

Numerische Methoden der Mechanik

Prof. Dr.-Ing. P. Heinze
Hochschule Wismar
FB MVU

SS 2002
Version: 1. Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Zeitintegrationsverfahren	4
1.1	Analytische Lösung als Referenz	4
1.2	Das Verfahren der zentralen Differenzen	5
1.2.1	Implementierung	7
1.2.2	Kritischer Zeitschritt	7
1.2.3	Numerische Experimente mit dem Verfahren der zentralen Differenzen	7
1.2.4	Zusammenfassende Bewertung der Ergebnisse mit dem Verfahren der zentralen Differenzen	14
1.3	Das Houboltsche Verfahren	15
1.3.1	Entwicklung der Ansätze von \dot{u} und \ddot{u}	15
1.3.2	Ableitung des Verfahrens	17
1.3.3	Numerische Experimente	20
1.3.4	Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Houboltschen Verfahren	23
1.4	Das Wilson Θ Verfahren	24
1.4.1	Grundsätze des Verfahrens	24
1.4.2	Ansatz der linearen Beschleunigung	24
1.4.3	Einführung der Ansätze in die Bewegungsgleichung	25
1.4.4	Numerische Experimente	26
1.4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Wilson- Θ -Verfahren	30
1.5	Das Newmark-Verfahren	31
1.5.1	Ansatz für Geschwindigkeit und Beschleunigung	31
1.5.2	Entwicklung des Verfahrens	32
1.5.3	Zur Durchführung des Verfahrens notwendige Gleichungen	32
1.5.4	Numerische Experimente	33
1.5.5	Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Newmark-Verfahren	34
1.6	Beispiel: Hüpfender Ball	36
1.6.1	Zeitschritt	36
1.6.2	Details der Modellierung	36
1.6.3	Diskussion des Ergebnisses	36
1.7	Bewertung der Zeitintegrationsverfahren	40
1.7.1	Ausschwingversuch	40
1.7.2	Ausschwingversuch mit Dämpfung $D = 99\%$	41
1.7.3	Krafterregung mit konstanter Kreisfrequenz	41

1.7.4	Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz ohne Dämpfung	42
1.7.5	Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz mit 10% Dämpfung	42
1.8	Zusammenfassung	44
1.9	Zeitintegration in generalisierten Koordinaten	44
1.9.1	Wie kommt man von der Bewegungsgleichung zum Eigenwertproblem	45
1.9.2	Transformation in modale Koordinaten - die Eigenvektoren des konservativen Systems als Basis der generalisierten Koordinaten	45
1.9.3	Beispiel zum „truncation error“	46
1.9.4	Berücksichtigung der Dämpfung	48
1.9.5	Aufstellen der Matrizen bei praktischen Beispielen	50
1.9.6	Beispiel: Allseitig gelagerte Platte	50
1.9.7	Krafterregung im Resonanz zur ersten Eigenfrequenz	53
1.10	Referate	58
1.10.1	Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchung des Wilson- Θ -Verfahrens	58
1.10.2	Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchung des Newmark-Verfahrens	59
1.10.3	Untersuchung der Verformungen und Biegemomente eines Stockwerkrahmens unter Erdbebenlast	60
1.10.4	Strukturmodell	60
1.10.5	Vorgehensweise	61
1.10.6	Umfang der Bearbeitung	62
1.10.7	Dynamische Untersuchung eines Rammhammers	63
1.10.8	Fußballabstoß	64
1.10.9	Lagerspiel	66
1.10.10	Parabelflug	67
2	Nichtlineare Probleme	69
2.1	Arten der Nichtlinearitäten	69
2.1.1	geometrische Nichtlinearität	70
2.2	Möglichkeiten zur Lösung Nichtlinearer Probleme	70
2.2.1	Newton-Rahpson Verfahren	70
2.2.2	Modified Newton-Raphson Verfahren	70
3	Grundzüge der linearen FEM	71
3.1	Ansatzfunktion	72
3.2	Die Elementsteifigkeitsmatrix	73
3.2.1	Einarbeitung der Randbedingungen	76
3.2.2	Lösung des Gleichungssystems und Berechnen der Unbekannten	77
3.2.3	Berechnen der Auflagerkräfte	77
3.2.4	Bestimmung der Schnittgrößen	78
3.3	Zusammenbau zum Gesamtsystem	79
3.3.1	Die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems	80
3.3.2	Einarbeiten der Lagerungsbedingungen	83

3.3.3	Lösung des Gleichungssystems und Errechnung der Auflagerkräfte und Schnittgrößen	84
3.4	Koordinatentransformationen	84
3.4.1	Transformation vom l-m-n-System in x-y-z System	85
3.4.2	Transformation vom r-s-t-System in x-y-z System	86
3.4.3	Transformation vom l-m-n-System in r-s-t System	87
3.4.4	Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix vom e-l-m-System ins r-s-t System	88
4	Die geometrische Steifigkeitsmatrix	90
5	Literatur zur FEM	93

Vorhaben

- Lösung von Bewegungsgleichungen im Zeitbereich
 - Methode der zentralen Differenzen
 - Houbold Methode
 - Wilson Θ Methode
 - Newmark Methode
- Lösung der Bewegungsgleichung mit generalisierten Koordinaten
 - Was sind generalisierte Koordinaten
 - Transformation von Kräften, Rücktransformation von Verschiebungen
- Nichtlineare Probleme
 - Arten der Nichtlinearität
 - Knicken von Stäben
- Numerische Optimierung
 - Unbeschränkte Optimierungsprobleme
 - Beschränkte Optimierungsprobleme
 - gradientengestützte Verfahren
 - Transformationsverfahren
 - Evolutionsstrategie
- Grundzüge Methode der Finiten Elemente dargestellt am Balken
 - Grundgleichung
 - Steifigkeitsmatrix des Elements, Massenmatrix des Elements
 - Zusammenbau der Elemente zum Gesamtsystem
 - Lagerung des Systems
 - Aufbringen der Belastung
 - Lösung der Gleichungssystems
 - Rückrechnung , Bestimmung der Schnittgrößen
 - Koordinatensysteme: basic KOS, globales KOS, lokales KOS, Transformationen
 - Stützensenkung

Bezeichnungen

Knotenverschiebungsvektor	v
Elementverschiebungsvektor	\hat{v}
Gesamtverschiebungsvektor	V
Transformationsmatrix Vektor $l - x$	L
Transformationsmatrix Vektor $r - x$	R
Transformationsmatrix Vektor $l - r$	$L_{(l-r)_{i,j}}$
Transformationsmatrix KnotenVerschiebungen $l - r$	T_j
Transformation Elementverschiebungsvektor $r - x$	$\hat{T}_{i,j}$
Steifigkeitsmatrix Gesamtsystem	K
Steifigkeitsmatrix reduziert	\bar{K}

Kapitel 1

Zeitintegrationsverfahren

Aufgabe der Zeitintegrationsverfahren ist es, Bewegungsgleichungen, die meist als partielle Differentialgleichungen vorliegen, im Zeitbereich zu lösen. Dabei ist der Bewegungszustand (u, \dot{u}, \ddot{u}) zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ bekannt. Von diesem Zustand aus wird die Bewegungsgleichung in kleinen Zeitschritten $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ für diskrete Zeitpunkte t_i integriert. Die geschieht, indem die zeitlichen Ableitungen der Verschiebung u in der Bewegungsgleichung (\dot{u}, \ddot{u}) durch Verschiebungsvektoren u zur Zeit t (${}^t u$), zur Zeit $t - \Delta t$ (${}^{t-\Delta t} u$), zur Zeit $t + \Delta t$ (${}^{t+\Delta t} u$) und zu weiteren Zeitpunkten ersetzt werden. Um die Integration durchzuführen müssen daher Annahmen über den zeitlichen Verlauf der Bewegungsgrößen gemacht werden. So kann ein abschnittsweiser linearer Verlauf, ein quadratischer oder kubischer Verlauf vorausgesetzt werden. Weiter kann die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t oder $t + \Delta t$ oder sogar für einem anderen Zeitpunkt ($t + \Theta \Delta t$) gelöst werden. Hierfür sind verschiedene Verfahren entwickelt worden, die jeweils ihre Stärken (Genauigkeit, Robustheit) und Schwächen (Rechenzeitbedarf, Periodenverlängerung, artifizielle Dämpfung) haben. Hier sollen einige Verfahren dargestellt werden.

1.1 Analytische Lösung als Referenz

Die Güte der numerischen Verfahren soll an der analytischen Lösung eines krafterregten Einmassenschwingers mit einer Masse, einer Feder und einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer gemessen werden.

Dieses System wird durch die Differentialgleichung

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = \hat{f} \sin(\Omega t) \quad (1.1)$$

mit der Masse m , der Dämpfungskonstante c , der Federsteifigkeit k und der Erregerkraft $\hat{f} \sin(\Omega t)$, worin Ω die Erregerfrequenz ist. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Das Abstimmungsverhältnis zwischen Erregerkreisfrequenz und Eigenkreisfrequenz beträgt

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

Die Abklingkonstante ist

$$\delta = \frac{d}{2m}$$

Daraus ermittelt man das Lehrschen Dämpfungsmaß:

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{d}{2m\omega}$$

Die Eigenkreisfrequenz des (schwach) gedämpften Systems ergibt sich zu:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

Das logarithmischen Dämpfungsdekrement ergibt sich zu

$$\Lambda = \delta T_d = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

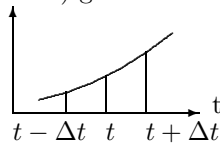
worin T_d die Periode des gedämpften Systems ist. Die analytische Lösung des schwach gedämpften Systems ergibt sich damit:

$$u(t) = e^{-\delta t} [A + \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)] + \frac{\hat{f}}{c} \frac{(1 - \eta^2) \sin(\Omega t) - 2D\eta \cos(\Omega t)}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}$$

worin der erste Summand die freie abklingende und der zweite die erzwungene Schwingung beschreibt.

1.2 Das Verfahren der zentralen Differenzen

Das wohl sofort einsichtigste Verfahren ist das Verfahren der zentralen Differenzen. Bei ihm werden die zeitlichen Ableitungen (\dot{u} und \ddot{u}) des Verschiebungsvektors u als zentraler Differenzenquotient aus den Verschiebungen zur Zeit $t - \Delta t$ (${}^{t-\Delta t}u$) und $t + \Delta t$ (${}^{t+\Delta t}u$) gebildet.



Geht man von den Stützstellen $t - \Delta t$ und $t + \Delta t$ aus, so erhält man für die Geschwindigkeit zur Zeit t :

$${}^t\dot{u} = \frac{{}^{t+\Delta t}u - {}^{t-\Delta t}u}{2\Delta t} \quad (1.2)$$

Um eine zentrale Differenz für die Beschleunigung anzugeben, werden die Differenz der Geschwindigkeiten zu den Zeitpunkten $t - \Delta t/2$ und $t + \Delta t/2$ benutzt.

$${}^t\ddot{u} = \frac{{}^{t+\Delta t/2}\dot{u} - {}^{t-\Delta t/2}\dot{u}}{\Delta t}$$

Mit der Rückwärtsdifferenz

$${}^{t-\Delta t/2}\dot{u} = \frac{{}^tu - {}^{t-\Delta t/2}u}{\Delta t}$$

und der Vorwärtsdifferenz

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{u} = \frac{{}^{t+\Delta t}u - {}^tu}{\Delta t}$$

erhält man für die Beschleunigung zum Zeitpunkt t :

$${}^t\ddot{u} = \frac{{}^{t+\Delta t}u - 2 {}^tu + {}^{t-\Delta t}u}{\Delta t^2} \quad (1.3)$$

Die Bewegungsgleichung wird für den Zeitpunkt t angeschrieben:

$$m {}^t\ddot{u} + c {}^t\dot{u} + k {}^tu = \hat{f} \sin(\Omega t) = f(t) \quad (1.4)$$

In Gleichung 1.4 werden die Ausdrücke nach Gleichung 1.2 und 1.3 eingeführt. Man erhält:

$$m \left[\frac{{}^{t+\Delta t}u - 2 {}^tu + {}^{t-\Delta t}u}{\Delta t^2} \right] + c \left[\frac{{}^{t+\Delta t}u - {}^{t-\Delta t}u}{2\Delta t} \right] + k {}^tu = \hat{f} \sin(\Omega t) \quad (1.5)$$

Nun wird Gleichung 1.5 nach den Verschiebungsvektoren zu den Zeit $t - \Delta t$, t und $t + \Delta t$ umgeordnet.

$$\left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0} m + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1} c \right] {}^{t+\Delta t}u + \left[-\underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2} m + k \right] {}^tu + \left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0} m - \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1} c \right] {}^{t-\Delta t}u = \hat{f} \sin(\Omega t)$$

Mit den Konstanten $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$ und $a_2 = \frac{2}{\Delta t^2}$ erhält man:

$$[a_0 m + a_1 c] {}^{t+\Delta t}u + [-a_2 m + k] {}^tu + [a_0 m - a_1 c] {}^{t-\Delta t}u = \hat{f} \sin(\Omega t) \quad (1.6)$$

Gleichung 1.6 läßt sich zu einem linearen Gleichungssystem mit dem Unbekanntenvektor ${}^{t+\Delta t}u$ umordnen:

$$\underbrace{[a_0 m + a_1 c]}_{\hat{m}} {}^{t+\Delta t}u = \underbrace{[a_2 m - k] {}^tu + [-a_0 m - a_1 c] {}^{t-\Delta t}u + \hat{f} \sin(\Omega t)}_{\hat{R}} \quad (1.7)$$

mit der effektiven Massenmatrix

$$\hat{m} = a_0 m + a_1$$

und der effektiven Rechten Seite:

$$\hat{R} = [a_2 m - k] {}^tu + [-a_0 m - a_1 c] {}^{t-\Delta t}u + \hat{f} \sin(\Omega t)$$

Um das Gleichungssystem 1.7 für den Zeitschritt $t = \Delta t$ lösen zu können, ist jedoch die Kenntnis des Verschiebungsvektors ${}^{t-\Delta t}u$ zur Zeit $-\Delta t$ erforderlich. Hierzu wird Gleichung 1.3 nach ${}^{t+\Delta t}u$ aufgelöst:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t\ddot{u} \Delta t^2 - {}^{t-\Delta t}u + 2 {}^tu \quad (1.8)$$

und in Gleichung 1.2 eingesetzt:

$${}^t\dot{u} = \frac{{}^t\ddot{u} \Delta t^2 - {}^{t-\Delta t}u + 2 {}^tu - {}^{t-\Delta t}u}{2\Delta t} \quad (1.9)$$

und nach ${}^{t-\Delta t}u$ aufgelöst:

$${}^{t-\Delta t}u = \underbrace{\frac{1}{2} \Delta t^2}_{a_3} {}^t\ddot{u} + {}^tu - \Delta t {}^t\dot{u} \quad (1.10)$$

Da davon davon ausgegangen wird, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Verschiebungsvektor u und seine zeitlichen Ableitungen \dot{u} und \ddot{u} bekannt sind, kann mit Gleichung 1.10 der Verschiebungsvektor zur Zeit $-\Delta t$ bestimmt werden.

Nun kann mit die Zeitintegration wie folgendermaßen durchgeführt werden:

1.2.1 Implementierung

Bestimmung der Konstanten: $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = \frac{2}{\Delta t^2}$ und $a_3 = \frac{\Delta t^2}{2}$ Anlaufwerte für Vorschritt nach Gleichung 1.10 bestimmen: ${}^{-\Delta t}u = {}^0u - \Delta t {}^0\dot{u} + a_3 {}^0\ddot{u}$ Berechnung der effektiven Massenmatrix: $\hat{m} = a_0 m + a_1 c$ \hat{m}^{-1} bestimmen:
Beginn der Zeitschleife:
effektive Rechte Seite bestimmen: $\hat{R} = [a_2 m - k] {}^tu + [-a_0 m - +a_1 c] {}^{t-\Delta t}u + \hat{f} \sin(\Omega t)$ Verschiebungsvektor bestimmen: ${}^{t+\Delta t}u = \hat{m}^{-1} \hat{R}$

1.2.2 Kritischer Zeitschritt

Der Größe des gewählten Zeitschritts kommt für die Brauchbarkeit der Ergebnisse eine besondere Bedeutung zu. Im Allgemeinen sollte der Zeitschritt nicht größer als ein Zehntel der derjenigen Peroide (gegebenenfalls des gedämpften Systems) gewählt werden, deren Verhalten man unteruchen will, da sie sonst nur ungenügend abgebildet wird. Beim Verfahren der zentralen Differenzen muß zusätzlich ein kritischer Zeitschritt beachtet werden. Ist der gewählte Zeitschritt größer als der kritische, wachsen die Amplituden gegen unendlich. Der kritische Zeitschritt beträgt beim Differenzenverfahren:

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (1.11)$$

T_n ist die kleinste Periode, die in System überhaupt vorkommt. Durch diese Forderung wird der Einsatzbereich des zentralen Differenzenverfahrens stark eingeschränkt, da bei größeren FE-Systemen häufig nur die unteren Frequenzen von Interesse sind. Das Differenzenverfahren würde einen unnötig kleinen Zeitschritt erforderlich machen.

1.2.3 Numerische Experimente mit dem Verfahren der zentralen Differenzen

Das Verfahren soll mit mehreren Experimenten erprobt werden. Einmal mit einen Einfreiheitsgradsystem (SDOF) das aus einer Masse von 3 kg und einer

Feder von 6 N/m besteht, dann mit einem System mit zwei Freiheitsgraden (MDOF). Die Rechnungen werden mit verschiedenen Zeitschritten über eine Gesamtzeit von 20 s durchgeführt und beim SDOF System der analytischen Lösung gegenübergestellt. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften SDOF Systems liegt bei $\sqrt{2} \frac{rad}{s}$. Die Periode liegt dementsprechend bei $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4.4429$ s, der kritische Zeitschritt somit bei $\sqrt{2} = 1.4142$ s. Die Rechnungen wurden mit dem $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ und dem 1,06 -fachen kritischen Zeitschritt durchgeführt. Bei der letzten Rechnung wurde der kritische Zeitschritt geringfügig überschritten um den Effekt des Wachsens über alle Grenzen zu sehen. Beim SDOF System werden folgende Untersuchungen durchgeführt:

- Ausschwingversuch: Die Masse wird um 1m ausgelenkt
- Ausschwingversuch mit Dämpfung: Die Masse wird 1 m ausgelenkt und mit 10% im Sinne von Lehr gedämpft.
- Erregung mit konstanter Erregerfrequenz: Das System wird aus der Ruhe heraus mit einer Kreisfrequenz von $1.0 \frac{rad}{s}$ mit einer Kraftamplitude von 1 N erregt.
- Erregung mit veränderlicher Kreisfrequenz. Das System wird aus der Ruhe heraus mit einer linear veränderlichen Kreisfrequenz von $1.0 - 2.0 \frac{rad}{s}$ mit einer Kraftamplitude von 1 N erregt. Es wird die Auslenkung u über der Erregerkreisfrequenz dargestellt.

Beim MDOF System wird ein Ausschwingversuch durchgeführt, der die Bedeutung der hohen Frequenzen für den kritischen Zeitschritt unterstreicht.

Ausschwingversuch (SDOF)

In Bild 1.1 werden die ersten vier numerischen Ergebnisse der analytischen Lösung gegenübergestellt. Die Rechnungen mit den Zeitschritten bis 0.707 s treffen die analytische Lösung recht gut. Weder ist eine Periodenveränderung noch eine (artifizielle) numerische Dämpfung festzustellen. Die Rechnung mit dem kritischen Zeitschritt ($\Delta t = 1.4142s$) zeigt eine deutliche Periodenverkürzung aber keinen Hinweis auf Aufschaukeln. Im unteren Teilbild 1.2 ist die Lösung mit dem

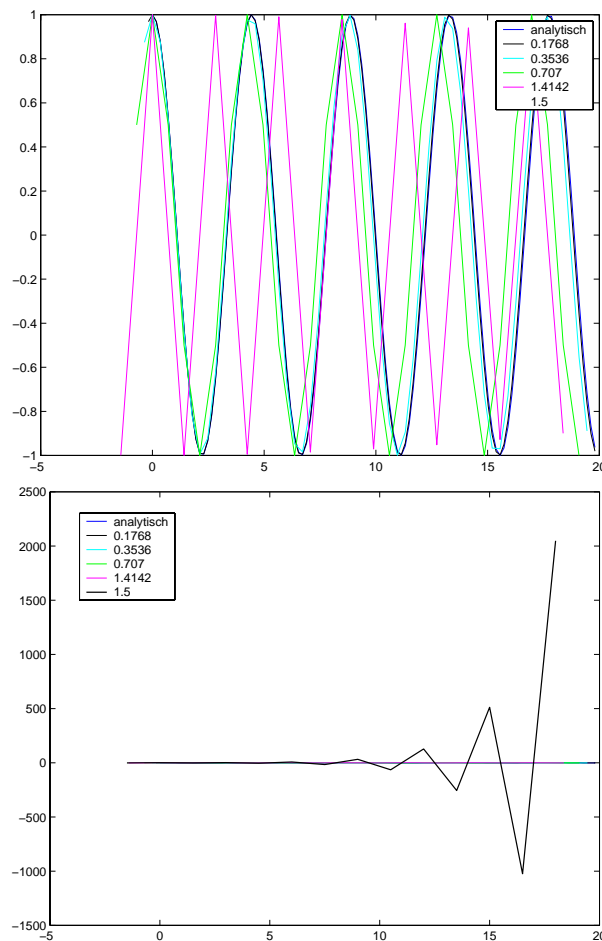


Abbildung 1.1: Zentrale Differenzen, Ausschwingversuch, Analytische Lösung und vier numerische Ergebnisse mit unterkritischen Zeitschritten (Teilbild 1) und zusätzlich überkritischem Zeitschritt (Teilbild 2)

überkritischen Zeitschritt zusätzlich dargestellt worden. Man erkennt deutlich, daß die Amplitude über alle Grenzen wächst.

Ausschwingversuch mit Dämpfung

Der eben dargestellte Ausschwingversuch wird wiederholt, jedoch wird zusätzlich eine Lehrsche Dämpfung von 10 % eingeführt.

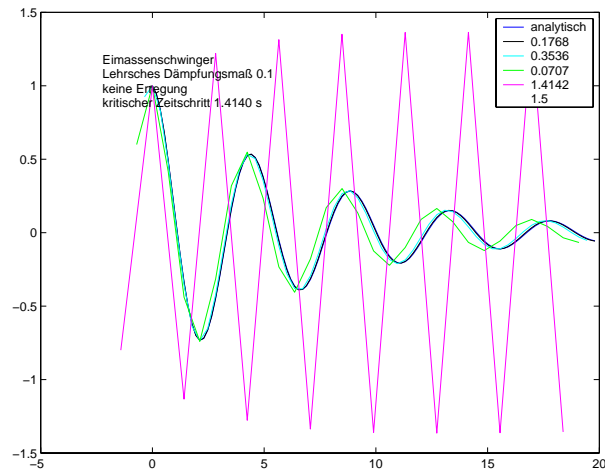


Abbildung 1.2: Ausschwingversuch mit Dämpfung

In der Darstellung werden Ergebnisse der Rechnung mit vier Zeitschritten der analytischen Lösung gegenübergestellt. Die Rechnung mit dem Zeitschritt $\Delta t = 0.707$ zeigt zwar eine Periodenverkürzung, aber keine signifikante Amplitudenverminderung. Der im ungedämpften Fall unkritische Zeitschritt $\Delta t = 1,4142$ s zeigt eine deutlich verkürzte Periode und die Tendenz zum Aufschaukeln, der die Dämpfung entgegenwirkt.

Erregung mit konstanter Kreisfrequenz

Das ungedämpfte System wurde aus der Ruhe mit einer Kreisfrequenz von $\Omega = 1 \frac{rad}{s}$ mit der Kraftamplitude von 1 N erregt. Die Lösungen der Rechnungen bis $\Delta t = 0.707$ s zeigen nur geringe Abweichungen zur analytischen Lösung. Die Rechnung mit dem kritischen Zeitschritt $\Delta t = \Delta t_{kr} = 1.4141$ s zeigt eine instabile der Lösung.

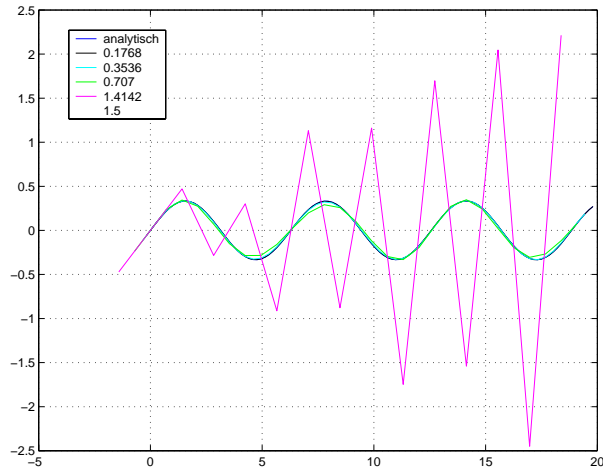


Abbildung 1.3: Erregung mit konstanter Kreisfrequenz

Erregung mit linear veränderlicher Erregerfrequenz

Im Unterschied zum vorhergehenden Abschnitt wird die Erregerfrequenz in 20 Sekunden linear von $\Omega_a = 1 \frac{rad}{s}$ auf $\Omega_b = 2 \frac{rad}{s}$ verändert. Die Verschiebungen u sind über der Erregerfrequenz aufgetragen (Bild 1.4). Die analytische Lösung bildet sich die Singularität beim Durchfahren der Eigenkreisfrequenz des Systems von $\Omega = 1.4141 \frac{rad}{s}$ deutlich ab. Sie wächst mit kleiner werdendem Zeitschritt. Die numerische Lösung zeigt die Erhöhung des Ausschlags nur marginal (mittleres Teilbild). Entzieht man dem System Energie durch eine Lehrsche Dämpfung von 10%, so wird der Unterschied von analytischer und numerischer Lösung deutlich geringer (Teilbild 4).

