

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V
Institut für Mechanik

K. Weinberg

**Zur Methode der finiten Elemente
in der Mechanik
— Linear-elastische Probleme —**

Skript zur Lehrveranstaltung im Wintersemester 2006/07

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick	1
1.2	Das Konzept der FEM	3
1.3	Zur Motivation	4
1.4	Bemerkung	7
2	Anschauliche Herleitung einfacher FE-Systeme	9
2.1	Der Stab, erster Teil: Das einfachste finite Element	9
2.2	Zusammenbau des Gesamtsystems	11
2.3	Das Federelement	14
2.4	Das Balkenelement	15
2.5	Erfassen der Belastungen	19
2.6	Andere eindimensionale Modelle	21
2.7	Der Stab, zweiter Teil: Der Fachwerkstab	21
2.8	Ein Matlab-Programm zur Berechnung ebener Fachwerke	24
2.9	Biegesteife Rahmentragwerke	30
3	Mechanische und mathematische Grundlagen	37
3.1	Das Randwertproblem der linearen Elastizität	37
3.2	Variationsgleichung und Variationsprinzip	40
3.3	Hamiltonsches Prinzip	44
3.4	Bemerkungen zur Variationsrechnung	46
3.4.1	Die Euler-Lagrange Gleichungen	48
3.4.2	Funktionale mit höheren Ableitungen	49
3.4.3	Funktionale mehrerer Funktionen	50
3.4.4	Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitung	52
3.4.5	Lösungsräume der linearen Elastizität.	53
4	FE-Diskretisierung eindimensionaler Modelle	55
4.1	Differentialgleichung und Variationsformulierung für den Zug-Druck-Stab	55
4.2	Der Stab, dritter Teil: Ansatzfunktionen	58
4.3	Herleitung der Elementsteifigkeitsbeziehung	63

4.4	Einarbeiten der Randbedingungen und Aufbau des FE-Gleichungssystems	65
4.5	Lösung des Gleichungssystems	69
4.6	Spannungsberechnung	71
5	Zwei- und dreidimensionale FE-Formulierungen	73
5.1	Formulierung der Ansatzfunktionen	75
5.2	Das isoparametrische Konzept	83
5.3	Numerische Integration der Elementsteifigkeitsbeziehungen	87
5.4	Dreiecke und Tetraeder	89
5.5	Axialsymmetrische Elemente	95
6	Elastodynamische Probleme	97
6.1	Grundlagen	97
6.2	Finite-Element-Diskretisierung	99
6.3	Eigenschwingungen	101
6.4	Zeitdiskretisierung	101
6.4.1	Differenzenverfahren	103
6.4.2	Newmark-Verfahren	104
7	Temperaturfelder und Wärmeübertragung	107
7.1	Partielle Differentialgleichung	109
7.2	Prinzip der virtuellen Temperaturen	109
7.3	Finite-Element-Diskretisierung	110
8	Kontakt zwischen Strukturen	113
8.1	Theoretische Grundlagen	113
8.2	Numerische Berechnung	116
8.2.1	FE-Diskretisierung	116
8.2.2	Formulierung von Kontaktelementen	119
8.2.3	Lösungsalgorithmus	121
9	Biegung von Balken und Platten	125
9.1	Modelle der Balkenbiegung	125
9.1.1	Der schubstarre Balken	125
9.1.2	Der schubweiche Balken	126
9.2	Platten und FE-Diskretisierung nach der Kirchhoff-Theorie	129
9.3	Platten und FE-Diskretisierung nach der Reissner-Mindlin-Theorie . . .	131
9.4	Gemischte Variationsprinzipie	136
10	Zur Genauigkeit der FEM	137

11 Abschließende Betrachtungen	143
11.1 Einordnung der FEM	143
11.1.1 Das Verfahren der finiten Differenzen	143
11.1.2 Die Methode der finiten Volumen	143
11.1.3 Das Galerkin-Verfahren	144
11.1.4 Das Ritzsche Verfahren	145
11.1.5 Die Randelemente-Methode (BEM)	145
11.2 Nichtlineare Probleme	146
11.3 Programme für FE-Analysen	147
Literatur	149

1 Einleitung

1.1 Überblick

Bei der Berechnung ingenieurwissenschaftlicher Probleme hat sich mit der Verbreitung der Rechentechnik ein grundsätzlicher Wandel vollzogen. Vorher hatten wir das Zeitalter der analytischen Lösungen und die Kunst bestand darin, die Gesamtstruktur in einfache Substrukturen zu zerlegen, um diese dann mit dem am besten geeigneten Spezialverfahren zu berechnen. Die Hauptrestriktion lag dabei im manuellen Aufwand, der nicht zu hoch sein durfte. Dies führte zu einer Vielzahl von Einzelverfahren für spezielle Fragestellungen. Das sind beispielsweise in der Stabstatik das Kraftgrößenverfahren von Müller-Breslau oder graphische Verfahren wie dem Cremona-Plan, die bereits seit ca. 1890 verwendet werden.

Die Nutzung des Computers führte seit den 1960er Jahren zur Entwicklung von qualitativ anderen Verfahren, den numerischen Lösungsmethoden. Die Methode der finiten Elemente¹ ist hier das prominenteste Verfahren, aber auch das Differenzenverfahren, die Randelementemethode oder die Methode der finiten Volumen gehören in diese Kategorie. Die Anzahl der notwendigen Rechenoperationen ist nun relativ bedeutungslos, statt dessen soll die Formulierung des Problems möglichst allgemeingültig sein. Egal welchen Tragwerkstyp wir berechnen wollen, ob Fachwerke, Seilstrukturen, ebene und räumliche Stabwerke, Scheiben, Platten, Schalen oder 3D-Kontinua, sie alle sind mit dem gleichen Formalismus zu erfassen. Diese Allgemeingültigkeit ist eine wesentliche Stärke der numerischen Verfahren. Um sie optimal nutzen zu können, müssen die zugrunde liegenden Variablen und Gleichungen ebenfalls in allgemeiner Form, losgelöst vom konkreten Problem, formuliert werden.

Eine typische mathematische Modellierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten ist die Definition eines Rand- oder Anfangswertproblems: Die gesuchten Funktionen müssen eine partielle Differentialgleichung (oder ein System von Differentialgleichungen) erfüllen, und

¹deutsche Abkürzung: FEM für Finite-Elemente-Methode, englische Abkürzung meist: FEA für Finite Element Analysis

an speziell vorgegebenen Rand- bzw. Anfangspunkten müssen sie (bzw. ihre Ableitungen) vorgeschriebene Werte annehmen. Die Möglichkeit der analytischen Lösung eines Rand- oder Anfangswertproblems ist auch für relativ einfache Problemstellungen eher die Ausnahme als die Regel. Mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) können dagegen Rand- oder Anfangswertprobleme *näherungsweise* gelöst werden. Im Prinzip werden dazu nur die unendlich kleinen (infiniten) differentiellen Elemente der Differentialgleichungen durch endlich kleine (finite) Elemente angenähert — was den Namen der Methode erklärt. Die FEM ist auf lineare und nichtlineare Probleme anwendbar. Dadurch eignet sie sich sowohl für den Einsatz in der Strukturmechanik als auch in der Dynamik, der Wärmelehre, der Strömungsmechanik und in vielen weiteren Gebieten.

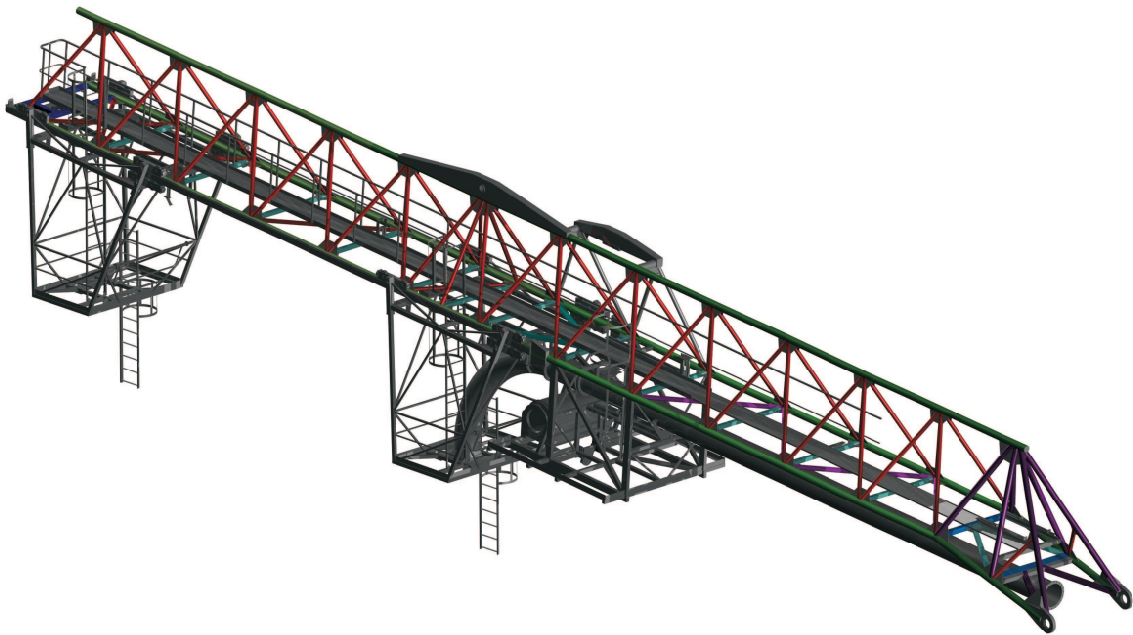


Abbildung 1.1: Modell zur FEM-Berechnung eines Kranauslegers, mit freundlicher Genehmigung der Fa. Hartmann, Offenbach

Wir werden hier die FEM am Beispiel der linearen Elastizitätstheorie vorstellen. Das liegt nahe, da linear elastische Probleme mehr als 90% aller FEM-Anwendungsrechnungen ausmachen [19]. Zuerst werden wir im nächsten Kapitel einfache finite Elemente herleiten und das prinzipielle Konzept anschaulich und ohne mathematischen Hintergrund erklären. Der prinzipielle Ablauf einer FE-Analyse ist dabei schon zu erkennen. Anschließend werden wir die FEM zur Berechnung von Fach- und Rahmentragwerken anwenden, so lassen sich bereits Aufgabenstellungen wie die Spannungs- und Verformungsanalyse

des im Bild 1.1 dargestellten Kranauslegers bewältigen.

Im Kapitel 3 führen wir dann die grundlegenden mechanischen und mathematischen Gleichungen der linearen Elastizität sowohl für statische als auch für dynamische Probleme ein. Im Kapitel 4 werden wir die Ableitung der FEM aus dem Variationsprinzip auf die schon bekannten eindimensionalen Probleme anwenden und weitere vorstellen. Im anschließenden Kapitel 5 wird die allgemeine Herangehensweise zur Lösung von mehrdimensionalen Problemen behandelt. Die Erweiterung der FE-Gleichungen auf dynamische Probleme beinhaltet Kapitel 6. Anschließend folgen Ausführungen zu den speziellen Problemen der (linearen) Wärmeübertragung in Kapitel 7, zur Plattenbiegung in Kapitel 9 und zur Kontaktberechnung in Kapitel 8. In Kapitel 10 machen wir einige Bemerkungen zur Genauigkeit der numerischen Lösung und abschließend in Kapitel 11 zur Einordnung der Methode in die Welt der numerischen Lösungsverfahren.

1.2 Das Konzept der FEM

Die Methode der finiten Elemente basiert auf der Idee, die zu berechnende Struktur in eine große Anzahl kleiner, einfacher (und damit der Berechnung zugänglicher) Elemente zu zerlegen. Aus den Elementgleichungen wird die Gesamtstruktur aufgebaut, um aus den Elementlösungen die Lösung für das Gesamtsystem zu konstruieren. Dabei sind Stetigkeits- und Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen. Diese Bedingungen werden aber nur an bestimmten Punkten, den sogenannten Knoten formuliert. Man erhält so ein Gleichungssystem und aus dessen Lösung die Näherungslösung für die Gesamtstruktur.

Eine linear-elastische Finite-Elemente-Berechnung hat typischerweise den folgenden Ablauf:

1. PREPROCESSING (Vorlauf)

- Festlegen des Modelltyps
- Erzeugen bzw. Einlesen der Geometrie der Struktur
- Bereitstellen der Materialdaten
- Vernetzen der Struktur

2. AUFBAU UND LÖSEN DES FE-SYSTEMS

- Berechnen der Elementsteifigkeitsbeziehungen
- Zusammenbau zur Systembeziehung
- Einarbeiten der Randbedingungen
- Lösen des Gleichungssystems
- Berechnen der unbekannten Verschiebungen

3. POSTPROCESSING (Nachlauf)

- Berechnen der Dehnungen und Spannungen in den Elementen
- Mitteln von Spannungsgrößen und graphische Darstellung
- Ergebnisauswertung

In der Praxis ist meistens die Vernetzung der Struktur die zeitaufwendigste — wenn auch nicht unbedingt intellektuell anspruchsvollste — Teilaufgabe. Die eigentliche Analyse, also Aufbau und Lösen des Gleichungssystems bis einschließlich der Spannungsberechnung übernimmt gewöhnlich komplett der Rechner. Erst bei der Ergebnisauswertung muß der Anwender entscheiden, ob die FE-Berechnung im Sinne der Aufgabenstellung sinnvolle Ergebnisse geliefert hat.

1.3 Zur Motivation

Die zahlreichen verfügbaren leistungsstarken und benutzerfreundlichen kommerziellen FEM-Programme verleiten dazu, das Verständnis für die durchzuführende Berechnung durch das Erlernen der Bedienung der Benutzeroberfläche eines Programms zu ersetzen. Das ist schon deshalb gefährlich, weil es möglich ist, mit Finite-Elemente-Programmen beliebigen Unsinn auszurechnen. Dennoch wird den per Rechner ermittelten Ergebnissen oft viel zu sehr vertraut. Bekanntermaßen kann aber Software fehlerhaft sein (und ist es auch), das gilt natürlich auch für FEM-Programme. Da die groben Fehler im allgemeinen in der Testphase bemerkt werden, sind es gerade spezielle Probleme, die

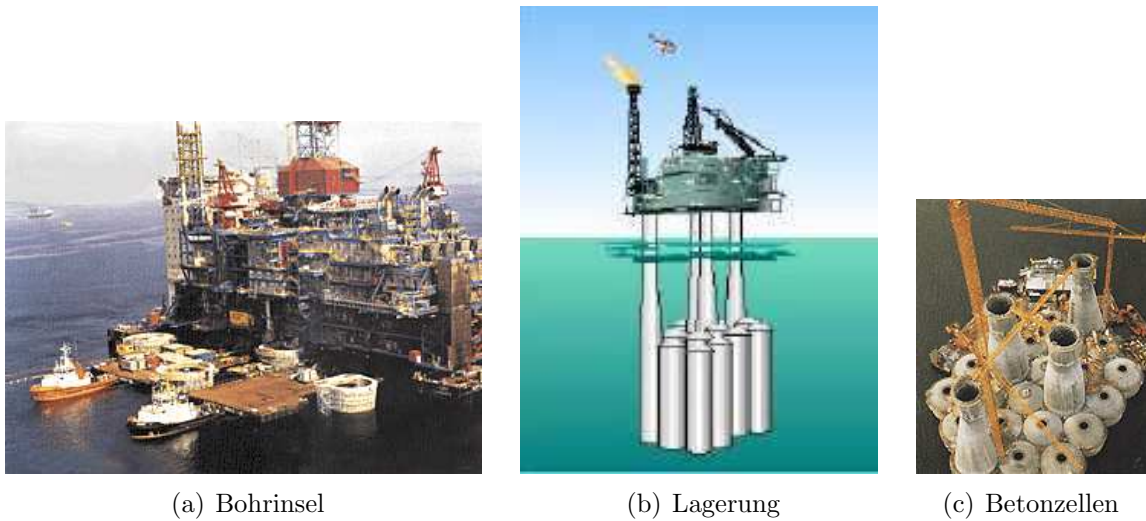
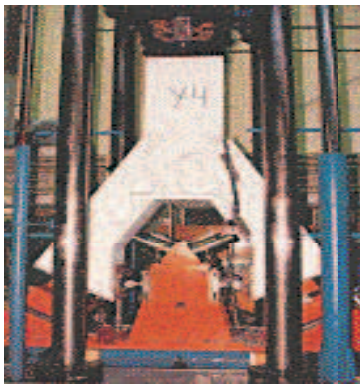


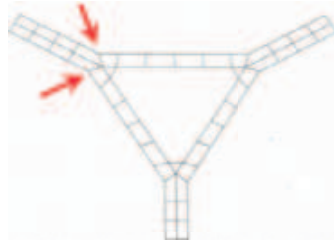
Abbildung 1.2: Aufbau der Erdöl- und Erdgasbohrinsel Sleipner-A, cf. [23]

bei einem über lange Zeit zuverlässig arbeitenden Programm plötzlich zu einem Fehler führen. Im günstigen Fall äußert sich das durch einen Programmabsturz oder ein eindeutig unsinniges Ergebnis, im ungünstigen Fall bemerkt es der Nutzer überhaupt nicht. (Wenn man es doch bemerkt und bei der Software-Firma anruft erfährt man oft, das der Fehler im Programm dort längst bekannt ist. Er wird bloß nicht beseitigt, weil natürlich jede Programmänderung Ursache für neue Fehler sein kann. Außerdem ist die Suche nach Fehlerursachen mühselig und wenig werbewirksam.) Aber selbst bei korrekt arbeitender Software gibt es reichlich Möglichkeiten Fehler zu machen. Beliebte ist der Einsatz des falschen Modells. Wer einen biegesteifen Rahmen mit einem Fachwerkprogramm berechnet und sich freut weil keine Biegespannungen hervorgerufen werden, darf das falsche Ergebnis natürlich nicht dem Programm anlasten. Mindestens ebenso häufig sind FEM-Anwender denen der Unterschied zwischen ebenem Spannungs- und ebenem Dehnungszustand nicht klar ist. Die meisten Fehler entstehen aber sicherlich durch unpassende Vernetzung. Und letztlich kann man auch ein zum Problem passendes und richtig rechnendes Programm falsch bedienen, indem man ihm falsche Eingabedaten anbietet. Gern benutzt werden falsche Einheiten ² für richtige Zahlenwerte, aber es gibt noch viel mehr Varianten. Jedenfalls ist es schon empfehlenswert, die Ergebnisse einer FE-Analyse kritisch anzuschauen. Ein prominentes Beispiel dafür, was anderenfalls passieren kann, sei im folgenden erwähnt.

²In FEM-Programme werden für Längen- und Materialangaben etc. Zahlenwerte eingegeben, folglich müssen die Einheiten zueinander passen, z.B. Eingaben in mm, MPa oder auch N, mm, s.



(a) gebrochene Verbindungszelle



(b) FE-Netz der Betonzellen

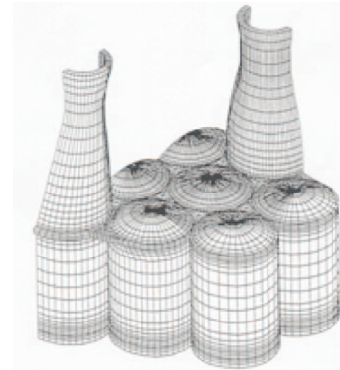


Abbildung 1.3: Lagerung der Bohrinselfleipner-A [23, 25]

Am 23. August 1991 sank vor Stavanger an der norwegischen Küste die Erdölbohrinsel Sleipner-A. Glücklicherweise passierte der Unfall bei Tests vor Inbetriebnahme und von den 200 Leuten geplanter Besatzung waren noch nicht viele dort, so daß niemand ernsthaft zu Schaden kam. Bis auf die Eigner, die norwegische Statoil-Company, die das plötzliche Sinken ihrer modernen Anlage 700 Millionen Dollar kostete. Eine genaue Untersuchung der Ursachen leistete sich die Statoil dann auch noch, für die technische Leitung wurde die SINTEF beauftragt. Die SINTEF ist die größte skandinavische Forschungsorganisation, sie erledigt bzw. finanziert eine Vielzahl von Forschungsaufträgen für den privaten und öffentlichen Bereich. Ihr ist es wohl zu verdanken, daß die Ursachen dieses Unfalls öffentlich bekannt wurden — ganz im Gegensatz zu vielen anderen Versagensfällen, die von den betreffenden Unternehmen meist möglichst geheim behandelt werden. Die Ergebnisse der Untersuchung umfassen hier wohl 16 Ordner, siehe [23] und [25], man kann sie aber gekürzt zusammenfassen. Die Bohrinselfchwimmt bzw. schwamm in 82m Tiefe auf 24 Betonzellen, die sich nach oben zu vier Schäften verjüngten und die Plattform hielten (siehe Abbildung). Eine mehrere Betonzellen verbindende Zelle bekam einen Riß in der Wand, schlug leck und füllte sich schneller mit Wasser als die Pumpen der Plattform es wieder auspumpen konnten. Fast 100000 Tonnen Material sanken auf 220m Tiefe. Ursache für das Versagen der Verbindungszelle war eine falsche Auslegung. Die linear-elastische FE-Berechnung des Bauteils lieferte Schubspannungen, die die tatsächlich auftretenden um 47% unterschätzten. Die FE-Rechnungen waren mit dem populären FE-Programm MSC-NASTRAN durchgeführt worden.

1.4 Bemerkung

Der vorliegende Text ist verfasst worden zur Begleitung der von mir an der TU Berlin im Wintersemester 2006/07 gehaltenen Lehrveranstaltung „Projekt zur Methode der finiten Elemente in der Mechanik (FEM I)“. Vermutlich finden Sie noch Druckfehler und Unklarheiten. Bitte weisen Sie mich darauf hin. Danke und viel Erfolg!

2 Anschauliche Herleitung einfacher FE-Systeme

Hier werden einfache finite Elemente aus der Statik hergeleitet und das prinzipielle Konzept der FEM anschaulich erklärt. Danach werden wir die Methode zur Berechnung von Fach- und Rahmentragwerken erweitern. Ein Matlab-Programm zur Berechnung eines ebenen Fachwerkes veranschaulicht abschließend den Ablauf einer FE-Analyse.

2.1 Der Stab, erster Teil: Das einfachste finite Element

Das klassische eindimensionale Modell der Mechanik ist der gerade Zug-Druck-Stab. Bekanntlich kann der sich nur in Richtung seiner Achse verformen, also seine Länge ändern. Da der Zug-Druck-Stab ein so einfaches Modell ist, können wir hier die grundlegenden FE-Beziehungen direkt aus der Anschauung ermitteln. Die formale mathematische Herleitung ergänzen wir dann im Kapitel 4.

Betrachtet wird eine Struktur, die sich — wie in Abb. 2.1 dargestellt — aus mehreren Stäben mit jeweils konstantem Querschnitt zusammensetzt. Die Struktur sei nur durch

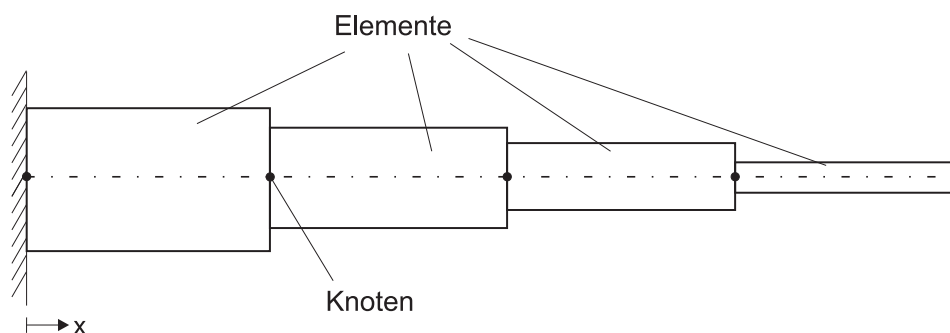


Abbildung 2.1: Definition von finiten Elemente und Knoten

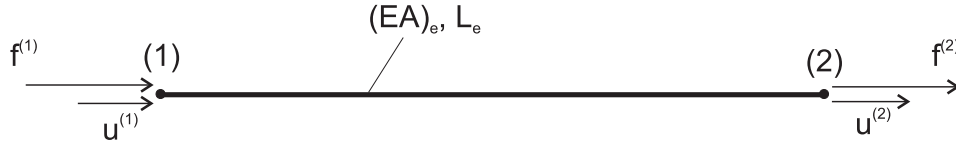


Abbildung 2.2: Stabelement

einzelne, in Längsrichtung wirkende Kräfte belastet. Das Modell wird nun vernetzt. Dazu wird zunächst ein globales Koordinatensystem (Längsachse als x-Achse) definiert. Nun legen wir Knotenpunkte überall dorthin, wo sich der Stabquerschnitt ändert und wo eine Last angreift sowie an den Anfang und das Ende der Struktur. Die Bereiche dazwischen bilden unsere (finiten) Elemente. Ein solches Stabelement wird jetzt freigeschnitten und wir erhalten das einfachste finite Element für ein Tragwerk, den nur durch Normalkräfte belasteten Stab, siehe Abb. 2.2.

Die Anfangs- und Endknoten der Stabelemente numerieren wir nun lokal — mit (1) und (2). An diesen Knoten tragen wir die Verschiebungen der Punkte $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ und die Schnittkräfte $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ an, Kräfte und Verschiebungen werden in der FEM immer in Richtung der globalen Koordinaten angetragen (und nicht an den aus dem Grundkurs Mechanik bekannten positiven und negativen Schnittufern)! Die Länge des Elementes e sei l_e . Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche bilden die — elementweise konstante — Dehnsteifigkeit $(EA)_e$. Damit sind alle mechanischen Eigenschaften bekannt und wir formulieren das Gleichgewicht

$$f^{(1)} + f^{(2)} = 0 \quad (2.1)$$

und die Verformungsbeziehung

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \Delta u_{Stab} = \frac{f^{(2)} l_e}{(EA)_e}. \quad (2.2)$$

Diese Beziehungen lassen sich umformen zu den Kraft-Verformungsbeziehungen

$$f^{(1)} = \left(\frac{EA}{l} \right)_e u^{(1)} - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u^{(2)} \quad (2.3)$$

$$f^{(2)} = \left(\frac{EA}{l} \right)_e u^{(2)} - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u^{(1)}. \quad (2.4)$$

Werden die Gleichungen (2.3-2.4) in Matrizen zusammengefaßt, dann haben wir die **Elementsteifigkeitsbeziehung** für ein Stabelement.

$$\underbrace{\left(\frac{EA}{l} \right)_e \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\hat{u}}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}. \quad (2.5)$$

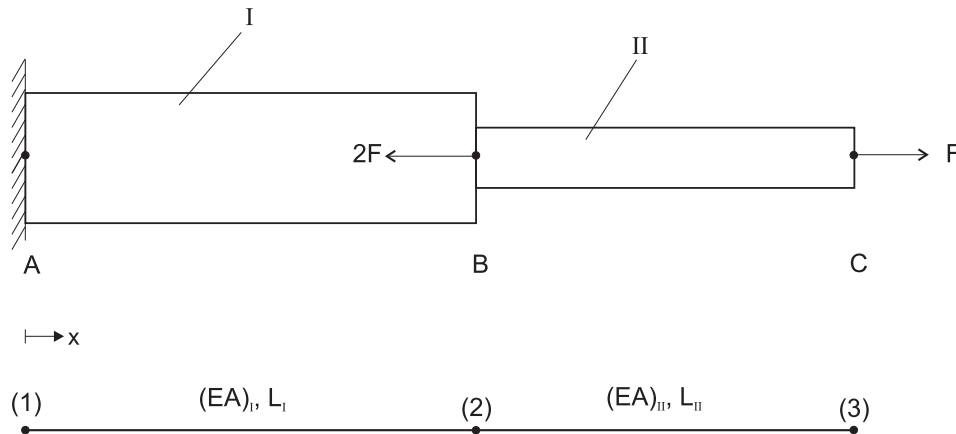


Abbildung 2.3: System aus zwei Stäben

Dabei ist \mathbf{K}_e die Elementsteifigkeitsmatrix, $\hat{\mathbf{u}}_e$ der Vektor der unbekannten Knotenverschiebungen und \mathbf{f}_e der Elementlastvektor.

2.2 Zusammenbau des Gesamtsystems

Um ein Tragwerk zu berechnen wird es natürlich mit vielen finiten Elementen vernetzt. Der Zusammenbau eines Finite-Elemente-Systems soll hier am einfachsten Beispiel — einem System aus zwei Stäben *I* und *II* — prinzipiell verdeutlicht werden.

Gegeben seien Elastizitätsmodul, Querschnittfläche und Länge der Stababschnitte, E_I , E_{II} , A_I , A_{II} und l_I , l_{II} . Das Stabsystem sei im Punkt *A* gelagert und werde durch die Druckkraft $2F$ im Punkt *B* und die Zugkraft F im Punkt *C* belastet (Abb.2.3). Wir führen ein globales (also für alle Elemente gültiges) Koordinatensystem ($x = 0$ bei Punkt *A*) und Knotenpunkte ein: Knoten 1 bei *A*, Knoten 2 bei *B*, Knoten 3 bei *C*. Die Nummerierung der Knoten bestimmt ihre Position im Vektor der unbekannten Knotenverschiebungen und muss daher fortlaufend sein.

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Zur Unterscheidung von lokalen (elementweisen) und globalen Knotennummern schreiben wir für den globalen Knoten k den Verschiebungswert als $u_k \equiv u_{xk}$, den Index x für die Koordinatenrichtung lassen wir im eindimensionalen Fall weg.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen für die beiden Elemente lauten mit (2.5)

$$K_I = \begin{pmatrix} \frac{E_I A_I}{l_I} & -\frac{E_I A_I}{l_I} \\ -\frac{E_I A_I}{l_I} & \frac{E_I A_I}{l_I} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{II} = \begin{pmatrix} \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \\ -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \end{pmatrix}.$$

Um die Elementsteifigkeitsmatrizen zur Systemmatrix zusammenzubauen, muß die Zuordnung der globalen Knotennummern zu den Elementen beachten werden. So hat z.B. der erste Knoten vom Element *II* die Nummer 2 und der zweite Knoten die Nummer 3. Damit steht z.B. das Matrixelement $(K_{II})_{11}$ in Zeile 2, Spalte 2 der Systemsteifigkeitsmatrix, das Matrixelement $(K_{II})_{12}$ steht in Zeile 2, Spalte 3, $(K_{II})_{21}$ steht in Zeile 3, Spalte 2 usw.. Zweckmässigerweise fassen wir Zuordnung der globalen Knotennummern in einer Tabelle zusammen (auch Koinzidenzmatrix oder Topologie der Elemente genannt).

Element	Elementknoten (1)	Elementknoten (2)
I	1	2
II	2	3

Tabelle 1: Zuordnung der globalen Knotennummern zu den Elementen

Zum Aufbau der rechten Seite werden die an den Knoten angreifenden Einzellasten entsprechend der Knotennumerierung im Lastvektor angeordnet. Die Kräfte weisen wie die Verschiebungen in Richtung des globalen Koordinatensystems, d.h., die Drucklast hat hier ein negatives Vorzeichen $F_B = -2F$. Die Kraft F_A am Lager ist unbekannt.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A \\ -2F \\ F \end{pmatrix}$$

Zusammengefaßt erhalten wir für dieses einfachste System die **Systemsteifigkeitsbeziehung**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E_I A_I}{l_I} & -\frac{E_I A_I}{l_I} & 0 \\ -\frac{E_I A_I}{l_I} & \frac{E_I A_I}{l_I} + \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \\ 0 & -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_A \\ -2F \\ F \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} \quad (2.7)$$

oder, für den Fall gleicher elastischer Eigenschaften beider Elemente

$$\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A \\ -2F \\ F \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} beschreibt die Verknüpfung von Knotenkräften und Knotenverschiebungen. Einträge von nicht direkt miteinander verbundenen Knoten bleiben Null, hier sind das die Positionen $(K)_{31}$ und $(K)_{13}$. Daher hat \mathbf{K} typischerweise eine Bandstruktur, d.h., nur in einem relativ schmalen Band um die Hauptdiagonale sind die Einträge von Null verschieden. Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist wie die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e symmetrisch.

In der Systemsteifigkeitsbeziehung (2.10) wurden die Kompatibilitätsbedingungen (Stetigkeit der Verschiebungen) berücksichtigt indem für die Verschiebungen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ der beiden Elemente gleich die globalen Knotenverschiebungen u_1, u_2, u_3 eingesetzt wurden. Damit gilt automatisch $u_I^{(2)} = u_{II}^{(1)}$. Ebenso folgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte

$$\begin{aligned} F_A &= f_I^{(1)} \\ F_B &= f_I^{(2)} + f_{II}^{(1)} \\ F_C &= f_{II}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Noch läßt sich das Gleichungssystem (2.10) nicht lösen, da die Matrix \mathbf{K} singulär ist. Die Zeilen und Spalten in \mathbf{K} sind nicht linear unabhängig voneinander. Physikalische Ursache dafür ist die noch fehlende Lagerung $u_1 = 0$. Auf Möglichkeiten, die Randbedingungen in großen Gleichungssystemen effizient zu berücksichtigen, werden wir im Kapitel 4 eingehen. Hier lösen wir das Problem wie in der linearen Algebra, indem wir die zugehörige erste Zeile und Spalte streichen. Damit verschwindet auch die unbekannte Lagerkraft F_A . Das verbleibende reduzierte FE-Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{E_I A_I}{l_I} + \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \\ -\frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} & \frac{E_{II} A_{II}}{l_{II}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2F \\ F \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

hat eine reguläre (positiv definite) Koeffizientenmatrix und kann nun nach den unbekannten Verschiebungen aufgelöst werden.

$$u_2 = -F \frac{l_I}{E_I A_I} \quad (2.11)$$

$$u_3 = F \frac{l_{II}}{E_{II} A_{II}} - F \frac{l_I}{E_I A_I}. \quad (2.12)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Die gestrichene erste Zeile könnte nun zu Hilfe genommen werden, um die Lagerkraft F_A zu ermitteln, Diese Vorgehensweise ist allerdings nicht typisch für die FEM und sei daher bloß der Vollständigkeit halber erwähnt.

$$F_A = -\frac{E_I A_I}{l_I} u_2 = F. \quad (2.13)$$

Die Spannungen in den Stäben lassen sich jetzt über die Dehnungen aus den Verschiebungen berechnen. Wir erhalten

$$\sigma_I = E_I \epsilon_I = E_I \frac{u_2}{l_I} = -\frac{F}{A_I} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{II} = E_{II} \epsilon_{II} = E_{II} \frac{u_3 - u_2}{l_{II}} = \frac{F}{A_{II}}. \quad (2.15)$$

Zusammenfassend soll noch einmal verdeutlicht werden, wie die physikalischen Zusammenhänge in die FE-Matrizen eingehen.

