

Vorlesungsmanuskript

Grundlagen der Finite Elemente Methode

Dr.-Ing. D. Kuhl
Univ. Prof. Dr. techn. G. Meschke

2. Auflage, im Juni 2002

Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Statik und Dynamik
Univ. Prof. Dr. techn. G. Meschke

STATIK & DYNAMIK

Vorlesungsmanuskript

Grundlagen der Finite Elemente Methode

Dr.-Ing. D. Kuhl
Univ. Prof. Dr. techn. G. Meschke

2. Auflage, im Juni 2002

Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Statik und Dynamik
Univ. Prof. Dr. techn. G. Meschke
Universitätsstraße 150 IA6
D-44780 Bochum
Telefon: +49 (0) 234 / 32 24967
Telefax: +49 (0) 234 / 32 14149
E-Mail: detlef.kuhl@ruhr-uni-bochum.de
www: <http://www.sd.ruhr-uni-bochum.de>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung der Autoren ist es nicht gestattet, dieses Manuskript ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie, Digitalisierung) zu vervielfältigen.

Vorwort

Die vorliegende erste Auflage des Manuskripts begleitet die Vorlesung 'Grundlagen der Finite Elemente Methode'. Das Manuskript soll die Studierenden bei der Nacharbeitung der Vorlesungen unterstützen. Es ist keinesfalls in der Lage, den Besuch der Vorlesung oder der Übungen zu ersetzen.

Die Lehrveranstaltung 'Grundlagen der Finite Elemente Methode' ist als Einführung in die Methode der Finiten Elemente konzipiert. Anhand der einfachsten isoparametrischen Finite Element Familie – des Fachwerkstabs mit linearen, quadratischen und kubischen Ansatzfunktionen – wird dem Studierenden die grundsätzliche Methodik zur numerischen Lösung strukturmechanischer Probleme mit der Finite Elemente Methode erläutert. Dabei wird besonderer Wert auf eine einheitliche, leicht für komplexere Elementtypen zu generalisierende Darstellung und die klare Einbettung der Thematik in die statische und dynamische Tragwerksanalyse mit Finiten Elementen gelegt. Die Vorlesung dient gleichzeitig als Vorbereitung des vertiefenden Studiums 'Computermethoden zur Tragwerksanalyse' (Lehrveranstaltungen 'Finite Elemente Methoden I', 'Finite Elemente Methoden II', 'Flächentragwerke' und 'Nichtlineare Strukturdynamik') und zur abgeschlossenen Vermittlung der notwendigsten Grundkenntnisse der Finite Elemente Methode für Studierende alternativer Vertiefungsrichtungen.

An dieser Stelle sei der Dank der Autoren an Dipl.-Ing. Jörn Mosler für die exzellente Gestaltung und Durchführung der vorlesungsbegleitenden theoretischen und praktischen Übungen zu 'Grundlagen der Finite Elemente Methode' gerichtet. Ferner möchten die Autoren Frau cand. Ing. Monika Bredow und Herrn Dipl.-Ing. Christian Becker für ihre unverzichtbare Mitwirkung bei der Erstellung des Manuskripts danken.

Zur Weiterentwicklung und Verbesserung des Vorlesungsmanuskripts bitten die Autoren um Korrekturen, Kritik, Anregungen und Ergänzungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Gliederung der FEM aus Sicht des Programmanwenders	2
1.2 Gliederung der FEM aus Sicht des Programmwicklers	3
1.3 Literatur zur Finite Elemente Methode	4
1.4 Einbettung der Lehrveranstaltung	5
2 Modellierung von Strukturen als Raumfachwerke	7
2.1 Anwendung von Raumfachwerken	7
2.2 Fundamentale Annahmen und Folgerungen	10
2.2.1 Modellannahme auf der Materialpunktebene	10
2.2.2 Modellannahmen auf der Elementebene	10
2.2.3 Konsequenzen der Modellannahmen auf Strukturebene	11
2.3 Grundgleichungen eindimensionaler Kontinua	11
2.3.1 Lokale Impulsbilanz des Fachwerkstabs	12
2.3.2 Kinematik des eindimensionalen Kontinuums	13
2.3.3 Konstitutives Gesetz	13
2.3.4 Dirichlet Randbedingungen	13
2.3.5 Neumann Randbedingungen	13
2.3.6 Anfangsbedingungen	14
2.3.7 Anfangsrandwertproblem des Stabs	14
2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen des Stabs	14
3 Finite Elemente Diskretisierung	18
3.1 Generierung einer Struktur aus Elementen	18
3.2 Approximation von Variablen eindimensionaler Kontinua	19
3.2.1 Wahl der Ansatzfunktion	19
3.2.2 Physikalische und natürliche Koordinaten	21
3.2.3 Lokale polynomiale Approximation eindimensionaler Funktionen	21
3.2.4 Approximation der Ableitung von primären Variablen	24
3.2.5 Lineare, quadratisch und kubische Interpolationspolynome	24
3.3 Stabelement mit linearen Ansatzfunktionen	25
3.3.1 Lineare Ansatzfunktionen	26
3.3.2 Approximation der Variablen	27
3.3.3 Isoparametrische Approximation der Koordinaten	27
3.3.4 Approximation der Verzerrungen	27
3.3.5 Approximierte innere virtuelle Arbeit	29
3.3.6 Approximierte äußere virtuelle Arbeit	31
3.3.7 Approximierte virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte	31
3.4 Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen	33
3.4.1 Quadratische Ansatzfunktionen	33
3.4.2 Approximation der Koordinaten	33
3.4.3 Approximation der Variablen	34
3.4.4 Elementsteifigkeitsmatrix	34
3.4.5 Konsistenter Elementlastvektor	35
3.4.6 Elementmassenmatrix	36
3.5 Stabelement mit kubischen Ansatzfunktionen	36
3.5.1 Kubische Ansatzfunktionen	37

3.5.2	Approximation der Koordinaten	37
3.5.3	Approximation der Variablen	37
3.5.4	Elementsteifigkeitsmatrix	38
3.5.5	Konsistenter Elementlastvektor	40
3.5.6	Elementmassenmatrix	40
3.6	Stabelemente auf Basis hierarchisch generierter Ansatzfunktionen	41
3.7	Numerische Integration	42
3.7.1	Numerische Integration des linearen Stabelements	43
3.7.2	Numerische Integration höherwertiger Stabelemente	44
4	Ensemblierung der Struktur	44
4.1	Transformation der Elementmatrizen und -vektoren	45
4.2	Ensemblierung der Elemente zum System	48
4.2.1	Direkte Addition von Komponenten	49
4.2.2	Elementspezifische Inzidenzenmatrix	53
4.2.3	Inzidenzenmatrix des Gesamtsystems	54
4.2.4	Symbolische Ensemblierung	55
4.2.5	Dynamische und statische Systemgleichung	55
4.2.6	Dirichlet Randbedingungen auf Systemebene	56
4.2.7	Berücksichtigung von Einzellasten auf Systemebene	59
5	Lösung der Systemgleichung	60
5.1	Lineare Statik	60
5.2	Lineare Dynamik	60
5.2.1	Direkte Lösung	60
5.2.2	Eigenwertanalyse	61
5.3	Bemerkungen zu nichtlinearen, statischen und dynamischen Problemen	63
5.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	64
5.5	Lösung des Eigenwertproblems	64
6	Nachlaufrechnung	65
6.1	Separation und Transformation der Elementfreiheitsgrade	65
6.2	Berechnung der Verzerrungen, Spannungen und Schnittlasten	65
6.3	Aspekte der Visualisierung	66
6.4	Das Stabelement im FEM Kontext	66

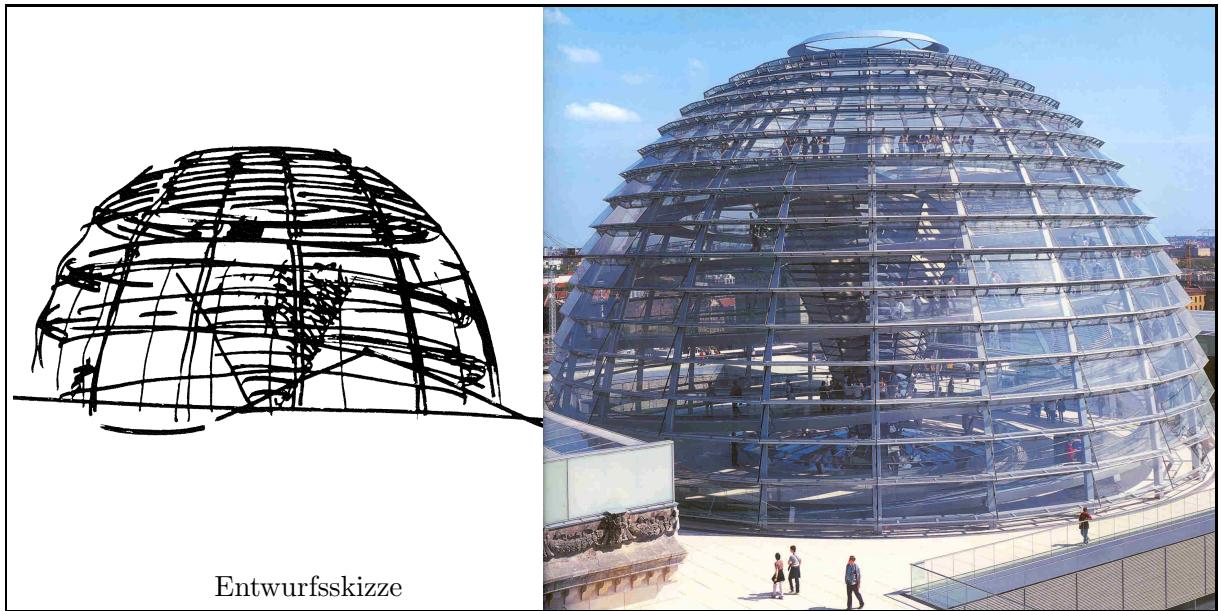


Abbildung 1: Entwurf und Ausführung der Reichstagskuppel in Berlin (FOSTER [21])

1 Einleitung

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein Verfahren zur näherungsweisen numerischen Lösung von Anfangsrandwert- oder Randwertproblemen. Ein Anfangsrandwertproblem ist mit dem beschreibenden transienten Differentialgleichungssystem, den Rand- und Anfangsbedingungen definiert. Randwertprobleme hingegen beschreiben stationäre Differentialgleichungssysteme mit den entsprechenden Randbedingungen. Die Finite Elemente Methode ist aufgrund ihres generalisierten Konzepts auf viele Typen von Differentialgleichungen, z.B. die Impulsbilanz der Elastizitätstheorie, die NAVIER-STOKES Gleichungen kompressibler Strömungen oder Diffusionsgleichungen der Schadstoffausbreitung, anwendbar. Entsprechend weit gefächert sind auch die Branchen, in denen die Finite Elemente Methode heute sehr erfolgreich zur Unterstützung der Produktentwicklung eingesetzt wird. Um nur einige zu nennen, seien hier das Bauingenieurwesen, die Luft- und Raumfahrttechnik, der Automobil- und Maschinenbau, die Elektrotechnik, die Medizintechnik, die Biomechanik und die Umwelttechnik angegeben.

Als repräsentatives Beispiel einer Anwendung sei hier die Finite Elemente Analyse (ARMBRÜSTER [6]) der nach den Plänen von SIR NORMAN FOSTER [21] erbauten Reichstagskuppel in Berlin erwähnt, Abbildung 1. Statische Analysen wurden sowohl klassisch mit Balkenelement, als auch mit der Option lokaler Netzverfeinerung mit REISSNER-MINDLIN Schalenelementen durchgeführt. Abbildung 2 zeigt die Normalkraftverteilung des Balkenmodells und die Deformation des Schalenmodells. Die Normalkräfte zeigen deutlich die Zug- und Druckringe der Konstruktion in den Bereichen der Lagerung und des Anschlusses der Aussichtsplattform. Weiterhin fallen unterschiedlich belastete Rippen auf: Rippen die die Last der begehbarer Rampen abtragen sind durch deutlich höhere Druckkräfte belastet als die Rippen, die für die Abtragung der Last infolge der Aussichtsplattform verantwortlich sind. Das Schalenmodell zeigt die unsymmetrische Deformation infolge des Eigengewichts sowie der Verkehrs- und Windlast. Die detaillierte Analyse einer Verbindungsstelle von Rippe, Hauptring und Ring ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Grafik der Normalspannung (in Richtung der Rippe beziehungsweise in Umfangsrichtung der Ringe) illustriert, wie lokale Effekte – zum Beispiel erhöhte Spannungen infolge von Querschnittsveränderungen oder an Schweißverbindungen – mit Hilfe der Finite Elemente Methode bei entsprechender Verfeinerung der Diskretisierung analysiert werden können.

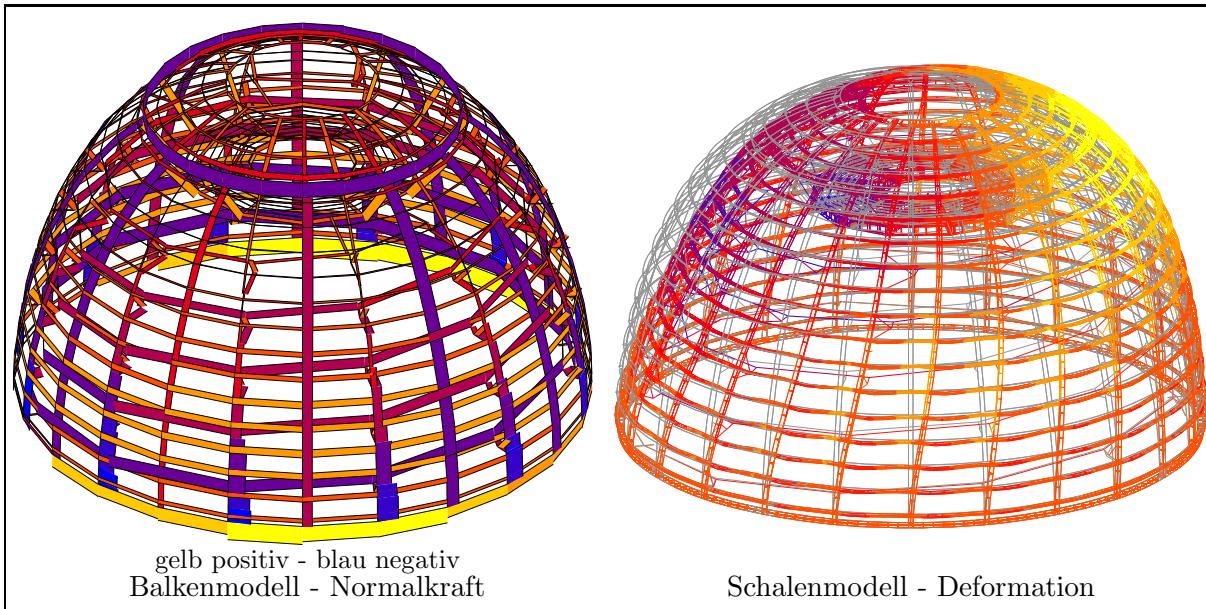


Abbildung 2: Finite Elemente Analysen der Reichstagskuppel in Berlin (ARMBRÜSTER [6])

Im vorliegenden Manuskript soll dem Studierenden die Methodik und Vorgehensweise zur numerischen Lösung ingenieurwissenschaftlicher Differentialgleichungen vermittelt werden. Um den Blick für das numerische Verfahren zu schärfen, werden zu dessen Erläuterung einfache lineare Anfangsrandwertprobleme herangezogen. Die Wahl fällt auf die Analyse von Raumfachwerken, die ein Ensemble eindimensionaler Kontinuumselemente darstellen, im Rahmen der Finite Elemente Methode. Dies stellt einen einfachen Zugang zur Finite Elemente Methode mit isoparametrischen Elementen dar. Um eine Verallgemeinerung des Verfahrens auf zwei- und dreidimensionale isoparametrische Finite Elemente oder auch Platten- und Schalenelemente in weiteren vertiefenden Vorlesungen zu erleichtern, wird bereits bei den hier diskutierten eindimensionalen Problemstellungen eine entsprechende mathematische Notation verwendet.

1.1 Gliederung der FEM aus Sicht des Programmanwenders

Dem reinen Anwender von Finite Element Programm paketen gliedert sich eine FE-Berechnung im wesentlichen in drei Schritte:

- 1. Preprocessing:** Hierin sind die zur Berechnung des Problems notwendigen Eingaben interaktiv oder auch in Form von Eingabedateien realisiert. Die Kontrolle der Eingabe kann zumeist grafisch durchgeführt werden. Wesentliche Eingabedaten sind:

- Geometrie
- Material
- natürliche Randbedingungen (Verschiebungen, Lager)
- statische Randbedingungen (Lasten)
- Volumenlasten
- Typ der verwendeten finiten Elemente
- Netzgenerierung (Zerlegung der Struktur in finite Elemente)¹

¹Bei Berechnungen mit adaptiver Vernetzung wird die Netzgenerierung im Processing durchgeführt. In diesem Fall müssen im Preprocessing lediglich Fehlergrenzen und ein Startnetz generiert werden

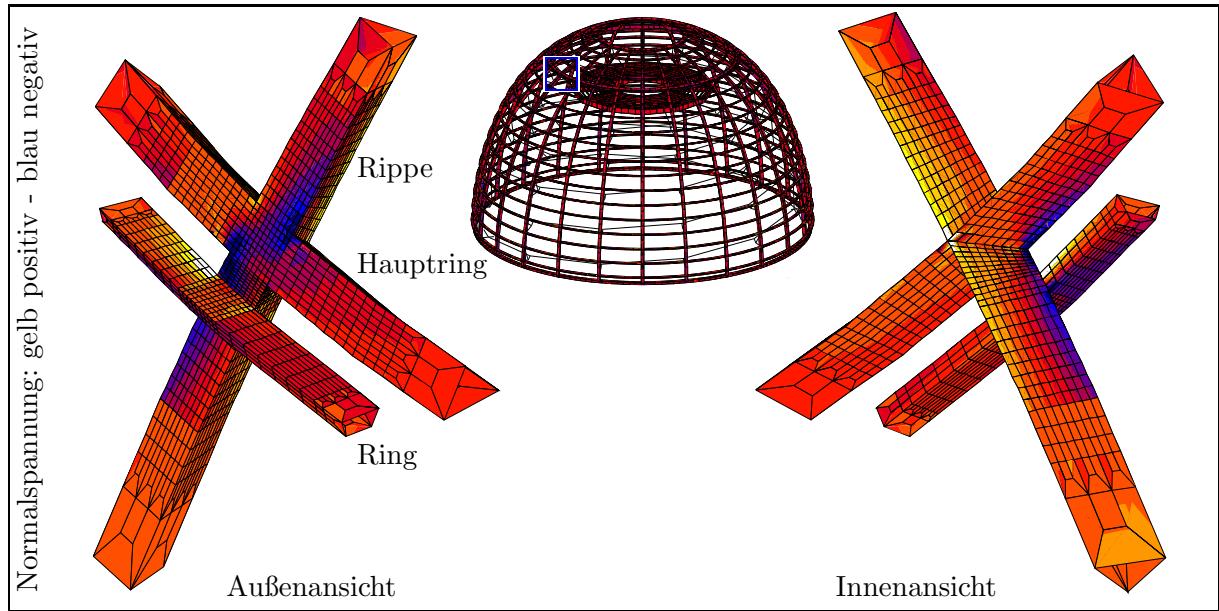


Abbildung 3: Detailanalysen der Reichstagskuppel in Berlin mit der Methode der Finiten Elemente (ARMBRÜSTER [6])

2. Processing: Innerhalb des Processing findet die numerische Umsetzung der Finite Elemente Methode statt. Hierzu sind im wesentlichen folgende Schritte notwendig:

- Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen
 - Berechnung der Elementlastvektoren (Volumen- und Randlasten)
 - Zusammenbau (Ensemblierung) der Systemsteifigkeitsmatrix und des Systemlastvektors
 - Auflösung des entstandenen linearen Gleichungssystems nach dem Systemverschiebungsvektor

3. **Postprocessing:** Die Ausgabe der Lösung und die Interpretation und Kontrolle der Ergebnisse durch den anwendenden Ingenieur erfolgt im Postprocessor des Programmsystems. Durchzuführende Operationen sind:

- Separierung der Elementverschiebungsvektoren
 - Berechnung der approximierten kontinuierlichen Verschiebungen mittels der Ansatzfunktionen
 - Berechnung der approximierten kontinuierlichen Verzerrungen und Spannungen
 - Visualisierung von Deformationen, Dehnungen und Spannungen

1.2 Gliederung der FEM aus Sicht des Programmentwicklers

Bei der theoretischen oder methodischen Betrachtung der Finite Elemente Methode ist zwischen drei phänomenologisch Entwicklungsebenen, der Strukturebene, der Element(Komponenten)ebene und der Materialpunktebene, zu differenzieren, vgl. Abbildung 4. Eine Analogie der mathematischen Betrachtung eines Tragwerks und der visuellen Beobachtung dieses Tragwerks ist in den Ebenen der Beobachtung zu sehen. Zunächst wird das Tragwerk als ganzes betrachtet, dann fallen einzelne Komponenten ins Auge bis schließlich Details von größten

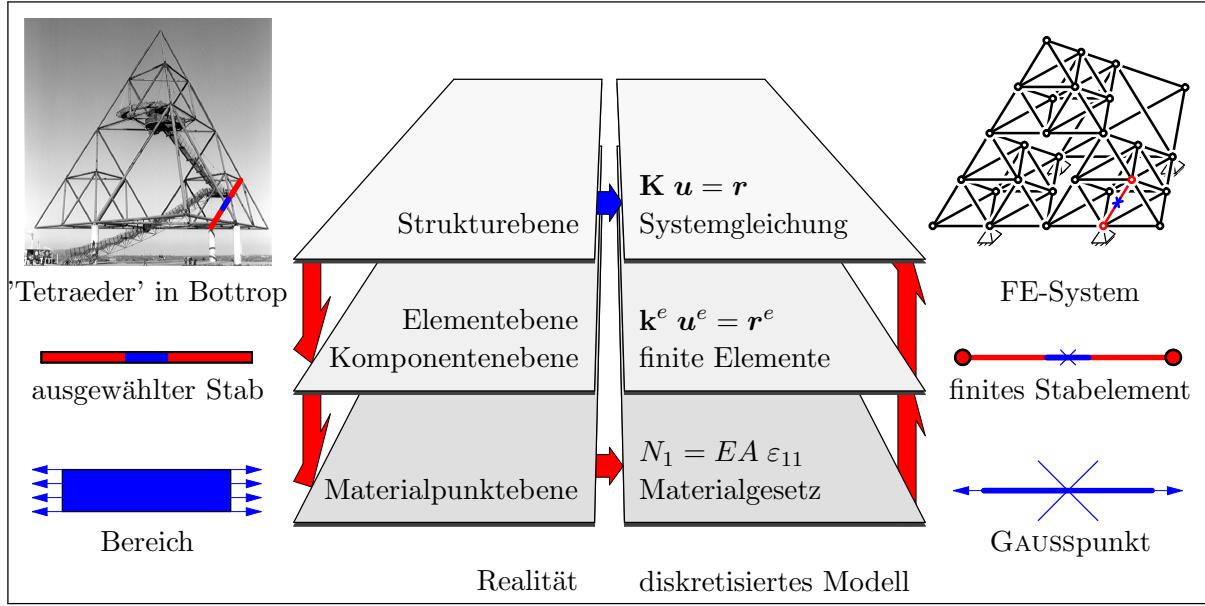


Abbildung 4: Phänomenologische Ebenen der Finite Elemente Methoden

Interesse sind. Ähnlich – allerdings gerichtet vom Detail bis zum System – ist die Vorgehensweise bei der Entwicklung der Finite Elemente Methode. Hier werden auf Materialpunktebene zunächst die Differentialgleichungen formuliert. In dieser Formulierung sind die Kinetik, die Kinematik und das konstitutive Gesetz beinhaltet. Anschließend erfolgt die schwache Formulierung und Diskretisierung über das Gebiet eines Elements auf der Komponentenebene. Schließlich wird die Tragstruktur aus einem Ensemble von Elementen gebildet und analysiert und das Tragverhalten interpretiert. Im Einzelnen sind die in Abbildung 5 anhand des Beispiels von Fachwerkstrukturen zusammengefaßten Schritte zur Finite Elemente Entwicklung durchzuführen.

1.3 Literatur zur Finite Elemente Methode

Lehrbücher in deutscher Sprache:

ARGYRIS & MLEJNEK [3, 4], BATHE [9], BETTEN [10, 11], BRAESS [13] HARTMANN & KATZ [22], KNOTHE & WESSELS [25], LINK [32], KRÄTZIG & BAŞAR [26], WUNDERLICH & REDANZ [40]

Lehrbücher in englischer Sprache:

BATHE [8], BRENNER & SCOTT [14], CHANDRUPATLA & BELEGUNDU [16], COOK & MALKUS [17], CRISFIELD [18], HUGHES [23], JOHNSON [24], CHANDRUPATLA & BELEGUNDU [16], COOK & MALKUS [17], LEWIS ET AL. [31], OTTOSEN & PETERSSON [34], SCHWAB [37], SZABÓ & BABUŠKA [38], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [41, 42]

Vorlesungsmanuskripten:

AHRENS & DINKLER [1, 2], RAMM [35], KUHL & MESCHKE [28, 29], KUHL [27]

empfohlene vorlesungsbegleitende Literatur:

BATHE [9], HUGHES [23], KNOTHE & WESSELS [25]

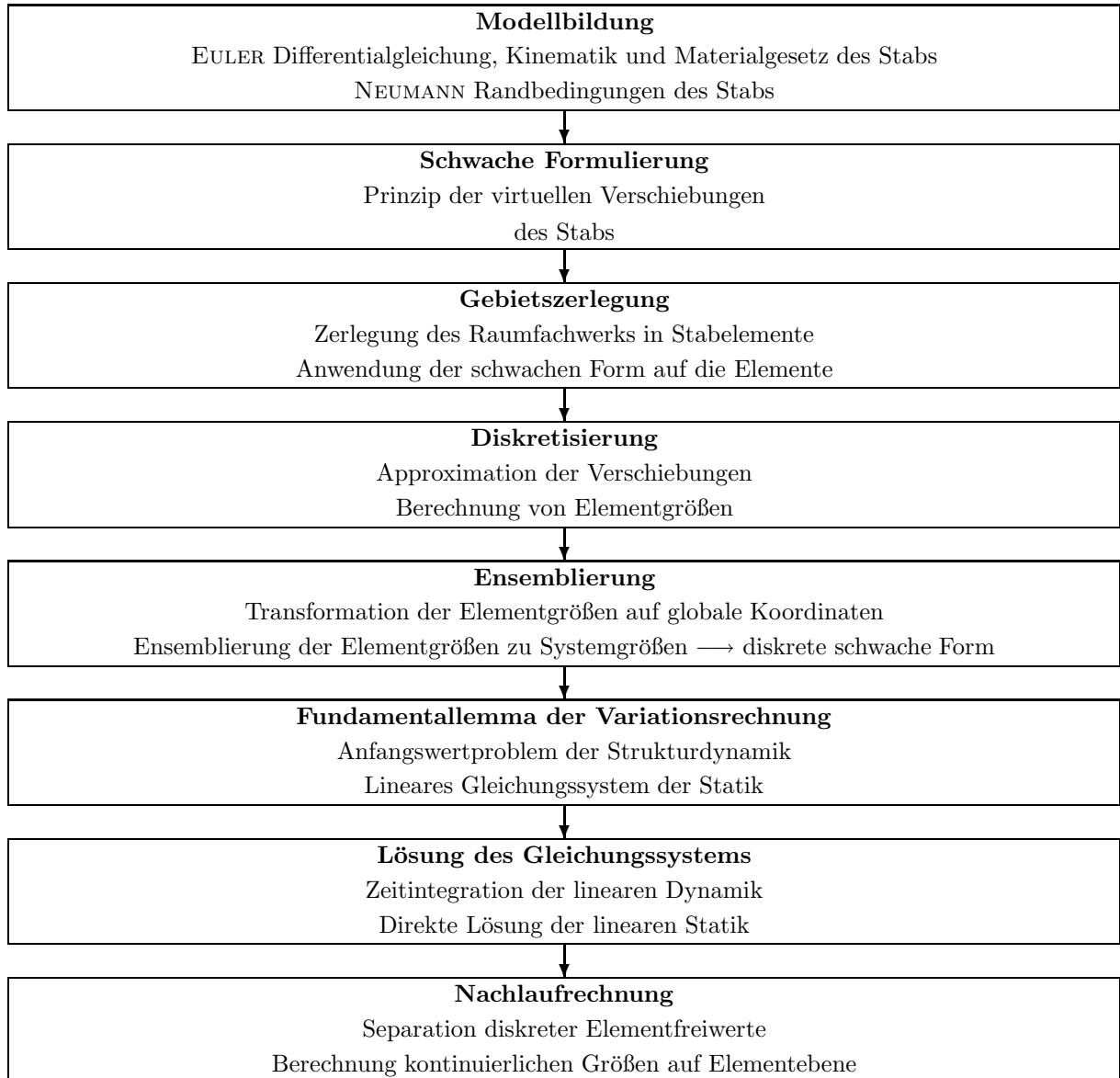


Abbildung 5: Entwicklung und Analyse einer Struktur aus linearen finiten Stabelementen

1.4 Einbettung der Lehrveranstaltung

Die Einbettung der Lehrveranstaltung 'Grundlagen der Finite Elemente Methoden' in die Vertiefungsrichtung 'Computermethoden der Tragwerksanalyse' ist in Tabelle 1 illustriert. Weitere Informationen zu den angebotenen Lehrveranstaltungen und Diplomarbeiten können der Internet Seite des Lehrstuhls für Statik und Dynamik² entnommen werden.