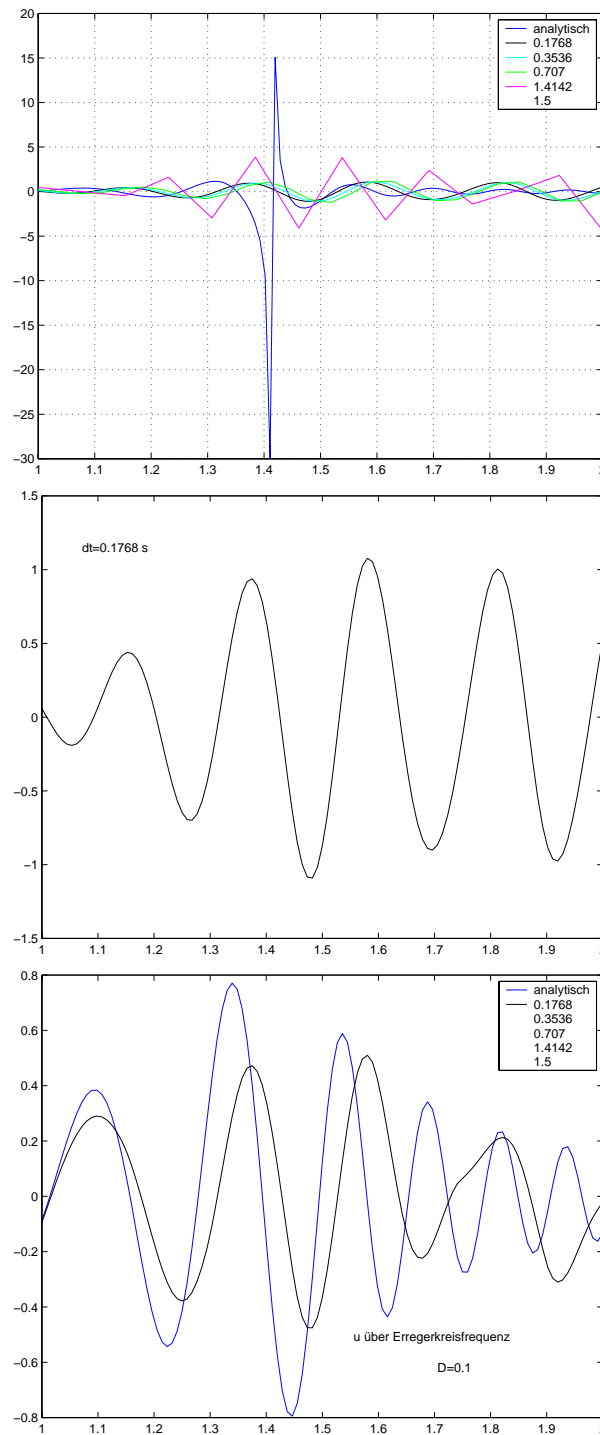


Abbildung 1.4: Linear veränderliche Erregung, Verschiebung über der Erregerfrequenz

Ausschwingversuch beim 2-Freiheitsgradsystem

Das System kann als ein aus zwei Massen und drei Federn zusammengesetzter Schwinger verstanden werden.

Die Steifigkeitsmatrix des Systems beträgt:

$$K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Massenmatrix ist:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Eigenkreisfrequenzen des Systems betragen: $\omega_1 = \sqrt{2} = 1,4141 \frac{rad}{s}$ und $\omega_2 = \sqrt{5} = 2,236 \frac{rad}{s}$. Die tiefere Frequenz liegt genau dort, wo auch die des SDOF Systems liegt. Da der kritische Zeitschritt auf die kürzere Periode (mit der höhern Frequenz) zu beziehen liegt er bei $\Delta t_{kr} = \frac{T_{min}}{\pi} = 0,894 \text{ s}$.

Die Dämpfungsmatrix ist unbesetzt. Der Anfangszustand ist:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor sind unbesetzt.

Als Zeitschritte werden wieder Bruchteile des kritischen Zeitschritts verwendet: und zwar $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ und der 1.1-fache kritische Zeitschritt Δt_{kr} . In Bild 1.5 sind die Verschiebungen der Masse 1 über der Zeit aufgetragen. Das obere Teilbild zeigt die mit den fünf kürzeren Zeitschritten erzielten Antworten. Die Rechnung mit dem kritischen Zeitschritt zeigt aufschaukelndes Verhalten und eine verkürzte Periode, die Rechnung mit dem halben kritischen Zeitschritt hat auch eine verkürzte Periode, die jedoch moderater ausfällt, die Rechnung ist jedoch stabil.

Das untere Teilbild zeigt auch die Rechnung mit dem überkritischen Zeitschritt. Die Antwort ist nicht stabil.

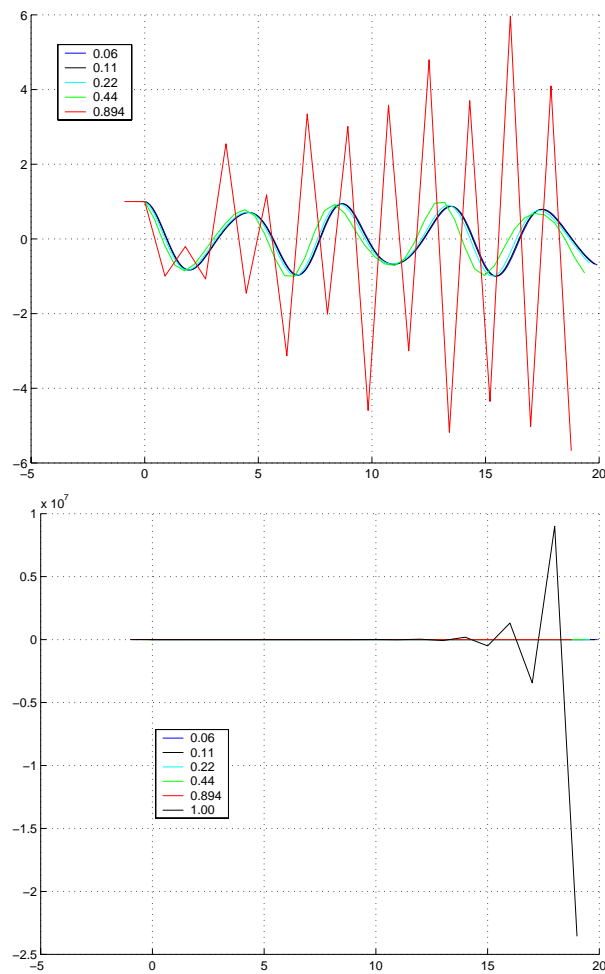


Abbildung 1.5: Ausschwingversuch 2-Freiheitsgradsystem

1.2.4 Zusammenfassende Bewertung der Ergebnisse mit dem Verfahren der zentralen Differenzen

Das Verfahren der zentralen Differenzen liefert zufriedenstellende Ergebnisse wenn der Zeitschritt kürzer als $\frac{1}{8}$ des kritischen gewählt wurde. Weder ist eine Periodenveränderung noch eine künstliche Dämpfung festzustellen. Dies gilt für den Ausschwingversuch mit und ohne Dämpfung sowie für die erregte Schwingung mit konstanter Erregerfrequenz. Bei veränderlicher Erregerfrequenz sind die Ergebnisse beim ungedämpften System nur bedingt aussagefähig, da die Singularität beim Durchfahren einer Eigenfrequenz nur unzureichend abgebildet wird. Die Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung ist beim schwach gedämpften besser.

1.3 Das Houboltsche Verfahren

Das Verfahren der zentralen Differenzen liefert bei kleinem Zeitschritt sehr gute Ergebnisse, wenn vom Problem der veränderlichen Erregerfrequenz abgesehen werden soll. Es hat jedoch den gravierenden Nachteil, daß die Größe des Zeitschritts vom kritischen Zeitschritt abhängig ist, der wiederum eine Funktion der kleinsten Periode bzw. der höchsten Frequenz die im untersuchten System vorkommt ist. Der Ingenieur ist aber oft nur an dem Verhalten der tiefen Frequenzen interessiert, da nur sie im FE-Modell gut abgebildet werden. Daher sind für die praktische Anwendung nur solche Verfahren interessant, die keinen kritischen Zeitschritt haben, man sagt, die unbedingt stabil sind. Das kann sogar auf Kosten der Genauigkeit der Lösung sein, denn erst durch einen der Fragestellung angepassten Zeitschritt, wird die Lösung im Zeitbereich durchführbar, da bei zu kleinem Zeitschritt die Rechenzeit gegen unendlich geht und zusätzlich die Rundungsfehler bei digitaler Zahlendarstellung mit endlicher Mantissee in die Größenordnung der Zuwächse der Lösungen geraten und die sie damit unbrauchbar machen.

Als Maß für die Güte der Lösung wird die Veränderung der Periode und die Energieerhaltung angesehen. Letzters kann an der Veränderung der Amplituden beim ungedämpften System studiert werden. Das Verfahren der zentralen Differenzen besteht die Prüfung im Hinblick auf beide Kriterien.

J. C. Houbolt ¹ entwickelte eine Methode, die sich vom zentralen Differenzenverfahren in folgenden Punkten unterscheidet:

- für die Verschiebungsfunktion u wird ein Polynom 3. Grades angenommen
- die Bewegungsgleichung (Gleichung 1.1) wird nicht wie in Gleichung 1.4 für den Zeitpunkt t sondern für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ angeschrieben.
- Die Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt für den Zeitschritt $t + \Delta t$

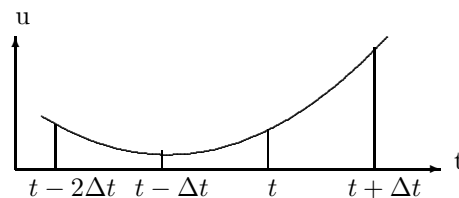


Abbildung 1.6: Kubischer Ansatz für die Verschiebung

1.3.1 Entwicklung der Ansätze von \dot{u} und \ddot{u}

Das Polynom dritten Grades zur Approximation von u dritten Grades lautet:

$$\begin{aligned} u &= a + b t + c t^2 + d t^3 \\ \dot{u} &= b + 2c t + 3d t^2 \\ \ddot{u} &= 2c + 6d t \end{aligned} \quad (1.12)$$

¹ „A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft“, Journal of Aeronautical Science, Vol. 17, 1950, pp 540-550. (wahrscheinlich ist es der: *1919 Iowa, USA, NASA Flugzeugingenieur, setzte Rendezvous Technik bei der bemannten Mondlandung durch (www.hq.nasa.gov/office/pao/History/monograph4/seaman.htm))

Die Koeffizienten a , b , c und d werden durch die Stützstellen $t = \Delta t$, $t = 0$, $t = -\Delta t$ und $t = -2\Delta t$ bestimmt.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 t = \Delta t & \Delta t u & = & a & + & b \Delta t & + & c \Delta t^2 & + & d \Delta t^3 \\
 t = 0 & {}^0 u & = & a & + & b 0 & + & c 0^2 & + & d 0^3 \\
 t = -\Delta t & -\Delta t u & = & a & + & b (-\Delta t) & + & c (-\Delta t)^2 & + & d (-\Delta t)^3 \\
 t = -2\Delta t & -2\Delta t u & = & a & + & b (-2\Delta t) & + & c (-2\Delta t)^2 & + & d (-2\Delta t)^3
 \end{array} \tag{1.13}$$

Man erhält für jede Stützstelle eine Gleichung, bei vier Stützstellen vier Gleichungen. Es ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a , b , c und d . Im Folgenden soll es gelöst werden.

Die zweite Gleichung aus 1.13 liefert sofort

$$a = {}^0 u \tag{1.14}$$

Addiert man die erste und die dritte Gleichung aus 1.13 unter Verwendung von 1.14 so erhält man:

$$\Delta t u + -\Delta t u = 2 {}^0 u + 2c \Delta t^2$$

woraus sich

$$c = \frac{1}{\Delta t^2} \left[\frac{1}{2} \Delta t u - {}^0 u + \frac{1}{2} -\Delta t u \right] \tag{1.15}$$

ergibt.

Als nächstes wird die erste Gleichung aus 1.13 verdoppelt und zur vierten addiert, man erhält:

$$2\Delta t u + -2\Delta t u = 2 {}^0 u + {}^0 u + 6c \Delta t^2 - 6d \Delta t^3$$

woraus unter Verwendung Gleichung 1.14 und 1.15 wird:

$$2\Delta t u + -2\Delta t u = 3 {}^0 u + 6 \frac{\Delta t u + -\Delta t u - 2 {}^0 u}{2\Delta t^2} \Delta t^2 - 6d \Delta t^3$$

d ergibt sich somit zu:

$$d = \frac{1}{\Delta t^3} \left[\frac{1}{6} \Delta t u - \frac{1}{2} {}^0 u + \frac{1}{2} -\Delta t u - \frac{1}{6} -2\Delta t u \right] \tag{1.16}$$

Setzt man in die erste der Gleichung 1.13 die Lösungen der Gleichungen 1.14, 1.15 und 1.16 ein, so erhält man für b :

$$b = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{3} \Delta t u + \frac{1}{2} {}^0 u - -\Delta t u + \frac{1}{6} -2\Delta t u \right] \tag{1.17}$$

Für \dot{u} erhält man für die Stelle Δt somit

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= b + 2c \Delta t + 3d \Delta t^2 \\
 \dot{u} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{3} \Delta t u + \frac{1}{2} {}^0 u - -\Delta t u + \frac{1}{6} -2\Delta t u \right] \\
 &+ \frac{2}{\Delta t^2} \left[\frac{1}{2} \Delta t u - {}^0 u + \frac{1}{2} -\Delta t u \right] \Delta t \\
 &+ \frac{3}{\Delta t^3} \left[\frac{1}{6} \Delta t u - \frac{1}{2} {}^0 u + \frac{1}{2} -\Delta t u - \frac{1}{6} -2\Delta t u \right] \Delta t^2
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Faßt man die Gleichung 1.18 zusammen erhält man:

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{11}{6} {}^{t+\Delta t}u - 3 {}^tu + \frac{3}{2} {}^{t-\Delta t}u - \frac{1}{3} {}^{t-2\Delta t}u \right] \quad (1.19)$$

Entsprechend erhält man für \ddot{u} :

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 2c + 6d \Delta t \\ \ddot{u} &= \frac{2}{\Delta t^2} \left[\frac{1}{2} {}^{\Delta t}u - {}^0u + \frac{1}{2} {}^{-\Delta t}u \right] \\ &+ \frac{6}{\Delta t^3} \left[\frac{1}{6} {}^{\Delta t}u - \frac{1}{2} {}^0u + \frac{1}{2} {}^{-\Delta t}u - \frac{1}{6} {}^{-2\Delta t}u \right] \Delta t \end{aligned} \quad (1.20)$$

Faßt man die Gleichung 1.20 zusammen erhält man:

$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} \left[2 {}^{t+\Delta t}u - 5 {}^tu + 4 {}^{t-\Delta t}u - {}^{t-2\Delta t}u \right] \quad (1.21)$$

1.3.2 Ableitung des Verfahrens

Mit Gleichung 1.19 und 1.21 sind die Approximationen für Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Verschiebungen zur Zeit $t + \Delta t$, t , $t - \Delta t$ und $t - 2\Delta t$ bekannt, die in Gleichung 1.1 für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ eingesetzt werden:

$$m {}^{t+\Delta t}\ddot{u} + c {}^{t+\Delta t}\dot{u} + k {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}R = \hat{f} \sin(\Omega + (t + \Delta t)) \quad (1.1)$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} m & \frac{1}{\Delta t^2} \left[2 {}^{t+\Delta t}u - 5 {}^tu + 4 {}^{t-\Delta t}u - {}^{t-2\Delta t}u \right] \\ + c & \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{11}{6} {}^{t+\Delta t}u - 3 {}^tu + \frac{3}{2} {}^{t-\Delta t}u - \frac{1}{3} {}^{t-2\Delta t}u \right] \\ + k & {}^{t+\Delta t}u \\ = & \hat{f} \sin(\Omega + (t + \Delta t)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Gleichung 1.22 wird umgeordnet durch Ausklammern von ${}^{t+\Delta t}u$:

$$\begin{aligned}
& \left[\underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_0} m + \underbrace{\frac{11}{6 \Delta t}}_{a_1} c + k \right] {}^{t+\Delta t}u \\
& - \left[\underbrace{\frac{5}{\Delta t^2}}_{a_2} m + \underbrace{\frac{3}{\Delta t}}_{a_3} c \right] {}^t u \\
& - \left[\underbrace{\frac{-4}{\Delta t^2}}_{a_4} m + \underbrace{\frac{-3}{2 \Delta t}}_{a_5} c \right] {}^{t-\Delta t}u \\
& - \left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_6} m + \underbrace{\frac{1}{3 \Delta t}}_{a_7} c \right] {}^{t-2\Delta t}u \\
& = \hat{f} \sin(\Omega(t + \Delta t))
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Schreibt man all bekannten Größen auf die rechte Seite erhält man mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{11}{6 \Delta t}; & a_2 &= \frac{5}{\Delta t^2}; & a_3 &= \frac{3}{\Delta t}; & a_4 &= -\frac{4}{\Delta t}; \\
a_5 &= -\frac{3}{2 \Delta t}; & a_6 &= \frac{1}{\Delta t^2}; & a_7 &= \frac{1}{3 \Delta t}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{[k + a_0 m + a_1 c]}_{\hat{k}} {}^{t+\Delta t}u &= \hat{f} \sin(\Omega(t + \Delta t)) \\
&+ [a_2 m + a_3 c] {}^t u \\
&+ [a_4 m + a_5 c] {}^{t-\Delta t}u \\
&+ [a_6 m + a_7 c] {}^{t-2\Delta t}u
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Gleichung 1.25 stellt ein lineares Gleichungssystem mit dem Unbekanntenvektor ${}^{t+\Delta t}u$. Der Klammerausdruck auf der linken Seite \hat{k} wird effektive Steifigkeitsmatrix genannt, der Ausdruck auf der rechten Seite effektive Rechte Seite \hat{R} . Um die Rechte Seite aufzubauen, sind die Verschiebungsvektoren des Zeitschrittes $t - \Delta t$ und $t - 2\Delta t$ erforderlich. Für den ersten Schritt ist ein Startverfahren erforderlich. Es kann als Erweiterung des Startverfahrens beim Differenzenverfahren verstanden werden.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die Verschiebungsgrößen (0u , ${}^0\dot{u}$ und ${}^0\ddot{u}$) bekannt. Für den Zeitpunkt $t = -\Delta t$ wird das Startverfahren benutzt, das bereits beim Differenzenverfahren abgeleitet wurde:

$${}^{-\Delta t}u = {}^0u - \Delta t {}^0\dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{u} \tag{1.26}$$

Für Zeit Δt wird der erste Schritt des Differenzenverfahrens durchgeführt.

$$\hat{m} = \left[\frac{1}{\Delta t^2} m + \frac{1}{2\Delta t} c \right]$$

$$\hat{r} = \underbrace{\hat{f} \sin(\Omega \cdot 0)}_0 - \left[\left(k - \frac{2}{\Delta t^2} m \right) {}^0u - \left[\frac{1}{\Delta t^2} m + \frac{1}{2\Delta t} c \right] {}^{-\Delta t}u \right] \quad (1.27)$$

Den Verschiebungsvektor ${}^{\Delta t}u$ für den Zeitpunkt Δt findet man durch Lösung des Gleichungssystems

$$\hat{m} {}^{\Delta t}u = \hat{r} \quad (1.28)$$

Das Houboltsche Verfahren setzt dann für den Zeitschritt $2\Delta t$ ein. Da beim Startverfahren die Voraussetzungen des Differenzenverfahrens gelten, kann es notwendig sein, einen kleineren Zeitschritt für den Start zu wählen.

1.3.3 Numerische Experimente

Ausschwingversuch

Es ist das gleiche Feder Masse System wie beim Differenzenverfahren ($m=3$, $k=6$) mit den gleichen Zeitschritten untersucht worden. Abb. 1.7 zeigt sowohl

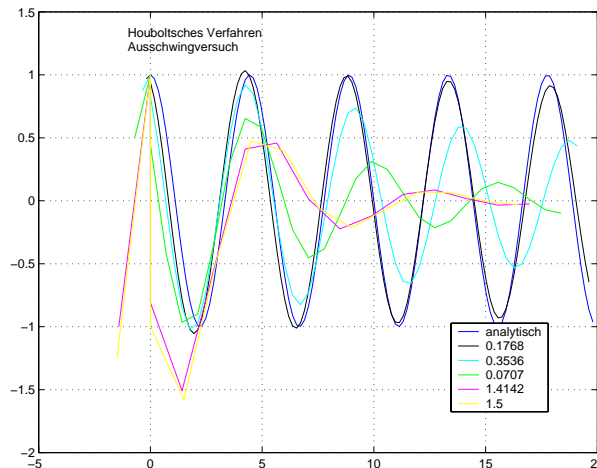


Abbildung 1.7: Houboltsches Verfahren, Ausschwingversuch, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

eine geringe numerische Dämpfung als auch eine Phasenverlängerung, die bei größer werdendem Zeitschritt wachsen. Bemerkenswert ist, daß die Lösungen mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1.4142\text{s}$ und $\Delta t = 1.5\text{s}$ nicht instabil werden, sondern eine hohe numerische Dämpfung zeigen. Die hohen Ausschläge bei den ersten Zeitschritten sind auf das Startverfahren zurückzuführen.

Ausschwingversuch mit Dämpfung

In nächsten versuch wird das System mit einer Lehrschen Dämpfung von 10 % belegt. Die Bewertung des Plots (Abb. 1.8) der Verschiebung über der Zeit ist prinzipiell gleich wie beim Ausschwingversuche ohne Dämpfung.

Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz

Das ungedämpfte System wird aus der ungestörten Lage mit einer Kreisfrequenz von $\frac{1}{rad}$ durch eine kraft mit der Amplitude 1 erregt. Der Plot (Abb. 1.9) zeigt die Verschiebung über der Zeit. Die Periode der Erregerfrequenz mit 2π bildet sich in der Systemantwort ab. Phasenverlängerung und numerische Dämpfung sind auch hier zu beobachten.

Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz

Wie schon beim Differenzenverfahren wird das System mit einer linear verändlichen Erregerkreisfrequenz von $1\frac{rad}{s}$ bis $2\frac{rad}{s}$ erregt. Die Eigenkreisfrequenz des Systems mit $\omega = 1.4142\frac{rad}{s}$ wird von diesem Bereich abgedeckt. Die Verschie-

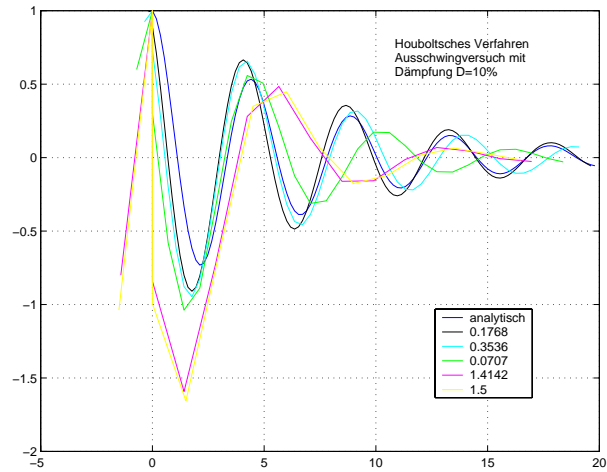


Abbildung 1.8: Houbolt'sches Verfahren, Ausschwingversuch mit Dämpfung, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

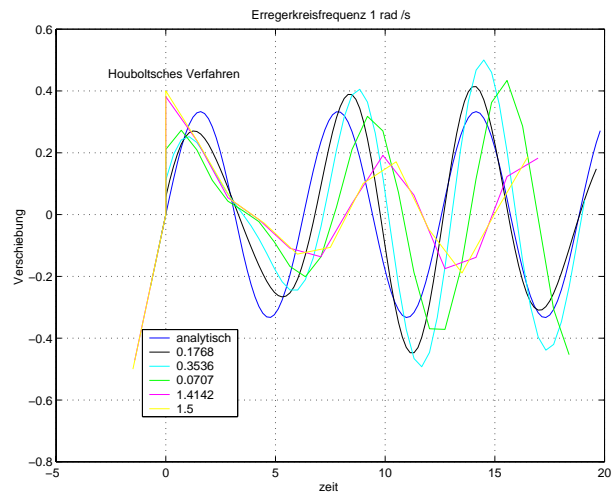


Abbildung 1.9: Houbolt'sches Verfahren, Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

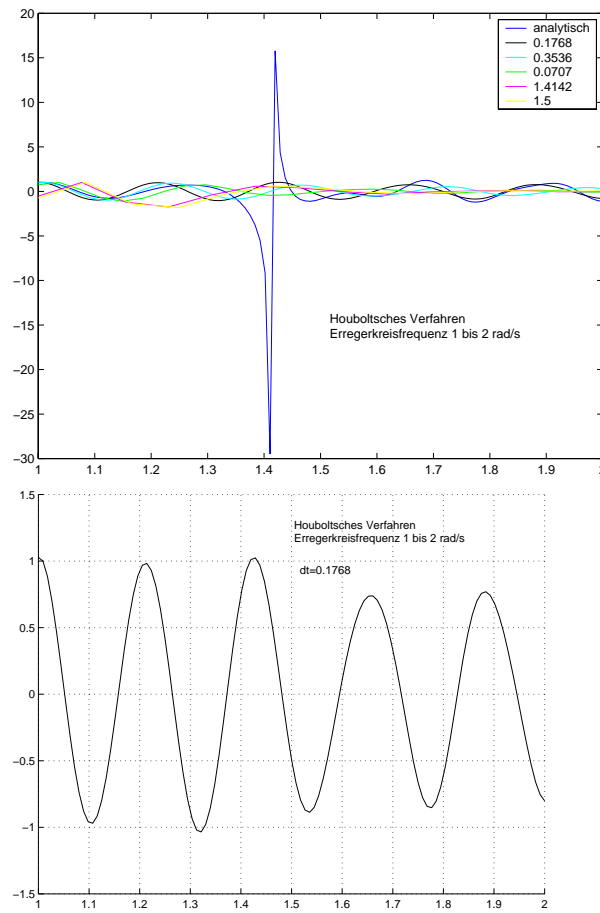


Abbildung 1.10: Houboltsches Verfahren, Erregung mit veränderlicher Erregerkreisfrequenz, Analytische Lösung und numerische Ergebnisse

bung ist im Plot (Abb.1.10 über der Erregerfrequenz aufgetragen. Die analytische Lösung im oberen Teilbild zeigt die zu erwartende Singularität deutlich. Bei den numerischen Lösungen ist sie jedoch kaum zu erkennen. Das untere Teilbild zeigt allein die Lösung für den Zeitschritt $\Delta t = 0.1768s$. Hier kann eine moderate Amplitudenerhöhung bei einer Erregerfrequenz $1.4 \frac{rad}{s}$ erahnt werden.