- Der Modelltyp (hier: Stab), die Geometrie der Elemente (Querschnittfläche und Länge) sowie sämtliche Informationen über das Materialverhalten sind in den Elementsteifigkeitsmatrizen enthalten.
- Die Zuordnungstabelle (Koinzidenzmatrix) beschreibt die Topologie der Struktur, also die Verknüpfung der Elemente.
- Die Kompatibilität, d.h. die Stetigkeit der Verschiebungen, wird durch Gleichsetzen der Elementknotenverschiebungen mit den Systemknotenverschiebungen erreicht.
- Die Gleichgewichtsbedingungen werden durch Addition der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix entsprechend der Topologie erfüllt. Die Verbindung zweier Knoten wird durch Einträge in den entsprechenden Positionen der Systemsteifigkeitsmatrix repräsentiert.
- Die geometrischen Randbedingungen (Lagerungen) werden durch Elimination der zugehörigen Zeilen und Spalten berücksichtigt.
- Eine Änderung der Belastung betrifft nur die rechte Seite von (2.10), den Lastvektor. Der Algorithmus zum Aufbau der Steifigkeitsmatrizen bleibt davon unberührt.
- Unterschiedliche Lagerungen ändern nicht die Systemsteifigkeitsbeziehung (2.10), sondern werden anschließend beim Eliminieren der entsprechenden Einträge realisiert. Die Berechnung von vielfach statisch unbestimmten Systemen ist kein Problem.

2.3 Das Federelement

Genaugenommen ist das finite Element einer (linearen) Feder noch einfacher als das Stabelement, schließlich billigt man der Feder üblicherweise nicht mal eine räumliche

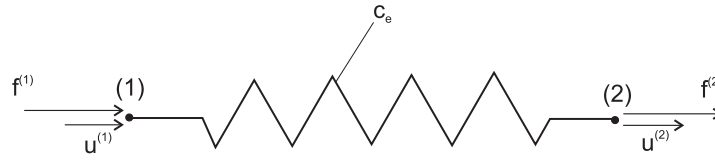


Abbildung 2.4: Federelement

Ausdehnung zu. Einzige mechanische Eigenschaft ist die Federsteifigkeit c_e . Daher kann man allein mit diesem Elementtyp natürlich kein Tragwerk modellieren, es ist immer nur ein Ergänzung zu den Strukturelementen. Seine Herleitung erfolgt analog zum Stab über Gleichgewichts- und Verformungsbetrachtungen an Anfangs- und Endknoten, Bild 2.4,

$$\begin{aligned} f^{(1)} + f^{(2)} &= 0 \\ u^{(2)} - u^{(1)} &= \frac{f^{(2)}}{c_e} \end{aligned} \quad (2.16)$$

und man erhält die Federelementsteifigkeitsbeziehung

$$c_e \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Wenn nun beispielweise Knoten (1) fest gelagert ist und Knoten (2) an eine Tragwerkstruktur anschließt, reduziert sich das Gleichungssystem (2.17) auf eine Gleichung

$$c_e u_k = f_k, \quad (2.18)$$

wobei sich der Index k auf die entsprechende Knotennummer der Struktur bezieht. Eingearbeitet in das FE-Gesamtsystem bedeutet das, um eine elastische Lagerung zu modellieren wird einfach auf das Hauptdiagonalelement der Systemmatrix an der Stelle k die Federsteifigkeit c_e addiert.

2.4 Das Balkenelement

Die oben vorgestellte einfache Herleitung eines FE-Systems werden wir nun auf das etwas praxisrelevantere Modell des Biegebalkens anwenden. Wir erinnern uns dafür an die aus dem Grundkurs Mechanik bekannte Theorie der geraden Biegung. In unserer Notation liest sich die Differentialgleichung der Biegung (Biegelinie),

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - q_2(x) = 0. \quad (2.19)$$

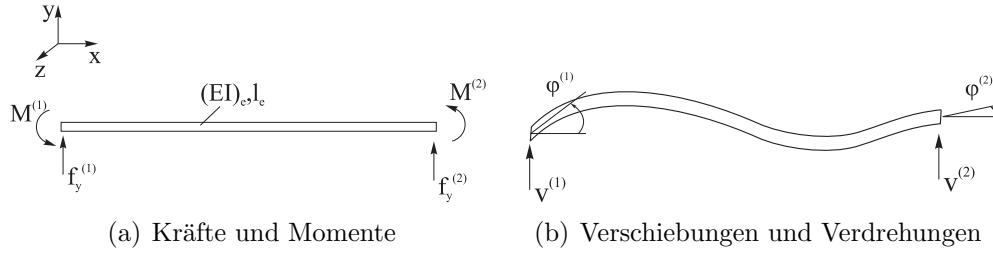


Abbildung 2.5: Kraftgrößen und (stark vergrößerte) Verformungen am Biegebalken

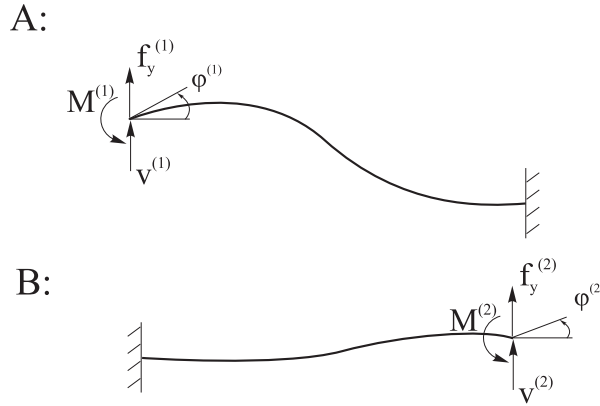


Abbildung 2.6: Zur Herleitung eines finiten Elementes für den Biegebalken

wobei EI die Biegesteifigkeit, u_2 die Durchbiegung senkrecht zur Längsachse und q_2 die entsprechende Komponente der Linienlast sei. Der Vollständigkeit halber erinnern wir daran, daß sich der Balken um eine seiner Hauptträgheitsachsen biegen muß, das die Verformungen auch hier klein sind und das wir den schubstarken Balken (die Ableitung der Durchbiegung ist gleich der Verdrehung am Punkt) betrachten. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir in diesem Abschnitt die Durchbiegung u_2 senkrecht zur Längsachse mit v bezeichnen und ihre Ableitung $\partial u_2 / \partial x$ mit ϕ .

Als finites Element definieren wir einen Balken mit den lokalen Anfangs- und Endknoten (1) und (2). Die Länge des Elementes e sei l_e , Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment bilden die konstante Biegesteifigkeit $(EI)_e$. An den Knoten tragen wir — wieder in Richtung der globalen Koordinaten — die Knotenverformungen an. Das sind nun die Durchbiegungen der Punkte $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ und ihre Verdrehung $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, siehe Abbildung 2.5. Auch hier gilt, daß beide Verdrehungen den gleichen Richtungssinn (linksdrehend) haben. Die Lasten sind entsprechend die Knotenkräfte $f_y^{(1)}$, $f_y^{(2)}$ und Momente $M^{(1)}$ und

$M^{(2)}$.

Um die Beziehung zwischen angreifenden Kraftgrößen und Balkenverformung herzuleiten, betrachten wir zunächst zwei einfache Einzelsysteme (Abbildung 2.6). Erst werden nur Verformungen am Knoten (1) zugelassen und die dafür nötigen Momente und Kräfte (Lastfall A) formuliert. Dann wird das Gleiche am Knoten (2) getan (Lastfall B), und beide Ergebnisse werden überlagert.

Aus Tabellen für wichtige Grundlastfälle und Überlagerung der Ergebnisse läßt sich die Durchbiegung und Verdrehung des Balkens infolge $M^{(1)}$ und $f_y^{(1)}$ ermitteln. Wem das zu ingenieurmäßig ist, der kann diese Größen natürlich auch durch Integration der Differentialgleichung der Biegung oder mit dem 1. Satz von Castigliano ausrechnen, cf. [6]. Auf jeden Fall lautet das Ergebnis für den Lastfall A

$$v^{(1)} = \frac{{}^A f_y^{(1)} l_e^3}{3EI} - \frac{{}^A M^{(1)} l_e^2}{2EI} \quad (2.20)$$

$$\phi^{(1)} = -\frac{{}^A f_y^{(1)} l_e^2}{2EI} + \frac{{}^A M^{(1)} l_e}{EI} \quad (2.21)$$

bzw., umgestellt nach den Kräften,

$${}^A f_y^{(1)} = \frac{12EI}{l_e^3} v^{(1)} + \frac{6EI}{l_e^2} \phi^{(1)} \quad (2.22)$$

$${}^A M^{(1)} = \frac{6EI}{l_e^2} v^{(1)} + \frac{4EI}{l_e} \phi^{(1)}. \quad (2.23)$$

Aus den Gleichgewichtsbeziehungen lassen sich die Einspannreaktionen des Lastfalls berechnen.

$$\begin{aligned} {}^A f_y^{(2)} &= - {}^A f_y^{(1)} \\ &= -\frac{12EI}{l_e^3} v^{(1)} - \frac{6EI}{l_e^2} \phi^{(1)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} {}^A M^{(2)} &= {}^A f_y^{(1)} l_e - {}^A M^{(1)} \\ &= \frac{6EI}{l_e^2} v^{(1)} + \frac{2EI}{l_e} \phi^{(1)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für den Lastfall B gehen wir genauso vor und erhalten

$${}^B f_y^{(1)} = -\frac{12EI}{l_e^3} v^{(2)} + \frac{6EI}{l_e^2} \phi^{(2)} \quad (2.26)$$

$${}^B M^{(1)} = -\frac{6EI}{l_e^2} v^{(2)} + \frac{2EI}{l_e} \phi^{(2)} \quad (2.27)$$

$${}^B f_y^{(2)} = \frac{12EI}{l_e^3} v^{(2)} - \frac{6EI}{l_e^2} \phi^{(2)} \quad (2.28)$$

$${}^B M^{(2)} = -\frac{6EI}{l_e^2} v^{(2)} + \frac{4EI}{l_e} \phi^{(2)}. \quad (2.29)$$

Nun können wir beide Lastfälle superpositionieren und erhalten die Gleichungen für den Kraft-Verformungszustand bei gleichzeitigem Wirken von $f_y^{(1)}$, $M^{(1)}$ und $f_y^{(2)}$, $M^{(2)}$.

$$\begin{aligned} f_y^{(1)} &= {}^A f_y^{(1)} + {}^B f_y^{(1)} \\ M^{(1)} &= {}^A M^{(1)} + {}^B M^{(1)} \\ f_y^{(2)} &= {}^A f_y^{(2)} + {}^B f_y^{(2)} \\ M^{(2)} &= {}^A M^{(2)} + {}^B M^{(2)} \end{aligned}$$

Zweckmäßigerweise schreiben wir diese Gleichungen wieder in Matrizenform und erhalten so die **Elementsteifigkeitsbeziehung** für ein Balkenelement.

$$\underbrace{\left(\frac{EI}{l^3}\right)_e \begin{pmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ \phi^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\hat{u}}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_y^{(1)} \\ M^{(1)} \\ f_y^{(2)} \\ M^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}. \quad (2.30)$$

Damit können wir nun gerade Biegebalken per FEM berechnen. Natürlich gilt auch hier wieder, daß durch die globalen Knotennummern bzw. durch Aufaddieren der Kraftgrößen die Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden (siehe Abschnitt 2.2). Hier hat allerdings jeder Knoten 2 Freiheitsgrade (Verschiebung $v^{(k)}$ und Verdrehung $\phi^{(k)}$). Dadurch hat der Lösungsvektor \mathbf{u} des gesamten Systems doppelt so viele Einträge wie Knotennummern, entsprechend ist die Größe von Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und Lastvektor \mathbf{f} .

Die Elementsteifigkeitsmatrix (2.30) hat die folgende Struktur

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{11} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{12} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{21} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

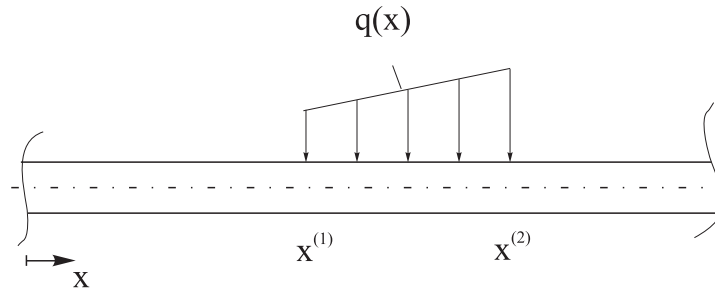


Abbildung 2.7: Biegebalken mit Linienlast

Beim Einspeichern (2.30) in die Systemsteifigkeitsmatrix werden die entsprechenden Einträge der Elementsteifigkeitsmatrix zu 2×2 Untermatrizen zusammengefaßt. Die Angaben zur Topologie der Elemente gelten dann jeweils für eine Untermatrix (statt nur für einen Knoten); sie werden analog zu der im Abschnitt 2.2 beschriebenen Vorgehensweise ins Gesamtsystem übertragen.

2.5 Erfassen der Belastungen

Bei der Festlegung der Einteilung eines Stabes in finite Elemente hatten wir Elementgrenzen immer an die Lastangriffspunkte gelegt (vergleiche Abschnitt 2.1). Solange nur diskrete Kräfte angreifen funktioniert diese Vorgehensweise. Die berechneten Dehnungen und Längskräfte im Stab sind dann exakt, weil die Elementsteifigkeitsbeziehung (2.5) ohne weitere Näherungsannahmen hergeleitet wurde und im Rahmen der Theorie elastischer Stäbe exakt ist. Das gilt analog auch für Balken, auch hier ist die Elementsteifigkeitsbeziehung (2.30) im Rahmen der elementaren Biegetheorie exakt und die damit ermittelte Lösung entspricht der analytischen Lösung. Bei den für Biegebalken typischen Linienlasten müssen wir aber vorher aus der kontinuierlichen Belastung (statisch gleichwertige) Knotenlasten ableiten, um diese dann im Elementlastvektor berücksichtigen zu können.

In diesem Abschnitt wollen wir an einem Beispiel zeigen, wie diese Knotenlasten ermittelt werden können. Dazu betrachten wir einen Balken der auf einem Bereich $x = x^{(1)}$ bis $x = x^{(2)}$ durch die Linienlast $q(x)$ belastet ist, mit $q(x^{(1)}) = q^{(1)}$ und $q(x^{(2)}) = q^{(2)}$, siehe Abbildung 2.7. In diesen Balkenabschnitt legen wir nun ein finites Element. Dieses Element (Abbildung 2.8) ist nur durch Ersatzkräfte $\bar{f}_y^{(1)}$, $\bar{f}_y^{(2)}$ und Ersatzmomente $\bar{M}^{(1)}$, $\bar{M}^{(2)}$ in den Knoten belastet, die Größe dieser statisch äquivalenten Knotenlasten gilt es

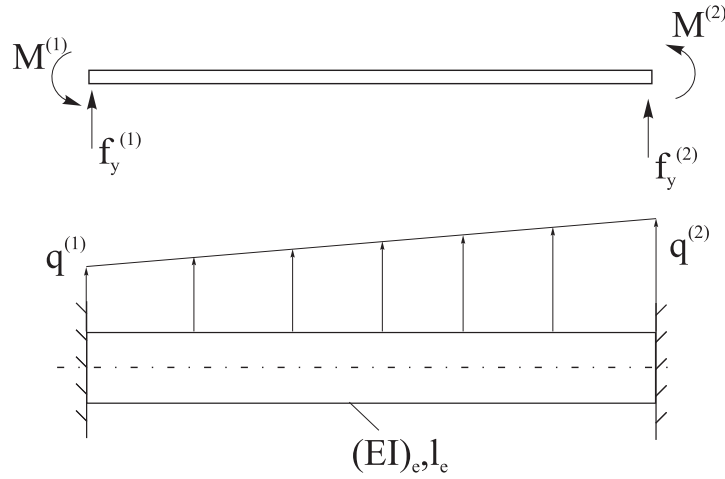


Abbildung 2.8: Ableitung äquivalenter Knotenkräfte

nun zu ermitteln.

Mit den Ersatzlasten wollen wir alle Knotenverformungen exakt ausrechnen. Man kann sie folglich wie Lagerreaktionen an den Knotenpunkten (1) und (2) verstehen und so auch ausrechnen. Das zugehörige Ersatzsystem ist der beidseits eingespannte Träger mit der originalen Linienlast $q(x)$. Konsequenterweise tragen wir die Last in Richtung des globalen Koordinatensystems an. Wenn die Summe des finiten Elementes und des Ersatzsystems dem Originalsystem entsprechen soll, dann müssen die Elementlasten $\bar{f}_y^{(1)}$, $\bar{M}^{(1)}$ und $\bar{f}_y^{(2)}$, $\bar{M}^{(2)}$ genau dem Betrag der Lagerreaktionen des Ersatzsystems entsprechen und entgegengesetzt gerichtet sein.

Die Lagerreaktionen des (statisch unbestimmten) Ersatzsystem können wieder mit der elementaren Biegetheorie berechnet werden. Man erhält am Knoten (1)

$$\begin{aligned}\bar{f}_y^{(1)} &= \frac{l_e}{20}(7q^{(1)} + 3q^{(2)}) \\ \bar{M}^{(1)} &= \frac{l_e^2}{60}(3q^{(1)} + 2q^{(2)})\end{aligned}\tag{2.32}$$

und entsprechend für Knoten (2)

$$\begin{aligned}\bar{f}_y^{(2)} &= \frac{l_e}{20}(3q^{(1)} + 7q^{(2)}) \\ \bar{M}^{(2)} &= -\frac{l_e^2}{60}(2q^{(1)} + 3q^{(2)}).\end{aligned}\tag{2.33}$$

Die so ermittelten reduzierten Lasten werden wie äußere Lasten im Elementlastvektor berücksichtigt. Folglich lautet die **Elementsteifigkeitsbeziehung** für ein Balkenelement mit Linienlast

$$\left(\frac{EI}{l^3}\right)_e \begin{pmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ \phi^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_y^{(1)} \\ \bar{M}^{(1)} \\ \bar{f}_y^{(2)} \\ \bar{M}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ M^{(1)} \\ f^{(2)} \\ M^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Analog kann man für andere Linienlasten die statisch äquivalenten Knotenlasten berechnen. Da im hier aufgelisteten Fall einer trapezförmigen Last bereits die konstante Linienlast und die Dreieckslast enthalten sind, umfaßt die Lösung die praktisch wichtigsten Lastverläufe. Kompliziertere Lasten können meistens stückweise linear (also gegebenenfalls über mehrere Elemente) angenähert werden. Mit den hier angegebenen äquivalenten Knotenlasten für lineare Linienlasten berechnet man die Knotenverformungen bei der Balkenbiegung exakt.

2.6 Andere eindimensionale Modelle

Natürlich kann man auch weitere spezielle finite Elemente auf die oben beschriebene Art herleiten. Es verändert sich dadurch im wesentlichen der die Steifigkeit kennzeichnende Faktor in der **K**-Matrix.

Typische eindimensionale Modelle sind neben dem Zug-Druck-Stab (bar) und dem Balken (beam) der torsionssteife Stab (tube) und — eher selten — der schubsteife Stab (spar), siehe Abbildung 2.9.

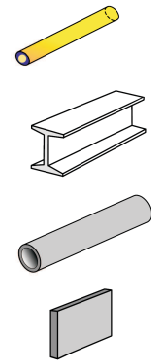


Abbildung 2.9: Stabmodelle

2.7 Der Stab, zweiter Teil: Der Fachwerkstab

Das Modell Stab haben wir eigentlich nur gewählt, um am einfachsten Beispiel das Prinzip der FEM zu verdeutlichen. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß selbst

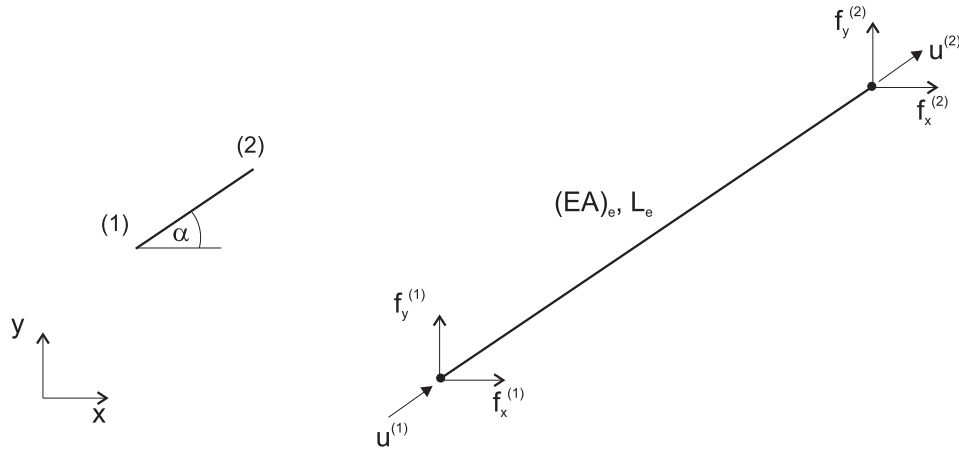


Abbildung 2.10: Ebenes Fachwerkelement

mit Stabmodellen — etwas modifiziert — schon interessante FE-Rechnungen möglich sind.

Dazu betrachten wir Fachwerke. Sie bestehen aus Stäben die nur eine Kraft in Längsrichtung übertragen können. Obwohl die Stäbe ihre gerade Form behalten, führt ihre Längenänderung bei dreidimensionalen Fachwerken zu räumlichen Verschiebungen. Um diese Verschiebungen zu berechnen, müssen die Knotenverschiebungen des Stabelementes aus Abschnitt 2.1 in die Richtungen des globalen Koordinatensystems zerlegt werden. Der Einfachheit halber beschränken wir die Herleitung hier auf ebene Fachwerkstäbe.

Ein (ebenes) Fachwerkelement ist ein Stab, der eine beliebige Lage in der Ebene einnimmt und zur x -Achse des globalen Koordinatensystems um einen Winkel α gedreht ist, siehe Abb. 2.10. Für die Verschiebungen des Stabelementes $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ und ihre Anteile in x - und y -Richtung gilt

$$u^{(i)} = u_x^{(i)} \cos \alpha + u_y^{(i)} \sin \alpha \quad i = 1, 2 \quad (2.35)$$

Die Knotenkräfte die das Fachwerkelement übertragen kann werden in Richtung der globalen Achsen definiert. Natürlich sind die Komponenten nicht unabhängig voneinander, da ihre Resultierende in Stablängsrichtung fallen muß.

$$\begin{aligned} f_x^{(i)} &= f^{(i)} \cos \alpha \\ f_y^{(i)} &= f^{(i)} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mit der Kraft-Verschiebungsbeziehung des Stabelementes (2.5) und der Verschiebungs-

beziehung (2.35) ist

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left(\frac{EA}{l}\right)_e u^{(1)} - \left(\frac{EA}{l}\right)_e u^{(2)} \\ &= \left(\frac{EA}{l}\right)_e (u_x^{(1)} \cos \alpha + u_y^{(1)} \sin \alpha - u_x^{(2)} \cos \alpha - u_y^{(2)} \sin \alpha) \end{aligned} \quad (2.37)$$

und

$$\begin{aligned} f_x^{(1)} &= f^{(1)} \cos \alpha \\ &= \left(\frac{EA}{l}\right)_e (u_x^{(1)} \cos^2 \alpha + u_y^{(1)} \sin \alpha \cos \alpha - u_x^{(2)} \cos^2 \alpha - u_y^{(2)} \sin \alpha \cos \alpha) \\ f_y^{(1)} &= f^{(1)} \sin \alpha \\ &= \left(\frac{EA}{l}\right)_e (u_x^{(1)} \sin \alpha \cos \alpha + u_y^{(1)} \sin^2 \alpha - u_x^{(2)} \sin \alpha \cos \alpha - u_y^{(2)} \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Aus dem Gleichgewicht am Element folgt

$$f_x^{(1)} = -f_x^{(2)} \quad \text{und} \quad f_y^{(1)} = -f_y^{(2)}. \quad (2.38)$$

Damit haben wir 4 Kraft-Verschiebungsbeziehungen. Zusammengefaßt lauten Verschiebungsvektor, Lastvektor und Elementsteifigkeitsmatrix für das ebene Fachwerkelement

$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} u_x^{(1)} & u_y^{(1)} & u_x^{(2)} & u_y^{(2)} \end{pmatrix}^T \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} f_x^{(1)} & f_y^{(1)} & f_x^{(2)} & f_y^{(2)} \end{pmatrix}^T \quad (2.40)$$

und

$$\mathbf{K}_e = \left(\frac{EA}{l}\right)_e \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Die Struktur der Steifigkeitsmatrix ist nun — ähnlich der des Balkens — durch 2×2 Untermatrizen mit jeweils 2×2 Einträgen (im räumlichen Fall wären es 3×3 Einträge) gekennzeichnet.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Mit der Definition des Richtungskosinus

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_x &= (x^{(2)} - x^{(1)})/l_e \equiv c_x \\
 \cos \alpha_y &= (y^{(2)} - y^{(1)})/l_e \equiv c_y \\
 \cos \alpha_z &= (z^{(2)} - z^{(1)})/l_e \equiv c_z \\
 l_e &= \sqrt{(x^{(2)} - x^{(1)})^2 + (y^{(2)} - y^{(1)})^2 + (z^{(2)} - z^{(1)})^2}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

können wir die Elementsteifigkeitsbeziehung für das ebene Fachwerkelement auch folgendermaßen schreiben

$$\left(\frac{EA}{l}\right)_e \begin{pmatrix} c_x^2 & c_x c_y & -c_x^2 & -c_x c_y \\ c_x c_y & c_y^2 & -c_x c_y & -c_y^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & c_x^2 & c_x c_y \\ -c_x c_y & -c_y^2 & c_x c_y & c_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ u_x^{(2)} \\ u_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Bei einem räumlichen Fachwerk haben die Stabverschiebung (2.35) und die Knotenkräfte (2.53) auch Komponenten in z -Richtung. Dann lautet die Elementsteifigkeitsbeziehung

$$\left(\frac{EA}{l}\right)_e \begin{pmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ u_z^{(1)} \\ u_x^{(2)} \\ u_y^{(2)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^{(1)} \\ f_y^{(1)} \\ f_z^{(1)} \\ f_x^{(2)} \\ f_y^{(2)} \\ f_z^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Damit ist alles bekannt, was zur FE-Berechnung eines Fachwerkes notwendig ist. Der restliche Ablauf ist identisch mit dem für den einfachen Stab beschriebenen Algorithmus in Abschnitt 2.2. Lediglich beim Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} entsprechend der Topologie bezieht sich jetzt die Addition nicht mehr nur auf ein Matrixelement der Elementsteifigkeitsmatrix sondern auf die zum jeweiligen Knoten gehörende 2×2 bzw. 3×3 Untermatrix.

2.8 Ein Matlab-Programm zur Berechnung ebener Fachwerke

Im folgenden soll anhand eines einfachen Matlab-Codes die Struktur eines FE-Programms zur Berechnung von Stabtragwerken erläutert werden. Als Beispiel dient das in Abbil-

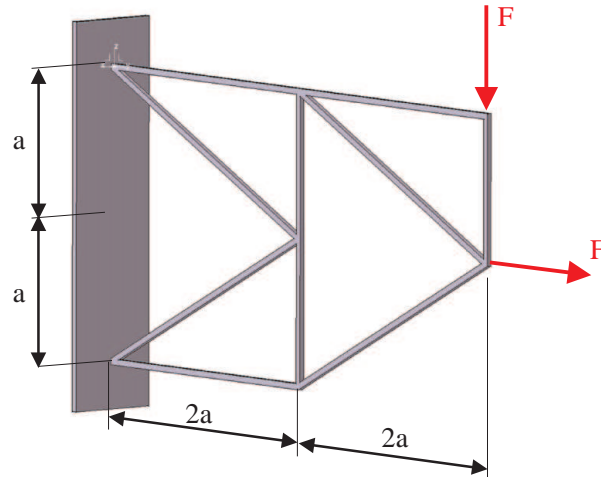


Abbildung 2.11: Modell eines Fachwerks

Abbildung 2.11 dargestellte Fachwerk mit den Abmessungen $a = 50$ cm, Rechteckquerschnitt mit Breite $b = 1.5$ cm und Höhe $h = 2$ cm. Die Stäbe sind aus Stahl, $E = 210000$ MPa, und die angreifenden Kräfte seien $F = 10$ kN.

Für eine Festigkeitsberechnung nach der Finite-Elemente-Methode muß das Programm Informationen zur Geometrie der Struktur, zur Elemententeilung, zu den Materialdaten sowie zu vorgegebenen oder verhinderten Knotenverschiebungen (geometrischen Randbedingungen) und zu den Lasten (statische Randbedingungen) erhalten. In kommerziellen Programmen werden diese Informationen über graphische Benutzeroberflächen generiert und — mehr oder weniger kryptisch — in einer Eingabedatei abgelegt. Aus dieser Eingabedatei werden dann vom eigentlichen FE-Programm die Daten gelesen und das rechnerinterne Modell aufgebaut. Hier wollen wir die Möglichkeiten von Matlab nutzen und über den `load`-Befehl die Informationen aus einzelnen Dateien (die allerdings vorher per Hand verfaßt werden müssen) direkt in gleichnamige Matrizen laden.

Zunächst vernetzen wir unsere Struktur, eine Arbeit die sich beim Fachwerk auf das Numerieren der Knoten und Stäbe (= Elemente) beschränkt. Die Geometrie wird definiert durch die Angabe der Koordinaten aller n_k Knoten des Systems, bezogen auf ein

vom Nutzer zu definierendes Koordinatensystem, wir haben es im Bild (2.11) bereits eingezeichnet. Offensichtlich liegen die Stäbe und alle Lasten in der $x - y$ -Ebene, wir berechnen also ein ebenes Fachwerk. Es versteht sich von selbst, daß die Dimensionen (Einheiten) der Geometrie-, Last- und Materialdaten zusammen passen müssen. Wir verwenden hier N und mm.

Die Koordinaten werden in einer Matrix `koordinaten` mit $n_k = 7$ Zeilen und 2 Spalten (für die x - und y -Koordinate) gespeichert. Bei der einzulesenden Datei `koordinaten.bsp` haben wir der Übersichtlichkeit halber noch eine erste Spalte mit den Knotennummern hinzugefügt, sie wird gleich nach dem Einlesen der Daten per `koordinaten(:,1) = []`; gelöscht. Die Datei `koordinaten.bsp` lautet:

1	0	1000
2	0	0
3	1000	1000
4	1000	500
5	1000	0
6	2000	1000
7	2000	500

In einer Matrix für die Elemente können alle Parameter zusammengefaßt werden, die zum Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix und gegebenenfalls für die Reduktion von Elementlasten auf Knotenlasten erforderlich sind. Die Elementabmessungen können aber aus den Koordinaten der zum Element gehörenden Knoten bereits berechnet werden. Die Materialkennwerte (Elastizitätsmodul und Querschnittswerte) sind hier für die gesamte Struktur gleich, wir brauchen sie also nicht jedem Element extra zuzuordnen. Element-bezogene Lasten (Volumenlasten) haben wir beim Fachwerk nicht. Also bleibt nur die Topologie (welche Knoten gehören zu welchem Element?), die in der Datei `elemente.bsp` festgelegt wird. Auch hier haben wir der Übersichtlichkeit halber noch eine erste Spalte mit den Elementnummern ergänzt, die wie oben sofort nach dem Einlesen gelöscht wird.

1	7	6
2	6	3
3	3	7
4	5	7
5	4	3
6	5	4
7	1	3
8	1	4
9	2	4
10	2	5

Die Matrix `elemente` hat dann $n_e = 10$ Zeilen, die jeweils die 2 Knotennummern für ein Element enthalten. Die Reihenfolge der Eintragung der beiden Knotennummern ist für ein Element mit nur zwei Knoten frei wählbar, sie definiert aber den Winkel α um den der Stab zum globalen Koordinatensystem gedreht ist.

Die Einzelkräfte (diskrete Lasten) werden direkt den Knoten zugeordnet und in die Datei `lasten.bsp` geschrieben. Dabei ist die erste Spalte diesmal nicht überflüssig sondern enthält die Nummer des belasteten Knoten. In der zweiten und dritten Spalte der Matrix `lasten` steht dann die x - bzw. y -Komponente der wirkenden Kraft.

6	0	-10000
7	10000	0

Die geometrischen Randbedingungen werden auch auf die Knoten bezogen. Theoretisch kann jeder Freiheitsgrad eines Knotens verhindert sein, was durch einen Indikator für den Lagertyp festgelegt wird (z.B. 1: $u_x = 0$, 2: $u_y = 0$, 0: alle Freiheitsgrade verhindert). Hier haben wir den einfachsten Fall, keine Verschiebung des Knoten entspricht Indikator 0. Die erste Spalte der Datei mit den Randbedingungen `randbed.bsp` enthält die Nummer des betroffenen Knotens.

1	0
2	0

Besonderheiten wie vorgeschriebene Verschiebungen, Verschiebungsbehinderung nur in vorgegebener Richtung, Gleichheit von Verschiebungskomponenten etc. müßten gegebenenfalls wie Lasten gesondert eingelesen werden.

Die Materialdaten und der Querschnitt können analog pro Element eingelesen werden. Weil wir aber nur einen Elastizitätsmodul für die gesamte Struktur haben und auch der Stabquerschnitt überall gleich sein soll, sind wir hier inkonsequent und lesen beide Werte aus einem Unterprogramm per: `material = materialdaten;` in die Struktur `material`. Das Unterprogramm `materialdaten.m` lautet einfach:

```
function material = materialdaten;
% =====

material.E = 2.1e5; % E-Modul [N/mm^2]
material.A = 300;  % Querschnitt [mm^2]
```

Damit können wir den PREPROCESSING-Teil unseres FE-Programms aufschreiben.

```

function [u,sigma] = fachwerk;
% =====

% Netzaufbau
load koordinaten.bsp; koordinaten(:,1) = [];
load elemente.bsp; elemente(:,1) = [];
load randbed.bsp;
load lasten.bsp;

material = materialdaten;

% Initialisierungen
n_dof= 2*size(koordinaten,1); nf=4;      % Freiheitsgrade global/lokal
u      = zeros(n_dof,1);                % Verschiebungen ux,uy pro Knoten
f      = zeros(n_dof,1);                % Kraftvektor (Lasten)
K      = zeros(n_dof,n_dof);
sigma= zeros(size(elemente,1),1);        % Spannungsvektor (nur 1-Komp.)
wf     = zeros(size(elemente,1),1);      % Energie

% Zeichnen des FE-Netzes
line([koordinaten(elemente(:,1),1),koordinaten(elemente(:,2),1)]',...
      [koordinaten(elemente(:,1),2),koordinaten(elemente(:,2),2)]',...
      'color','k');
hold on;
fprintf(1,'Gleichungssystem hat %i Freiheitsgrade \n',n_dof);
...

```

Die letzten Befehle stellen das Modell graphisch dar. Auf diese Darstellung sollte man nicht verzichten, weil so eine einfache Netzkontrolle möglich ist und Eingabefehler aufgedeckt bzw. vermieden werden.

Nun folgt das eigentliche FE-Programm, nämlich der Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrizen, der Aufbau des Gleichungssystems für die Gesamtstruktur sowie der Einbau von Lasten und Lagerungen. Zweckmäßigerweise erfolgen elementweise Berechnungen in Unterprogrammen. Da die Programmierung des Fachwerkes Teil des 2. Übungsblattes ist, habe ich es hier nur unvollständig abgedruckt.

```

% Aufbau der K-Matrix
for i = 1:size(elemente,1)
    dofNr = [2*elemente(i,:)-1;2*elemente(i,:)]; dofNr=dofNr(:)';
    K(dofNr,dofNr)=K(dofNr,dofNr) + ...
        kk_fachwerk2d(material,koordinaten(elemente(i,[1 2]),:));
end

% Kraftvektor (Einzellasten)
for j=1:size(lasten,1)
    ...

```

Nach dem Lösen des globalen Systems erfolgt die Spannungs- und Dehnungsberechnung in den Elementen wieder in Unterprogrammen.

```

...
% Loesen des Gleichungssystems
u=K\f;

% Spannungen, Formaenderungsarbeit
for i = 1:size(elemente,1)
    dofNr = [2*elemente(i,:)-1;2*elemente(i,:)]; dofNr=dofNr(:)';
    [sigma(i),wf(i)] = wf_fachwerk2d(material, ...
        koordinaten(elemente(i,[1 2]),:),u(dofNr));
end

```

Sind die Knotenverschiebungen und die (gemittelten) Spannungen an den Knotenpunkten berechnet, dann kann man mit den folgenden Befehlen das verformte Fachwerk darstellen.

```

...
% ErgebnisAusgabe
uxy=reshape(u,2,size(koordinaten,1))';
zoom=1.e2;
line([koordinaten(elemente(:,1),1)+zoom*uxy(elemente(:,1),1), ...
    koordinaten(elemente(:,2),1)+zoom*uxy(elemente(:,2),1)]',...
    [koordinaten(elemente(:,1),2)+zoom*uxy(elemente(:,1),2), ...
    koordinaten(elemente(:,2),2)+zoom*uxy(elemente(:,2),2)]');
fprintf(1,'Verschiebungen \n'); uxy
fprintf(1,'Spannungen \n'); sigma

```

Der Faktor zoom dient dabei der Vergrößerung der Verschiebung. Wir rechnen schließlich im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie und die gilt praktisch nur wenn die die

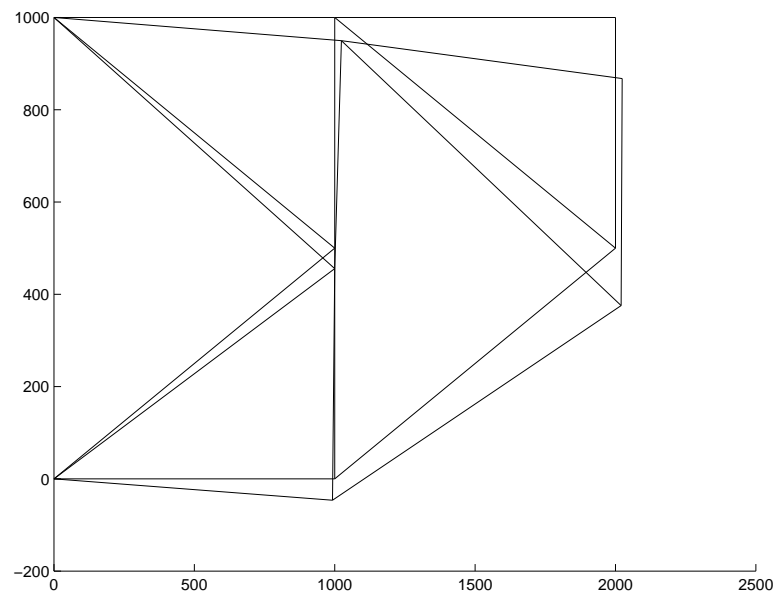


Abbildung 2.12: Verformtes Fachwerk

Verschiebungswerte so klein sind, daß man sie bei einer maßstäblichen Darstellung gar nicht erkennt. Praktisch sinnvoll wäre es darüberhinaus, im Bild (2.12) die Farbe der Stäbe mit der Höhe der Spannungen in den Elementen zu skalieren.

2.9 Biegesteife Rahmentragwerke

Biegesteife Rahmentragwerke sind ähnliche Strukturen wie Fachwerke. Sie bestehen aus geraden Trägern, sind an den Enden aber biegesteif miteinander verbunden — wogegen bei Fachwerken die Verbindung immer gelenkig ist. Dadurch können von den Trägern Kräfte und Biegemomente in alle drei Raumrichtungen übertragen werden. Aus mechanischer Sicht sind die Träger eines biegesteifen Rahmentragwerks also durch Längskräfte, Querkräfte und Biegemomente belastete Balken. Bei einem entsprechenden (ebenen) finiten Element überlagern sich demzufolge Stabelement (2.5) und Balkenelement (2.30). Wird wieder vorausgesetzt, dass die Stablängsachse parallel zur x -Achse liegen, erhält

man

$$\begin{pmatrix} \frac{EA_e}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l_e^3} & 6\frac{EI}{l_e^2} & 0 & -12\frac{EI}{l_e^3} & 6\frac{EI}{l_e^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l_e^2} & 4\frac{EI}{l_e} & 0 & -6\frac{EI}{l_e^2} & 2\frac{EI}{l_e} \\ \frac{EA_e}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l_e^3} & -6\frac{EI}{l_e^2} & 0 & 12\frac{EI}{l_e^3} & -6\frac{EI}{l_e^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l_e^2} & 2\frac{EI}{l_e} & 0 & -6\frac{EI}{l_e^2} & 4\frac{EI}{l_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ \phi^{(1)} \\ u^{(2)} \\ v^{(2)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ M^{(1)} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ M^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Aus Gleichung (2.46) wird deutlich, dass Längs- und Querbelastrung nicht gekoppelt sind. Das gilt so natürlich nur für gerade Träger mit kleinen Verformungen. Berücksichtigt man alle drei Raumrichtungen, lassen sich die Belastungen in der Ebene und senkrecht zur Ebene ebenfalls entkoppelt betrachten. In Stablängsrichtung kommt aber noch der Anteil aus der Torsionsbelastung hinzu. Der Verschiebungsvektor hat nun für jeden Knoten die Komponenten

$$\mathbf{u}_e^{(k)} = \begin{pmatrix} u_x^{(k)} \\ u_y^{(k)} \\ u_z^{(k)} \\ \phi_x^{(k)} \\ \phi_y^{(k)} \\ \phi_z^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Etwas zweckmäßiger angeordnet lautet nun der Elementverschiebungsvektor für ein räumliches Trägerelement mit 2 Knoten

$$\mathbf{u}_e = \left(u_x^{(1)} \quad u_y^{(1)} \quad \phi_z^{(1)} \quad u_x^{(2)} \quad u_y^{(2)} \quad \phi_z^{(2)} \quad \phi_x^{(1)} \quad \phi_y^{(1)} \quad u_z^{(1)} \quad \phi_x^{(2)} \quad \phi_y^{(2)} \quad u_z^{(2)} \right)^T. \quad (2.48)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix hat dann die Form

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

wobei die Indizes die Ebene beschreiben in der die Biegung wirkt. Die Matrix \mathbf{K}_{xy} entspricht also der Steifigkeitsmatrix für den ebenen Balken aus Gleichung (2.46). Mit

$$\iota = \frac{Al_e^2}{I_{zz}} = \frac{EA}{l_e} \frac{l_e^3}{EI_{zz}}$$

läßt sie sich abgekürzt schreiben als

$$\mathbf{K}_{xy} = \left(\frac{EI_{zz}}{l^3} \right)_e \begin{pmatrix} \iota & 0 & 0 & -\iota & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\iota & 0 & 0 & \iota & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Analog läßt sich die Matrix \mathbf{K}_{yz} formulieren, wobei hier in der Anteil der Torsionsteifigkeit (mit Schubmodul G und Torsionsträgheitsmoment I_t) ohne Herleitung ergänzt wird. Mit

$$\kappa = \frac{GI_t l_e^2}{EI_{yy}} = \frac{GI_t}{l_e} \frac{l_e^3}{EI_{yy}}$$

lautet sie

$$\mathbf{K}_{xz} = \left(\frac{EI_{yy}}{l^3} \right)_e \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 2l^2 & 6l \\ 0 & -6l & 12 & 0 & -6l & -12 \\ -\kappa & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 4l^2 & 6l \\ 0 & 6l & -12 & 0 & 6l & 12 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Mit dem Elementlastvektor

$$\mathbf{f}_e = \left(f_x^{(1)} \quad f_y^{(1)} \quad M_z^{(1)} \quad f_x^{(2)} \quad f_y^{(2)} \quad M_z^{(2)} \quad M_x^{(1)} \quad M_y^{(1)} \quad f_z^{(1)} \quad M_x^{(2)} \quad M_y^{(2)} \quad f_z^{(2)} \right)^T. \quad (2.52)$$

ist die Elementsteifigkeitsbeziehung für ein räumliches Balkenelement komplett beschrieben.

Bislang wurde immer noch vorausgesetzt, das die Stablängsachse entlang der x -Achse des globalen Koordinatensystems verläuft. Um nun wirklich Rahmentragwerke berechnen zu können, müssen die Beziehungen (2.48) bis (2.52) analog den Beziehungen für Fachwerkstäbe im Abschnitt 2.8 auf beliebig gedrehte Koordinatensysteme bezogen werden. Nun enthält der Elementverschiebungsvektor (2.48) bereits alle Verschiebungs- und Verdrehkomponenten einer dreidimensionalen Struktur. Die Dimension des Vektors bzw. der Elementsteifigkeitsmatrix wird sich daher bei einer Transformation nicht verändern. Die Aufteilung ihrer Komponenten auf ein gedrehtes Koordinatensystem beschreibt man zweckmäßigerweise mit entsprechenden Transformationsmatrizen.

Das Prinzip wird imfolgenden kurz erläutert, der Übersichtlichkeit halber beziehen sich die Ausführungen auf ebene Stabsysteme in der $x - y$ -Ebene. Es werden zunächst die drei Verformungs- und Belastungskomponenten eines Knotens betrachtet.

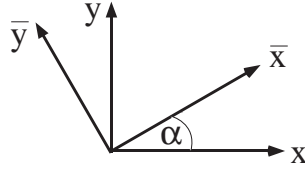


Abbildung 2.13: Drehung des Koordinatensystems

Wie man aus Bild (2.13) erkennt, ist die Beziehung zwischen dem globalen $x-y$ -System und dem um den Winkel α gedrehten $\bar{x}-\bar{y}$ -System durch die folgende Beziehung gegeben.

$$x = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha \quad \text{und} \quad y = -\bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \quad (2.53)$$

Der Verdrehwinkel bleibt unverändert, also gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_k} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Die Transformationsmatrix für die 2-Knoten-Element-Beziehung lautet dann, bei der gleichen Reihenfolge der Einträge in \mathbf{u}_e und \mathbf{f}_e wie in Gleichung (2.46),

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_k \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Nun formuliert man zunächst die Elementsteifigkeitsbeziehung im gedrehten (überstrichenen) Koordinatensystem

$$\bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_e = \bar{\mathbf{f}}_e. \quad (2.56)$$

Für den Elementverschiebungs- und den Elementlastvektor gilt jeweils

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}}_e \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{u}_e \quad (2.57)$$

und

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{T} \bar{\mathbf{f}}_e \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{f}}_e = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_e \quad (2.58)$$

Mit (2.57) und (2.58) können wir für die Elementsteifigkeitsbeziehung (2.56) schreiben

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{T}^{-1} \mathbf{u}_e &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_e \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\mathbf{T} \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{u}_e &= \mathbf{f}_e. \end{aligned}$$

Da \mathbf{T} wie jede Rotationsmatrix orthogonal ist, also $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ gilt, können wir für die in das globale Koordinatensystem transformierte Elementsteifigkeitsbeziehung schreiben

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (2.59)$$

mit der auch weiterhin symmetrischen transformierten Matrix

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T} \overline{\mathbf{K}}_e \mathbf{T}^T. \quad (2.60)$$

Mit diesen Transformationsbeziehungen (gegebenfalls erweitert auf eine 3D-Rotation) können wir nun beliebig komplizierte Strukturen aus biege- und dehnsteifen Trägern — also Rahmentragwerke — berechnen.

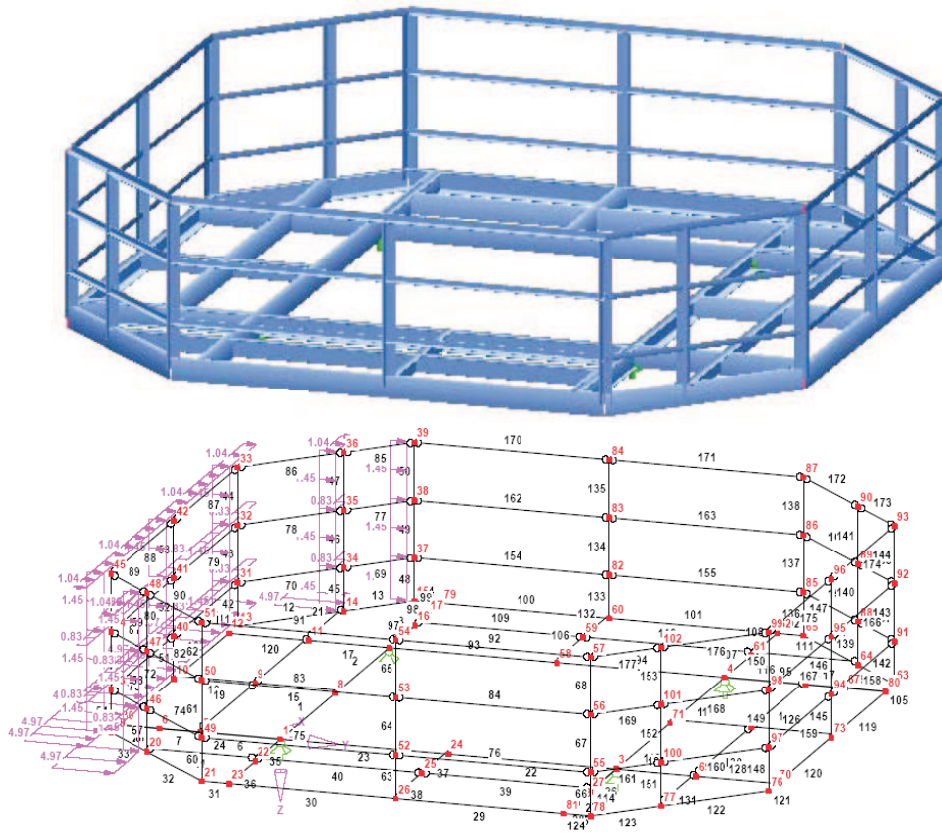


Abbildung 2.14: Zeichnung und FE-Modell der Außenbühne eines Funkmastes

Bei der FE-Berechnung eines Rahmentragwerks bietet sich wie beim Fachwerksystem eine *natürliche* Diskretisierung an. Jeder Träger wird mit einem finiten Element modelliert. Da die klassische Theorie von der Finite-Elemente-Methode für diesen Elementtyp

exakt erfaßt wird, gibt es keinen Grund für eine andere Elemententeilung. Die Tatsache, das sowohl Lager als auch Einzellasten nur an den Knoten zugelassen sind, hat für den biegesteifen Rahmen keine Konsequenzen. Wo ein Lager ist oder eine Kraft angreift, wird ein eben Knoten plaziert. Linienlasten werden durch statisch äquivalente Knotenlasten (diskrete Kräfte und Momente) ersetzt, so daß sich für alle Knoten des Systems der exakte Verformungszustand ergibt. Die Vorgehensweise dazu wurde im Abschnitt (2.5) gezeigt und kann leicht programmiert werden. Ein praktisches Beispiel für die Berechnung von biegesteifen Rahmentragwerken ist die in Abbildung 6.1 dargestellte Außenbühne eines Mobilfunkmastes¹. Für ein dreidimensionales, biegesteifes Rahmentragwerk das mit Einzellasten und stückweise linearen Linienlasten belastet ist, kann also im Rahmen der FEM die exakte Lösung berechnet werden.

¹mit freundlicher Genehmigung der SAG Hannover

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Auch wenn sich einige finite Elemente so elementar beschreiben lassen wie bislang dargestellt, so ist doch die reale Welt dreidimensional und damit etwas komplizierter. Nun ist ja ein wesentlicher Vorteil der FEM die formal immer gleiche Herangehensweise. Um diesen Vorteil nutzen zu können müssen wir allerdings zunächst die allgemeinen Gleichungen der linearen Elastizität formulieren. Dazu verwenden wir die Matrixschreibweise. Ob dann wirklich dreidimensionale Strukturen berechnet werden oder ob man den numerischen Aufwand reduziert und auf zwei- oder eindimensionale Modelle zurückgreift, daß ändert nichts mehr an den formalen Gleichungen. Deshalb sind in diesem Kapitel kurz die grundlegenden mechanischen und mathematischen Beziehungen zusammengestellt auf die später Bezug genommen wird.

3.1 Das Randwertproblem der linearen Elastizität

Im folgenden werden Strukturen betrachtet, deren Verformungs- und Spannungsverhalten sich mit der linearen Elastizitätstheorie beschreiben läßt. Voraussetzung dafür sind die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Modell, infinitesimal kleine Verschiebungen und Verzerrungen und ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen. Wir betrachten hier zunächst statische Probleme, im Kapitel 3.3 erweitern wir die Vorgehensweise auf dynamische Aufgabenstellungen. Die Verschiebungen des Kontinuums werden durch die Vektorfunktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ beschrieben, für sie gilt mit \mathbf{e}_i ¹ als Basisvektoren eines Koordinatensystems

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T. \quad (3.1)$$

Auf die allgemeine tensorielle Darstellung und detaillierte Ausführungen wird hier verzichtet, man findet sie in der Literatur zur Festigkeitslehre [11, 1, 16]. Wir nutzen die

¹Die Indizes i und j kennzeichnen die Dimension, $i, j = 1, 2, 3$, also hier $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

sogenannte Voigt-Notation um sämtliche Größen als Vektoren und Matrizen aufzuschreiben. Aus dem Spannungstensor wird dann (Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ vorausgesetzt) der Spannungsvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{23} \ \tau_{13} \ \tau_{12}]^T \\ &\equiv [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}]^T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analog gilt für die Dehnungen und Gleitungen mit $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T \\ &\equiv [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vektorfunktionen sowie Matrizen werden fett geschrieben. Vorgegebene Größen werden per Querstrich gekennzeichnet.

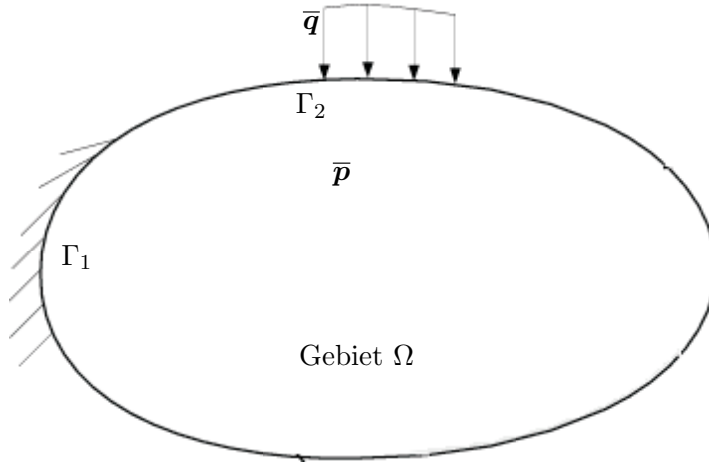


Abbildung 3.1: Notation

Der zu untersuchende Festkörper mit dem Gebiet Ω und dem Rand $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ kann mit einer Volumenlast \bar{p} belastet sein, siehe Abb. 3.1. An der Oberfläche Γ_1 sind die Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ vorgeschrieben, an der Oberfläche Γ_2 wirken vorgegebene Randlasten \bar{q} . (Der Vektor der Randlasten \bar{q} umfasse im dreidimensionalen also Flächen-, Linien- und Einzellasten.) Für das Kontinuum gelten die folgenden Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie. Die kinematischen Gleichungen

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \quad (3.4)$$

beschreiben den linearisierten Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} und dem Vektor der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$. Für ein dreidimensionales Kontinuum gilt mit (3.1), (3.3) und (3.4) für die Differentialmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_3} & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Die Lagerung wird als geometrische Randbedingung

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (3.6)$$

vorgeschrieben. Die Gleichgewichtsgleichungen folgen aus der Impulsbilanz

$$-\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.7)$$

und die statischen Randbedingungen

$$\vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (3.8)$$

beschreiben das Gleichgewicht zwischen dem Randspannungsvektor $\vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}$ und den Randlasten $\bar{\mathbf{q}}$ des Systems.

Die konstitutiven Gleichungen beschreiben das Materialverhalten des Lösungsgebietes. Bei linear-elastischem Material lassen sie sich mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes formulieren,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.9)$$

wobei \mathbf{E} die Hookesche Matrix ist. Mit (3.2) und (3.3) lautet sie für ein isotropes Kontinuum

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Die Beziehungen (3.4) bis (3.9) bilden ein System von Gleichungen, das die eindeutige Berechnung der Verschiebungen und der Spannungen im Kontinuum gestattet. Reduziert man dieses System auf die Verschiebungs- bzw. die Spannungsgrößen, kann man daraus die grundlegenden Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, die Gleichungen von Lamé–Navier bzw. Beltrami–Michell ableiten [11]. Werden aus (3.4) bis (3.9) die Spannungs- und Verzerrungsfunktionen eliminiert, erhält man mit den Randbedingungen (3.6), (3.8) und

$$\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.11)$$

die mathematische Darstellung des Randwertproblems. Der Differentialoperator der linearen Elastizitätstheorie ist linear, symmetrisch und positiv definit, er enthält partielle Ableitungen 2. Ordnung (siehe dazu z.B. [12, 10]).

3.2 Variationsgleichung und Variationsprinzip

Auch wenn der elastische Festkörper mit den angegebenen Gleichungen beschrieben werden kann, zur Ableitung der Finite-Element-Methode geht man zweckmäßigerweise von einer energetischen Formulierung des Problems, also einer Variationsgleichung oder von einem Variationsprinzip² aus. Ein Variationsprinzip, also eine Formulierung für die Energie des Systems, könnte man anstelle der Grundgleichungen (3.4–3.11) einfach als Ausgangspunkt für die Lösung postulieren um daraus die Variationsgleichung abzuleiten. Es ist natürlich nur dann physikalisch sinnvoll, wenn sich daraus wieder Gleichgewichtsbedingungen, Randbedingungen etc. gewinnen lassen. Wir wollen zunächst aber den etwas allgemeineren Weg gehen und die Variationsgleichung der linearen Elastizität herleiten.

Dazu werden zunächst die statischen Gleichungen (3.7–3.8) summiert und über das gesamte Gebiet Ω integriert.

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Diese Integration liefert nun eine Aussage über das gesamte Gebiet — im Gegensatz zu den punktwise erfüllten Gleichgewichtsbedingungen. Der zweite Term der Gleichung (3.12) ist dabei offensichtlich nur auf dem Rand $\partial\Omega \equiv \Gamma_2$ definiert, wir schreiben also besser

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\bar{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma = 0 \quad (3.13)$$

²Einige Aspekte der Variationsrechnung sind im Abschnitt 3.4 dieses Kapitels kurz erläutert.

Nun multiplizieren wir diese Gleichung skalar mit einer beliebigen, aber möglichen Verschiebung, also einer Verschiebung die die vorgegebenen geometrischen Randbedingungen (3.6) erfüllt. Diese Funktion³ $\mathbf{v} \in V_0$ wird wahlweise als virtuelle Verschiebung oder Testfunktion bezeichnet, da im mathematischen Sinne die Erfüllung der Gleichung (3.13) mit variierenden zulässigen Funktionen getestet wird. Da die zulässigen Verschiebungen stetige und beschränkte Funktionen sind können wir sie ins Integral schreiben.

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{v}^T (\bar{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

Man kann $\mathbf{v} \in V_0$ auch als Gewichtsfunktion verstehen, es wird also ein mittels \mathbf{v} gewichteter Mittelwert erzeugt. Sind die Gleichgewichtsbedingungen überall erfüllt, liefert die Mittelwertbildung eine äquivalente Aussage. Wir formen nun den ersten Term der Gleichung (3.14) um. Dazu nutzen wir den Green–Gaußschen Integralsatz⁴ der es ermöglicht, die Änderung von Termen im Gebiet auf Terme an der Oberfläche zurückzuführen. In unserer Notation lautet der Green–Gaußschen Integralsatz für zwei Vektoren \mathbf{S}, \mathbf{T}

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}^T \mathbf{S})^T \mathbf{T} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{n}} \mathbf{S}^T \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Omega} (\mathbf{D} \mathbf{T})^T \mathbf{S} d\Omega. \quad (3.15)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &\equiv \int_{\Omega} (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega} (\mathbf{D} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Der so entstandene Ausdruck wird in die Gleichung (3.14) eingesetzt, dazu werden die statischen Randbedingungen ausgewertet und wir bekommen

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma = 0. \quad (3.17)$$

Mit der Abkürzung $\delta \boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{D} \mathbf{v} \equiv \mathbf{D} \delta \mathbf{u}$ und dem Materialgesetz (3.9) schreiben wir nun die **Variationsgleichung** in der Form

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V. \quad (3.18)$$

³Zur Definition des Verschiebungsraumes V siehe Abschnitt 3.4.5.

⁴Der Green–Gaußschen Integralsatz $\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{n}} \mathbf{S} \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{T} \mathbf{S} d\Omega$ erlaubt es, vektorwertige Funktionen partiell zu integrieren und ist eine Erweiterung des Gaußschen Integralsatzes (Divergenztheorem). Präzisere Aussagen findet man z.B. in [8, 12].

Physikalisch betrachtet bedeutet $\delta \mathbf{u} \in V$ eine zulässige virtuelle Verschiebung. Wird ein im Gleichgewicht stehendes System dieser Verschiebung unterworfen, dann ist die virtuelle Formänderungsarbeit δW_f (linke Seite von (3.18)) gleich der virtuellen Arbeit der aufgebrachten äußeren Kräfte δW_a (rechte Seite von (3.18)).

$$\delta W_f(\mathbf{u}) = \delta W_a(\mathbf{u}) \quad (3.19)$$

Daher bezeichnet man die Gleichungen (3.18) bzw. (3.19) auch als **Prinzip der virtuellen Arbeit** bzw. kurz als Arbeitsgleichung. Die statischen Randbedingungen gehen hier als natürliche Randbedingungen in die Variationsgleichung ein. Außerdem wird die Ordnung der Differentialausdrücke gegenüber (3.11) halbiert, d.h. in (3.18-3.19) sind nur noch Ableitungen 1. Ordnung enthalten. Damit ergeben sich schwächere Differenzierbarkeitsforderungen an Funktionen, mit denen eine Näherungslösung approximiert werden soll. Man bezeichnet die im integralen Sinne definierte Variationsgleichung (3.18) auch als **schwache Formulierung des Randwertproblems** (3.11).

Die Variationsgleichung bzw. schwache Formulierung läßt sich auch aus einem **Variationsprinzip** herleiten. Eine solche Formulierung ist besonders elegant, weil das vollständige mechanische System durch eine einfache skalare Gleichung beschrieben wird. Man muß nur ein passendes Variationsprinzip (also eine Energieform) aufstellen. Allerdings existiert ein Variationsprinzip nicht für jedes Problem das sich mit einem System aus Differentialgleichungen beschreiben läßt. In der Elastizitätstheorie unterscheidet man zwei grundlegende und zueinander duale Variationsprinzipien:

- das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials
- das Prinzip vom Minimum des konjugierten elastischen Gesamtpotentials.

Daneben existieren zahlreiche weitere, für spezielle Problemklassen zweckmäßige Variationsprinzipien, siehe auch Kapitel 9.3. Im Gegensatz zu den beiden oben genannten Variationsprinzipien gelten dann jedoch keine Extremaleigenschaften der Funktionale. Hier wird vom Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials ausgegangen. Als elastisches Gesamtpotential bezeichnet man das Funktional

$$\Pi(\mathbf{u}) = W_f(\mathbf{u}) - W_a(\mathbf{u}) \quad (3.20)$$

mit der Formänderungsarbeit des Systems

$$W_f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (3.21)$$

und der Endwertarbeit der äußeren (eingepprägten) Kräfte

$$W_a(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} \, d\Gamma . \quad (3.22)$$

Lösung der Randwertaufgabe ist genau die Funktion $\mathbf{u} \in V$, die $\Pi(\mathbf{u})$ minimiert, d.h., bei der die erste Variation des Funktional verschwindet.

$$\Pi(\mathbf{u}) \rightarrow \text{Minimum} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.23)$$

In anderen Worten gehen wir davon aus, dass der stabile Gleichgewichtszustand den ein elastischer Körper einnimmt, seinem energetischen Minimum entspricht. Mit Bedingung (3.23) wollen wir diesen Zustand finden.

Bei einem Näherungsverfahren wird (3.18) bzw. (3.23) nur für bestimmte Verschiebungszustände erfüllt. Deshalb werden die Gleichgewichtsbedingungen auch nur im integralen Mittel befriedigt. Mathematisch präzise fordert man deshalb, dass für eine Näherungslösung die Gleichgewichtsgleichungen (3.1)–(3.7) fast überall im Gebiet (almost everywhere, a.e. in Ω) erfüllt sind.

Praktisch ist es häufig erforderlich, spezielle Verschiebungswerte, Koppelbedingungen oder gegebenenfalls Kontaktbedingungen zwischen Körpern vorzuschreiben. Diese Vorgaben werden als Zwangsbedingungen zusammengefasst

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega . \quad (3.24)$$

Um sie zu berücksichtigen unterscheidet man zwei grundlegende Möglichkeiten:

- die Penalty–Funktion–Methode
- die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Der Grundgedanke beider Methoden besteht darin, ein Problem mit Nebenbedingungen durch ein Problem ohne Nebenbedingungen zu ersetzen. Bei der Penalty–Funktion–Methode wird das Verlassen des zulässigen Bereiches „bestraft“. Dazu wird dem zu minimierenden Funktional ein Penalty–Term hinzugefügt, man erhält mit (3.20) das erweiterte Potential Π^*

$$\Pi^*(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \alpha_P \int_{\Omega} \mathbf{Z}(\mathbf{u})^T \mathbf{Z}(\mathbf{u}) \, d\Omega . \quad (3.25)$$

Da durch die Penalty-Funktion eine nichtnegative Größe α_P zum elastischen Gesamtpotential addiert wird, bleibt auch für das erweiterte Potential das Extremalprinzip erhalten. Die Zwangsbedingungen werden für $\alpha_P \rightarrow \infty$ exakt erfüllt.

Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren führt demgegenüber die Zwangsbedingungen als zusätzliche Gleichungen in das zu optimierende Potential ein, man geht von einem Lagrangeschen Funktional Π^{**}

$$\Pi^{**}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (3.26)$$

aus. Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ enthält die (unbekannten) Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Variation des Funktional führt auf ein Sattelpunktproblem.

3.3 Hamiltonsches Prinzip

Die bislang betrachteten statischen Systeme sind genaugenommen natürlich spezielle Fälle bewegter Systeme. Hatten wir für statische Systeme die Gleichgewichtsbedingungen (3.7) formuliert, so schreiben wir nun allgemeiner

$$\rho_0 \mathbf{a} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.27)$$

wobei \mathbf{a} die Beschleunigungsfunktion des Systems und ρ_0 seine Massedichte ist. Die Beschleunigung ist natürlich aus der Zeitableitung der Verschiebungsfunktion zu berechnen.

$$\mathbf{a}(x) = \dot{\mathbf{v}}(x) = \ddot{\mathbf{u}}(x) \quad (3.28)$$

Darüberhinaus gelten die geometrischen Randbedingungen (3.7), und es wird vorausgesetzt, dass der Anfangszustand der Bewegung bekannt ist,

$$\mathbf{u}(t = t_0, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t = t_0, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Es liegt auf der Hand, dass es für dynamische Systeme keine stabile Gleichgewichtslage gibt, die man aus einer Energieminimierung bestimmen könnte. Zwar gibt es folglich auch kein Minimumprinzip um das Anfangswertproblem zu lösen, aber Variationsprinzipie können durch Formulierung in *Raum und Zeit* (\mathbf{x}, t) verallgemeinert werden.

In der Mechanik betrachtet man hierzu die Wirkung der Bewegung des Körpers. Dafür leiten wir uns aus Gleichung (3.27) entsprechend der Vorgehensweise im Abschnitt 3.2 die kinetische Energie des Körpers ab,

$$T(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (3.31)$$

seine potentiellen Energie $\Pi(\mathbf{u})$ entspricht dem elastischen Gesamtpotential (3.20). Mit der die Differenz beider Energieanteile beschreibenden Lagrangefunktion $L = T - \Pi$, d.h.,

$$L(\dot{\mathbf{u}}(x), \mathbf{u}(x)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \Pi(\mathbf{u}) \quad (3.32)$$

kann die Wirkung Σ beim Übergang von einem Zustand in den anderen in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ beschrieben werden,

$$\Sigma = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (3.33)$$

Für den physikalischen Bewegungsablauf erwartet man das Auftreten eines Extremwertes dieser Wirkung.

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt \rightarrow \text{Optimum} \quad (3.34)$$

Die wirkliche Bewegung erfolgt somit nach Funktionen, die unter allen zulässigen Bewegungen das Integral (3.33) stationär machen. Das Hamiltonsche Prinzip wird daher auch als Prinzip der kleinsten Wirkung bezeichnet.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (3.35)$$

Aus dem Funktional (3.32) wird somit

$$0 = \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} d\Omega + \delta \Pi(\mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V. \quad (3.36)$$

bzw. mit der Beziehung (3.18)

$$\int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma. \quad (3.37)$$

Anders ausgedrückt besagt das Prinzip der kleinsten Wirkung, dass die Bewegungsgleichung des Systems gleich der Variationsgleichung für das Funktional $\Sigma(\dot{\mathbf{u}}(x), \mathbf{u}(x))$ ist.

Die Variationsgleichung ist wiederum die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional, siehe Abschnitt 3.4. Daher erhält man aus dem Hamiltonschen Prinzip (3.34) unmittelbar die bekannten **Lagrangeschen Gleichungen** zweiter Art.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (3.38)$$

Benötigt man zur Beschreibung des Körpers auch nichtkonservative Kräfte, also Kräfte die sich nicht aus einem Variationsfunktional ableiten lassen, muss Gleichung (3.38) entsprechend ergänzt werden.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}_{nk}. \quad (3.39)$$

3.4 Bemerkungen zur Variationsrechnung

Bei Variationsproblemen handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Extremwertbestimmung von Funktionen bzw. von Funktionalen. Unter Funktionalen versteht man Abbildungen aus einem Funktionenraum in den Zahlenraum, oder, salopp gesagt, Funktionen von Funktionen. Im allgemeinen liegt das zu minimierende Funktional in Integralform vor⁵,

$$\mathcal{I}(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (3.40)$$

und hat die Randbedingungen

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \bar{y}_0, & y'(x_0) &= \bar{y}'_0, & \dots & y^{(n-1)}(x_0) &= \bar{y}_0^{(n-1)} \\ y(x_1) &= \bar{y}_1, & y'(x_1) &= \bar{y}'_1, & \dots & y^{(n-1)}(x_1) &= \bar{y}_1^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

zu erfüllen. Gesucht ist nun diejenige Funktion $y(x)$ für die $\mathcal{I}(y)$ ein Extremum (Optimum) annimmt. Im weiteren werden schwach differenzierbare Funktionen $y(x)$ betrachtet, d.h. Elemente von Sobolev-Räumen $W^{k,p}$, siehe Abschnitt 3.4.5 am Ende des Kapitels⁶⁷. Es sei \mathcal{U} eine entsprechende Teilmenge dieser Räume, dann läßt sich die Aufgabe der Variationsrechnung formulieren als

$$\mathcal{I}(y) \rightarrow \text{Extremum} \quad \forall y \in \mathcal{U}. \quad (3.42)$$

⁵Häufig wird das Argument eines Funktionalen auch in eckige Klammern gesetzt um zu verdeutlichen, dass es seinerseits eine Funktion ist, also $\mathcal{I}[y] \equiv \mathcal{I}(y(x))$.

⁶Stark bzw. schwach differenzierbar meint stetig differenzierbar bzw. stückweise stetige Ableitungen.

⁷Theoretisch ausreichend sind hier normierte lineare Räume, also Banach-Räume.

In folgenden sei vorausgesetzt, dass eine Lösung der Aufgabe innerhalb des vorgegebenen Funktionenraumes existiert. Für diese Lösung $y_0 \in \mathcal{U}$ muß deshalb notwendigerweise gelten, dass zu jeder beliebigen Funktion $v(x) \in \mathcal{U}$ eine reelle Zahl ϵ_0 existiert, mit der für alle Parameter $|\epsilon| < \epsilon_0$ gilt:

$$\mathcal{I}(y_0 + \epsilon v(x)) \geq \mathcal{I}(y_0) \quad \text{für } y^0 \text{ ist Minimum,} \quad (3.43)$$

bzw.

$$\mathcal{I}(y_0 + \epsilon v(x)) \leq \mathcal{I}(y_0) \quad \text{für } y^0 \text{ ist Maximum.} \quad (3.44)$$

Die Zahl ϵ bzw. ϵ_0 kann dabei hinreichend klein gewählt werden. Die Argumente in (3.43, 3.44), also die Vergleichsfunktionen in der Nachbarschaft der Lösung werden auch gern geschrieben als

$$y_0(x) + \epsilon v(x) \equiv y_0(x) + \delta y(x), \quad (3.45)$$

man nennt δy eine Variation von y (die Schreibweise heißt Lagrangesche Symbolik bzw. Lagrangesches Variationskalkül). Aufgrund der vorgegebenen Randwerte muss die Variation für alle Vergleichsfunktionen am Rand verschwinden, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Allgemein formuliert heißt das, die Vergleichsfunktion muss die vorgegebenen wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen. Auch für die Testfunktion $v(x)$ wurde ja bereits gefordert, dass sie im gleichen Funktionenraum \mathcal{U} liegt wie die Lösungsfunktion.

Das Variationsproblem kann nun auf eine gewöhnliche Extremwertaufgabe zurückgeführt werden. Hierzu folgt mit der Bezeichnung

$$F(\epsilon) \equiv \mathcal{I}(y_0 + \epsilon v(x)) \quad (3.46)$$

aus der Differentialrechnung

$$F'(\epsilon = 0) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad (3.47)$$

sowie $F''(\epsilon = 0) \geq 0$ falls y^0 ein Minimum und $F''(\epsilon = 0) \leq 0$ falls y^0 ein Maximum ist. Die Größen F' und F'' bezeichnet man als erste bzw. zweite Variation des Funktional $\mathcal{I}(y)$ und man schreibt hierfür $\delta \mathcal{I}(y_0, v) \equiv F'(\epsilon = 0)$ und $\delta^2 \mathcal{I}(y_0, v) \equiv F''(\epsilon = 0)$. Also lauten die Bedingungen für das Auftreten eines Extremums

$$\delta \mathcal{I} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad (3.48)$$

$$\delta^2 \mathcal{I} \geq 0 \quad \text{für } y^0 \text{ ist Minimum,} \quad (3.49)$$

$$\delta^2 \mathcal{I} \leq 0 \quad \text{für } y^0 \text{ ist Maximum.} \quad (3.50)$$

Funktionen bei denen die Variation von \mathcal{I} verschwindet heißen stationäre Funktionen

$$y \text{ stationär} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathcal{I} = 0.$$

Mit den Beziehungen (3.46-3.50) lassen sich nun notwendige Optimalitätsbedingungen für das Funktional $\mathcal{I}(y)$ angeben. Das geschieht im folgenden für spezielle Funktionale.

3.4.1 Die Euler-Lagrange Gleichungen

Als *Aufgabe von Lagrange* bezeichnet man in der Variationsrechnung die klassische Aufgabe

$$\mathcal{I}(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \text{Extremum}, \quad (3.51)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die gesuchten Funktionen $y(x) \in \mathcal{U}$ die Randbedingungen (3.41) mit $n = 1$ erfüllen.

Angenommen, $y_0(x) \in \mathcal{U}$ sei die Lösung der Extremwertaufgabe (3.51). Mit den Vergleichskurven (3.45) kann man dann schreiben

$$\mathcal{I}(y) = F(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0(x) + \epsilon v(x), y'_0(x) + \epsilon v'(x)) dx.$$

Das Funktional ist damit nur noch eine Funktion des Parameters ϵ und es muss gelten

$$\delta \mathcal{I} = F'(\epsilon = 0) = 0. \quad (3.52)$$

Also entwickelt man

$$\begin{aligned} F'(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{df}{dy} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{df}{dy'} \frac{dy'}{d\epsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (f_{,y} v(x) + f_{,y'} v'(x)) dx. \end{aligned}$$

Die notwendige (schwache) Differenzierbarkeit von f sei vorausgesetzt. Ein typischer Schritt der Variationsrechnung besteht nun darin, den zweiten Term partiell zu integrieren, so dass dieser ebenfalls proportional zu $v(x)$ wird.

$$\begin{aligned} F'(\epsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(f_{,y} v(x) - \frac{df_{,y'}}{dx} v(x) \right) dx + \left[v(x) f_{,y'} \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} v(x) \left(f_{,y} - \frac{d}{dx} f_{,y'} \right) dx \end{aligned}$$

Der Randterm verschwindet wegen der Randbedingungen (3.41). Mit dem Argument, dass $F'(\epsilon = 0) = 0$ für beliebige Testfunktionen $v(x)$ erfüllt sein muss, folgt als Optimalitätsbedingung die **Euler-Lagrangesche Differentialgleichung**.

$$f_{,y} - \frac{d}{dx} f_{,y'} = 0 \quad (3.53)$$

Die Euler-Lagrange Gleichung (3.53) ist offensichtlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, ihre Lösung bezeichnet man als Extremale. Die auftretenden Integrationskonstanten müssen durch die Randbedingungen bestimmt werden. Gleichwertig kann man (3.53) ausschreiben als

$$f_{,y} - f_{,y'x} - f_{,y'y} y' - f_{,y'y'} y'' = 0. \quad (3.54)$$

Aus der Herleitung wurde ersichtlich, dass die Existenz einer Lösung des Variationsproblems vorausgesetzt wurde. Diese Existenz muß für ein konkretes Problem erst bewiesen werden. Die Euler-Lagrange Gleichung ist nur eine *notwendige* Optimalitätsbedingung.

3.4.2 Funktionale mit höheren Ableitungen

Zu optimieren sei das Funktional (3.40) mit den Randbedingungen (3.41). Wenn nun die Funktion $y_0(x)$ ein relatives Extremum für das Funktional $\mathcal{I}(y)$ liefert, dann muss diese Lösung der Euler-Lagrange Differentialgleichung

$$f_{,y} - \frac{d}{dx} f_{,y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{,y''} - \dots (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} f_{,y^{(n)}} = 0. \quad (3.55)$$

sein. Der Beweis kann analog zur Herleitung in Abschnitt 3.4.1 erfolgen. Das Lösen von (3.55) führt auf ein Randwertproblem n -ter Ordnung.

Eine häufig auftretende Aufgabe mit Ableitungen höherer Ordnung ist die Optimierung des sogenannten Gradientenfunktional

$$\mathcal{I} = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx \quad (3.56)$$

mit Randbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ und $y(x_1) = y_1$, $y'(x_1) = y'_1$. Das Optimum von (3.56) ist Lösung der Euler-Lagrange Gleichung

$$f_{,y} - \frac{d}{dx} f_{,y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{,y''} = 0. \quad (3.57)$$

Ausgeschrieben lautet (3.57)

$$\begin{aligned} 0 = & f_{,y} - f_{,y'x} - f_{,y'y} y' - f_{,y'y'} y'' - f_{,y'y''} y''' \\ & + f_{,y''x^2} + f_{,y''xy} y' + f_{,y''xy'} y'' + f_{,y''xy''} y''' \\ & + (f_{,y''yx} + f_{,y''y^2} y' + f_{,y''yy'} y'' + f_{,y''yy''} y''') y' + f_{,y''y} y'' \\ & + (f_{,y''y'x} + f_{,y''y'y} y' + f_{,y''y'^2} y'' + f_{,y''y'y''} y''') y'' + f_{,y''y'} y''' \\ & + (f_{,y''y''x} + f_{,y''y''y} y' + f_{,y''y''y'} y'' + f_{,y''y''^2} y''') y''' + f_{,y''y''} y'''' . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Das ganze wird also beliebig unübersichtlich und das bereits in nur einer Dimension, also $x, y(x) \in \mathbb{R}$.

3.4.3 Funktionale mehrerer Funktionen

Sollen Funktionale mit mehreren Funktionen optimiert werden, wie es z.B. bei vektorwertigen Funktionen $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ der Fall ist, so stellt sich beispielsweise die Aufgabe

$$\mathcal{I}(u_1 \dots u_m) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1(x) \dots y_m(x), y'_1(x) \dots y'_m(x)) dx \rightarrow \text{Extremum.} \quad (3.59)$$

Dabei gelten die Randbedingungen

$$y_i(x_0) = \bar{y}_{i0} \quad \text{und} \quad y_i(x_1) = \bar{y}_{i1}.$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen lauten in Analogie zum eindimensionalen Fall

$$f_{,y_i} - \frac{d}{dx} f_{,y'_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.60)$$

Die Lösung von (3.60) und das Einsetzen der Randbedingungen liefert die gesuchte Extremale. Man beachte, dass die Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen notwendig aber nicht hinreichend für ein Extremum des Funktionals ist, es können auch Wendepunkte oder Sattelpunkte auftreten. Daher bezeichnet man die Punkte, bei denen das Differential verschwindet allgemein als stationäre Punkte. Die prinzipielle Vorgehensweise kann auf weitere Funktionale mehrerer Funktionen übertragen werden, das Ableiten der Euler-Lagrange Gleichungen ist jedoch nicht immer trivial.

Im folgenden betrachten wir konkret Funktionale vektorwertiger Funktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ im (dreidimensionalen) Euklidischen Raum, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Diese Funktionen sollen stetig aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbar sein und an den Rändern vorgegebenen Randbedingungen genügen, $\mathbf{u} \in V$. Der durch den Grenzwert⁸

$$\delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - \mathcal{I}(\mathbf{u})}{\epsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (3.61)$$

erklärte Ausdruck heißt dann **erste Variation** des Funktional \mathcal{I} and der Stelle \mathbf{u} in Richtung \mathbf{v} . Gleich bedeutend wird oft geschrieben

$$\delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\mathcal{I}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) \right]_{\epsilon=0}; \quad (3.62)$$

⁸Der Raum V_0 unterscheide sich von V wieder durch Verschwinden der Funktionen auf dem Rand mit vorgegebenen wesentlichen Randbedingungen.

man bezeichnet die Variation auch als **Richtungsableitung**. Für die erste Variation der Funktion \mathbf{u} läßt sich auch der Zusammenhang

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v} \right]_{\epsilon=0} = \mathbf{v} \quad (3.63)$$

angeben, was praktisch der Beziehung (3.45) für vektorwertige Funktionen entspricht.

Die Richtungsableitung ist linear im zweiten Argument, dem Zuwachs. Es gilt also

$$\delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \alpha \mathbf{v}) = \alpha \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}), \quad (3.64)$$

sowie im Sinne eines Distributiv-Gesetzes

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_1) + \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_2) \\ \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) &= \alpha_1 \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_1) + \alpha_2 \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_2). \end{aligned} \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_0 \quad (3.65)$$

Führt man nun die n -te Variation des Funktional \mathcal{I} ein,

$$\delta^n \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \frac{\partial^n}{\partial \epsilon^n} \left[\mathcal{I}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) \right]_{\epsilon=0} \quad (3.66)$$

so läßt sich das Funktional in der variierten Konfiguration \mathbf{v} auch durch eine **Taylorreihe** um die aktuelle Konfiguration darstellen. Es ist also

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}) &= \mathcal{I}(\mathbf{u}) + \delta \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \delta^n \mathcal{I}(\mathbf{u}; \mathbf{v} - \mathbf{u}) + O(|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

wobei der letzte Term das Restglied abkürzt. Diese Darstellung ist insofern von Bedeutung, als das sich Extremalprobleme unter Umständen allein über Vergleichsfunktionen, also ohne Kenntnis der wirklichen Lösung berechnen lassen. Schließlich wird für jede beliebige Vergleichsfunktion die erste Variation des Funktional zu Null, wenn \mathcal{I} ein (relatives oder absolutes) Extremum annehmen soll.

$$\delta \mathcal{I}(\mathbf{u}_0; \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (3.68)$$

Zwei typische Beispiele seien kurz erwähnt.

- Das Funktional einer tensorwertigen Funktion $\nabla \mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ (z.B. eines Verzerrungstensors) sei

$$\mathcal{I}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^2 d\Omega \quad (3.69)$$

und hat die Euler-Lagrange Gleichung

$$\delta(\mathcal{I}) = \int_{\Omega} \delta(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (3.70)$$

- Das Gradientenfunktional einer skalarwertigen Funktion $w \in \mathbb{R}^3$ (also z.B. einer Plattendurchbiegung $w = w(x, y, z)$) hat die Form

$$\mathcal{I}(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla w) \cdot \operatorname{div}(\nabla w) \, d\Omega \quad (3.71)$$

Für die erste Variation folgt dann

$$\delta(\mathcal{I}) = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial w} - \operatorname{div}\left(\frac{\partial(w)}{\partial(\nabla w)}\right). \quad (3.72)$$

3.4.4 Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitung

Abschließend sei bemerkt, das die Beschränkung der Variationsrechnung auf den Euklidischen Raum eine ingenieurmäßig anwendungsorientierte aber nicht notwendige Einschränkung ist. In der Funktionalanalysis betrachtet man derartige Probleme als Funktionen \mathbf{F} (Funktionale, Operatoren, der Differentialoperator ist ein linearer Operator) auf normierten linearen Räumen, also Banach-Räumen B . In diesem Sinne definiert man die Fréchet-Ableitung als Erweiterung des klassischen Ableitungsbegriff aus dem \mathbb{R} . Ist D_F die Menge aller Stellen an denen \mathbf{F} differenzierbar ist, dann kann man die **Fréchet-Ableitung** $d\mathbf{F}(\mathbf{u})$ auffassen als Funktionswert eines Operators $d\mathbf{F} : D_F \rightarrow B$ an der Stelle $\mathbf{u} \in D_F$. Der Funktionswert $d\mathbf{F}(\mathbf{u})$ heißt auch Fréchet-Differential von \mathbf{F} bzgl. \mathbf{u} . Oft genügt es, für einen Operator \mathbf{F} den Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\epsilon} = \quad \text{mit } \epsilon \in \mathbb{R} \setminus 0 \text{ und } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ fest} \quad (3.73)$$

zu betrachten. Existiert dieser, so schreibt man ihn als $\delta\mathbf{F}(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ und nennt den linearen Operator die **Gateaux-Ableitung** von \mathbf{F} an der Stelle \mathbf{u} . Ist \mathbf{F} differenzierbar, so existiert auch die Gateaux-Ableitung. Umgekehrt reicht deren Existenz für die Differenzierbarkeit nicht hin, es ist zusätzlich die Stetigkeit in \mathbf{v} erforderlich. Als notwendig für ein Extremum von \mathcal{I} an der Stelle \mathbf{u}_0 erweist sich das Verschwinden der Gateaux-Ableitung. Die Gateaux-Ableitung bezeichnet also die (erste) Variation. Um hinreichende Bedingungen für Extrema von Funktionalen zu formulieren, muß man auch die zweite Gateaux-Ableitung heranzuziehen, siehe (3.48-3.50).

3.4.5 Lösungsräume der linearen Elastizität.

Der Verschiebungsraum V umfaßt alle zulässigen Verschiebungen der Struktur welche die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Für mathematische Betrachtungen werden dazu normierte lineare Räume mit inneren Produkt, also Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ verwendet. Ein spezieller Sobolev-Raum ist der L^2 -Raum. Im Funktionenraum $L^2(\Omega)$ ist eine Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ enthalten, wenn ihre L^2 -Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 dx} \quad (3.74)$$

endlich ist. L^2 -Raum und Sobolev-Räume mit $p=2$ sind Hilbert-Räume H^k . Die Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ gehört zum Hilbert-Raum $H^k(\Omega)$, wenn neben der Funktion selbst auch ihre k -ten Ableitungen in $L^2(\Omega)$ enthalten sind. Verschwindet $\mathbf{u} \in H^k(\Omega)$ auf dem Rand Γ_1 , liegt die Funktion im $H_0^k(\Omega)$. Verschwindet beispielsweise die Funktion $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ auf dem Rand Γ_1 , dann gilt $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$. Erfüllt die Funktion $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ auf dem Rand Γ_1 die vorgegebenen geometrischen Randbedingungen (also vorgeschriebene Verschiebungswerte), dann liegt \mathbf{u} im Funktionenraum $H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \supseteq H_0^1(\Omega)$. Die Norm im $H^1(\Omega)$ ist definiert mit

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1} = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})^2 d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 d\Omega} \quad (3.75)$$

Die exakte Lösung des dreidimensionalen Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie gehört zum Funktionenraum $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$. In Text wird der Einfachheit halber statt von $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ vom Verschiebungsraum V als dem Funktionenraum mit der exakten Lösung gesprochen. Bei anderen Problemen, wie z.B. im Kapitel über Wärmeleitung, meint V dann eben den Hilbert-Raum $\{H^1(\Omega) \mid u = \bar{u} \text{ auf } \Gamma_1\}$.

4 FE-Diskretisierung eindimensionaler Modelle

Im folgenden werden wir die schon bekannte Elementsteifigkeitsbeziehung für das Stabelement (2.5) aus der Variationsgleichung (3.20) herleiten.

4.1 Differentialgleichung und Variationsformulierung für den Zug-Druck-Stab

Zunächst sollen dazu die allgemeinen Gleichungen (3.4) bis (3.20) für den Stab konkretisiert werden. Dabei verzichten wir hier auf die Indizes für die Richtung des Koordinatensystems, die Längsrichtung sei wie im Kapitel 2 die x -Richtung. Wir schreiben die kinematische Gleichung (3.4) als

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u' \quad (4.1)$$

und die Gleichgewichtsbeziehung (3.7)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \bar{q} = 0. \quad (4.2)$$

Das Materialverhalten folgt dem Hookschen Gesetz

$$\sigma = E\epsilon = Eu'. \quad (4.3)$$

Zusammengefaßt und mit der Stabquerschnittsfläche A multipliziert erhalten wir die bekannte Eulersche Differentialgleichung für den Zug-Druck-Stab

$$(EAu')' = \bar{F}_q \quad (4.4)$$

wobei $\bar{F}_q = -\bar{q}A$ eine angreifende Kraft pro Länge ist. Die Eulersche Differentialgleichung und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ \sigma &= \bar{F}/A \end{aligned} \quad (4.5)$$

an den entsprechenden Randpunkten bilden das Randwertproblem. Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an, daß der Stab einen konstanten Querschnitt und E-Modul habe. Ist das nicht der Fall, ändert sich die Integration entsprechend.

Zur Herleitung der Variationsgleichung (3.18) integrieren wir zunächst die Gleichgewichtsbeziehung (4.2) über das Lösungsgebiet $\Omega = A \times l$. Die Terme werden mit einer zulässigen Variation der Verschiebung $\delta u \in V$ multipliziert. Das Resultat entspricht der Variation des elastischen Gesamtpotentials $\delta\Pi = \delta W_f(u) - \delta W_a(u)$ und muß im Gleichgewichtszustand verschwinden.

$$\delta\Pi = 0 = \int_{\Omega} \delta u \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \bar{p}(x) \right) d\Omega \quad (4.6)$$

$$= \int_0^l \delta u \frac{\partial \sigma}{\partial x} A dx + \int_0^l \delta u \bar{p}(x) dx \quad (4.7)$$

Wir integrieren den ersten Term von (4.7) partiell

$$\int_0^l \delta u \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) A dx = [\delta u \sigma A]_{\text{Rand}} - \int_0^l (\delta u)' \sigma A dx, \quad (4.8)$$

und setzen für den Randterm nun die statische Randbedingung (auf dem Rand $\Gamma_2 \subseteq \partial\Omega$ der sich hier auf Randpunkte reduziert) ein.

$$[\delta u \sigma A]_{\text{Rand}} = [\delta u \bar{F}]_{\text{Rand}} \quad (4.9)$$

Formulieren wir nun den Randterm entsprechend seiner physikalischen Bedeutung als Summe der n angreifenden Kräfte $\sum_n \delta u \bar{F}_n$ und setzen ihn in Gleichung (4.7) ein

$$0 = - \int_0^l (\delta u)' \sigma A dx + \int_0^l \delta u \bar{p}(x) A dx + \sum_n \delta u \bar{F}_n. \quad (4.10)$$

dann erhalten wir mit (4.1) und (4.3) die **Arbeitsgleichung** für den Zug-Druck-Stab

$$\int_0^l (\delta u)' EA u' dx = \int_0^l \delta u \bar{p}(x) A dx + \sum_n \delta u \bar{F}_n. \quad (4.11)$$

Ein anderer, zumindest hier etwas anschaulicherer Weg führt zum gleichen Ergebnis. Dazu ermitteln wir die Formänderungsarbeit (3.21) des Stabes

$$W_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \epsilon(u) d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l EA u'^2 dx \quad (4.12)$$

und die Endwertarbeit der äußeren Kräfte (3.22)

$$W_a(u) = \int_{\Omega} \bar{p} u \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{F}/A u \, d\Gamma = \int_0^l \bar{p}(x) A u \, dx + \sum_n u \bar{F}_n. \quad (4.13)$$

Damit berechnen wir das elastische Gesamtpotential (3.20)

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= W_f(u) - W_a(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EA u'^2 \, dx - \int_0^l \bar{p}(x) A u \, dx - \sum_n u \bar{F}_n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Lösung des Problems ist nun der Verschiebungszustand, bei dem das Energiefunktional $\Pi(u)$ ein Minimum hat. Das bedeutet das die erste Ableitung nach u bzw. (gleichbedeutend) die Variation des Funktional verschwindet $\delta\Pi = 0$.

$$\begin{aligned} \delta\Pi(u) &= \int_0^l (\delta u)' EA u' \, dx - \int_0^l \bar{p}(x) A \delta u \, dx - \sum_n \delta u \bar{F}_n \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Beispiel 4.1. Gerader Stab unter Zuglast. *Ein Stab der Länge l_s sei an einem Ende (bei $x = 0$) gelagert und am anderen Ende durch eine Zugkraft F belastet. Die Dehnungen sowie die Spannungen sind offensichtlich konstant mit*

$$\epsilon = \frac{F}{EA} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{F}{A}. \quad (4.16)$$

Die analytische Lösung für die Verschiebungsfunktion ist dann

$$u(x) = \frac{Fx}{EA}. \quad (4.17)$$

Beispiel 4.2. Gerader Stab unter Eigengewicht. *Ein Stab der Länge l_s sei am oberen Ende (bei $x = 0$) gelagert und nur durch sein Gewicht belastet. Mit der Massedichte ρ und der Gravitationsbeschleunigung g gilt dann im Stab die Gleichgewichtsbeziehung*

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = -\rho g. \quad (4.18)$$

Durch Integration und Einsetzen der Randbedingung am freien Rand $x = l$ erhalten wir

$$\sigma(x) = \rho g(l - x) \quad \text{und} \quad \epsilon(x) = \frac{\rho g}{E}(l - x), \quad (4.19)$$

sowie die analytische Lösung für die Verschiebungsfunktion

$$u(x) = \frac{\rho g}{2E}(2lx - x^2). \quad (4.20)$$

Beispiel 4.3. Konischer Stab unter Eigengewicht. Ein Stab sei am oberen Ende (bei $x = 0$) gelagert und nur durch sein Gewicht belastet. Der Querschnitt am oberen Ende habe den Radius r_0 und verjünge sich linear zu r_1 am unteren Ende, also $A(x) = \pi(r_0(l-x) + r_1x)^2/l^2$. Mit der Gleichgewichtsbeziehung 4.18 und durch Integration und Einsetzen der Randbedingung erhalten wir

$$\sigma(x) = \frac{\rho g \pi l}{3} \cdot \frac{(r_0 + (r_1 - r_0)x/l)^3 - r_1^3}{r_1 - r_0} \quad (4.21)$$

sowie die analytische Lösung für die Verschiebungsfunktion

$$u(x) = \frac{\rho g \pi l}{12E} \cdot \frac{-4r_1^3x(r_1 - r_0) + l(r_0 + (r_1 - r_0)x/l)^4 + lr_0^4}{(r_1 - r_0)^2}. \quad (4.22)$$

4.2 Der Stab, dritter Teil: Ansatzfunktionen

Um Stäbe und Fachwerke zu vernetzen hatten wir bisher die natürliche Struktur der Modelle ausgenutzt und bei Lastangriffsstellen und Geometrieänderungen Knoten definiert. Die Elementsteifigkeitsbeziehung hatten wir anschaulich hergeleitet. Nun werden wir einen allgemeingültigen Finite-Element-Ansatz formulieren, indem wir die Verschiebungsfunktion $u(x)$ mittels sogenannter Basisfunktionen annähern,

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \hat{u}_i \quad (4.23)$$

hier heißen $N_i(x)$ auch Ansatz- oder Formfunktionen und \hat{u}_i sind die unbekannten Koeffizienten. Die Zahl der Unbekannten im Gleichungssystem n bezeichnen wir als Anzahl der Freiheitsgrade (degrees of freedom). Wesentliches Merkmal der Methode der finiten Elemente ist, dass die Ansatzfunktionen nur lokal, also auf Elementen und den zugehörigen Knoten von Null verschieden sind. Mit diesen Ansatz lassen sich dann die Elementsteifigkeitsbeziehungen und die Systemsteifigkeitsbeziehungen formal aus der Variationsgleichung herleiten.

Betrachten wir ein Stabelement mit zwei Knoten, und führen wir ein lokales, elementeigenes Koordinatensystem ein. Ursprung der lokalen Koordinate ξ sei der Elementmittelpunkt $x_M = (x^{(1)} + x^{(2)})/2$, die Knoten liegen bei $\xi = -1$ und $\xi = 1$, (Bild 4.3). Die Transformationsbeziehung zwischen globaler und lokaler Koordinate lautet dann

$$x = x_M + \frac{1}{2}\xi l_e \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{2}{l_e}(x - x_M). \quad (4.24)$$

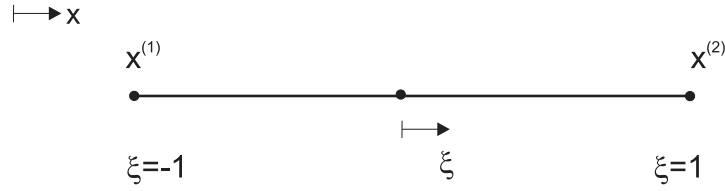


Abbildung 4.1: Definition eines elementeigenen Koordinatensystems

Für die Verschiebungen im Element definieren wir nun (elementeigene) Ansätze als Funktionen der lokalen Koordinate ξ . Für die Ansatzfunktionen der finiten Elemente verwendet man praktisch immer Polynome, für spezielle Anwendungen könnten aber auch andere einfache Funktionen, wie z.B. trigonometrische Funktionen zum Einsatz kommen. Um mit mehreren Elementen stetige Verschiebungen der Struktur darstellen zu können, müssen diese Ansätze offensichtlich mindestens lineare Funktionen sein, also z.B.

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \xi \quad (4.25)$$

wobei a_0, a_1 unbekannte Koeffizienten sind. Aus Gründen der Anschaulichkeit rechnet man aber ungern mit Koeffizienten ohne physikalische Bedeutung, sondern lieber mit den Knotenverschiebungen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$. Die passenden Ansatzfunktionen für die Verschiebung $u(\xi)$ läßt sich einfach konstruieren. Die Linearkombination

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) u^{(1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi) u^{(2)} \\ &= N_1 u^{(1)} + N_2 u^{(2)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

approximiert die Verschiebungsfunktion u im Element linear. Die Beispiele 2 und 3 des letzten Abschnittes haben gezeigt, das es durchaus sinnvoll sein kann, auch Polynome höherer Ordnung für die Verschiebungsapproximation heranzuziehen. Bild 4.3 zeigt deshalb ein Stabelement mit 3 Knoten. Verwendet man auch hier die Knotenverschiebungen als unbekannte Koeffizienten, dann lautet die zugehörige quadratische Verschiebungsapproximation (zur Herleitung siehe Bemerkung 4.1)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) u^{(1)} + (1 - \xi^2) u^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) u^{(3)} \\ &= N_1 u^{(1)} + N_2 u^{(2)} + N_3 u^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Ansätze (4.26) bzw. (4.27) schreibt man wieder in Matrizenschreibweise

$$\tilde{u}(\xi) = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}} \quad (4.28)$$

mit (für (4.27))

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_e &= [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)] \\ \hat{\mathbf{u}}_e &= [u^{(1)} \quad u^{(2)} \quad u^{(3)}]^T.\end{aligned}$$

Knotenbezogene FE-Ansatzfunktionen N_k haben immer die folgenden Eigenschaften:

- Die Funktionen $N_k(\xi)$ sind im Elementgebiet $\xi \in [-1, 1]$ stetig.
- Jedem Knoten k ist eine Ansatzfunktion N_k zugeordnet.

$$N_k(\xi = \xi_l) = \begin{cases} 1 & : k = l \\ 0 & : k \neq l \end{cases} \quad (4.29)$$

- Die Summe aller Ansatzfunktionen ist in jedem Elementpunkt eins.

$$\sum_{k=1}^{n_e} N_k = 1 \quad (4.30)$$

Bemerkung 4.1. *Zur Konstruktion von knotenbezogenen Ansatzfunktionen.* Ziel sei eine quadratische Approximation der Verschiebungen. Ausgehend von

$$u(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (4.31)$$

bzw.

$$u(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Xi} \mathbf{a} \quad (4.32)$$

erhält man mit den Forderungen (4.29), also $u(\xi = -1) = u^{(1)}$, $u(\xi = 0) = u^{(2)}$ und $u(\xi = 1) = u^{(3)}$, die Gleichungen

$$\begin{aligned}u^{(1)} &= a_0 - a_1 + a_2 \\ u^{(2)} &= a_0 \\ u^{(3)} &= a_0 + a_1 + a_2\end{aligned}$$

bzw. in Matrizen zusammengefasst

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{A} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.33)$$

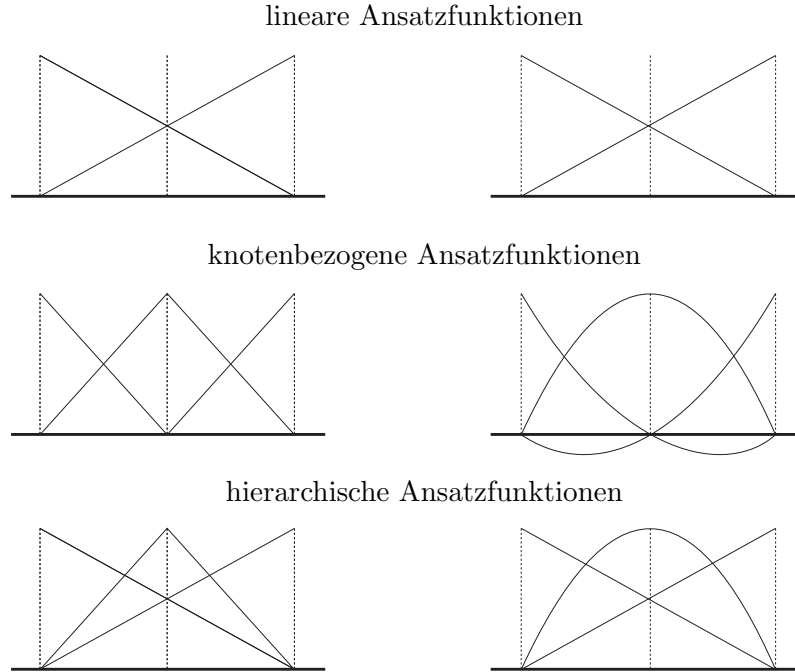


Abbildung 4.2: Lineare und quadratische Ansatzfunktionen

Folglich ist

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}}_e \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Daraus folgt für den Verschiebungsansatz

$$u(\xi) = \Xi \mathbf{a} = \Xi \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (4.35)$$

und für die Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_e = \Xi \mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 1-\xi^2 & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Bemerkung 4.2. *Lagrange-Polynome.* Die abgeleiteten knotenbezogenen Ansatzfunktionen sind identisch mit den (quadratischen) Lagrange-Polynomen für $\xi \in [-1, 1]$. Lagrange-Polynome p -ten Grades sind definiert mit

$$L_k = \prod_{j=1(j \neq k)}^{p+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \quad (4.37)$$

So erhält man bei $p = 2$ für L_1 eben genau

$$L_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1). \quad (4.38)$$

Ausgehend von linearen Ansatzfunktionen gibt es verschiedene Möglichkeiten in einem Element die Ansatzordnung zu erhöhen, siehe auch Abbildung 4.2. Gewöhnlich fügt man zusätzliche Knoten im Element ein und wählt, wie oben dargestellt, knotenbezogene Ansatzfunktionen. An einem Knoten ist weiterhin nur die ihm zugeordnete Ansatzfunktion ungleich Null, es gelten die Bedingungen (4.29-4.30). Die unbekannten Koeffizienten $u^{(k)}$ des Verschiebungsansatzes repräsentieren die Verschiebung am Knoten k . Diese Ansätze sind allerdings bei höherer Polynomordnung $p \geq 3$ numerisch ungünstig, sie neigen zu Oszillationen.

Erhöht man dagegen die Anzahl der Freiheitsgrade im finiten Element, ohne daß sich die ursprünglichen FE-Ansatzfunktionen ändern, spricht man von einer hierarchischen Elementformulierung. Dabei werden die vorhandenen Ansatzfunktionen durch weitere Ansätze höherer Polynomordnung überlagert. Ein hierarchischer Elementaufbau verwendet also bei höherer Ansatzordnung alle bereits auf der niederen Approximationsstufe definierten Ansatzfunktionen weiter. Bei hoher Polynomordnung arbeiten Programme auf der Basis hierarchischer Elemente sehr effektiv. Die Koeffizienten des FE-Ansatzes sind aber bei hierarchischen Elementansätzen nicht mehr physikalisch interpretierbar. Die Verschiebungen an den Knoten müssen im Nachlauf aus den Ansätzen der Form (4.31) berechnet werden. Das ist zwar mathematisch betrachtet eher nebensächlich, hat aber zur Folge, daß solche Elementformulierungen gegenüber den herkömmlichen, nichthierarchischen FE-Ansätzen an Anschaulichkeit verlieren.

Wir werden uns hier nicht weiter mit hierarchischen Elementformulierungen befassen, weil sie in kommerzielle FE-Programme kaum Einzug gehalten haben¹. Der vorangegangene Abschnitt sollte aber deutlich machen, daß die konkrete Wahl der Polynomansätze letztlich durch Bequemlichkeit oder Tradition geprägt ist, andere Formen sind mathematisch gleichwertig. In folgenden meinen wir knotenbezogene Ansätze wenn wir von FE-Ansatzfunktionen sprechen.

¹Einzige rühmliche Ausnahme ist das Programmpaket *ProEngineer* welches Elemente höherer Ordnung, sogenannte p-Elemente verwendet.

4.3 Herleitung der Elementsteifigkeitsbeziehung

Zur Herleitung der Elementsteifigkeitsbeziehung gehen wir nun von der Variationsformulierung (3.23) bzw. (4.6) aus. Für ein Stabelement lautet sie

$$\delta\Pi(u) = \int_0^{l_e} (\delta u)' EA u' dx - \int_0^{l_e} \delta u \bar{p}(x) A dx - \sum_{k=1}^{n_F} \delta u \bar{F}^{(k)}. \quad (4.39)$$

Für die Verschiebung im Element machen wir den Ansatz (4.28)

$$\tilde{u} = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (4.40)$$

wobei \mathbf{N}_e die Ansatzfunktionen des Elements und $\hat{\mathbf{u}}$ die unbekannten Knotenverschiebungswerte enthält. Für die Testfunktion δu , also die virtuelle Verschiebung, machen wir nun den gleichen Ansatz. Diese Vorgehensweise ist zwar naheliegend, aber nicht zwingend erforderlich. Sie entspricht der von Galerkin² entwickelten Methode zur Approximation von Funktionen [10, 2]. Deshalb wird die FEM in der mathematischen Literatur auch häufig als Galerkin-Verfahren bezeichnet.

$$\delta u = \mathbf{N}_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \quad (4.41)$$

In (4.39) eingesetzt erhalten wir

$$\int_0^{l_e} (\mathbf{N}_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e)' EA (\mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e)' dx = \int_0^{l_e} \mathbf{N}_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \bar{p}(x) A dx + \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{N}_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \bar{F}^{(k)}. \quad (4.42)$$

Nach Differentiation und mit der in der (englischsprachigen) FEM-Literatur üblicherweise mit \mathbf{B} abgekürzten Matrix $\mathbf{D}\mathbf{N}_e = d\mathbf{N}_e/dx$ schreiben wir

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_e \int_0^{l_e} \mathbf{B}_e EA \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{u}}_e dx = \delta \hat{\mathbf{u}}_e \left(\int_0^{l_e} \mathbf{N}_e \bar{p}(x) A dx + \sum_{k=1}^{n_F} \bar{F}^{(k)} \right) \quad (4.43)$$

²Boris G. Galerkin, russischer Mathematiker (1871-1945). Galerkin arbeitete in St. Petersburg auf dem Gebiet der näherungsweisen Integration von Differentialgleichungen und veröffentlichte 1915 die nach ihm benannte 'Galerkin Methode'. Galerkin nutzt die schwache Formulierung, wo die zugrundeliegende Differentialgleichung nur im integralen Sinne erfüllt wird. Die Gleichgewichtsbedingung wird mit Testfunktionen multipliziert, die kinematisch mit dem Problem verträglich sein müssen, also die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Galerkin's Idee bestand darin, für diese Testfunktionen die selben Funktionen wie für die Lösungsfunktionen zu verwenden, da diese zwangsweise kinematisch verträglich sind. Hier bedeutet das, daß die virtuellen Verschiebungen durch die selben Ansätze wie die tatsächlichen Verschiebungen ausgedrückt werden.

bzw. gleichbedeutend

$$\underbrace{\int_0^{l_e} \mathbf{B}_e EA \mathbf{B}_e dx}_{\mathbf{K}_e} \hat{\mathbf{u}}_e = \underbrace{\int_0^{l_e} \mathbf{N}_e \bar{p}(x) A dx}_{\mathbf{f}_e^p} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_F} \bar{F}^{(k)}}_{\mathbf{f}_e^k}. \quad (4.44)$$

Damit ist die Elementsteifigkeitsbeziehung für das Stabelement prinzipiell formuliert. Der Elementlastvektor setzt sich hier aus Volumenlastanteilen \mathbf{f}_e^p und Einzellasten an den Knoten \mathbf{f}_e^k zusammen.

Um die Terme im einzelnen auszurechnen betrachten wir zunächst wieder das Element mit linearen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

und betrachten die Matrix \mathbf{B}_e näher.

$$\mathbf{B}_e = \frac{d}{dx} \mathbf{N}_e = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (4.46)$$

Aus der Transformationsbeziehung (4.24) folgt

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l_e} \quad \text{sowie} \quad \int_0^{l_e} \cdot dx = \int_{-1}^1 \cdot \frac{l_e}{2} d\xi \quad (4.47)$$

und die Ableitung der Ansatzfunktionen lautet

$$\mathbf{B}_e = \frac{2}{l_e} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Damit läßt sich die Elementsteifigkeitmatrix berechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_0^{l_e} \mathbf{B}_e EA \mathbf{B}_e dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{l_e} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T EA \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} d\xi \\ &= \frac{EA}{l_e} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} d\xi \\ &= \frac{EA}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Das Ergebnis ist offensichtlich identisch mit der Steifigkeitsmatrix in (2.5). Für den Elementkraftvektor folgt bei konstanter Volumenlast (z.B. infolge Eigengewicht $\bar{p} = \rho g$),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \int_0^{l_e} \mathbf{N}_e \bar{p} A \, dx \\ &= \bar{p} A l_e \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{pmatrix} d\xi \\ &= \frac{\bar{p} A l_e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die gleiche Prozedur führt bei quadratischen Ansatzfunktionen auf

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{8l_e} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}_e = \frac{\bar{p} A l_e}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß eine konstante Volumenlast auf Eck- und Seitenmittenknoten *unterschiedlich* aufgeteilt wird. Das ist typisch für höherwertige Ansatzfunktionen. Andersherum formuliert, eine in allen Knoten gleiche Einzellast ist also nicht dasselbe wie ein gleichverteilter Druck!

4.4 Einarbeiten der Randbedingungen und Aufbau des FE-Gleichungssystems

Die Elementsteifigkeitsbeziehungen werden in der schon im Kapitel 2 beschriebenen Weise zur Systemsteifigkeitsbeziehung $\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$ zusammengeführt. Ohne daß die geometrische Randbedingungen berücksichtigt sind, ist die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} singulär. Das entspricht der physikalischen Tatsache, daß bei einer nicht gelagerten Struktur beliebige Verschiebungen möglich sind. Es müssen also für eine FE-Berechnung so viele Randbedingungen berücksichtigt werden, daß die Struktur mindestens statisch bestimmt gelagert ist, um somit eine reguläre, positive definite Steifigkeitsmatrix zu erzeugen. Verschiedene Wege dazu werden hier zusammengefaßt.

Häufigste Randbedingung ist eine verhinderte Verschiebung $u_i = 0$, wobei der Index die Position im Vektor der unbekannten Knotenverschiebungen angibt. Setzt man im Vektor der Unbekannten Null anstelle von u_i ein, dann erkennt man, dass die zugehörigen Einträge in der Steifigkeitsmatrix (die i -te Zeile und die i -te Spalte) keinen Einfluß mehr haben. Bei kleinen Gleichungssystemen würde man folglich zur Berücksichtigung der Randbedingung einfach die zugehörige i -te Zeile und i -te Spalte in \mathbf{K} streichen und u_i so aus dem zu berechnenden System entfernen. Bei großen Systemen mit vielen gelagerten Knoten wäre der Datenverwaltungsaufwand dafür kaum zu beherrschen. Daher läßt man hier die Matrix \mathbf{K} in ihrer Größe unverändert und modifiziert sie so, daß sich automatisch bei der Lösung des Gleichungssystems für die gelagerten Knoten Nullverschiebungen ergeben. Gewöhnlich wählt man dafür einen der im folgenden beschriebenen Wege.

1. Man ersetzt die Einträge in i -ter Zeile und i -ter Spalte durch Null und das i -te Hauptdiagonalelement mit Eins, $K_{ij} = K_{ji} = 0, j = 1 \dots n, K_{ii} = 1$. Setzt man nun auf der rechten Seite den i -ten Eintrag im Kraftvektor Null, $f_i = 0$, dann berechnet das System $u_i = 0$. Diese Strategie ist mathematisch korrekt. Sie kann aber zu einer schlechten Kondition der Steifigkeitsmatrix führen, wenn die Eins sehr viel größer oder kleiner als ein typisches Matrixelement ist. Deshalb sollte man statt Eins eine Zahl in der Größenordnung der Hauptdiagonalelemente wählen (was offensichtlich zum gleichen Ergebnis führt).
2. Eine andere, noch wesentlich einfachere Variante besteht darin, die Einträge in der Matrix \mathbf{K} und im Kraftvektor \mathbf{f} unverändert zu lassen und lediglich auf das Hauptdiagonalelement K_{ii} eine sehr große Zahl zu addieren, die zur verhinderten Verschiebung gehörende Steifigkeit also zu erhöhen. Diese große Zahl wird auch 'Penalty Number' genannt, d.h. Strafzahl, da sie jede Verschiebung u_i in der mathematischen Optimierung bestraft. (Zur Erinnerung: Wir suchen per FEM das Minimum des elastischen Gesamtpotentials (3.23)).
3. Mathematisch betrachtet sind Randbedingungen Nebenbedingungen für die Optimierung die mittels der Methode der Lagrangesche Multiplikatoren ins Gleichungssystem eingebaut werden können, siehe z.B. [2]. Dazu führt man beispielsweise für $u_i = \bar{u}$ eine zusätzliche Gleichung in die $n \times n$ -Systemsteifigkeitsbeziehung ein.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & (\dots 1 \dots)^T \\ (\dots 1 \dots) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

wobei die Eins jeweils an Position $K_{i,n+1}$ und $K_{n+1,i}$ steht, alle anderen Einträge des Vektors $(\dots 1 \dots)$ sind Null. Die Größe λ nennt man Lagrange-Multiplikator, sie wird Teil des vergrößerten Vektors der Unbekannten. Damit ist auch schon

ein wesentlicher Nachteil der Methode benannt, die Systemsteifigkeitsbeziehung vergrößert sich um die Anzahl der zu berücksichtigenden Randbedingungen. Die \mathbf{K} -Matrix ist nun zwar regulär aber nicht mehr positiv definit (sondern semi-definit), was für manche Gleichungslöser ein Problem darstellt. Darüberhinaus ändert sich die Struktur des Variationsproblems, wir haben keine Minimierungsaufgabe mehr, sondern die Suche nach einem Sattelpunkt (wobei wiederum Sattelpunktprobleme nicht unbedingt stabil sind).

Das folgende Beispiel zeigt den Effekt dieser Vorgehensweise. Gegeben seien

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

und gesucht seien nun die Verschiebungen des Systems wenn $u_1 = 0$ ist. (Die Kraft $f_1 = (\mathbf{f})_1$ ist dann offensichtlich wirkungslos; der Wert von f_1 ist hier willkürlich gesetzt und entspricht nicht der Lagerreaktion.) Streichen wir die erste Zeile und Spalte, dann erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$u_2 = 3 \quad \text{und} \quad u_3 = 4.$$

Nun addieren wir auf das erste Hauptdiagonalelement die Zahl $5 \cdot 10^6$ und lösen die Gleichungen des Systems auf.

$$\begin{aligned} 5000003u_1 - u_2 &= 3 & \Leftrightarrow & \quad u_1 = \frac{1}{5000003}(3 + u_2) \\ -3u_1 + 2u_2 - u_3 &= 2 \\ -u_2 + u_3 &= 1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aus der dritten und zweiten Gleichung erhalten wir $u_2 = u_3 - 1$ und $u_3 = 4 - 3u_1$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt

$$u_1 = 1.2 \cdot 10^{-6}.$$

Man rechnet nun zwar nicht $u_1 = 0$ aus, sondern $u_1 \approx 10^{-6}$ aus, was aber offensichtlich nahe Null ist. Praktisch wählt man bei dieser Vorgehensweise eine um $10^{10} \dots 10^{30}$ größere Zahl als das ursprüngliche Element und die „Null“-Verschiebungswerte sind entsprechend kleiner. Physikalisch interpretiert entspricht die Addition einer Penalty Number auf das K_{ii} -te Matrixelement dem Hinzufügen einer Feder mit einer sehr hohen Steifigkeit zwischen Knoten i und „wirklichem“ Lager, siehe auch Abschnitt 2.3.

Bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren wird aus (4.52)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

und man erhält nach auflösen $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$ und $\lambda = 6$. Die Verschiebungsrandbedingung wird also genau erfüllt. Der Multiplikator λ läßt sich auch deuten, es ist die Differenz aus dem Eintrag in Kraftvektor f_1 und der tatsächlichen Lagerkraft (die man leicht als -3 ausrechnen kann).

In klassischen FE-Programmen werden kinematische Randbedingungen gewöhnlich mittels Penalty-Verfahren berücksichtigt.

Anschließend seien noch die praktisch relevanten Fälle von **vorgeschriebenen**, von Null verschiedenen **Verschiebungen** erläutert. Im ersten Fall setzt man dann einfach auf der rechten Seite $(\mathbf{f})_i = \bar{u}$, für den dritten Fall ist dieser Fall bereits in (4.51) angegeben. Beim Penalty Verfahren geht man folgendermaßen vor: Sei $u_i = \bar{u}$ vorgeschrieben, dann wird dafür die i -te Spalte der \mathbf{K} -Matrix mit \bar{u} multipliziert. Der resultierende Vektor (mit Kraftkomponenten) wird nun vom Lastvektor \mathbf{f} abgezogen. Dann wird wieder wie oben verfahren, also eine Penalty-Zahl auf das Hauptdiagonalelement K_{ii} addiert und das System gelöst. Vorsicht bei mehreren vorgegebenen Verschiebungen, es wird jeweils von der Spalte der ursprünglichen \mathbf{K} -Matrix ausgegangen.

Im Beispiel sieht das für $u_1 = 5$ so aus:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 - 3 * 5 \\ 2 + 1 * 5 \\ 1 - 0 * 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Die Lösung ergibt $u_2 = 8$ und $u_3 = 9$ sowie durch Rückrechnen für die Lagerkraft am Knoten $f_1 = 7$. (Mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren würde man jetzt $\lambda = -4$ berechnen.) Klar, der Fall der verhinderten Verschiebung ist mit $\bar{u} = 0$ in diesem Vorgehen enthalten.

Mitunter ist auch eine **schräge Lagerung** vorgeschrieben, weil beispielsweise in der $x - y$ -Ebene ein um den Winkel α gedrehtes Lager die Verschiebung in dieser Richtung verhindert. In am Knoten k sind dann die Knotenverschiebungen u_{kx} und u_{ky} linear voneinander abhängig. Die Lagerung realisiert man im FE-System, indem die zum Knoten k gehörenden Einträge so transformiert werden, dass eine Achse mit der vorgeschriebenen Richtung zusammenfällt. Hier wird dann die Verschiebung (mit den oben beschriebenen Methoden) verhindert, während die anderer Richtung frei bleibt. Nach Lösen des globalen Systems muss zurück transformiert werden.

Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cos \alpha & -\sin \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sin \alpha & \cos \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

folgt

$$\mathbf{u}_{xy} = \mathbf{T} \mathbf{u}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad u_\alpha = \mathbf{T}^T \mathbf{u}_{xy} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{xy} = \mathbf{T} \mathbf{f}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{xy}$$

und aus der ursprünglichen Beziehung $\mathbf{K} \mathbf{u}_{xy} = \mathbf{f}_{xy}$ wird dann

$$\mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{T} \mathbf{f}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_\alpha} \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha.$$

Hier kann nun die Randbedingung eingearbeitet und das Gleichungssystem $\mathbf{K}_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha$ gelöst werden, die Verschiebung folgt mit $\mathbf{u}_{xy} = \mathbf{T} \mathbf{u}_\alpha$. Praktisch werden nicht die gesamten Matrizen multipliziert, sondern die Gleichungen werden aufgelöst um Operationen zu sparen.

Gleichheit zweier Knotenverschiebungen $u_i = u_k$ erreicht man man, indem die i -te Zeile zur k -ten Zeile und die i -te Spalte (jetzt ohne Hauptdiagonalelement) zur k -ten Spalte addiert sowie mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert wird. Die sinnlos gewordene i -te Zeile und Spalte wird aus dem System „gestrichen“ (z.B. mittels Penalty-Verfahren). Nach Lösen des Gleichungssystems wird dann u_i der berechnete Wert von u_k zugewiesen.

4.5 Lösung des Gleichungssystems

Die in der linearen FEM auftretende Systemsteifigkeitsbeziehung hat die allgemeine Form $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$. Um das Gleichungssysteme lösen zu können muß die Matrix \mathbf{K} regulär sein, was durch den Einbau der Randbedingungen realisiert wurde. In den Fällen die wir hier zunächst betrachten werden, ist die Systemsteifigkeitsmatrix symmetrisch positiv-definit, d.h. für die quadratische Form mit beliebigen n -Vektoren $\mathbf{a} \neq 0$ gilt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} > 0. \quad (4.57)$$

Eine positiv definite Matrix hat nur positive Eigenwerte λ_k , $k = 1 \dots n$. Somit kann man die Konditionszahl einer solchen Matrix aus dem Quotient von größtem und kleinsten Eigenwert berechnen.

$$k_K = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (4.58)$$

Ist die Kondition (die sich allgemein, also für nicht positiv-definite reguläre Matrizen aus Matrixnormen berechnen läßt) sehr groß, spricht man von schlecht konditionierten Systemen. Als Faustformel gilt, das die Größenordnung der Konditionszahl die Anzahl der Stellen in den Ergebnissen angibt, die nicht mehr genau berechnet werden können. Ist beispielsweise $k_K \approx 10^7$, dann kann bei einem `real*4`-Ergebnis mit 8 Stellen nur eine Ziffer sinnvoll ausgewertet werden. Gewöhnlich rechnet man aber von vornherein mit `double precision` bzw. `real*8` Zahlendarstellungen.

Darüberhinaus ist die Matrix \mathbf{K} schwach besetzt, d.h. bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen besteht die Matrix nur aus Nullelementen. Diese sogenannte Bandmatrix entsteht jedoch nur bei günstiger, d.h. fortlaufender Numerierung der Knoten, da die Bandbreite von der Knotennumerierung abhängig ist. Die charakterisierende Größe, die halbe Bandbreite einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{K} ist wie folgt zu ermitteln:

$$\max_{2 \leq i \leq n} (i - o(i)) \quad (4.59)$$

Dabei bezeichnet $o(i)$ die Position (Spalte) des ersten Nichtnullelementes der i -ten Zeile. Diese Eigenschaft wird, wie auch die Symmetrie, beim Abspeichern der (gewöhnlich sehr großen) Matrix und beim Lösen des Gleichungssystems ausgenutzt.

Prinzipiell könnte man die unbekannten Verschiebungen nun ausrechnen, indem die Steifigkeitsmatrix invertiert wird, $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$. Bei Systemen mit $n > 4$, also allen FE-Systemen ist der damit verbundene hohe Aufwand jedoch nicht akzeptabel. Man greift statt dessen auf eine Vielzahl von Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme zurück, siehe z.B. [12], [17], [18].

Prinzipiell unterscheidet man iterative und direkte Lösungsverfahren um ein Gleichungssystem zu lösen. Bei den direkten Verfahren wird die Matrix in Dreiecksform zerlegt und dann das System per Rückwärtseinsetzen gelöst. Bekannteste direkte Verfahren sind die Gauß-Triangularisierung ($\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$) sowie das Cholesky-Verfahren ($\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$, dabei ist \mathbf{D} eine Diagonalmatrix). Direkte Verfahren sind rechenintensiv. Die Zahl der notwendigen Rechenoperationen ist proportional der Zahl der dritten Potenz der Anzahl Unbekannter, $O(n^3)$.

Bei den iterativen Verfahren wird dagegen mit einem Vektor $\tilde{\mathbf{u}}$ getestet, ob die Lösung bereits erreicht ist und dann gegebenenfalls $\tilde{\mathbf{u}}$ nach einer Iterationsvorschrift modifiziert

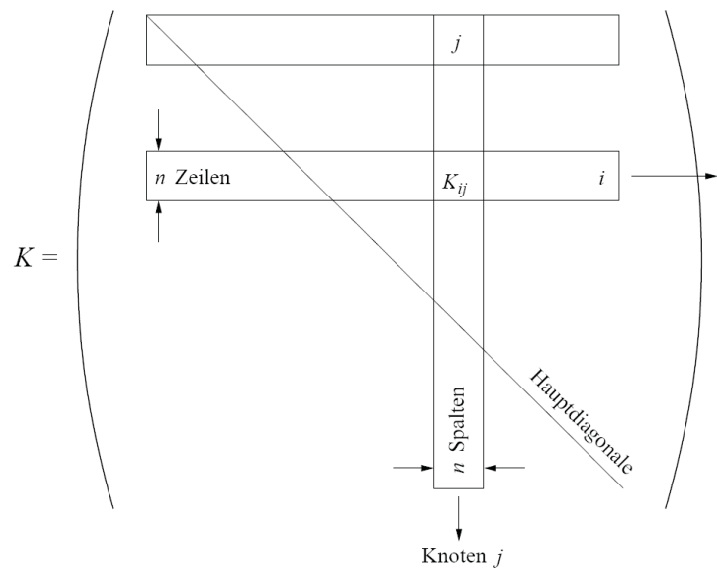


Abbildung 4.3: Struktur der Systemsteifigkeitsmatrix

bis $\tilde{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}$. Iterative Lösungsverfahren sind z.B. das Jakobi-Verfahren, Gauß-Seidel oder das konjugierte Gradientenverfahren. Für spezielle Problemklassen entwickelte iterative Verfahren sind den direkten Verfahren gewöhnlich überlegen, d.h. sie erfordern weniger Aufwand. Die Zahl der notwendigen Rechenoperationen ist proportional der Zahl der Unbekannten $O(n)$.

Direkte Verfahren sind zwar aufwendig, aber sie funktionieren für alle Problemklassen und auch für schlecht konditionierte Systeme verlässlich. In den meisten universellen FE-Programmen (also Programme für ganz unterschiedliche Problemstellungen) kommen deshalb direkte Verfahren zum Einsatz, die wiederum auf Bandmatrizenform optimiert wurden bzw. immer nur Teile der Matrix \mathbf{K} in den Arbeitsspeicher des Computers laden und daher auch für sehr große Systeme funktionieren.

4.6 Spannungsberechnung

Die Lösung des FE-Gleichungssystems sind die unbekannten Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$. Die den Ingenieur gewöhnlich interessierende Größe sind dagegen die Spannungen in der Struktur. Um die Spannungen auszurechnen, werden im finiten Element die Dehungen

ermittelt. In unserem eindimensionalen Modell heißt das

$$\begin{aligned}\sigma_e &= E_e \epsilon_e \\ \epsilon_e &= \mathbf{D} \mathbf{u} = \frac{du}{dx}\end{aligned}\tag{4.60}$$

Da die Verschiebungsfunktion per FE-Ansatz (4.41) ermittelt wurden, folgt für die Dehnungen im Stabelement

$$\begin{aligned}\epsilon_e &= \frac{d(\mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}})}{dx} = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2}{l_e} \mathbf{N}'_e \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\tag{4.61}$$

Der Verlauf der Spannungen ist damit abhängig von der Wahl der Ansatzfunktionen.

Für lineare Ansätze ist die Spannung im Element konstant

$$\sigma = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{E}{l_e} (u^{(2)} - u^{(1)}).\tag{4.62}$$

Bei quadratischem Verschiebungsansatz folgt ein linearer Verlauf der Spannung.

$$\sigma = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} 2\xi - 1 & 4\xi & 2\xi + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix}.\tag{4.63}$$

Da die Spannung aus der Ableitung der Verschiebungsfunktion berechnet wird, ist ihre Genauigkeit um eine Ordnung geringer als die der Lösungsfunktion \mathbf{u} . Wesentlich ist darüberhinaus die Feststellung, daß die Spannungsfunktion unstetig ist. An den Elementgrenzen haben wir Differenzen (das ist klar zu erkennen bei konstanten Spannungen im Element, gilt aber generell). Diese Spannungssprünge sind offensichtliche Fehler der FE-Lösung und werden in vielen kommerziellen Programmsystemen gern „weggemittelt“. Man sollte aber zur Bewertung der berechneten Lösung diese Spannungssprünge ansehen, Gebiete mit großen Differenzen in den Elementspannungen sind stark fehlerbehaftet und brauchen wahrscheinlich ein feineres FE-Netz!

5 Zwei- und dreidimensionale FE-Formulierungen

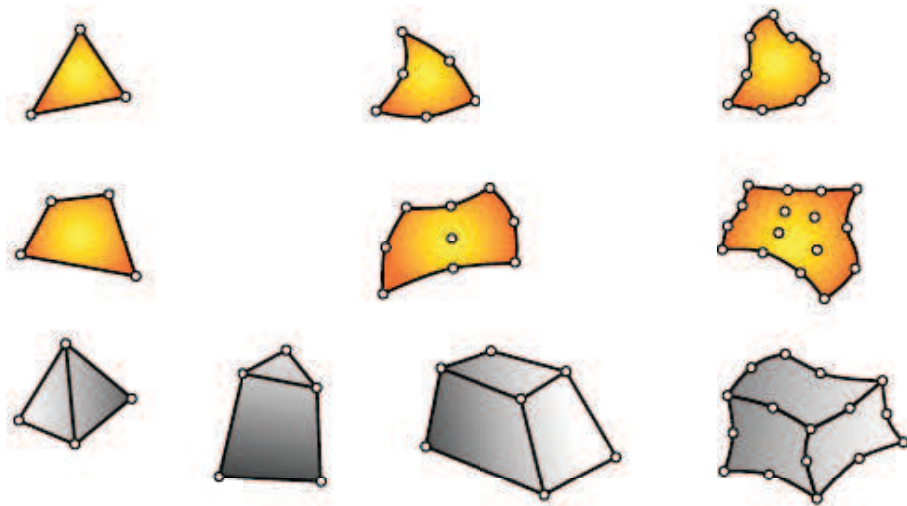


Abbildung 5.1: Ebene und räumliche finite Elemente

Gerade bei zwei- oder dreidimensionalen Strukturen zeigen sich die Vorteile der Methode der finiten Elemente besonders deutlich. Eine analytische Untersuchung der entsprechenden Probleme ist — im Gegensatz zu eindimensionalen Modellen — nur noch in Sonderfällen möglich und oft viel zu aufwendig. Dagegen lässt sich die formalisierte Vorgehensweise der FEM ohne weiteres auf mehrdimensionale Aufgaben übertragen. Dafür wird das Gebiet des Körpers in zwei- oder dreidimensionale Elemente zerlegt — also vernetzt — in denen die gesuchten Verschiebungs- und Spannungsfunktionen wieder mit Hilfe von Ansatzfunktionen dargestellt werden. Einige Elemente die dabei zum Einsatz kommen, sind in Abbildung 5.1 zusammengestellt.

Der Finite-Elemente-Ansatz für die gesuchte Feldfunktion wird — analog zum eindimen-

sionalen Fall (4.23) — mit Hilfe von Basisfunktionen N_i formuliert

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \hat{u}_i, \quad (5.1)$$

wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade des gesamten FE-Systems ist und \hat{u}_i die unbekannten Koeffizienten sind. Bei einer d -dimensionalen Struktur mit n_k Knoten (bzw. Stützstellen) sind das also $n = d \times n_k$ Freiheitsgrade.

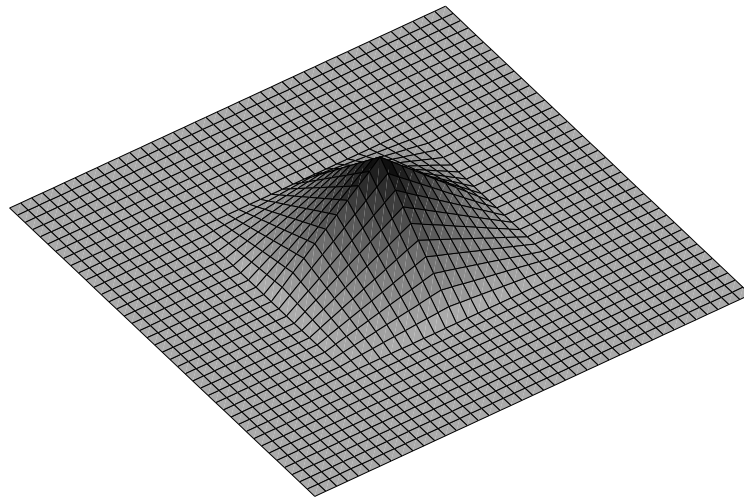


Abbildung 5.2: Ansatzfunktionen des mittigen Knotens in einem 4×4 FE-Netz.

Ein wesentliches Merkmal der Methode der finiten Elemente ist, dass die Ansatzfunktionen nur lokal von Null verschieden sind. Bei knotenbezogenen Ansatzfunktionen besteht dieser lokale Träger genau aus den zum jeweiligen Knoten i gehörenden Elementen. Abbildung 5.2 verdeutlicht das am Beispiel eines kleinen Gebietes vernetzt mit 4×4 rechteckigen Elementen mit linearen Ansatzfunktionen. Da aber das Gleichungssystem eines FE-Systems praktisch elementweise aufgebaut wird, werden wir in den nächsten Abschnitten die Berechnung der Elementsteifigkeitsbeziehungen erläutern. Aus diesen Elementsteifigkeitsbeziehungen wird anschließend das globale System zusammengebaut. Das Vorgehen dazu wurde bereits in Kapitel 4.3 dargestellt und wir schreiben vereinfachend

$$\mathbf{K} = \bigcup_{\text{Elemente}} \mathbf{K}_e \quad (5.2)$$

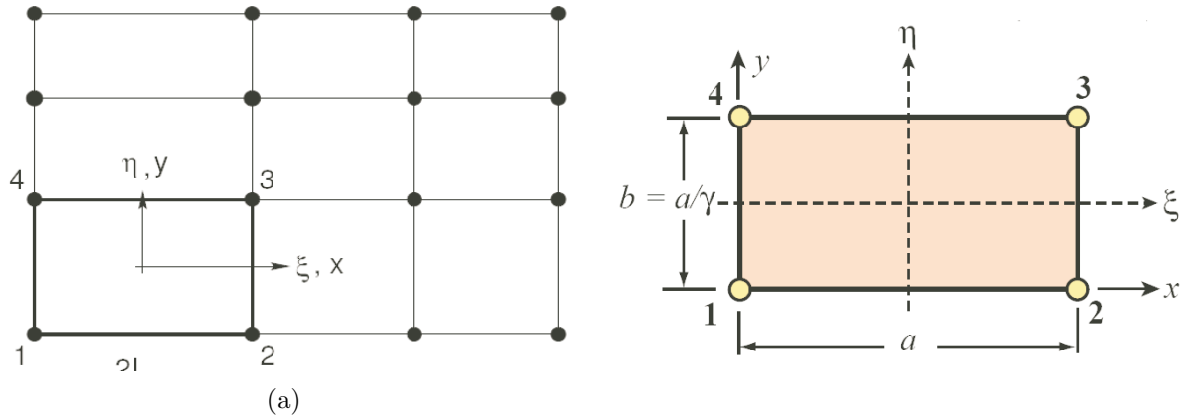


Abbildung 5.3: Regelmäßige ebene Vernetzung

$$\mathbf{u} = \bigcup_{\text{Elemente}} \mathbf{u}_e \quad (5.3)$$

sowie

$$\mathbf{f} = \bigcup_{\text{Elemente}} \mathbf{f}_e. \quad (5.4)$$

5.1 Formulierung der Ansatzfunktionen

Wie bereits im Kapitel 4 eingeführt, lautet der FE-Ansatz für ein Element in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (5.5)$$

Die in der Matrix \mathbf{N}_e zusammengefassten Ansatzfunktionen werden wieder aus Polynomen konstruiert. Zunächst definieren wir in der Ebene lokale Koordinaten ξ_1, ξ_2 oder auch ξ, η (siehe Abbildung 5.3), dreidimensionale Elemente haben die lokalen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Wir werden im folgenden ausführlich zweidimensionale Elemente beschreiben, die Erweiterung in die dritte Raumrichtung ist völlig analog.

Für die in dem Bild dargestellte Diskretisierung liegt es nahe, die Ansatzfunktionen in beide lokale Koordinatenrichtungen jeweils wie im 1D-Modell (4.26) zu wählen. Man

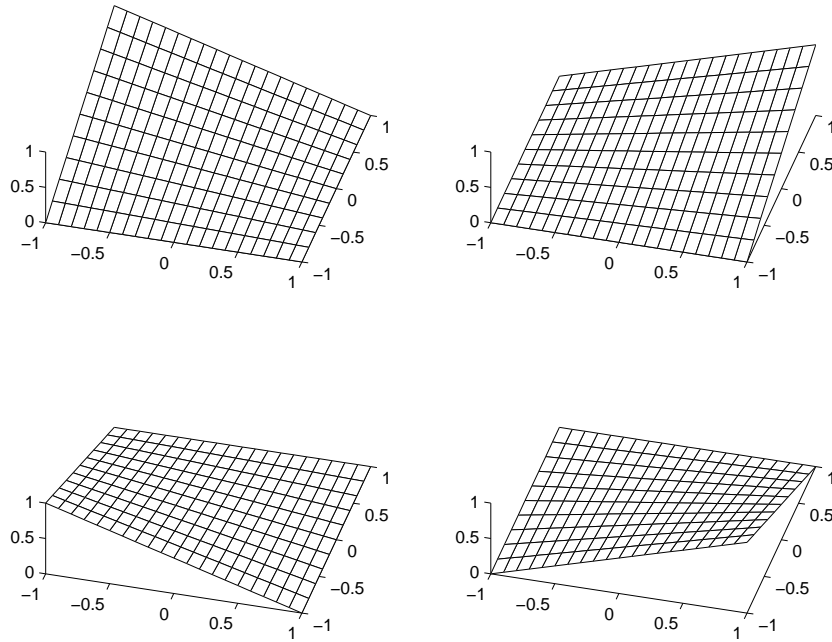


Abbildung 5.4: Bilineare Ansatzfunktionen

erhält

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (5.6)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (5.7)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (5.8)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (5.9)$$

Die Gleichungen lassen sich für alle Knoten k des Elements mit ihren Koordinaten $\{\xi_k, \eta_k\}$ zusammenfassen als

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_k \xi) \cdot (1 + \eta_k \eta). \quad (5.10)$$

Man spricht von sogenannten **bilinearen** Ansatzfunktionen. Durch die Multiplikation der linearen Ansätze in beide Raumrichtungen enthält das Verschiebungspolynom neben einem konstanten Anteil die Terme ξ, η sowie $\xi\eta$. Alle im Abschnitt 4.2 formulierten Forderungen an die Ansätze werden auch durch (5.6-5.10) erfüllt, Abbildung 5.4.

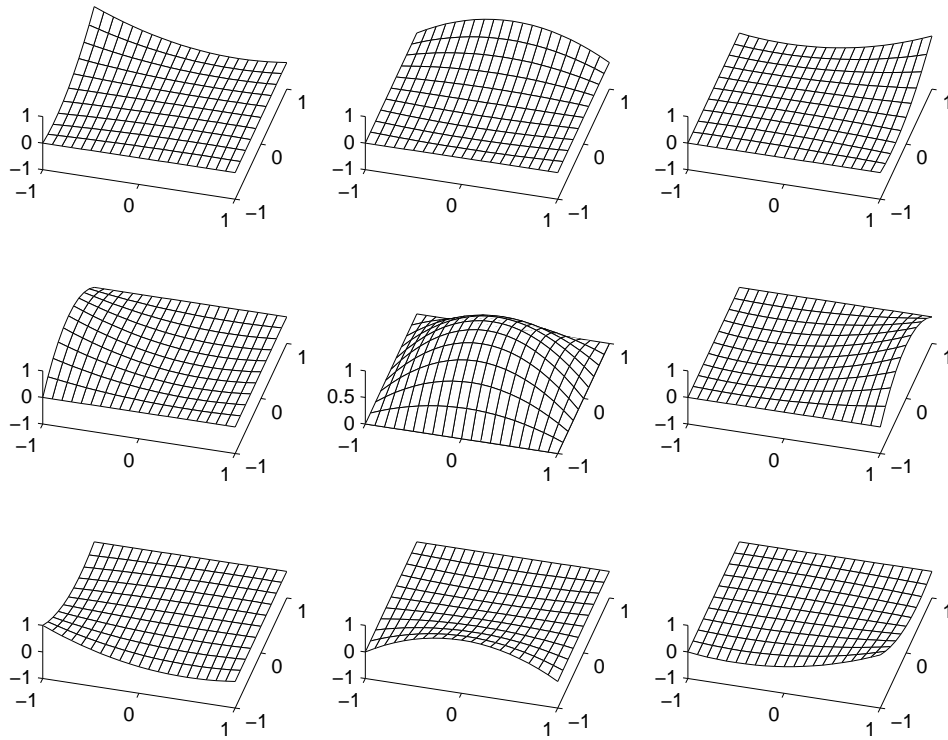


Abbildung 5.5: Biquadratische Lagrange Ansatzfunktionen

Die **trilinearen** Ansatzfunktionen eines 8-Knoten Hexaeders lauten folglich

$$N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1k}\xi_1) \cdot (1 + \xi_{2k}\xi_2) \cdot (1 + \xi_{3k}\xi_3). \quad (5.11)$$

Diese Vorgehensweise lässt sich auch für quadratische, kubische und theoretisch noch höhere Ansätze fortsetzen. Allerdings erhält man nun auch Knoten im Elementinneren. Multipliziert man beispielsweise die quadratischen Ansätze (4.27) in beide Raumrichtungen zu biquadratischen Elementen, dann erhält man ein 9-Knoten Viereckelement mit Lagrange-Ansatzfunktionen, Abbildung 5.5. Für dieses **Lagrange-Element** lauten die Funktionen an den Eckknoten

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi_k\xi) \cdot (\eta^2 + \eta_k\eta), \quad (5.12)$$

an den Seitenknoten

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi_k\xi) \cdot (1 - \eta^2) \quad (5.13)$$

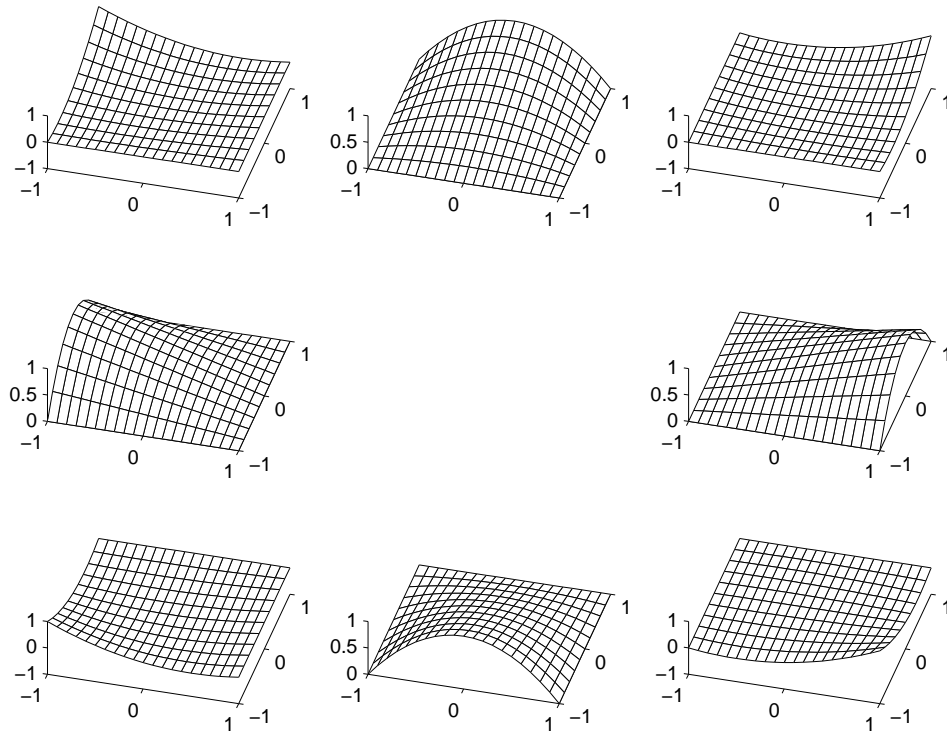


Abbildung 5.6: Biquadratische Serendipity Ansatzfunktionen

bzw.

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \cdot (\eta^2 + \eta_k \eta), \quad (5.14)$$

und im Inneren

$$N_k(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2). \quad (5.15)$$

Für ein Hexaederelement mit quadratischen Ansätzen erhält man bereits 27 Knoten. Ansätze höherer Ordnung werden — sofern sie überhaupt zum Einsatz kommen — nicht auf diese Weise erzeugt. Dafür greift man dann auf hierarchische Ansatzfunktionen zurück.

Auch für die häufig verwendeten quadratischen Ansätze ist es effektiver auf die inneren Knoten zu verzichten. Da man sie nicht einfach weglassen kann (sonst ist Bedingung 4.30 verletzt!), verändern sich auch die Funktionen der verbleibenden Knoten. Um dem Glücksgefühl Rechnung zu tragen das sich nach erfolgreicher Umrechnung der Funktionen einstellt, nennt man diese Elemente **Serendipity-Elemente**. Für ein 8-Knoten-

Viereck lauten die Ansatzfunktionen für die Elementeckknoten (Abbildung 5.6)

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_k \xi) \cdot (1 + \eta_k \eta) \cdot (\xi_k \xi + \eta_k \eta - 1) \quad (5.16)$$

und für die Seitenmittenknoten

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi) \cdot (1 + \eta_k \eta) \cdot (1 - (\xi_k \xi)^2 - (\eta_k \eta)^2). \quad (5.17)$$

Dem dreidimensionalen Hexaeder verbleiben nun bei quadratischen Ansätzen noch 20 Knoten. Im einzelnen lauten die entsprechenden Funktionen für die Elementeckknoten

$$\begin{aligned} N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_{1k} \xi_1) \cdot (1 + \xi_{2k} \xi_2) \cdot (1 + \xi_{3k} \xi_3) \\ &\quad \cdot (\xi_{1k} \xi_1 + \xi_{2k} \xi_2 + \xi_{3k} \xi_3 - 1), \end{aligned} \quad (5.18)$$

sowie für die Seitenmittenknoten

$$\begin{aligned} N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_{1k} \xi_1) \cdot (1 + \xi_{2k} \xi_2) \cdot (1 + \xi_{3k} \xi_3) \\ &\quad \cdot (1 - (\xi_1 \xi_2 \xi_3)^2 - (\xi_{1k} \xi_2 \xi_3)^2 - (\xi_{1k} \xi_2 \xi_3)^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Natürlich können auch dreieckige Elemente sowie im dreidimensionalen Tetraeder, Wedgeelemente (dachförmig), Pyramiden usw. mit knotenbezogenen Ansatzfunktionen formuliert werden. Die Formulierung dieser Ansatzfunktionen erfolgt entweder auf grotten-schlechte Art, indem man nämlich einfach zwei benachbarte Knoten zusammenfallen läßt. Das führt dann natürlich zu erheblichen Einbußen in der Genauigkeit der FE-Rechnung. In vielen FE-Programmen werden diese Elementformen auch degenerierte Elemente genannt, sie sollten nur dort eingesetzt werden, wo es für die Abbildung der Geometrie des Modell nicht anders geht, z.B. an Spitzen oder Fasen. Oder, man formuliert Dreiecks- und Tetraederelemente mittels spezieller Ansatzfunktionen, wir werden das im Abschnitt 5.4 tun. Verbunden mit entsprechenden Vernetzungsalgorithmen (Delauney-Zerlegung) liefern sie dann dieselbe Genauigkeit wie vergleichbare Netze aus Viereckelementen. Reine Dreiecks- oder Tetraedernetze werden daher insbesondere in modernen FE-Programmen eingesetzt. Obendrein haben sie den Vorteil, das man damit jede Geometrieform¹ abbilden (bzw. zumindest approximieren) kann.

Bemerkung 5.1. *Bemerkung Anforderungen an die Ansätze.* Auch wenn wir für Fachwerke und einige andere Beispiele die exakte Lösung zur (einfachen) Theorie berechnen konnten, im allgemeinen gilt: Die FEM ist ein Näherungsverfahren. Für unterschiedliche

¹Genau genommen erlauben wir die FEM sowieso nur auf Gebieten mit Lipschitz-stetigem Rand.

Ansätze erhält man unterschiedliche Elementmatrizen und folglich auch unterschiedliche Ergebnisse, die alle mehr oder weniger von der exakten analytischen Lösung abweichen. Entscheidend ist zunächst nur, daß die Resultate gegen die richtige Lösung konvergieren, d.h. bei immer weiterer Netzverfeinerung muß sich der Fehler beliebig nah an Null annähern lassen. Damit ein Ansatz überhaupt brauchbar ist, muß er gewissen Grundanforderungen genügen (vergleiche Abschnitt 4.3):

- Die einzelnen Ansatzfunktionen müssen voneinander linear unabhängig sein.
- Entsprechend der zugrundeliegenden Theorie müssen die Ansätze hinreichend oft stetig differenzierbar sein.

Um Konvergenz zu gewährleisten fordert man, dass die Ansätze die folgenden Konvergenzkriterien erfüllen. (Diese Bedingungen sind hinreichende Konvergenzbedingungen, d.h., ihre Einhaltung garantiert die Konvergenz der Lösung.)

- *Repräsentanz konstanter Verzerrungszustände.* Liegen Knotenverschiebungen vor, die einen konstanten Verzerrungszustand zur Folge haben, muß das Element diesen exakt liefern.
- *Konformität.* Die Ansatzfunktionen sind so zu wählen, daß die Verzerrungen an den Elementübergängen zwar unbestimmt, aber endlich sind. Dies entspricht der Forderung, daß bei Auftreten von Ableitungen n -ter Ordnung im Funktional die Ansatzfunktionen längs der Ränder bis zur $(n - 1)$ -ten Ableitung stetig sein müssen. Man spricht von C^0 -Kontinuität, wenn 1. Ableitungen auftreten (z.B. beim Stab und bei allen in diesem Kapitel aufgeführten Problemen). Dies bedeutet, dass die Funktionswerte selbst an den Elementübergängen stetig sind. Treten im Funktional auch 2. Ableitungen auf (z.B. beim Balken), fordert man entsprechend C^1 -Kontinuität, d.h., neben den Funktionswerten sollen auch die 1. Ableitungen an den Elementübergängen stetig sein. Elemente, die diese Konformitätsanforderungen erfüllen, heißen konforme Elemente, anderenfalls sind die Elemente nichtkonform. (Auch mit nichtkonformen Elemente können unter bestimmten Voraussetzungen konvergente FE-Lösungen berechnet werden.²⁾)
- *Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen.* Bei einer Starrkörperbewegung dürfen innerhalb des Elementes keine Verzerrungen auftreten.

²Wir werden nichtkonforme Formulierungen im Kapitel über Plattenelemente kennenlernen.

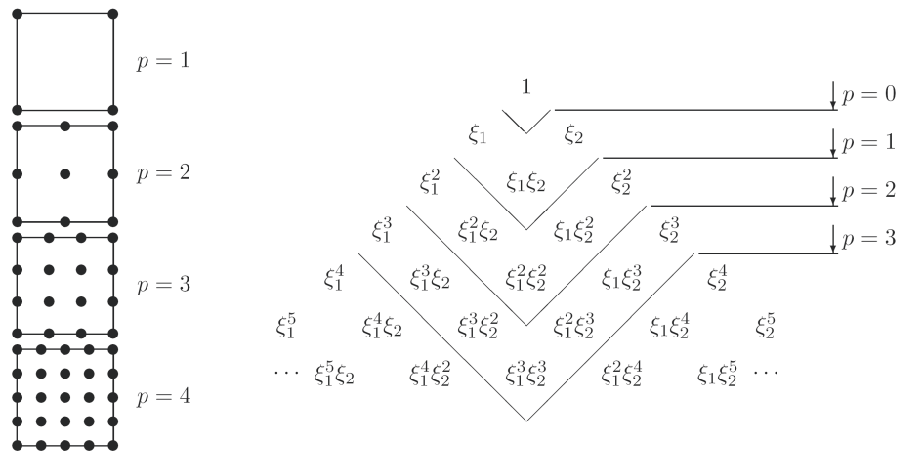


Abbildung 5.7: Pascalsches Dreieck zur Approximation in 2D-Lagrange-Elementen

Nun haben wir die passenden Ansatzfunktionen für unsere Elemente. Aus dem minimierten elastischen Gesamtpotential erhält man dann wieder die Elementsteifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_e . \quad (5.20)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e wird wieder mit

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega \quad (5.21)$$

berechnet, die Matrix \mathbf{B}_e folgt aus der Anwendung des Differentialoperators \mathbf{D} auf die Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N}_e . Der Elementlastvektor \mathbf{f}_e enthält nun Anteile aus Volumen-, Flächen-, Linien und Einzellasten und lautet

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_2} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma . \quad (5.22)$$

Aus den Elementsteifigkeitsbeziehungen wird das globale FE-System aufgebaut. Dazu sind die finiten Elemente unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen (kompatibel) miteinander zu verknüpfen und die Randbedingungen der Struktur einzuarbeiten. Es entsteht so die Systemsteifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} . \quad (5.23)$$

Wie schon bei eindimensionalen Problemen gilt auch hier: Die Eigenschaften der Symmetrie und der positiven Definitheit des Differentialoperators übertragen sich auch auf die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Aus der Systemsteifigkeitsbeziehung lassen sich nun die Koeffizienten $\hat{\mathbf{u}}$ des Verschiebungsansatzes ermitteln. Mit (5.1) sind dann die Verschiebungen des Systems bekannt.

Die Spannungen der Struktur werden aus den Verzerrungen, also den Ableitungen der Verschiebungsfunktion ermittelt. Die Spannungsrechnung erfolgt wieder im Element (siehe Abschnitt 4.6)

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{E} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_e \quad (5.24)$$

$$(5.25)$$

Bemerkung 5.2. *Eigenschaften der Elementsteifigkeitsmatrix.* Die Elementsteifigkeitsmatrix weist einige typische Eigenschaften auf, vergleiche auch Kapitel 4.3:

- Die Elementsteifigkeitsmatrix ist symmetrisch. Typischerweise ist \mathbf{K} eine Bandmatrix. (Diese Eigenschaften werden bei der Speicherung des Gleichungssystems seiner Lösung ausgenutzt.) Ihre konkrete Struktur ist abhängig von der Wahl der Basisfunktionen (also der Summe aller Ansätze) und der Numerierung der unbekannten Koeffizienten in $\hat{\mathbf{u}}$.
- Aus der positiven Definitheit der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} (eines statisch bestimmt gelagerten Systems) folgt, dass alle Einträge auf der Hauptdiagonalen positiv sein müssen. Das gilt somit auch für die Elementsteifigkeitsmatrizen aus denen sich \mathbf{K} zusammensetzt.
Diese Eigenschaft folgt auch aus folgender Überlegung: Wenn die (virtuelle) Verformungsenergie $\partial u^T k u$ für zwei Einheitsverschiebungszustände u_i und u_i berechnet wird, dann ergibt sich gerade das Element K_{ij} der Elementsteifigkeitsmatrix. Da die Arbeit eines Kraftzustandes $p_i = k u_i$ an der ihm selbst zugeordneten virtuellen Verschiebung ∂u_i stets positiv sein muß, müssen auch die Hauptdiagonalglieder K_{ii} einer Elementsteifigkeitsmatrix positiv sein.
- Die Elementsteifigkeitsmatrix ist singulär, da infolge des Fehlens geometrischer Randbedingungen Starrkörperbewegungen möglich sind. Der Rangabfall entspricht dabei genau der Anzahl s der möglichen Starrkörperbewegungen. Dies kann durch eine Eigenwertanalyse überprüft werden, bei der sich genau s Null-Eigenwerte ergeben müssen. Erhält man weniger Null-Eigenwerte, dann ist die Forderung nach Starrkörperinvarianz verletzt. Ergeben sich dagegen mehr als s Null-Eigenwerte, kommt es zu Null-Energiemoden, sogenannten *spurious modes* oder *hourglass-modes*. Das Element kann gewissen Verformungszuständen fälschlicherweise keinen

Widerstand entgegensetzen.

Die zu den Null-Eigenwerten korrespondierenden Eigenformen stellen die Starrkörperbewegungen dar, bei denen weder Volumen- noch Gestaltsänderungen auftreten.

- Die durch Einprägen eines beliebigen Verformungszustandes entstehenden Knotenkräfte müssen im Gleichgewicht stehen. Insbesondere ergeben sich für die unabhängigen Einheitsverformungszustände entsprechende Gleichgewichtsgruppen.

5.2 Das isoparametrische Konzept

Bei dem im Bild 5.3 abgebildeten FE-Netz handelt es sich um ein regelmäßiges Netz, bei dem die Achsen der globalen Koordinaten parallel zu den lokalen Koordinaten ξ und η sind. Bei der Definition des Stabelementes (Abschnitt 2.2.1) lief die lokale Koordinate von $\xi = -1$ bis $\xi = 1$, die globale jeweils von $x^{(1)}$ bis $x^{(2)} = x^{(1)} + l_e$. Die Transformation zwischen beiden Koordinatensystemen war mit Gleichung (4.24) eindeutig bestimmt.

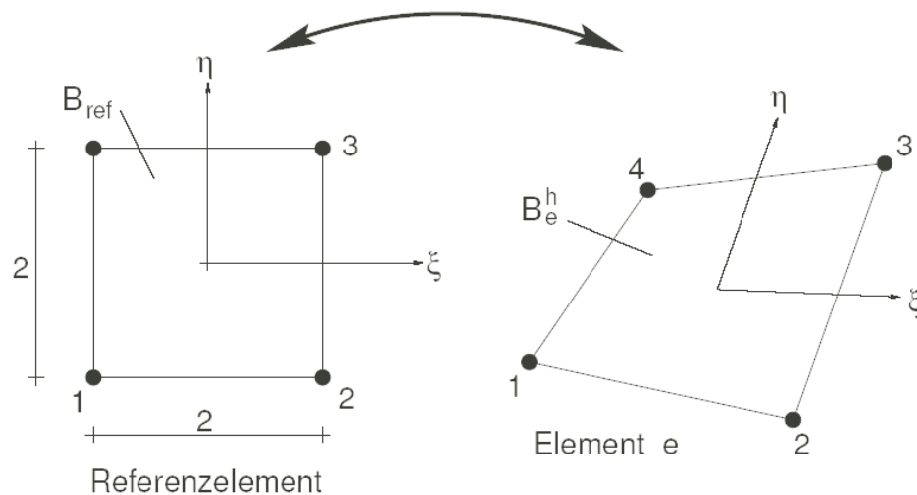


Abbildung 5.8: Abbildung der realen Geometrie mittels Referenzelement

Für beliebig verzerrte Viereckelemente lässt sich nun aber leicht ein Fall konstruieren, bei dem der Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Koordinaten keineswegs mehr offensichtlich ist. Das gilt insbesondere dann, wenn es für die Genauigkeit der Modellierung erforderlich ist, die Krümmung der Ränder darzustellen. Algebraische Transformationsvorschriften wie (4.24) lassen sich dafür nicht mehr angeben. Um die reale Geometrie

mit den finiten Elemente abzubilden gehen wir folgendermaßen vor:

Wir führen ein (fiktives) Referenzelement mit einer sehr einfachen Form ein. In Abbildung (5.8) handelt es sich um ein Quadrat mit der Kantenlänge 2. Die Geometrie dieses Referenzelementes wird auf die Geometrie des tatsächlichen Elementes mit Hilfe von Transformationsbeziehungen abgebildet. Die Abbildung

$$\phi : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{x}_e \quad (5.26)$$

definiert die Koordinaten jedes Punktes des tatsächlichen Elementes $\boldsymbol{x}_e = \{x_e, y_e\}$ mit Hilfe der lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta\}$ des entsprechenden Punktes in dem Referenzelement. Dabei fordern wir die Eineindeutigkeit der Abbildung, d. h. einem Punkt im Referenzelement ist genau ein Punkt im realen Element zugeordnet und umgekehrt (deshalb der Doppelpfeil im Bild). Damit ist es nun möglich, die auf den globalen $x_e - y_e$ -Koordinaten basierende geometrische Beschreibung eines beliebigen Elementes durch die einfachere geometrische Beschreibung des Referenzelementes mit den Koordinaten ξ, η zu ersetzen. Man macht dafür ähnlich wie bei der Verschiebungsfunktion den Ansatz

$$\boldsymbol{x}_e = \mathbf{N}_e^*(\boldsymbol{\xi}) \hat{\boldsymbol{x}}_e \quad (5.27)$$

wobei in der Matrix \mathbf{N}_e^* nun Ansatzfunktionen für die Geometrie zusammengefasst sind, $\hat{\boldsymbol{x}}_e$ enthält die Geometriedaten der Stützstellen. In der Regel verwenden wir für die Geometrie dieselben Ansatzfunktionen wie für die Verschiebungen und der Vektor $\hat{\boldsymbol{x}}_e$ enthält die Koordinaten der Knoten. Man spricht dann von einer sogenannten **isoparametrischen Abbildung**. Die Anzahl der Geometrieknoten entspricht der Anzahl der Verschiebungsknoten. Wird die Geometrie ungenauer als die Verschiebungen approximiert (indem z.B. bei quadratischen Elementen nur die Eckknoten im Ansatz (5.27) auftauchen), spricht man von einer **subparametrischen** Abbildung. Eine solche Approximation ist beispielsweise bei hierarchischen Elementansätzen und bei Dreieckselementen (siehe unten) sinnvoll. In dem umgekehrten Fall liegt eine **superparametrische** Abbildung vor.

Wir werden uns im weiteren hauptsächlich mit Elementformulierungen beschäftigen, die auf isoparametrischen Abbildungen basieren, solche Elemente werden als **isoparametrische Elemente** bezeichnet. Man kann sie selbstverständlich mit allen knotenbezogenen Verschiebungsansätzen formulieren. Beispielsweise wird bei bilinearen Elementen eine Gerade im tatsächlichen Element durch eine Gerade im Referenzelement dargestellt, bei quadratischen Ansätzen lässt sich eine Parabel (z.B. ein Kreisbogen) exakt erfassen, siehe Abbildung 5.9. Wesentlich für die Genauigkeit der Approximation ist, das Seitenmittenknoten wirklich mittig auf dem Rand angeordnet werden, gleiches gilt ggf. für Knoten im Inneren der Elemente.

Die Transformationsbeziehung zwischen globalen Koordinaten \boldsymbol{x} und lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ ist nun im allgemeinen nichtlinear. Die für die Berechnung der Matrix \mathbf{B}_e nötigen

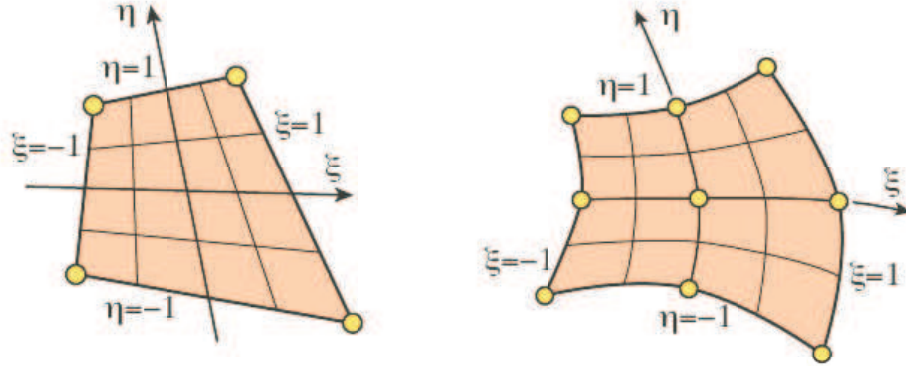


Abbildung 5.9: Geometrieapproximation mit linearen und quadratischen Ansätzen.

Ableitungen der Ansatzfunktionen lauten

$$\mathbf{B}_e = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\mathbf{x}}. \quad (5.28)$$

Der erste Term der Gleichung lässt sich mit (5.27) unmittelbar ausrechnen, der zweite erfordert etwas mehr Überlegung, er enthält Ableitungen eines krummlinigen Koordinatensystems nach kartesischen Koordinaten. Schauen wir uns zunächst die inverse Relation im ebenen Fall an:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \xi} = \frac{\partial \cdot}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \eta} = \frac{\partial \cdot}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.30)$$

bzw. gleich bedeutend in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Die Matrix in (5.31) bezeichnet man als Jacobi-Matrix. Allgemein ist die Jacobi-Matrix³ (auch Funktionalmatrix genannt) die $m \times n$ -Matrix-Darstellung sämtlicher erster partieller Ableitungen einer differenzierbaren Funktion f . Für $n = m = 3$ ist sie definiert als

$$J = \frac{\partial f}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y & \partial f_1 / \partial z \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y & \partial f_2 / \partial z \\ \partial f_3 / \partial x & \partial f_3 / \partial y & \partial f_3 / \partial z \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

³nach Carl Gustav Jacob Jacobi

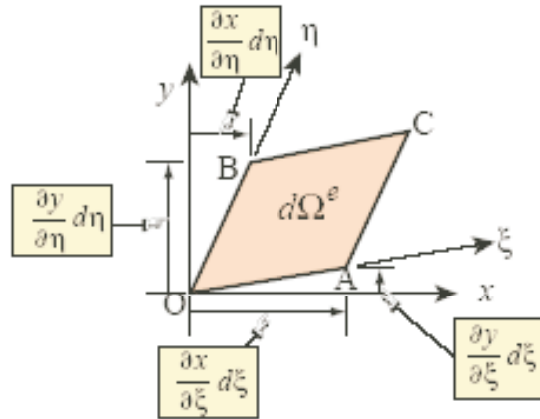


Abbildung 5.10: Geometrische Interpretation der Jacobi-Matrix (nach [24])

Folglich steht in (5.31) also die transponierte der Jacobi-Matrix. In der FEM-Literatur wird oft diese Transponierte als Jacobi-Matrix eingeführt. Für die Koordinatenfunktionen lässt sie sich mit Ansatz (5.27) leicht ausrechnen. Im dreidimensionalen folgt

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

oder

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.34)$$

Nachdem man Komponenten der Jacobi-Matrix berechnet hat, kann der Ausdruck invertiert werden und man erhält den gesuchten Term zur Ableitung der Ansatzfunktionen nach den globalen Koordinaten.

$$\mathbf{B}_e = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{N}_e}{d\boldsymbol{\xi}} \mathbf{J}^{-T}. \quad (5.35)$$

Zum Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix und der Lastvektoren muß über das Elementgebiet integriert werden. Dafür wird die Integration über das reale Elementgebiet Ω_e ersetzt durch Integration über das Referenzelement multipliziert mit dem realen Volumen pro Referenzvolumen. Bei dieser Integraltransformation spielt die Determinante der

Jacobi-Matrix⁴ (auch Funktionaldeterminante genannt) eine wichtige Rolle.

$$\int_{\Omega_e} \cdots dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5.36)$$

Eine geometrische Interpretation dieser Transformationsbeziehung bietet Abbildung 5.10. Die Determinante der Jacobi-Matrix ist ein Maß für das Volumen des Elementes und muß immer positiv sein (was die Eineindeutigkeit der Abbildung garantiert). Zulässige und unzulässige Geometrieabbildungen mit einem bilinearen Element zeigt Abbildung 5.11. Bei negativer Jacobideterminante ist die Orientierung umkehrt, was im Sinne der Geometrieapproximation offensichtlich nicht zulässig ist. In Konsequenz hätte die Element- und Systemsteifigkeitsmatrix negative Einträge auf der Hauptdiagonalen.

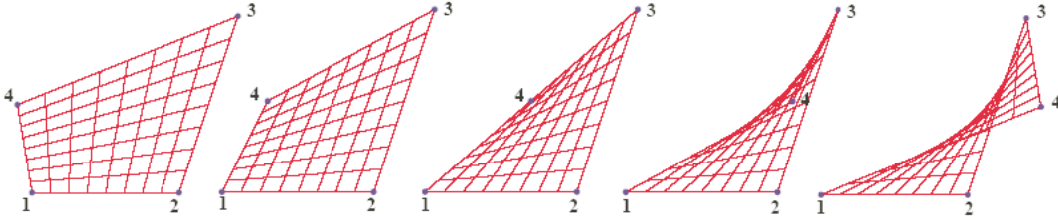


Abbildung 5.11: Geometrieabbildungen mit bilinearem Element. Links sind zulässige Elementverzerrungen skizziert, die mittlere Abbildung ist grenzwertig, bei den rechten Elementen würde man eine negative Jacobideterminante berechnen.

5.3 Numerische Integration der Elementsteifigkeitsbeziehungen

Zum Aufbau der Elementsteifigkeitsbeziehungen ist eine Integration über das Elementgebiet bzw. den Elementrand erforderlich, vgl. (5.20)–(5.22). Wegen der Abbildung der

⁴Betrachte einen Punkt und sein benachbartes Volumen aufgespannt durch Vektoren in 3 Richtungen:

$$\begin{aligned} dV_{\text{real}} &= (d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}) \cdot d\mathbf{x}^{(3)} = (J_{1i} d\xi_i^{(1)} \times J_{2i} d\xi_i^{(2)}) \cdot J_{3i} d\xi_i^{(3)} \\ &= \det \mathbf{J} (d\xi^{(1)} \times d\xi^{(2)}) \cdot d\xi^{(3)} = \det \mathbf{J} dV_{\text{Ref}} \Rightarrow \det \mathbf{J} = dV_{\text{real}}/dV_{\text{Ref}} \end{aligned}$$

realen Geometrie kann man diese Integrale nicht geschlossen lösen, d.h. man kann keine allgemeine Stammfunktion angeben. Statt dessen muss die Integration numerisch durchgeführt werden. Im einfachsten Fall unterteilt man dazu die gesuchte Fläche in senkrechte Streifen und nähert jede dieser Teilflächen durch einfache geometrische Figuren (z.B. Trapez) an. Die Summe über diese Teilflächen ergibt eine Näherung des Integrals (z.B. Trapezregel).

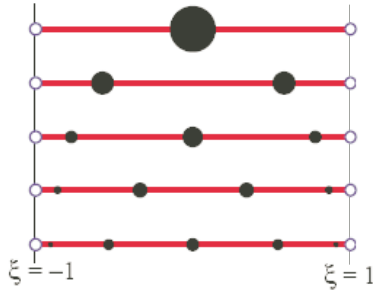


Abbildung 5.12: Gaußpunkte.

In der FEM wird zur numerischen Integration die Gauß-Legendre Integration verwendet. Sie wird oft auch einfach als Gauß-Quadratur bezeichnet,

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^{n_G} f(\xi_j) w_j, \quad (5.37)$$

d. h. die Funktion $f(x)$ wird auf dem Intervall $[-1, 1]$ unter Benutzung von Stützstellen ξ_i und Gewichten w_i näherungsweise integriert. Die Stützstellen entsprechen den Nullstellen der (orthogonalen) Legendre-Polynomen erster Art. (Die Erweiterung auf andere Intervalle erfolgt durch Variablentransformation.) Die Gauß-Quadratur in-

tegriert mit n_G Stützstellen Polynome bis zum Grade $2n_G - 1$ exakt und liefert damit im Vergleich zu anderen Verfahren bei gleicher Integrationspunktzahl die höchste Genauigkeit. Ihre Anwendung setzt voraus, dass der Integrand an beliebigen Stellen des Integrationsgebietes eindeutig berechenbar ist.

Die Lage der Gaußpunkte im Bereich $[-1, 1]$ illustriert Abbildung 5.12 und Tabelle 5.1. Stützstellen und Gewichte der Gauß-Legendre Integration sind nicht äquidistant aber stets symmetrisch. Bis zu $n_G = 5$ sind die Stützstellen und Gewichte geschlossen darstellbar, ab der sechsten Formel nicht mehr. Für mehrdimensionale Elemente ist in jede Raumrichtung mit Ansatz (5.37) zu verfahren, wobei man gewöhnlich in allen Raumrichtungen die gleiche Anzahl Integrationsstützstellen verwendet.

In die Integranden der Steifigkeitsmatrix (5.21) gehen die Quadrate der 1. Ableitungen der Ansatzfunktionen ein. Bei ebenen und räumlichen Elementen der Ansatzordnung p sind somit maximal Funktionen der Ordnung $2p$ zu integrieren. Dafür sind (bei rechteckigen Elementformen) $n_G = p + 1$ Gaußpunkte in jeder lokalen Koordinatenrichtung ausreichend. Insbesondere heißt das, für die exakte Integration eines bilinearen Elementes sind 2×2 Gaußpunkte notwendig. Für Anwendungen mit krummlinig berandeten oder stark verzerrten Elementen⁵ ist die Integrationspunktzahl ggf. um weitere Gauß-

⁵stark distortiert sind beispielweise Elemente, in denen Winkel unter 30° auftreten

	ξ_i	w_i
N=1	0	2
N=2	$-\sqrt{1/3} \approx -0.57735026919$	1
	$\sqrt{1/3} \approx 0.57735026919$	1
N=3	$\sqrt{3/5} \approx -0.774596669241$	$5/9 \approx 0.555555555556$
	0	$8/9 \approx 0.888888888889$
	$\sqrt{3/5} \approx 0.774596669241$	$5/9 \approx 0.555555555556$
N=4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
N=5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.538469310105683	0.478628670499366
	0	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.236926885056189

Tabelle 5.1: Gaußpunkte und Gewichte im Intervall $[-1, 1]$

punkte anzuheben. Die Position der Gaußpunkte in einem (trapezförmig verzerrten) Vierechselement zeigt Abbildung 5.13.

Werden weniger Gaußpunkte verwendet als notwendig, ist der Wert des Integrals offensichtlich kleiner als der exakte. Dieser Effekt wird oft genutzt um eine (aus anderen Gründen) zu hohe Steifigkeit von Elementen auszugleichen. Man spricht von **reduzierter Integration**. Allerdings läuft man hier Gefahr, dass bestimmte Verformungszustände vorliegen können die bei der Iteration übersehen werden und somit keine Beiträge zur Deformationsenergie leisten. Das Element zeigt dann Null-Energiemoden, (spurious modes, hourglass-modes) und es werden physikalisch unsinnige Verformungszustände berechnet.

5.4 Dreiecke und Tetraeder

Als lokales Koordinatensystem von Dreiecken und Tetraedern verwendet man zweckmäßigerweise sogenannte Flächenkoordinaten oder **baryzentrische Koordinaten** (Schwerpunktkoordinaten). Für ein Objekt der Dimension d bilden diese ein System aus $d + 1$

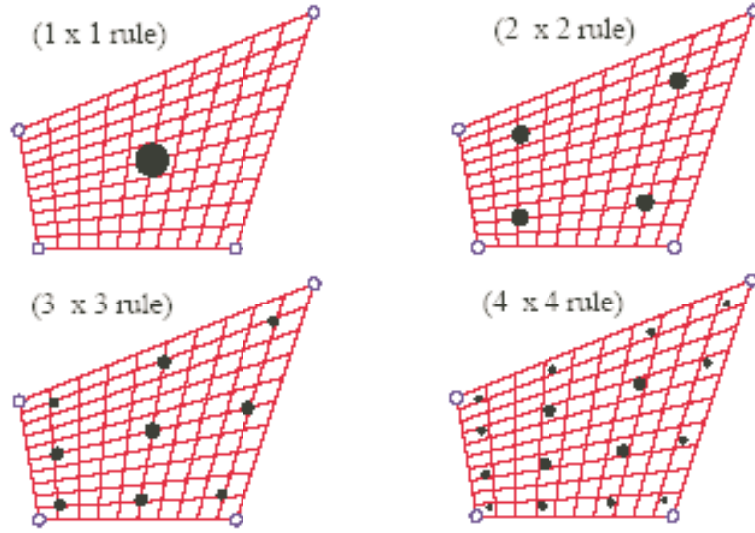


Abbildung 5.13: Stützstellen der Gaußintegration in den Elementen (nach [24])

Gleichungen.

$$\sum_{a=1}^{d+1} \zeta_a \mathbf{x}_a = \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \sum_{a=1}^{d+1} \zeta_a = 1, \quad (5.38)$$

bzw., in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}, \quad (5.39)$$

wobei $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{d+1}\}$, $\mathbf{x} = \{1, x_1, \dots, x_d\}$. Die Matrix \mathbf{M} hat die Dimension $(d+1) \times (d+1)$ und die Elemente $M_{(d+1)b} = 1$, $M_{ib} = x_{ib}$, $i = 1, \dots, d$ und $b = 1, \dots, (d+1)$. Das Elementvolumen folgt allgemein aus

$$|T| = \frac{1}{d!} |\det(\mathbf{M})|. \quad (5.40)$$

Die Flächenkoordinaten eines Punktes \mathbf{x} sind definiert durch $\zeta_i = A_i/A$, wobei die Gesamtfläche $A = \sum_{i=1}^3 A_i$ ist. Offensichtlich können die $d+1$ Koordinaten ζ_i , ($i = 1, \dots, d+1$) Werte zwischen 0 und 1 annehmen und sind einfach linear abhängig, siehe Abb. 5.14. Speziell kann man für ein Dreieck mit den Ecken (x_{1k}, x_{2k}) und $k = 1, 2, 3$ schreiben

$$\zeta_1(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_{12} & x_{13} \\ x_2 & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

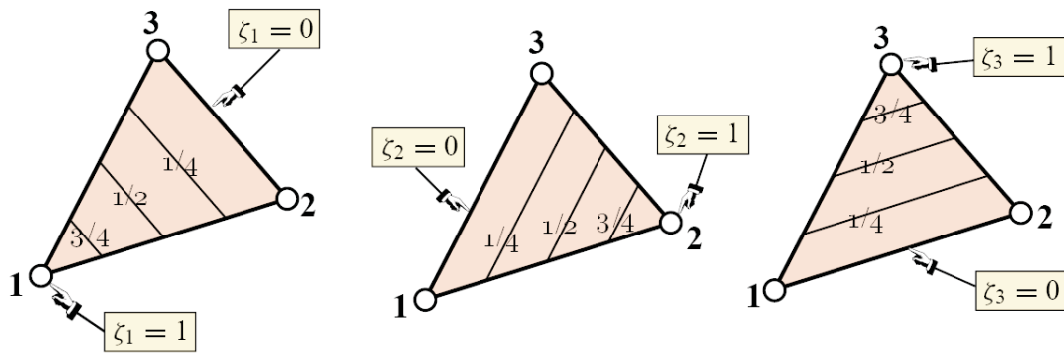


Abbildung 5.14: Illustration der baryzentrischen Koordinaten im Dreieck nach [24].

Die Gleichungen für $\zeta_2(x_1, x_2)$ und $\zeta_3(x_1, x_2)$ folgen analog. Für das Referenz- oder Einheitsdreieck erhält man aus Gleichung (5.39)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

mit $\det(\mathbf{M}) = 1$. Der Schwerpunkt des Einheitsdreiecks liegt bei $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Mit (5.40) hat folglich ein Dreieckselement die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \det(\mathbf{M}). \quad (5.43)$$

Formuliert man nun die Ansatzfunktionen eines 3-Knoten-Dreiecks (**lineares Dreieck**) so, daß sie den oben beschriebenen Bedingungen genügen, dann folgt

$$N_k = \zeta_k \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.44)$$

Die knotenbezogenen linearen Ansatzfunktionen sind also gleich den baryzentrischen Koordinaten.

Ein Dreieck mit quadratischen Ansatzfunktionen hat 6 Knoten (**quadratisches Drei-**

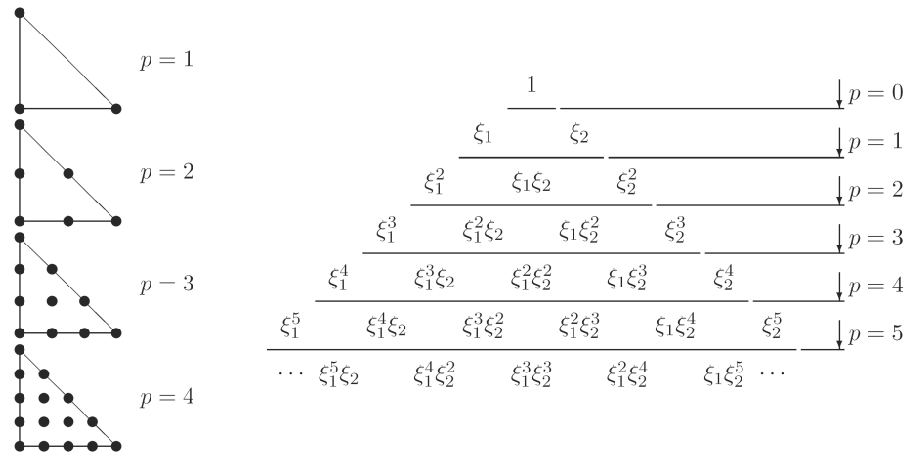


Abbildung 5.15: Pascalsches Dreieck zur Approximation in Dreieckselementen

eck), seine Ansatzfunktionen lauten

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \zeta_1 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_4 \\
 N_2 &= \zeta_2 - \frac{1}{2}N_4 - \frac{1}{2}N_5 \\
 N_3 &= \zeta_3 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 \\
 N_4 &= 4\zeta_1\zeta_2 \\
 N_5 &= 4\zeta_2\zeta_3 \\
 N_6 &= 4\zeta_3\zeta_1
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

wobei die Seitenmittenknoten 4, 5, 6 auf den Elementseiten gegenüber den Eckknoten 1, 2, 3 liegen. Die Interpolationsordnung von Dreiecken ist im Bild 5.15 illustriert. Man erkennt, dass Dreiecke vollständige Polynomansätze haben. Für ihre numerische Integration benötigt man bei linearen Dreiecken nur eine Stützstelle (im Schwerpunkt), bei quadratischen Dreiecken hat man drei Gaußpunkte. Die Umrechnung der Lage der Gaußpunkte erfolgt durch Transformation und ist bei höherer Polynomordnung nicht mehr trivial. Gaußpunkt-Koordinaten und Gewichte findet man für Dreiecke z.B. in [4] und für Tetraeder in [15].

Ein Tetraeder-Element hat das Volumen

$$V = \frac{1}{6} \det(\mathbf{M}). \tag{5.46}$$

Für Tetraeder mit Knoten an den Ecken x_{ik} , $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$, ergibt sich Gleichung (5.39) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Schwerpunkt eines Einheitstetraeders ist der Punkt $\mathbf{x} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Wie oben können die baryzentrischen Koordinaten aus Gleichung (5.39) berechnet werden. Die Ansatzfunktionen eines 4-Knoten Tetraeder-Elementes mit Polynomordnung $p = 1$ (**linearer Tetraeder**) fallen mit den baryzentrischen Koordinaten zusammen.

$$N_k = \zeta_k \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (5.48)$$

Die Ansatzfunktionen eines 10-Knoten Tetraeder-Elementes mit Polynomordnung $p = 2$ (**quadratischer Tetraeder**) sind

$$N_1 = \zeta_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_9 \quad (5.49)$$

$$N_2 = \zeta_2 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_{10}$$

$$N_3 = \zeta_3 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$$

$$N_4 = \zeta_4 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{2}N_9 - \frac{1}{2}N_{10}$$

$$N_5 = 4\zeta_1\zeta_2 \quad (5.50)$$

$$N_6 = 4\zeta_2\zeta_3$$

$$N_7 = 4\zeta_3\zeta_1$$

$$N_8 = 4\zeta_3\zeta_4$$

$$N_9 = 4\zeta_1\zeta_4$$

$$N_{10} = 4\zeta_2\zeta_4,$$

wobei die Knoten wie in Abbildung 5.16 nummeriert sind.

Das isoparametrische Konzept ist auf dreieckige Elementformen genauso wie im Abschnitt 5.2 anwendbar. Insbesondere berechnet sich mit (5.41) die Jacobideterminante

für lineare Dreiecke mittels

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{J} &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Die Determinante (unten) ist bekanntlich der Flächeninhalt des durch die Kantenvektoren des Dreiecks $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ und $x_3 - x_1, y_3 - y_1$ aufgespannten Parallelogramms. Die Dreiecksfläche ist nun die Hälfte davon. Den Faktor $\frac{1}{4}$ kann man dann wieder als Division durch die Fläche des Referenzdreiecks (Einheitsdreieck) verstehen.

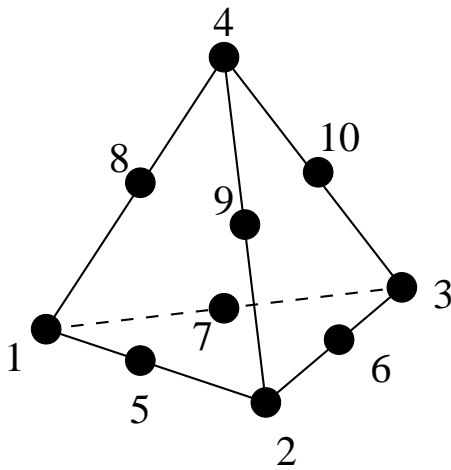


Abbildung 5.16: Tetraelement.

Es ist fast eine Glaubensangelegenheit: Mathematiker bevorzugen Dreieckselemente (sie haben vollständige Polynomansätze und sind einfacher zu implementieren). Ingenieure sind dagegen aus Erfahrung davon überzeugt, mit Vierecks- bzw. Hexaeder-Elementen die besseren Ergebnisse zu berechnen (zu den Interpolationspolynomen siehe Bild 5.7). Praktisch spricht für dreieckige Elementformen, dass moderne Netzgeneratoren mit Dreiecken optimale FE-Netze erzeugen können. Das gilt in zunehmendem Maße auch für Tetraeder. Außerdem braucht man nur einen Elementtyp um jede reale Geometrie hinreichend abbilden zu können. Darüberhinaus haben lineare Dreiecke eine elementweise konstante Jacobi-Matrix, vgl. Gleichung (5.51), was man ausnutzen kann um bei transienten und nichtlinearen Rechnungen (wo die Steifigkeitsbeziehung in jedem Schritt

aufgebaut werden muss) ihre Berechnung "auszulagern" und so effektiv Rechenleistung einzusparen. Fakt ist aber auch, dass lineare Dreieckselemente für strukturmechanische Rechnungen zu steif sind. (Zumal man sie im Gegensatz zu Viereckselementen auch nicht reduziert integrieren kann). Außerdem sind in traditionellen FE-Programmen dreieckige Elementformen meist zweite Wahl und so implementiert, dass sie wirklich schlechter approximieren. Auch höherwertige p-Elemente arbeiten besser auf Vierecken (was durch die numerischen Integration begründet ist). Am besten also, man probiert an einem Beispiel mal selbst aus zu welcher Fraktion man sich zuordnen möchte.

5.5 Axialsymmetrische Elemente

Ein wichtiges Kapitel das noch geschrieben werden muß.

6 Elastodynamische Probleme

In diesem Kapitel geht es darum, mittels dynamischer Untersuchungen im Zeitbereich das Verhalten von Bauteilen unter der Einwirkung zeitlich veränderlicher Kräfte zu betrachten. Das Ergebnis der Untersuchungen sind zeitlich veränderliche Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Struktur, die zusammengefasst als Schwingung bezeichnet werden. Um diese Größen zu erhalten, ist es notwendig die Bewegungsgleichung der Struktur zu lösen.

6.1 Grundlagen

Die Verschiebungen werden bei dynamischen Problemen naturgemäß nicht durch feste Werte sondern durch Verschiebungszeitverläufe beschrieben,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (6.1)$$

die Geschwindigkeit und Beschleunigungen erhält man durch differenzieren

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t). \quad (6.3)$$

Bei Schwingungen von Tragwerken erhält man einen fortwährenden Austausch von Formänderungsenergie und kinetischer Energie. Zur Erinnerung betrachten wir zuerst den ungedämpften **Einmassenschwinger** (System mit einem Freiheitsgrad aus einer Feder k und Masse m). Aus dem Kräftegleichgewicht von d'Alembertscher Kraft der Masse und Rückstellkraft der Feder erhält man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (6.4)$$

Diese homogene Differentialgleichung 2.Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi) = u_0 \exp(i(\omega t + \phi)) \quad (6.5)$$

mit Konstanten u_0, ϕ die aus den Anfangsbedingungen der Bewegung zu bestimmen sind. Die Kreisfrequenz ω ist definiert mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f, \quad (6.6)$$

wobei f die Frequenz ist. Freie Schwingungen sind nur mit dieser Frequenz möglich. Die Anfangsbedingungen haben keinen Einfluss auf die Kreisfrequenz, weshalb man auch von Eigenkreisfrequenz bzw. Eigenfrequenz spricht.

Mit Differentialgleichungen der Form (6.4) beschriebene Bewegungen bezeichnet man als freie **harmonische Schwingungen**. Theoretisch würde eine solche Schwingung endlos lange andauern, was aber der beobachteten Wirklichkeit widerspricht. Bei der Bewegung wird ein Teil der Energie dissipiert, so dass jede Schwingung ohne äußere Erregung allmählich immer kleiner wird, sie wird gedämpft. Die Dämpfung wird gewöhnlich als zur Geschwindigkeit proportional modelliert und man erhält die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + ku = 0, \quad (6.7)$$

dabei bezeichne d die Dämpferkonstante. Häufig wird die Dämpfung durch eine dimensionslose Konstante, das Lehrsche Dämpfungsmaß, beschrieben

$$D = \frac{d}{2m\omega} \quad (6.8)$$

und aus (6.7) wird

$$\ddot{u} + 2D\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (6.9)$$

Auch das gedämpfte System schwingt mit konstanter Eigenkreisfrequenz.

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m}(1 - D^2)} = \omega\sqrt{1 - D^2} \quad (6.10)$$

Die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_D ist also kleiner als die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω .

Im Gegensatz zu freien Schwingungen, bei denen die Bewegung nur durch die Anfangsbedingungen verursacht wird, ist eine Bewegung die durch ständige Einwirkung einer zeitlich veränderlichen Kraft erzeugt wird, eine **erzwungende Schwingung**. Von besonderer praktischer Bedeutung sind harmonisch veränderliche Erregerkräfte der Form $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, wobei Ω die Erregerfrequenz ist. Die Bewegungsgleichung für den Einmasseschwinger lautet dann

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + ku = F_0 \cos(\Omega t). \quad (6.11)$$

Nach einer gewissen Einschwingzeit schwingt der erregte Schwinger nach einem Bewegungsgesetz, das nur durch die Partikulärlösung der Gleichung (6.11) bestimmt wird. Diese heißt stationäre Lösung und hat die Form

$$u(t) = \frac{F_0}{k} ((1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2)^{-1/2} \cdot \cos(\Omega t - \phi_d) \quad (6.12)$$

mit dem Abstimmungsverhältnis

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (6.13)$$

Die Phasenverschiebung der Schwingungsfrequenz zur Erregerfrequenz berechnet sich aus $\phi_d = 2D\eta/(1-\eta^2)$. Der geklammerte Term in (6.12) wird auch als Vergrößerungsfunktion bezeichnet. Aus ihr kann man ablesen, dass eine Erregung mit einer Kreisfrequenz Ω in der Nähe der Eigenkreisfrequenz ω zu hohen Amplituden (Resonanz) führt.

6.2 Finite-Element-Diskretisierung

Der Impulssatz führt für bewegte Systeme auf die partielle Differentialgleichung

$$\rho_0 \mathbf{a} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{in } \Omega,$$

die wir bereits im Kapitel 3 in eine variationelle Form überführt haben. Das Ergebnis waren die bekannten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (3.38). Für die FE-Berechnung machen wir wieder den allgemeinen Ansatz für die Verschiebungen (5.1). Völlig analog setzt man für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an.

$$\mathbf{v} \approx \tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{v}_i \quad (6.14)$$

$$\mathbf{a} \approx \tilde{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{a}_i \quad (6.15)$$

Nun wollen wir die Struktur wieder in ein-, zwei- oder dreidimensionale finite Elemente zerlegen. Die elementweisen Ansätze für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen schreibt man als

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{u}}_e &= \mathbf{N}_e \dot{\hat{\mathbf{u}}}_e \\ \ddot{\mathbf{u}}_e &= \mathbf{N}_e \ddot{\hat{\mathbf{u}}}_e. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Für das Funktional (3.32) bekommt man somit den Ausdruck

$$L = \bigcup_{\text{Elemente}} L_e$$

mit

$$\begin{aligned} L_e = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \dot{\mathbf{u}}_e - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega \hat{\mathbf{u}}_e \\ & + \hat{\mathbf{u}}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_e^T \mathbf{q} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Mit den Lagrangeschen Gleichungen (3.38) angewandt auf das Funktional (6.17) oder gleichwertig, direkt durch Diskretisierung der Variationsgleichung (3.36), erhält man für jedes finite Element die Beziehung

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega}_{\mathbf{M}_e} \ddot{\mathbf{u}}_e + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega}_{\mathbf{K}_e} \hat{\mathbf{u}}_e - \underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_e^T \mathbf{q} d\Gamma \right)}_{\mathbf{f}_e} = 0. \quad (6.18)$$

Entsprechend seiner physikalischen Bedeutung wird der Integralausdruck im ersten Term der Gleichung (6.18) als Massenmatrix \mathbf{M}_e bezeichnet. Mit der Massedichte ρ_e enthält \mathbf{M}_e für ein finites Element dessen Masse verteilt auf die Knoten. Die Massenmatrix ist symmetrisch. Mit den bekannten Abkürzungen \mathbf{K}_e und \mathbf{f}_e läßt sich schreiben

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_e, \quad (6.19)$$

die nun anstelle der statischen Beziehung $\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_e$ tritt. Der Aufbau der Systemsteifigkeitsbeziehung, also hier der Systemmassenmatrix, der Systemsteifigkeitsmatrix und des (ggf. zeitabhängigen) Lastvektors, erfolgt analog der früher beschriebenen Vorgehensweise. Die Lösung der resultierenden Beziehung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (6.20)$$

erfolgt mit Zeitintegrationsverfahren, die wir im folgenden Abschnitt beschreiben. Die Dämpfung des Systems ist in (6.20) nicht enthalten. Ihre Modellierung ist diffizil, prinzipiell können aber die geschwindigkeitsproportionalen Terme mit einer Dämpfungsmatrix \mathbf{D} beschrieben werden.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (6.21)$$

Häufig wird die Dämpfungsmatrix aus gewichteten Komponenten von Masse und Steifigkeitsmatrix zusammengesetzt, man spricht auch von modaler Dämpfung. Dazu wählt man $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Die Wichtungen α , β ermittelt man z.B. mit Hilfe des Lehrschen Dämpfungsmaßes (6.8).

6.3 Eigenschwingungen

In der linearen Elastizitätstheorie ist vor allem die Berechnung von Eigenwerten, also den Eigenfrequenzen und -schwingformen des Systems, von Bedeutung. Dafür macht man den analog zu (6.5) den Lösungsansatz

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi) \quad (6.22)$$

Damit lautet das aus (6.20) abzulesende allgemeine Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (6.23)$$

Da die Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{M} symmetrisch sind, sind die Eigenwerte ω^2 reell und nicht negativ. Zur Lösung des homogenen Gleichungssystems verwendet man etablierte Lösungsverfahren der numerischen Mathematik (z.B. das Jacobi-Verfahren, das Lanczos-Verfahren oder die von-Mises-Vektoriteration, vgl.[7]). Als Ergebnis erhält man einen Vektor ω der die Eigenkreisfrequenzen enthält und eine Modalmatrix \mathbf{A} die (spaltenweise) die zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{a} enthält. Die Menge der Eigenwerte wird Spektrum genannt. Die Eigenvektoren sind nur bis auf beliebige Faktoren bestimmbar und werden üblicherweise normiert. Durch graphische Darstellung erhält man die Schwingformen der Struktur.

Abschließend sei bemerkt, dass Kontinua Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden sind. Sie weisen daher unendlich viele Eigenfrequenzen auf, nur durch die Diskretisierung ist die Zahl der berechenbaren Eigenfrequenzen auf die Anzahl der Freiheitsgrade begrenzt! Von praktischer Bedeutung sind aber insbesondere die kleinsten Eigenwerte und die entsprechenden ersten Eigenschwingformen. Diese Größen bekommt man offensichtlich direkt aus der Lösung des homogenen Gleichungssystems (6.23). Für die Berechnung von (erzwungenen) Bauteilschwingungen muss dagegen der Verschiebungs-Zeit-Verlauf (6.1) berechnet werden. Dafür gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Man kann zum einen den zeitlichen Verlauf der Systemantwort durch direkte (numerische) Integration bestimmen. Man spricht von einer Behandlung im Zeitbereich. Die zweite Möglichkeit, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, wäre die algebraisierte Behandlung im Frequenzbereich.

6.4 Zeitdiskretisierung

Werden die Bewegungsgleichungen (6.20) bzw. (6.21) über einen Zeitraum t_{\max} numerisch berechnet, so spricht man von einer Zeitintegration. Dabei wird nicht versucht, die

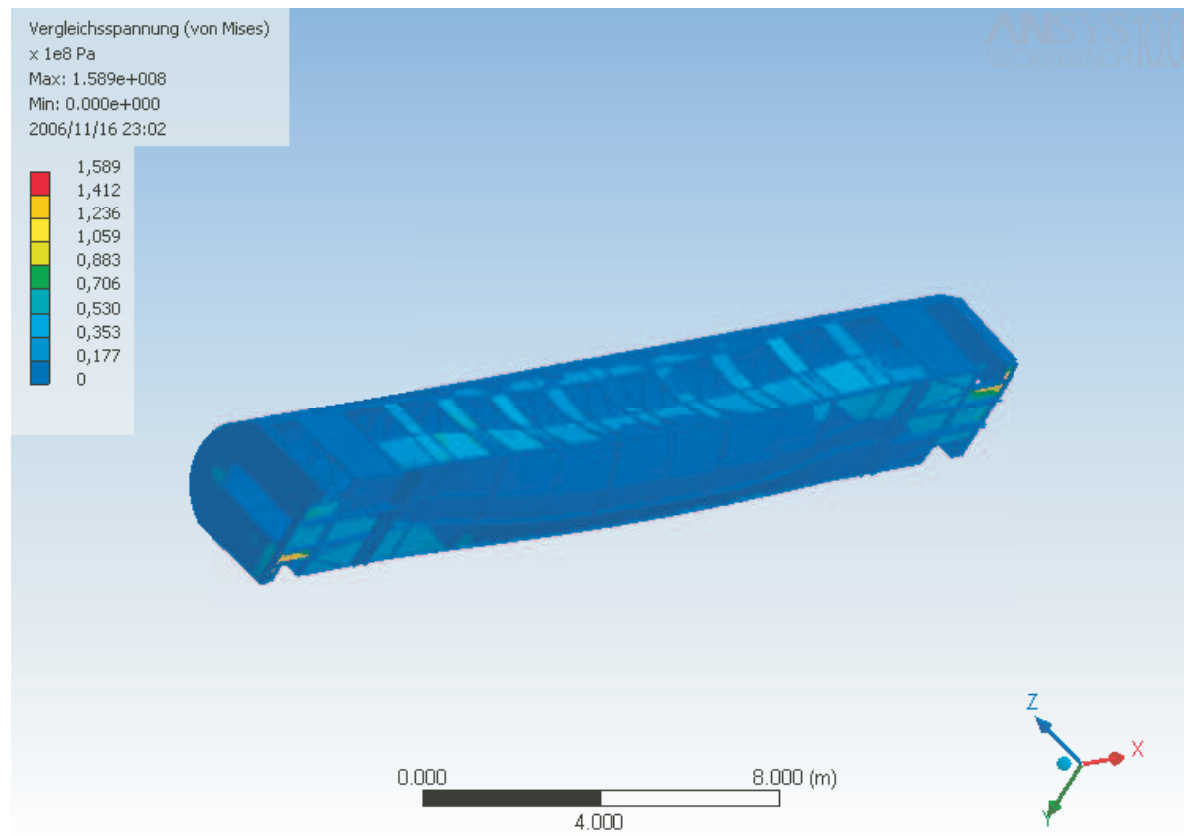


Abbildung 6.1: FE-Berechnung der Schwingungen eines Eisenbahnwagens, [20]

Gleichung für jede Zeit t zu erfüllen, sondern nur in diskreten Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Man spricht daher auch von Zeitdiskretisierungsverfahren. Im folgenden nehmen wir an, dass die notwendigen Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_0 bekannt sind und die Lösung von (6.20) bzw. (6.21) in der Zeitspanne $[t_0, t_{\max}]$ gesucht ist; t_{\max} wird dazu in (nicht notwendigerweise gleiche) Zeitintervalle Δt unterteilt. Man ermittelt mit dem gewählten Integrationsschema Näherungslösungen zu den Zeiten $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Die Genauigkeit der Lösung hängt prinzipiell von der Wahl des Zeitschrittes Δt ab. Eine Zeitintegrationsmethode ist unbedingt stabil, falls die Lösung bei beliebigen Anfangsbedingungen für einen beliebigen Zeitschritt (also auch bei großem Δt), nicht über alle Grenzen wächst. Dagegen ist eine Methode bedingt stabil, wenn diese Aussage nur für den Fall zutrifft, dass Δt kleiner oder gleich einem kritischen Wert Δt_{stable} ist. Dieser Wert wird gewöhnlich als Stabilitätsgrenze bezeichnet.

6.4.1 Differenzenverfahren

Das häufigste Zeitdiskretisierungsverfahren ist das zentrale Differenzenverfahren. Der Differentialquotient wird als Grenzwert des Differenzenquotienten an einem beliebigen Zeitpunkt t_n angenähert, verwendet werden Werte der Intervalle $t_{n-1} = t_n - \Delta t$ und $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Da für die Berechnung gleichzeitig die bekannten Werte mehrerer Schritte erforderlich sind, gehört das zentrale Differenzenverfahren zu den Mehrschrittverfahren. Man approximiert

$$\dot{\mathbf{u}}_n \approx \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}(-\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_{n+1}), \quad (6.24)$$

oder auch, mit der Annahme eines linearen Verschiebungsverlaufes zwischen den Zeitpunkten,

$$\dot{\mathbf{u}}_{n-1/2} \approx \frac{-\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \approx \frac{-\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{\Delta t}. \quad (6.25)$$

Der Vollständigkeit halber seien hier auch die sogenannten Rückwärts- und Vorwärtsdifferenzenquotienten angegeben.

$$\dot{\mathbf{u}}_n \approx \frac{-\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad \dot{\mathbf{u}}_n \approx \frac{-\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{\Delta t}. \quad (6.26)$$

Die 2. Ableitung ergibt sich durch Differenzenbildung aus der 1. Ableitung (6.25) als

$$\ddot{\mathbf{u}}_n \approx \frac{1}{(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}). \quad (6.27)$$

Approximation von \mathbf{u} mit dem FE-Ansatz 5.1 und Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (6.21) ergibt dann

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{D}\right)\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}_n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\right)\hat{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{D}\right)\hat{\mathbf{u}}_{n-1} \quad (6.28)$$

bzw. bei Vernachlässigung der Dämpfung,

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = (\Delta t)^2\mathbf{f}_n - (\Delta t)^2\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}_n + 2\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}_n - \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}_{n-1}. \quad (6.29)$$

Die zu berechnenden Verschiebungen des neuen Zeitpunktes sind nur auf der linken Seite der Gleichung (6.28) enthalten, während die rechte Seite nur bekannte Größen der zurückliegenden Iteration enthält. Deshalb wird die Methode auch *explizites Verfahren* genannt. Wenn man erreichen kann, dass die Massen- und gegebenenfalls die Dämpfungsmatrix zugleich Diagonalmatrizen sind, so sind die Gleichungen entkoppelt und die Lösung ist extrem vereinfacht.

Zur Sicherung der Stabilität des Verfahrens ist die explizite Vorgehensweise auf genügend kleine Zeitschritte begrenzt. Die untere Grenze für den Zeitschritt kann man aus Materialwerten und Elementgrößen des FE-Systems abschätzen. Der kritische oder auch stabile Zeitschritt ist für ein FE-Netz mit linear interpolierenden Elementen aus der Courant-Bedingung bestimmbar (siehe auch [14]),

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{stable}} = \frac{T_{\min}}{\pi} = \frac{1}{\pi f_{\max}} = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (6.30)$$

wobei T_{\min} bzw. f_{\max} die kleinste Periode bzw. höchste Eigenfrequenz des Systems sind. Diese ergeben sich unmittelbar aus der FE-Diskretisierung, je kleiner die Elemente desto größer ist die höchste Eigenfrequenz und desto kleiner ist der kritische Zeitschritt. Gewöhnlich wird diese Frequenz über die Elemente e abgeschätzt,

$$\Delta t_{\text{stable}} \leq \min_e \frac{2}{\omega_e} = \min_e \frac{l_e}{c_e}, \quad (6.31)$$

dabei ist l_e eine charakteristische Elementabmessung und c_e ist die longitudinale Wellengeschwindigkeit. Das Differenzenschema kann als ein Sonderfall des im folgenden beschriebenen Newmark-Verfahrens verstanden werden.

6.4.2 Newmark-Verfahren

Das Newmark-Verfahren verwendet zur Berechnung der Bewegungsgrößen zur Zeit t_{n+1} nur die Bewegungsgrößen des vorangegangenen Zeitschritts. Es werden zwei Parameter β und γ eingeführt, mit denen die Stabilität und die Genauigkeit des Verfahrens gesteuert werden. Man setzt an:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1 - 2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1} \right) \quad (6.32)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1} \right). \quad (6.33)$$

Für $\beta = 1/4$ und $\gamma = 1/2$ wird das Newmark-Verfahren zum Verfahren der konstanten mittleren Beschleunigung, das auch als Trapezregel bekannt ist. Dieses Verfahren ist uneingeschränkt stabil und stellt die ursprüngliche Form des Newmark-Verfahrens dar. Für $\beta = 1/6$ und $\gamma = 1/2$ entspricht das Newmark-Verfahren dem sogenannten linearen Beschleunigungsverfahren. Für $\beta = 0$ und $\gamma = 1/2$ wird aus dem Newmark-Verfahren ein explizites Verfahren und man erhält das zentrale Differenzenschema.