²<http://www.sd.ruhr-uni-bochum.de/>

Grundlagen der Finite Elemente Methode	Wahlpflichtfach <ul style="list-style-type: none"> → beliebige Vertiefung → Finite Elemente Methoden I
• Finite Stabelemente für lineare Tragwerksanalysen	
• Lösung der Systemgleichung	Vertiefung <ul style="list-style-type: none"> → Finite Elemente Methoden II → Flächentragwerke → Dynamik der Tragwerke → 'Numerische Geotechnik'
Finite Elemente Methoden I	
• mechanische und mathematische Grundlagen der FEM	Vertiefung <ul style="list-style-type: none"> → Finite Elemente Methoden II → Flächentragwerke → Dynamik der Tragwerke → 'Numerische Geotechnik'
• Degeneration des 3d-Kontinuums zum Stab und Stabelemente	
• Finite Scheibenelemente für lineare Tragwerksanalysen	Vertiefung <ul style="list-style-type: none"> → Finite Elemente Methoden II → Flächentragwerke → Dynamik der Tragwerke → 'Numerische Geotechnik'
• Finite Volumenelemente für lineare Tragwerksanalysen	
• Finite Strukturelemente für lineare Tragwerksanalysen (Balken und Platten)	Vertiefung <ul style="list-style-type: none"> → Finite Elemente Methoden II → Flächentragwerke → Dynamik der Tragwerke → 'Numerische Geotechnik'
• Projektarbeit - Studienarbeit	
Finite Elemente Methoden II	Vertiefung <ul style="list-style-type: none"> → Nichtlineare Strukturdynamik → Computational Plasticity
• Einführung in die nichtlineare Kontinuumsmechanik	
• Finite Elemente für nichtlineare Tragwerksanalysen	Diplomarbeit <ul style="list-style-type: none"> → Strukturanalysen → Materialmodelle → Mehrfeldprobleme → numerische Methoden
• Lösungsverfahren nichtlinearer Systeme in Statik & Dynamik	
• Stabilität von Strukturen	
Sonder-Lehrveranstaltungen	
• Seminar – Numerische Methoden der Strukturmechanik	
• Computational Plasticity	
• Nichtlineare Strukturdynamik	

Tabelle 1: Einbettung der Lehrveranstaltung 'Grundlagen der Finite Elemente Methode' in die Ingenieurausbildung der Vertiefungsrichtung 'Computermethoden der Tragwerksanalyse'

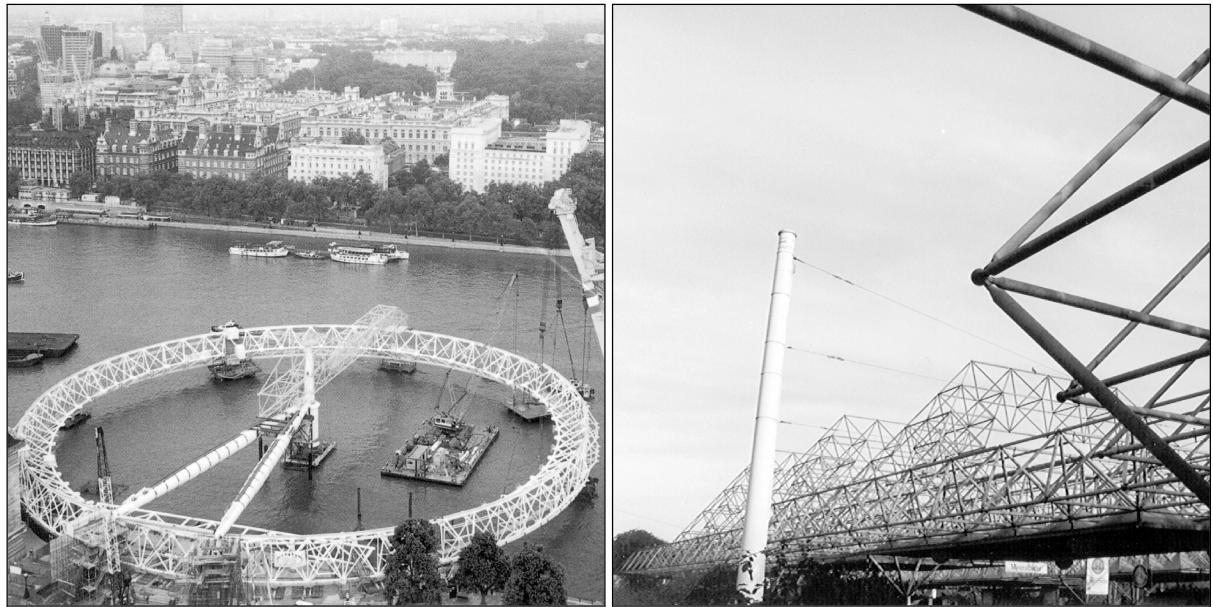


Abbildung 6: Das 'London Eye' und ein MERO-Raumfachwerk im Baukastensystem in Stuttgart (Haltestelle 'Mineralbäder')

2 Modellierung von Strukturen als Raumfachwerke

Die Modellierung von Raumfachwerken gliedert sich in die Betrachtung ausgeführter Raumfachwerke, die Diskussion der grundlegenden Annahmen zur Modellierung von Fachwerkstäben als eindimensionales Kontinuum und schließlich in die Formulierung des zugrundeliegenden Anfangsrandwertproblems.

2.1 Anwendung von Raumfachwerken

Raumfachwerke haben trotz der scheinbar übermächtigen Konkurrenz von Schalenstrukturen in Kombination mit Freiformen wie sie zum Beispiel mit kohlefaser verstärkten Kunststoffen zu realisieren sind noch immer ihre Bedeutung, wenn es um optimale Werkstoffausnutzung und geringes Gewicht geht. Ein ideales Fachwerk verfügt lediglich über Normalkräfte, was bedeutet, daß die Querschnitte immer gleichmäßig belastet sind. Diese optimale Werkstoffauslastung kombiniert mit einer architektonisch wertvollen Transparenz von Fachwerkstrukturen machen diesen Tragwerkstypen im Ingenieurwesen unverzichtbar. Dabei reicht die Anwendung von 'High-End' Tragwerken wie des 'London Eye' bis hin zu Standardfachwerken nach dem MERO-Baukastensystem des Erfinders Max Mengeringhausen [30], vgl. Abbildung 6. Das Beispiel einer Fußgängerbrücke zur EXPO 2000 in Hannover in Abbildung 7 demonstriert eindrucksvoll die konstruktiven Maßnahmen zur Realisierung reiner Normalkraftbelastungen. Erst diese Konstruktionsdetails erlauben die Verwendung der sehr schlanken Stäbe, was in einer sehr filigranen, optisch transparenten und optimal ausgenutzten Struktur resultiert. Gerade bei schlanken Strukturen ist das Vorzeichen der Normalkraft im Hinblick auf die Stabilität des Tragwerks (Knicken von Stäben) von entscheidender Bedeutung. Dieser Problematik wurde vom entwickelnden Ingenieur durch ein geschickt entworfenes Tragsystem, in welchem alle Stäbe oberhalb des Fußwegs mit Zugkräften belastet sind, beispielhaft Rechnung getragen. Die fließende Grenze der Modellierung einer Struktur als Fach- oder Rahmentragwerk zeigt der Tetraeder in Bottrop, dargestellt in Abbildung 9. Auch dieses Baukunstwerk besteht aus schlanken Stäben die nun allerdings nicht gelenkig, sondern durch Gußknoten biegesteif verbunden sind. Wegen der schlanken Stäbe

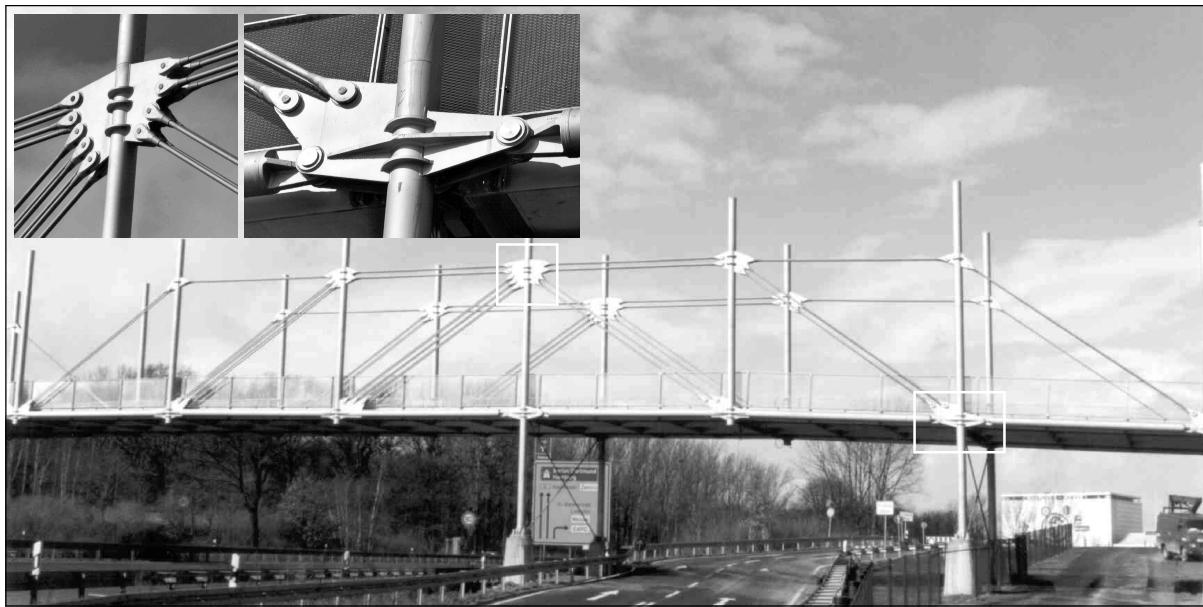


Abbildung 7: Fußgängerbrücke der EXPO 2000 in Hannover, vgl. BÖGELE ET AL. [12]

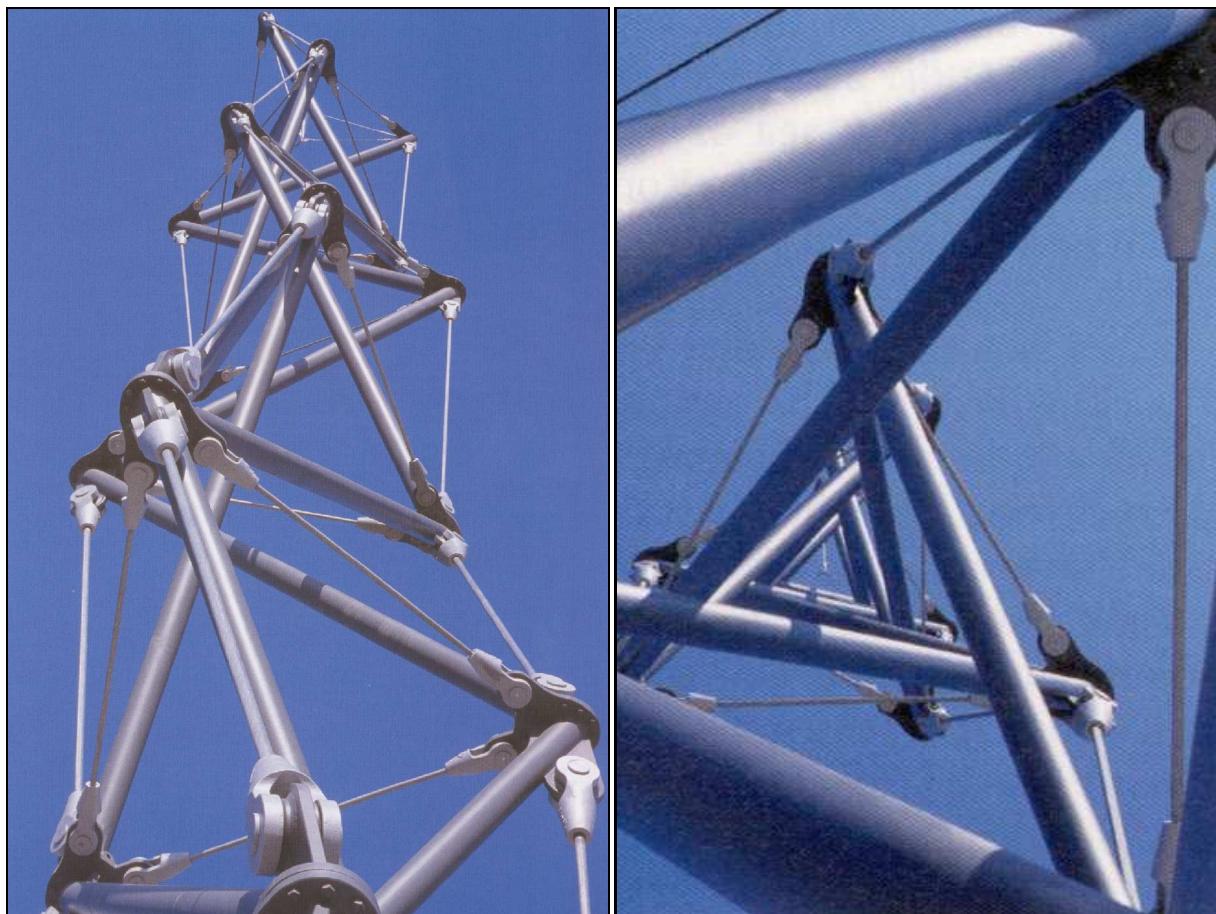


Abbildung 8: Der Messeturm in Rostock - ein Tensegrity-Raumfachwerk SCHLAICH [36]

und der geringen Biegesteifigkeit der Knoten können hier die auftretenden Biegemomente vernachlässigt und adäquate Ergebnisse erzielt werden. Dennoch wird der berechnende Ingenieur in

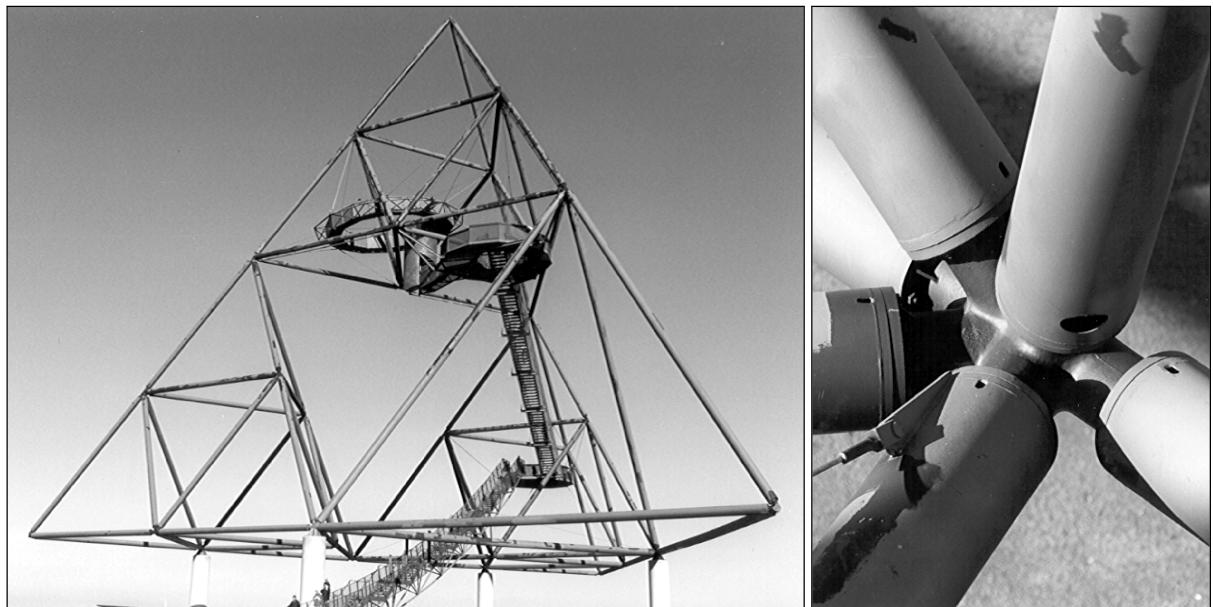


Abbildung 9: Der 'Tetraeder' in Bottrop



Abbildung 10: Carl-Zeiss-Planetarium in Stuttgart

diesem Fall die Modellierung als Rahmentragwerk wählen, da dieses Modell der Realität besser entspricht und Rahmenmodelle mit computerorientierten Berechnungsverfahren ebenso einfach wie Fachwerke zu analysieren sind. Die Darstellung des Stuttgarter Carl-Zeiss-Planetarium in Abbildung 10 offenbart eine analoge Problematik der Wahl des geeigneten Modells zur Be- rechnung der tragenden Struktur: Fachwerk oder Rahmenträger? Deutlich wird anhand dieser Beispiele der Unterschied von realer physikalischer Struktur und berechnetem strukturmechani- schen Modell eines Tragwerks.

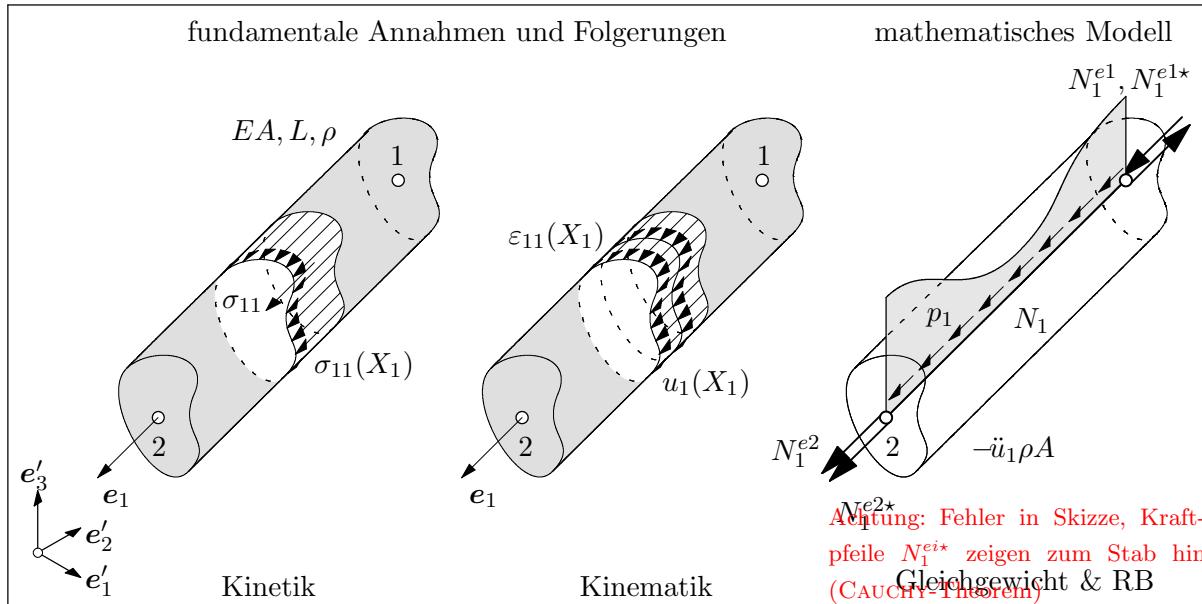


Abbildung 11: Annahmen und mathematisches Modell des Fachwerkstabs

2.2 Fundamentale Annahmen und Folgerungen

Zur Diskussion der Annahmen und Folgerungen für Fachwerke soll zwischen Annahmen auf Materialpunkt- und Elementebene sowie Folgerungen auf Strukturebene differenziert werden.

2.2.1 Modellannahme auf der Materialpunktebene

Auf Materialpunktebene soll von einem linear elastischen Materialverhalten ausgegangen werden. Linearität herrscht zwischen den Normalspannungen und Normalverzerrungen des Stabs wobei diese Linearität weder durch Plastifizierung oder Schädigung gestört wird. Das Modell erlaubt demnach unendlich hohe Materialverzerrungen oder -spannungen. Für den anwendenden Ingenieur bedeutet dies, daß die auf dieser Annahme basierten Strukturanalysen im Anschluß an die Rechnung auf Plausibilität und Anwendbarkeit des Materialmodells geprüft werden müssen. Es muß sichergestellt sein, daß die auftreten Spannungen im Tragwerk kleiner als die Bruchbeziehungsweise Fließspannung sind.

2.2.2 Modellannahmen auf der Elementebene

Die folgenden fundamentalen Modellannahmen erlauben die Degeneration eines real dreidimensionalen volumenbehafteten Fachwerkstabs auf ein eindimensionales Kontinuumsmodell, vgl. Abbildung 11:

- Das Verschiebungsfeld u_1 in Richtung der Stablängsachse ist konstant über den Stabquerschnitt.
- Es existiert nur die Normalspannung σ_{11} . Unter Berücksichtigung der ersten Annahme (mit der Kinematik $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ und dem konstitutiven Gesetz $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$) folgt die Konstanz der Normalspannung σ_{11} über dem Stabquerschnitt.

Aus den getroffenen Annahmen folgen durch Betrachtung der zulässigen Deformations- und Spannungszustände im Rahmen des gewählten Modells weitere Restriktionen bezüglich des An-

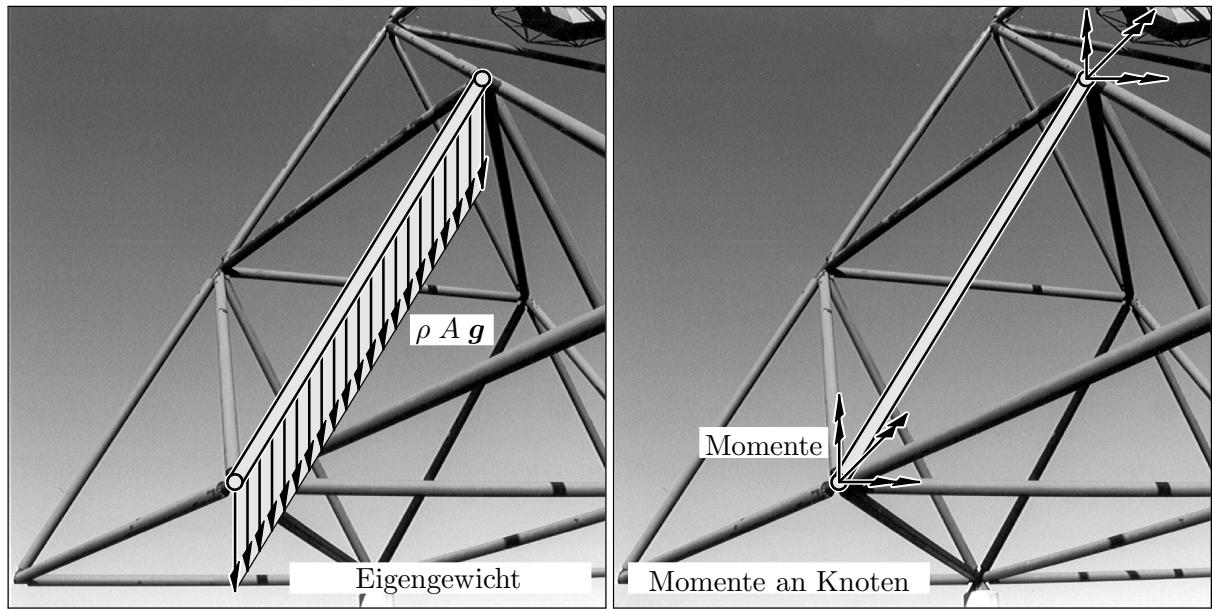


Abbildung 12: Approximationen bei der Modellbildung von Tragwerken als Fachwerk

fangsrandwertproblems von Stabelementen (vgl. Abbildung 12):

- Es können nur Streckenlasten p_1 in Richtung der Stablängsachse aufgebracht werden.
- Es dürfen lediglich Beschleunigungen \ddot{u}_1 in Stabachse auftreten.
- Bei raumschräg orientierten Stäben ist das Eigengewicht des Stabs im Rahmen der Modellannahmen nicht abzutragen .
- Es sind keine Momente übertragbar.

2.2.3 Konsequenzen der Modellannahmen auf Strukturebene

Aus den Modellannahmen auf Material- und Elementebene folgen Restriktionen im Hinblick auf die Modellbildung der gesamten Struktur. Zu einer adäquaten Modellierung von Lasten und Deformationen müssen die folgenden Aspekte auf Systemebene erfüllt sein:

- Gelenkige Verbindungen und Lagerungen der Stäbe sind Grundvoraussetzung für die Gültigkeit der Modellannahmen.
- Trägheits- oder Gravitationslasten infolge der Stabmasse, die Normalkomponenten zur Stabrichtung aufweisen, müssen auf Strukturebene durch an den Knoten angreifenden Einzellasten repräsentiert werden.

2.3 Grundgleichungen eindimensionaler Kontinua

Zur Ermittlung der Grundgleichungen wird ein repräsentatives Stabelement e aus der Struktur eines Raumfachwerks ausgewählt. Anhand dieses Stabelements werden die Grundgleichungen des Stabs entwickelt und anschließend in die schwache Form überführt. Die Grundgleichungen des Stabelements beschreiben das Anfangsrandwertproblem, bestehend aus der lokalen Impulsbilanz, den Anfangsbedingungen und den DIRICHLET - und NEUMANN Randbedingungen. Die

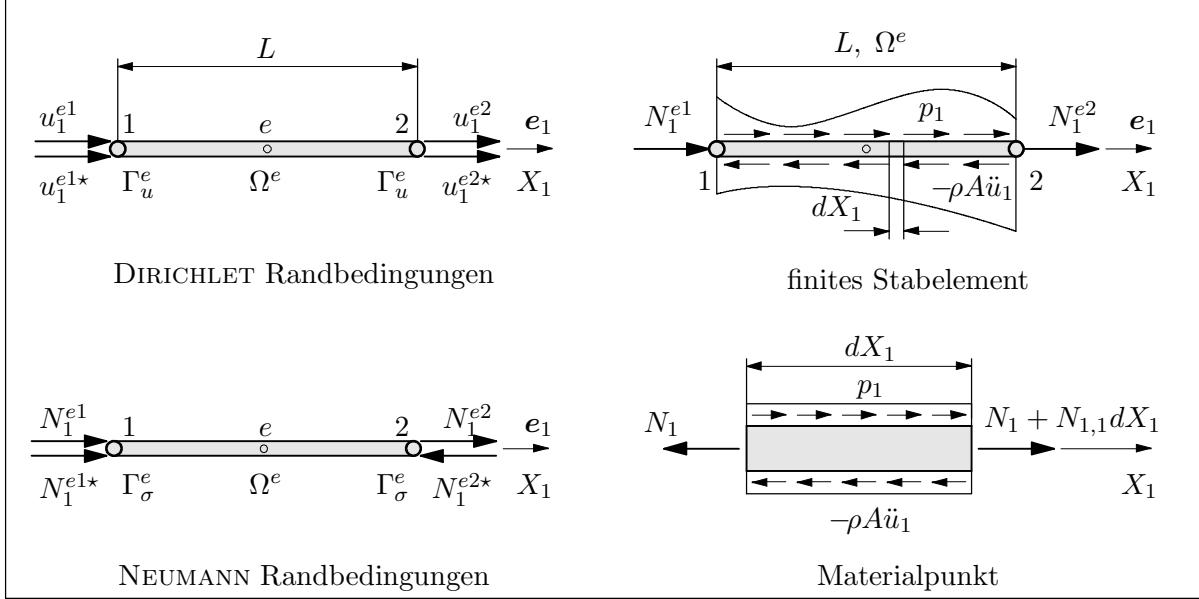


Abbildung 13: Randbedingungen und Impulsbilanz des finiten Stabelements

schwache Formulierung der lokalen Impulsbilanz und der NEUMANN Randbedingungen resultiert im Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Basisgleichung der Finite Elemente Diskretisierung der Strukturmechanik.

Grundvoraussetzung für die Definition von Randbedingungen ist die Partitionierung der betrachteten Stabgeometrie in das Gebiet Ω^e den Dirichlet Rand Γ_u^e und den Neumann Rand Γ_σ^e , vgl. Abbildung 13. Der Rand

$$\Gamma^e = \Gamma_u^e \cup \Gamma_\sigma^e \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \quad (1)$$

begrenzt das Gebiet oder Feld der primären Variable des elastodynamischen Systems des Stabs. Der Zustand des Stabs ist eindeutig durch die Verschiebung $u_1(X_1)$ und ihrer zweiten zeitlichen Ableitung oder Beschleunigung $\ddot{u}_1(X_1)$ in Richtung der Stablängsachse mit dem Basisvektor e_1 und der physikalischen Koordinate X_1 bestimmt.

2.3.1 Lokale Impulsbilanz des Fachwerkstabs

Zur Entwicklung der lokalen Impulsbilanz wird das Stabelement der Länge L in Abbildung 13 betrachtet. Dieses Element ist durch Randlasten, verteilte Lasten $p_1(X_1)$, entgegen der Beschleunigung gerichteten Trägheitskräfte $-\rho A\ddot{u}_1(X_1)$ und infolge der Deformation entstehenden inneren Kräfte $N_1(X_1)$ belastet. Fokussiert man, wie in Abbildung 13 dargestellt, auf ein differentielles Linienelement dX_1 des Stabs, erhält man das Gleichgewicht der genannten Kräfte, das als lokale Impulsbilanz oder Cauchysche Bewegungsgleichung bezeichnet wird.

$$-N_1(X_1) + N_1(X_1) + \underbrace{\frac{\partial N_1(X_1)}{\partial X_1}}_{N_{1,1}(X_1)} dX_1 + p_1(X_1) dX_1 - \rho A \ddot{u}_1(X_1) dX_1 = 0 \quad (2)$$

Die Normalkräfte an den Enden des differentiellen Linienelements dX_1 löschen sich aus, erhalten bleibt lediglich die Veränderung der Normalkraft mit der Koordinate X_1 . Sie wird mit $N_{1,1}(X_1)$ bezeichnet, wobei das Komma im Index mit angestellter Zahl 1 die partielle Ableitung nach

der physikalischen Koordinate X_1 repräsentiert ($N_{1,1} = \partial N_1 / \partial X_1$). Durch Division mit dem Linienelement erhält man schließlich die lokale Impulsbilanz des eindimensionalen Kontinuums.

$$\rho A \ddot{u}_1(X_1) = N_{1,1}(X_1) + p_1(X_1) \quad \forall \quad X_1 \in \Omega^e \quad (3)$$

2.3.2 Kinematik des eindimensionalen Kontinuums

Die lokale Impulsbilanz (3) beinhaltet die Verschiebung u_1 , die Beschleunigung $\ddot{u}_1(X_1)$ und die innere Kraft $N_1(X_1)$ als Unbekannte. Die letzte Unbekannte kann mit Hilfe der Definition der Normalverzerrung $\varepsilon_{11}(X_1)$ als Funktion der Verschiebung u_1 und anschließende Wahl eines Materialmodells als Funktion des Verschiebungsfelds ausgedrückt werden. Die Normalverzerrung ist mit der Ableitung der Verschiebung $u_1(X_1)$ nach dem Ort X_1 definiert.

$$\varepsilon_{11}(X_1) = \frac{\partial u_1(X_1)}{\partial X_1} = u_{1,1}(X_1) \quad (4)$$

2.3.3 Konstitutives Gesetz

Das konstitutive Gesetz verknüpft die Normalspannung σ_{11} und die Normalverzerrung ε_{11} mit Hilfe des Elastizitätsmoduls E , wobei die Integration der Normalspannung über der Querschnittsfläche A des Stabs die Normalkraft ergibt.

$$N_1(X_1) = A \sigma_{11}(X_1) = E A \varepsilon_{11}(X_1) \quad (5)$$

2.3.4 Dirichlet Randbedingungen

DIRICHLET Randbedingungen sind im allgemeinen Randbedingungen, die die primäre Variable eines Systems betreffen. Im Kontext des elastomechanischen Problems von Stab e handelt es sich hierbei um die Verschiebungen an den Endquerschnitten $e1$ und $e2$. Entsprechend werden die Verschiebungen an diesen Querschnitten mit u_1^{e1} und u_1^{e2} gekennzeichnet. Die vorgeschriebenen Verschiebungen des DIRICHLET Rands Γ_u^e werden zusätzlich durch einen Stern gekennzeichnet, vgl. Abbildung 13.

$$\left. \begin{array}{l} u_1^{e1} = u_1^{e1*} \\ u_1^{e2} = u_1^{e2*} \end{array} \right\} \quad \forall \quad X_1 \in \Gamma_u^e \quad (6)$$

Sind die vorgeschriebenen Verschiebungen identisch Null, handelt es sich um homogene Dirichlet Randbedingungen.

$$\left. \begin{array}{l} u_1^{e1} = u_1^{e1*} = 0 \\ u_1^{e2} = u_1^{e2*} = 0 \end{array} \right\} \quad \forall \quad X_1 \in \Gamma_u^e \quad (7)$$

Homogene DIRICHLET Randbedingungen entsprechen Auflagerbedingungen.

2.3.5 Neumann Randbedingungen

NEUMANN Randbedingungen beziehen sich allgemein auf abgeleitete Größen der primären Variablen und im speziellen um Normalkräfte an den Stabendquerschnitten $e1$ und $e2$. Die

inneren Normalkräfte werden mit N_1^{e1} , N_1^{e2} und die vorgeschriebenen Randlasten werden mit N_1^{e1*} , N_1^{e2*} bezeichnet. Die NEUMANN Randbedingungen ergeben sich mit der Skizze in Abbildung 13 zu:

$$\left. \begin{array}{l} N_1^{e1} = -N_1^{e1*} \\ N_1^{e2} = N_1^{e2*} \end{array} \right\} \quad \forall \quad X_1 \in \Gamma_\sigma^e \quad (8)$$

2.3.6 Anfangsbedingungen

Dynamische Analysen erfordern neben den Feldgleichungen und Randbedingungen auch Informationen über den Anfangszustand zur Zeit $t = t_0$. Dabei können entweder Beschleunigungen oder Verschiebungen im Gebiet Ω^e in Form von Anfangsbedingungen vorgegeben sein. Bei vorgegebenen Verschiebungen ergeben sich die Beschleunigungen aus der Lösung der Differentialgleichungen (3), (4) und (5), umgekehrt errechnen sich die Verschiebungen mit Hilfe des Differentialgleichungssatzes aus vorgeschriebenen Beschleunigungen.

$$\left. \begin{array}{l} u_1(t=0) = u_{10} \\ \text{oder} \\ \ddot{u}_1(t=0) = \ddot{u}_{10} \end{array} \right\} \quad \forall \quad X_1 \in \Omega^e \quad (9)$$

2.3.7 Anfangsrandwertproblem des Stabs

Das Anfangsrandwertproblem des Stabs ist mit der lokalen Differentialgleichung, den DIRICHLET und NEUMANN Randbedingungen sowie den Anfangsbedingungen komponiert. Die Differentialgleichung des Stabs ergibt sich durch Zusammenfassung der Gleichungen (3), (4) und (5).

$N_{1,1}(X_1) = \ddot{u}_1(X_1) \rho A - p_1(X_1)$	Kinetik (EULER Differentialgleichung)
$N_{1,1}(X_1) = E A \quad \varepsilon_{11,1}(X_1)$	konstitutive Gleichung
$\varepsilon_{11,1}(X_1) = u_{1,11}(X_1)$	Kinematik

(10)

Die Rand- und Anfangsbedingungen der vorangehenden Abschnitte komplettieren das in Abbildung 14 visualisierte Anfangsrandwertproblem des Stabs.

2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen des Stabs

Das in Abschnitt 2.3.7 definierte Anfangsrandwertproblem von Fachwerken kann im allgemeinen auch analytisch gelöst werden. Der Einsatz eines numerischen Verfahrens ist nicht erforderlich. Nach dem Motto: der Weg ist das Ziel steht im Rahmen der Lehrveranstaltung nicht die Lösung dynamischer Probleme sondern vielmehr die Methode der numerischen Lösung im Vordergrund. Aus diesem Grund basiert die folgende Argumentation pro einer numerischen Lösung von generellen Problemen der Strukturmechanik in der Ebene oder im Raum. Diese Probleme sind für

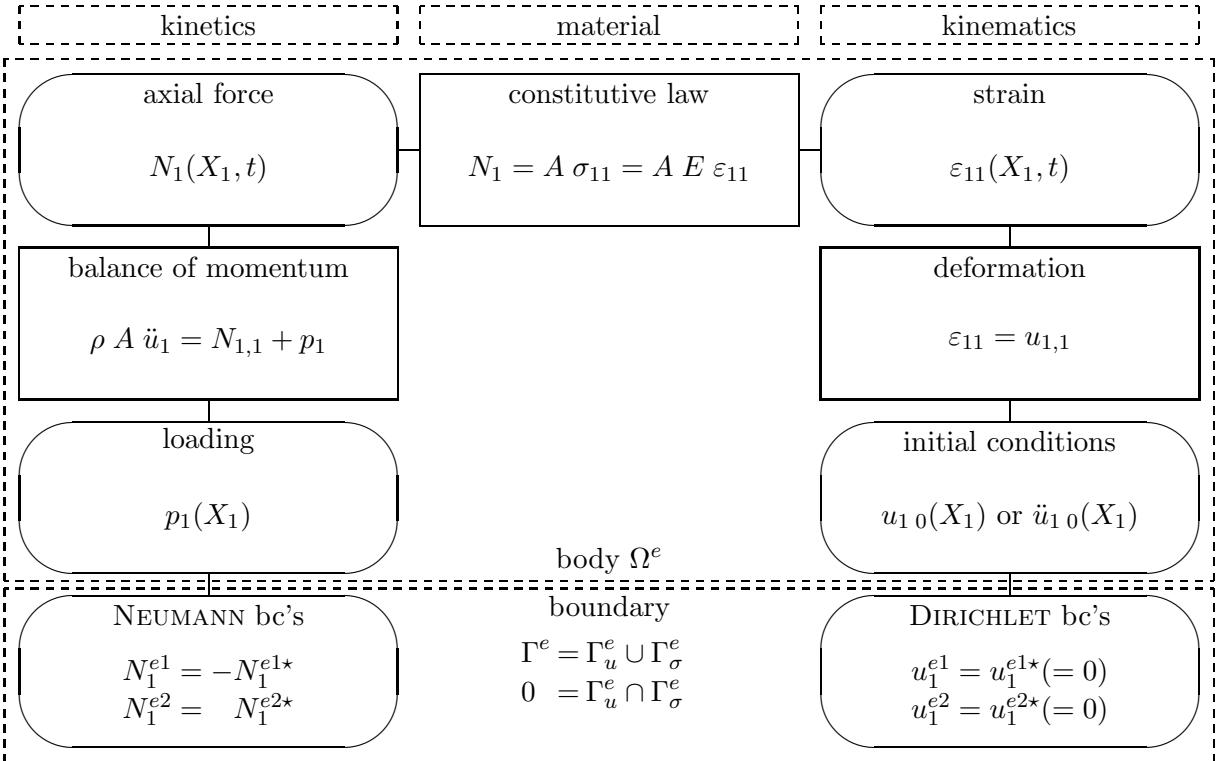


Abbildung 14: Anfangsrandwertproblem von Fachwerken

gewöhnlich nur für wenige einfache Geometrien und einfache Lastfälle analytisch lösbar, weshalb man sich mit einer Näherungslösung zufrieden gibt. Integralbasierte, numerische Lösungsverfahren oder speziell die Finite Elemente Methode sind auf der sogenannten schwachen Formulierung des Anfangsrandwertproblems gegründet. Die schwache Formulierung der Impulsbilanz und der NEUMANN Randbedingungen ergibt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Zur Entwicklung der schwachen Form werden die Impulsbilanz (3) und die NEUMANN Randbedingungen (8) umgeformt.

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{u}_1 - p_1 - N_{1,1} &= 0 \\ -N_1^{e1*} - N_1^{e1} &= 0 \\ -N_1^{e2*} + N_1^{e2} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Da die drei Terme obiger Gleichung identisch Null sind, können sie mit einer beliebigen Funktion multipliziert werden ohne die Aussage der Gleichungen zu beeinflussen. Hier soll eine spezielle Testfunktion zur Multiplikation, die sogenannte virtuelle Verschiebung δu_1 , verwendet werden. Die virtuelle Verschiebung stellt die Variation der Verschiebung u_1 dar. Die virtuelle Verschiebung (siehe Abbildung 15) verfügt über die im folgenden aufgelisteten Eigenschaften:

- δu_1 genügt den DIRICHLET Randbedingungen

$$\delta u_1 = 0 \quad \forall \quad X_1 \in \Gamma_u^e \tag{12}$$

- δu_1 genügt den Feldgleichungen

$$\delta u_{1,1} = \delta \varepsilon_{11} \quad \forall \quad X_1 \in \Omega^e \tag{13}$$

- δu_1 ist infinitesimal klein

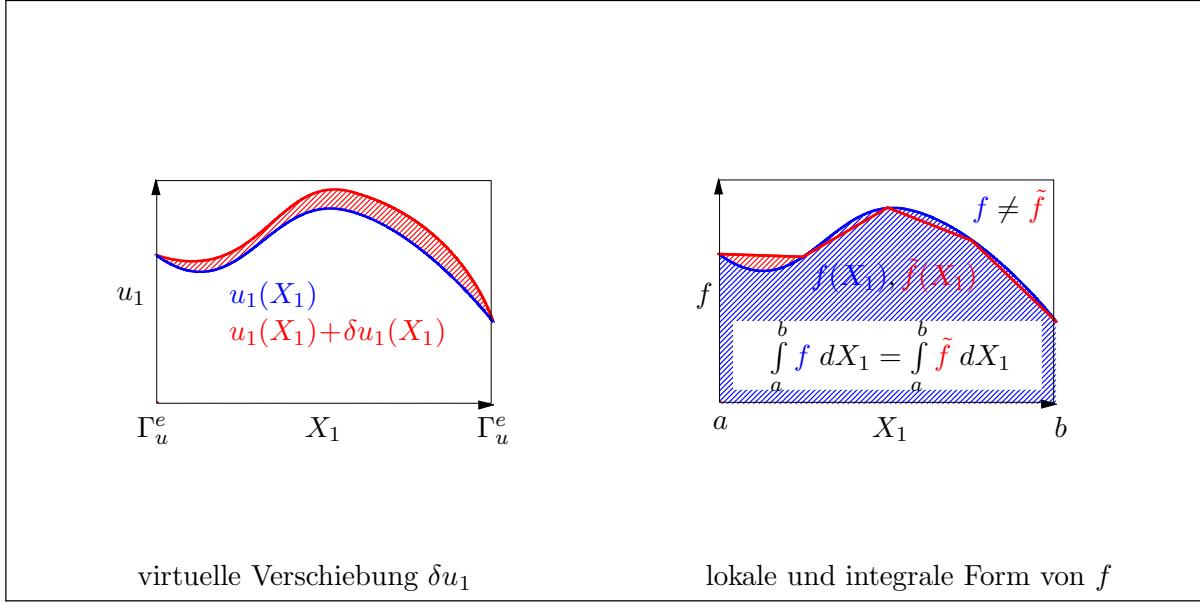


Abbildung 15: Illustration der virtuellen Verschiebung und dem Unterschied von lokaler und integraaler Form (einer willkürlichen Funktion)

- δu_1 ist beliebig

Die Testfunktion, ausgewertet an den Endquerschnitten 1 und 2, werden mit δu_1^{e1} und δu_1^{e2} bezeichnet. Ist z.B. der Endknoten 1 ein DIRICHLET Rand ist die entsprechende virtuelle Verschiebung δu_1^{e1} laut Eigenschaft (12) identisch Null. Hier soll der allgemeinere Fall des NEUMANN Endknoten angenommen werden, was zusammen mit der Impulsbilanz folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \delta u_1 (\rho A \ddot{u}_1 - p_1) - \delta u_1 N_{1,1} = 0 & \quad -\delta u_1^{e1} (N_1^{e1*} + N_1^{e1}) = 0 \\ & \quad -\delta u_1^{e2} (N_1^{e2*} - N_1^{e2}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Weiterhin unveränderte Gültigkeit besitzen obige Gleichungen, wenn sie über das Gebiet Ω^e beziehungsweise den Rand Γ_σ^e integriert werden, wobei der NEUMANN Rand im Fall des Stabs zu zwei Punkten entartet ist, was zur Folge hat, daß die Randintegration entfällt. Nach der Integration sind weiterhin drei Gleichungen vorhanden, die die Identität einer linken Seite mit Null darstellen. Werden diese drei Gleichungen addiert, wird die rechte Seite weiterhin Null sein ($0 + 0 + 0 = 0$).

$$\int_{\Omega^e} \delta u_1 (\rho A \ddot{u}_1 - p_1) dX_1 - \int_{\Omega^e} \delta u_1 N_{1,1} dX_1 - \delta u_1^{e1} (N_1^{e1*} + N_1^{e1}) - \delta u_1^{e2} (N_1^{e2*} - N_1^{e2}) = 0 \quad (15)$$

Zur weiteren Umformung wird die partielle Integration des Terms $\delta u_1 N_{1,1}$ durchgeführt (vgl. BRONSTEIN & SEMENDJAJEW [15]). .

$$\int_{\Omega^e} \delta u_1 N_{1,1} dX_1 = [\delta u_1 N_1]_{e1}^{e2} - \int_{\Omega^e} \delta u_{1,1} N_1 dX_1 = \delta u_1^{e2} N_1^{e2} - \delta u_1^{e1} N_1^{e1} - \int_{\Omega^e} \delta u_{1,1} N_1 dX_1 \quad (16)$$

Wie zu beobachten ist, wird durch diese Umformung die Ableitung der Normalkraft $N_{1,1} = E A u_{1,1}$ zur Normalkraft $N_1 = E A u_{1,1}$, wobei im Gegenzug die virtuelle Verschiebung nun

abgeleitet werden muß. Die immense Bedeutung der durchgeföhrten partiellen Integration wird erst bei der Approximation des entsprechenden virtuellen Arbeitsterms im Rahmen der Finite Elemente Methode ersichtlich³ (Kapitel 3). Werden die Gleichungen (15) und (16) kombiniert, entfallen die Terme in den Kräften N_1^{e1} und N_1^{e1} .

$$\int_{\Omega^e} \delta u_1 (\rho A \ddot{u}_1 - p_1) dX_1 + \int_{\Omega^e} \delta u_{1,1} N_1 dX_1 - \delta u_1^{e1} N_1^{e1\star} - \delta u_1^{e2} N_1^{e2\star} = 0 \quad (17)$$

Ersetzt man schließlich $\delta u_{1,1}$ mit Hilfe von Eigenschaft (13) und die Normalkraft N_1 mit dem konstitutiven Gesetz (5), entsteht das Prinzip der virtuellen Verschiebung des eindimensionalen Kontinuums in der gebräuchlichen Form der Finite Elemente Methode.

$$\int_{\Omega^e} \delta u_1 \ddot{u}_1 \rho A dX_1 + \int_{\Omega^e} \delta \varepsilon_{11} EA \varepsilon_{11} dX_1 = \delta u_1^{e1} N_1^{e1\star} + \delta u_1^{e2} N_1^{e2\star} + \int_{\Omega^e} \delta u_1 p_1 dX_1 \quad (18)$$

Werden die Summanden in Gleichung (18) als virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte,

$$\delta W_{\text{dyn}}^e = \int_{\Omega^e} \delta u_1 \ddot{u}_1 \rho A dX_1 \quad (19)$$

innere virtuelle Arbeit

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{\Omega^e} \delta u_{1,1} A \sigma_{11} dX_1 \quad (20)$$

und virtuelle Arbeit äußerer Lasten

$$\delta W_{\text{ext}}^e = \delta u_1^{e1} N_1^{e1\star} + \delta u_1^{e2} N_1^{e2\star} + \int_{\Omega^e} \delta u_1 p_1 dX_1 \quad (21)$$

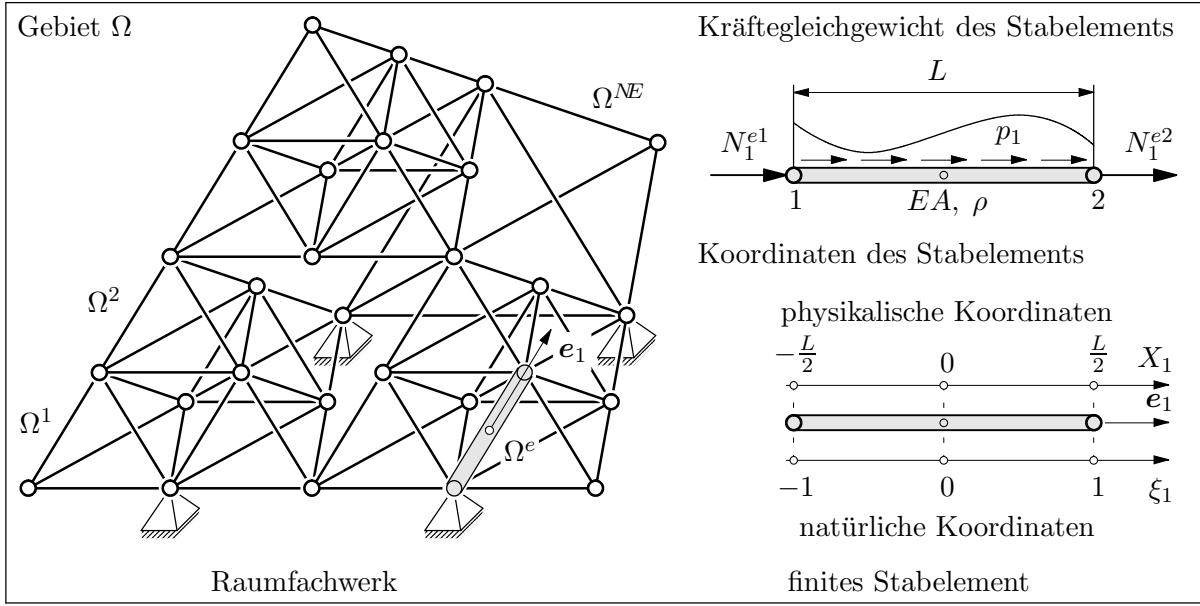
identifiziert, kann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in kompakter Form angegeben werden.

$$\delta W_{\text{dyn}}^e + \delta W_{\text{int}}^e = \delta W_{\text{ext}}^e \quad (22)$$

Im Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden die DIRICHLET Randbedingungen stark, die NEUMANN Randbedingungen schwach und die Impulsbilanz ebenfalls schwach erfüllt, wohingegen in der starken Form alle drei Bedingungen streng erfüllt sein müssen.

Da zur Transformation von Gleichung (11) zur Gleichung (18) keine Näherungen oder zusätzliche Annahmen eingebbracht wurden, ist diese Umformung auch umkehrbar. Das heißt, die starke und die schwache Form sind mathematisch und kontinuumsmechanisch äquivalent und folglich jederzeit ineinander überführbar. Im kontinuumsmechanischen Sinn, d.h. für die exakte Lösung des Anfangsrandwertproblems u_1 sind starke und schwache Form identisch. Stellt sich die Frage nach dem Vorteil der schwachen oder integralen Formulierung gegenüber der starken oder

³Ersetzt man die exakte Verschiebung u_1 durch ihre Approximation \tilde{u}_1 muß der Verschiebungsansatz \tilde{u}_1 im Fall $\delta u_1 N_1$ zweimal differenzierbar sein, während im Fall $\delta u_1 N_1$ eine einmal differenzierbarer Verschiebungsansatz genügt

Abbildung 16: Raumfachwerk und exemplarisch betrachtetes finites Stabelement e

lokalen Formulierung. Wird nur die Verschiebung nicht exakt ermittelt, sondern durch \tilde{u}_1 approximiert, kann diese Verschiebungapproximation die schwache integrale Form befriedigen, die starke Form jedoch nicht. Das bedeutet, das Prinzip der virtuellen Arbeit ist erfüllt, die lokalen Differentialgleichungen werden hingegen verletzt. Die schwache Form lässt lokale Fehler zu, womit sie die Grundlage numerischer Berechnungsverfahren, insbesondere der Finite Elemente Methode, bildet. Eine geometrische Interpretation des Unterschieds von lokaler und integraler Form ist in Abbildung 15 gegeben.

3 Finite Elemente Diskretisierung

3.1 Generierung einer Struktur aus Elementen

Wird eine Raumfachwerk aus mehreren Fachwerkstäben generiert, kann aus der Gültigkeit des Prinzips der virtuellen Verschiebungen jeden einzelnen Stabs auf die Gültigkeit dieses Prinzips der Struktur geschlossen werden, wobei sich die virtuellen Arbeiten des Ensemble von Fachwerkstäben aus der Summe der virtuellen Arbeit der Einzelstäbe ergeben. Dieser Sachverhalt bildet die Grundlage zur Unterteilung von Strukturen in Teilgebiete, zur Formulierung finiter Elemente in den Teilgebieten und zum anschließenden Zusammenbau der finiten Elemente zu einer diskretisierten Struktur.

Mathematisch wird die Struktur oder das Gebiet Ω durch die Vereinigung von Gebieten finiter Abmessungen Ω^e gebildet. Dabei dürfen sich die Teilgebiete nicht überschneiden.

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega^e \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \quad (23)$$

Wie in Abbildung 16 am Beispiel eines Raumfachwerks dargestellt, entspricht das Teilgebiet Ω^e einem einzelnen Stab. Für das Gebiet Ω und jedes Gebiet Ω^e muß das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfüllt sein,

$$\delta W_{\text{dyn}} + \delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad \delta W_{\text{dyn}}^e + \delta W_{\text{int}}^e = \delta W_{\text{ext}}^e \quad (24)$$

wobei die Summe der virtuellen Arbeiten aller finiten Elemente die entsprechenden virtuellen Arbeiten der Struktur ergeben müssen.

$$\delta W_{\text{dyn}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta W_{\text{dyn}}^e, \quad \delta W_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta W_{\text{int}}^e, \quad \delta W_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta W_{\text{ext}}^e \quad (25)$$

3.2 Approximation von Variablen eindimensionaler Kontinua

Bei der finite Element Diskretisierung eines Fachwerkstabs wird das (unbekannte) exakte Verschiebungsfeld u_1 (Verschiebungsverlauf u_1 in Abhängigkeit von der physikalischen Längskoordinate X_1 beziehungsweise natürlichen Längskoordinate ξ_1) durch eine Approximation \tilde{u}_1 ersetzt. Die entsprechende Ansatzfunktion wird durch wenige Parameter und die Annahme ihrer qualitativen Form definiert. Aufgrund ihrer günstigen Eigenschaften, haben sich zur Verwendung als Ansatzfunktionen polynomiale Funktionen etabliert. Zur systematisierten Darstellung solcher Approximationsfunktionen finiter Elemente ähnlicher Geometrie werden die Ansatzfunktionen im natürlichen Parameterraum definiert und anschließend das entwickelte finite Element auf die spezielle Elementgeometrie transformiert. Im Rahmen des isoparametrischen finite Elementkonzepts folgt aus der Diskretisierung der Verschiebung direkt die Diskretisierung des Orts $X_1(\xi_1)$, der Variation der Verschiebung $\delta u_1(\xi_1)$ und der Beschleunigung $\ddot{u}_1(\xi_1)$, womit es zunächst genügt, die Approximation des Verschiebungsfelds zu diskutieren und sie anschließend analog auf die weiteren zu approximierenden Größen anzuwenden.

3.2.1 Wahl der Ansatzfunktion

Zur Formulierung von Finiten Elementen müssen die Ansatzfunktionen

- konform sein,
- mindestens konstante Verzerrungen liefern
- und dürfen bei Starrkörpersverschiebungen keine Verzerrungen liefern.

Der erste Gesichtspunkt betrifft die Interaktion und Kompatibilität benachbarter finiter Elemente, während die weiteren Bedingungen lokal auf jedes finite Element einer Struktur beschränkt sind.

Damit bei der Deformation einer Struktur an Elementgrenzen keine Lücken oder Überlappungen entstehen, müssen die Verschiebungen konform sein. Dies ist für ein finites Element mit Verschiebungsansätzen, die die DIRICHLET Randbedingungen des Elements erfüllen, garantiert. Am Beispiel des Fachwerkstabs fordert dies, daß die Verschiebungen angrenzender Elemente am gemeinsamen Knoten den gleichen Wert aufweisen müssen. Da die Übergangsbedingung nur für die Lösungsvariable u_1 selbst, d.h. nur für die nulle Ableitung der Lösungsvariable erfüllt sein muß, werden diese Ansätze als C_0 konforme Ansätze bezeichnet (vgl. Abbildung 18). Im Gegensatz dazu werden Elemente, die neben dem Verschiebungsfeld auch die Ableitung des Verschiebungsfelds $u_{1,1}$ als primäre Lösungsvariable verwenden (z.B. bei Biegebalken-, Platten-, Faltwerks- oder Schalenelementen ist diese Variable der Biegewinkel), mit C_1 konformen oder C_1 stetigen Ansätzen ausgestattet, um auch für die Ableitungen die Übergangsbedingung zu

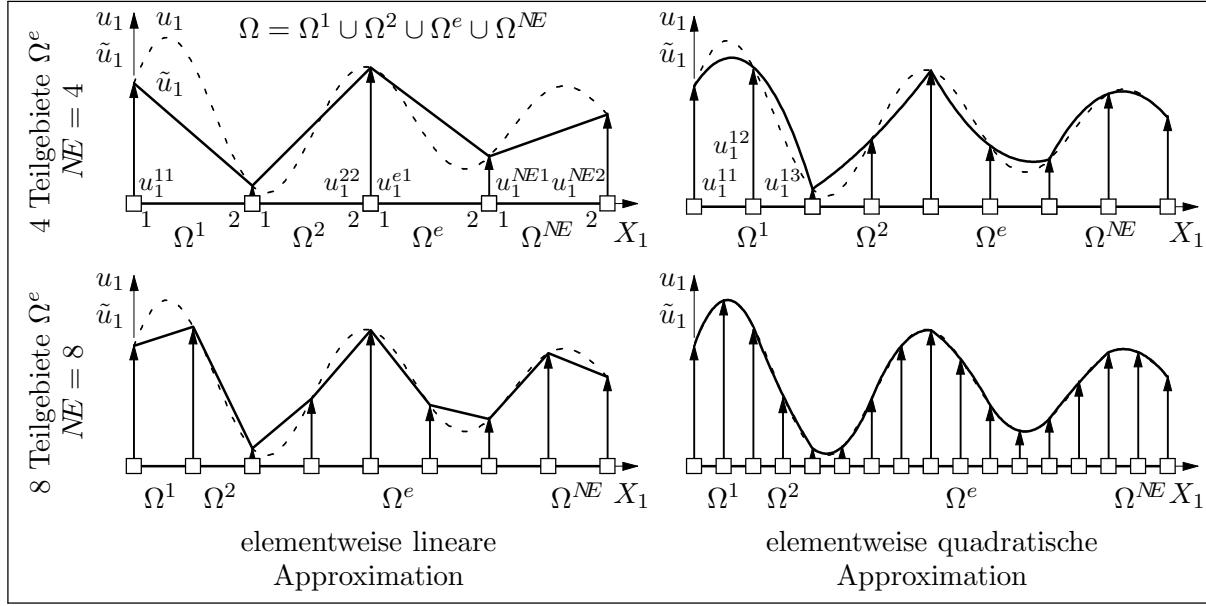


Abbildung 17: Approximation eindimensionaler Funktionen durch Gebietszerlegung und elementweiser Anwendung von Polynomansätzen

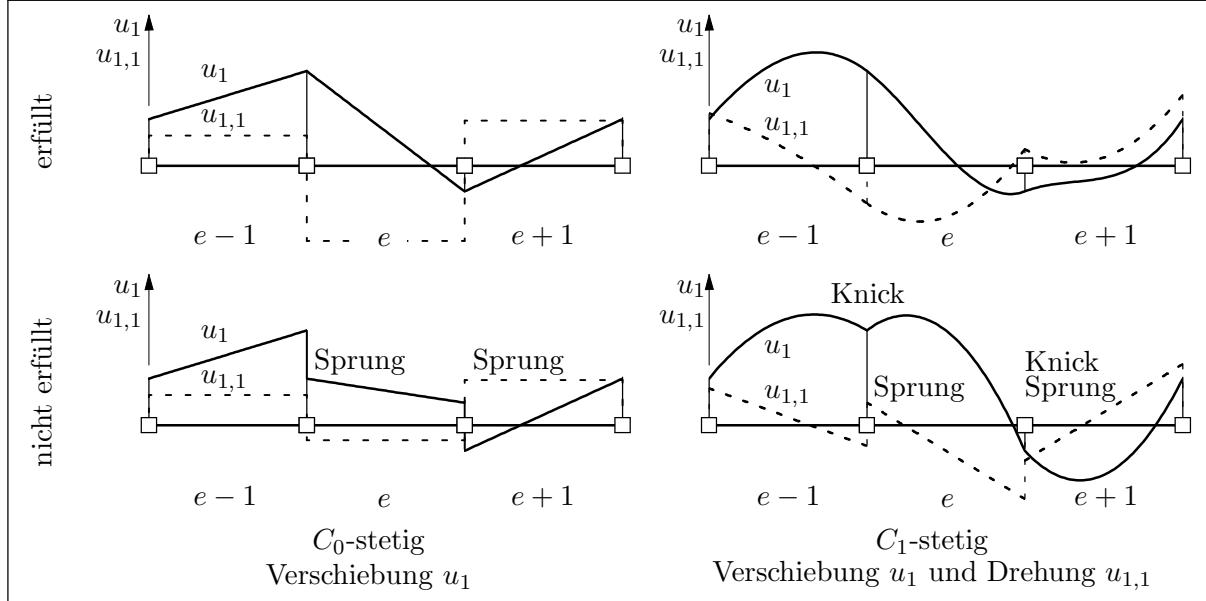


Abbildung 18: Kompatibilitätsbedingung eindimensionaler finiter Elemente

erfüllen. Werden in diesen Fällen nichtkonforme Ansätze verwendet, verschwinden bei der Ensemblierung (Zusammenbau der Struktur aus finiten Elementen, vgl. Kapitel 4) der Struktur die äußeren virtuellen Arbeiten der Schnittlasten nicht.

Konstante Verzerrungen werden gefordert, damit die Variation der Verzerrungen oder die Verzerrungen selbst und damit die innere virtuelle Arbeit nicht Null werden. Diese Aussage kann im allgemeinen dreidimensionalen Fall durch Betrachtung der Gleichung (4) und des Prinzips der virtuellen Arbeit des Fachwerkstabs (Gleichung (18)) nachvollzogen werden.

Das dritte Kriterium, dem die Ansatzfunktionen genügen müssen, ist die Forderung, verzerrungsfreie Starrkörperbewegungen beschreiben zu können. Das bedeutet, daß bei einer deforma-

tionsfreien Bewegung eines Elements infolge der Ansatzfunktionen keine innere virtuelle Arbeit entstehen darf.

3.2.2 Physikalische und natürliche Koordinaten

Im Fall des Stabelements wird die Position eines Punkts bezüglich der Stablängsachse in der physikalischen Koordinate X_1 oder der natürlichen Koordinate ξ_1 gemessen (vgl. Abbildung 16).

$$X_1 \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \quad \xi_1 \in \left[-1, 1 \right] \quad (26)$$

Der Zusammenhang der Koordinaten X_1 und ξ_1 ist durch die Gleichung

$$X_1 = \frac{L}{2} \xi_1 \quad (27)$$

beschrieben, womit auch die Transformation der entsprechenden differentiellen Linienelemente dX_1 und $d\xi_1$ durch die Ableitung der physikalischen nach der natürlichen Koordinate festliegt.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} = X_{1;1} = \frac{L}{2} \quad dX_1 = \frac{L}{2} d\xi_1 = |\mathbf{J}| d\xi_1 \quad (28)$$

Dabei wurde zur Symbolisierung der Ableitung nach der natürlichen Koordinate ξ_1 der Index ;1 definiert. Weiterhin wurden in Gleichung (28) die JACOBI Matrix oder Funktionalmatrix \mathbf{J} und deren Determinante, die Jacobi Determinante oder Funktionaldeterminante $|\mathbf{J}|$, definiert. Im eindimensionalen Sonderfall des Fachwerkstabs ist die JACOBI Matrix eine (1×1) Matrix oder ein Skalar. Somit ist im eindimensionalen Fall die JACOBI Determinante der JACOBI Matrix identisch.

3.2.3 Lokale polynomiale Approximation eindimensionaler Funktionen

Generell kann jede beliebige Funktion $u_1(\xi_1)$ mit Hilfe eines LAGRANGE Polynoms $\tilde{u}_1(\xi_1)$ des Polynomgrads p approximiert oder interpoliert werden.

$$u_1(\xi_1) \approx \tilde{u}_1(\xi_1) = \sum_{j=0}^p \alpha^j (\xi_1)^j = \alpha^0 + \alpha^1 (\xi_1) + \alpha^2 (\xi_1)^2 + \alpha^3 (\xi_1)^3 + \cdots + \alpha^p (\xi_1)^p \quad (29)$$

Dabei sind die Koeffizienten α^j so zu wählen, daß \tilde{u}_1 an den durch ξ_1^i gekennzeichneten Elementknoten i den Verschiebungen $\tilde{u}_1(\xi_1^i) = u_1^{ei}$ identisch ist. Als Beispiel sei hier die zum Elementknoten 1 korrelierte Bedingung angegeben.

$$u_1(\xi_1^1) = u_1^{e1} = \tilde{u}_1(\xi_1^1) = \sum_{j=0}^p \alpha^j (\xi_1^1)^j = \alpha^0 + \alpha^1 (\xi_1^1) + \alpha^2 (\xi_1^1)^2 + \alpha^3 (\xi_1^1)^3 + \cdots + \alpha^p (\xi_1^1)^p \quad (30)$$

In Matrizenform können die entsprechenden $p+1$ Bedingungen wie folgt zusammengefaßt werden.

$$\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \\ \vdots \\ u_1^{ep+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\xi_1^1) & \cdots & (\xi_1^1)^p \\ 1 & (\xi_1^2) & \cdots & (\xi_1^2)^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\xi_1^{p+1}) & \cdots & (\xi_1^{p+1})^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^p \end{bmatrix} \quad (31)$$

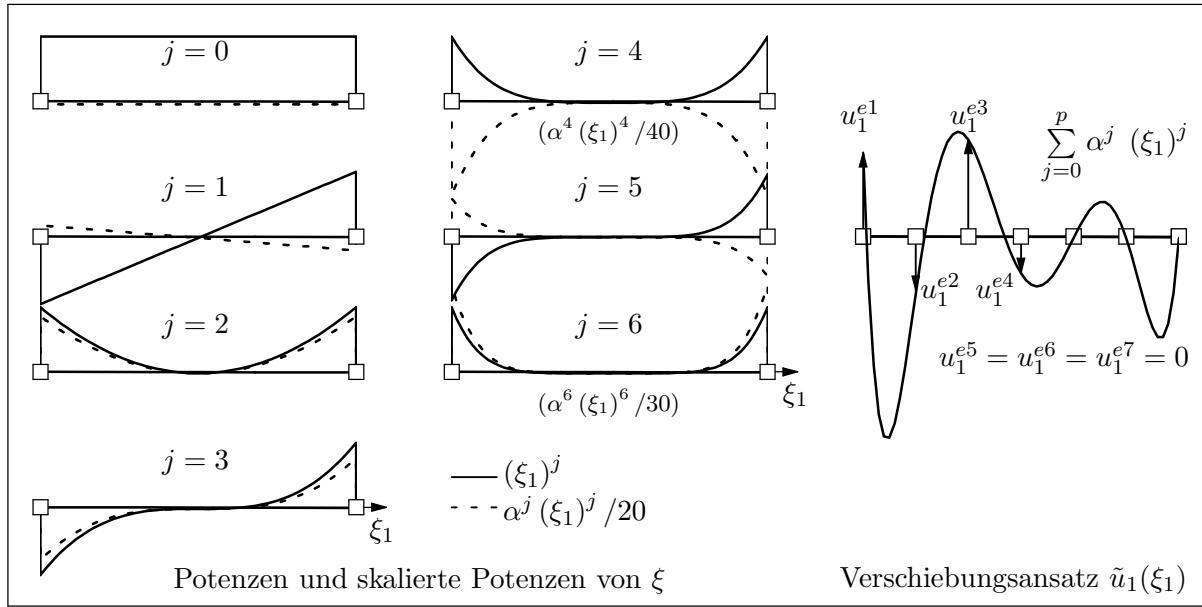


Abbildung 19: Approximation der Verschiebung u_1 auf Basis eines LAGRANGE Polynoms nach Gleichung (29)

Die in dieser Gleichung verwendete Matrix wird in der Fachliteratur als VANDERMONDE Matrix bezeichnet. Durch Inversion von Gleichung (31) erhält man die Parameter α^j , womit das LAGRANGE Polynom (29) an, durch diskrete Wertepaare $(\xi_1^i, u_1(\xi_1^i))$ definierte, beliebige Funktionen $u_1(\xi_1)$ angepaßt werden kann. Beispielhaft ist in Abbildung 19 die Entwicklung der Approximation einer durch sieben Wertepaare $(\xi_1^i, u_1(\xi_1^i))$ charakterisierten Funktion mit Hilfe eines LAGRANGE Polynoms des Polynomgrads $p = 6$ dargestellt. Abgetragen sind die Potenzen $(\xi_1)^0$ bis $(\xi_1)^6$ und die mit den durch Inversion von Gleichung (31) berechneten Koeffizienten α^j skalierten Potenzen. Durch Summation der skalierten Potenzen ergibt sich die abgebildete Verschiebungsapproximation.

Mit der beschriebenen Vorgehensweise können beliebige Funktionen mit Hilfe eines LAGRANGE Polynoms interpoliert werden. Dennoch erscheint die Bestimmung der abstrakten Parameter α^j etwas umständlich. Beachtet man die verallgemeinerte Form der VANDERMONDE Matrix in Gleichung (31), liegt es nahe, ihre Inversion ebenfalls in allgemeiner Form durchzuführen und Gleichung (29) direkt mit den Knotenverschiebungen u_1^{ei} als Parameter zu beschreiben. Dies ergibt die Approximation eines beliebigen Verschiebungsverlaufs $u_1(\xi_1)$ mit Hilfe der Knotenverschiebungen u_1^{ei} und den Lagrangeschen Interpolationspolynome $N^i(\xi_1)$.

$$u_1(\xi_1) \approx \tilde{u}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^{p+1} u_1^{ei} N^i(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{u}^e \quad (32)$$

Zur letzten Umformung in Gleichung (32) wurde die Summation durch das Matrizenprodukt der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ und des Elementverschiebungsvektors \mathbf{u}^e ersetzt, wobei

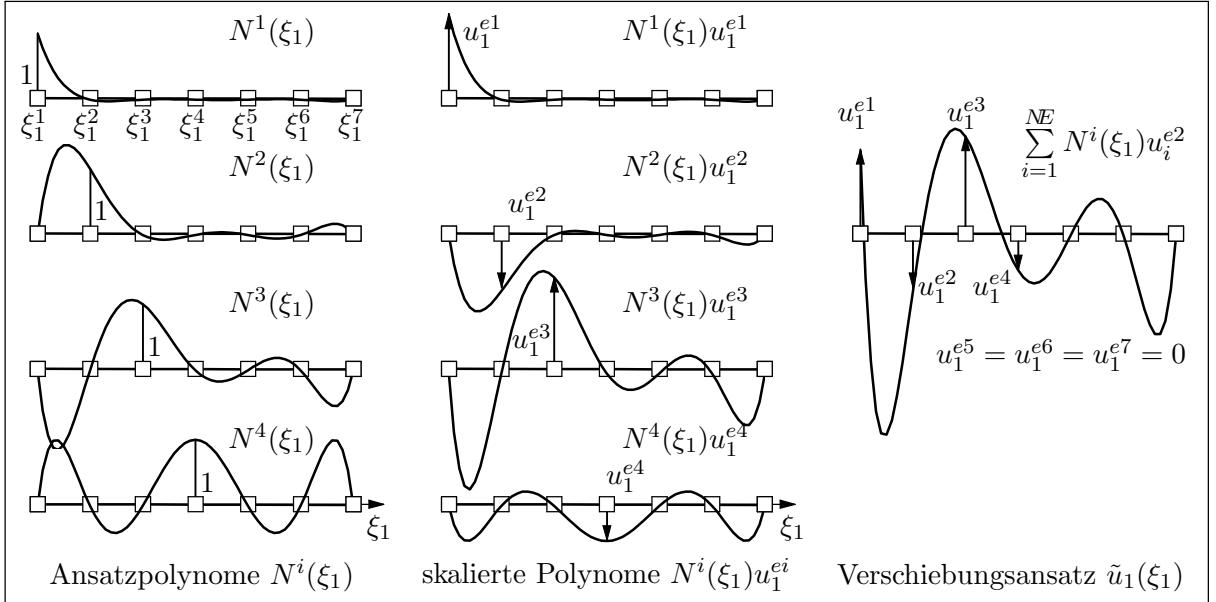


Abbildung 20: Verschiebungsansätze auf Basis LAGRANGE'scher Interpolationspolynome nach den Gleichungen (32) und (34)

$\mathbf{N}(\xi_1)$ und \mathbf{u}^e wie folgt definiert sind.

$$\mathbf{N}(\xi_1) = \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & \cdots & N^{NN}(\xi_1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1^{e1} & u_1^{e2} & \cdots & u_1^{eNN} \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

$NN = p + 1$ symbolisiert die Anzahl der Elementknoten oder Stützstellen. Zur vollständigen Beschreibung der Gleichung (32) bedarf es der Berechnung der LAGRANGE Interpolationspolynome $N^i(\xi_1)$. Allgemein kann ein LAGRANGE'sches Interpolationspolynom des Polynomgrads p durch das Produkt

$$N^i(\xi_1) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_1^k - \xi_1}{\xi_1^k - \xi_1^i} \quad (34)$$

gebildet werden, wobei ξ_1^k die Position des Knotens k und N^i die zum Knoten i assoziierte Ansatzfunktion charakterisieren. Zu bemerken ist, daß die LAGRANGE Interpolationspolynome $N^i(\xi_1)$ die Interpolationseigenschaft aufweisen. Das bedeutet, die Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ nehmen an dem Knoten i den Wert Eins an und sind an den weiteren Knoten $k \neq i$ Null.

$$N^i(\xi_1^k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (35)$$

Diese Aussage kann durch Einsetzen von $\xi_1 = \xi_1^k$ und $\xi_1 = \xi_1^i$ in Gleichung (34) überprüft werden. Abbildung 20 dokumentiert die Generierung der Verschiebungsapproximation bei Verwendung von sieben Elementknoten (vgl. Abbildung 19). Dargestellt sind die zu vier der

sieben Elementknoten assoziierten Ansatzfunktionen ($u_1^{e5} = u_1^{e6} = u_1^{e7} = 0$), die mit der jeweiligen Knotenverschiebung skalierten Ansatzfunktionen und die approximierte Verschiebung $\tilde{u}_1(\xi_1)$. Deutlich zu beobachten sind die Interpolationseigenschaft der Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ und die zu Abbildung 19 identische Approximation des Verschiebungsfelds $\tilde{u}_1(\xi_1)$.

3.2.4 Approximation der Ableitung von primären Variablen

Neben der Approximation der primären Variablen ist im Rahmen der Finite Element Formulierung von deformierbaren Stäben auch die Approximation der Ableitung der Variablen bezüglich der natürlichen Koordinate ξ_1 von Bedeutung. Diese Ableitung bildet die Basis zur Approximation der Verzerrung $\tilde{\varepsilon}_{11}$ im finiten Stabelement. In Gleichung (32) sind lediglich die Ansatzfunktionen N^i Funktionen der natürlichen Koordinate ξ_1 , die Verschiebungen u_1^{ei} hingegen sind diskrete Knotenverschiebungen und somit von ξ_1 unabhängig.

$$\frac{\partial u_1(\xi_1)}{\partial \xi_1} = u_{1;1}(\xi_1) \approx \tilde{u}_{1;1}(\xi_1) = \sum_{i=1}^{p+1} u_1^{ei} N_{;1}^i(\xi_1) = \mathbf{N}_{;1}(\xi_1) \mathbf{u}^e \quad (36)$$

Mit Gleichung (34) kann die Ableitung der LAGRANGE'schen Interpolationspolynome allgemein generiert werden.

$$N_{;1}^i(\xi_1) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{p+1} \frac{-1}{\xi_1^l - \xi_1^i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq l}}^{p+1} \frac{\xi_1^k - \xi_1^i}{\xi_1^k - \xi_1^l} \quad (37)$$

3.2.5 Lineare, quadratisch und kubische Interpolationspolynome

Hier sollen die für eindimensionale finite Elemente gebräuchlichen LAGRANGE Interpolationspolynome für $p = 1$, $p = 2$ und $p = 3$ angegeben werden. Zur Illustration der Vorgehensweise der Generierung von Ansatzfunktionen werden die linearen Ansatzfunktionen ausführlich diskutiert, während für die quadratisch und kubische Approximation lediglich das Ergebnis angegeben wird. Das LAGRANGE Polynom nach Gleichung (29) ergibt für $p = 1$ den Polynomansatz des linearen Stabelements.

$$u_1(\xi_1) \approx \tilde{u}_1(\xi_1) = \sum_{j=0}^1 \alpha^j (\xi_1)^j = \alpha^0 + \alpha^1 \xi_1 \quad (38)$$

Durch Einsetzen der Stützstellen $\xi_1 = -1$ und $\xi_1 = 1$ gewinnt man mit Gleichung (31) die VANDERMONDE Matrix und durch deren Inversion die Koeffizienten α^0 und α^1 .

$$\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

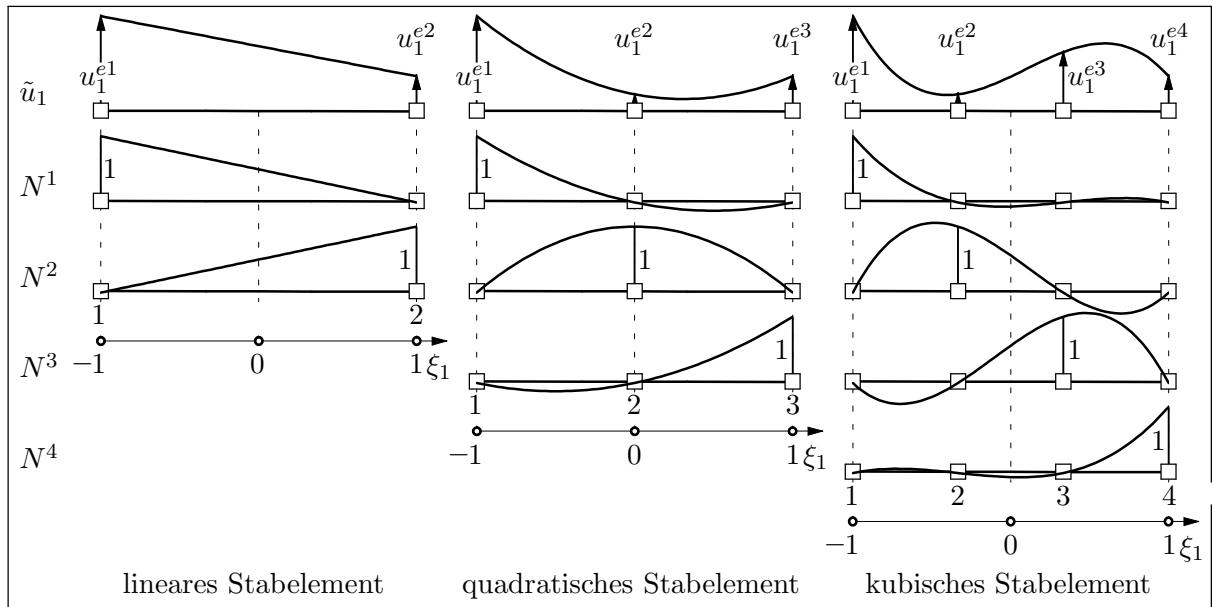


Abbildung 21: Lineare, quadratische und kubische Ansatzfunktionen des Stabelements

Das Einsetzen der Koeffizienten α^0 und α^1 in Gleichung (38) liefert durch Vergleich mit Gleichung (32) die Ansatzfunktionen $N^1(\xi_1)$ und $N^2(\xi_1)$ des linearen Stabelements.

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1) \approx \tilde{u}_1(\xi_1) &= \frac{1}{2}(u_1^{e1} + u_1^{e2}) - \frac{1}{2}(u_1^{e1} - u_1^{e2}) \xi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1) u_1^{e1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_1) u_1^{e2} \\ &= N^1(\xi_1) u_1^{e1} + N^2(\xi_1) u_1^{e2} \end{aligned} \quad (40)$$

Alternativ können die bereits entwickelten Ansatzfunktionen $N^1(\xi_1)$ und $N^2(\xi_1)$ direkt nach Gleichung (34) berechnet werden. Mit den Knotenkoordinaten $\xi_1 = -1$ und $\xi_1 = 1$ ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$N^1(\xi_1) = \frac{1 - \xi_1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \quad N^2(\xi_1) = \frac{(-1) - \xi_1}{(-1) - 1} = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \quad (41)$$

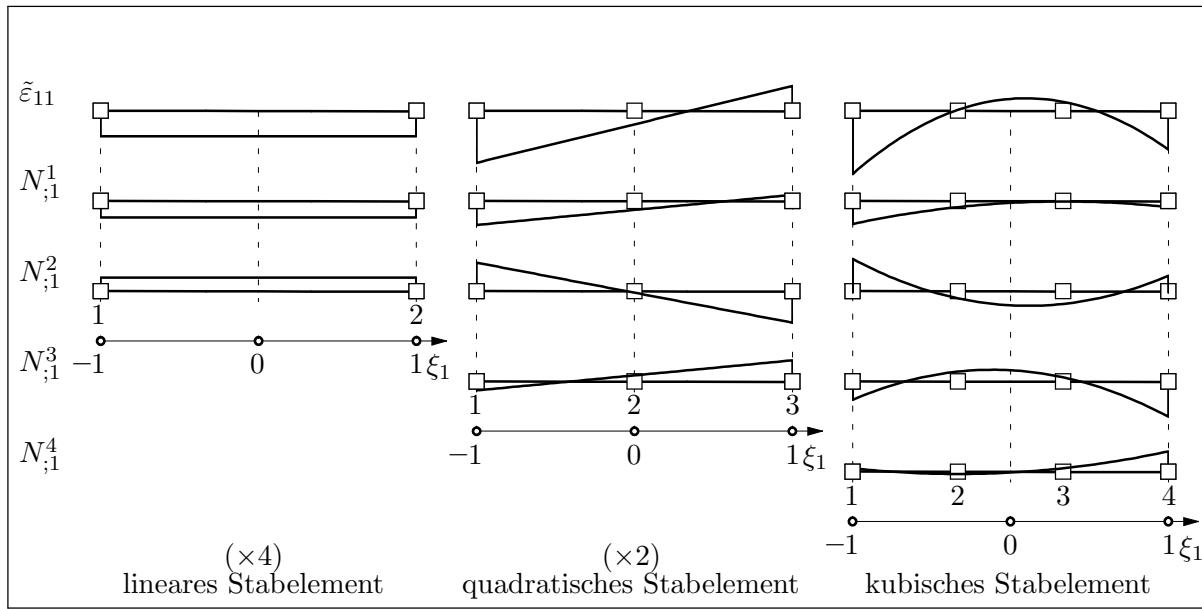
Analog sind die quadratischen und kubischen LAGRANGE Interpolationspolynome zu generieren. Eine Zusammenstellung der Ansatzfunktionen findet sich in Tabelle 2, deren Visualisierung sowie die Illustration der Verschiebungsapproximation sind in Abbildung 21 gegeben. Die Ableitung der Ansatzfunktionen kann auf Basis der Gleichungen (41) erfolgen.

$$N_{;1}^1(\xi_1) = -\frac{1}{2} \quad N_{;1}^2(\xi_1) = \frac{1}{2} \quad (42)$$

Die abgeleiteten linearen, quadratischen und kubischen Ansatzfunktionen sind in Tabelle 2 zusammengestellt und in Abbildung 22 illustriert.

3.3 Stabelement mit linearen Ansatzfunktionen

Die Generierung des linearen Stabelement basiert auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit auf Elementebene (24), wobei die virtuellen Arbeitsterme in Gleichung (18) definiert sind, und der Approximation des Verschiebungsfelds und dessen Ableitung nach der natürlichen Koordinaten

Abbildung 22: Approximierte Verzerrung $\tilde{\varepsilon}_{11}$ verschiedener Stabelemente

ξ_1 . Somit ist das Finite Element mit der Wahl der Knotenfreiheitsgrade u_1^{e1} und u_1^{e2} und der Ansatzfunktionen N^1 und N^2 festgelegt.

3.3.1 Lineare Ansatzfunktionen

Die linearen Ansatzfunktionen des Stabelements wurden bereits in Abschnitt 3.2.5 zu Verfügung gestellt. Sie werden zur Approximation der physikalischen Koordinate $X_1(\xi_1)$, der Verschiebung $u_1(\xi_1)$, der Variation der Verschiebung $\delta u_1(\xi_1)$ und der Beschleunigung $\ddot{u}_1(\xi_1)$ eingesetzt. Zur matrziellen Schreibweise der Approximationsbeziehungen werden die LAGRANGE Interpolationspolynome in der Matrix der Ansatzfunktionen zusammengefaßt.

$N^i(\xi_1)$	linear $p = 1$ 1 2 	quadratisch $p = 2$ 1 2 3 	kubisch $p = 3$ 1 2 3 4
$N^1(\xi_1)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1)$	$\frac{1}{2}(\xi_1 - 1) \xi_1$	$\frac{9}{16}(1 - \xi_1)(\xi_1^2 - \frac{1}{9})$
$N^2(\xi_1)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi_1)$	$1 - \xi_1^2$	$\frac{27}{16}(\xi_1^2 - 1)(\xi_1 - \frac{1}{3})$
$N^3(\xi_1)$		$\frac{1}{2}(1 + \xi_1) \xi_1$	$\frac{27}{16}(1 - \xi_1^2)(\xi_1 + \frac{1}{3})$
$N^4(\xi_1)$			$\frac{9}{16}(\xi_1 + 1)(\xi_1^2 - \frac{1}{9})$
$N_{;1}^1(\xi_1)$	$-\frac{1}{2}$	$\xi_1 - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}(-27 \xi_1^2 + 18 \xi_1 + 1)$
$N_{;1}^2(\xi_1)$	$\frac{1}{2}$	$-2 \xi_1$	$\frac{9}{16}(9 \xi_1^2 - 2 \xi_1 - 3)$
$N_{;1}^3(\xi_1)$		$\xi_1 + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}(-9 \xi_1^2 - 2 \xi_1 + 3)$
$N_{;1}^4(\xi_1)$			$\frac{1}{16}(27 \xi_1^2 + 18 \xi_1 - 1)$

Tabelle 2: Ansatzfunktionen und deren Ableitung eindimensionaler finiter Elemente

$$\begin{aligned} N^1(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \\ N^2(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \end{aligned} \quad \mathbf{N}(\xi_1) = \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (43)$$

3.3.2 Approximation der Variablen

Die Approximation der kontinuierlichen Felder $u_1(\xi_1)$, $\delta u_1(\xi_1)$ und $\ddot{u}_1(\xi_1)$ wird mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$, dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}^e , der Variation des Elementverschiebungsvektors $\delta\mathbf{u}^e$ und dem Elementbeschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{u}}^e$ realisiert.

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1) \approx \tilde{u}_1(\xi_1) &= \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{u}^e & \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} u_1^{e1} & u_1^{e2} \end{bmatrix}^T \\ \delta u_1(\xi_1) \approx \delta \tilde{u}_1(\xi_1) &= \mathbf{N}(\xi_1) \delta \mathbf{u}^e & \delta \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} & \delta u_1^{e2} \end{bmatrix}^T \\ \ddot{u}_1(\xi_1) \approx \ddot{\tilde{u}}_1(\xi_1) &= \mathbf{N}(\xi_1) \ddot{\mathbf{u}}^e & \ddot{\mathbf{u}}^e &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} & \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (44)$$

3.3.3 Isoparametrische Approximation der Koordinaten

In Vorbereitung des isoparametrischen finite Elemente Konzepts soll hier die typische Vorgehensweise dieses Konzepts am Beispiel des linearen Stabelements demonstriert werden. Beim isoparametrischen Konzept wird die physikalische Koordinate X_1 in Analogie zur Verschiebung $u_1(\xi_1)$ mit Hilfe der Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ im Parameterraum und der physikalischen Koordinaten der Elementknoten X_1^{e1} und X_1^{e2} bestimmt.

$$X_1(\xi_1) \approx \tilde{X}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{X}^e \quad \mathbf{X}^e = \begin{bmatrix} X_1^{e1} & X_1^{e2} \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

Im Fall des linearen Stabelements ergibt sich daraus die zu Gleichung (27) identische Abbildung der Koordinaten aus dem Parameterraum ξ_1 in den physikalischen Raum X_1 .

$$\tilde{X}_1(\xi_1) = X_1^{e1} \frac{1 - \xi_1}{2} + X_1^{e2} \frac{1 + \xi_1}{2} = -\frac{L}{2} \frac{1 - \xi_1}{2} + \frac{L}{2} \frac{1 + \xi_1}{2} = \frac{L}{2} \xi_1 \quad (46)$$

Demnach entspricht auch die approximierte JACOBI Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \xi_1} = \frac{L}{2} \quad (47)$$

der in Gleichung (28) angegebenen exakten JACOBI Matrix.

3.3.4 Approximation der Verzerrungen

Zur Approximation des Verzerrungsfelds $\varepsilon_{11}(\xi_1)$ muß die Koordinatentransformation zwischen physikalischen und natürlichen Koordinaten (X_1 und ξ_1) bei der Ableitung des Verschiebungsfelds $u_{1,1} = \partial u_1 / \partial X_1$ berücksichtigt werden. Das bedeutet, die Ableitung der approximierten

Verschiebung $u_1(\xi_1)$ nach der Koordinate X_1 in Gleichung (4) muß unter Anwendung der Kettenregel berechnet werden.

$$\varepsilon_{11}(\xi_1) = u_{1,1}(\xi_1) = \frac{\partial u_1(\xi_1(X_1))}{\partial X_1} = \underbrace{\frac{\partial u_1(\xi_1)}{\partial \xi_1}}_{u_{1,1}(\xi_1)} \underbrace{\frac{\partial \xi_1}{\partial X_1}}_{\mathbf{J}^{-1}} = u_{1,1}(\xi_1) \frac{2}{L} \quad (48)$$

Bei der letzten Umformung ging die Inverse der JACOBI Matrix $\mathbf{J}^{-1} = 2/L$ nach Gleichung (28) ein. Damit ist die Approximation des Verzerrungsfelds mit Hilfe der Approximation des Verschiebungsfelds (32) gegeben.

$$\varepsilon_{11}(\xi_1) \approx \tilde{\varepsilon}_{11}(\xi_1) = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\sum_{i=1}^2 u_1^{ei} N^i(\xi_1) \right] = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^2 u_1^{ei} \frac{\partial N^i(\xi_1)}{\partial \xi_1} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^2 u_1^{ei} N_{;1}^i(\xi_1) \quad (49)$$

Dabei ging bei der Bildung der Ableitung nach ξ_1 ein, daß die Knotenfreiheitsgrade u_1^{ei} nicht von der Variablen ξ_1 abhängen, sie sind diskret und damit nur an den Knoten k definiert. Auch für die Approximation des Verzerrungsfelds kann eine Vektorschreibweise anstelle der Summation verwendet werden.

$$\varepsilon_{11}(\xi_1) \approx \tilde{\varepsilon}_{11}(\xi_1) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi_1) \mathbf{u}^e \quad (50)$$

Wobei der B-Operator oder Differentialoperator \mathbf{B}

$$\mathbf{B}(\xi_1) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (51)$$

definiert wurde. Dieser Differentialoperator ist im allgemeinen eine Matrix und im speziellen Fall eindimensionaler linearer Elemente ein transponierter Vektor oder eine (2×1) Matrix. Er verknüpft die Approximation lokaler kontinuierlicher Verzerrungen ε_{11} mit dem diskreten Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}^e . Analog zu Gleichungen (49) und (50) kann auch die Variation der Normalverzerrung $\delta\varepsilon_{11}$ approximiert werden.

$$\delta\varepsilon_{11}(\xi_1) \approx \delta\tilde{\varepsilon}_{11}(\xi_1) = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^2 \delta u_1^{ei} N_{;1}^i(\xi_1) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi_1) \delta \mathbf{u}^e \quad (52)$$

Zur Generierung des Differentialoperators (51) müssen die Ansatzfunktionen nach der Koordinaten ξ_1 abgeleitet werden. Die Ableitung der Ansatzfunktionen nach der natürlichen Koordinate ξ_1 kann Gleichung (42) entnommen werden.

$$N_{;1}^1(\xi_1) = -\frac{1}{2} \quad N_{;1}^2(\xi_1) = \frac{1}{2} \quad (53)$$

des linearen Stabelements. Damit ist im Sonderfall des linearen Stabelements der Differentialoperator \mathbf{B} nicht vom Ort ξ_1 abhängig.

3.3.5 Approximierte innere virtuelle Arbeit

Die approximierte innere virtuelle Arbeit erhält man aus Gleichung (20) durch Einsetzen der Approximation der Variation der Verzerrung $\delta\tilde{\varepsilon}_{11}$ und des Materialgesetzes $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$, in das wiederum die Approximation der Verzerrung $\tilde{\varepsilon}_{11}$ eingeht.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}}^e = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \delta\tilde{\varepsilon}_{11} E A \tilde{\varepsilon}_{11} dX_1 = \int_{-1}^1 \delta\tilde{\varepsilon}_{11} E A \tilde{\varepsilon}_{11} |\mathbf{J}| d\xi_1 = \int_{-1}^1 \delta\tilde{\varepsilon}_{11} E A \tilde{\varepsilon}_{11} \frac{L}{2} d\xi_1 \quad (54)$$

In Gleichung (54) wurde zur Transformation des Linienelements dX_1 zu $d\xi_1$ die Determinante der JACOBI Matrix, die sogenannte Jacobi Determinante oder Funktionaldeterminante $|\mathbf{J}|$ nach Gleichung (28) eingesetzt. Bei eindimensionalen finiten Elementen sind JACOBI Matrix und JACOBI Determinante selbstverständlich identisch. Die Unterscheidung erfolgt hier lediglich, um die Parallelen zu den in weiteren Kapitel behandelten mehrdimensionalen Elementen zu verdeutlichen. Die Approximationen der Verzerrung und der Variation der Verzerrung nach den Gleichungen (49) und (52) eingesetzt ergibt in der Summenschreibweise:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{\text{int}}^e &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{L} \sum_{i=1}^2 \delta u_1^{ei} N_{;1}^i(\xi_1) \right) E A \left(\frac{2}{L} \sum_{j=1}^2 u_1^{ej} N_{;1}^j(\xi_1) \right) \frac{L}{2} d\xi_1 \\ &= \frac{2 E A}{L} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \delta u_1^{ei} N_{;1}^i(\xi_1) N_{;1}^j(\xi_1) u_1^{ej} d\xi_1 \\ &= \frac{2 E A}{L} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta u_1^{ei} \int_{-1}^1 N_{;1}^i(\xi_1) N_{;1}^j(\xi_1) d\xi_1 u_1^{ej} \end{aligned} \quad (55)$$

In den Umformungen ging ein, daß sowohl die Verschiebungskomponenten u_1^{ei} als auch deren Variationen δu_1^{ej} diskrete Knotenwerte und somit unabhängig vom Ort ξ_1 sind. Aus diesem Grund ist es möglich, die Verschiebungsfreiheitsgrade aus dem Integral zu nehmen. Alternativ kann Gleichung (55) mit der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ (Gleichungen (50) und (52)) in Matrixnotation formuliert werden.

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{\text{int}}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) \\ N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^2(\xi_1) \\ N_{;1}^2(\xi_1) N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) N_{;1}^2(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

Da die Ansatzfunktionen $N^i(\xi)$ linear sind folgt daraus, daß die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_{;1}^i = \pm 1/2$ konstant sind (vgl. Gleichungen (42)). Aus diesem Grund muß in Gleichung

(56) das Integral lediglich über das Linienelement $d\xi_1$ mit $\int_{-1}^1 d\xi_1 = 2$ gebildet werden.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{W}_{\text{int}}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1 & N_{;1}^1 & N_{;1}^1 & N_{;1}^2 \\ N_{;1}^2 & N_{;1}^1 & N_{;1}^2 & N_{;1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{u}^e} \cdot \underbrace{\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^e}\end{aligned}\quad (57)$$

Die Matrix \mathbf{k}^e ist die Elementsteifigkeitsmatrix bezüglich des Koordinatensystems e_i und dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}^e . Damit kann die approximierte innere virtuelle Arbeit mit dem Elementverschiebungsvektor, der Variation des Elementverschiebungsvektors und der Elementsteifigkeitsmatrix berechnet werden.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e \quad \mathbf{k}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Es soll an dieser Stelle nochmals bemerkt werden, daß die Integration zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e lediglich über konstante Koeffizienten in ξ_1 durchgeführt werden mußte.

Alternativ zu obiger Vorgehensweise der Entwicklung der diskreten inneren virtuellen Arbeit soll nun der B-Operator (Gleichung (51)) zur Berechnung der approximierten virtuellen Arbeit verwendet werden. Der Differentialoperator \mathbf{B} , zur Substitution der approximierten Verzerrungen und deren Variation (Gleichungen (50) und (52)) mit dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}^e beziehungsweise dessen Variation $\delta \mathbf{u}^e$, in Gleichung (54) eingesetzt ergibt:

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}}^e = \int_{-1}^1 (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e) \cdot EA (\mathbf{B} \mathbf{u}^e) \frac{L}{2} d\xi_1 = \int_{-1}^1 \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} \mathbf{u}^e |\mathbf{J}| d\xi_1 \quad (59)$$

Wie oben können auch hier der Elementverschiebungsvektor und dessen Variation aus dem Integral genommen werden. Wird nun noch der Term EA als verallgemeinerte 'Materialsteifigkeitsmatrix' interpretiert, erhält man aus Gleichung (59) eine für die Finite Elemente Methode typische Formulierung der inneren virtuellen Arbeit.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e \quad (60)$$

Selbstverständlich ergibt die Integration von Gleichung (60) ebenfalls die approximierte innere virtuelle Arbeit nach Gleichung (58). Der Vorteil der Gleichung (60) liegt in ihrer standardisierten Berechnungsvorschrift der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e , die sich in generalisierter Form auch bei der Formulierung von zwei- und dreidimensionalen finiten Elementen wiederfinden wird.

3.3.6 Approximierte äußere virtuelle Arbeit

Die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten lässt sich nach Gleichung (18) als Funktion der vorgeschriebenen Knotenlasten N_1^i und der vorgeschriftenen Streckenlast $p_1(\xi_1)$ angeben

$$\delta W_{\text{ext}}^e = \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^{e1} \\ N_1^{e2} \end{bmatrix} + \int_{-1}^1 \delta u_1(\xi_1) p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 \quad (61)$$

Ist die Streckenlast p_1 als Funktion der physikalischen Koordinaten gegeben, so muß diese auf natürliche Koordinaten transformiert werden. Nach Gleichung (61) ist hierzu lediglich die Variation der Verschiebungen nach Gleichung (44) zu approximieren.

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W}_{\text{ext}}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^{e1} \\ N_1^{e2} \end{bmatrix} + \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^2 \delta u_1^{ei} N^i(\xi_1) \right) p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^{e1} \\ N_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_n^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) \\ N^2(\xi_1) \end{bmatrix} p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1}_{\mathbf{r}_p^e} \end{aligned} \quad (62)$$

In Gleichung (62) wurden der Lastvektor der Knotenlasten \mathbf{r}_n^e und der konsistente Elementlastvektor \mathbf{r}_p^e definiert.

$$\mathbf{r}_p^e = \begin{bmatrix} r_p^{e1} \\ r_p^{e2} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) \\ N^2(\xi_1) \end{bmatrix} p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi_1) p_1(\xi_1) |\mathbf{J}| d\xi_1 \quad (63)$$

Die Elementknotenlasten \mathbf{r}_n^e und die konsistenten Elementlasten \mathbf{r}_p^e im Elementlastvektor \mathbf{r}^e liefern schließlich die virtuelle Arbeit der externen Lasten.

$$\delta \tilde{W}_{\text{ext}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}_n^e + \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}_p^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}^e \quad (64)$$

Für den Sonderfall einer konstanten Streckenlast repräsentiert der konsistente Elementlastvektor

$$\mathbf{r}_p^e = \begin{bmatrix} r_p^{e1} \\ r_p^{e2} \end{bmatrix} = \frac{p_1 L}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi_1 \\ 1 + \xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 = \frac{p_1 L}{4} \begin{bmatrix} \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_1^2 \\ \xi_1 + \frac{1}{2}\xi_1^2 \end{bmatrix}_{-1}^1 = \frac{p_1 L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

die gleichmäßig auf die Elementknoten verteilte integrale Last $L p_1$.

3.3.7 Approximierte virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in Gleichung (18) kann durch Substitution von $\delta u_1(\xi_1)$ und $\ddot{u}_1(\xi_1)$ mit den Gleichungen (44) approximiert und anschließend in Vektorform angegeben

werden.

$$\begin{aligned}
 \delta\tilde{W}_{\text{dyn}}^e &= \int_{-1}^1 \delta\tilde{u}_1 \ \ddot{\tilde{u}}_1 \ \rho A \frac{L}{2} d\xi_1 = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^2 \delta u_1^{ei} N^i(\xi_1) \right) \left(\sum_{j=1}^2 \ddot{u}_1^{ej} N^j(\xi_1) \right) \rho A \frac{L}{2} d\xi_1 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta u_1^{ei} \int_{-1}^1 N^i(\xi_1) N^j(\xi_1) \rho A \frac{L}{2} d\xi_1 \ddot{u}_1^{ej} \\
 &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho A L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) \\ N^2(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} \\ \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix} \quad (66) \\
 &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho A L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^1(\xi_1) & N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) \\ N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^2(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} \\ \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Zur Ableitung obiger Gleichung wurden eine konstante Querschnittsfläche A und eine konstante Dichte ρ angenommen. Mit der Definition der Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ nach Gleichung (43) kann $\delta\tilde{W}_{\text{dyn}}^e$ weiter entwickelt werden.

$$\begin{aligned}
 \delta\tilde{W}_{\text{dyn}}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho A L}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi_1)^2 & 1-\xi_1^2 \\ 1-\xi_1^2 & (1+\xi_1)^2 \end{bmatrix} d\xi_1 \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} \\ \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} \\ \delta u_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{u}^e} \underbrace{\frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} \\ \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}^e} \quad (67)
 \end{aligned}$$

Im Vergleich zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrix in Gleichung (57) mußten zur Integration der Elementmassenmatrix \mathbf{m}^e in Gleichung (67) quadratische Terme in ξ_1 integriert werden, wohingegen die Integranden der Elementsteifigkeitsmatrix konstant waren.

Werden der Elementbeschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{u}}^e$ und die Elementmassenmatrix \mathbf{m}^e definiert, erhält man aus Gleichung (67) die approximierte virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte.

$$\delta\tilde{W}_{\text{dyn}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{u}}^e \quad \mathbf{m}^e = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} \\ \ddot{u}_1^{e2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Die Masse des Stabelements ist mit dem Produkt der Dichte, der Querschnittsfläche und der Stablänge zu berechnen. Die Summe der Komponenten der Massenmatrix ergibt die Masse des Stabelements.

$$m = \rho A L \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m^{eij} = \rho A L = m \quad (69)$$

Alternativ zur Herleitung der Gleichung (68) kann die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in

generalisierter Form mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi)$ angegeben werden.

$$\delta \tilde{W}_{\text{dyn}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho A |\mathbf{J}| d\xi_1 \ddot{\mathbf{u}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{u}}^e \quad (70)$$

Die Äquivalenz der Gleichungen (68) und (70) kann durch Einsetzen der Matrix der Ansatzfunktionen, der JACOBI Determinante und Integration über ξ_1 gezeigt werden.

3.4 Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen

Nach den vorangehenden Abschnitten können die Elementvektoren und -matrizen des dreiknotigen Stabelements mit quadratischen Verschiebungsansätzen hergeleitet werden. Das Stabelement und die quadratischen LAGRANGE Ansatzpolynome sind in Abbildung 21 visualisiert.

3.4.1 Quadratische Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktionen des quadratischen Stabelements werden aus dem allgemeinen LAGRANGE'schen Ansatzpolynom in Gleichung (34) für den Polynomgrad $p = 2$ abgeleitet (vgl. Tabelle 2) und in der (1×3) Matrix der Ansatzfunktionen zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} N^1(\xi_1) &= \frac{1}{2} (\xi_1 - 1) \xi_1 \\ N^2(\xi_1) &= (1 - \xi_1) (1 + \xi_1) = 1 - \xi_1^2 & \mathbf{N}(\xi_1) = \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^3(\xi_1) \end{bmatrix} \\ N^3(\xi_1) &= \frac{1}{2} (\xi_1 + 1) \xi_1 \end{aligned} \quad (71)$$

3.4.2 Approximation der Koordinaten

Nach dem isoparametrischen Elementkonzept wird die physikalische Koordinate X_1 mit den Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ und Positionen der Elementknoten im physikalischen Raum X_1^i berechnet (vgl. Gleichung (45)).

$$\begin{aligned} X_1(\xi_1) \approx \tilde{X}_1(\xi_1) &= \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{X}^e = \sum_{i=1}^3 X_1^{ei} N^i(\xi_1) \\ &= -\frac{L}{2} \frac{\xi_1 - 1}{2} \xi_1 + 0(1 - \xi_1^2) + \frac{L}{2} \frac{\xi_1 + 1}{2} \xi_1 = \frac{L}{2} \xi_1 \\ &= \frac{L}{4} (-\xi_1^2 + \xi_1 + \xi_1^2 + \xi_1) = \frac{L}{2} \xi_1 \end{aligned} \quad (72)$$

Damit ist auch die JACOBI Matrix bestimmt. Die JACOBI Matrix/Determinante ist der JACOBI Matrix/Determinante des linearen Stabelements in Gleichung (27) beziehungsweise (46) identisch.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \xi_1} = \frac{L}{2} \quad (73)$$

3.4.3 Approximation der Variablen

Die Verschiebung, die Variation der Verschiebung und die Beschleunigung können mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ und entsprechender Elementvektoren \mathbf{u}^e , $\delta\mathbf{u}^e$ und $\ddot{\mathbf{u}}^e$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1) &\approx \tilde{u}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{u}^e & \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} u_1^{e1} & u_1^{e2} & u_1^{e3} \end{bmatrix}^T \\ \delta u_1(\xi_1) &\approx \delta \tilde{u}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \delta \mathbf{u}^e & \delta \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} & \delta u_1^{e2} & \delta u_1^{e3} \end{bmatrix}^T \\ \ddot{u}_1(\xi_1) &\approx \tilde{\ddot{u}}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \ddot{\mathbf{u}}^e & \ddot{\mathbf{u}}^e &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} & \ddot{u}_1^{e2} & \ddot{u}_1^{e3} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (74)$$

3.4.4 Elementsteifigkeitsmatrix

Zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrix nach Gleichung (60) ist die Formulierung des Differentialoperators $\mathbf{B}(\xi_1)$ durch Erweiterung der Gleichung (51) um den Freiheitsgrad des zusätzlichen Elementknotens notwendig.

$$\mathbf{B}(\xi_1) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) & N_{;1}^3(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_{;1}^i(\xi_1)$ sind linear in ξ_1 .

$$\begin{aligned} N_{;1}^1(\xi_1) &= \xi_1 - \frac{1}{2} \\ N_{;1}^2(\xi_1) &= -2 \xi_1 \\ N_{;1}^3(\xi_1) &= \xi_1 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (76)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (75) und (76) in die Gleichung (60). Im Gegensatz zur Integration des linearen Stabelements ist hier der B-Operator eine Funktion von ξ_1 und kann folglich nicht aus dem Integral genommen werden. Es sind Integrationen von Polynomen zweiten Grads notwendig.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 = \frac{E A L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\xi_1 = \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{;1}^T \mathbf{N}_{;1} d\xi_1 \\ &= \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{;1}^1 N_{;1}^1 & N_{;1}^1 N_{;1}^2 & N_{;1}^1 N_{;1}^3 \\ N_{;1}^2 N_{;1}^1 & N_{;1}^2 N_{;1}^2 & N_{;1}^2 N_{;1}^3 \\ N_{;1}^3 N_{;1}^1 & N_{;1}^3 N_{;1}^2 & N_{;1}^3 N_{;1}^3 \end{bmatrix} d\xi_1 \\ &= \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \xi_1 + \xi_1^2 & \xi_1 - 2\xi_1^2 & -\frac{1}{4} + \xi_1^2 \\ 4\xi_1^2 & -\xi_1 - 2\xi_1^2 & \frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_1^2 \\ \text{sym} & & \end{bmatrix} d\xi_1 \end{aligned} \quad (77)$$

Die Integration über die natürliche Koordinate $\xi_1 \in [-1, 1]$ ergibt die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e des quadratischen dreiknotigen Stabelements.

$$\mathbf{k}^e = \frac{E A}{3 L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ & 16 & -8 \\ \text{sym} & & 7 \end{bmatrix} \quad (78)$$

3.4.5 Konsistenter Elementlastvektor

Der konsistente Elementlastvektor \mathbf{r}_p^e wird durch Einsetzen der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ nach Gleichung (71) in Gleichung (63) generiert.

$$\mathbf{r}_p^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi_1) p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\xi_1 - 1) & \xi_1 \\ 2 & (1 - \xi_1^2) \\ (\xi_1 + 1) & \xi_1 \end{bmatrix} p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 \quad (79)$$

Im Sonderfall einer konstanten Streckenlast p_1 erhält man den konsistenten Elementlastvektor

$$\mathbf{r}_p^e = \frac{p_1 L}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\xi_1 - 1) & \xi_1 \\ 2 & (1 - \xi_1^2) \\ (\xi_1 + 1) & \xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 = \frac{p_1 L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

in dem der wesentliche Anteil von $2/3$ der integrierten verteilten Last p_1 am Mittelknoten 2 des Stabelements aufgebracht wird.

3.4.6 Elementmassenmatrix

Die Elementmassenmatrix \mathbf{m}^e des quadratischen Stabelements geht aus der Substitution der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ nach Gleichung (71) in Gleichung (70) hervor.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}^e &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho A |\mathbf{J}| d\xi_1 \\
 &= \frac{\rho A L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) \\ N^2(\xi_1) \\ N^3(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^3(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \\
 &= \frac{\rho A L}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\xi_1 - 1) & \xi_1 \\ 2(1 - \xi_1^2) & \\ (\xi_1 + 1) & \xi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\xi_1 - 1) & \xi_1 & 2(1 - \xi_1^2) & (\xi_1 + 1) & \xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 \\
 &= \frac{\rho A L}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \xi_1^2 - 2\xi_1^3 + \xi_1^4 & 2(-\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_1^3 - \xi_1^4) & -\xi_1^2 + \xi_1^4 \\ & 4(1 - 2\xi_1^2 + \xi_1^4) & 2(\xi_1 + \xi_1^2 - \xi_1^3 - \xi_1^4) \\ \text{sym} & & \xi_1^2 + 2\xi_1^3 + \xi_1^4 \end{bmatrix} d\xi_1
 \end{aligned} \tag{81}$$

Die Integration der Polynome vierten Grads in Gleichung (81) liefert die Elementmassenmatrix des quadratischen dreiknotigen Stabelements.

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho A L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ \text{sym} & & 4 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Analog zu Gleichung (69) liefert die Summation der Komponenten der Massenmatrix die Masse des Stabs.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m^{eij} = \rho A l = m \tag{83}$$

3.5 Stabelement mit kubischen Ansatzfunktionen

Das zu betrachtende kubische Stabelement soll vier Knoten besitzen und von der Länge L sein. Die Knoten werden so gewählt, daß drei Bereiche der Länge $L/3$ entstehen. Die Koordinaten X_1 und ξ_1 haben ihren Ursprung in der Stabmitte. Wie bereits anhand des quadratischen Stabelements in Kapitel 3.4 demonstriert, können die Elementvektoren und -matrizen des vierknotigen Stabelements mit kubischen Verschiebungsansätzen analog hergeleitet werden.

3.5.1 Kubische Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktionen des kubischen Stabelements werden aus dem allgemeinen LAGRANGE'schen Ansatzpolynom in Gleichung (34) für den Polynomgrad $p = 3$ abgeleitet (vgl. Tabelle 2).

$$\begin{aligned}
 N^1(\xi_1) &= -\frac{9}{16} (\xi_1 - 1) (\xi_1 - \frac{1}{3}) (\xi_1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{16} (-9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 + \xi_1 - 1) \\
 N^2(\xi_1) &= \frac{27}{16} (\xi_1 + 1) (\xi_1 - 1) (\xi_1 - \frac{1}{3}) = \frac{9}{16} (3 \xi_1^3 - \xi_1^2 - 3 \xi_1 + 1) \\
 N^3(\xi_1) &= -\frac{27}{16} (\xi_1 + 1) (\xi_1 - 1) (\xi_1 + \frac{1}{3}) = \frac{9}{16} (-3 \xi_1^3 - \xi_1^2 + 3 \xi_1 + 1) \\
 N^4(\xi_1) &= \frac{9}{16} (\xi_1 + 1) (\xi_1 - \frac{1}{3}) (\xi_1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{16} (9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 - \xi_1 - 1)
 \end{aligned} \tag{84}$$

Die Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ können wie gewöhnlich in der (1×4) Ansatzmatrix $\mathbf{N}(\xi_1)$ zusammengefaßt werden.

$$\mathbf{N}(\xi_1) = \left[\begin{array}{cccc} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^3(\xi_1) & N^4(\xi_1) \end{array} \right] \tag{85}$$

3.5.2 Approximation der Koordinaten

Nach dem isoparametrischen Konzept wird die physikalische Koordinate X_1 mit den Ansatzfunktionen $N^i(\xi_1)$ und den Positionen der Elementknoten X_1^i berechnet (vgl. Gleichung (45)).

$$\begin{aligned}
 X_1(\xi_1) \approx \tilde{X}_1(\xi_1) &= \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{X}^e = \sum_{i=1}^4 X_1^{ei} N^i(\xi_1) \\
 &= -\frac{L}{2} \frac{1}{16} (-9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 + \xi_1 - 1) - \frac{L}{6} \frac{9}{16} (3 \xi_1^3 - \xi_1^2 - 3 \xi_1 + 1) \\
 &\quad + \frac{L}{6} \frac{9}{16} (-3 \xi_1^3 - \xi_1^2 + 3 \xi_1 + 1) + \frac{L}{2} \frac{1}{16} (9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 - \xi_1 - 1) = \frac{L}{2} \xi_1 \\
 &= \frac{L}{16} (9 \xi_1^3 - \xi_1 - 9 \xi_1^3 + 9 \xi_1) = \frac{L}{2} \xi_1
 \end{aligned} \tag{86}$$

Damit ist auch die JACOBI Matrix bestimmt. Die JACOBI Matrix/Determinante ist der JACOBI Matrix/Determinante des linearen Stabelements in Gleichung (27) beziehungsweise (46) identisch, wenn die Elementknoten wie vorausgesetzt an den Stellen $X_1^{e1} = -\frac{L}{2}$, $X_1^{e2} = -\frac{L}{6}$, $X_1^{e3} = \frac{L}{6}$ und $X_1^{e4} = \frac{L}{2}$ positioniert sind.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \xi_1} = \frac{L}{2} \tag{87}$$

3.5.3 Approximation der Variablen

Die Verschiebung, die Variation der Verschiebung und die Beschleunigung können mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ und entsprechender Elementvektoren \mathbf{u}^e , $\delta \mathbf{u}^e$ und $\ddot{\mathbf{u}}^e$

bestimmt werden.

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1) &\approx \tilde{u}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{u}^e & \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} u_1^{e1} & u_1^{e2} & u_1^{e3} & u_1^{e4} \end{bmatrix}^T \\ \delta u_1(\xi_1) &\approx \delta \tilde{u}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \delta \mathbf{u}^e & \delta \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} & \delta u_1^{e2} & \delta u_1^{e3} & \delta u_1^{e4} \end{bmatrix}^T \\ \ddot{u}_1(\xi_1) &\approx \tilde{\ddot{u}}_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \ddot{\mathbf{u}}^e & \ddot{\mathbf{u}}^e &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} & \ddot{u}_1^{e2} & \ddot{u}_1^{e3} & \ddot{u}_1^{e4} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (88)$$

3.5.4 Elementsteifigkeitsmatrix

Zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrix nach Gleichung (60) ist die Reformulierung des Differential Operators $\mathbf{B}(\xi_1)$ durch Erweiterung der Gleichung (51) um die zwei zusätzlichen Freiheitsgrade nötig.

$$\mathbf{B}(\xi_1) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} N_{;1}^1(\xi_1) & N_{;1}^2(\xi_1) & N_{;1}^3(\xi_1) & N_{;1}^4(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (89)$$

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_{;1}^i(\xi_1)$ sind quadratisch in ξ_1 .

$$\begin{aligned} N_{;1}^1(\xi_1) &= \frac{1}{16} (-27 \xi_1^2 + 18 \xi_1 + 1) & N_{;1}^3(\xi_1) &= \frac{9}{16} (-9 \xi_1^2 - 2 \xi_1 + 3) \\ N_{;1}^2(\xi_1) &= \frac{9}{16} (9 \xi_1^2 - 2 \xi_1 - 3) & N_{;1}^4(\xi_1) &= \frac{1}{16} (27 \xi_1^2 + 18 \xi_1 - 1) \end{aligned} \quad (90)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (89) und (90) in die Gleichung (60). Wie bereits bei der Integration des quadratischen Stabelements ist auch hier der B-Operator eine Funktion von ξ_1 . Es sind Integrationen von Polynomen vierten Grades notwendig.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 = \frac{E A L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\xi_1 = \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{;1}^T \mathbf{N}_{;1} d\xi_1 \\ &= \frac{2 E A}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{;1}^1 N_{;1}^1 & N_{;1}^1 N_{;1}^2 & N_{;1}^1 N_{;1}^3 & N_{;1}^1 N_{;1}^4 \\ N_{;1}^2 N_{;1}^1 & N_{;1}^2 N_{;1}^2 & N_{;1}^2 N_{;1}^3 & N_{;1}^2 N_{;1}^4 \\ N_{;1}^3 N_{;1}^1 & N_{;1}^3 N_{;1}^2 & N_{;1}^3 N_{;1}^3 & N_{;1}^3 N_{;1}^4 \\ N_{;1}^4 N_{;1}^1 & N_{;1}^4 N_{;1}^2 & N_{;1}^4 N_{;1}^3 & N_{;1}^4 N_{;1}^4 \end{bmatrix} d\xi_1 \end{aligned} \quad (91)$$

Ausgewählte Die Komponenten obiger Gleichung sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^1(\xi_1) &= \frac{1}{256} (729 \xi_1^4 - 972 \xi_1^3 + 270 \xi_1^2 + 36 \xi_1 + 1) \\
 N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^2(\xi_1) &= \frac{1}{256} (-2187 \xi_1^4 + 1944 \xi_1^3 + 486 \xi_1^2 - 504 \xi_1 - 27) \\
 N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^3(\xi_1) &= \frac{1}{256} (2187 \xi_1^4 - 972 \xi_1^3 - 1134 \xi_1^2 + 468 \xi_1 + 27) \\
 N_{;1}^1(\xi_1) N_{;1}^4(\xi_1) &= \frac{1}{256} (-729 \xi_1^4 + 378 \xi_1^2 - \xi_1) \\
 N_{;1}^2(\xi_1) N_{;1}^2(\xi_1) &= \frac{1}{256} (6561 \xi_1^4 - 2916 \xi_1^3 - 4050 \xi_1^2 + 972 \xi_1 + 729)
 \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
 N_{;1}^2(\xi_1) N_{;1}^3(\xi_1) &= \frac{1}{256} (-6561 \xi_1^4 + 4698 \xi_1^2 - 729) \\
 N_{;1}^2(\xi_1) N_{;1}^4(\xi_1) &= \frac{1}{256} (2187 \xi_1^4 + 972 \xi_1^3 - 1134 \xi_1^2 - 468 \xi_1 + 27) \\
 N_{;1}^3(\xi_1) N_{;1}^3(\xi_1) &= \frac{1}{256} (6561 \xi_1^4 + 2916 \xi_1^3 - 4050 \xi_1^2 - 972 \xi_1 + 729) \\
 N_{;1}^3(\xi_1) N_{;1}^4(\xi_1) &= \frac{1}{256} (-2187 \xi_1^4 - 1944 \xi_1^3 + 486 \xi_1^2 + 504 \xi_1 - 27) \\
 N_{;1}^4(\xi_1) N_{;1}^4(\xi_1) &= \frac{1}{256} (729 \xi_1^4 - 972 \xi_1^3 + 270 \xi_1^2 + 36 \xi_1 + 1)
 \end{aligned} \tag{92}$$

Die Integration der in Gleichung (92) angegebenen Polynome und der nach Gleichung (91) entsprechend ergänzten Terme über der Stablängsachse ergibt die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e des kubischen vierknotigen Stabelements.

$$\mathbf{k}^e = \frac{E A}{40 L} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ & 432 & -297 & 54 \\ & & 432 & -189 \\ \text{sym} & & & 148 \end{bmatrix} \tag{93}$$

3.5.5 Konsistenter Elementlastvektor

Der konsistente Elementlastvektor \mathbf{r}_p^e wird durch Einsetzen der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ nach Gleichung (84) in Gleichung (63) generiert.

$$\mathbf{r}_p^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi_1) p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 + \xi_1 - 1 \\ 27 \xi_1^3 - 9 \xi_1^2 - 27 \xi_1 + 9 \\ -27 \xi_1^3 - 9 \xi_1^2 + 27 \xi_1 + 9 \\ 9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 - \xi_1 - 1 \end{bmatrix} p_1(\xi_1) \frac{L}{2} d\xi_1 \quad (94)$$

Im Sonderfall der konstanten Streckenlast p_1 erhält man den konsistenten Elementlastvektor

$$\mathbf{r}_p^e = \frac{p_1 L}{32} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 + \xi_1 - 1 \\ 27 \xi_1^3 - 9 \xi_1^2 - 27 \xi_1 + 9 \\ -27 \xi_1^3 - 9 \xi_1^2 + 27 \xi_1 + 9 \\ 9 \xi_1^3 + 9 \xi_1^2 - \xi_1 - 1 \end{bmatrix} d\xi_1 = \frac{p_1 L}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

in dem die wesentlichen Anteile von $3/8$ der integrierten verteilten Last $L p_1$ an den Mittelknoten 2 und 3 des Stabs aufgebracht werden.

3.5.6 Elementmassenmatrix

Die Elementmassenmatrix \mathbf{m}^e des kubischen Stabelements geht aus der Substitution der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\xi_1)$ nach Gleichung (84) in Gleichung (70) hervor.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^e &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho A |\mathbf{J}| d\xi_1 \\ &= \frac{\rho A l}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) \\ N^2(\xi_1) \\ N^3(\xi_1) \\ N^4(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^1(\xi_1) & N^2(\xi_1) & N^3(\xi_1) & N^4(\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 \\ &= \frac{\rho A L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^1 N^1 & N^1 N^2 & N^1 N^3 & N^1 N^4 \\ N^2 N^1 & N^2 N^2 & N^2 N^3 & N^2 N^4 \\ N^3 N^1 & N^3 N^2 & N^3 N^3 & N^3 N^4 \\ N^4 N^1 & N^4 N^2 & N^4 N^3 & N^4 N^4 \end{bmatrix} d\xi_1 \end{aligned} \quad (96)$$

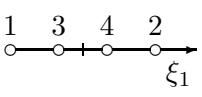
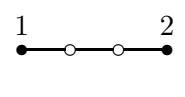
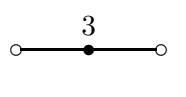
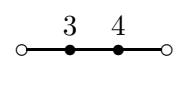
			
$N^1(\xi_1)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi_1)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)$	$\frac{1}{16}(1 - 9\xi_1)(\xi_1^2 - 1)$
$N^2(\xi_1)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi_1)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)$	$\frac{1}{16}(1 + 9\xi_1)(\xi_1^2 - 1)$
$N^3(\xi_1)$		$(1 - \xi_1^2)$	$\frac{1}{16}(7 + 27\xi_1)(\xi_1^2 - 1)$
$N^4(\xi_1)$			$\frac{9}{16}(1 + \xi_1)(\xi_1^2 - \frac{1}{9})$

Tabelle 3: Hierarchische Ansatzfunktionen zwei-, drei und vierknotiger Stabelemente

Exemplarisch wird hier die Berechnung der Komponente

$$N^1(\xi_1) N^1(\xi_1) = 81 \xi_1^6 - 162 \xi_1^5 + 63 \xi_1^4 + 36 \xi_1^3 - 17 \xi_1^2 - 2 \xi_1 + 1 \quad (97)$$

der zu integrierenden Matrix demonstriert. Die über der Stablängsachse zu integrierenden Terme sind Polynome sechsten Grades. Die Ausführung der Integration in Gleichung (96) liefert die Elementmassenmatrix des kubischen vierknotigen Stabelements.

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho A L}{2000} \begin{bmatrix} 152 & 118 & -43 & 23 \\ & 771 & -96 & -43 \\ & & 771 & 118 \\ \text{sym} & & & 152 \end{bmatrix} \quad (98)$$

3.6 Stabelemente auf Basis hierarchisch generierter Ansatzfunktionen

Alternativ zur separaten Definition der Ansatzfunktionen zwei-, drei und vierknotiger oder linearer, quadratischer und kubischer Stabelemente, wie sie bereits in Tabelle 2 dargestellt wurden, ist es möglich, diese, ausgehend vom linearen Stabelement durch Ergänzung und Modifikation der Ansatzfunktionen hierarchisch zu generieren. Tabelle 3 zeigt die hierarchische Generierung der Ansatzfunktionen isoparametrischer Stabelemente des Ansatzpolynomgrads eins bis drei. Zum Vergleich der Ansatzfunktionen nach den Tabellen 2 und 3 ist die dem hierarchischen Elementkonzept angepaßte Knotennumerierung in Tabelle 3 zu beachten. Die Strategie zur Generierung hierarchischer Ansatzfunktionen soll hier am Beispiel der Ansatzfunktion $N^1(\xi_1)$ des vierknotigen Stabelements auf Basis der Ansatzfunktion des zweiknotigen Elements erläutert werden. Im ersten Schritt wird die lineare Ansatzfunktion des zweiknotigen Elements um einen quadratischen Term zur Ansatzfunktion des dreiknotigen Stabelements erweitert (vgl. Tabelle 2). Die Ergänzung mit einem kubischen Term im zweiten Schritt liefert schließlich die Ansatzfunktion

des vierknotigen Stabelements.

$$\begin{aligned}
 N^1(\xi_1) &= \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \xi_1)}_{\text{2-knotig}} - \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)}_{\text{quadratisch}} + \underbrace{\frac{1}{16}(1 - 9\xi_1)(\xi_1^2 - 1)}_{\text{kubisch}} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \xi_1)\xi_1}_{\text{3-knotig}} + \frac{1}{16}(1 - 9\xi_1)(\xi_1^2 - 1) \\
 &= \frac{1}{16}(-9\xi_1^3 + 9\xi_1^2 + \xi_1 - 1) = \underbrace{\frac{9}{16}(1 - \xi_1)(\xi_1^2 - \frac{1}{9})}_{\text{4-knotig}}
 \end{aligned} \tag{99}$$

Wegen der einfachen Generierung der Ansatzfunktionen mit dem in den vorangehenden Kapitel behandelten klassischen Konzept ist im Rahmen der Entwicklung eindimensionaler finiter Elemente das hierarchische Konzept von untergeordneter Bedeutung. Erst bei der Entwicklung verschiedener mehrdimensionaler finiter Elemente wird sich die hierarchische Generierung der Ansatzfunktionen als sehr variabel und damit als vorteilhaft erweisen.

3.7 Numerische Integration

Die Integration der Komponenten der Elementsteifigkeitsmatrix, der Elementmassenmatrix und des konsistenten Elementlastvektors wurde in den vorangehenden Kapiteln 3.3.5 bis 3.6 analytisch durchgeführt. Um bei der Entwicklung komplexerer finiter Elemente über ein adäquates Werkzeug zur Integration analytisch nicht oder nur sehr schwer integrierbarer Elementgrößen zu verfügen, wird am Beispiel des Fachwerkstabs die numerische Integration eingeführt und untersucht. Durch die numerische Integration ist es möglich, beliebige Funktionen approximativ zu integrieren. Die wesentlichen Vorteile der numerischen Integration sind im folgenden zusammengestellt:

- Vereinfachung der Integration
- Integration analytisch nicht integrierbarer Funktionen
- Selektive Unterintegration zur Behebung von Defekten der Elementformulierung

Diesen Vorteilen stehen allerdings auch Nachteile gegenüber:

- Die Generierung der Elementmatrizen und -vektoren ist numerisch aufwendig
- Die Elementmatrizen und -vektoren werden inexakt integriert⁴

Im Rahmen der Finite Element Methoden hat sich die sogenannte Gauß-Legendre Quadratur etabliert. Die GAUSS-LEGENDRE Quadratur einer Funktion $f(\xi_1)$ über dem Parameterraum $\xi_1 \in [-1, 1]$ ist durch die Summe

$$\int_{-1}^1 f(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha^i f(\xi_1^i) \tag{100}$$

⁴Dies kann für einige finite Elemente auch ein Vorteil sein, siehe selektive Unterintegration

n	$2n - 1$	$f(\xi_1)$	ξ_1^i	α^i
1	1		$\xi_1^1 = 0$	$\alpha^1 = 2$
2	3		$\xi_1^1 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_1^2 = 1/\sqrt{3}$	$\alpha^1 = 1$ $\alpha^2 = 1$
3	5		$\xi_1^1 = -\sqrt{3}/5$ $\xi_1^2 = 0$ $\xi_1^3 = \sqrt{3}/5$	$\alpha^1 = 5/9$ $\alpha^2 = 8/9$ $\alpha^3 = 5/9$
4	7		$\xi_1^{1,4} = \mp 0.86114$ $\xi_1^{2,3} = \mp 0.33998$	$\alpha^{1,4} = 0.34785$ $\alpha^{2,3} = 0.65241$

Tabelle 4: GAUSS Punkte ξ_1^i und Wichtungsfaktoren α^i der GAUSS-LEGENDRE Quadratur

gegeben. In Gleichung (100) sind α^i die Wichtungsfaktoren zu den Funktionswerten f an den Stützstellen ξ_1^i und n die Anzahl der Integrationspunkte oder sogenannten Gauß Punkte. Mit der GAUSS-LEGENDRE Quadratur können Polynome des Polynomgrads

$$p \leq 2n - 1 \quad n \geq \frac{1}{2}[p + 1] \quad (101)$$

exakt, höherwertige Polynome und andere Funktionen approximativ integriert werden. Das lineare, das quadratische und das kubische Stabelement werden in diesem Abschnitt mit der GAUSS-LEGENDRE Integration mit einer und zwei Stützstellen entwickelt. Eine Zusammenstellung von ξ_1^i und α^i für $n = 1, 2, 3$ findet sich in Tabelle 4. Zur Darstellung von Grundlagen der numerischen Integration und der Ermittlung der Wichtungsfaktoren α^i sowie der GAUSS Punkte ξ_1^i sei auf die Literatur der numerischen Mathematik, z.B. DEUFLHARD & HOHMANN [20], verwiesen.

3.7.1 Numerische Integration des linearen Stabelements

Sollen alle Elementgrößen (\mathbf{k}^e , \mathbf{r}_p^e , \mathbf{m}^e) des Stabelements numerisch integriert werden, so sind die Anforderungen der Integranten zu differenzieren. Ist die numerisch exakte Lösung aller Elementgrößen gefordert, sind mindestens die in Tabelle 5 zusammengefaßten GAUSS-LEGENDRE Quadraturen zu verwenden. Häufig wird die Integrationsordnung an die Bedürfnisse der Integration der Elementsteifigkeitsmatrix angepaßt, was zur Folge hat, daß die Massenmatrix inexakt und der konsistente Lastvektor nur in Sonderfällen exakt integriert werden.

Zur exakten Integration der Steifigkeitsmatrix des linearen Stabelements mit der GAUSS-LEGENDRE Quadratur genügt es nach den Gleichungen (42) und (56), eine Ein-Punkt-Integration durchzuführen, da nach Gleichung (101) mit $n = 1$ eine lineare Funktion exakt integriert werden kann.

Bei der Generierung des Vektors der konsistenten Knotenlasten ist die exakte Integration mit der Ein-Punkt-GAUSS-LEGENDRE-Integration nach den Gleichungen (43) und (63) nur für eine konstante Streckenlast p_1 möglich. Bei Applikation höherwertiger Funktionen $p_1(\xi_1)$ wird der konsistente Lastvektor inexakt integriert. Zur exakten Integration muß die Anzahl der GAUSS Punkte

Elementgröße		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
Steifigkeitsmatrix	\mathbf{k}^e	1	2	3
Lastvektor	\mathbf{r}_p^e $p_1(\xi_1)$: konstant	1	2	2
	\mathbf{r}_p^e $p_1(\xi_1)$: linear	2	2	3
	\mathbf{r}_p^e $p_1(\xi_1)$: quadratisch	2	3	3
	\mathbf{r}_p^e $p_1(\xi_1)$: kubisch	3	3	4
Massenmatrix	\mathbf{m}^e	2	3	4

Tabelle 5: Notwendige Anzahl von GAUSS Punkten n zur exakten GAUSS-LEGENDRE Quadratur von Elementgrößen von linearen, quadratischen und kubischen Stabelementen

an den Polynomgrad der Lastfunktion angepaßt (Gleichung (101)) werden. Lastfunktionen, die nicht durch ein Polynom abgebildet werden können, werden in jedem Fall nur näherungsweise integriert.

Nach Gleichung (67) sind zur exakten Integration der Elementmassenmatrix quadratische Funktionen zu integrieren, was nach Gleichung (101) eine Zwei-Punkt-GAUSS-LEGENDRE-Integration erfordert. Eine in Äquivalenz zur Steifigkeitsmatrix durchgeführte Ein-Punkt-GAUSS-LEGENDRE-Integration resultiert in einer inexakten Integration der Massenmatrix.

3.7.2 Numerische Integration höherwertiger Stabelemente

Um die zur exakten Integration der Elementgrößen (\mathbf{k}^e , \mathbf{r}_p^e , \mathbf{m}^e) des quadratischen Stabelements notwendige Integrationsordnung zu bestimmen, werden die Generierung der Steifigkeitsmatrix, der Massenmatrix und der Vektor der Elementlasten betrachtet und die Erfüllung der Gleichung (101) überprüft. Hieraus ergeben sich die in Tabelle 5 zusammengefaßten Mindestanforderungen für eine exakte GAUSS-LEGENDRE Integration des quadratischen Stabelements. Die entsprechenden Stützstellen der Funktionsauswertung und die Wichtungsfaktoren der GAUSS-LEGENDRE Quadratur finden sich in Tabelle 4.

Die Mindestanforderungen zur exakten numerischen Integration von Elementsteifigkeitsmatrix, Elementmassenmatrix und konsistentem Elementlastvektor des kubischen Stabelements sind in Tabelle 5 zusammengefaßt.

4 Ensemblierung der Struktur

Nach der Generierung der Elementgrößen aller in einem System befindlichen finiten Elemente sollen diese zu einem Ensemble geformt werden. Grundlage dieser Ensemblierung der Elemente bildet die in Gleichung (23) vorgenommene Gebietszerlegung und die Forderungen bezüglich der virtuellen Arbeiten, die in den Gleichungen (25) formuliert wurden, in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (18).

Die Generierung des Systems oder der Struktur aus finiten Elementen, die die Bauteile der Struktur darstellen, gliedert sich im wesentlichen in zwei Schritte:

- An Verbindungsstellen von Elementfreiheitsgraden zweier oder mehrerer Elemente an einem gemeinsamen Strukturknoten müssen diese kompatibel sein. Dies bedeutet, jeder Elementfreiheitsgrad benötigt bei der Ensemblierung einen adäquaten Partner des Nachbar-elements, was wiederum physikalische Äquivalenz der Freiheitsgrade und die Darstellung im selben Koordinatensystem fordert.

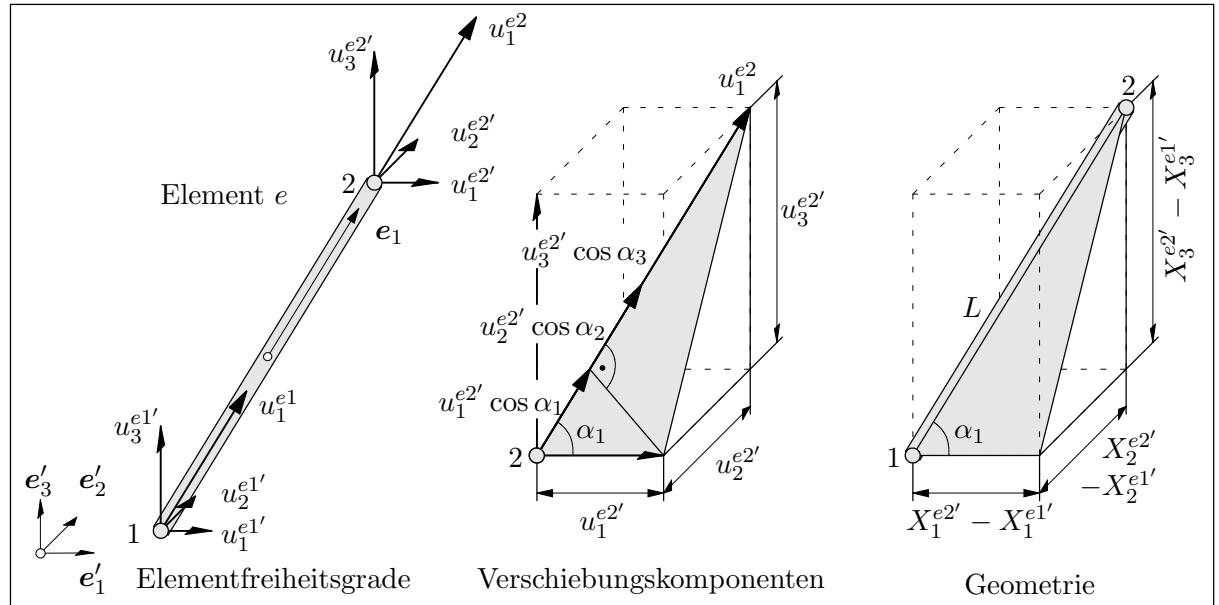


Abbildung 23: Transformation der Elementverschiebungen von lokalen auf globale Koordinaten

- Die erste Forderung ist für ein Ensemble von Stabelementen automatisch erfüllt, da bei diesen Elementen nur translatorische Verschiebungen als Freiheitsgrade auftreten.
- Die zweite Forderung wird durch die Transformation der Freiheitsgrade von Nachbar-Elementen am gemeinsamen Systemknoten auf dasselbe Koordinatensystem erfüllt.
- Benachbarte finite Elemente werden über ihre kompatiblen Elementfreiheitsgrade an gemeinsamen Strukturknoten zum System beziehungsweise zur Struktur verknüpft, indem ihre Elementfreiheitsgrade zu einem Systemfreiheitsgrad zusammengefaßt werden.

4.1 Transformation der Elementmatrizen und -vektoren

Die Transformation der Elementgrößen \mathbf{k}^e , \mathbf{r}_p^e und \mathbf{m}^e vom elementspezifischen Koordinatensystem, das durch die Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ aufgespannt wird, in ein beliebig orientiertes, durch die Basen $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ charakterisiertes, kartesisches Koordinatensystem basiert auf der Transformation des Elementverschiebungsvektors \mathbf{u}^e . Da das Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ so gewählt wurde, daß nur die Verschiebung in Richtung des Basisvektors \mathbf{e}_1 von Null verschieden ist, besteht der Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}^e lediglich aus den Komponenten u_1^{ei} für $i = 1, \dots, p+1$. Folglich enthält der Verschiebungsvektor am Elementknoten i nur eine Komponente u_1^{ei} . Der Elementverschiebungsvektor im beliebig gewählten Koordinatensystem $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ besteht hingegen aus drei Komponenten je Elementknoten i .

$$\mathbf{u}^{ei'} = \begin{bmatrix} u_1^{ei'} & u_2^{ei'} & u_3^{ei'} \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u}^{e'} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{e1'}^T & \dots & \mathbf{u}^{e(p+1)'}^T \end{bmatrix}^T \quad (102)$$

Die Transformationsbeziehung ist knotenweise anzuwenden und kann daher für den Polynomgrad $p = 1$ abgeleitet und für beliebige Polynomgrade p generalisiert werden. Abbildung 23 illustriert die Elementfreiheitsgrade in den beiden Koordinatensystemen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ und die Generierung der Elementverschiebung u_1^{e2} mit der Summe der auf die Basis \mathbf{e}_1 projizierten Verschiebungskomponenten des Vektors $\mathbf{u}^{e2'}$. Die Projektion von $u_1^{e2'}$ ist durch den Richtungscosinus $\cos \alpha_1$, der wiederum aus der Orientierung des Stabelements im Raum gewon-

nen werden kann, gegeben. Werden die weiteren Projektionen analog durchgeführt, erhält man die gesuchte Verschiebungskomponente

$$u_1^{e2} = u_1^{e2'} \cos \alpha_1 + u_2^{e2'} \cos \alpha_2 + u_3^{e2'} \cos \alpha_3 \quad (103)$$

mit den, mit der Ähnlichkeit der Geometrie von Verschiebung und Staborientierung im Raum bestimmten, Richtungscosini $\cos \alpha_j$ für $j = 1, 2, 3$.

$$\cos \alpha_j = \frac{X_j^{e2'} - X_j^{e1'}}{L} \quad L = \left\| \mathbf{X}^{e2'} - \mathbf{X}^{e1'} \right\| \quad (104)$$

Dabei wurde der Elementortsvektor in Analogie zum Elementverschiebungsvektor in Gleichung (102) definiert.

$$\mathbf{X}^{ei'} = \begin{bmatrix} X_1^{ei'} & X_2^{ei'} & X_3^{ei'} \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{X}^{e'} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{e1' T} & \dots & \mathbf{X}^{e(p+1)' T} \end{bmatrix}^T \quad (105)$$

Hier ist zu bemerken, daß die Richtungscosini nicht zwingend bezüglich der von den Basisvektoren e_1 , e_2 und e_3 aufgespannten globalen kartesischen Basis definiert sein müssen. Es genügt, ein beliebiges Koordinatensystem zu wählen, das für alle Elementknoten, die an dem betrachteten Systemknoten verknüpft werden sollen, identisch ist. In diesem Fall sind die Richtungscosini nicht nach Gleichung (104) zu berechnen, sondern explizit, mit Hilfe geometrischer Betrachtungen, vorzugeben. Diese formale Verallgemeinerung ist besonders wichtig, wenn raumschräge Lagerbedingungen oder raumschräge Symmetrieebenen berücksichtigt werden sollen. Dann werden die Freiheitsgrade des finiten Elements auf lokale Lagerkoordinaten (ein Basisvektor ist senkrecht zur Bewegungsebene eines Gleitlagers) oder auf ein Koordinatensystem mit einem Basisvektor normal zur Symmetrieebene transformiert.

Die Komponente u_1^{e1} des Elementverschiebungsvektors \mathbf{u}^e kann in Analogie zur Komponente u_1^{e2} mit Hilfe der Richtungscosini $\cos \alpha_j$ und der Komponenten $u_j^{e1'}$ des Elementverschiebungsvektors $\mathbf{u}^{e'}$ bestimmt werden.

$$u_1^{e1} = u_1^{e1'} \cos \alpha_1 + u_2^{e1'} \cos \alpha_2 + u_3^{e1'} \cos \alpha_3 \quad (106)$$

Die Gleichungen (103) und (106) werden nun in Matrizenform zusammengefaßt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{e1} \\ u_1^{e2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{e1'} \\ u_2^{e1'} \\ u_3^{e1'} \\ u_1^{e2'} \\ u_2^{e2'} \\ u_3^{e2'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^{e'}}$$
(107)

\mathbf{T} stellt die 2×6 Transformationsmatrix dar. Bei Stabelementen des Polynomgrads p nimmt die Transformationsmatrix die Dimension $(p + 1) \times 3(p + 1)$ an. Da die Transformationen einzelner Elementknoten entkoppelt sind, läßt sich die für den Polynomgrad p erweiterte

Transformationsmatrix direkt angeben,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & \\ & \mathbf{T}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{T}_{p+1} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_i &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \\ \cos \alpha_j &= \frac{X_j^{e2'} - X_j^{e1'}}{\|\mathbf{X}^{e2'} - \mathbf{X}^{e1'}\|} \end{aligned} \quad (108)$$

wobei für die bereits diskutierte allgemeine Transformation die Transformationsmatrizen \mathbf{T}_i nicht identisch sein müssen. Mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} können der Elementverschiebungsvektor, dessen Variation und der Elementbeschleunigungsvektor vom Koordinatensystem $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ in das Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ abgebildet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= \mathbf{T} \mathbf{u}^{e'} \\ \delta \mathbf{u}^e &= \mathbf{T} \delta \mathbf{u}^{e'} \\ \ddot{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{T} \ddot{\mathbf{u}}^{e'} \end{aligned} \quad (109)$$

Die inverse Transformation kann direkt aus Abbildung 44 entnommen werden. Die Komponenten $u_j^{ei'}$ gehen aus der Projektion der Komponente u_1^{ei} (oder des 1×1 Verschiebungsvektors \mathbf{u}^{ei}) des Elementknotens i auf den Basisvektor \mathbf{e}_j hervor.

$$u_j^{ei'} = u_1^{ei} \cos \alpha_j \quad \mathbf{u}^{ei'} = \mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{ei} \quad (110)$$

Damit sind auch die Transformationen der in Gleichung (109) aufgeführten Elementvektoren von lokalen Elementkoordinaten auf globale Systemkoordinaten gegeben.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{e'} &= \mathbf{T}^T \mathbf{u}^e \\ \delta \mathbf{u}^{e'} &= \mathbf{T}^T \delta \mathbf{u}^e \\ \ddot{\mathbf{u}}^{e'} &= \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{u}}^e \end{aligned} \quad (111)$$

Die entsprechende Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e und des Elementlastvektors \mathbf{r}^e können mit der Betrachtung der inneren virtuellen Arbeit beziehungsweise der virtuellen Arbeit der äußeren Lasten gewonnen werden. Es sei angemerkt, daß die virtuelle Arbeit ein Skalar und somit koordinateninvariant ist. Die Transformationen des Elementverschiebungsvektors und dessen Variation nach den Gleichungen (109) in die innere virtuelle Arbeit des Stabelements nach Gleichung (58) eingebracht

$$\tilde{\delta W}_{\text{int}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^{e T} \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = (\mathbf{T} \delta \mathbf{u}^{e'})^T \mathbf{k}^e (\mathbf{T} \mathbf{u}^{e'}) = \delta \mathbf{u}^{e'} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}}_{\mathbf{k}^{e'}} \mathbf{u}^{e'} = \delta \tilde{\delta W}_{\text{int}}^{e'} \quad (112)$$

liefert die Transformationsbeziehung der Elementsteifigkeitsmatrix.

$$\mathbf{k}^{e'} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T} \quad (113)$$

Die Transformation der Elementlasten ergibt sich aus der Betrachtung der virtuellen Arbeit der

externen Lasten (64) und der Transformation der Variation des Elementverschiebungsvektors nach Gleichung (109)

$$\delta \tilde{W}_{\text{ext}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}^e = \delta \mathbf{u}^{e'} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{r}^e}_{\mathbf{r}^{e'}} = \delta \mathbf{u}^{e'} \cdot \mathbf{r}^{e'} = \delta \tilde{W}_{\text{ext}}^{e'} \quad (114)$$

zu:

$$\mathbf{r}^{e'} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}^e \quad (115)$$

Mit einer zur Entwicklung der Gleichung (112) analogen Vorgehensweise kann die Transformationsbeziehung der Massenmatrix mit Hilfe der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte (70) und der Transformation des Elementbeschleunigungsvektors (109) hergeleitet werden.

$$\mathbf{m}^{e'} = \mathbf{T}^T \mathbf{m}^e \mathbf{T} \quad (116)$$

4.2 Ensemblierung der Elemente zum System

Die Ensemblierung wird nach vier aufeinander aufbauenden Strategien realisiert. Diese unterscheiden sich im wesentlichen in der mathematischen Formulierung, die wie folgt charakterisiert werden kann:

- Direkte Addition von Komponenten
- Transformation mit einer elementspezifischen Inzidenzenmatrix \mathbf{a}^e
- Transformation mit einer systemspezifischen Inzidenzenmatrix \mathbf{a}
- Symbolische Ensemblierung mit dem Ensemble-Operator \bigcup

Als Resultat der Ensemblierung gewinnt man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, formuliert in Systemvektoren und -matrizen, das im transienten Fall durch Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung in die semidiskrete Bewegungsdifferentialgleichung mit Anfangsbedingungen umgeformt wird. Im statischen Fall führt die Anwendung des Fundamentalslemmas der Variationsrechnung zu einem linearen Gleichungssystem mit den Systemfreiheitsgraden (Systemverschiebungsvektor) als Lösungsvektor.

Die Formulierung des Ensemble Vorgangs wird am Beispiel des in Abbildung 24 dargestellten allgemeinen, aus zweiknotigen Stabelementen generierten, Raumfachwerks demonstriert. Zur symbolischen Darstellung der Vorgehensweise wird, wie in der Grafik skizziert, lediglich die Verknüpfung der Elementfreiheitsgrade der Elementknoten zwei der Elemente d, e, f und g am gemeinsamen Systemknoten k betrachtet. Alle weiteren Elementverknüpfungen bleiben bei der folgenden Darstellung unberücksichtigt. Ferner wird angenommen, daß die mit den Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 gebildete kartesische Basis die globale Basis darstellt (es wird auf die Kennzeichnung ' verzichtet).