Ausschwingversuch beim 2-Freiheitsgrad-System

Das gleiche 2-Freiheitsgrad-System, das auch beim Differenzenverfahren untersucht wurde, wird auch mit dem Houbolt Verfahren gerechnet. Der Plot der

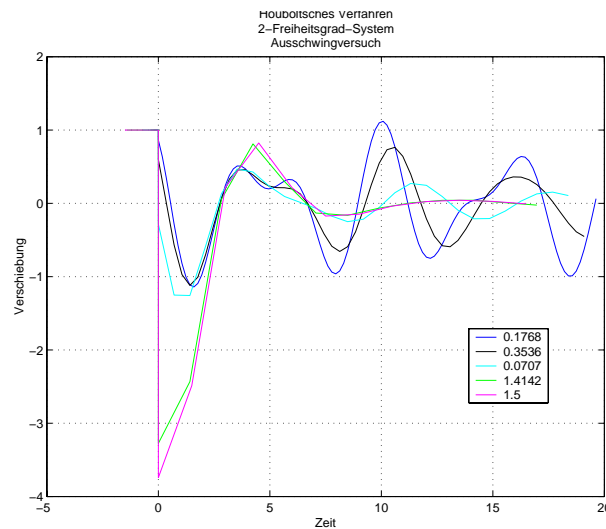


Abbildung 1.11: Houboltsches Verfahren, Ausschwingversuch eines 2-Freiheitsgrad-Systems

Verschiebung über der Zeit (Abb. 1.11) zeigt Abweichungen der Lösungen mit verschiedenen Zeitschritten, da eine analytische Lösung nicht angegeben ist, muß ein Vergleich unterbleiben. Festgestellt muß jedoch werden, daß auch Rechnungen mit Zeitschritten, die beim Differenzenverfahren nicht stabil waren, keinen Hinweis auf instabiles Verhalten zeigen.

1.3.4 Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Houboltschen Verfahren

Das Houboltsche Verfahren zeigt in allen Untersuchungen sowohl eine Periodenverlängerung als auch eine künstliche Dämpfung und ist hierin dem Differenzenverfahren unterlegen. Positiv herauszuheben ist jedoch, daß in keinem Falle instabiles Verhalten zu beobachten war. Das Houboltsche Verfahren ist unbedingt stabil, was für seine praktische Anwendbarkeit von großer Bedeutung ist.

1.4 Das Wilson Θ Verfahren

Gegenüber dem Differenzenverfahren hat das Houboltsche Verfahren den Nachteil der größeren numerischen Dämpfung und der Periodenverlängerung. Es hat aber auch den großen Vorteil unbedingt stabil zu sein, man kann also ohne Rücksicht auf einen kritischen Zeitschritt Δt_{kr} ein System mit beliebig kleinen Eigenfrequenzen im Zeitbereich integrieren, den Zeitschritt richtet man nur nach den Frequenzen aus, die für die Lösung der technischen Fragestellung von Bedeutung sind, meist nach unteren Frequenzen.

1.4.1 Grundsätze des Verfahrens

Für das gleiche Problem hat Wilson ² untersucht. Er hat seine Methode nach folgenden Grundsätzen ausgerichtet:

- Für die Beschleunigung \ddot{u} wird ein linearer Ansatz in τ über den Zeitbereich von t bis $t + \Theta\Delta t$ eingeführt
- Die Hilfsvariable τ beginnt bei t und weist in die positive Zeitachse, sie dient als Integrationsvariable
- \dot{u} und u werden durch Integration von \ddot{u} gewonnen.
- Die Bewegungsgleichung wird für den Zeitpunkt $t + \Theta\Delta t$ angeschrieben und gelöst
- über den linearen Ansatz für \ddot{u} wird auf die Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ geschlossen.

Durch die freie Wahl des Zeitpunkts $t + \Theta\Delta t$, für den die Bewegungsgleichung gelöst wird, hat das Wilson Θ Verfahren einen Freiheitsgrad, mit dem Stabilität und numerische Dämpfung beeinflusst werden kann. Es zeigt sich, daß $\Theta \geq 1.37$ zu wählen ist, damit die unbedingte Stabilität gewährleistet ist.

1.4.2 Ansatz der linearen Beschleunigung

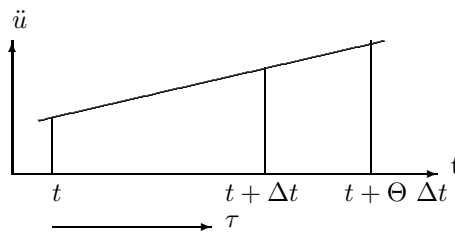


Abbildung 1.12: Linearer Beschleunigungsansatz und seine Integration

Nach Abb.1.4.2 kann für den linearen Ansatz ${}^{t-\tau}\ddot{u}$ geschrieben werden:

$${}^{t+\tau}\ddot{u} = {}^t\ddot{u} + \frac{\tau}{\Theta\Delta t} [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}] \quad (1.29)$$

²E.L.Wilson, I. Farhoomand, and K.J.Bathe, „Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures“, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1 1973, pp 241-252.

Integriert man Gleichung 1.29 so erhält man:

$${}^{t+\tau}\dot{u} = \underbrace{{}^t\dot{u}}_{\text{Integrationskonstante}} + {}^t\ddot{u} \tau + \frac{\tau^2}{2\Theta\Delta t} [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}] \quad (1.30)$$

Die zweite Integration liefert:

$${}^{t+\tau}u = \underbrace{{}^tu}_{\text{Integrationskonstante}} + {}^t\dot{u} \tau + \frac{1}{2} {}^t\ddot{u} \tau^2 + \frac{1}{6\Theta\Delta t} \tau^3 [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}] \quad (1.31)$$

In den Gleichungen 1.30 und 1.31 wird nun für $\tau = \Theta \Delta t$ eingesetzt:

$${}^{t+\Theta\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + {}^t\ddot{u} \Theta \Delta t + \frac{\Theta^2 \Delta t^2}{2\Theta\Delta t} [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}] \quad (1.32)$$

$${}^{t+\Theta\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u} \Theta \Delta t + \frac{1}{2} {}^t\ddot{u} (\Theta \Delta t)^2 + \frac{1}{6\Theta\Delta t} (\Theta \Delta t)^3 [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}] \quad (1.33)$$

Die Zusammenfassung von Gleichung 1.32 führt auf

$${}^{t+\Theta\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \frac{\Theta \Delta t}{2} [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} + {}^t\ddot{u}] \quad (1.34)$$

und von Gleichung 1.33 auf

$${}^{t+\Theta\Delta t}u = {}^tu + \Theta \Delta t {}^t\dot{u} + \frac{1}{6} \Theta^2 \Delta t^2 [{}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} + 2 {}^t\ddot{u}] \quad (1.35)$$

Stellt man Gleichung 1.35 nach ${}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u}$ um, so erhält man:

$${}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} = \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} [{}^{t+\Theta\Delta t}u - {}^tu] - \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t\dot{u} - 2 {}^t\ddot{u} \quad (1.36)$$

Führt man nun Gleichung 1.36 in Gleichung 1.34 ein, so erhält man:

$${}^{t+\Theta\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \frac{\Theta \Delta t}{2} \left[\frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} [{}^{t+\Theta\Delta t}u - {}^tu] - \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t\dot{u} - 2 {}^t\ddot{u} + {}^t\ddot{u} \right]$$

oder vereinfacht

$${}^{t+\Theta\Delta t}\dot{u} = \frac{3}{\Theta \Delta t} [{}^{t+\Theta\Delta t}u - {}^tu] - 2 {}^t\dot{u} - \frac{\Theta \Delta t}{2} {}^t\ddot{u} \quad (1.37)$$

1.4.3 Einführung der Ansätze in die Bewegungsgleichung

Nun wird die Bewegungsgleichung 1.1 für die Zeit $t + \Theta\Delta t$ angeschrieben:

$$m {}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} + c {}^{t+\Theta\Delta t}\dot{u} + k {}^{t+\Theta\Delta t}u = {}^{t+\Theta\Delta t}R \quad (1.38)$$

Die rechte Seite ${}^{t+\Theta\Delta t}R$ für den Zeitpunkt $t + \Theta\Delta t$ findet man durch lineare Extrapolation:

$${}^{t+\Theta\Delta t}R = {}^tR + \Theta ({}^{\Delta t}R - {}^tR) \quad (1.39)$$

Nun wird Gleichung 1.36 und Gleichung 1.37 in Gleichung 1.38 eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& m \underbrace{\left[\frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} [{}^{t+\Theta \Delta t} u - {}^t u] - \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t \dot{u} - 2 {}^t \ddot{u} \right]}_{t+\Theta \Delta t \ddot{u}} \\
& + c \underbrace{\left[\frac{3}{\Theta \Delta t} [{}^{t+\Theta \Delta t} u - {}^t u] - 2 {}^t \dot{u} - \frac{\Theta \Delta t}{2} {}^t \ddot{u} \right]}_{t+\Theta \Delta t \dot{u}} \\
& + k {}^{t+\Theta \Delta t} u = \underbrace{{}^t R + \Theta ({}^{\Delta t} R - {}^t R)}_{t+\Theta \Delta t R}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Man führt man folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{6}{(\Theta \Delta t)^2} & a_1 &= \frac{3}{\Theta \Delta t} & a_2 &= \frac{6}{\Theta \Delta t} & a_3 &= \frac{\Theta \Delta t}{2} & a_4 &= \frac{6}{\Theta^3 \Delta t^2} \\
a_5 &= -\frac{6}{\Theta^2 \Delta t} & a_6 &= 1 - \frac{3}{\Theta} & a_7 &= \frac{\Delta t}{3} & a_8 &= \frac{\Delta t^2}{6}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Und erhält aus Gleichung 1.40:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{[a_0 + m + a_1 c + k]}_{\hat{k}} {}^{t+\Theta \Delta t} u = \\
& m \underbrace{[a_0 {}^t u + a_2 {}^t \dot{u} + 2 {}^t \ddot{u}] + c [a_1 {}^t u + 2 {}^t \dot{u} + a_3 {}^t \ddot{u}] + {}^t R + \Theta ({}^{\Delta t} R - {}^t R)}_{t+\Theta \Delta t \hat{R}}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Die Matrix \hat{k} ist wieder die effektive Steifigkeitsmatrix, sie kann vor der Zeitschleife gebildet und gestaffelt werden. Die effektive Rechte Seite ${}^{t+\Theta \Delta t} \hat{R}$ für den Zeitpunkt $t + \Theta \Delta t$ muß für jeden Zeitschritt neu berechnet werden. Die Verschiebungen ${}^{t+\Theta \Delta t} u$ können mit

$${}^{t+\Theta \Delta t} u = \hat{k}^{-1} {}^{t+\Theta \Delta t} \hat{R} \tag{1.43}$$

bestimmt werden. (Bei großen Systemen wird nicht die Inverse von \hat{k} benutzt, sondern die gestaffelte Form nach Cholesky)

Die Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ erhält man:

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \ddot{u} &= a_4 ({}^{t+\Theta \Delta t} u - {}^t u) + a_5 {}^t \dot{u} + a_6 {}^t \ddot{u} \\
{}^{t+\Delta t} \dot{u} &= {}^t \dot{u} + a_7 ({}^{t+\Theta \Delta t} \ddot{u} + {}^t \ddot{u}) \\
{}^{t+\Delta t} u &= {}^t u + \Delta t {}^t \dot{u} + a_8 ({}^{t+\Theta \Delta t} \ddot{u} + 2 {}^t \ddot{u})
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Wie man an Gleichung 1.44 erkennt, werden die Größen ${}^t \dot{u}$ und ${}^t \ddot{u}$ für die Durchführung des Verfahrens benötigt und müssen daher berechnet werden.

1.4.4 Numerische Experimente

Es werden wieder die gleichen Untersuchungen wie bei den Verfahren zuvor durchgeführt.

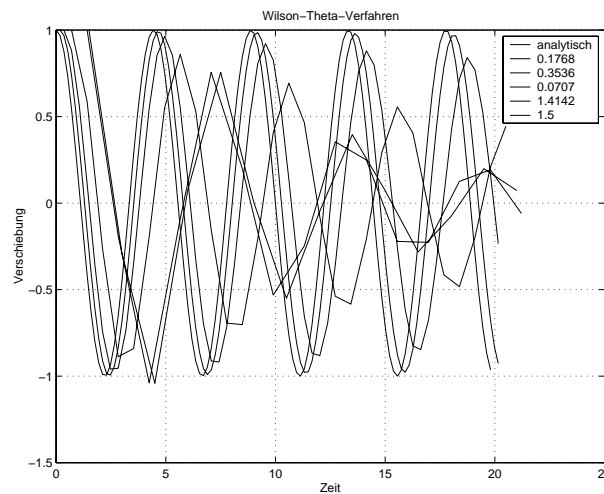


Abbildung 1.13: Wilson- Θ -Verfahren, Ausschwingversuch, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

Ausschwingversuch

Es ist das gleiche Feder Masse System wie beim Differenzenverfahren ($m=3$, $k=6$) mit den gleichen Zeitschritten untersucht worden. Abb. 1.13 zeigt sowohl eine geringe numerische Dämpfung als auch eine Phasenverlängerung, die bei größer werdendem Zeitschritt wachsen. Bemerkenswert ist, daß die Lösungen mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1.4142\text{s}$ und $\Delta t = 1.5\text{s}$ nicht instabil werden, sondern eine hohe numerische Dämpfung zeigen.

Ausschwingversuch mit Dämpfung

In nächsten versuch wird das System mit einer Lehrschen Dämpfung von 10 % belegt. Die Bewertung des Plots (Abb. 1.14) der Verschiebung über der Zeit ist prinzipiell gleich wie beim Ausschwingversuche ohne Dämpfung.

Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz

Das ungedämpfte System wird aus der ungestörten Lage mit einer Kreisfrequenz von $\frac{1}{\text{rad}}$ durch eine kraft mit der Amplitude 1 erregt. Der Plot (Abb. 1.15) zeigt die Verschiebung über der Zeit. Die Periode der Erregerfrequenz mit 2π bildet sich in der Systemantwort ab. Phasenverlängerung und numerische Dämpfung sind auch hier zu beobachten.

Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz

Wie schon beim Differenzenverfahren wird das System mit einer linear verändlichen Erregerkreisfrequenz von $1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ bis $2\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ erregt. Die Eigenkreisfrequenz des Systems mit $\omega = 1.4142\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ wird von diesem Bereich abgedeckt. Die Verschiebung ist im Plot (Abb.1.16 über der Erregerfrequenz aufgetragen. Die analytische Lösung im oberen Teilbild zeigt die zu erwartende Singularität deutlich. Bei den numerischen Lösungen ist sie jedoch kaum zu erkennen. Das untere

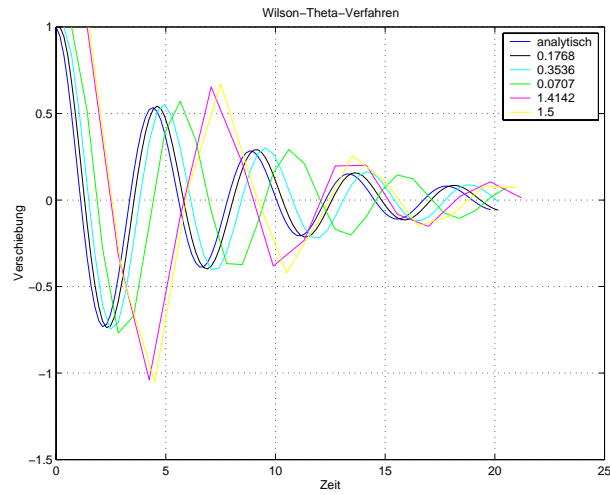


Abbildung 1.14: Wilson-Theta-Verfahren, Ausschwingversuch mit Dämpfung, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

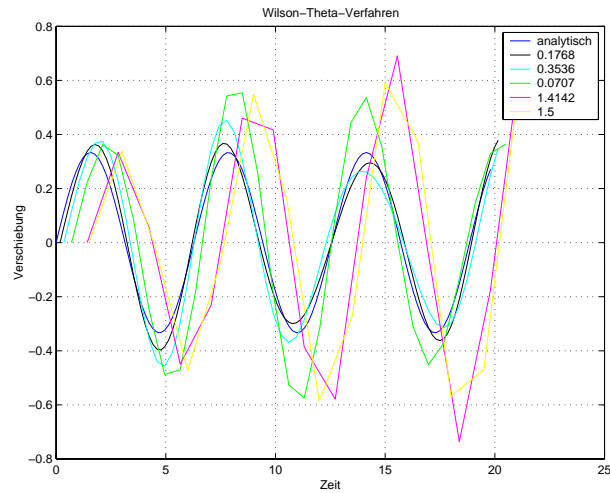


Abbildung 1.15: Wilson-Theta-Verfahren, Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

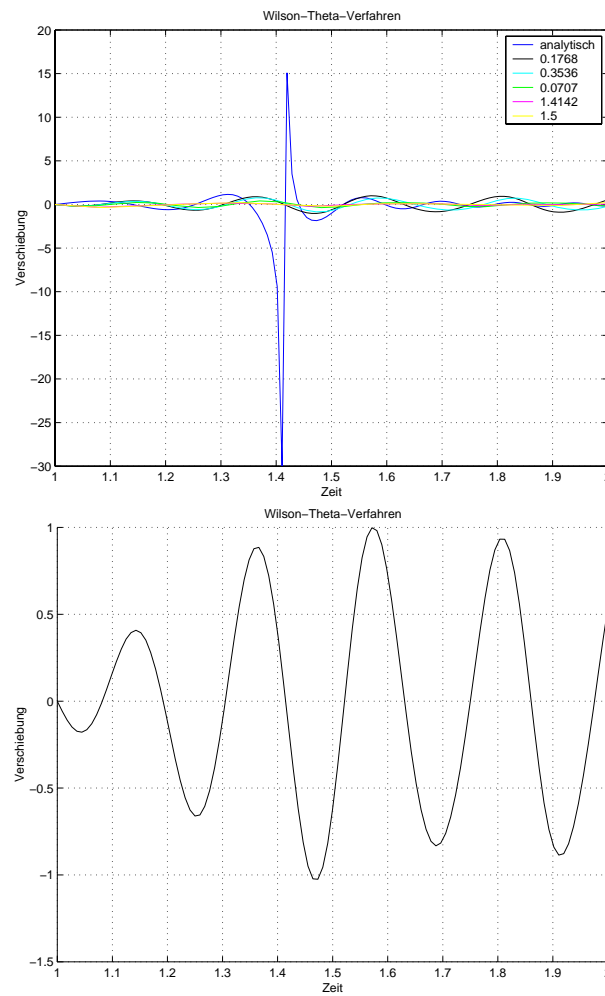


Abbildung 1.16: Wilson-Theta-Verfahren, Erregung mit veränderlicher Erregerkreisfrequenz, Analytische Lösung und numerische Ergebnisse

Teilbild zeigt allein die Lösung für den Zeitschritt $\Delta t = 0.1768s$. Hier kann eine Amplitudenerhöhung bei einer Erregerfrequenz $1.4 \frac{rad}{s}$ erkannt werden.

1.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Wilson- Θ -Verfahren

Das Wilson- Θ -Verfahren zeigt in allen Untersuchungen sowohl eine Periodenverlängerung als auch eine künstliche Dämpfung und ist hierin dem Differenzenverfahren unterlegen. Positiv herauszuheben ist jedoch, daß in keinem Falle instabiles Verhalten zu beobachten war. Das Wilson- Θ -Verfahren ist mit $\Theta = 1.37$ unbedingt stabil, was für seine praktische Anwendbarkeit von großer Bedeutung ist. Sowohl die Periodenverlängerung als auch die künstliche Dämpfung fallen beim Wilson- Θ -Verfahren kleiner aus, als beim Houboltschen Verfahren.

1.5 Das Newmark-Verfahren

Eine weitere Methode der Lösung der Bewegungsgleichung im Zeitbereich ist das Newmark-Verfahren³. Das neue am Wilson-*Theta*-Verfahren war, daß ein Parameter geschaffen wurde, mit dem die Stabilität und der Amplitudenabfall beeinflußt werden konnte. Das Newmark -Verfahren verfügt über zwei solcher Parameter. Einer ist δ , der gewöhnlich auf $\delta = 0.5$ gesetzt wird.

1.5.1 Ansatz für Geschwindigkeit und Beschleunigung

Mit ihm bestimmt man die Geschwindigkeit für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ wie folgt:

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \underbrace{[(1-\delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}]}_{\text{Zuwachs}} \Delta t \quad (1.45)$$

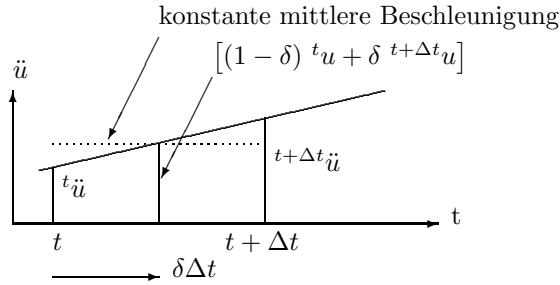


Abbildung 1.17: Konstante mittlere Beschleunigung

Mit dem Parameter δ kann die Wichtung der Beschleunigungen zur Zeit t und zur Zeit $t + \Delta t$ verändert werden und damit Einfluß auf Stabilität und Genauigkeit genommen werden. Die Verschiebung ${}^{t+\Delta t}u$ wird dementsprechend Integration der Geschwindigkeit

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \frac{1}{2} [(1-\delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}] \Delta t^2$$

Bringt man den ausgeklammerten Faktor $\frac{1}{2}$ in die Klammer hinein erhält man:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} \right) {}^t\ddot{u} + \frac{\delta}{2} {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \right] \Delta t^2$$

Nun wird für $\frac{1}{2}\delta = \alpha$ gesetzt und man erhält:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{u} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \right] \Delta t^2 \quad (1.46)$$

α ist ein zweiter Parameter, der zur Kontrolle der Stabilität und Genauigkeit eingesetzt werden kann. Für die Wahl gilt:

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0.50 \\ \alpha &\geq 0.25 (0.5 + \delta)^2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

³N.M. Newmark: „A Method of Computation for Structural Dynamics“, A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, 1959, pp. 67-94.

1.5.2 Entwicklung des Verfahrens

Löst man Gleichung 1.46 nach ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ so erhält man:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = \left[\left({}^{t+\Delta t}u - {}^tu - {}^t\dot{u}\Delta t \right) \frac{1}{\Delta t^2} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{u} \right] \frac{1}{\alpha}$$

Multipliziert man die Klammern aus, so ergibt sich:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} - \left[\frac{1}{2\alpha} - 1 \right] {}^t\ddot{u} \quad (1.48)$$

Die neu gewonnene Gleichung 1.48, die auf der rechten Seite als Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ nur die Verschiebung enthält, wird in Gleichung 1.45 eingesetzt: Man erhält:

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \left\{ (1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} - \left[\frac{1}{2\alpha} - 1 \right] {}^t\ddot{u} \right] \right\} \Delta t$$

Die Ausmultiplizieren der Klammern und Umordnung liefert:

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}u + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) {}^t\dot{u} - \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t {}^t\ddot{u} \quad (1.49)$$

Nun wird die Bewegungsgleichung 1.1 für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ angeschrieben

$$m {}^{t+\Delta t}\ddot{u} + c {}^{t+\Delta t}\dot{u} + k {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}R \quad (1.50)$$

und für ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ und ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ die Ausdrücke nach Gleichung 1.48 und Gleichung 1.49 eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} & m \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} - \left[\frac{1}{2\alpha} - 1 \right] {}^t\ddot{u} \right] \\ & + c \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}u + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu - \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) {}^t\dot{u} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) {}^t\ddot{u} \\ & + k {}^{t+\Delta t}u \\ & = {}^{t+\Delta t}R \end{aligned} \quad (1.51)$$

1.5.3 Zur Durchführung des Verfahrens notwendige Gleichungen

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2} & a_1 &= \frac{\alpha}{\alpha\Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha\Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right] & a_6 &= \Delta t(1 - \delta) & a_7 &= \delta\Delta t \end{aligned} \quad (1.52)$$

und Umordnung erhält man:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[k + a_0m + a - 1c]}_{\hat{k}} {}^{t+\Delta t}u \\ & = \underbrace{{}^{t+\Delta t}R + m [a_0 {}^tu + a_2 {}^t\dot{u} + a_3 {}^t\ddot{u}] + c [a_1 {}^tu + a_4 {}^t\dot{u} + a_5 {}^t\ddot{u}]}_{{}^{t+\Delta t}\hat{R}} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Auf der linken Seite sieht man die effektive Steifigkeitsmatrix \hat{k} , die für alle Zeitschritte konstant ist und den Unbekanntenvektor ${}^{t+\Delta t}u$, auf der Rechten Seite, sind alle Ausdrücke bekannt. Gleichung 1.53 stellt ein lineares Gleichungssystem dar.

Nach der Lösung von Gleichung 1.53 können die Beschleunigung und die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$ mit Gleichung 1.54 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{u} &= a_0({}^{t+\Delta t}u - {}^tu) - a_2 {}^t\dot{u} - a_3 {}^t\ddot{u} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{u} &= {}^t\dot{u} + a_6 {}^t\ddot{u} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \end{aligned} \quad (1.54)$$

1.5.4 Numerische Experimente

Es werden wieder die gleichen Untersuchungen wie bei den Verfahren zuvor durchgeführt.

Ausschwingversuch

Es ist das gleiche Feder Masse System wie beim Differenzenverfahren ($m=3$, $k=6$) mit den gleichen Zeitschritten untersucht worden. Abb. 1.18 zeigt sowohl

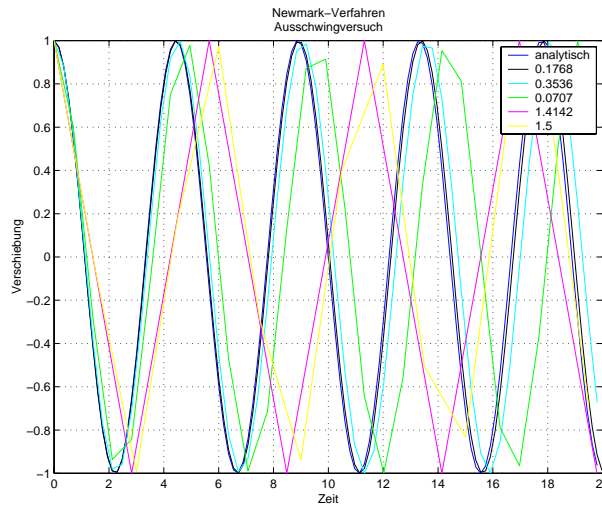


Abbildung 1.18: Newmark-Verfahren, Ausschwingversuch, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

eine geringe numerische Dämpfung als auch eine Phasenverlängerung, die bei größer werdendem Zeitschritt wachsen. Bemerkenswert ist, daß die Lösungen mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1.4142s$ und $\Delta t = 1.5s$ nicht instabil werden, sondern eine geringe numerische Dämpfung zeigen.

