}, L] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \phi_{2n}(x) = \begin{cases} h\,\bar{\phi}_4\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right) & x \in [x_{n-1}, L] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

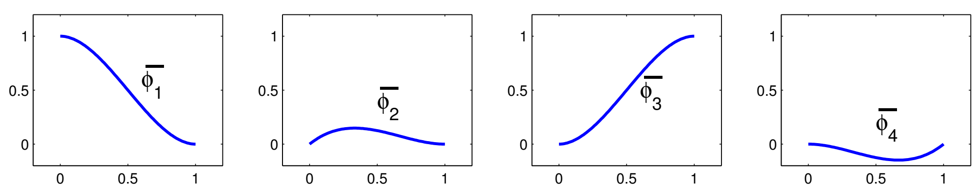
wobei

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & \bar{\phi}_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \bar{\phi}_2(\xi) &= \xi(\xi-1)^2, & \bar{\phi}_4(\xi) &= \xi^2(\xi-1). \end{aligned}$$

Die Funktionen $\bar{\phi}_i$ nennt man Formfunktionen. Es handelt sich bei ihnen um Polynome 3. Grades, die an den Stellen 0 und 1 folgende Werte annehmen.

	$\bar{\phi}_j(0)$	$\bar{\phi}'_j(0)$	$\bar{\phi}_j(1)$	$\bar{\phi}'_j(1)$
$j = 1$	1	0	0	0
$j = 2$	0	1	0	0
$j = 3$	0	0	1	0
$j = 4$	0	0	0	1

Hier sind die Graphen der Formfunktionen:



Die Basisfunktionen mit ungeradem Index $2i-1$ haben die Form eines Buckels mit maximalem Wert 1 am Knoten x_i. Die Basisfunktionen mit geradem Index $2i$ haben die Form einer Welle mit Steigung 1 am Knoten x_i: