Auszug aus: Die schwache Formulierung der statischen Biegedifferentialgleichung und ihre numerische Anwendung

Michael Karow

June 1, 2012

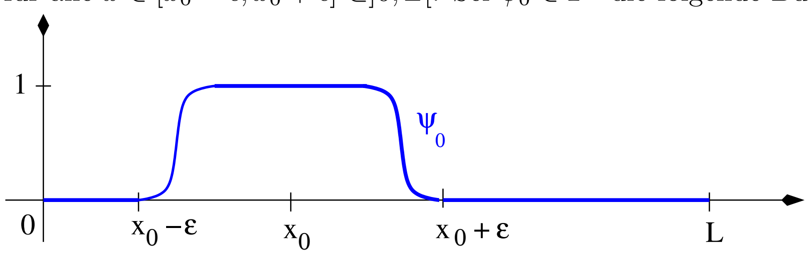
Sei

$$T^0 \quad = \quad \{\,\psi : [0,L] \to \mathbb{R} \mid \psi \in V,\ \psi(0) = \psi'(0) = \psi(L) = \psi'(L) = 0\}$$

Nulltestlemma. Sei $f \in \mathcal{C}^s$. Dann gilt

$$f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^L f\psi = 0 \text{ für alle } \psi \in T^0. \tag{1}$$

Beweis: $'\Rightarrow'$ ist klar. Wir zeigen die umgekehrte Implikation $'\Leftarrow'$. Angenommen, f ist stetig an der Stelle $x_0 \in]0,L[$ und $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $f(x) > f(x_0)/2$ für alle $x \in [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \subset]0,L[$. Sei $\psi_0 \in T^0$ die folgende Buckelfunktion.



Dann gilt

$$\int_0^L f\psi_0 = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0-\epsilon} f\psi_0 \geq \int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0-\epsilon/2} f\cdot 1 \geq \epsilon f(x_0)/2 > 0.$$

Die Bedingung auf der rechten Seite von (1) ist also nicht erfüllt. Das Argument für $f(x_0) < 0$ ist analog. Wenn $f(0) \neq 0$ oder $f(L) \neq 0$ dann ist $f(x_0) \neq 0$ für ein benachbartes $x_0 \in]0,L[$. $\square$

Satz von der schwachen Formulierung. Sei $w \in V$. Sei außerdem [1] $EIw'' \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) w löst das Randwertproblem.

(b) Für alle $\psi \in V$,

$$\begin{aligned}\int_0^L ((EIw'')'' - q)\psi + (Q^0 + (EIw'')'(0))\psi(0) + (M^0 - EIw''(0))\psi'(0) \\ - (Q^L + (EIw'')'(L))\psi(L) - (M^L - EIw''(L))\psi'(L) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

(c) Für alle $\psi \in V$,

$$\int_0^L EIw''\psi'' = \int_0^L q\psi \; - Q^0\psi(0) - M^0\psi'(0) + Q^L\psi(L) + M^L\psi'(L). \tag{3}$$

Die Aussage (c) heißt schwache Formulierung des Randwertproblems. In ihr kommen nur noch zweite Ableitungen vor. Das ursprüngliche Randwertproblem enthält vierte Ableitungen.

[1]Diese Voraussetzung ist eigentlich nicht nötig, denn man kann (mit einem komplizierten Beweis) zeigen, dass $EIw'' \in V$ aus (c) folgt.

Beweis:

$(a) \Rightarrow (b)$ ist klar. $(b) \Rightarrow (a)$: Angenommen (2) gilt. Dann ist $\int_0^L ((EIw'')'' - q)\psi = 0$ für alle $\psi \in T^0 \subset V$, denn für $\psi \in T^0$ ist ja $\psi(0) = \psi'(0) = \psi(L) = \psi'(L) = 0$. Aus dem Nulltestlemma folgt $(EIw'')'' - q = 0$. Der Integralterm in (2) ist daher stets 0. Gleichung (2) lautet dann nur noch

$$(Q^0 + (EIw'')'(0))\psi(0) + (M^0 - EIw''(0))\psi'(0) - (Q^L + (EIw'')')\psi(L) - (M^L - Ew'')\psi'(L) = 0.$$

Wähle nun ein $\psi \in V$ so dass $\phi(0) = 1$ und $\psi(L) = \psi'(L) = \psi'(L) = 0$. Dann folgt $Q^0 + (EIw'')' = 0$, also $-(EIw'')'(0) = Q^0$. Analog kann ein $\psi \in V$ für jede Randbedingung gewählt werden. Damit ist die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ bewiesen. Zum Beweis von $(b) \Leftrightarrow (c)$ benutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^L (EIw'')''\psi &= (EIw'')'\psi|_0^L - \int_0^L (EIw'')'\psi' \\
&= (EIw'')'\psi|_0^L - (EIw'')\psi'|_0^L + \int_0^L (EIw'')\psi'' \\
&= (EIw'')'(L)\psi(L) - (EIw'')'(0)\psi(0) \\
&\quad - (EIw'')(L)\psi'(L) + (EIw'')(0)\psi'(0) \\
&\quad + \int_0^L (EIw'')\psi''. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Aus (4) folgt, dass die Differenz der rechten und der linken Seite von (3) mit der linken Seite von (2) übereinstimmt. Es handelt sich bei (2) und (3) also um die gleiche Bedingung. □