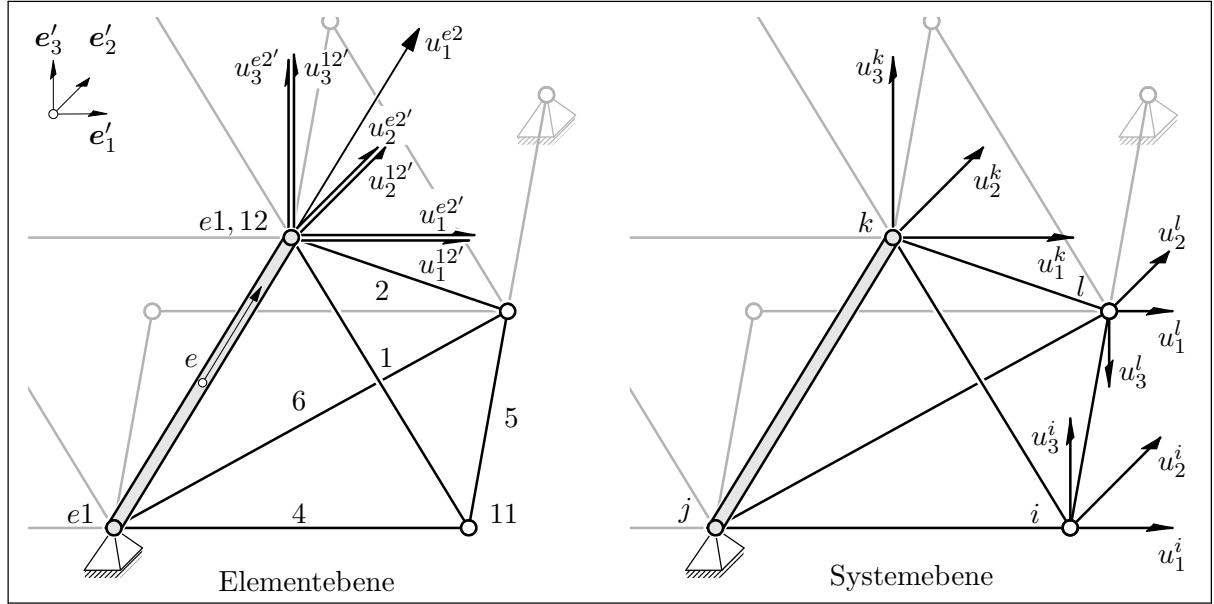


Abbildung 24: Ensemblierung finiter Stabelemente zum System (Struktur)

4.2.1 Direkte Addition von Komponenten

Die direkte Addition korrespondierender Elementgrößen zu Systemgrößen basiert auf den virtuellen Arbeiten des Systems, die sich additiv aus den virtuellen Arbeiten aller Elemente zusammensetzt (Gleichung (25)). So ergibt sich die Ensemblierung der Steifigkeitsmatrix durch die Betrachtung der Summation der inneren virtuellen Arbeit der Elemente über die Anzahl der im System befindlichen finiten Stabelemente NE nach Gleichung (58) ($\mathbf{k}^{e21} = \mathbf{k}^{e12 T}$),

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta\tilde{W}_{\text{int}}^e = \sum_{e=1}^{NE} \delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^{NE} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^{e1} \\ \delta\mathbf{u}^{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{e11} & \mathbf{k}^{e12} \\ \mathbf{k}^{e21} & \mathbf{k}^{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{e1} \\ \mathbf{u}^{e2} \end{bmatrix} \quad (117)$$

wobei die Summation durch die Anordnung der Elementvektoren und der Elementsteifigkeitsmatrix in Hypervektoren beziehungsweise einer Hypermatrix ersetzt werden kann.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^d \\ \delta\mathbf{u}^e \\ \delta\mathbf{u}^f \\ \delta\mathbf{u}^g \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{NE} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}^1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{k}^d & & & & \\ & & & \mathbf{k}^e & & & \\ & & & & \mathbf{k}^f & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{k}^{NE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^d \\ \mathbf{u}^e \\ \mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}^g \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{NE} \end{bmatrix} \quad (118)$$

Werden zusätzlich, wie in Gleichung (117) angedeutet, die Elementvektoren und die Elementsteifigkeitsmatrix entsprechend der Elementknoten partitioniert, ergibt sich die innere virtuelle Arbeit als Funktion der Hypervektoren der Elementknotenverschiebungen und der Hypermatrix

der Elementsteifigkeitsmatrizen.

$$\delta \tilde{W}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta \mathbf{u}^{d1} \\ \boxed{\delta \mathbf{u}^{d2}} \\ \delta \mathbf{u}^{e1} \\ \boxed{\delta \mathbf{u}^{e2}} \\ \delta \mathbf{u}^{f1} \\ \boxed{\delta \mathbf{u}^{f2}} \\ \delta \mathbf{u}^{g1} \\ \boxed{\delta \mathbf{u}^{g2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & k^{d11} & \boxed{k^{d12}} & & & & & & \\ & \boxed{k^{d12}} & k^{d22} & & & & & & \\ & & & k^{e11} & \boxed{k^{e12}} & & & & \\ & & & \boxed{k^{e12}} & k^{e22} & & & & \\ & & & & k^{f11} & \boxed{k^{f12}} & & & \\ & & & & \boxed{k^{f12}} & k^{f22} & & & \\ & & & & & k^{g11} & \boxed{k^{g12}} & & \\ & & & & & \boxed{k^{g12}} & k^{g22} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{d1} \\ \boxed{\mathbf{u}^{d2}} \\ \mathbf{u}^{e1} \\ \boxed{\mathbf{u}^{e2}} \\ \mathbf{u}^{f1} \\ \boxed{\mathbf{u}^{f2}} \\ \mathbf{u}^{g1} \\ \boxed{\mathbf{u}^{g2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (119)$$

Die Elemente d, e, f und g sind jeweils am Elementknoten 2 mit dem Systemknoten k gekoppelt, was bedeutet, daß die entsprechenden Verschiebungen identisch sein müssen. Die Elementfreiheitsgrade der studierten Elemente werden zusätzlich den Systemfreiheitsgraden $k-1, k+1, k+2$ und $k+3$ zugeordnet. Mit den in Abbildung 24 skizzierten System- und Elementfreiheitsgraden folgen für das Element e die Identitäten $\mathbf{u}^{e1} = \mathbf{u}^{k+1}$ und $\mathbf{u}^{e2} = \mathbf{u}^k$. Nach Ergänzung entsprechender Beziehungen für die weiteren Elemente ist die Zuordnung der Element- und Systemfreiheitsgrade und der entsprechenden Variationen wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k-1} &= \mathbf{u}^{d1} = \dots & \delta \mathbf{u}^{k-1} &= \delta \mathbf{u}^{d1} = \dots \\ \mathbf{u}^k &= \mathbf{u}^{d2} = \mathbf{u}^{e2} = \mathbf{u}^{f2} = \mathbf{u}^{g2} & \delta \mathbf{u}^k &= \delta \mathbf{u}^{d2} = \delta \mathbf{u}^{e2} = \delta \mathbf{u}^{f2} = \delta \mathbf{u}^{g2} \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^{e1} = \dots & \delta \mathbf{u}^{k+1} &= \delta \mathbf{u}^{e1} = \dots \\ \mathbf{u}^{k+2} &= \mathbf{u}^{f1} = \dots & \delta \mathbf{u}^{k+2} &= \delta \mathbf{u}^{f1} = \dots \\ \mathbf{u}^{k+3} &= \mathbf{u}^{g1} = \dots & \delta \mathbf{u}^{k+3} &= \delta \mathbf{u}^{g1} = \dots \end{aligned} \quad (120)$$

Die Fortsetzungen (\dots) in den Gleichungen (120) repräsentieren die zur Erläuterung des Ensemblesvorgangs nicht beachteten Anteile von weiteren Stabelementen. Aufgrund der Identität der Verschiebungsfreiheitsgrade der vier benachbarten Elemente am Elementknoten 2 können die entsprechenden vier Zeilen und Spalten der Matrizengleichung (119) in einer Zeile beziehungsweise Spalte zusammengefaßt werden. Das bedeutet, daß die Steifigkeitsterme, die mit dem Elementknoten 2 korrespondieren (z.B. \mathbf{k}^{e22}), an der Position k der Systemmatrix aufaddiert werden müssen. Steifigkeitsterme, die die Elementknoten 1 und 2 verknüpfen (z.B. \mathbf{k}^{e12}), müssen entsprechend der Zuordnung von Element- und Systemfreiheitsgraden (siehe Gleichung (120)) in die zu generierende Matrix eingebracht werden. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{K}^{kk} = \mathbf{k}^{d22} + \mathbf{k}^{e22} + \mathbf{k}^{f22} + \mathbf{k}^{g22} \quad (121)$$

ergibt sich die resultierende innere virtuelle Arbeit des Systems⁵.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k-1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^k} \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \delta\mathbf{u}^{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{u}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \mathbf{k}^{d11} & \mathbf{k}^{d12} & & & & \\ & \mathbf{k}^{d12} & \boxed{\mathbf{K}^{kk}} & \mathbf{k}^{e12} & \mathbf{k}^{f12} & \mathbf{k}^{g12} & \\ & & & \mathbf{k}^{e12} & & & \\ & & & \mathbf{k}^{f12} & & & \\ & & & \mathbf{k}^{g12} & & & \\ & & & & \mathbf{k}^{f11} & & \\ & & & & & \mathbf{k}^{g11} & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}^{k-1} \\ \boxed{\mathbf{u}^k} \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \mathbf{u}^{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$
 (122)

Mit der Definition der System- oder Struktursteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und des System- oder Strukturverschiebungsvektors \mathbf{u} kann die innere virtuelle Arbeit auf Systemebene kompakt angegeben werden.

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (123)$$

Zur obigen Erläuterung der Ensemblierung der Steifigkeitsmatrix analoge Argumente und äquivalente Strategie auf die Summe der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte angewandt, ergeben die dynamischen Anteile der virtuellen Arbeit, formuliert in der System- oder Strukturmassenmatrix \mathbf{M} und dem System- oder Strukturbeschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{u}}$.

$$\delta\tilde{W}_{\text{dyn}} = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (124)$$

Da, wie noch zu zeigen ist, bei der Ensemblierung der Elementlasten \mathbf{r}^e die Elementrandlasten \mathbf{r}_n^e von Nachbarelementen verschwinden, soll dieser Aspekt im folgenden genauer beleuchtet werden. Die Summe der virtuellen Arbeiten der Elementlasten \mathbf{r}^e kann in Analogie zu Gleichung (119) in Hypervektoren geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{\text{ext}} &= \sum_{e=1}^{NE} \delta\tilde{W}_{\text{ext}}^e = \sum_{e=1}^{NE} \delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}^e = \sum_{e=1}^{NE} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^{e1} \\ \delta\mathbf{u}^{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{e1} \\ \mathbf{r}^{e2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^d \\ \delta\mathbf{u}^e \\ \delta\mathbf{u}^f \\ \delta\mathbf{u}^g \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{NE} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}^d \\ \mathbf{r}^e \\ \mathbf{r}^f \\ \mathbf{r}^g \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{NE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{d1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^{d2}} \\ \delta\mathbf{u}^{e1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^{e2}} \\ \delta\mathbf{u}^{f1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^{f2}} \\ \delta\mathbf{u}^{g1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^{g2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{r}^{d1} \\ \boxed{\mathbf{r}^{d2}} \\ \mathbf{r}^{e1} \\ \boxed{\mathbf{r}^{e2}} \\ \mathbf{r}^{f1} \\ \boxed{\mathbf{r}^{f2}} \\ \mathbf{r}^{g1} \\ \boxed{\mathbf{r}^{g2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (125)$$

⁵Bei Beachtung des Einflusses weiterer Elemente müssten die Ergänzungen der Terme $\mathbf{k}^{e12} + \dots$ und $\mathbf{k}^{e11} + \dots$ berücksichtigt werden

Werden nun die Zusammenhänge von Element- und Systemebene nach den Gleichungen (120) für die Variation der Elementverschiebungsvektoren $\delta\mathbf{u}^{e1}$ und $\delta\mathbf{u}^{e2}$ eingesetzt, kann die Dimension der Hypervektoren in (125) reduziert werden, indem die zu den Verschiebungen korrespondierenden Lastanteile addiert werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{k-1} &= \mathbf{r}^{d1} + \dots \\ \mathbf{r}^k &= \mathbf{r}^{d2} + \mathbf{r}^{e2} + \mathbf{r}^{f2} + \mathbf{r}^{g2} \\ \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^{e1} + \dots\end{aligned}\quad \begin{aligned}\mathbf{r}^{k+2} &= \mathbf{r}^{f1} + \dots \\ \mathbf{r}^{k+3} &= \mathbf{r}^{g1} + \dots\end{aligned}\quad (126)$$

Die Fortsetzungen (\dots) symbolisieren die zur Erläuterung der Ensemblierung nicht beachteten Elementlasten. Damit ist die externe virtuelle Arbeit mit dem System- oder Strukturlastvektor \mathbf{r} bestimmt.

$$\delta\tilde{W}_{\text{ext}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k-1} \\ \boxed{\delta\mathbf{u}^k} \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \delta\mathbf{u}^{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{u}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{r}^{k-1} \\ \boxed{\mathbf{r}^k} \\ \mathbf{r}^{k+1} \\ \mathbf{r}^{k+2} \\ \mathbf{r}^{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \quad (127)$$

Die bereits erwähnte Eigenschaft der Elementrandlasten \mathbf{r}_n^e bei der Ensemblierung kann nun anhand des Systemlastvektors \mathbf{r}^k nach Gleichung (126) analysiert werden. Die Elementlasten können nach Gleichung (64) in die konsistenten Elementlasten \mathbf{r}_p^e und den Vektor der Elementrandlasten \mathbf{r}_n^e aufgespaltet werden.

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{d2} + \mathbf{r}^{e2} + \mathbf{r}^{f2} + \mathbf{r}^{g2} = \mathbf{r}_p^{d2} + \mathbf{r}_p^{e2} + \mathbf{r}_p^{f2} + \mathbf{r}_p^{g2} + \mathbf{r}_n^{d2} + \mathbf{r}_n^{e2} + \mathbf{r}_n^{f2} + \mathbf{r}_n^{g2} \quad (128)$$

Die Schnittlasten der Stabenden $e1$ und $e2$ wurden in Gleichung (62) als Lastspalte \mathbf{r}_n^e des finiten Elements e definiert. Es handelt sich demnach um Lasten, die von außen auf die Stabendquerschnitte aufgebracht werden. Diese Lasten müssen nun am Systemknoten, das heißt bei der Zusammenfassung aller Nachbarelemente eines Systemknotens, die Gleichgewichtsbedingung am Knoten erfüllen. Folglich muß die Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_n^{d2} + \mathbf{r}_n^{e2} + \mathbf{r}_n^{f2} + \mathbf{r}_n^{g2} \quad (129)$$

erfüllt sein. Demnach liefern die Elementrandlasten \mathbf{r}_n^e auf Elementebene einen Anteil zur virtuellen Arbeit, nicht aber auf Strukturebene. Aus diesem Grund müssen diese Lasten bei der Generierung des Elementlastvektors auf Elementebene mit dem Ziel der anschließenden Ensemblierung des Systemlastvektors \mathbf{r} nicht berechnet werden.

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_p^{d2} + \mathbf{r}_p^{e2} + \mathbf{r}_p^{f2} + \mathbf{r}_p^{g2} \quad (130)$$

Ist allerdings das Prinzip der virtuellen Arbeit auf Elementebene von Interesse, ist der Anteil der Elementrandlasten \mathbf{r}_n^e zu berücksichtigen.

4.2.2 Elementspezifische Inzidenzenmatrix

Im vorangehenden Abschnitt wurde die prinzipielle Vorgehensweise zur Ensemblierung des Systems aus NE finiten Elementen auf Basis der virtuellen Arbeiten von inneren, dynamischen und äußeren Kräften begründet und anhand des in Abbildung 24 dargestellten Raumfachwerks demonstriert. Um diese Vorgehensweise mathematisch zu erfassen und vor allem um die Aufstellung der Gleichungen (120) zu systematisieren, wird die Inzidenzenmatrix \mathbf{a}^e eines finiten Elements eingeführt. Die Inzidenzenmatrix extrahiert die Elementfreiheitsgrade des Elements e aus dem Vektor der Systemfreiheitsgrade. Um dies zu realisieren genügt eine BOOL'sche Matrix, die an Positionen, an denen Systemfreiheitsgrad und Elementfreiheitsgrad übereinstimmen, eine Eins und sonst Nullen enthält.

Am Beispiel der bereits im vorigen Abschnitt betrachteten Elemente e und g soll die Generierung einer solchen elementspezifischen BOOL'schen Matrix erläutert werden. \mathbf{a}^e verknüpft den Strukturfreiheitsgrad des Knotens k : u_1^k , u_2^k und u_3^k und des Systemknotens $k+1$: u_1^{k+1} , u_2^{k+1} und u_3^{k+1} mit dem Elementfreiheitsgraden der Elementknoten $e2$: u_1^{e2} , u_2^{e2} und u_3^{e2} beziehungsweise $e1$: u_1^{e1} , u_2^{e1} und u_3^{e1} . Das bedeutet, die entsprechenden Vektoren werden mit der 3×3 Einheitsmatrix \mathbf{I} verknüpft. Analog kann der Aufbau der Inzidenzenmatrix \mathbf{a}^g erläutert werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^{e1} \\ u^{e2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u^{k-1} \\ u^k \\ u^{k+1} \\ u^{k+2} \\ u^{k+3} \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{a}^e \mathbf{u} \quad (131)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^{g1} \\ u^{g2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^g} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots \\ \dots & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^g} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u^{k-1} \\ u^k \\ u^{k+1} \\ u^{k+2} \\ u^{k+3} \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{a}^g \mathbf{u}$$

Entsprechende Beziehungen erhält man für die Extraktion der Variation der Elementverschiebungen $\delta \mathbf{u}^e$ und der Elementbeschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}^e$ aus den entsprechenden Systemvektoren $\delta \mathbf{u}$ und $\ddot{\mathbf{u}}$.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^e &= \mathbf{a}^e \delta \mathbf{u} & \delta \mathbf{u}^g &= \mathbf{a}^g \delta \mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{a}^e \ddot{\mathbf{u}} & \ddot{\mathbf{u}}^g &= \mathbf{a}^g \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (132)$$

Auf Basis der Inzidenzenmatrizen aller finiter Elemente wird mit Hilfe der inneren virtuellen

Arbeit der Algorithmus der Ensemblierung der Systemsteifigkeitsmatrix gewonnen.

$$\delta \tilde{W}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta \tilde{W}_{\text{int}}^e = \sum_{e=1}^{NE} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u} \cdot \underbrace{\left(\sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{e T} \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (133)$$

Analog können die Systemmassenmatrix und der Systemlastvektor erstellt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{e T} \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e \\ \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{e T} \mathbf{m}^e \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad \mathbf{r} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{e T} \mathbf{r}^e = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{e T} \mathbf{r}_p^e \quad (134)$$

4.2.3 Inzidenzenmatrix des Gesamtsystems

Alternativ zur elementweisen Generierung der Inzidenzenmatrix kann diese auch systemspezifisch formuliert werden. In diesem Fall verknüpft die Inzidenzenmatrix \mathbf{a} die Systemfreiheitsgrade mit den Freiheitsgraden des Hyperelementverschiebungsvektors, wie in Gleichung (119) beschrieben.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{11} \\ \mathbf{u}^{12} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{d1} \\ \mathbf{u}^{d2} \\ \mathbf{u}^{e1} \\ \mathbf{u}^{e2} \\ \mathbf{u}^{f1} \\ \mathbf{u}^{f2} \\ \mathbf{u}^{g1} \\ \mathbf{u}^{g2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{NE1} \\ \mathbf{u}^{NE2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{k-1} \\ \mathbf{u}^k \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \mathbf{u}^{k+3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{NEQ/3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^d \\ \mathbf{a}^e \\ \mathbf{a}^f \\ \mathbf{a}^g \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{NE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{k-1} \\ \mathbf{u}^k \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \mathbf{u}^{k+3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{NEQ/3} \end{bmatrix} \quad (135)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (131) und (135) erhält man den Zusammenhang der elementspezifischen und der strukturspezifischen Inzidenzenmatrizen \mathbf{a}^e und \mathbf{a} . Die Matrix \mathbf{a} ist der Hypervektor der Matrizen \mathbf{a}^e für $e = 1, NE$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{NE} \end{bmatrix} = \mathbf{a} \mathbf{u} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{1 T} & \dots & \mathbf{a}^{e T} & \dots & \mathbf{a}^{NE T} \end{bmatrix}^T \quad (136)$$

Mit Hilfe der virtuellen Arbeiten können die Transformationsbeziehungen der Hypermatrizen der Elementsteifigkeits- und -massenmatrizen sowie des Hypervektors der Elementlastvektoren zu den entsprechenden Systemgrößen hergeleitet werden. Alternativ können die angegebenen Beziehungen auch direkt mit Hilfe der Gleichung (136) durch Umformung der Gleichungen

(134) gewonnen werden.

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{k}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{k}^{NE} \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{m}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{m}^{NE} \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{NE} \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p^1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_p^{NE} \end{bmatrix} \quad (137)$$

4.2.4 Symbolische Ensemblierung

Schließlich kann die Ensemblierung der Elementmatrizen symbolisch formuliert werden. Hierzu wird der Ensemble-Operator \bigcup eingeführt, hinter dem sich der in den vorangehenden Abschnitten erläuterte Ensemblierungsprozess verbirgt.

$$\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{NE} \mathbf{k}^e$$

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{NE} \mathbf{m}^e$$

$$\mathbf{r} = \bigcup_{e=1}^{NE} \mathbf{r}^e = \bigcup_{e=1}^{NE} \mathbf{r}_p^e \quad (138)$$

4.2.5 Dynamische und statische Systemgleichung

Das diskretisierte Prinzip der virtuellen Arbeit kann nach der Ensemblierung mit Hilfe des Systemverschiebungsvektors \mathbf{u} , dessen Variation $\delta\mathbf{u}$, dem Systembeschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{u}}$, der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , der Systemmassenmatrix \mathbf{M} und dem Systemlastvektor \mathbf{r} formuliert werden (vgl. Gleichungen (123), (124) und (127)).

$$\delta\tilde{W}_{\text{dyn}} + \delta\tilde{W}_{\text{int}} = \delta\tilde{W}_{\text{ext}} \quad (139)$$

$$\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \mathbf{u} = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$$

Fordert man, daß die Gleichung (139) für beliebige Variationen des Systemverschiebungsvektors $\delta\mathbf{u}$ erfüllt wird (Fundamentallemma der Variationsrechnung), erhält man die semidiskrete Bewegungsgleichung.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (140)$$

Die Bewegungsgleichung (140) wird semidiskret genannt, da eine Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung der Elastodynamik lediglich im Raum durchgeführt wurde. Das Ergebnis ist eine im Raum diskrete Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit. Zur Lösung dieser Differentialgleichung sind die diskreten Anfangsbedingungen der Verschiebungen und der Beschleunigung zur Zeit $t = 0$ notwendig. Dabei kann nur eine der beiden Systemgrößen $\ddot{\mathbf{u}}(t = 0)$ und $\mathbf{u}(t = 0)$ vorgegeben werden, die zweite ergibt sich durch Auflösen der Bewegungsgleichung

(140) zur Zeit $t = 0$.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(0) &= \ddot{\mathbf{u}}^* & \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{r}(0) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(0)] & \ddot{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{r}(0) - \mathbf{K} \mathbf{u}(0)]\end{aligned}\tag{141}$$

Die Bewegungsgleichung (140) und die Anfangsbedingungen (141) bilden das semidiscrete Anfangswertproblem der Strukturdynamik. Dieses Anfangswertproblem kann mit numerischen Methoden (oder in Sonderfällen auch analytisch) direkt integriert werden.

Im durch ($\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$) charakterisierten statischen Fall erhält man aus Gleichung (140) das lineare Gleichungssystem des Lösungsvektors \mathbf{u} , die statische System- oder die statische Strukturgleichung.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{r} \tag{142}$$

Im Gegensatz zur Strukturdynamik müssen bei statischen Strukturanalysen mindestens so viele DIRICHLET Randbedingungen in die Systemgleichung eingebracht werden, daß keine Starrkörperbewegungen möglich sind. Zugelassene Starrkörperbewegungen würden dazu führen, daß die Systemsteifigkeitsmatrix singulär wird, d.h. sie kann nicht invertiert werden, womit Gleichung (140) nicht lösbar ist.

4.2.6 Dirichlet Randbedingungen auf Systemebene

Im allgemeinen sind im statischen sowie im dynamischen Fall DIRICHLET Randbedingungen in die Systemgleichung einzubringen. Sie sind für gewöhnlich in Form von Auflagerbedingungen für das zu modellierende Problem gegeben und müssen nun in diskreter Form umgesetzt werden. In der numerischen Umsetzung zu unterscheiden sind

- homogene DIRICHLET Randbedingungen
- und inhomogene DIRICHLET Randbedingungen.

Im ersten Fall sind die vorgeschriebenen Verschiebungen Null und im zweiten Fall von Null verschieden. Bei transienten Problemstellungen sind die Verschiebungen des DIRICHLET Rands im betrachteten Zeitfenster vorgeschrieben, wobei prinzipiell sowohl der DIRICHLET Rand als auch der NEUMANN Rand in der Zeit variabel sein können.

Um die Realisierung von homogenen DIRICHLET Randbedingungen aufzuzeigen, wird das Beispiel des in Abbildung 25 dargestellten Raumfachwerks betrachtet. Eine Verschiebung des Systemknotens $k + 3$ soll in allen drei Koordinatenrichtungen verhindert werden⁶. Zur Vereinfachung der Darstellung bleiben alle weiteren Lagerbedingungen des Raumfachwerks bei den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt. Als Konsequenz homogener DIRICHLET Randbedingung sind auch die Variation der Verschiebungen und die Beschleunigungen der entsprechenden Freiheitsgrade Null.

$$\mathbf{u}^{k+3} = \delta \mathbf{u}^{k+3} = \ddot{\mathbf{u}}^{k+3} = \mathbf{0} \tag{143}$$

⁶Es ist nicht zwingend notwendig, daß alle Verschiebungen eines Knotens verhindert werden. Für gewöhnlich werden Verschiebungen in einzelnen Koordinatenrichtungen eines Knotens unterdrückt

Die DIRICHLET Randbedingungen (143) in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf Systemebene (139) eingesetzt, verdeutlicht, daß die entsprechenden Gleichungen keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit leisten ($\delta\tilde{W}_{\text{int}} + \delta\tilde{W}_{\text{dyn}} = \delta\tilde{W}_{\text{ext}}$).

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{0}} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \mathbf{K}^{k+1k+1} & \mathbf{K}^{k+1k+2} & \boxed{\mathbf{K}^{k+1k+3}} & \mathbf{K}^{k+1k+4} & & \\ & \mathbf{K}^{k+2k+1} & \mathbf{K}^{k+2k+2} & \boxed{\mathbf{K}^{k+2k+3}} & \mathbf{K}^{k+2k+4} & & \\ & \boxed{\mathbf{K}^{k+3k+1}} & \mathbf{K}^{k+3k+2} & \boxed{\mathbf{K}^{k+3k+3}} & \mathbf{K}^{k+3k+4} & & \\ & \mathbf{K}^{k+4k+1} & \mathbf{K}^{k+4k+2} & \boxed{\mathbf{K}^{k+4k+3}} & \mathbf{K}^{k+4k+4} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{0}} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$\delta\tilde{W}_{\text{dyn}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{0}} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \mathbf{M}^{k+1k+1} & \mathbf{M}^{k+1k+2} & \boxed{\mathbf{M}^{k+1k+3}} & \mathbf{M}^{k+1k+4} & & \\ & \mathbf{M}^{k+2k+1} & \mathbf{M}^{k+2k+2} & \boxed{\mathbf{M}^{k+2k+3}} & \mathbf{M}^{k+2k+4} & & \\ & \boxed{\mathbf{M}^{k+3k+1}} & \mathbf{M}^{k+3k+2} & \boxed{\mathbf{M}^{k+3k+3}} & \mathbf{M}^{k+3k+4} & & \\ & \mathbf{M}^{k+4k+1} & \mathbf{M}^{k+4k+2} & \boxed{\mathbf{M}^{k+4k+3}} & \mathbf{M}^{k+4k+4} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{0}} \\ \ddot{\mathbf{u}}^{k+2} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{k+4} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$\delta\tilde{W}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{0}} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{k+1} \\ \boxed{\mathbf{r}^{k+3}} \\ \mathbf{r}^{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{k+4} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \quad (144)$$

Aus diesem Grund ist es möglich, die zum Knoten $k + 3$ korrespondierenden Terme zur Berechnung der virtuellen Arbeiten zu ignorieren,

$$\delta\tilde{W}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \delta\mathbf{u}^{k+2} \\ \hline \delta\mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \mathbf{K}^{k+1k+1} & \mathbf{K}^{k+1k+2} & \mathbf{K}^{k+1k+4} & & & \\ & \mathbf{K}^{k+2k+1} & \mathbf{K}^{k+2k+2} & \mathbf{K}^{k+2k+4} & & & \\ \hline & \mathbf{K}^{k+4k+1} & \mathbf{K}^{k+4k+2} & \mathbf{K}^{k+4k+4} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \hline \mathbf{u}^{k+4} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N\text{EQ}/3} \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\delta \tilde{W}_{\text{dyn}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \frac{\delta \mathbf{u}^{k+2}}{\delta \mathbf{u}^{k+4}} \\ \vdots \\ \delta \mathbf{u}^{NEQ/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{M}^{k+1k+1} \mathbf{M}^{k+1k+2} & & \mathbf{M}^{k+1k+4} & & \\ & \mathbf{M}^{k+2k+1} \mathbf{M}^{k+2k+2} & & \mathbf{M}^{k+2k+4} & & \\ \hline & \mathbf{M}^{k+4k+1} \mathbf{M}^{k+4k+2} & & \mathbf{M}^{k+4k+4} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{k+1} \\ \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{k+2}}{\ddot{\mathbf{u}}^{k+4}} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{NEQ/3} \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\delta \tilde{W}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \frac{\delta \mathbf{u}^{k+2}}{\delta \mathbf{u}^{k+4}} \\ \vdots \\ \delta \mathbf{u}^{NEQ/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{k+1} \\ \frac{\mathbf{r}^{k+2}}{\mathbf{r}^{k+4}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{NEQ/3} \end{bmatrix} \quad (145)$$

oder als Konsequenz hieraus, die entsprechenden Gleichungen (Zeilen und Spalten) des aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgenden linearen semidiskreten Differentialgleichungssystems (140) beziehungsweise des linearen Gleichungssystems der statischen Systemanalyse (142) zu streichen. Durch diese Maßnahme wird die Dimension der Gleichungen (140) und (142) reduziert. Trotzdem soll für die Anzahl der Gleichungen unverändert das Symbol NEQ verwendet werden. Dies ist darin begründet, daß praktisch die DIRICHLET Randbedingungen bereits bei der Definition der Strukturfreiheitsgrade berücksichtigt (an diesen Positionen verhinderter Elementverschiebungen werden, wie in Abbildung 25 dargestellt, keine Systemfreiheitsgrade definiert) und damit noch vor der Ensemblierung eingebracht werden. Dies bedeutet, die zu Auflagern korrespondierenden Elementgrößen werden beim Ensemblierungsprozess nicht wie an freien Knoten aufaddiert, sondern ignoriert. Am Beispiel des in Abbildung 24 dargestellten Elements g bedeutet dies, daß die zum Auflagerknoten korrespondierenden Komponenten des Systemverschiebungsvektors \mathbf{u} und der Inzidenzenmatrix \mathbf{a}^g nicht existieren (vgl. Gleichung (131) oder Gleichung (135)).

$$\mathbf{u}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{g1} \\ \mathbf{u}^{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}^{k-1} \\ \mathbf{u}^k \\ \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{k+2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{a}^g \mathbf{u} \quad (146)$$

Inhomogene DIRICHLET Randbedingungen werden für gewöhnlich nach den homogenen DIRICHLET Randbedingungen in das bereits reduzierte Gleichungssystem (140) eingebracht. Hierzu wird die Systemgleichung derart umsortiert, daß der Systemverschiebungsvektor in den Verschiebungsvektor der vorgeschriebenen Verschiebungen \mathbf{u}_u und den Verschiebungsvektor der gesuchten Verschiebungen \mathbf{u}_r partitioniert werden kann.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u^T & \mathbf{u}_r^T \end{bmatrix}^T \quad (147)$$

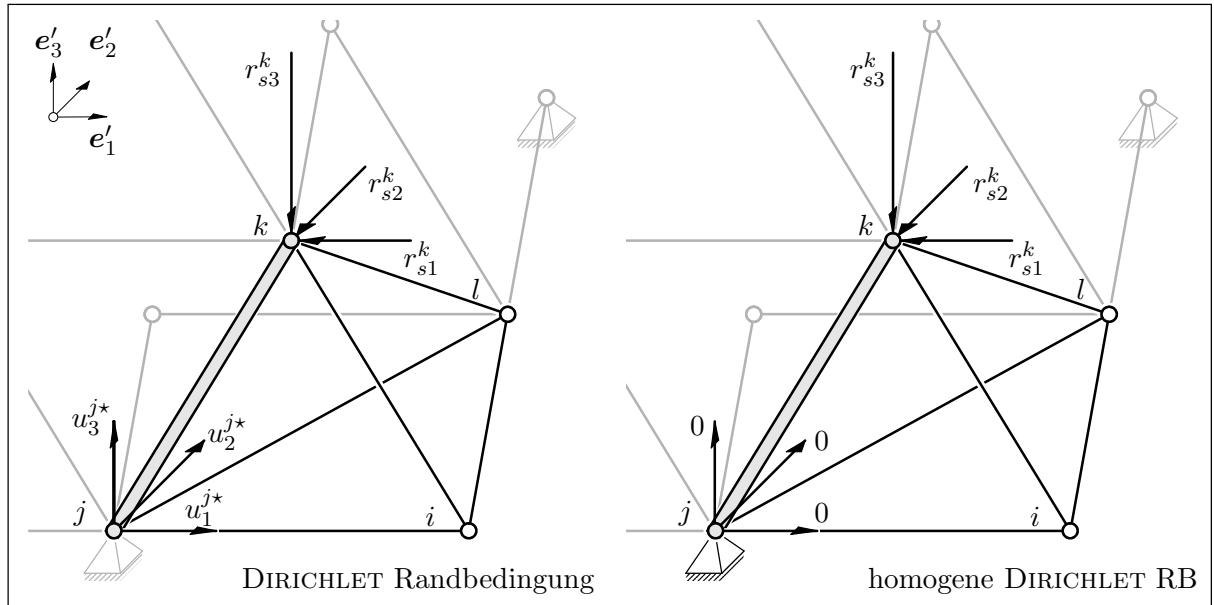


Abbildung 25: Berücksichtigung von DIRICHLET Randbedingungen und diskreten Systemlasten

Entsprechend wird das lineare Gleichungssystem des statischen Problems oder die effektive Systemgleichung des dynamischen Problems (siehe Kapitel 5.2) partitioniert.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ur} \\ \mathbf{K}_{ru} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ur} = \mathbf{K}_{ru}^T \quad (148)$$

Lösungsvariablen dieser partitionierten Gleichung sind die Verschiebungen \mathbf{u}_r und die Lasten \mathbf{r}_u wobei die Verschiebungen mit der zweiten Gleichung und die Lasten bei bereits gelösten Verschiebungen \mathbf{u}_r mit der ersten Gleichung bestimmt sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{rr} \mathbf{u}_r &= \mathbf{r}_r - \mathbf{K}_{ru} \mathbf{u}_u & (149) \\ \mathbf{r}_u &= \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u}_u + \mathbf{K}_{ur} \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Gleichung (149)₂ liefert die Lasten an Freiheitsgraden vorgeschriebener Verschiebungen. Werden alternativ zu den Ausführungen der homogenen DIRICHLET Randbedingungen zu Beginn dieses Kapitels im Vektor der vorgeschriebenen Verschiebungen \mathbf{u}_u auch homogene DIRICHLET Randbedingungen als Sonderfall der inhomogenen DIRICHLET Randbedingungen erfaßt, beinhaltet die Lösung der Gleichung (149)₂ die Auflagerreaktionen des Systems⁷.