Ausschwingversuch mit Dämpfung

In nächsten Versuch wird das System mit einer Lehrschen Dämpfung von 10 % belegt. Die Bewertung des Plots (Abb. 1.19) der Verschiebung über der Zeit ist prinzipiell gleich wie beim Ausschwingversuche ohne Dämpfung.

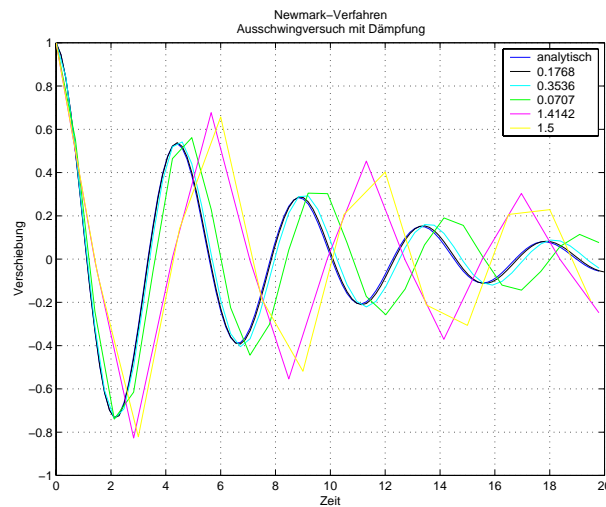


Abbildung 1.19: Newmark-Verfahren, Ausschwingversuch mit Dämpfung, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz

Das ungedämpfte System wird aus der ungestörten Lage mit einer Kreisfrequenz von $\frac{1}{rad}$ durch eine Kraft mit der Amplitude 1 erregt. Der Plot (Abb. 1.20) zeigt die Verschiebung über der Zeit. Die Periode der Erregerfrequenz mit 2π bildet sich in der Systemantwort ab. Phasenverlängerung und numerische Dämpfung sind auch hier zu beobachten.

Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz

Wie schon beim Differenzenverfahren wird das System mit einer linear veränderlichen Erregerkreisfrequenz von $1 \frac{rad}{s}$ bis $2 \frac{rad}{s}$ erregt. Die Eigenkreisfrequenz des Systems mit $\omega = 1.4142 \frac{rad}{s}$ wird von diesem Bereich abgedeckt. Die Verschiebung ist im Plot (Abb. 1.16 über der Erregerfrequenz aufgetragen. Die analytische Lösung ist nicht dargestellt worden sondern nur die numerische Lösung mit $\Delta t = 0.1768s$. Eine Amplitudenerhöhung beim Durchfahren der Eigenkreisfrequenz bei $1.4142 \frac{rad}{s}$ kann werden.

1.5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse mit dem Newmark-Verfahren

Auch das Newmark-Verfahren zeigt in allen Untersuchungen sowohl eine Periodenverlängerung als auch eine künstliche Dämpfung und ist hierin dem Differenzenverfahren unterlegen. Positiv herauszuheben ist jedoch, daß in keinem Falle instabiles Verhalten zu beobachten war. Wie das Wilson- Θ -Verfahren mit $\Theta = 1.37$ ist das Newmark Verfahren mit $\delta = 0.5$ und $\alpha = 0.25$ unbedingt stabil, was für seine praktische Anwendbarkeit von großer Bedeutung ist.

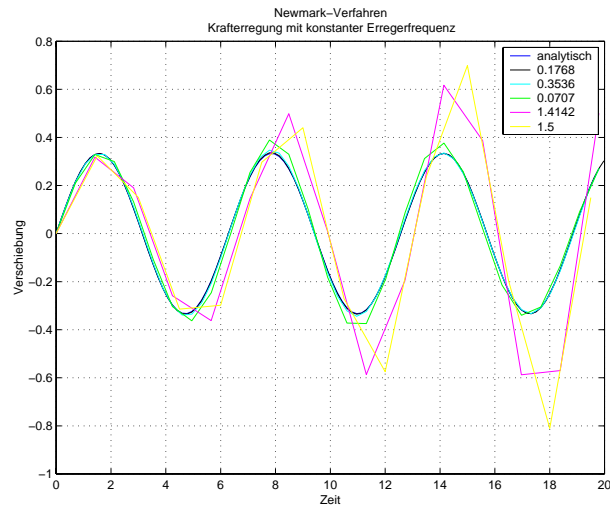


Abbildung 1.20: Newmark-Verfahren, Erregung mit konstanter Erregerkreisfrequenz, Analytische Lösung und fünf numerische Ergebnisse

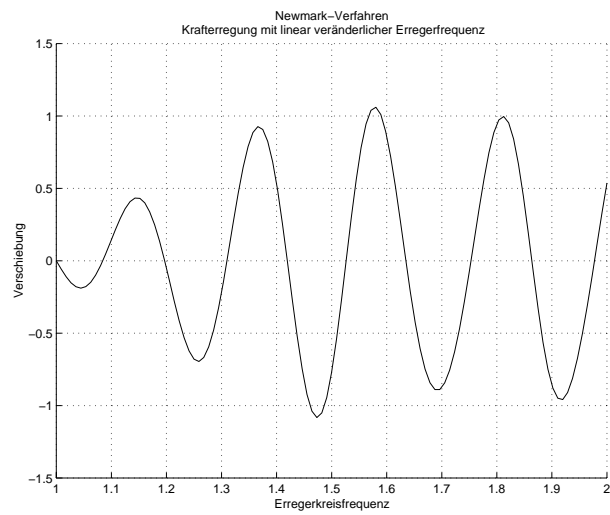


Abbildung 1.21: Newmark-Verfahren, Erregung mit veränderlicher Erregerkreisfrequenz

1.6 Beispiel: Hüpfender Ball

Ein Ball mit der Masse von 0.3 kg wird aus der Ruhe aus 3 m Höhe fallengelassen. Auf ihn wirkt die Erdbeschleunigung von $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, die Federkonstante $k = 0$. Erreicht der Ball die Erdoberfläche wird die Elastizität der Balloberfläche als lineare Feder mit der Federkonstanten $k_2 = 200 \text{ N/m}$ idealisiert. Für die Modellierung des Balles müssen die beiden Zustände Ball in der Luft und Ball im Kontakt mit der Erdoberfläche unterschieden werden. Dies geschieht durch die Beobachtung der Verschiebung u , die von der Erdoberfläche ausgehend nach oben positiv angenommen wird. Als Zeitintegrationsverfahren ist das Newmarkverfahren mit $\delta = 0.5$ und $\alpha = 0.25$ gewählt worden.

1.6.1 Zeitschritt

Die Wahl des Zeitschritts muß sich an der kurzen Kontaktphase ausrichten. Die dann vorherrschenden Verhältnisse liefern eine Schwingungsperiode von 0.344 s. Die Übergangsphase von freiem Flug zu Feder ist der kritischste Zeitraum, hieran muß der Zeitschritt bemessen werden. Der kleinste untersuchte Zeitschritt wurde mit 1/80 Periodenlänge gewählt.

1.6.2 Details der Modellierung

Um das Schalten zwischen Freiflugkörper und elastischem Körper abzubilden, sind zwei effektive Steifigkeitsmatrizen gebildet worden. Die erste hat die Federsteifigkeit $k = 0$, die zweite $k_2 = 200 \text{ N/m}$. Je nach Lage des Balls zu Beginn des Zeitschritts wird die erste oder die zweite Steifigkeitsmatrix aktiviert. Zur Kontrolle werden die kinetische und die potentielle Energie des Balls aufgetragen.

1.6.3 Diskussion des Ergebnisses

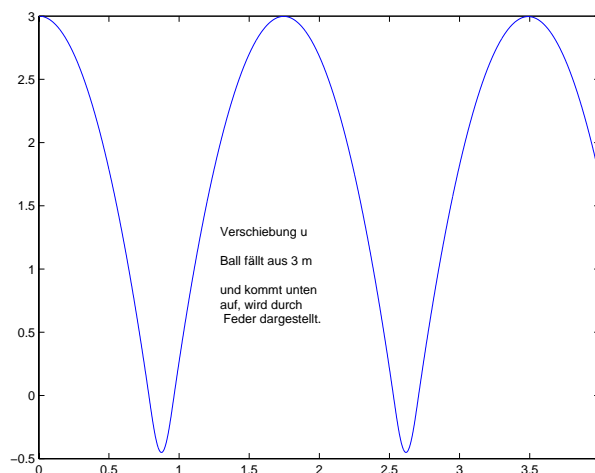


Abbildung 1.22: Hüpfender Ball

Abbildung 1.22 zeigt jeweilige Höhe des Balls über der Zeit. Man sieht, daß sie beim Aufprall die Größe -0.4 m erreicht und damit den Boden durchdringt. Das ist auf die groben Vereinfachung des Modells zurückzuführen. Eine feinere FE-Modellierung mit einem Kontaktbereich könnte Abhilfe schaffen. Die ursprüngliche Höhe wird vom Ball wieder erreicht und nicht überschritten, was auf eine gute Energieerhaltung hinweist. Auch die Periode des Gesamtsystems aus Freiflugkörper und Masse-Feder-System scheint mit ca. 1.5 s realistisch. In Abbildung 1.23 ist die kinetische und die potentielle Energie und zusätzlich ist die Summe aus beiden Energien über dem Zeitschritt dargestellt. In Moment des Aufpralls kann man den Austausch von kinetischer und potentieller Energie gut beobachten. Die Summe der Energien zeigt einen moderaten Verlust von Energie.

In Abbildung 1.24 ist der Luftwiderstand mit $D = c_w \frac{1}{2} \rho \cdot u^2$ berücksichtigt worden und mit verschiedenen Zeitschritten gerechnet worden. Wie zu erwarten ist, sieht man, daß die Flughöhe von Zyklus zu Zyklus abnimmt. Die Rechnungen mit den Zeitschritten $T/80$ und $T/40$ liefern glaubhafte Ergebnisse, die Rechnungen mit längeren Zeitschritten weisen eine große Dämpfung auf oder sogar Anfachung auf.

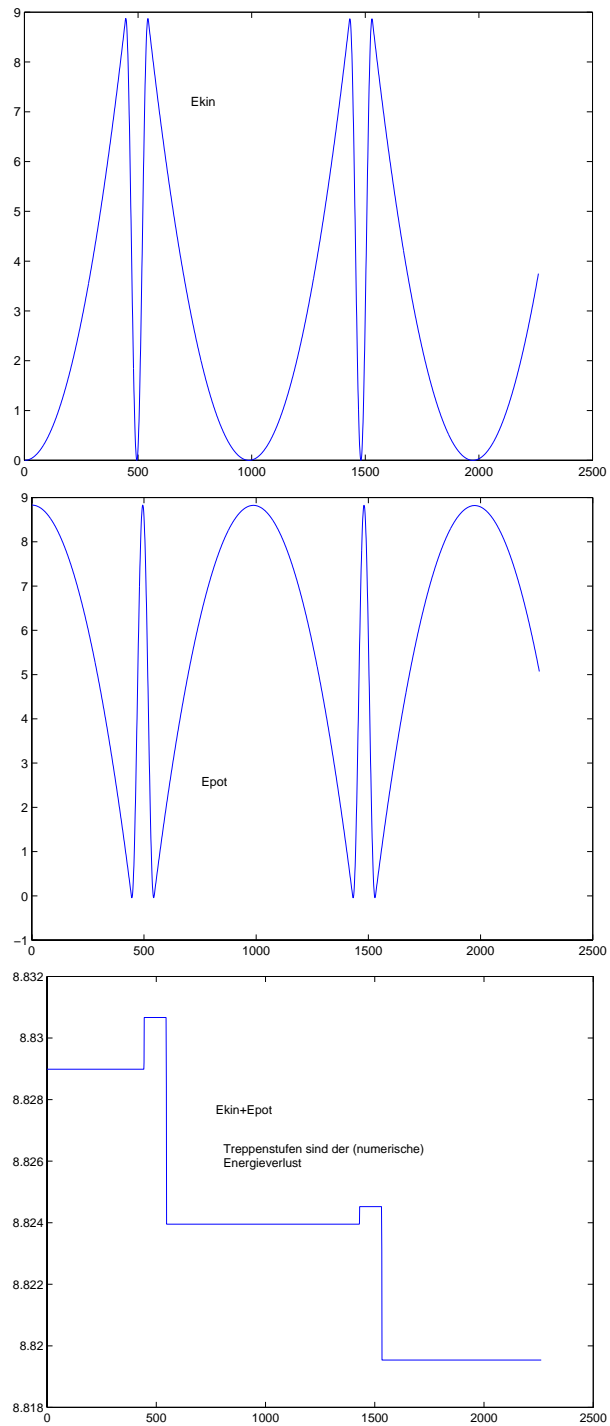


Abbildung 1.23: Hüpfender Ball

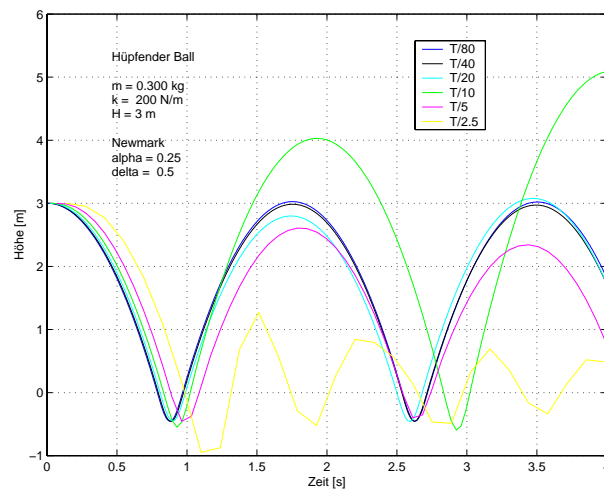


Abbildung 1.24: Hüpfender Ball

1.7 Bewertung der Zeitintegrationsverfahren

In den vergangenen Abschnitten sind vier Zeitintegrationsverfahren vorgestellt worden. Nun sollen die Ergebnisse der numerischen Experimente, an denen getestet wurden, nebeneinander gestellt werden.

1.7.1 Ausschwingversuch

Das System vollzieht eine harmonische Schwingung. Da weder Dämpfung noch Anfachung vorhanden ist, sollte die Amplitude und die Periodendauer unverändert sein. In Abb. 1.25 sind die analytische Lösung und die numerischen

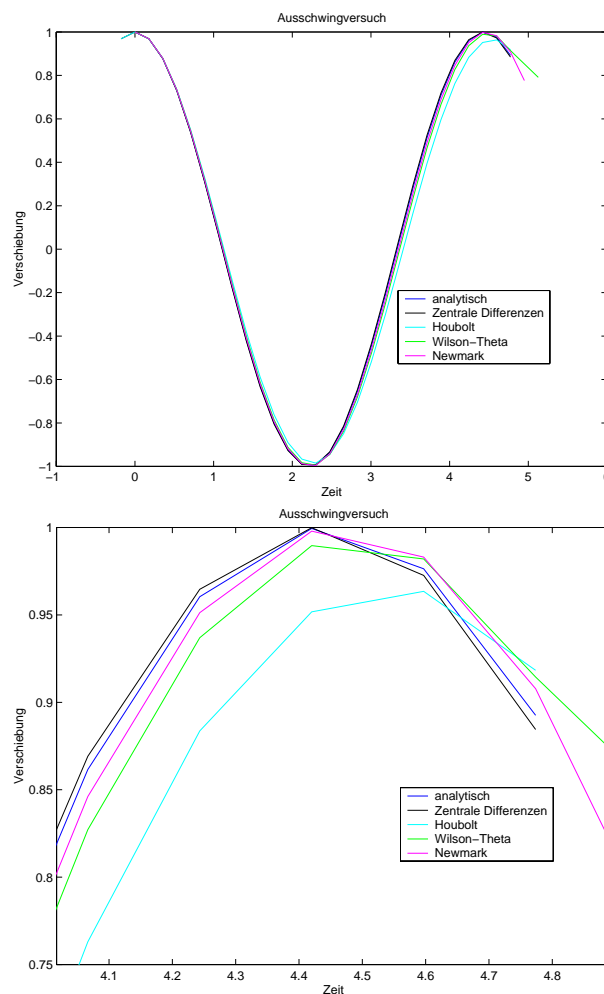


Abbildung 1.25: Ausschwingversuch

Lösungen aufgetragen. Man erkennt:

- Der Verlauf der Verschiebungen, der mit den zentralen Differenzen berechnet wurde, ist dem analytischen am nächsten. Es sind nur geringe

Abweichungen in Amplitudengröße und Periodenlänge zur analytischen Lösung festzustellen.

- Das Houbolt Verfahren zeigt eine größere numerische Dämpfung und eine deutliche Periodenverlängerung.
- Beim Wilson- Θ -Verfahren sind die Abweichungen geringer.
- Das Newmark Verfahren zeigt nur eine eringe Periodenverlängerung und numerische Dämpfung.

1.7.2 Ausschwingversuch mit Dämpfung $D = 99\%$

Mit diesem versuch soll festgestellt werden, wie gut die Dämpfungseigenschaften des System nachgebildet werden. Es ist nahezu die kritische Dämpfung gewählt worden, um den Gültigkeitsbereich der analytischen Lösung nicht zu verlassen wurde eine Dämpfung von 99% eingestellt. Es ist keine wirkliche Schwingung sondern eine Kriechbewegung zu erwarten. Die rechnungen zeigen folgende Er-

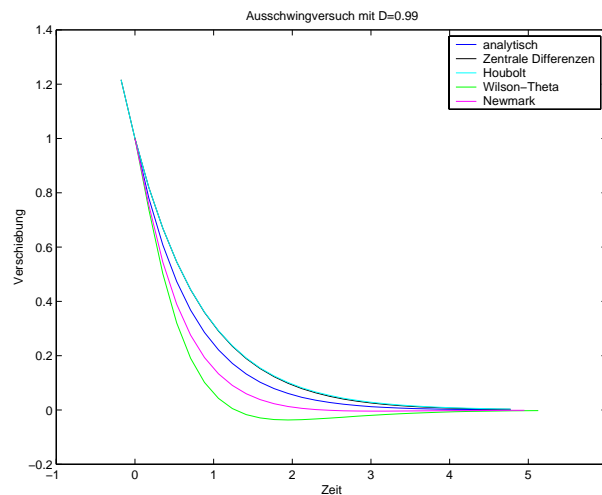


Abbildung 1.26: Ausschwingversuch mit $D=99\%$

gebnisse:

- Die methode der zentralen Differenzen und das Houbolt-Verfahren liefern Dämpfungen, die etwas kleiner als die der analytischen Lösung sind.
- Die Wilson- Θ -Methode liefert eine größere Dämpfung als die analytische Lösung, sie zeigt sogar noch eine Nulldurchgang.
- Die Newmark-Methode zeigt eine größere Dämpfung als die analytische Lösung, aber eine kleinere als das Wilson- Θ -Verfahren.

1.7.3 Krafterregung mit konstanter Kreisfrequenz

Das system wird mit einer Kreisfrequenz von $\Omega = 1$ rad/s aus der Ruhe erregt. Die Periodenlänge von $T = 2\pi$ zeichnet sich bei allen Lösungen deutlich ab. Im Einzelnen ist zu bemerken:

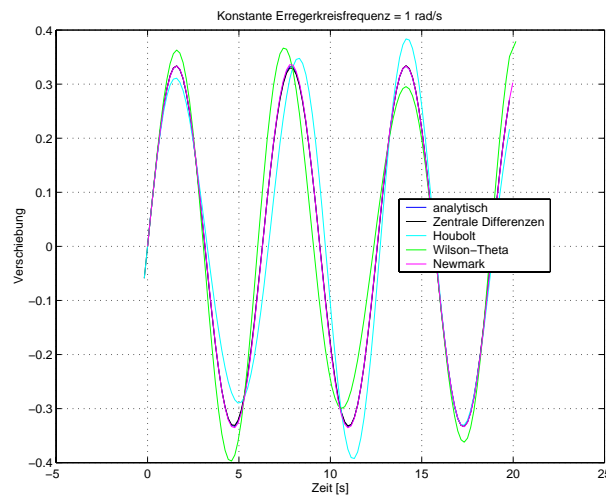


Abbildung 1.27: Konstante Krafterregung

- Zwischen Differenzenverfahren und der analytischen Lösung ist kein Unterschied festzustellen.
- Das Houbolt-Verfahren zeigt teilweise Verschiebungen in der Zeitachse, die Amplituden sind teils größer, teils kleiner als die der analytischen Lösung. Es ist keine Tendenz festzustellen.
- Das Wilson Θ -Verfahren verhält sich ähnlich wie das Houbolt-Verfahren.
- Das Newmark-Verfahren ist kaum von der analytischen Lösung zu unterscheiden.

1.7.4 Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz ohne Dämpfung

Das Masse-Feder-System wird mit einer Kraft mit veränderlicher Kreisfrequenz von $\Omega = 1 \text{ rad/s}$ bis $\Omega = 2 \text{ rad/s}$ erregt. Die Eigenkreisfrequenz des Systems liegt mit 1.4141 rad/s in diesem Bereich. In Abb. 1.28 sind die Systemantworten über der Erregerkreisfrequenz aufgetragen. Die bei dieser Kreisfrequenz zu erwartende Singularität der Verschiebung zeichnet sich bei keiner numerischen Lösung ab. Eine Amplitudenvergrößerung ist nur verzögert zu erkennen. Die Ergebnisse der untersuchten numerischen Verfahren sind bei diesem Test nur unzureichend.

1.7.5 Erregung mit veränderlicher Erregerfrequenz mit 10% Dämpfung

Fügt man dem System unter der gleichen Erregung 10% Dämpfung im lehrschen Sinne zu, so ändert sich die Bewertung.

In Abb. 1.29 ist die Erregerfrequenz von 1.4141 rad/s deutlich an einem Amplitudenanstieg zu erkennen.

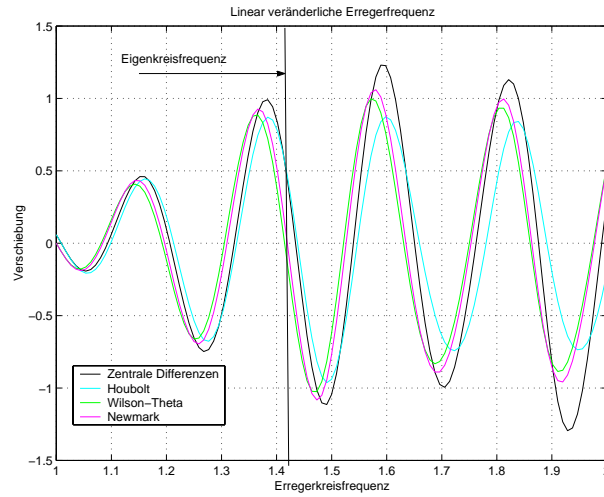


Abbildung 1.28: Linear veränderliche Krafteerregung ohne Dämpfung

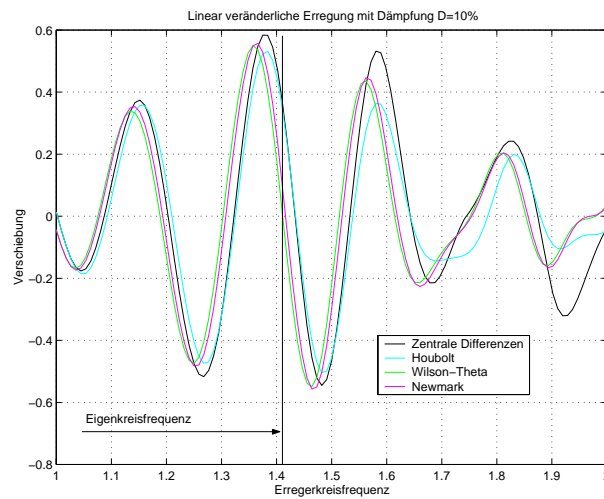


Abbildung 1.29: Linear veränderliche Krafteerregung mit 10% Dämpfung

1.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel sind (direkte) Zeitintegrationsverfahren dargestellt worden. Sie unterscheiden sich durch ihre Genauigkeit und die Anwendbarkeit hinsichtlich eines kritischen Zeitschritts.

Das in den meisten Tests genaueste Verfahren ist das Verfahren der zentralen Differenzen. Es ist jedoch in seiner Anwendbarkeit beschränkt, da es nur bei einem Zeitschritt stabil bleibt, der kleiner als der kritische ist. Dieser kritische Zeitschritt bemißt sich an der kleinsten Periode im System.

Das Houboltsche Verfahren, die Wilson Θ -Methode und das Newmark-Verfahren sind bei entsprechender Wahl der Integrationsparameter stabil und haben diese Beschränkung nicht. Unter ihnen hat sich das Newmark-Verfahren als am besten geeignet gezeigt.

1.9 Zeitintegration in generalisierten Koordinaten

Die Zeitintegration der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = R$$

mit Matrizen der Ordnung n ist bisher in den Knotenkoordinaten des FE-Systems dargestellt worden ohne daß dies besonders begründet worden ist. Dieses Koordinatensystem ist in gewisser Weise willkürlich. Es soll nun ein geeigneteres Koordinatensystem gewählt werden, das der „Natur“ des Systems besser entspricht. Die Verschiebungen sollen nach der Vorschrift

$$u(t) = P \tilde{u}(t) \quad (1.55)$$

von einem ins andere Koordinatensystem transformiert werden. Da die Transformationsmatrix P (zeitlich und räumlich) konstant sein muß, gilt auch

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= P \dot{\tilde{u}}(t) \\ \ddot{u}(t) &= P \ddot{\tilde{u}}(t) \end{aligned} \quad (1.56)$$

In Gleichung 1.55 ist $u(t)$ der Verschiebungsvektor in den Koordinaten des FE-Systems. P eine noch unbekannte Transformationsmatrix und $\tilde{u}(t)$ der Verschiebungsvektor im generalisierten Koordinatensystem.

Ersetzt man in der Bewegungsgleichung die Verschiebung u und ihre zeitlichen Ableitungen durch die Identitäten 1.55 und 1.56 und multipliziert die Gleichung mit P^T von links, so erhält man:

$$\underbrace{P^T m P}_{\tilde{m}} \ddot{\tilde{u}} + \underbrace{P^T c P}_{\tilde{c}} \dot{\tilde{u}} + \underbrace{P^T k P}_{\tilde{k}} \tilde{u} = \underbrace{P^T R}_{\tilde{R}} \quad (1.57)$$

Die Matrizen \tilde{m} , \tilde{c} und \tilde{k} werden generalisierte Massen, Dämpfungs- bzw. Steifigkeitsmatrix genannt.

Die Transformationsmatrix P kann als ein Satz von Vektoren aufgefaßt werden, von denen mindestens zu fordern ist, daß sie linear unabhängig (lu) sind. Linear unabhängig bedeutet, daß kein einziger Vektor durch eine Linearkombination aus den anderen Vektoren darstellbar ist. Die in der Transformationsmatrix

zusammengefaßten Vektoren stellen die Basis der generalisierten Verschiebungen \tilde{u} dar. Prinzipiell kann ein beliebiger Satz von Vektoren gewählt werden, wenn er aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Wenn der Satz aus n Vektoren besteht, mit n als der Ordnung der Systemmatrizen m , c , und k , wird auch kein Genauigkeitsverlust auftreten, wenn von Rundungsfehlern abgesehen wird. Es würde aber auch kein Vorteil daraus gezogen werden können.

Stattdessen sollten die Vektoren so gewählt werden, daß sie

die Diagonalstruktur der Matrizen verstärken und möglichst reine Diagonalmatrizen erzeugen und

die Verschiebung des Systems mit weniger als n Vektoren in technischer Sicht ausreichend beschreiben können.

1.9.1 Wie kommt man von der Bewegungsgleichung zum Eigenwertproblem

Man geht von der Bewegungsgleichung der freien Schwingung aus:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1.58)$$

in die man einen Ansatz für die Bewegung einführt, der die Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} u &= \Phi \sin(\omega(t - t_0)) \\ \dot{u} &= \Phi \omega \cos(\omega(t - t_0)) \\ \ddot{u} &= \Phi(-\omega^2) \sin(\omega(t - t_0)) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Φ ist ein Vektor der Länge n , der als Eigenvektor identifiziert werden wird, ω die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems, t die Zeit und t_0 eine Phasenverschiebung.

Die Gleichungen 1.59 a) und c) führt man in Gleichung 1.58 ein:

$$m\Phi(-\omega^2) \sin(\omega(t - t_0)) + k\Phi \sin(\omega(t - t_0)) = 0 \quad (1.60)$$

Division durch das Zeitglied $\sin(\omega(t - t_0))$ und Umordnung führt auf die Formulierung als Eigenwertproblem

$$[k - \omega_i^2 m] \Phi_i = 0 \quad (1.61)$$

Der Index i deutet darauf hin, daß es maximal n Eigenkreisfrequenzen und Eigenvektoren gibt.

1.9.2 Transformation in modale Koordinaten - die Eigenvektoren des konservativen Systems als Basis der generalisierten Koordinaten

In Gleichung 1.61 sind ω_i die Eigenkreisfrequenzen des Systems und Φ_i die zugehörigen Eigenvektoren. Eine Matrix, deren Spalten aus Eigenvektoren besteht, eignet sich in hervorragender Weise als Transformationsmatrix P . Die Eigenvektoren sind linear unabhängig und genügen damit der Grundforderung,

sie diagonalisieren sowohl die Massen- als auch die Steifigkeitsmatrix und bei entsprechender Normierung der Eigenvektoren wird aus der der generalisierten Massenmatrix \tilde{m} die Einheitsmatrix:

$$\tilde{m} = \Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Die generalisierte Steifigkeitsmatrix wird zu einer Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenwerte als Diagonalelementen.

$$\tilde{k} = \Phi^T k \Phi = \begin{bmatrix} (\omega_1)^2 & & & & \\ & (\omega_2)^2 & & & \\ & & (\omega_3)^2 & & \\ & & & (\omega_4)^2 & \\ & & & & (\omega_5)^2 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Sie entkoppeln damit die Bewegungsgleichung 1.57 wenn von der Dämpfung abgesehen werden oder die Dämpfungsmatrix als Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix dargestellt werden kann, was oft (naheungsweise) möglich ist.

Das System 1.61 hat prinzipiell soviele Eigenwerte und Eigenvektoren, wie es in der Massenmatrix besetzte Zeilen und Spalten hat. Die zu den hohen Frequenzen des Systems gehörenden Eigenvektoren haben oft keine technische Bedeutung mehr, weil sie eher die Fehler des Modells als die Physik des wirklichen Systems widerspiegeln. Auch aus theoretischen Gründen approximiert die Methode der Finiten Elemente die niedrigsten Eigenfrequenzen am besten. Auf die hohen Frequenzen und ihre Eigenformen kann man oft verzichten, ohne an Genauigkeit zu verlieren. Diesen Verzicht darf man natürlich nicht übertreiben, sonst kommt es zum sogenannten „truncation error“, dem Abbruch- oder Abschneidefehler. Dieser Fehler tritt auf, wenn eine zur Darstellung des für das untersuchte Problem charakteristischen Verschiebungsvektors notwendige Form fehlt. Dies wird im folgenden Beispiel verdeutlicht.

1.9.3 Beispiel zum „truncation error“

Ein Verschiebungsvektor u mit den Koordinaten $[2, 4.5, 7]^T$, jeweils am Anfang, in der Mitte und am Ende angegeben, soll durch zwei Basisvektoren dargestellt werden. Die Basisvektoren sind in Abb. 1.30 dargestellt.

Die Transformationsmatrix P hat damit zwei Spalten und drei Zeilen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die erste Spalte stellt den ersten Basisvektor, die zweite Spalte den zweiten Basisvektor dar.

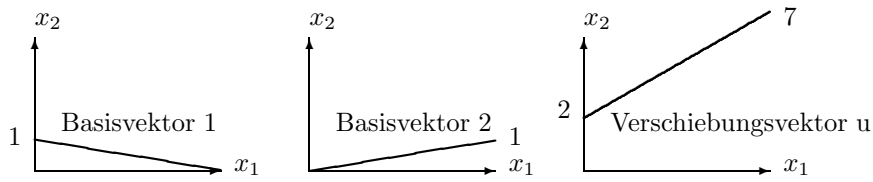


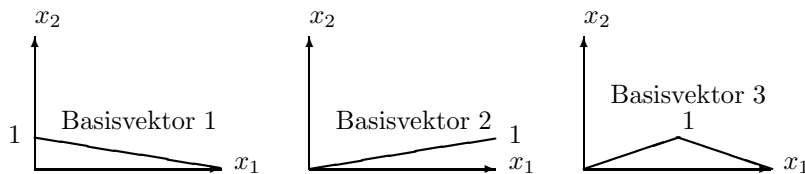
Abbildung 1.30: Basisvektoren und Verschiebungsvektor

Jeder Verschiebungsvektor u , der zwischen Anfangs- und Endpunkt gradlinig verläuft, kann mit diesen Basisvektoren mit den generalisierten Koordinaten \tilde{u} dargestellt werden. Anschaulich ausgedrückt, der Verschiebungsvektor u wird aus den Basisvektoren zusammengesetzt, die Basisvektoren sind die Zutaten, die generalisierten Koordinaten stellen die Rezeptur dar, d.h. sie geben die Anteile der Basisvektoren an. Im Beispiel ist dies:

$$u = P\tilde{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \\ 7 \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\tilde{u}}$$

Das Ergebnis in Worten heißt: Zwei Anteile vom ersten Basisvektor und sieben Anteile vom zweiten Basisvektor ergeben den Verschiebungsvektor u .

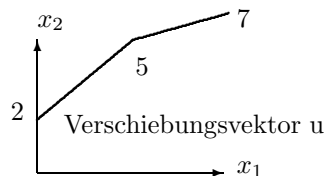
Man wird einen nicht gradlinig verlaufenden Verschiebungsvektor u mit diesen Basisvektoren nicht darstellen können, hierzu wäre ein weiterer Basisvektor notwendig, beispielsweise:



Die Transformationsmatrix bekommt damit drei Spalten und drei Zeilen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit könnte beispielsweise auch ein Verschiebungsvektor $u = [2, 5, 7]^T$ dargestellt werden, der nicht gradlinig verläuft:



$$u = P\tilde{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{\tilde{u}}$$

Wie man sieht kann der Knick im Verschiebungverlauf nur mit dem dritten Basisvektor dargestellt werden, wenn er für die Beschreibung des zu untersuchenden physikalischen Problems von Bedeutung ist, benötigt man den dritten Basisvektor, um den „truncation error“ zu vermeiden.

1.9.4 Berücksichtigung der Dämpfung

Mit der Dämpfungsmatrix wird der Energieverlust des Systems näherungsweise berücksichtigt. Dies läßt sich besonders gut in modalen Koordinaten durchführen, da man durch Messungen das logarithmische Dekrement bestimmen kann und als Diagonalmatrix verarbeitet. Streng genommen ist die Dämpfungsmatrix keine reine Diagonalmatrix aber sie ist diagonalbetont, so daß sie als Diagonalmatrix eine gute Näherung darstellt. Hinzu kommen natürlich die numerischen Vorteile, da die Bewegungsgleichung trotz Berücksichtigung der Dämpfung entkoppelt bleibt.

Dämpfungsmaße und ihr Zusammenhang

Die Dämpfungskraft ist

$$f_d = d \dot{u} \quad (1.64)$$

worin d die Dämpfungskonstante ist, sie wirkt der Geschwindigkeit \dot{u} entgegen. Der Abklingkoeffizient δ ist wie folgt definiert:

$$2 \delta = \frac{d}{m} \quad (1.65)$$

$$\delta = \frac{d}{2m} \quad (1.66)$$

$$d = 2\delta m \quad (1.67)$$

Das Lehrsche Dämpfungsmaß D , daß bei der kritischen Dämpfung den Wert 1 hat, berechnet sich wie folgt (In der englischsprachigen Literatur wird es oft mit „damping ratio“ ζ bezeichnet) :

$$D = \frac{\delta}{\omega} \quad (1.68)$$

$$D = \frac{d}{2\omega m} \quad (1.69)$$

$$d = 2 D \omega m \quad (1.70)$$

Das logarithmische Dekrement Λ , das zur Ermittlung der Dämpfung aus gemessenen Werten hilfreich ist, bestimmt man mit:

$$\Lambda = \ln \frac{u(t)}{u(t + T_d)} \quad (1.71)$$

$$\Lambda = \delta T_d \quad (1.72)$$

$$\Lambda = \frac{2\pi\delta}{\omega_d} \quad (1.73)$$

$$\Lambda = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \quad (1.74)$$

T_d ist die Periodendauer des gedämpften Systems, ω_d die Kreisfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-D^2} \quad (1.75)$$

Modale Dämpfungsmatrix

Die Dämpfungskraft ist $f_d = d \dot{u}$. Für die Zeile i in generalisierten Koordinaten wird daraus:

$$f_{d_i} = d_i \Phi_i^T \underbrace{\Phi \dot{u}}_{\dot{u}} = 2 \underbrace{D_i \omega_i \Phi_i^T m \Phi_i}_{c_{ii}} \dot{u}$$

Da bei der vorausgesetzten Normierung $\Phi_i^T m \Phi_i = \tilde{m}_{ii} = 1$ ist kann auch geschrieben werden:

$$\tilde{c}_{ii} = 2 D_i \omega_i \quad (1.76)$$

Der Index i an Lehrschen Dämpfungsmaß weist darauf hin, daß für jeden Eigenvektor ein anderes Dämpfungsmaß gewählt werden kann. Über so viel Werte wird man oft nicht verfügen, aber wenn die Lehrschen Dämpfungsmaße für zwei Eigenfrequenzen bekannt ist, kann die Rayleigh Dämpfung angenommen werden. Man macht für die Dämpfungsmatrix den Ansatz einer Linearkombination aus Massen- und Steifigkeitsmatrix:

$$c = \alpha m + \beta k \quad (1.77)$$

Die generalisierte Dämpfungsmatrix wird damit:

$$\tilde{c}_{ii} = \Phi^T (\alpha m + \beta k) \Phi_i = 2\omega_i D_i \quad (1.78)$$

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2\omega_i D_i \quad (1.79)$$

$$\alpha + \beta \omega_j^2 = 2\omega_j D_j \quad (1.80)$$

Beispiel

Eine Struktur habe bei den Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 die Lehrschen Dämpfungsmaße D_1 und D_2

$$\omega_1 = 2 \frac{rad}{s}; D_1 = 0.04$$

$$\omega_2 = 3 \frac{rad}{s}; D_2 = 0.20$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_1 D_1 \\ 2\omega_2 D_2 \end{bmatrix}$$

mit den gegebenen Zahlen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 \\ 1 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 2 * 0.04 \\ 2 * 3 * 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Die Lösung lautet: $\alpha = -0.672$ und $\beta = 0.208$. Die Dämpfungsmatrix ergibt sich somit zu:

$$c = -0.672m + 0.208k$$

und im generalisierten Raum:

$$\tilde{c} = -0.672\tilde{m} + 0.208\tilde{k}$$

1.9.5 Aufstellen der Matrizen bei praktischen Beispielen

Die Massenmatrix ist, wie bereits dargelegt, die Einheitsmatrix, die Steifigkeitsmatrix ist eine Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenkreisfrequenzen auf der Hauptdiagonalen. Die Dämpfungsmatrix ist oben beschrieben worden.

Transformation einer Kraft in modale Koordinaten

Die Transformation eines Kraftvektors in globale Koordinaten wird nach der Vorschrift

$$\tilde{R} = \Phi^T R$$

durchgeführt. Interessant ist, daß für eine einzelne Kraft am Knoten k nur die Verschiebungen des Freiheitsgrads der Kraft F am Knoten k der Eigenvektoren bekannt sein müssen. Es sind nur einige Zahlen, die bequem aus dem Ausgabefile der FE-Rechnung entnommen werden können. Alle anderen Zeilen des Kraftvektors R bleiben unbesetzt.

Transformation einer Verschiebung aus modalen Koordinaten in Koordinaten der FE-Rechnung

Oft ist es nicht erforderlich das ganze Verschiebungsfeld zu kennen, es genügt das Verhalten an ausgewählten Freiheitsgrade. Für diese Freiheitsgrade benötigt man die entsprechenden Zeilen der Eigenvektoren um die Transformation nach der Beziehung durchführen zu können:

$$u = \tilde{u}\Phi$$

Auch diese Operation ist mit wenigen Zahlen aus einem Outputfile der FE-Analyse zu entnehmen.

1.9.6 Beispiel: Allseitig gelagerte Platte

Die untersuchte Platte aus Stahl mit $E = 2.1E11N/m^2$ und $G = 0.81E11N/m^2$ hat die Dicke $t = 0.01m$, ist $1.0m$ lang und $0.5m$ breit. Ihre Ränder sind in allen drei translatorischen Freiheitsgraden gelagert. In der Mitte ist eine Punktmasse von $m = 200kg$. Die Eigenmasse geht über die Dichte mit $\rho = 7850kg/m^3$ ein. Die Platte wurde mit 20 mal 10 Elementen modelliert (siehe 1.31).

Eine Modalanalyse liefert die in Tabelle 1.9.6 angegebenen Eigenfrequenzen

Die Eigenformen sind in den nachfolgenden Abbildungen angegeben:

Bei der Durchführung der Schwingungsrechnung im FE-System ist darauf zu achten, daß die Eigenvektoren massennormiert bestimmt werden. Das ist bei den FE-Programmen COSMOS/M und MSC/NASTRAN der Fall. Durch Diskussion der Eigenformen bestimmt man, wieviel und welche Eigenformen

V1
C1

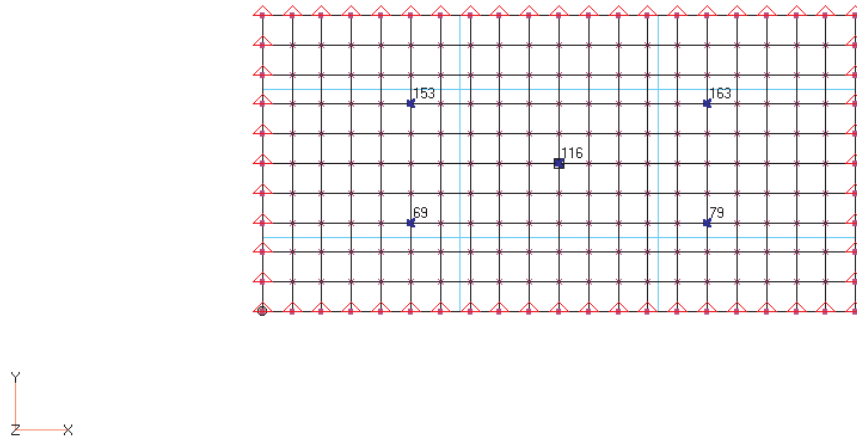


Abbildung 1.31: Elementierung der Platte

Nr.	Hz
1	23.61
2	193.12
3	223.8
4	414.09
5	479.41

Basisvektoren der modalen Systems werden. Kriterium hierfür ist, einen Satz auszuwählen, mit dem die für das untersuchte Problem wesentlichen Verschiebungen darstellbar sind. Im vorliegenden Fall sind die ersten fünf Eigenformen gewählt worden, ($n_{\text{mod}}=5$).

Aufbau der Systemmatrizen

Dann ergibt sich die Massenmatrix als Einheitmatrix der Ordnung n_{mod} . Die Steifigkeitsmatrix des Modells in modalen Koordinaten ist eine Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenkreisfrequenzen auf der Hauptdiagonalen.

$$k = \begin{bmatrix} 2.2003e+004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4724e+006 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9772e+006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.7695e+006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.0737e+006 \end{bmatrix}$$

Die ersten fünf Modalformen für die ausgesuchten Knoten (watchpoints) 95,115, 116,117,137 und 153 werden in ein dreifach indiziertes Array (`modes(imode,inode,idof)`) abgelegt.

Die Indizes haben folgende Bedeutung:

- imode Nummer der Eigenform
- inode interne Nummer des Knotens unter den „watchpoints“:
Knoten 91 \rightarrow inode = 1, Knoten 153 \rightarrow inode = 6
- idof Freiheitsgrad Nummer:
 $idof = 1 \Rightarrow u_x$, $idof = 6 \Rightarrow \phi_z$

Systemtest

Zunächst soll getestet werden, ob das generalisierte Modell vergleichbare Ergebnisse liefert wie das FE-Modell. Hierzu wird ein Lastfall mit einer Kraft von 1000 N, die in positive z-Richtung wirkt und in Plattenmitte angreift gerechnet. das fe-Modell liefert eine Durchbiegung in Plattenmitte von

$$u_z(Nd = 116) = 2.2031 \cdot 10^{-4} m.$$

Würde man im modalen Modell die Kraft plötzlich aufbringen, so würde die Durchbiegung der Platte ohne Ende um die statische Lösung oszillieren. Um dies zu verhindern wird eine Dämpfungsmatrix vom

$$c = 0.02m + 0.02k$$

eingeführt. Der Lastvektor, oder die Rechte Seite wird durch Generalisieren erzeugt:

$$\Phi^T R = \tilde{f} = modes(:, 3, 3) * 1000.$$

Hierin bedeutet:

- :
- 3 Vektor der Anteile aus allen Eigenformen hat
- 3 interne Nummer des Knotens 116
- 3 dritter Freiheitsgrad des Knotens 116 $= u_z$

Nun kann die Zeitintegration durchgeführt werden. Es wurde mit einem Zeitschritt von 1/250 s gerechnet, das entspricht etwa 1/10 längsten Periode der Platte. Die Durchbiegung u_z des Knotens 116 findet man wieder durch die Rücktransformation vom modalen Koordinatensystem ins FE-Koordinatensystem:

$$u(t) = \Phi \tilde{u}(t) \rightarrow u(1, i1) = modes(:, 3, 3)' * qu(:, i1)$$

Hierin bedeutet:

- i1 Zähler über die Zeitschritte
- :
- 3 Vektor der Anteile aus allen Eigenformen hat
- 3 interne Nummer des Knotens 116
- 3 dritter Freiheitsgrad des Knotens 116 $= u_z$
- qu(:, i1) generalisierter Verschiebungsvektor zum Zeitschritt i1

Führt man diese Operation durch, so erhält man nach Abklingen der Schwingungen

$$u_z(Nd116) = 2.2032 \cdot 10^{-4} m$$

FE-Lösung und Lösung im modalen Raum liegen sehr nahe beieinander.

Bestimmung der Biegemomente

Die Biegemomente können nicht direkt durch Rücktransformation gewonnen werden. Es besteht aber die Möglichkeit die Krümmungen $w_{,xx}$ und $w_{,yy}$ aus den Differenzenquotienten der Verdrehungen mit folgendem MATLAB Code zu gewinnen :

```
wxx=-(modes(:,4,5)'*qu(:,i1,i2)-modes(:,3,5)'*qu(:,i1,i2))/0.05;
wyy= (modes(:,5,4)'*qu(:,i1,i2)-modes(:,3,4)'*qu(:,i1,i2))/0.05;
```

Dann können die Biegemomente nach der Beziehung

```
mx(i1) = Kplatte*(wxx+nu*wyy);
my(i1) = Kplatte*(wyy+nu*wxx);
```

bestimmt werden. Darin ist die Plattensteifigkeit K_{platte} :

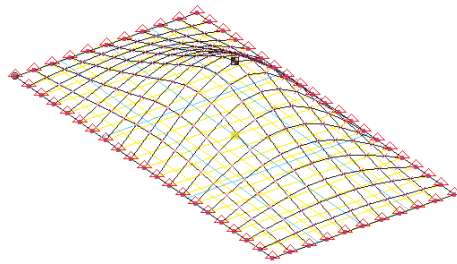
$$K_{platte} = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

Die Ergebnisse zeigen nicht den hohen Grad der Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FE-Rechnung, dies ist einerseits auf die ohnehin problematische Stelle in der Nähe einer Singularität zurückzuführen, andererseits sind keine Informationen über den Verformungsansatz des Elements in die Berechnung eingeflossen, die Krümmung ist durch einfache Differenzenbildung ermittelt worden.

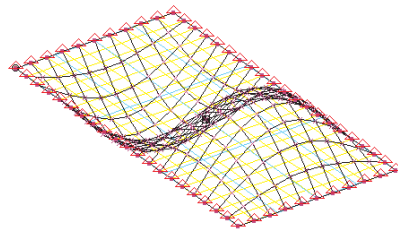
1.9.7 Krafterregung im Resonanz zur ersten Eigenfrequenz

Die Platte soll mit einer Kraft von 100 N in Plattenmitte erregt werden, die mit der ersten Eigenfrequenz der Platte schwingt. Die Dämpfung ist für diese Unterschung auf Null gesetzt worden. Die Abbildung 1.35 zeigt die Auslenkung der Plattenmitte. da ein Resonanzfall vorliegt, wächst die Schwingungsamplitude über alle Grenzen. Abbildung 1.36 zeigt die Auslenkung der Platte bei Erregung durch die zweite Eigenfrequenz. Der Zeitschritt und die berechnete Zeit wurde um den Faktor 10 reduziert.

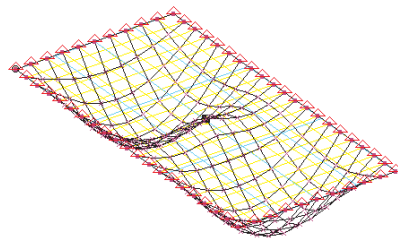
V1
C1



Output Set: Case 1 Mode 23.608166 Hz
Deformed(0.0696): Total Translation
V1
C1



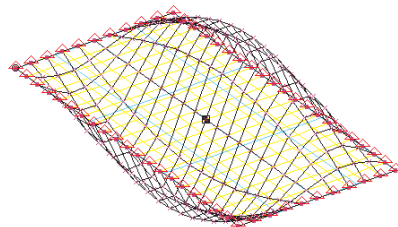
Output Set: Case 2 Mode 193.124985 Hz
Deformed(0.319): Total Translation
V1
C1



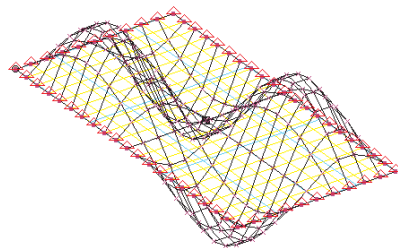
Output Set: Case 3 Mode 223.793777 Hz
Deformed(0.323): Total Translation
V1
C1

Abbildung 1.32: Eigenformen 1 bis 3

V1
C1



Output Set: Case 4 Mode 414.093750 Hz
Deformed(0.303): Total Translation
V1
C1



Output Set: Case 5 Mode 479.415192 Hz
Deformed(0.304): Total Translation
V1
C1

Abbildung 1.33: Eigenformen 4 und 5

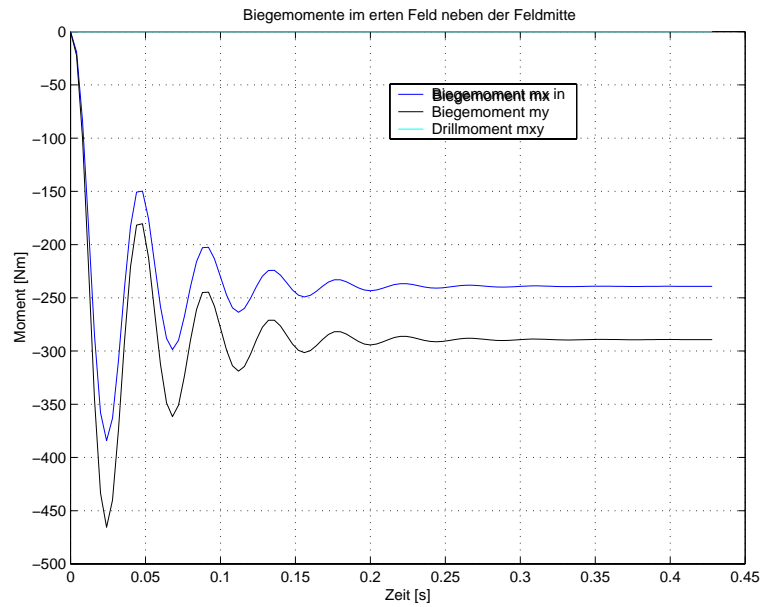


Abbildung 1.34: Momente

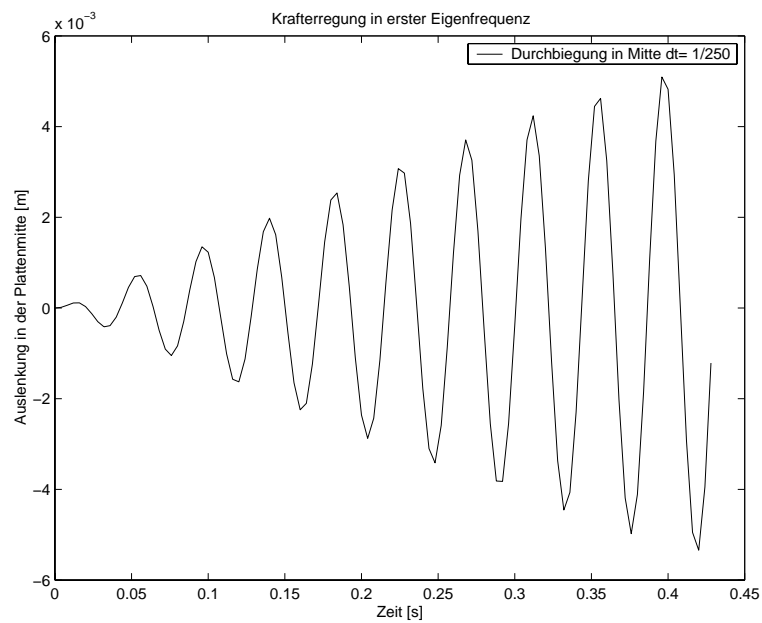


Abbildung 1.35: Krafterregung der Platte

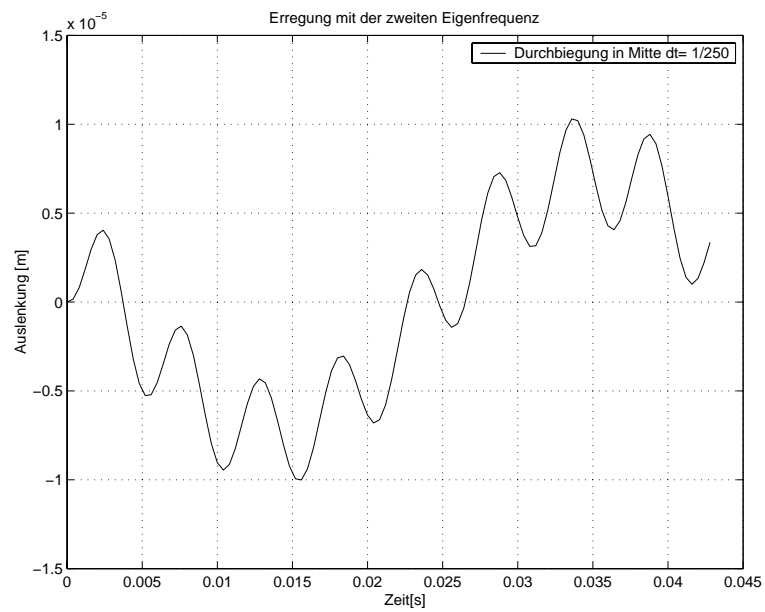


Abbildung 1.36: Krafterregung der Platte

1.10 Referate

1.10.1 Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchung des Wilson- Θ -Verfahrens

Bearbeiter: J. Pechmann, K. Maser

Am Beispiel eines 1-DOF Masse- Feder- Dämpfer-Systems sollen die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften des Wilson- Θ -Verfahrens durch Variation des Parameters Θ untersucht werden.

Systembeschreibung:

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$k = 100 \cdot 4 \cdot \pi^2$$

Umfang der Bearbeitung

Untersuchen Sie einen Ausschwingversuch und eine kräfteerregte Schwingung im Resonanzfall unter Variation des Parameters Θ von 0.8 bis 2 ohne, mit schwacher und mit kritischer Dämpfung. Vergleichen Sie die numerische Integration mit der analytischen Lösung.

1.10.2 Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchung des Newmark-Verfahrens

Bearbeiter: Alexander Guhl, Frank Meller

Am Beispiel eines 1-DOF Masse- Feder- Dämpfer-Systems sollen die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften des Newmark-Verfahrens durch Variation der Parameter α und δ untersucht werden.

Systembeschreibung:

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$k = 100 \cdot 4 \cdot \pi^2$$

Umfang der Bearbeitung

Untersuchen Sie einen Ausschwingversuch und eine kräfteerregte Schwingung im Resonanzfall unter Variation der Parameter α und δ unter Berücksichtigung der Gleichung 1.47

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0.50 \\ \alpha &\geq 0.25 (0.5 + \delta)^2 \end{aligned}$$

ohne, mit schwacher und mit kritischer Dämpfung. Vergleichen Sie die numerische Integration mit der analytischen Lösung.

1.10.3 Untersuchung der Verformungen und Biegemomente eines Stockwerkrahmens unter Erdbebenlast

Bearbeiter: Andy Knuth, Stefan Kramer

Ein zweistöckiger Stockwerkrahmen soll unter den Fußpunktbeschleunigung in horizontaler Richtung untersucht werden, die beim ElCentro Erdbeben vom 18. 05. 1940 in Kalifornien in den ersten vier Sekunden gemessen wurden.

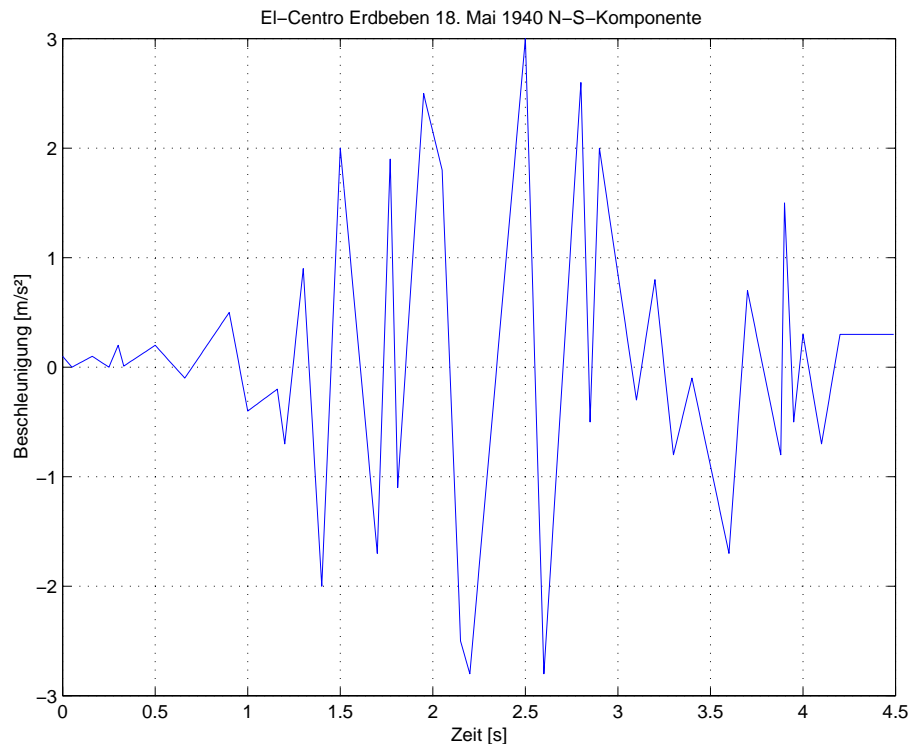


Abbildung 1.37: ElCentro Erdbeben (nach Clough: Dynamic of Structures S. 596)

1.10.4 Strukturmodell

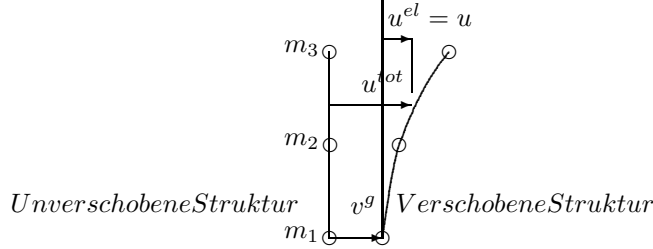
Der zu untersuchende zweistöckige Rahmen hat eine Stockwerkshöhe von jeweils 4m und eine Breite von 12 m. Stiele: IBP 240 mit $A = 106 \text{ cm}^2$ und $J_y = 11260 \text{ cm}^4$, Riegel IPE 360 mit $A = 72.7 \text{ cm}^2$ und $J_y = 16270 \text{ cm}^4$. Die Stiele sind eingespannt. Es genügt, ein ebenes Modell zu untersuchen.

Zur Modellierung des Massen wird vereinfachend die Dichte der Riegel mit dem Faktor 10 vervielfacht. (Dies Massenmodell ist für prinzipielle Untersuchungen ausreichend, in der Praxis aber untauglich!)

Es wird ein Lehrsches Dämpfungsmaß von 1% angenommen.

Es genügt ein ebenes Modell zu erzeugen (BEAM2D). Achtung: BEAM2D Elemente müssen in der y-z-Ebene liegen!

1.10.5 Vorgehensweise



Der gesamte Verschiebungsvektor u^{tot} setzt sich aus einem Teil u^g , der die Verschiebung der Erdoberfläche darstellt und einem Teil, der die relativen Verschiebungen der Struktur u bezogen auf die Erdoberfläche beschreibt, zusammen.

$$u^{tot} = u^g + u$$

Entsprechendes gilt für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung:

$$\dot{u}^{tot} = \dot{u}^g + \dot{u}$$

$$\ddot{u}^{tot} = \ddot{u}^g + \ddot{u}$$

Dämpfungskräfte werden nur infolge der Relativgeschwindigkeit \dot{u} und elastische Kräfte nur infolge der Relativverschiebung ausgelöst. Aus der Bewegungsgleichung :

$$m\ddot{u}^{tot} + c\dot{u} + ku = 0$$

wir damit

$$m(\ddot{u} + [1]\ddot{v}^g) + c\dot{u} + ku = 0$$

$[1]$ bedeutet hierin einen Vektor der Ordnung des FE-Systems, bei dem alle Elemente den Wert 1 haben, v^g ist ein Skalar, der die Beschleunigung der Erdbodens durch das Beben ausdrückt. Der Summand $m[1]\ddot{v}^g$ kann auf die rechte Seite gebracht werden. Man erhält:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m[1]\ddot{v}^g$$

Nun muß die Gleichung in modale Koordinaten transformiert werden. Für die Massenmatrix, die Dämpfungsmatrix und die Steifigkeitsmatrix geschieht die in der gewohnten Weise. Für die Generalisierung der Rechten Seite wird die Massenmatrix in den FE Koordinaten benötigt, die zunächst nicht ohne weiteres beschaffbar ist. Es besteht jedoch die Möglichkeit, auf ein anderes Massenmodell auszuweichen, bei dem die Massen als Klumpmassen auf einigen Knoten, hier auf den Endknoten der Riegel konzentriert sind. Nun benötigt man zum Generalisieren nur die zu den Freiheitsgraden der Knoten gehörenden Elemente der Eigenvektoren.

$$\Phi^T(-m)[1]\ddot{v}^g = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & x_1 & \cdot & x_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & y_1 & \cdot & y_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & z_1 & \cdot & z_2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{v}^g(t)$$

Nun kann die Zeitintegration im generalisierten Raum durchgeführt werden.

Die Biegemomente können durch

$$M_y = -E J_y w''$$

bestimmt werden. Die zweite Ableitung der Biegelinie kann numerisch näherungsweise aus der Änderung der Verdrehung bestimmt werden.

1.10.6 Umfang der Bearbeitung

Aufbau eines FE Modells (2-D) und Durchführung einer Schwingungsrechnung

Aufbau eines Modells in modalen Koordinaten

Prüfung des Modells in modalen Koordinaten durch Vergleich der Verschiebungen eines statischen Lastfalls

Zeitintegration über 4.3 Sekunden mit einem geeigneten Zeitschritt.

Darstellung der Verschiebung eines oberen Eckpunktes

Darstellung des Biegemoments und des am Fußpunkt

1.10.7 Dynamische Untersuchung eines Rammhammers

Bearbeiter: Felix Oeser und René Siedel

Die Wirkungsweise eines Rammhammersystems ist im Zeitbereich zu untersuchen. Ein Rammhammersystem besteht aus einem Fallgewicht m_1 , dem sog. Bär und dem Rammgut m_2 . Das Rammgut ist meist eine Spundwand oder ein Rammpfahl. Es befindet sich unter dem Fallgewicht. Der Bär wird aus einer Fallhöhe H durch Pneumatik oder Explosion auf eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 beschleunigt und auf das Rammgut fallen gelassen bzw. geschossen. Trifft er auf das Rammgut wird dieses beschleunigt und in den Boden eingetrieben. Der Energieverlust während des Rammvorgangs wird durch Hub auf die Anfangshöhe und erneute Beschleunigung auf v_0 ausgeglichen.

Modellierung

Die Elastizität beider Körper soll näherungsweise durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten C_1 berücksichtigt. Der Energieverlust durch Reibung wird durch geschwindigkeitsproportionale Dämpfung nachgebildet.

Das Rammsystem ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$m_1 = 200 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2000 \text{ kg}$$

$$C_1 = 1.5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$$

$$H = 2 \text{ m}$$

Als Anfangsgeschwindigkeit und Dämpfungsparameter können folgende Werte verwendet werden:

$$v_0 = 5 \text{ m/s}$$

$$C = 20\,000 \text{ Ns/m}$$

Bei einer Untersuchung mit Hilfe der Newmarkschen Methode sind die Zustände Fallgewicht im Freifall und Fallgewicht im Kontakt mit dem Rammgut zu unterscheiden und zwei Steifigkeitsmatrizen vorzuhalten. Die Energiezufuhr geschieht bei Erreichen der Höhe H , indem der Betrag der Geschwindigkeit der Masse m_1 auf v_0 gesetzt wird.

1.10.8 Fußballabstoß

Bearbeiter: Michael Wilke, Tim Göldnitz

Ein Ball wird unter einem Winkel α und einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der horizontalen Ebene abgeschossen. Untersuchen Sie den Vorgang im Zeitbereich und variieren Sie α und v_0 so, daß der Ball nach 50 m den Boden wieder berührt. Stellen Sie die Flugkurven dar.

Zusatz: Berücksichtigung des Magnuseffekts oder: Wie kommt der Ball von der Ecke ins Tor? (3-D)

Einige Daten für die Bearbeitung

Radius $r = 11 \text{ cm}$, $m = 0.4 \text{ kg}$

Widerstandsbeiwert $c_w = 0.5$

Dichte der Luft: $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$

Luftwiderstand: $F_w = c_w \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 A$

Auftriebskraft durch den Magnuseffekt für $\omega R \ll \dot{u}$: $\vec{F} = -A_{eff} \rho \vec{u} \times \vec{\omega}$

Einige Zeilen MatLab Code vor der Zeitschleife

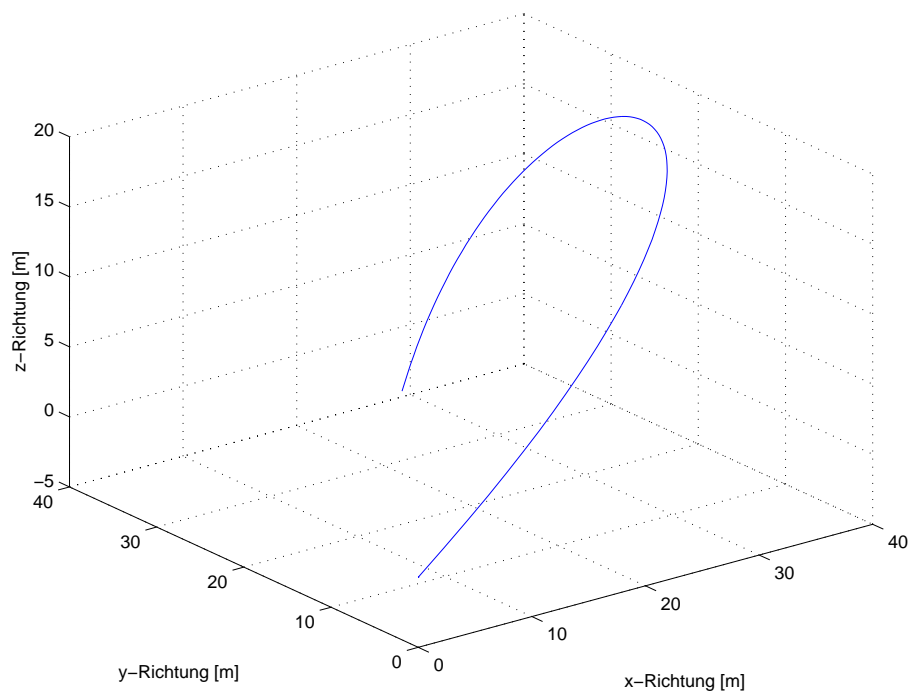
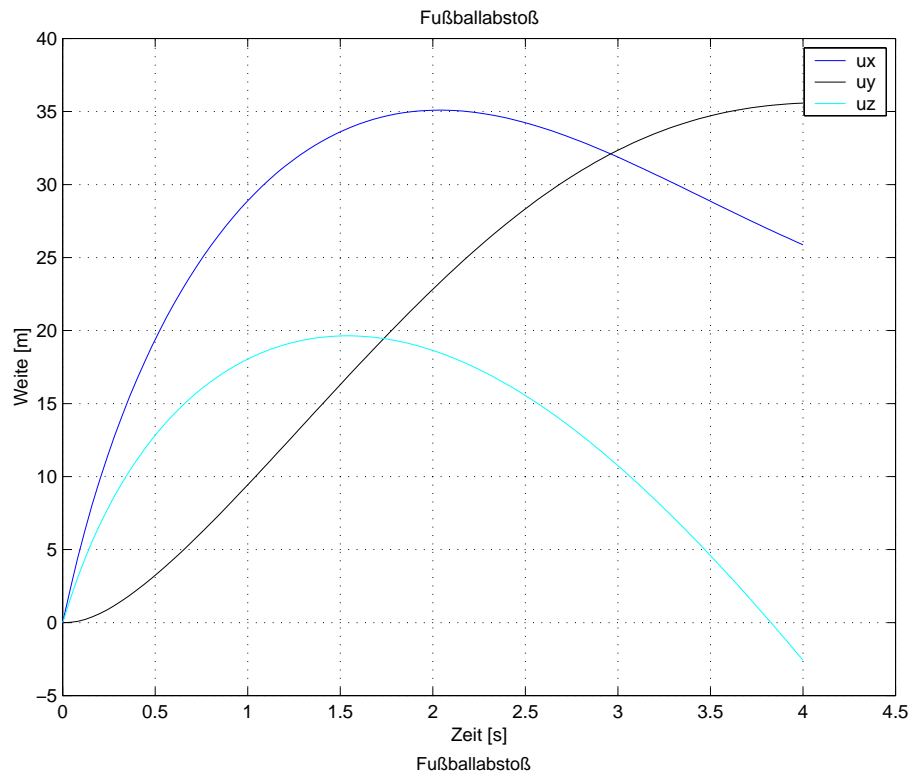
```
g=-9.81; %Erddbeschleunigung
fg=[0;0;g*0.4] %Gewichtsvektor
omega=[0;0;2*pi]';
up(1,1,i2)=sin(alpha0)*v0;
up(2,1,i2)=0;
up(3,1,i2)=cos(alpha0)*v0
cw=0.5
```

und in der Zeitschleife vor dem Aufruf von Newmark:

```
v=sqrt(qup(:,i1,i2)'*qup(:,i1,i2)); %Betrag der Geschwindigkeit
fw=-cw*0.5*1.225*v^2*qup(:,i1,i2)/v*aeff; %Luftwiderstand
fm=-aeff*1.225*(cross(up(:,i1,i2),omega))'; %magnus effekt
rt=fw+fg+fm;
rtdt=rt;
```

und das Kreuzprodukt:

```
% Kreuzprodukt cross.m
function [k]= cross(a,b)
k(1)=a(2)*b(3)-b(2)*a(3);
k(2)=b(1)*a(3)-a(1)*b(3);
k(3)=a(1)*b(2)-b(1)*a(2);
```



1.10.9 Lagerspiel

1.10.10 Parabelflug

Bearbeiter: René Jugert, Christian Kaiser und Kristian Rosenkranz

Um kurzzeitig Schwerelosigkeit zu erzeugen (Trainingszwecke eventuell Versuche) (microgravitation), wird ein Flugzeug auf horizontaler Bahn in großer Höhe auf Höchstgeschwindigkeit beschleunigt, dann eine Steigbewegung eingeleitet und der Antrieb auf Leerlauf gestellt. Das Flugzeug wird auf einer parabelförmigen Bahn in der vertikalen Ebene geführt, deren nach oben gerichtete Zentrifugalkraft, der in der gleichen Größe vorliegenden Schwerkraft entgegenwirkt.

Der nächste Abschnitt ist aus: www.biologie.uni-erlangen.de/botanik1/deu/parabelflug.htm

Wie wird die Mikrogravitation erreicht?

Der Airbus A300 wird in einer Höhe von 6100 m auf vollen Schub beschleunigt und nach oben gezogen („Pull up“ mit 1,8 g). Nach 1500 m Steigflug und etwa 20 s 1,8 g hat der Airbus einen Winkel von 47° erreicht, nun werden die Triebwerke schlagartig gedrosselt und das Flugzeug verliert an Schub („Injection“, Mikrogravitation). Die Passagiere und das zu beobachtende Material fliegt durch die Trägheitskraft alleine durch den Raum weiter und beschreibt so eine Parabel, mit dem Gefühl der Schwerelosigkeit. Der Pilot und seine 2 Co-Piloten müssen den Airbus so aussteuern, dass das Flugzeug gewissermaßen den Passagieren darin hinterher fliegt. Der Scheitel der Parabel wird bei etwa 8500 m erreicht. Bei 7600 m (ca. 22 s Mikrogravitation) bzw. einem Winkel von 42° fängt der Pilot an das Flugzeug aus seinem Sturzflug abzufangen und die Triebwerke wieder voll zu beschleunigen („Pull out“). Nach weiteren 20 s mit 1,8 g und einem Sturzflug auf 6100 m hat der Pilot wieder die normale Lage erreicht und es herrschen wieder normale Bedingungen (zumindest was die Gravitation angeht J). (Siehe auch dieses Bild <http://www.biologie.uni-erlangen.de/botanik1/images/Parabel.jpg>.)

Simulieren Sie diesen Flug während des Flugs ohne Schub!

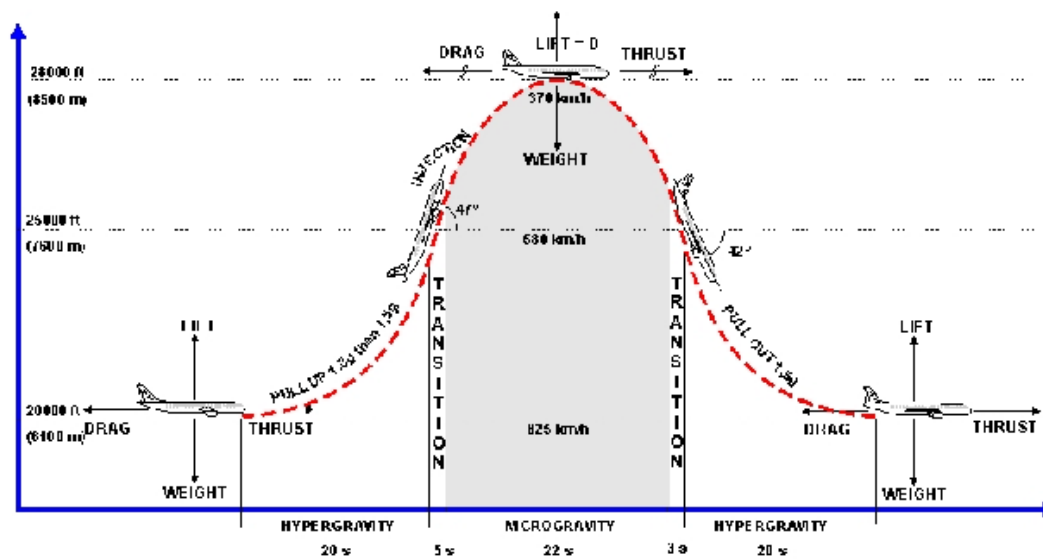


Abbildung 1.38: Parabelflug

Kapitel 2

Nichtlineare Probleme

Literatur

P. Wriggers: Nichtlineare Finite-Element-Methoden, Springer 2001.

K.-J. Bathe: Finite-Elemente-Methoden, Springer 1986.

R.W. Clough: Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.

„Die Welt ist nichtlinear“ pflegte ein ungenannter Kollege des Autors zu sagen. Und obwohl dies richtig ist, verwendet man nicht nur im Ingenieurwesen oft lineare Modelle um die Wirklichkeit erfolgreich zu beschreiben. So geht man in der linearen Statik davon aus, daß es zur Analyse von statischen Systemen genügt, das Gleichgewicht am unverformten System zu betrachten, darüberhinaus wird ein lineares Materialgesetz (Hooke) zu Grunde gelegt. Das Ergebnis ist ein lineares Verhältnis zwischen Einwirkungen (Belastung), Beanspruchung (Schnittgrößen) und Verschiebungen. Einfach ausgedrückt bedeutet es: doppelte Kräfte liefern doppelte Schnittgrößen und Verschiebungen.

Aus der Festigkeitslehre ist bereits bekannt, daß in einigen Fällen, man spricht von Stabilitätsfällen, das Gleichgewicht am gestörten System betrachtet werden muß. Hier genügt es oft, die Größe der Belastung zu finden, bei der das aus der Gleichgewichtslage heraus gestörte System nicht wieder in die ursprüngliche Gleichgewichtskonfiguration zurückkehrt. Diese Größe ist oft ein Verzweigungspunkt, bei dem mehr als eine Gleichgewichtslage möglich sind. Interessiert das Strukturverhalten über den Verzweigungspunkt hinaus oder sind die Verschiebungen sehr groß, so müssen nichtlineare Effekte berücksichtigt werden. In einfachen Fällen, kann eine analytische Lösung angegeben werden, in den meisten Problemen aus der Ingenieurpraxis ist dies jedoch nicht möglich, dann müssen numerische Verfahren herangezogen werden. In den folgenden Beispielen sind solche Systeme gewählt worden, bei denen eine analytische Lösung vorliegt, um daran das Lösungsprinzip numerischer Verfahren zu zeigen.

2.1 Arten der Nichtlinearitäten

Nichtlinearitäten können verschiedene und auch mehrere Ursachen haben.

2.1.1 geometrische Nichtlinearität

2.2 Möglichkeiten zur Lösung Nichtlinearer Probleme

2.2.1 Newton-Rahpson Verfahren

2.2.2 Modified Newton-Raphson Verfahren

Kapitel 3

Grundzüge der linearen FEM

In diesem Kapitel soll keine erschöpfende theoretische Ableitung der Grundlagen der Methode der Finiten Elemente (FEM) gegeben werden. Das bleibt der Vorlesung „Methode der Finite Elemente“ vorbehalten. Die Grundzüge sollen jedoch soweit plausibilisiert werden, daß die weiteren Kapitel verstanden werden können.

Die Grundidee der Finiten Elemente ist es, die zu untersuchende Struktur in kleine Teile, in finite Elemente zu zerlegen, die an ihren Rändern an Knoten miteinander zur Gesamtstruktur verbunden sind.

Für diese finiten Elemente werden Näherungsansätze für eine charakteristische Größe, bei Stäben meist die Biegelinie, bei Platten die Biegefläche gewählt. Freiwerte dieser Näherungsansätze sind die Verschiebungsgrößen an den Knoten.

Wie geeignete Näherungsansätze gefunden werden und wie sichergestellt wird, daß sie gegen die sie annähernde Funktion konvergieren, soll hier nicht untersucht werden. Für Balken gibt es eine sehr anschauliche Herangehensweise, die hier besprochen werden soll.

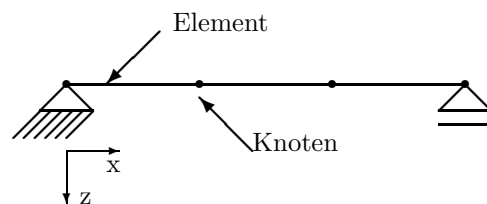


Abbildung 3.1: Drei Elemente und vier Knoten

In Abb. 3.1 ist ein statisch bestimmt gelagerter Balken dargestellt, der in drei Elemente eingeteilt ist. Die Elemente sind an den Knoten miteinander verbunden.

3.1 Ansatzfunktion

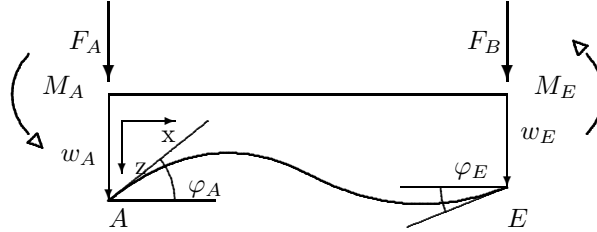


Abbildung 3.2: Element, Biegelinie, Knotenkraftgrößen und Knotenverschiebungsgrößen

In Abb. 3.2 ist ein finites Balkenelemente dargestellt. Es beginnt bei Knoten A und endet bei Knoten B. Das Koordinatensystem des Elements ist folgendermaßen angeordnet: Die x-Achse zeigt vom Knoten A zum Knoten B. Die z-Achse zeigt nach unten, die y-Achse bildet dazu ein Rechtssystem in der Reihenfolge x, y, z. An den Knoten sind die Knotenkraftgrößen eingetragen. Sie werden zum Elementknotenkraftvektor

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_E \\ M_E \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

zusammengefaßt. Man beachte, daß die Kraftgrößen keine Schnittgrößen sind, sondern alle in positive Koordinatenrichtung zeigen.

Weiter sind die Verschiebungen der Knoten dargestellt, die im Elementverschiebungsvektor

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

zusammengefaßt sind. Positive Verschiebungen zeigen in positive Koordinatenrichtung.

Oben wurde von einer Ansatzfunktion für eine charakteristische Größe gesprochen. Hier wird als Ansatzfunktion für die Biegelinie eines Elements der Länge l ein Polynom dritten Grades gewählt:

$$w(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (3.3)$$

Eine kubische Parabel kann die Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (3.4)$$

nicht für alle Belastungen $q(x)$ erfüllen, muß sie auch nicht, sie soll ja auch nur als Näherungsfunktion eingeführt werden. Bei einem Stab, der nur durch Einzellasten belastet ist, befriedigt die kubischen Parabel die DGL jedoch sogar exakt.

Mit der Gleichung 3.3 läßt sich zwar jede beliebige kubische Funktion beschreiben aber in Abhängigkeit von den Koeffizienten a, b, c , und d . Eine Formulierung, bei der die Näherungsfunktion für die Biegelinie w direkt vom Vektor der Knotenverschiebungsgrößen v nach Gleichung (3.2) abhängig ist, wäre jedoch vorzuziehen.

Zu diesem Zweck werden vier Funktionen (Ω_i) aufgestellt, deren Funktionswert bzw. ihre Ableitung jeweils an einem Randpunkt den Betrag 1 erhalten, alle anderen Randwerte erhalten den Wert 0.

Abbildung 3.3: Shape Functions Ω_i

$$\begin{array}{llll}
 \Omega_1(0) = 1 & \Omega_2(0) = 0 & \Omega_3(0) = 0 & \Omega_4(0) = 0 \\
 \Omega_1'(0) = 0 & \Omega_2'(0) = -1 & \Omega_3'(0) = 0 & \Omega_4'(0) = 0 \\
 \Omega_1(l) = 0 & \Omega_2(l) = 0 & \Omega_3(l) = 1 & \Omega_4(l) = 0 \\
 \Omega_1'(l) = 0 & \Omega_2'(l) = 0 & \Omega_3'(l) = 0 & \Omega_4'(l) = -1
 \end{array}$$

$$\Omega_1 = 0 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad \Omega_2 = -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad \Omega_3 = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad \Omega_4 = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (3.5)$$

Die Funktionen Ω_1 bis Ω_4 werden Shapefunctions oder Formfunktionen genannt. Sie sind in den Abbildungen (3.3) und (3.4) dargestellt.

Mit den Formfunktionen nach Gleichung (3.5) und dem Elementverschiebungsvektor v nach Gleichung (3.2) kann die Näherungsfunktion für w als von den Knotenverschiebungen abhängig dargestellt werden, wie es in Gleichung (3.6) als Skalarprodukt gezeigt ist.

$$w(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) & \Omega_3(x) & \Omega_4(x) \end{bmatrix}}_{\Omega_i} \underbrace{\begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}}_{\hat{v}} \quad (3.6)$$

Gleichung 3.6 erlaubt es, die Durchbiegung w für jede beliebige Stelle x mit $0 \leq x \leq l$ als Funktion des Elementverschiebungsvektors v anzugeben. In Abb.3.5 ist dies für $v = [2, 1, -1, -3]^T$ dargestellt worden.

3.2 Die Elementsteifigkeitsmatrix

Nun soll der Frage nachgegangen werden, welche Gruppe von Knotenkraftgrößen, das heißt welcher Elementkraftvektor $f = [F_A, M_A, F_E, M_E]^T$ notwendig ist, um genau eine Formfunktion, das heißt einen Einheitsverschiebungszustand zu erzeugen. Das ist ein statisch unbestimmtes Problem und kann beispielsweise mit der Kraftgrößenmethode bestimmt werden. Hier soll nur das Ergebnis wiedergegeben werden:

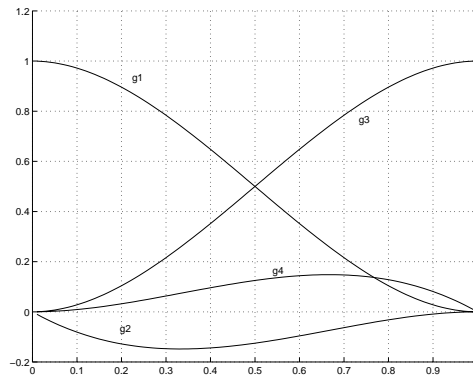


Abbildung 3.4: Shapefunctions oder Formfunktionen

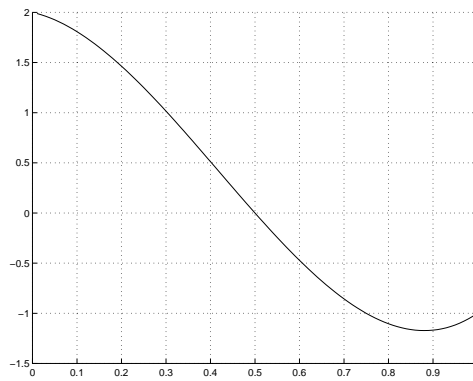
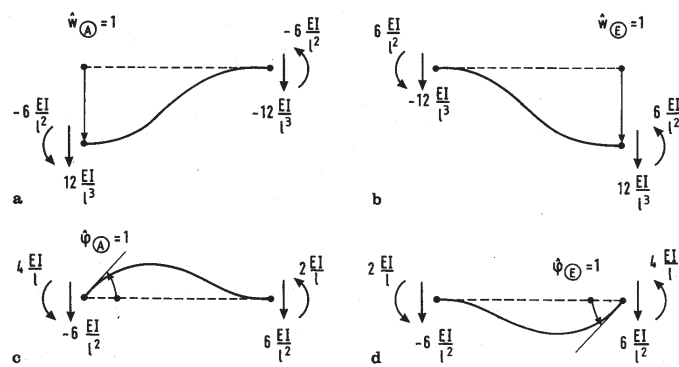
Abbildung 3.5: Biegelinie $w(x)$ für $v = [2, 1, -1, -3]^T$ 

Abbildung 3.6: Formfunktionen und zugehörige Knotenkraftgrößen

In Abb. (3.7) sind die vier Formfunktionen¹ mit den zugehörigen Knotenkraftgrößen aufgetragen. Ordnet man die Kraftgrößen in einer Matrix für jede Formfunktion eine Spalte so erhält man:

$$k = 2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Wenn die Matrix k nach Gleichung (3.7) mit einem Elementverschiebungsvektor multipliziert wird, erhält man die die Knotenkraftgrößen, die diesen Verschiebungszustand hervorrufen.

$$\underbrace{2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix}}_k \underbrace{\begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}}_{\hat{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_E \\ M_E \end{bmatrix}}_f \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) $kv = f$ stellt eine Beziehung zwischen Kräften und Verschiebungen her. Die Matrix k wird die Elementsteifigkeitsmatrix genannt. Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch. In der Form von Gleichung (3.8) liefert sie bei einem bekannten Verschiebungsvektor die Möglichkeit, den ihn auslösenden Kraftvektor zu bestimmen. Viel interessanter ist es natürlich, bei bekanntem Kraftvektor den Verschiebungsvektor zu bestimmen. Die Operation $v = k^{-1}f$, die diese Frage beantworten würde, würde jedoch scheitern, da die Elementsteifigkeitsmatrix k zweifach singulär ist und nicht invertiert werden kann (der Mathematiker spricht vom 2). Das Element ist noch verschieblich, da es nicht gelagert ist, es könnte bei endlichen Verschiebungen keine Kraft aufnehmen. Dies ist kein Mangel der Methode, sondern es ist sogar eine wichtige Forderung an eine Ansatzfunktion, daß der daraus gewonnene Steifigkeitsmatrix Starrkörperverschiebungen kraftfrei möglich sind.

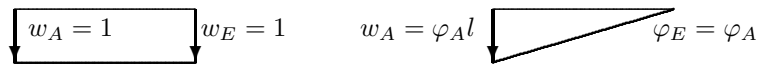


Abbildung 3.7: Starrkörperverschiebung: Translation, Rotation

Setzt man beispielsweise den in Abb.3.7 dargestellten Verschiebungsvektor für eine Rotation $v = [\varphi_A l, \varphi_A = \varphi, 0, \varphi_E = \varphi]^T$ in Gleichung 3.8 ein, so erhält man:

$$2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi l \\ \varphi \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix} = 2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6\varphi l - 3l\varphi - 6 \cdot 0 - 3l\varphi \\ -3l\varphi l - 2l^2 + 3l \cdot 0 + l^2\varphi \\ -6\varphi l + 3l\varphi + 6 \cdot 0 + 3l\varphi \\ -3l\varphi l + l^2\varphi + 3l \cdot 0 + 2l^2\varphi \end{bmatrix}$$

Wie man sich überzeugen kann, verschwindet das Matrizenprodukt. Für die Translation mit $\hat{v} = [w_a = l, \varphi_A = 0, w_E = 1, \varphi_E = 0]^T$ gilt entsprechendes:

¹aus Meißner, Menzel, S. 66

$$2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 - 0 - 6 - 0 \\ -3l + 0 + 3l + 0 \\ -6 + 0 + 6 + 0 \\ -3l + 0 + 3l + 0 \end{bmatrix}$$

Aus Translation und Rotation kann man beliebige Starrkörperverschiebungen zusammensetzen. Wie durch eine Translation und durch eine Rotation exemplarisch gezeigt wurde, bildet die Steifigkeitsmatrix Starrkörperverschiebungen krafrei ab.

3.2.1 Einarbeitung der Randbedingungen

In der Praxis macht es keinen Sinn, eine FE-Rechnung mit nur einem Element durchzuführen. Da es aber lernrechnerisch günstig ist, die bei der FEM vorkommenden Schritte an überchaubaren Matrizen durchzuführen, soll dieser Weg hier begangen werden.

Das Einarbeiten der Randbedingungen soll an einem Beispiel gezeigt werden.

In folgenden soll ein Modell erzeugt werden, das aus einem einseitig eingespannten Balken besteht. Der Balken hat die Länge l und ist an der freien Kragspitze durch die Kraft \hat{F} belastet, am anderen Ende sind die Freiheitsgrade w_A und φ_A unterdrückt.

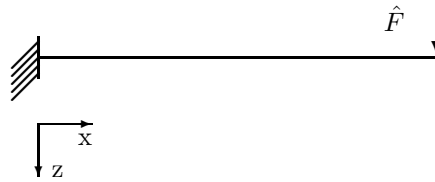


Abbildung 3.8: Kragbalken aus einem Element

Der Balken wird aus nur einem Element modelliert. Die Verschiebungsgrößen $w_A = 0$ und $\varphi_A = 0$ sind durch die Lagerungsbedingungen bekannt. Vom Elementkraftvektor ist $F_E = \hat{F}$ und $M_E = 0$ bekannt. Gleichung 3.8 erhält damit folgende Form:

$$2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix} = 2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ \hat{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man erkennt einerseits, daß die erste und die zweite Spalte der Steifigkeitsmatrix mit 0 multipliziert wird, und damit wegfallen kann, andererseits, daß die erste und die zweite Zeile keine Unbekannte haben, die Verschiebungsgrößen w_A und φ_A sind ja bekannt. Daher kann auch die erste und die zweite Zeile aus dem Gleichungssystem gestrichen werden.

Diesen Vorgang nennt man das Streichen von Zeilen und Spalten und mit ihm werden die Lagerungen generell eingearbeitet. Man erhält die reduzierte

Steifigkeitsmatrix \bar{k} . Der zugehörige Elementverschiebungsvektor wird \bar{v} und Elementkraftvektor \bar{f} genannt.

$$\underbrace{2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l \\ 3l & 2l^2 \end{bmatrix}}_{\bar{k}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}}_{\bar{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{F} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{f}}$$

Durch die Lagerung ist auch der zweifache Rangabfall beseitigt worden, anschaulich gesehen, der Balken kann nicht mehr verschoben werden.

3.2.2 Lösung des Gleichungssystems und Berechnen der Unbekannten

Nun kann die Lösung des Gleichungssystems vorgenommen werden. Bei diesem kleinen Gleichungssystem soll dies mit der Kramerschen Regel durchgeführt werden.: Nennerdeterminante beträgt:

$$N = \left[2 \frac{EI}{l^3} \right]^2 (6 * 2l^2 - (3l)^2) = 12 \frac{(EI)^2}{l^4}$$

Die Zählerdeterminanten berechnen sich zu:

$$Z_1 = \begin{vmatrix} \bar{F} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ 0 & 4 \frac{EI}{l} \end{vmatrix} = 4 \bar{F} \frac{EI}{l} \quad \text{und} \quad Z_2 = \begin{vmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & \bar{F} \\ 6 \frac{EI}{l^2} & 0 \end{vmatrix} = -6 \bar{F} \frac{EI}{l^2}$$

Daraus berechnet man die Unbekannten:

$$w_E = \frac{Z_1}{N} = \frac{4 \bar{F} \frac{EI}{l}}{12 \frac{(EI)^2}{l^4}} = \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3}$$

und

$$\varphi_E = \frac{Z_2}{N} = \frac{-6 \bar{F} \frac{EI}{l^2}}{12 \frac{(EI)^2}{l^4}} = -\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2}$$

Dies sind die bekannten Lösungen für einen Kragbalken, die über den Arbeitssatz überprüft werden kann.

3.2.3 Berechnen der Auflagerkräfte

Nadem die Unbekannten bestimmt worden sind ist der Elementverschiebungsvektor bekannt. Die Elementkraftgrößen können mit Hilfe der Gleichung 3.8 bestimmt werden. Im Beispiel ergibt dies:

$$\begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_E \\ M_E \end{bmatrix} = 2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3} \\ -\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2} \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die Knotenkraftgrößen:

$$F_A = 2 \frac{EI}{l^3} \left[-6 \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3} - 3l \left(-\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2} \right) \right] = -\bar{F}$$

$$\begin{aligned}
M_A &= 2 \frac{EI}{l^3} \left[3l \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3} + l^2 \left(-\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2} \right) \right] = \bar{F}l \\
F_E &= 2 \frac{EI}{l^3} \left[6 \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3} + 3l \left(-\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2} \right) \right] = \bar{F} \\
M_E &= 2 \frac{EI}{l^3} \left[3l \frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^3}{3} + 2l^2 \left(-\frac{\bar{F}}{EI} \frac{l^2}{2} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

F_A ist die Auflagerkraft an der Einspannstelle, F_A ist negativ, da sie entgegen der positiven z-Achse wirkt. M_A ist das Einspannmoment. Es ist positiv. F_E entspricht der eingepprägten Kraft \bar{F} und M_E ist Null, weil kein äußeres Moment angreift.

3.2.4 Bestimmung der Schnittgrößen

Nachdem der Elementverformungsvektor und der Elementknotenkraftvektor bekannt ist, sollen die Schnittgrößen bestimmt werden. Hierbei gehen wir auf die Ansatzfunktion zurück, die in Gleichung 3.6 in Verbindung mit Gleichung 3.5 aufgestellt wurde.

Zwischen Biegemoment M sowie Querkraft Q und Biegelinie besteht bei über die Stabachse konstantem EI der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
Q &= -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \\
M &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nach Gleichung 3.6 war der Näherungsansatz für die Biegelinie

$$w = \Omega_1 w_A + \Omega_2 \varphi_A + \Omega_3 w_E + \Omega_4 \varphi_E$$

Da die Knotenverschiebungsgrößen im Elementverschiebungsvektor von x unabhängig sind, müssen die Ω_i entsprechend abgeleitet werden. Mit der Abkürzung

$$\frac{d^2 \Omega_i}{dx^2} = \Omega_{i,xx} \quad \text{und} \quad \frac{d^3 \Omega_i}{dx^3} = \Omega_{i,xxx}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
w_{,xx} &= \Omega_{1,xx} w_A + \Omega_{2,xx} \varphi_A + \Omega_{3,xx} w_E + \Omega_{4,xx} \varphi_E \\
w_{,xxx} &= \Omega_{1,xxx} w_A + \Omega_{2,xxx} \varphi_A + \Omega_{3,xxx} w_E + \Omega_{4,xxx} \varphi_E
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Und die Ableitungen der Ansatzfunktion liefert:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,xx} &= -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3} x \\
\Omega_{2,xx} &= \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2} x \\
\Omega_{3,xx} &= \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3} x \\
\Omega_{4,xx} &= \frac{2}{l} - \frac{6}{l^2} x
\end{aligned} \tag{3.11}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Omega_{1,xxx} &= \frac{12}{l^3} \\
 \Omega_{2,xxx} &= -\frac{6}{l^2} \\
 \Omega_{3,xxx} &= \frac{12}{l^3} \\
 \Omega_{4,xxx} &= -\frac{6}{l^2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Schnittgrößen in Abhängigkeit von x ergeben sich somit:

$$s = \begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = -\frac{E}{I} \begin{bmatrix} \Omega_{1,xxx} & \Omega_{2,xxx} & \Omega_{3,xxx} & \Omega_{4,xxx} \\ \Omega_{1,xx} & \Omega_{2,xx} & \Omega_{3,xx} & \Omega_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}$$

Faßt man die Schnittgrößen an den Knoten zum Schnittgrößenvektor $\hat{s} = [Q_A, M_A, Q_E, M_E]^T$ zusammen, so gilt:

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_E \\ M_E \end{bmatrix} = -EI \begin{bmatrix} w_{,xxxA} \\ w_{,xxA} \\ w_{,xxxE} \\ w_{,xxE} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Setzt man in Gleichung 3.11 die Gleichungen 3.12 und 3.13 ein und geht damit in Gleichung 3.13 wobei für die Größen am Knoten A für $x = 0$ und am Knoten E für $x = l$ eingesetzt wird, so kann man Ableitung der Biegelinie an den Knoten wie folgt formulieren:

$$\begin{bmatrix} w_{,xxxA} \\ w_{,xxA} \\ w_{,xxxE} \\ w_{,xxE} \end{bmatrix} = \frac{2}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 6 & -3l & -6 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & -2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Wenn man mit Gleichung 3.14 in Gleichung 3.13, so kann man die Schnittgrößen als Funktion des Elementverschiebungsvektors angeben:

$$\underbrace{\hat{s}}_{\hat{s}} = \underbrace{2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 6 & -3l & -6 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & -2l^2 \end{bmatrix}}_{\hat{g}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}}_{\hat{v}} \tag{3.15}$$

Die Matrix \hat{g} ist die Schnittgrößenmatrix.

3.3 Zusammenbau zum Gesamtsystem

Der Zusammenbau einzelner Elemente zum Gesamtsystem soll anhand eines Beispiels gezeigt werden. Der bereits in Abb. 3.1 gezeigte Balken ist nun an beiden Seiten eingespannt worden. Der Balken hat drei Elemente und vier Knoten.

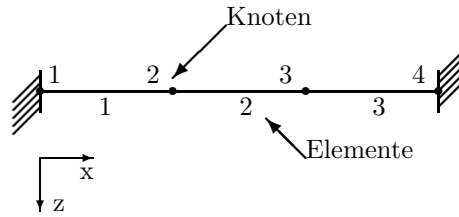


Abbildung 3.9: Beidseits eingespannter Balken mit drei Elementen

Es soll eine ähnlich Beziehung wie Gleichung 3.6 ($kv = f$) beim Element hergeleitet werden. Die Knotenverschiebungen werden nun in einem Vektor, dem Verschiebungsvektor

$$V = [w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, w_3, \varphi_3, w_4, \varphi_4]^T$$

zusammengefaßt werden. Zur Unterscheidung vom Elementverschiebungsvektor ist er durch den Großbuchstaben V gekennzeichnet. Analog sind die Knotenkräfte zu einem Vektor F zusammengefaßt,

$$F = [F_1, M_1, F_2, M_2, F_3, M_3, F_4, M_4]^T$$

der auch einen Großbuchstaben trägt.

Analog zu Gleichung 3.6 lautet die Beziehung zwischen Kraft- und Verschiebungsgrößen

$$KV = F \quad (3.16)$$

K ist die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems. Sie hat eine höhere Ordnung als die Elementsteifigkeitsmatrix k . Sie richtet sich nach der Anzahl der kinematischen Freiheitsgrade des Verschiebungsvektors V . Der Kraftvektor und Verschiebungsvektor haben das Format [Anzahl der Freiheitsgrade (NDOF), 1], die Steifigkeitsmatrix dementsprechend: [NDOF, NDOF], im vorliegenden Beispiel ist bei 4 Knoten und zwei Freiheitsgraden pro Knoten $NDOF = 8$.

Der Aufbau der Steifigkeitsmatrix soll im Folgenden dargestellt werden. Es wird davon ausgegangen, daß die drei Elemente die gleiche Länge l und die gleiche Steifigkeit GI haben.

3.3.1 Die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems

Bei der Entwicklung der Steifigkeitsmatrix eines Element wurden an den Knoten Einheitsverschiebungszustände angenommen und gefragt, welche Gruppe von Kraftgrößen diese Verschiebungsfigur zur Folge hätte. Diese Kraftgrößen wurden eine Spalte der Elementsteifigkeitsmatrix k . Beim Gesamtsystem soll der gleiche Weg beschritten werden.

Als erstes wird dem Knoten 1 Verschiebung $v_1 = 1$ eingeprägt, alle anderen Freiheitsgrade behalten den Wert Null. (Abb 3.10, Teilbild 1) Die für diesen Einheitsverformungszustand erforderlichen Kräfte sind die gleichen wie beim entsprechenden Zustand des Elements. An den Knoten 3 und 4 treten für diesen Zustand keine Kraftgrößen erforderlich. Man kann dies in Matrixform schreiben,

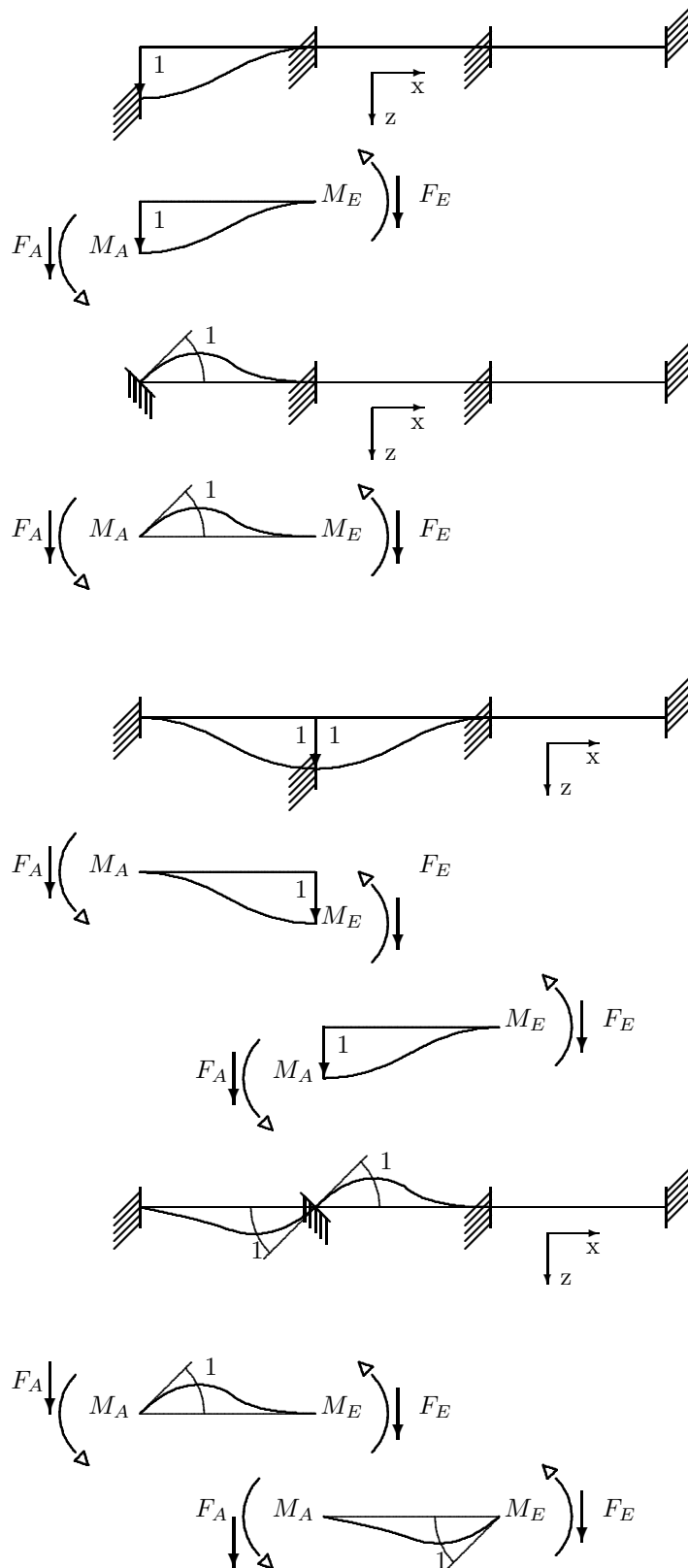


Abbildung 3.10: Einheitsverformungszustände der Knoten 1 und 2

das x bedeutet, daß der Wert noch unbekannt ist.

$$2\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & x & x & x & x & x & x & x \\ -3l & x & x & x & x & x & x & x \\ -6 & x & x & x & x & x & x & x \\ -3l & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{2,1} \\ K_{3,1} \\ K_{4,1} \\ K_{5,1} \\ K_{6,1} \\ K_{7,1} \\ K_{8,1} \end{bmatrix}$$

Als nächstes wird dem Knoten 1 Verdrehung $\varphi_1 = 1$ eingeprägt, alle anderen Freiheitsgrade erhalten wieder den Wert Null. (Abb 3.10, Teilbild 2) Die für diesen Einheitsverformungszustand erforderlichen Kräfte sind die gleichen wie beim entsprechenden Zustand des Elements. An den Knoten 3 und 4 treten für diesen Zustand keine Kraftgrößen erforderlich. Man kann auch dies in Matrixform schreiben:

$$2\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} x & -3l & x & x & x & x & x & x \\ x & 2l^2 & x & x & x & x & x & x \\ x & 3l & x & x & x & x & x & x \\ x & l^2 & x & x & x & x & x & x \\ x & 0 & x & x & x & x & x & x \\ x & 0 & x & x & x & x & x & x \\ x & 0 & x & x & x & x & x & x \\ x & 0 & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,2} \\ K_{2,2} \\ K_{3,2} \\ K_{4,2} \\ K_{5,2} \\ K_{6,2} \\ K_{7,2} \\ K_{8,2} \end{bmatrix}$$

Bei der Verschiebungsfigut des Knotens 2 mit $w_2 = 1$ (Abb 3.10, Teilbild 3) werden sowohl Kräfte aus dem Einheitsverschiebungszustand (Shape 3) des Elements 1 und des Einheitsverschiebungszustand (Shape 1) notwendig, um die Verschiebung zu erzeugen:

$$2\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} x & x & -6 & & x & x & x & x & x \\ x & x & 3l & & x & x & x & x & x \\ x & x & 6 & +6 & x & x & x & x & x \\ x & x & 3l & -3l & x & x & x & x & x \\ x & x & & -6 & x & x & x & x & x \\ x & x & & -3l & x & x & x & x & x \\ x & x & & 0 & x & x & x & x & x \\ x & x & & 0 & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,3} \\ K_{2,3} \\ K_{3,3} \\ K_{4,3} \\ K_{5,3} \\ K_{6,3} \\ K_{7,3} \\ K_{8,3} \end{bmatrix}$$

Die dritte Spalte links zeigt die Anteile aus dem Element 1, die rechte Spalte die aus dem Element 2. Man sieht, daß die Steifigkeitszahlen der Elemente, die gemeinsame Freiheitsgrade haben, unter beachtung der Vorzeichen addiert werden.

Beim Verdrehungsfreiheitsgrad φ_2 Abb 3.10, Teilbild 4) geht man entsprechend vor. Die Steifigkeitszahlen ergeben sich zu:

$$2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} x & x & x & -3l & & & & \\ x & x & x & l^2 & & & & \\ x & x & x & 3l & -3l & & & \\ x & x & x & 2l^2 & 2l^2 & & & \\ x & x & x & & 3l & & & \\ x & x & x & & l^2 & & & \\ x & x & x & & 0 & & & \\ x & x & x & & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_2 = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,4} \\ K_{2,4} \\ K_{3,4} \\ K_{4,4} \\ K_{5,4} \\ K_{6,4} \\ K_{7,4} \\ K_{8,4} \end{bmatrix}$$

Die fünfte und sechste Spalte ergibt sich entsprechend. Anteile aus Element 2 und Element 3 sind zu berücksichtigen. Dies soll jedoch hier nicht ausgeführt werden. Die siebte und achte Spalte enthält nur Anteile aus dem Element 3.

Diesen Vorgang nennt man das Einspeichern der Elementmatrizen in die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems. Jedes Glied der Elementsteifigkeitsmatrix wird in die dem Freiheitsgrad zugeordnete Zeile und Spalte eingespeichert, d. h. zu den dort stehenden Werten addiert.

Welche Struktur die Steifigkeitsmatrix K schließlich hat, hängt ganz von der Reihenfolge der Anordnung der Freiheitsgrade im Verschiebungsvektor ab. Bei geschickter Nummerierung hat die Steifigkeitsmatrix eine ausgeprägte Bandstruktur, die man bei der Lösung des Gleichungssystems üblicherweise ebenso wie ihre Symmetrie ausnutzt.

Die Steifigkeitsmatrix sieht zusammenfassend folgendermaßen aus:

$$2 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3l & 12 & 0 & -6 & -3l & 0 & 0 \\ -3l & l^2 & 0 & 4l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3l & 12 & 0 & -6 & -3l \\ 0 & 0 & -3l & l^2 & 0 & 4l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 3l & 6 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix hat folgende Eigenschaften:

- die Steifigkeitsmatrix ist quadratisch
- die Hauptdiagonalelemente sind alle positiv
- die Matrix ist symmetrisch
- Die „ungelagerte“ Steifigkeitsmatrix ist singulär

3.3.2 Einarbeiten der Lagerungsbedingungen

Die Steifigkeitsmatrix ist bisher noch ohne Lagerungsbedingungen. Wie bei der Elementsteifigkeitsmatrix wird die Lagerung durch Streichen der Zeilen und Spalten durchgeführt. Im Beispiel liegt am Knoten 1 und am Knoten 4 Einspannung vor. Dementsprechend müssen die Zeilen und Spalten Nr. 1 und 2

sowie 6 und 7 gestichen werden. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$2 \frac{EI}{l^3} \underbrace{\begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & -3l \\ 0 & 4l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 12 & 0 \\ -3l & l^2 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}}_{\bar{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{bmatrix}}_{\bar{R}}$$

3.3.3 Lösung des Gleichungssystems und Errechnung der Auflagerkräfte und Schnittgrößen

Nachdem die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems aufgebaut ist, werden die Lagerungsbedingungen durch Streichen von Zeilen und Spalten eingearbeitet. Die reduzierte Steifigkeitsmatrix \bar{K} ist, ausreichende Lagerung vorausgesetzt, regulär. Somit kann das Gleichungssystem $\bar{K}\bar{V} = \bar{R}$ gelöst werden. Die Lösungstechniken sollen hier nicht behandelt werden.

Man erhält als Lösungsvektor die Verschiebungsgrößen im Vektor \bar{V} , den man mit den bekannten Verschiebungen an den gelagerten Knoten zum Verschiebungsvektor V erweitern kann. Mit $KV = R$ erhält man die Auflagerkräfte im Kraftvektor R . Die Schnittgrößen werden auf Elementebene bestimmt. Hierzu müssen die Elementverschiebungsvektoren aufgebaut werden und die bereits gezeigte Operation 3.15 durchgeführt werden.

3.4 Koordinatentransformationen

Da nicht nur gerade Stäbe bearbeitet werden sollen, muß man sich darüber Gedanken machen, in welchen Koordinatensystemen die Verschiebungen und Kräfte zu verstehen sind, wenn Elemente mit unterschiedlicher Ausrichtung aneinander stoßen. Hierzu sind drei Arten von Koordinatensystemen zu unterscheiden:

- das Basic-System mit x-y-z Koordinaten, es ist raumfest. In ihm wird die Geometrie des Systems und die Ausrichtung der anderen Koordinatensysteme beschrieben.
- das Elementsystem wird ab nun l-m-n System genannt. Es wird in der Elementdefinition festgelegt und beschreibt Elementverschiebungen, Elementlastfälle, Schnittgrößen u.ä.. Besonders wird gewöhnlich im Elementsystem die Elementsteifigkeitsmatrix aufgebaut. Jedes Element hat sein eigenes l-m-n-System.
- das globale Koordinatensystem heißt r-s-t-System. Die Freiheitsgrade der Gesamtsteifigkeitsmatrix sind im r-s-t-System beschrieben. In ihm ist die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems aufgebaut. Im r-s-t System sind die Knotenverschiebungen, die Auflagerkräfte und die Knotenbelastungen zu verstehen. Meist ist das r-s-t-System mit dem Basic-System identisch. Es gibt jedoch Fällen, in denen es zweckmäßig ist, ein besonderes r-s-t-KOS einzuführen, dies trifft besonders dann zu, wenn Auflager nicht parallel zum Basic System liegen. (Man spricht manchmal auch von special coordinate system.) Es kann für jeden Knoten ein anderes Koordinatensystem r-s-t System geben.

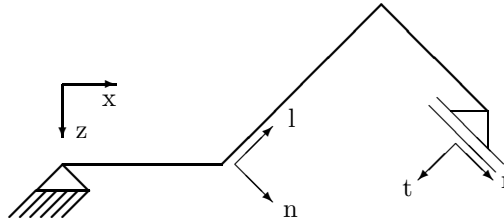


Abbildung 3.11: Koordinatensysteme

Es müssen also Methoden erarbeitet werden, um die im Elementsystem aufgebauten Elementmatrizen ins r-s-t-System des Gesamtsystems zu überführen. Die dafür notwendigen Methoden werden Transformationen genannt und werden durch die Multiplikation einer Transformationsmatrix mit einem Vektors durchgeführt.

Bei den Transformationen müssen Transformationsmatrizen (L, R, T) aufgebaut werden, die aus Einheitsvektoren bestehen, die die Koordinatenrichtung anzeigen. Geht man von rechtwinkligen Koordinatensystemen aus, was hier getan wird, so gilt für alle Transformationsmatrizen die Beziehung

$$T^T T = I \rightarrow T^T = T^{-1} \quad (3.17)$$

Mit anderen Worten, die transponierte Transformationsmatrix ist zugleich ihre Inverse.

3.4.1 Transformation vom l-m-n-System in x-y-z System

Die Transformation des Verschiebungsvektors v_l ins Basic-System geschieht mit der Transformationsvorschrift

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} v_l \\ v_m \\ v_n \end{bmatrix}}_{v_{(l)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{v_{(x)}} \quad (3.18)$$

Der Vektor \vec{l} wird wie folgt bestimmt: Man subtrahiert die Koordinaten des Anfangsknotens A von denen des Endknotens E und dividiert den Differenzvektor durch die Elementlänge l , dann hat man einen Einheitsvektor der Länge 1:

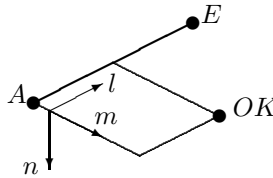


Abbildung 3.12: l-m-n-System des Elements

$$\vec{l} = \frac{1}{l} \left[\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right] \quad (3.19)$$

Um die beiden anderen Einheitsvektoren \vec{m} und \vec{n} zu bestimmen, muß man den Orientierungsknoten OK kennen. Der Orientierungsknoten liegt in der $l - m$ Ebene des Elements. Man bestimmt den Hilfsvektor \vec{H} mit

$$\vec{H}_a = \left[\begin{bmatrix} x_{OK} \\ y_{OK} \\ z_{OK} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right] \quad (3.20)$$

und normiert ihn mit:

$$\vec{H} = \frac{\vec{H}_a}{|\vec{H}_a|} \quad (3.21)$$

Den Vektor \vec{n} steht senkrecht auf der $l - m$ -Ebene, man findet ihn durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \vec{l} \times \vec{H} \quad (3.22)$$

und \vec{m} schließlich durch:

$$\vec{m} = \vec{n} \times \vec{l} \quad (3.23)$$

so daß \vec{l} , \vec{m} und \vec{n} ein Rechtssystem bilden.

3.4.2 Transformation vom r-s-t-System in x-y-z System

Das r-s-t-System wird auf verschiedene Arten definiert. Eine besteht darin die Koordianten (im Basic System) von drei Punkten anzugeben. Der erste (A) beschreibt den Ursprung des KOS, der zweite B liegt auf der positiven t-Achse des KOS. der dritte C liegt in der r-t-Ebene. Den t-Vektor findet man durch

$$\vec{t}_H = \left[\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right] \quad (3.24)$$

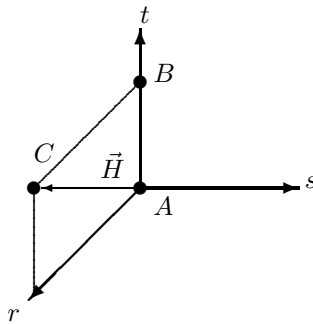


Abbildung 3.13: Definition des r-s-t-System

Der Hilfsvektor \vec{t}_H muß noch durch seine Länge dividiert werden, um ihn zum Einheitsvektor zu machen.

$$\vec{t} = \frac{\vec{t}_H}{|\vec{t}_H|} \quad (3.25)$$

Nun muß eine zweiter Hilfsvektor H erzeugt werden:

$$\vec{H} = \left[\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right] \quad (3.26)$$

Das Kreuzprodukt

$$\vec{s}_H = \vec{t} \times \vec{H} \quad (3.27)$$

liefert den s-Vektor, der nur noch normiert werden muß:

$$\vec{s} = \frac{\vec{s}_H}{|\vec{s}_H|} \quad (3.28)$$

Den r-Vektor findet man durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{r} = \vec{s} \times \vec{t} \quad (3.29)$$

Damit ist das Koordiantensystem bekannt. Das r,s,t-System wird durch die Transformationsmatrix und seinen Ursprung gekennzeichnet. Hier soll nur die Transformationsmatrix R von Interesse sein.

$$R = \begin{bmatrix} r_x & s_x & t_x \\ r_y & s_y & t_y \\ r_z & s_z & t_z \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Die Transformation des Verschiebungsvektors vom vom r-s-t-System zum basic-System geschieht durch:

$$v_{(x)} = Rv_{(r)} \quad (3.31)$$

für die Kräfte gilt analog:

$$f_{(x)} = Rf_{(r)} \quad (3.32)$$

3.4.3 Transformation vom l-m-n-System in r-s-t System

Nun ist bekannt, wie ein Vektor aus dem l-m-n-System und aus dem r-s-t-System ins Basic-System (x-z-y-System) zu transformieren ist. Die globalen Verschiebungen und die Steigkeitsmatrix werden jedoch im r-s-t-System beschrieben. Nun soll gezeigt werden, wie direkt von l-m-n-System ins r-s-t-System transformiert werden kann. Nach Gleichung (3.18) gilt:

$$Lv_{(l)} = v_{(x)}$$

und nach Gleichung(3.31):

$$Rv_{(r)} = v_{(x)}$$

Somit gilt auch:

$$\begin{aligned}
 Rv_{(r)} &= v_{(x)} = Lv_{(l)} \\
 \underbrace{L^T R}_{T_{l-r}} v_{(r)} &= \underbrace{L^T L}_I v_{(l)} \\
 T_{(l-r)} v_{(r)} &= v_{(l)}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Mit Gleichung (3.33) ist die Transformationsbeziehung vom l-m-n-System ins r-s-t-System (und umgekehrt) gefunden. entsprechend gilt für den Kraftvektor:

$$T_{(l-r)} f_{(r)} = f_{(l)} \tag{3.34}$$

Mit den Gleichungen (3.33) und (3.34) ist bekannt, wie Verschiebungs- und kraftvektoren transformiert werden können. Der Knotenverschiebungsvektor besteht jedoch aus translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden. Die Transformation des gesamten Knotenverschiebungsvektors wird wie folgt formuliert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{(l-r)} & 0 \\ 0 & T_{(l-r)} \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} v_{(r)} \\ v_{(s)} \\ v_{(t)} \\ \varphi_{(r)} \\ \varphi_{(s)} \\ \varphi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{(l)} \\ v_{(m)} \\ v_{(n)} \\ \varphi_{(l)} \\ \varphi_{(m)} \\ \varphi_{(n)} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Die Hypermatrix T hat auf der Diagonale die Transformationsmatrizen $T_{(l-r)}$, alle anderen Matricelemente sind Null. $T_{i,j}$ ist die Transformationsmatrix der Knotenverschiebungs- und Knotenkraftvektors. Sie gilt für eine Element und einen Knoten. Zur Kennzeichnung trägt sie den Index i für das Element, j für den Knoten.

3.4.4 Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix vom e-l-m-System ins r-s-t System

Bei der Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix muß der Elementverschiebungsvektor und der Elementkraftvektor transformiert werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{i,j} & 0 \\ 0 & T_{i,k} \end{bmatrix}}_{T_i} \begin{bmatrix} v_{(r_A)} \\ v_{(s_A)} \\ v_{(t_A)} \\ \varphi_{(r_A)} \\ \varphi_{(s_A)} \\ \varphi_{(t_A)} \\ v_{(r_E)} \\ v_{(s_E)} \\ v_{(t_E)} \\ \varphi_{(r_E)} \\ \varphi_{(s_E)} \\ \varphi_{(t_E)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{(l_A)} \\ v_{(m_A)} \\ v_{(n_A)} \\ \varphi_{(l_A)} \\ \varphi_{(m_A)} \\ \varphi_{(n_A)} \\ v_{(l_E)} \\ v_{(m_E)} \\ v_{(n_E)} \\ \varphi_{(l_E)} \\ \varphi_{(m_E)} \\ \varphi_{(n_E)} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\hat{v}_{(r)}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\hat{v}_{(l)}}$

Gleichung 3.36 in Kurzform lautet:

$$t_i \hat{v}_{(r)} = \hat{v}_{(l)}$$

Nach Gleichung (3.8) gilt die Beziehung

$$k_{(l)} \hat{v}_{(l)} = \hat{f}_{(l)}$$

Ersetzt man $\hat{v}_{(l)}$ durch Gleichung (3.36), so erhält man:

$$k_{(l)} T_i \hat{v}_{(r)} = \hat{f}_{(l)}$$

multipliziert man die gewonnene Gleichung mit T_i^T von links gewinnt man:

$$\underbrace{T_i^T k_{(l)} T_i}_{k_{(r)}} \hat{v}_{(r)} = \underbrace{T_i^T \hat{f}_{(l)}}_{f_{(r)}} \quad (3.37)$$

Mit Gleichung (3.37) ist die Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix aus dem l-m-n-System ins r-s-t-System durchgeführt worden.

$$k_{(r)} = T_i^T k_{(l)} T_i \quad (3.38)$$

Die nach Gleichung (3.38) transformierte Matrix ist in die Gesamtsteifigkeitsmatrix K entsprechend den internen Nummern der kinematischen Freiheitsgrade (Kinemat) einzuspeichern.

Kapitel 4

Die geometrische Steifigkeitsmatrix

Literatur: Clough: Dynamics of Structures, S. 149 ff, 1975 MacGraw-Hill

In einem elastischen System, das aus Masse, Feder und Dämpfer besteht und durch eine äußere (zeitabhängige) Kraft erregt wird, wirken folgende Kräfte:

- d'Alembertsche Trägheitskraft (inertia) f_i ,
- Dämpfungskraft f_d ,
- elastische Kraft (stiffness) f_s ,
- die zeitabhängige äußere Kraft $p(t)$.

$$f_i + f_d + f_s = p(t)$$

Setzt man $f_i = m\ddot{v}$, $f_d = c\dot{v}$ und $f_s = kv$ so erhält man:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$$

Tritt Normalkraftbeanspruchung von nennenswerter Größe auf, insbesondere Druckbeanspruchung, so ist das Gleichgewicht im ausgelenkten System zu untersuchen, es besteht beim Stab Knickgefahr, bei Schalen Beulgefahr. Die Normalkraft führt zu zusätzlichen Kraftkomponenten, die mit f_g bezeichnet werden sollen. Damit erhält man

$$f_i + f_d + f_s - f_g = p(t)$$

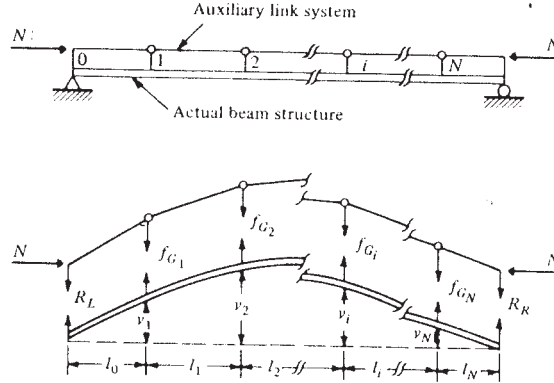
Das Vorzeichen ist negativ, weil f_g die Verschiebung vergrößert. Führt man $f_g = k_g v$ ein, so erhält man:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + (k - k_g)v = p(t)$$

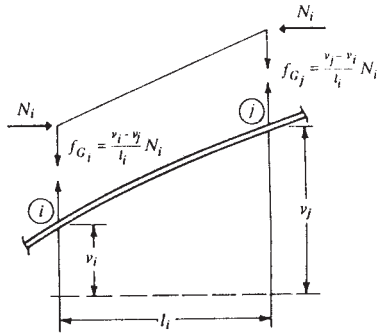
k_g ist die geometrische Steifigkeitsmatrix. Sie ist natürlich von der Normalkraft im Element abhängig. Um k_g zu ermitteln, muß vorher die Normalkraft in einer statischen Rechnung ermittelt werden. Ändert sich die Normalkraft sehr

stark während der Zeitintegration, muß sie häufiger neu bestimmt werden, wodurch die Rechenzeit größer wird, da die Dreieckszerlegung des Gleichungssystems immer neu durchgeführt werden muß.

Die einfachste Art die Elemente der geometrischen Steifigkeitsmatrix zu bestimmen, ist von einem Modell auszugehen, bei dem die Normalkraft durch extra Stabelemente übertragen wird, die durch Gelenke miteinander und der wirklichen Stabstruktur verbunden sind. (siehe Skizze) Diese extra Stabelemente



sind als starr anzunehmen.



Die Abtriebskräfte Q_{Gi} und Q_{Gj} (in der Skizze als f_{Gi} und f_{Gj} bezeichnet), die an den Knoten i und j wirken, ergeben sich zu:

$$\mathbf{f}_G = \begin{pmatrix} Q_{Gi} \\ Q_{Gj} \end{pmatrix} = \frac{N_i}{l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_j \end{pmatrix}$$

Berücksichtigt man auch die Ansatzformen der Elementverschiebung erhält man die genauere Beziehung (siehe Clough S. 171, allerdings mit anderer Reihenfolge der kinematischen Freiheitsgrade)

$$\mathbf{f}_G = \begin{pmatrix} Q_{Gi} \\ M_{Gi} \\ Q_{Gj} \\ M_{Gj} \end{pmatrix} = \frac{N_i}{30l_i} \begin{pmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{pmatrix}$$

Wie bei Clough ist die Normalkraft als Druckkraft positiv eingeführt worden.

Knickproblem als Sonderfall der Nullfrequenz

betrachtet man die eingangs erwähnte Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung des Normalkrafteinflusses, so erhält man:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + (k - k_g)v = p(t)$$

Verschwundet die Rechte Seite und das Dämpfungsglied, so hat man die DGL für eine ungedämpfte Schwingung.

$$m\ddot{v} + (k - k_g)v = 0$$

Durch Einführung eines harmonischen Ansatzes $v = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz ω und der Zeit t erhält man die Frequenzgleichung

$$\det(\bar{k} - \omega^2 m) = 0$$

Infolge der Normalkraftbeanspruchung der Struktur sinkt die Frequenz bei Druckbeanspruchung. (Bei Zugbeanspruchung steigt sie, siehe Saiteninstrumente). Wenn die Druckbeanspruchung so groß ist, daß die Frequenz zu Null wird, knickt der Stab. (Clough S. 183)

Man erhält $\det(\bar{k} - 0^2 m) = 0$ woraus sich $\det(k - k_g) = 0$ ergibt. Erstellt man k_g für eine Referenzbelastung k_{g-ref} und führt einen Parameter λ als Faktor ein, so erhält man

$$\det(k - \lambda k_{g-ref})$$

Über die Bedingung $\det(k - \lambda k_{g-ref}) = 0$ und Verfügung über λ kann man einen Faktor λ ermitteln, bei dem der Knickfall eintritt. Das heißt, die zum Aufbau der geometrischen Referenzsteifigkeitsmatrix k_{g-ref} benutzte Referenzbelastung kann um den Faktor λ vervielfacht werden, bis der Knickfall eintritt.

Knickproblem als Fall der singulären Steifigkeitsmatrix

Ausgangspunkt ist wieder die Bewegungsgleichung des elastischen gedämpften Systems:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + (k - k_g)v = p(t)$$

Nun soll der statische Fall betrachtet werden, bei dem sowohl die Beschleunigung als auch die Geschwindigkeit verschwindet. Es verbleiben folgende Glieder:

$$(k - k_g)v = p(t)$$

Diese Gleichung ist eindeutig lösbar, solange die Koeffizientenmatrix $(k - k_g)$ nicht singulär ist. Die Singularität tritt auf, wenn die Determinante von $(\bar{k} = k - k_g)$ verschwindet. Das weitere Vorgehen, ist im vorhergehenden Abschnitt beschrieben.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß es noch geometrische Steifigkeitsmatrizen für Querkraft und Biegemoment gibt. Sie sind für das Kippen von Bedeutung.

Kapitel 5

Literatur zur FEM

Prof. W. Kissing: Vorlesungsskript FEM, Hochschule Wismar

U. Meißner, A. Menzel: Die Methode der Finiten Elemente, Springer

Bathe: Finite-Elemente-Methoden, Springer

Clough: Dynamics of Structures, Mc Graw Hill

Argyris, Mlejnek: Die Methode der Finiten Elemente

P. Steinke: Finite-Element-Methode, Rechnergestützte Einführung, Springer,
2004

Bernd Klein FEM, Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode,
Vieweg, 1996