4.2.7 Berücksichtigung von Einzellasten auf Systemebene

Neben konsistenten Elementlasten ist es besonders bei Stab- oder auch Balkentragwerken von Bedeutung, externe Einzellasten an Systemknoten aufnehmen zu können⁸. Dies geschieht durch

⁷Für gewöhnlich werden die Auflagerreaktionen im Rahmen der in Kapitel 6.2 behandelten Nachlaufrechnung berechnet

⁸Die in Kapitel 2.4 diskutierten nichtkonsistenten Elementvolumenlasten, aber auch Verkehrslasten oder ähnliches, können hier eingebracht werden

Addition entsprechender Einzellastkomponenten r_{sj}^i auf den Systemlastvektor \mathbf{r} . Der Systemlastvektor setzt sich in diesem Fall aus der Summe des Vektors \mathbf{r} und des Systemvektors der Einzellasten \mathbf{r}_s zusammen. Am Beispiel der in Abbildung 25 skizzierten Einzellasten nimmt der Systemvektor der Einzellasten die folgende Gestalt an:

$$\mathbf{r}_s = \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{0 & 0 & r_{s3}^{k+1}}_{\mathbf{r}_s^{k+1 T}} & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{r_{s1}^m & r_{s2}^m & r_{s3}^m}_{\mathbf{r}_s^m T} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]^T \quad (150)$$

Entsprechend ergibt sich ein zusätzlicher Term der virtuellen Arbeit der Einzellasten, der zu $\delta\tilde{W}_{\text{ext}}$ addiert werden muß.

$$\delta\tilde{W}_{\text{ext}}^s = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_s \quad (151)$$

5 Lösung der Systemgleichung

Die im vorangehenden Kapitel generierten statischen oder dynamischen Systemgleichungen müssen nun noch nach den Unbekannten aufgelöst oder ihre Eigenschaften charakterisiert werden. Wie im folgenden gezeigt wird, ist hierzu im Kern die Lösung eines linearen Gleichungssystems oder eines Standard Eigenwertproblems erforderlich.

5.1 Lineare Statik

Im statischen Fall der Strukturmechanik muß zur Bestimmung der Systemverschiebungen das lineare Gleichungssystem (142) gelöst werden. Symbolisch ist dies durch die Vormultiplikation dieser Gleichung mit der inversen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{-1} zu realisieren.

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{I} \mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r} \quad (152)$$

Die praktische Lösung erfolgt mit Methoden der numerischen Mathematik wie sie in Abschnitt 5.4 diskutiert werden.

5.2 Lineare Dynamik

Für das von den Gleichungen (140) und (141) gebildete semidiskrete Anfangswertproblem wird

- die Systemlösung mit Hilfe numerischer Methoden direkt integriert
- oder das charakteristische Systemverhalten durch die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren analysiert.

5.2.1 Direkte Lösung

Die Integration des semidiskreten Anfangsrandwertproblems (Differentialgleichung zweiter Ordnung) der linearen Strukturdynamik mit numerischen Methoden erfordert neben der Diskretisierung im Raum auch die Diskretisierung im Zeitbereich. Ein derartiges, sehr gebräuchliches Diskretisierungs- und Integrationsverfahren ist das NEWMARK Verfahren, das hier skizziert, jedoch nicht im Detail diskutiert werden soll. Für ein detailliertes Studium dieser Thematik wird

hier auf die Fachliteratur (NEWMARK [33], HUGHES [23], ARGYRIS & MLEJNEK [5], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [42], BATHE [7], WOOD [39] und BATHE [8]) oder aus die Lehrveranstaltung 'Nichtlineare Strukturdynamik' [27] verwiesen.

Basis der numerischen Integration bilden die Unterteilung des zu integrierenden Zeitintervalls $[0, T]$ in Zeitscheiben oder Zeitschritte Δt

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^{NT} t_{n+1} - t_n \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (153)$$

und die Anwendung eines Ansatzes für den Verlauf des Beschleunigungsvektors $\ddot{\mathbf{u}}$ ds Systems. Wird angenommen, daß die Beschleunigungen im Zeitschritt linear veränderlich sind, ergeben sich nach einer zusätzlichen Parametrisierung (γ und β) die NEWMARK-Approximationen.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (154)$$

Hierin symbolisieren γ und β die NEWMARK Zeitintegrationsparameter (i.a. $\gamma = 1/2$ und $\beta = 1/4$). Die Systemgrößen zur Zeit t_n (\mathbf{u}_n , $\dot{\mathbf{u}}_n$, $\ddot{\mathbf{u}}_n$) werden als bekannt vorausgesetzt. Das Einsetzen der Approximation (154)₂ in die Bewegungsgleichung (140) zur Zeit t_{n+1}

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{r}(t_{n+1}) = \mathbf{r}_{n+1} \quad (155)$$

ergibt die effektive Strukturgleichung oder effektive Systemgleichung.

$$\underbrace{\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}\right]}_{\mathbf{K}_{\text{eff}}} \mathbf{u}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{u}_n + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_n\right]}_{\mathbf{r}_{\text{eff}}} \quad (156)$$

Zu bemerken ist, daß die effektive Systemgleichung von derselben Gestalt wie das statische lineare Gleichungssystem (142) ist. Als Konsequenz dieses Sachverhalts folgt, daß Gleichung (156) mit derselben Routine wie die statische Systemgleichung gelöst werden kann.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}_{\text{eff}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{eff}} \quad (157)$$

Mit den Gleichungen (154) werden anschließend die Systemgeschwindigkeiten und Systembeschleunigungen zur Zeit t_{n+1} berechnet. Mit der sukzessiven Anwendung der Gleichungen (154) und (156) kann das semidiskrete Anfangswertproblem der Strukturdynamik Zeitschritt für Zeitschritt numerisch integriert werden.

5.2.2 Eigenwertanalyse

Das Eigenwertproblem der Strukturdynamik basiert auf der Lösung der homogenen Bewegungsgleichung (140) ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$). Der Lösungsansatz $\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}} e^{i\omega t}$ mit $i = \sqrt{-1}$ liefert das dynamische generalisierte oder verallgemeinerte Eigenwertproblem.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = 0 \quad (158)$$

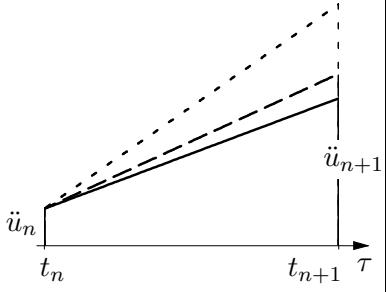
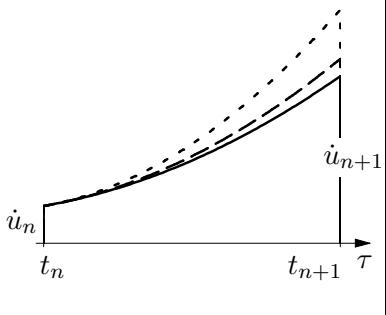
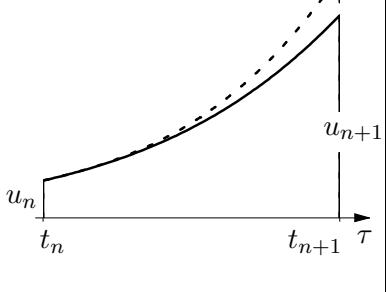
grafische Darstellung	Ansatz/Integration	Auswertung $\tau = \Delta t$
	<p>lineare Approximation</p> $\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_n + \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{\Delta t} \tau$ <p>parametrisiert für \dot{u}</p> $\dot{u}(\tau) = \dot{u}_n + 2\gamma \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{\Delta t} \tau$ <p>parametrisiert für u</p> $u(\tau) = u_n + 6\beta \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{\Delta t} \tau^2$	<p>— Standardansatz</p> <p>-- γ-Parametrisierung</p> <p>- - - β-Parametrisierung</p>
	<p>Integration param. für \dot{u}</p> $\dot{u}(\tau) = \dot{u}_n + \ddot{u}_n \tau + 2\gamma \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{2\Delta t} \tau^2$ <p>Integration param. für u</p> $u(\tau) = u_n + \dot{u}_n \tau + 6\beta \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{2\Delta t} \tau^2$	<p>Geschwindigkeit zu t_{n+1}</p> $\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \ddot{u}_n \Delta t + \gamma [\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n] \Delta t$ $\Rightarrow \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_{n+1}(\ddot{u}_{n+1})$
	<p>Integration param. für u</p> $u(\tau) = u_n + \dot{u}_n \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \tau^2 + 6\beta \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{6\Delta t} \tau^3$	<p>Verschiebung zu t_{n+1}</p> $u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \Delta t^2 + \beta [\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n] \Delta t^2$ $\Rightarrow u_{n+1} = u_{n+1}(\ddot{u}_{n+1})$

Tabelle 6: Generierung der NEWMARK-Approximationen im Zeitschritt Δt

Mittels Substitution der positiv definiten Massenmatrix durch die CHOLESKY-Zerlegung der Massenmatrix, vergleiche DEUFLHARD & HOHMANN [20], Multiplikation von links mit \mathbf{L}^{-1} und Definition der transformierten Eigenvektoren $\bar{\Phi}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad \bar{\Phi} = \mathbf{L}^T \Phi, \quad \Phi = \mathbf{L}^{-T} \bar{\Phi} \quad (159)$$

kann das generalisierte Eigenwertproblem (158) auf das spezielle Eigenwertproblem

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \Phi - \omega^2 \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \Phi = 0 \quad [\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T} - \omega^2 \mathbf{I}] \bar{\Phi} = 0 \quad (160)$$

überführt werden. Das Eigenwertproblem (160) kann mit Standard Eigenwertlösern gelöst werden. Die Wurzeln der Eigenwerte ω_i^2 , $i = 1, \dots, NEQ$ der Gleichungen (158) und (160) stellen die Eigenkreisfrequenzen des Systems und die Eigenformen Φ_i die entsprechenden Schwingungsmodi dar. Gelöst wird das Standard Eigenwertproblem (160) mit den in Abschnitt 5.5 dargelegten numerischen Verfahren.

5.3 Bemerkungen zu nichtlinearen, statischen und dynamischen Problemen

Ist das zu lösende statische oder dynamische Problem geometrisch oder materiell nichtlinear, resultieren die in den vorangehenden Abschnitten angewandten Diskretisierungsmethoden in einer nichtlinearen diskreten/semidiskreten statischen Gleichung/Bewegungsgleichung. Bei diesen nichtlinearen Systemen wird formal der Steifigkeitsterm $\mathbf{K} \mathbf{u}$ durch den Systemvektor der inneren Kräfte $\mathbf{r}_i(\mathbf{u})$, welcher eine nichtlineare Funktion des Verschiebungsvektors repräsentiert, ersetzt.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{r} \quad (161)$$

Die linke Seite der effektiven Systemgleichung (156) wird entsprechend modifiziert,

$$\underbrace{\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{r}_i(\mathbf{u}_{n+1})}_{\mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1})} = \underbrace{\mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right]}_{\mathbf{r}_{\text{eff}}} \quad (162)$$

was zur Bestimmung des unbekannten Verschiebungszustands \mathbf{u}_{n+1} eine nichtlineare Vektorgleichung ergibt.

$$\mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{r}_{\text{eff}} = \mathbf{0} \quad (163)$$

Zur Lösung dieses nichtlinearen Problems wird numerisch am effektivsten das iterative NEWTON-RAPHSON-Verfahren auf Basis einer konsistenten Linearisierung der Vektorgleichung (163) angewandt, welche die TAYLOR-Entwicklung dieser nichtlinearen Vektorgleichung (vgl. z.B. ZIENKIEWICZ & TAYLOR [41], CRISFIELD [19], und BATHE [8]) erfordert.

$$\mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) - \mathbf{r}_{\text{eff}} = \mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k) - \mathbf{r}_{\text{eff}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \underbrace{(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k)}_{\Delta \mathbf{u}} + \dots = \mathbf{0}}_{\mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k) - \mathbf{r}_{\text{eff}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}} \quad (164)$$

Damit kann die iterative Änderung des Verschiebungsvektors berechnet werden.

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k = \Delta \mathbf{u} = \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \right]^{-1}}_{\mathbf{K}_{\text{eff}}^{-1} t(\mathbf{u}_{n+1}^k)} \left[\mathbf{r}_{\text{eff}} - \mathbf{r}_{i \text{ eff}}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \right] \quad (165)$$

$\mathbf{K}_{\text{eff}}^{-1} t$ symbolisiert den sogenannten Tangenten-Operator oder die effektive Tangentensteifigkeit. Die nichtlineare statische Gleichung erhält man aus Gleichung (165), indem man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Null setzt, was in Gleichung (165) formell durch das Entfernen der Kennzeichnung der effektiven Systemgrößen durch den Index 'eff' realisiert werden kann. Die Unterteilung in Lastschritte bleibt allerdings auch für nichtlineare statische Systemanalysen erhalten, da die Zeit im statischen Fall als 'Pseudozeit' die sukzessive Lastaufbringung (Lastschritte) zur Gewährleistung der Konvergenz des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zur Lösung \mathbf{u}_{n+1} kontrolliert.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_t^{-1}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \left[\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_i(\mathbf{u}_{n+1}^k) \right] \quad \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_{n+1}^k) = \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \quad (166)$$

Sowohl im dynamischen als auch im statischen nichtlinearen Fall erhält man eine iterativ zu lösende Gleichungsstruktur, die wie im linear statischen Fall die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Dimension $NEQ \times NEQ$ erfordert.

5.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

Die Lösungsmethoden strukturmechanischer Probleme, seien es nun linear statische Probleme (Kapitel 5.1), linear dynamische Probleme (Kapitel 5.2) oder nichtlineare statische und dynamische Probleme (Kapitel 5.3), erfordern die Lösung des linearen Gleichungssystems.

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (167)$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems können

- direkte
- und iterative

Löser eingesetzt werden. Die klassische direkte Gleichungslösung mit der GAUSS-Elimination ist nur für eine kleine Anzahl von Freiheitsgraden anwendbar, während das iterative GAUSS-SEIDEL Verfahren auch für größere Gleichungssysteme anwendbar ist. Zum Studium der Gleichungslöser sei auf die Fachliteratur (z.B. BATHE [8] und ZURMÜHL & FALK [43]) verwiesen. Im Rahmen der Vorlesung soll die Gleichungslösung als 'Black-Box' akzeptiert werden.

5.5 Lösung des Eigenwertproblems

Die Lösung des Standard Eigenwertproblems

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] \Phi = 0 \quad (168)$$

wird neben der in Kapitel 5.2 vorgestellten dynamischen Eigenwertanalyse auch für die in der Lehrveranstaltung 'Finite Elemente Methoden II' [29] diskutierte statische Stabilitätsanalyse benötigt.

Zur Lösung des Eigenwertproblems (168) kommen verschiedene numerische Verfahren zum Einsatz (siehe z.B. BATHE [8] und ZURMÜHL & FALK [43]). Diese lassen sich wie folgt klassifizieren:

- Vektor Iterationsverfahren
- Transformationsverfahren
 - JACOBI Methode
 - HOUSEHOLDER-Transformation
- Polynom-Iterationsverfahren
 - implizit
 - explizit

6 Nachlaufrechnung

Mit den in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren kann der Systemverschiebungsvektor \mathbf{u} berechnet werden, womit die Lösung des statischen oder dynamischen (zeitdiskreten) Problems und damit die Deformationsfigur vollständig bestimmt sind. Für die Anwendung der Methode der finiten Elemente in der Ingenieurpraxis (Design, Bemessung und Prüfung) sind für gewöhnlich die abgeleiteten Größen (Verzerrungen und Spannungen) von größerer Bedeutung als die Deformationsfigur. Aus diesem Grund werden

- die lokalen approximierten Verschiebungen,
- die lokalen approximierten Verzerrungen
- und die lokalen approximierten Spannungen

im Rahmen der Nachlaufrechnung berechnet und visualisiert.

6.1 Separation und Transformation der Elementfreiheitsgrade

Der erste Schritt der Nachlaufrechnung ist die Separation des Elementverschiebungsvektors $\mathbf{u}^{e'}$ in globalen Koordinaten (e'_1, e'_2, e'_3) mit Hilfe der elementspezifischen Inzidenzenmatrix \mathbf{a}^e aus Gleichung (131).

$$\mathbf{u}^{e'} = \mathbf{a}^e \mathbf{u} \quad (169)$$

Anschließend wird der Elementverschiebungsvektor mit Hilfe der Gleichung (109) auf die lokalen Elementkoordinaten transformiert

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{T} \mathbf{u}^{e'} \quad (170)$$

und die approximierte kontinuierliche Verschiebung $u_1(\xi_1)$ mit der Matrix der Ansatzfunktionen nach Gleichung (32) berechnet.

$$\tilde{u}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^2 u_1^{ei} N^i(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{u}^e \quad (171)$$

6.2 Berechnung der Verzerrungen, Spannungen und Schnittlasten

Mit der Approximation der kontinuierlichen Verschiebung sind über die Kinematik und das Materialgesetz auch die approximierten kontinuierlichen Verzerrungen und Spannungen gegeben. Direkt können die approximierten Verzerrungen mit dem B-Operator nach Gleichung (50) bestimmt werden.

$$\tilde{\epsilon}_{11}(\xi_1) = \mathbf{B}(\xi_1) \mathbf{u}^e \quad (172)$$

Die Anwendung der konstitutiven Gleichung (5) liefert schließlich die approximierte Spannungsverteilung und folglich die Verteilung der Schnittlasten.

$$\tilde{\sigma}_{11}(\xi_1) = E \tilde{\epsilon}_{11}(\xi_1) \quad \tilde{N}_1(\xi_1) = A \tilde{\sigma}_{11}(\xi_1) \quad (173)$$

Alle in den vorangehenden Gleichungen (171) bis (173) in Abhängigkeit von den natürlichen Koordinaten ξ_1 dargestellten approximierten Größen können im Rahmen des isoparametrischen Elementkonzepts mit Hilfe der Transformationsgleichung (45) auf die physikalische Koordinate X_1 abgebildet werden.

Mit Gleichung (173)₂ ist es weiterhin möglich, den Elementlastvektor \mathbf{r}_n^e mit den Komponenten $N_1^{e1} = \tilde{N}_1(-1)$ und $N_1^{e2} = \tilde{N}_1(1)$ zu berechnen.

$$\mathbf{r}_n^e = \begin{bmatrix} N_1^{e1} \\ N_1^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(-1) \\ \tilde{N}_1(1) \end{bmatrix} \quad (174)$$

Die Transformation der Elementlastvektoren nach Gleichung (115) und deren Ensemblierung, beispielsweise nach Gleichung (134),

$$\mathbf{r}_n = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{r}_n^e = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{T}^T \mathbf{r}_n^e \quad (175)$$

liefert schließlich eine Gleichung zur Berechnung des Vektors der Systemauflagerreaktionen.

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r} + \mathbf{r}_n \quad (176)$$

6.3 Aspekte der Visualisierung

Bei der Visualisierung ist zu beachten, in welcher Form die approximierten Größen dargestellt werden. Gebräuchlich ist die Darstellung von

- Elementgrößen,
- geglätteten Systemgrößen
- und von GAUSSpunkten extrapolierten (geglätteten/ungeglätteten) Elementgrößen.

Insbesondere geglättete Spannungsverläufe täuschen eine nicht vorhandene Genauigkeit der FEM Berechnung vor. C_0 -stetige Verschiebungsansätze sind in der ersten Ableitung unstetig. Das bedeutet, daß auch die aus der ersten Ableitungen hervorgehenden Verzerrungen oder Spannungen über die Elementgrenzen hinweg diskontinuierlich sind.

6.4 Das Stabelement im FEM Kontext

Die Spezialisierung des allgemeinen Ablaufs einer finite Elemente Analyse, dargestellt in Abbildung 5, ausgeführt am Beispiel des dreidimensionalen linearen Stabelements mit zwei ist in Abbildung 26 gegeben.

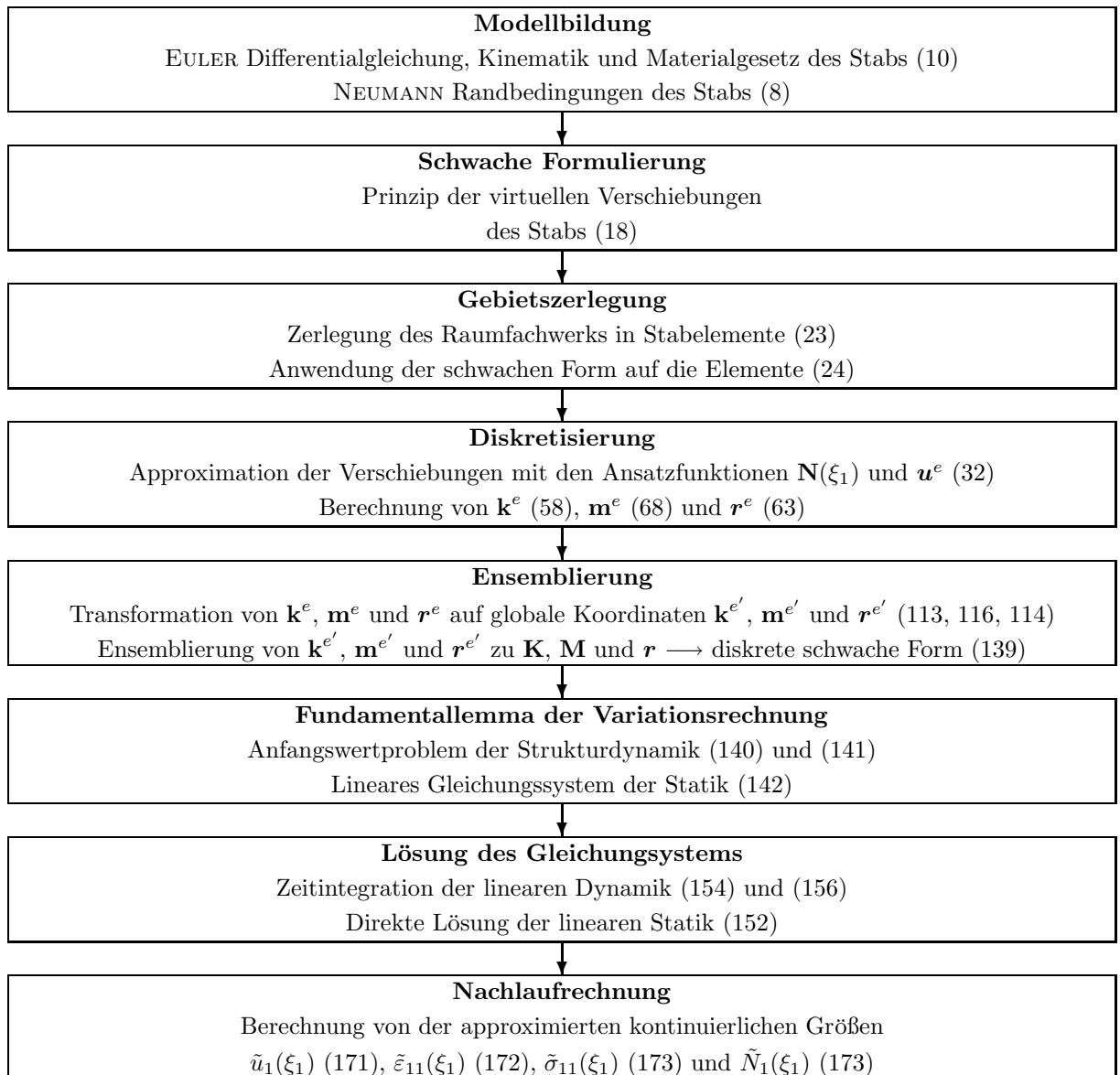


Abbildung 26: Entwicklung und Analyse eines linearen finiten Stabelements

Literatur

- [1] H. Ahrens and D. Dinkler. *Finite-Element-Methoden. Teil 1*, volume Bericht Nr. 88-50. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 1996.
- [2] H. Ahrens and D. Dinkler. *Finite-Element-Methoden. Teil 2*, volume Bericht Nr. 88-51. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 1996. Vorlesungsmanuskript.
- [3] F.R.S. Argyris and H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band I: Verschiebungsmethode in der Statik*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1988.
- [4] F.R.S. Argyris and H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band II: Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1988.
- [5] F.R.S. Argyris and H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band III: Einführung in die Dynamik*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1988.
- [6] S. Armbrüster. Studien zur strukturmechanischen Modellbildung anhand von Finite Element Analysen der Reichstagskuppel in Berlin. Master's thesis, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, 2001.
- [7] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 1990.
- [8] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [9] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 2002.
- [10] J. Betten. *Finite Elemente für Ingenieure 1. Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum*. Springer, Berlin, 1997.
- [11] J. Betten. *Finite Elemente für Ingenieure 2. Variationsrechnung, Energimethoden, Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten*. Springer, Berlin, 1998.
- [12] A. Bögele, P.C. Schmal, and I. Flagge. *Leicht Weit. Light Structures*. Jörg Schlaich. Rudolf Bergermann. Deutsches Architektur Museum, Frankfurt am Main, 2003.
- [13] D. Braess. *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Berlin, 1997.
- [14] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York, 1994.
- [15] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1979.
- [16] T.R. Chandrupatla and A.D. Belegundu. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [17] R.D. Cook and D.S. Malkus. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1989.

- [18] M.A. Crisfield. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis. Volume 1: Linear Analysis.* Pineridge Press, Swansea, 1986.
- [19] M.A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials.* John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [20] P. Deuflhard and A. Hohmann. *Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung.* Walter de Gruyter, Berlin, 1993.
- [21] N. Foster. *Der neue Reichstag.* Brockhaus, Leipzig, 2000.
- [22] F. Hartmann and C. Katz. *Statik mit finiten Elementen.* Springer, Berlin, 2002.
- [23] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Publications, New York, 2000.
- [24] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [25] K. Knothe and H. Wessels. *Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure.* Springer, Berlin, 1999.
- [26] W.B. Krätsig and Y. Başar. *Tragwerke 3. Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente.* Springer, Berlin, 1997.
- [27] D. Kuhl. *Nichtlineare Strukturdynamik.* Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 2002. Vorlesungsmanuskript.
- [28] D. Kuhl and G. Meschke. *Finite Elemente Methoden I.* Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 2001. Vorlesungsmanuskript.
- [29] D. Kuhl and G. Meschke. *Finite Elemente Methoden II.* Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 2001. Vorlesungsmanuskript.
- [30] K.-E. Kurrer. Max mengeringhausen: Erfinder und ingenieurunternehmer. *Stahlbau*, 10:695–696, 2003.
- [31] R.W. Lewis, K. Morgan, H.R. Thomas, and K.N. Seetharamu. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis.* John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [32] M. Link. *Finite Elemente in der Statik und Dynamik.* Teubner Studienbücher, Stuttgart, 2002.
- [33] N.N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85:67–94, 1959.
- [34] N.S. Ottosen and H. Petersson. *Introduction to the Finite Element Method.* Prentice Hall, New York, 1992.
- [35] E. Ramm. *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen.* Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1998. Vorlesungsmanuskript.
- [36] M. Schlaich. Der messeturm in rostock - ein tensegrityrekord. *Stahlbau*, 10:697–701, 2003.
- [37] C. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics.* Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1998.

- [38] B. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [39] W.L. Wood. *Practical Time-Stepping Schemes*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [40] W. Wunderlich and W. Redanz. Die Methode der Finiten Elemente. In G. Mehlhorn, editor, *Der Ingenieurbau. Rechnerorientierte Baumechanik*. Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- [41] O.J. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method. Volume 1. The Basis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [42] O.J. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method. Volume 2. Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [43] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendung. Teil 1: Grundlagen*. Springer, Berlin, 1997.