Wählt man die beiden Parameter $\beta \geq \gamma/2 > 1/4$, so ist das Newmarkverfahren unbedingt stabil. Anderenfalls ist es nur bedingt, also für einen entsprechend kleinen Zeitschritt stabil. Bei konstanter mittlerer Beschleunigung mit $\beta = 1/4$ und $\gamma = 1/2$ tritt

während des Zeitschritts keine Amplitudenzunahme bzw. -abnahme auf. Wählt man dagegen $\gamma > 1/2$ so tritt während der Rechnung eine künstliche Dämpfung auf und es kommt zu einer Amplitudenabnahme die proportional zu $\gamma - 1/2$ ist. Bei $\gamma < 1/2$ und $\beta > 0.25(0.5 + \gamma)^2$ ist das Verfahren nicht mehr stabil. In jedem Inkrementschritt kommt es zu einer immer höheren Amplitudenzunahme, das Verfahren divergiert.

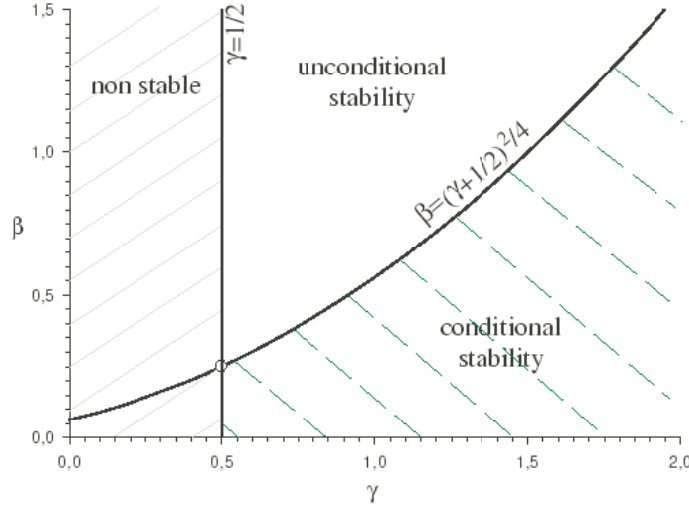


Abbildung 6.2: Effekt der Parameter im Newmark Verfahren.

Für eine implizites Verfahren, also $\beta > 0$, kann man die Gleichungen (6.32, 6.33) nach den aktuellen Beschleunigungen und Verschiebungen umstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{v}_n - \frac{1-2\beta}{2\beta}\mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\mathbf{v}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

und in die Bewegungsgleichungen (6.20) bzw. (6.21) einsetzen. Gleichung (6.20) lautet dann

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\hat{\mathbf{v}}_n - \frac{1-2\beta}{2\beta}\hat{\mathbf{a}}_n\right) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}$$

bzw. umgestellt nach den aktuellen Verschiebungen

$$\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\hat{\mathbf{u}}_n - \frac{1}{\beta\Delta t}\hat{\mathbf{v}}_n - \frac{1-2\beta}{2\beta}\hat{\mathbf{a}}_n\right). \quad (6.34)$$

Die Beziehung (6.34) stellt wieder ein lineares Gleichungssystem dar. Der wesentlichen Nachteile eines solchen impliziten Newmark-Verfahrens ist, dass auf der linken Gleichungsseite von (6.34) die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} auftritt. Diese Tatsache führt verglichen mit (6.28) zu deutlich höherem Rechenaufwand, weil hier das Gleichungssystem in jedem Zeitschritt gelöst werden muss.

Eine effektive Möglichkeit der Lösung mittels expliziten Newmark-Verfahren ist das folgende Vorgehen. Zunächst formuliert man für \mathbf{u}_{n+1} eine Schätzung (predictor)

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{pre}} = \hat{\mathbf{u}}_n + \Delta t \dot{\hat{\mathbf{u}}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\hat{\mathbf{a}}_n \quad (6.35)$$

und berechnet damit aus (6.20) die aktuellen Beschleunigung in den Knoten

$$\hat{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{pre}}). \quad (6.36)$$

Damit können nun die Gleichungen (6.37) für die aktuelle Verschiebung und Geschwindigkeit berechnet werden.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{pre}} + 2\beta\hat{\mathbf{a}}_{n+1} \\ \hat{\mathbf{v}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{v}}_n + \Delta t((1 - \gamma)\hat{\mathbf{a}}_n + \gamma\hat{\mathbf{a}}_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Dieses Vorgehen ist einfach und schnell, es erfordert bei Diagonalform der Massenmatrix (die man kurzerhand erzwingt) keine Lösung eines Gleichungssystems. Wie bereits oben beschrieben, ist die explizite Zeitintegration aber auf Zeitschritte $\Delta t \leq \Delta t_{\text{stable}}$ beschränkt.

7 Temperaturfelder und Wärmeübertragung

Bislang wurden rein mechanische Randwertprobleme betrachtet. Mit Hilfe der Finite-Element-Methode können aber auch viele weitere Aufgaben lösen. Voraussetzung ist lediglich das sie mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden, die sich in eine schwache Form überführen lassen. Als Beispiel werden hier Wärmetransportprobleme behandelt, die gesuchte Größe im Gebiet ist dann die Temperatur $T = T(x, y, z)$. Wir beschränken uns auf technisch relevante und lineare Probleme der Wärmeübertragung in Festkörpern. Außerdem sollen keine mechanischen Verschiebungen auftreten und die Körper sollen an ihrem Ort verbleiben. Man unterscheidet dann folgende Wärmetransportprobleme:

Wärmeleitung (Konduktion): Unter Wärmeleitung, auch Wärmediffusion oder Konduktion genannt, wird der Wärmefluss in einem Kontinuum (Feststoff oder ruhendes Fluid) in Folge eines Temperaturunterschiedes verstanden. Wärme fließt dabei aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik von selbst immer nur in Richtung geringerer Temperatur. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes geht keine Wärme verloren. Ein Maß für die Wärmeleitung in einem bestimmten Stoff ist die Wärmeleitfähigkeit, zusammengefasst im Tensor der Wärmeleitfähigkeit $\boldsymbol{\lambda}$. Ist die Wärmeleitfähigkeit in alle Raumrichtungen gleich schreiben wir λ .

Wärmeleitung wird durch das Fouriersche Transportgesetz beschrieben,

$$-\boldsymbol{\lambda} \nabla T = \mathbf{q} \quad (7.1)$$

wobei \mathbf{q} der Wärmeflussvektor (Wärmestromdichte) ist.

$$\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T \quad (7.2)$$

Bei stationärer Wärmeleitung ist die Temperatur auf dem Rand konstant,

$$T = \bar{T} \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (7.3)$$

Wärmeströmung (Konvektion): Konvektion entsteht zum Beispiel, wenn ein Fluid die Oberfläche eines anderen Volumens überströmt und dabei eine Temperaturangleichung erfolgt. Wir betrachten hier nur den Fall das dieses andere Volumen ein Festkörper mit statischer Grenzfläche ist. Dann handelt es sich um eine Wärmeübertragung von einer festen Oberfläche zu beispielsweise Luft, Wasser oder anderen Fluiden und die Konvektion stellt einen reinen Wärmeaustausch dar.

Während im festen Körper eine reine Wärmeleitung mit linearem Temperaturverlauf stattfindet, verläuft der Wärmetransport im umgebenen Fluid innerhalb einer thermischen Grenzschicht. Bedingt durch die lokale Strömungsgeschwindigkeit (die direkt an der Wand gleich Null sein muss), liegt in Wandnähe zunächst ebenfalls eine Wärmeleitung im Fluid vor, die kontinuierlich durch Mischungsvorgänge überlagert wird, so dass der wandnah lineare Temperaturverlauf in einen nichtlinearen übergeht. Die messtechnische Bestimmung der Grenzschichten ist schwierig bis unmöglich. Vereinfachend macht man den Newtonschen Ansatz, nach dem der Fluss durch die Potentialdifferenz und eine Kennzahl, hier die Wärmeübergangszahl α (oder die dimensionslose Nusselt-Zahl N_u), beschrieben wird.

Bei Konvektion erfolgt die Wärmeübertragung durch die Oberfläche Γ_2 ,

$$q_n = \alpha(T - T_F) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\text{Rand}} \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (7.4)$$

wobei q_n die Normalenkomponente des Wärmeflussvektors \mathbf{q} und T_F die Umgebungstemperatur (Temperatur des Fluids) ist.

Wärmestrahlung (Radiation): Wärmestrahlung ist elektromagnetische Strahlung, die ein Körper abhängig von seiner Temperatur emittiert. Mit zunehmender Temperatur wächst die Intensität der Wärmestrahlung stark an, besonderen Einfluss auf die abgestrahlte Intensität hat die Oberflächenbeschaffenheit des Körpers. Beim Auftreffen von Wärmestrahlung auf einen Körper kann die Strahlung (teilweise) durchgelassen, reflektiert und absorbiert werden, diese Effekte werden mit Koeffizienten quantifiziert.

Ein Körper emittiert über den Rand Γ_S die Energie

$$q_n = k_B e A (T_{\text{strahler}}^4 - T_{\text{empfang}}^4) \quad \text{auf } \Gamma_S, \quad (7.5)$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante $5.67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2/\text{K}^4$ und eA eine spezielle Emissionszahl mal Fläche des Strahlers ist. Die rechte Seite der Gleichung wird häufig noch mit einem geometrieabhängigen Formfaktor multipliziert. Wärmestrahlung bleibt im folgenden unberücksichtigt, für mehr Details dazu verweisen wir auf Literatur zur Thermodynamik.

7.1 Partielle Differentialgleichung

Ein Wärmeleitungsproblem heißt nichtlinear, wenn Materialkonstanten oder Randbedingungen temperaturabhängig sind, linear, wenn temperaturunabhängig. Außerdem unterscheidet man zwischen stationärer ($\dot{T} = 0$) und instationärer ($\dot{T} \neq 0$) Wärmeleitung. Instationäre lineare Wärmeleitung führt auf eine lineare parabolische Differentialgleichung (Fouriersche Differentialgleichung)

$$c_v \rho \dot{T} - \operatorname{div}(\lambda \nabla T) = r \quad (7.6)$$

wobei c_v die spezifische Wärmekapazität, ρ die Massedichte und r eine Wärmequelle pro Volumen beschreibt. Im Fall der stationären Wärmeleitung vereinfacht sich (7.6) zu einer elliptischen Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = r. \quad (7.7)$$

Das klassische Wärmetransportproblem lautet dann: Gesucht ist die Temperatur T in dem Gebiet Ω , so dass die folgende Bedingungen erfüllt werden

$$c \rho \dot{T} - \operatorname{div}(\lambda \nabla T) = r \quad \text{auf } \Omega \quad (7.8)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (7.9)$$

$$q_n = \bar{q} \quad \text{auf } \Gamma_2^A \quad (7.10)$$

$$q_n = \alpha(T - T_F) \quad \text{auf } \Gamma_2^B, \quad (7.11)$$

wobei als Anfangsbedingung das Temperaturfeld gegeben ist.

$$T(\mathbf{x}, t = t_0) = \bar{T}_0(\mathbf{x}) \quad (7.12)$$

Sowohl Randbedingung (7.10) als auch (7.11) schreiben den Wärmefluss auf dem Rand vor, daher gilt $\Gamma_2 = \Gamma_2^A \cup \Gamma_2^B$. In der Literatur zur Wärmeübertragung werden die konvektiven Bedingungen (7.11) auch gern als Randbedingungen der 3. Art bezeichnet (in Gegensatz zur 1. Art (7.9) und 2. Art (7.10)).

7.2 Prinzip der virtuellen Temperaturen

Die partielle Differentialgleichung (7.6) bzw. (7.7) ist zweiter Ordnung in der Ortsableitung. Zur Herleitung der FE-Gleichungen überführen wir sie wieder in eine schwache Formulierung, die Vorgehensweise ist gleich der im Kapitel (3). Gesucht sei die Temperatur $T \in V$ mit $V = \{T \mid T = \bar{T} \text{ auf } \Gamma_1\}$. Dazu werden zunächst die Testfunktionen

$v \equiv \delta T$ aus dem Funktionenraum $V_0 = \{v \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ eingeführt. (Zur mathematischen Definition dieser Funktionenräume siehe Abschnitt 3.4.5.) Diese Testfunktionen entsprechen den virtuellen Temperaturen und werden im folgenden mit δT bezeichnet. Mit eben diesen Funktionen werden die Wärmeleitungsgleichung (7.8) und die Randbedingungen (7.10-7.11) multipliziert. Anschließend integriert man über das Gebiet Ω und formt die entstehenden Ausdruck nach dem Integralsatz von Green-Gauß um. Führt man noch $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \nabla T$ aus (7.1) ein, erhält man schließlich die schwache Formulierung des Randwertproblems der Wärmeleitung:

$$\int_{\Omega} c \rho \delta T \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \delta T)^T \boldsymbol{\lambda} \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_2^A} \delta T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_2^B} \delta T \alpha (T - T_F) d\Gamma - \int_{\Omega} \delta T r d\Omega = \delta \mathcal{M} \quad (7.13)$$

7.3 Finite-Element-Diskretisierung

Analog zu linear-elastischen FE-Rechnungen wird auch hier für die gesuchte Funktion ein Ansatz der Form

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n N_i u_{Ti} \quad (7.14)$$

gemacht, dabei seien N_i wieder die (knotenbezogenen) Ansatzfunktionen und u_{Ti} die Temperaturen an den Knoten, letztere werden im Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ zusammengefasst. Für die Testfunktionen setzt man ebenso an

$$\delta T = \sum_{i=1}^n N_i \delta u_{Ti}. \quad (7.15)$$

Das Gebiet des Körpers werde auch hier durch (ein-, zwei- oder dreidimensionale) finite Elemente diskretisiert. In jedem Element gelten folglich die Ansätze

$$\tilde{T} = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{u}}_e \quad \delta \tilde{T} = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \delta \hat{\mathbf{u}}_e \quad (7.16)$$

$$\nabla \tilde{T} = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{u}}_e \quad \nabla \delta \tilde{T} = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) \delta \hat{\mathbf{u}}_e. \quad (7.17)$$

Diese Ansätze gehen nun wiederum in die schwache Formulierung des Wärmeleitungsproblems (7.13) ein und man erhält mit

$$\delta \mathcal{M} = \bigcup_{\text{Elemente}} \delta \mathcal{M}_e \doteq 0,$$

und

$$\delta \mathcal{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \hat{\mathbf{u}}_e + \int_{\Gamma_{e2}^A} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{e2}^B} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \alpha (\mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{u}}_e - T_F) d\Gamma - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) r d\Omega \quad (7.18)$$

das lineare Gleichungssystem für den stationären Fall. Wie in der Elastostatik bezeichnet man diese Beziehung wieder als Elementbeziehung, kurz $\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_e$, mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega + \int_{\Gamma_{e2}^B} \alpha \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad (7.19)$$

dem Vektor der Unbekannten $\hat{\mathbf{u}}_e$ und dem Lastvektor

$$\mathbf{f}_e = - \int_{\Gamma_{e2}^A} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) r d\Omega + \int_{\Gamma_{e2}^B} \alpha \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) T_F d\Gamma. \quad (7.20)$$

Der zweite Term in (7.19) sowie der letzte Term in (7.20) stammen aus den Randbedingungen zur Konvektion (7.11).

Analog zum elastostatischen Randwertproblem muss nun durch Superposition der Einzelsteifigkeitsbeziehungen aller Elemente und durch Berücksichtigung der Randbedingungen (7.9) das globale Gleichungssystem generiert werden.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$$

Die Matrix \mathbf{K} hat dann auch hier die bereits bekannten Eigenschaften: sie ist symmetrisch, positiv definit und schwach besetzt.

Die Lösung des instationären Problems erhält man, indem man die Temperaturänderung z.B. mit dem rückwärtigen Differenzenquotienten approximiert

$$\dot{T}_e = \frac{\partial T_e}{\partial t} \approx \frac{T_e(t) - T_e(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (7.21)$$

Mit Ansatz (7.16) und den Abkürzungen (7.19, 7.20) erhält man nun aus dem Prinzip der virtuellen Temperaturen

$$\delta \mathcal{M}_e = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} c\rho \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \hat{\mathbf{u}}_e(t) - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} c\rho \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \hat{\mathbf{u}}_e(t - \Delta t) + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e - \mathbf{f}_e \quad (7.22)$$

Eine weitere vereinfachende Bezeichnung sei

$$\mathbf{K}_{e,in} = \int_{\Omega} c\rho \mathbf{N}_e^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \quad (7.23)$$

und wir können die Elementsteifigkeitsbeziehung schreiben als

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}_{e,in} + \mathbf{K}_e\right) \hat{\mathbf{u}}_e(t) = \mathbf{f}_e - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}_{e,in} \hat{\mathbf{u}}_e(t - \Delta t). \quad (7.24)$$

Diese Gleichung gilt mit $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(t)$ allgemein für lineare instationäre Wärmeleitungsprobleme. Durch Zusammenbau aller Elemente erhält man wieder eine Systemsteifigkeitsbeziehung. Durch die Verwendung des rückwärtigen Differenzenquotienten zur Approximation der zeitlichen Ableitung der Temperatur und mit der Anfangsbedingung (7.12) ist nun die Lösung des Problems über ein Zeitschrittverfahren möglich.

8 Kontakt zwischen Strukturen

Kontakte und Koppelungen zwischen Strukturen sind sehr vielfältig. Sie treten beispielsweise als Stoßkontakt bei der Crash-Simulation, als Klebeverbindung in Kunststoffen, als rollender Kontakt in Antriebssystemen und Lagern oder verbunden mit großen Deformationen bei Umformprozessen auf. Dementsprechend gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren und -strategien.

Hier beschränken wir uns auf den grundlegenden Fall des quasistatischen Kontakts zwischen linear elastischen Körpern mit kleinen Verschiebungen und Verzerrungen. Typische Kontaktaufgaben, die sich unter diesen Voraussetzungen behandeln lassen, sind z.B. Schraube-Mutter-Verbindungen, Befestigungen von Zahn- oder Schwungrädern auf Wellen, (sich lösende) Klebeschichten oder Flanschverbindungen von Rohrleitungen. Prinzipiell kann man auch Risse als Kontaktaufgabe behandeln, hier „öffnet sich“ ein Körper und ein neues Randgebiet entsteht. Infolge des zunächst unbekannten Kontaktgebietes ist das entstehende Problem nun nichtlinear.

8.1 Theoretische Grundlagen

Das System in Abbildung 8.1 besteht aus zwei Körpern A und B mit dem Gebiet $\Omega = \Omega^A \cup \Omega^B$, für das die Gleichungen der linearen Elastizität (3.4) bis (3.9) gelten. Die Entfernung der Körper voneinander lässt sich mit Zwangsbedingungen der allgemeinen Form

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{in} \quad \Omega^A \cap \Omega^B \quad (8.1)$$

beschreiben. Die Körper berühren sich in der Kontaktfläche Γ^C . Größe und Form der Kontaktfläche sind abhängig von Geometrie, Materialeigenschaften, Belastung und Lagerung des Systems. Ihre Beschreibung erfolgt nun mit Hilfe eines lokalen kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$. Dabei liegen \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 in der Tangentialebene, der Normalenvektor \mathbf{n} steht senkrecht auf der Kontaktfläche und zeigt vom Körper A zum Körper B. Für die Kontaktfläche werden geometrische und statische Kontaktbedingungen formuliert.

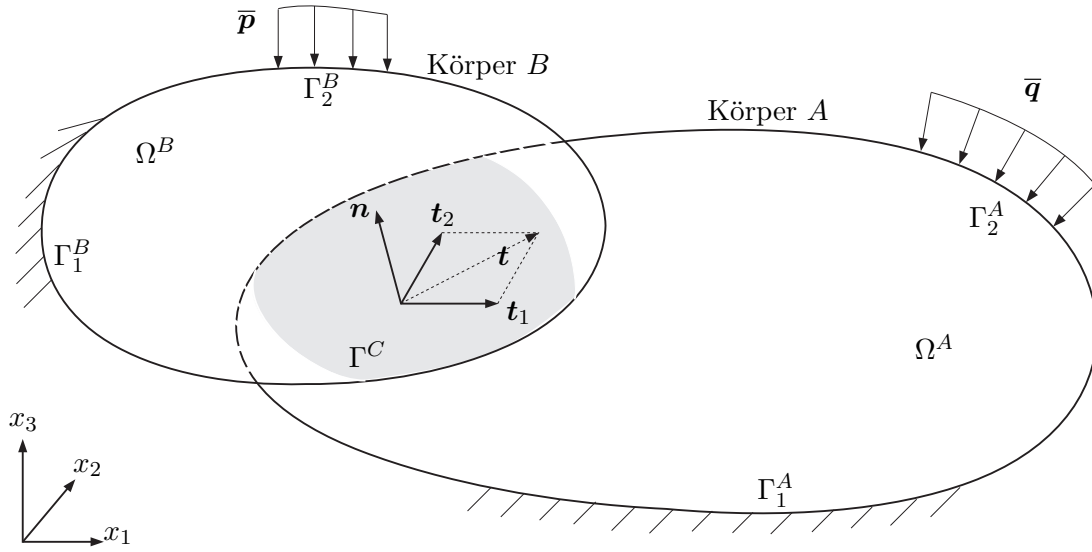


Abbildung 8.1: System aus zwei kontaktierenden Körpern

Die Körper sind miteinander in Kontakt, wenn

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(-\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B + \mathbf{d}^0) = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (8.2)$$

gilt. Die **geometrischen Kontaktbedingungen** (8.2) fordern somit Gleichheit der Normalverschiebungen der Körper A und B auf der Kontaktfläche nach Überwinden eines (positiven oder negativen) Anfangsspiels \mathbf{d}^0 . Der Vektor der relativen Verschiebungen der Körper in der Kontaktzone \mathbf{u}^C wird in eine Normalkomponente $u_n = \mathbf{n}\mathbf{u}^C$ und eine resultierende Tangentialkomponente $u_t = \mathbf{u}^C - \mathbf{n}\mathbf{u}^C$ zerlegt, analog erhält man für den Kontaktspannungsvektor \mathbf{q}^C die Komponenten q_n^C und q_t^C .

Die **statischen Kontaktbedingungen** beschreiben die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Randspannungsvektoren der kontaktierenden Körper. Da in der Kontaktfläche nur Druckspannungen übertragen werden können und die Komponenten des Kontaktspannungsvektors dem Reibgesetz genügen müssen, gilt

$$q_n^C \leq 0 \quad (8.3)$$

$$q_t^C = f(q_n^C) . \quad (8.4)$$

Wird für das Materialverhalten im Kontaktgebiet Coulombsche Reibgesetz mit dem (isotropen) Reibkoeffizienten μ verwendet, d.h., gilt

$$|q_t^C| \leq \mu |q_n^C| \quad u_t^C q_t^C \leq 0 \quad (q_t^C - \mu q_n^C) u_t^C = 0 , \quad (8.5)$$

dann erhält man als statische Kontaktbedingung für den Fall des **Haftens**

$$u_t^C = 0 \quad q_t^C - \mu q_n^C < 0 \quad \text{auf } \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (8.6)$$

und für den Fall des **Gleitens**

$$u_t^C \neq 0 \quad q_t^C - \mu q_n^C = 0 \quad \text{auf } \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B . \quad (8.7)$$

Andere Materialmodelle sind hier natürlich ebenfalls möglich, z.B. muss man für eine Klebeschicht oder für Dekohäsion bei Rißwachstum sicherlich etwas kompliziertere Beziehungen formulieren. Wir werden trotzdem vom Reibgesetz sprechen, wenn das konstitutive Gesetz im Kontaktgebiet gemeint ist.

Die Formulierung der Kontaktaufgabe als Minimumproblem mit den Kontaktbedingungen als Nebenbedingungen führt auf eine Variationsungleichung, die mit mathematischen Optimierungsmethoden gelöst werden kann. Allerdings lässt sich keine allgemeingültige Variationsungleichung für alle praktisch möglichen Kontaktaufgaben aufstellen.

Zur Entwicklung numerischer Näherungslösungen für Kontaktprobleme gehen wir wieder vom Prinzip der virtuellen Arbeit aus. Den belasteten Rand des Gesamtsystems (3.18) zerlegt man dazu in einen Teil Γ_2 mit vorgegebenen Randspannungen und den Kontaktrand Γ^C . Wegen der Nichtlinearität des Kontaktproblems erfordert die Berechnung gewöhnlich ein inkrementelles Vorgehen, bei dem die gesamte wirkende Belastung in einer Folge von Lastschritten aufgebracht wird. Das entspricht quasi einer Zeitdiskretisierung, d.h., zum Zeitpunkt t_{n+1} wird die Last \mathbf{p}_{n+1} und \mathbf{q}_{n+1} aufgebracht und die Veränderung zur Lösung zum Zeitpunkt t_n berechnet. Das Problem bleibt trotzdem ein statisches weil wir keine wirkliche Zeitabhängigkeit haben. Man spricht von quasistatischen Systemen. Unter den genannten Voraussetzungen erhält man so pro Inkrement eine linearisierte Variationsformulierung der Form

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \delta \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^T \delta \Delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^T \delta \Delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma^C} \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^{CT} \delta \Delta \mathbf{u}^C \, d\Gamma . \quad (8.8)$$

Das Integral über Γ^C lässt sich als Inkrement der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen interpretieren. Die normalen Kontaktspannungskomponenten leisten keine virtuelle Arbeit, weil für $q_n^C < 0$ keine relative Verschiebung der Körper in Normalenrichtung auftritt. Wenn die Körper aufeinander haften, verschwindet infolge $\Delta \mathbf{u}^C = 0$ der zusätzliche Arbeitsanteil. Gleiten die Körper aufeinander, bewirken die tangentialen Kontaktspannungen und -verschiebungen eine (virtuelle) Dissipationsarbeit.

Die Formulierung des Kontaktproblems mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit ist zunächst unabhängig von Materialmodell und für beliebige Reibgesetze anwendbar. Zur

Lösung der Kontaktaufgabe ist für jedes Belastungssinkrement die Funktion $\Delta \mathbf{u} \in V$ gesucht, die die Gleichung (8.8) erfüllt. Eine eindeutige Lösbarkeit des Problems kann im allgemeinen nicht mathematisch bewiesen werden, sie ergibt sich aber gewöhnlich aus der praktischen Problemstellung. Allerdings kann die Lösung infolge der Reibung von der Belastungsgeschichte (also der Wahl der Inkremente) abhängen. Die Berechnung von Kontaktproblemen umfaßt somit drei Teilschritte:

1. Kontaktgebiet Γ^C bestimmen,
2. Realisieren einer Kopplung im Kontaktgebiet, die das Reibgesetz erfüllt,
3. Verformungs- und Spannungszustand der kontaktierenden Körper berechnen.

8.2 Numerische Berechnung

Zahlreiche Arbeiten zur Berechnung von Kontaktproblemen mittels FEM belegen deren große praktische Bedeutung, einen Überblick über den aktuellen Stand der Wissenschaft findet man z.B. in [22]. Entsprechend vielfältig sind die verwendeten Algorithmen. In der praktischen Anwendung überwiegen heute Verfahren, die die Kontaktbedingungen zusätzliche Zwangsbedingungen im FE-System behandeln. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß sie relativ einfach in vorhandene FE-Software integriert werden kann. Dafür kommen sowohl die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren als auch die Penalty-Funktion-Methode zum Einsatz. Beide Methoden liefern praktisch gleichwertige Ergebnisse. Kombiniert man sie miteinander, dann erhält man eine Lagrangesche Multiplikatoren-Methode, die um Penalty-Terme erweitert wurde (augmented Lagrange formulation). Ein wesentlicher Vorteil ist hier, daß die Penalty-Zahl kleiner ist als beim reinen Penalty-Verfahren und so eine bessere Kondition der Steifigkeitsmatrix erreicht wird. Ein ähnlicher Gedanke liegt der so genannten gestörten Lagrangeschen Methode (perturbed Lagrange formulation) zugrunde.

8.2.1 FE-Diskretisierung

Kontakt zwischen zwei FE-diskretisierten Körpern kann allgemein beschrieben werden als Kontakt zwischen Kontaktknoten und zugeordneter Zielfläche (Abb. 8.2). Die Verschiebungen von Kontaktknoten und Zielfläche sind durch die geometrischen Kontaktbedingungen miteinander verknüpft. Da diese zur Berechnung oft nur den Knoten zugeordnet werden, spricht man auch von **slave**-node und **master**-segment. In klassischen

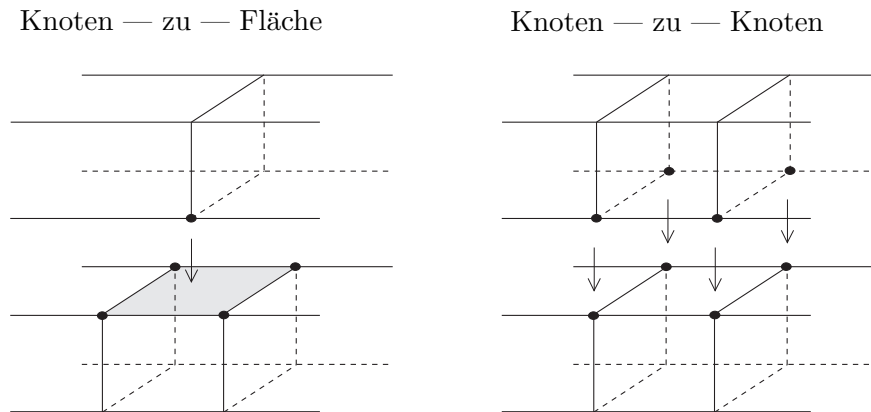


Abbildung 8.2: Kontakt zwischen FE-diskretisierten Körpern

FE-Programmen werden auf diese Weise Kontaktaufgaben berechnet. Besonders vereinfacht sich der Algorithmus, wenn einer der beiden Körper als starr angenommen werden kann. Dann ist das Mastersegment unabhängig von der Deformation und die Lage der Knoten auf dem Kontaktgebiet einfach zu ermitteln.

Allen FE-Verfahren gemeinsam ist, daß für Kontaktberechnungen überwiegend Elemente mit Polynomgrad $p=1$ (nur selten $p=2$) zum Einsatz kommen. Die Genauigkeit, mit der die Größe und die Kraftverteilung in der Kontaktzone bestimmt werden, hängt von der Netzfeinheit im potentiellen Kontaktgebiet ab.

Bei kleinen Verformungen und Gleitungen ist es ausreichend, dem Kontaktknoten statt einer Zielfläche einen Zielknoten zuzuordnen, die Kontaktbedingungen werden dann zwischen den Knotenpaaren formuliert. Ein **Kontaktelement** erhält man, wenn die Kontaktknoten als Knotenpunkte eines finiten Elementes definiert werden. Mit Kontaktelementen werden dann die Kontaktbedingungen elementweise als Eigenschaften einer fiktiven Zwischenschicht zwischen den Körpern beschrieben. Da solche Elemente besonders zur Beschreibung von Klebeschichten, für Rißausbreitung oder sich lösende Schrumpfverbindungen geeignet sind, bezeichnet man sie auch als kohäsive Elemente.

Kontaktelemente oder kohäsive Elemente sind isoparametrische Elemente. Man ordnet sie im potentiellen Kontaktgebiet der Konstruktion an, um gegebenenfalls die Kopplung der Körper zu realisieren bzw. das Lösen ihrer Verbindung zu verfolgen. Kontaktelemente übertragen in ihrer Normalenrichtung keine Zugkräfte, kohäsive Elemente können bis zu einer gewissen Grenzlast in Normalenrichtung Kräfte übertragen. Die Größe der Tangentialkräfte wird durch das Reibgesetz bzw. das konstitutive Gesetz in der Schicht

bestimmt. Nach ihrer FE-Formulierung kann man drei Kontaktelementtypen unterscheiden (Abb. 8.3):

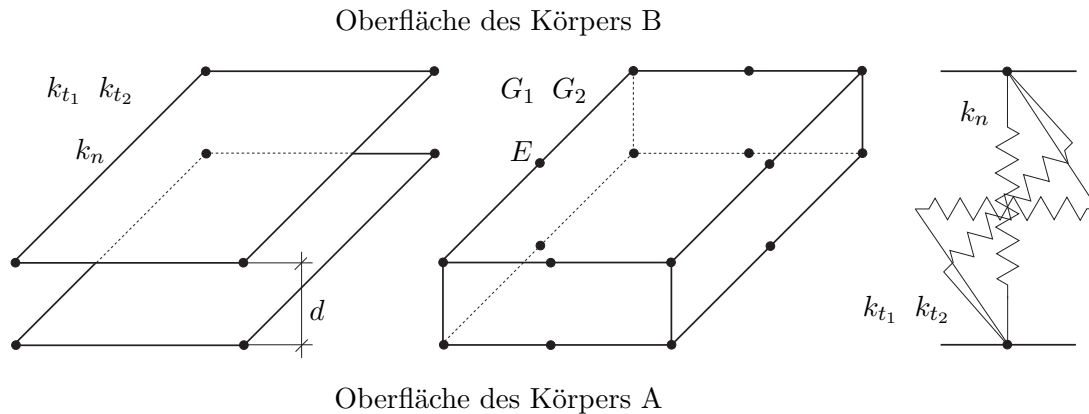


Abbildung 8.3: Flächen-, Schicht- und Federkontaktelement

Die **Flächen- oder Linienkontaktelemente** bestehen aus zwei Flächen- (bzw. im ebenen Fall Linien) mit dem Abstand d , der Dicke der Elemente. Ist die Dicke gleich Null, dann sind die Körper A und B in Kontakt, das Element ist geschlossen und nimmt an der Kraftübertragung teil. Die inneren Elementkräfte werden aus den Verschiebungen der Oberflächen sowie den normalen und tangentialen Steifigkeitskoeffizienten der Elemente berechnet. Diese Elementsteifigkeiten müssen iterativ so bestimmt werden, daß die Kontaktbedingungen erfüllt sind. Im geöffneten Fall gibt es keine Verbindung zwischen den Oberflächen der Körper A und B, die Elementsteifigkeiten verschwinden.

Die **Schichtkontaktelemente** sind typische kohäsive Elemente und sehr ähnlich den Federkontaktelementen, sie bestehen aber aus einem (fiktiven) Material, das als konstitutives Gesetz z.B. ein Reißöffnungsgesetz hat. Der Elastizitätsmodul kennzeichnet das Verhalten des Elementes in Normalenrichtung, die Schubmoduli das Verhalten in den tangentialen Richtungen. Liegt kein Kontakt vor, sind die Materialgrößen gleich Null.

Die **Federkontaktelemente** sind die einfachsten Kontaktelemente, sie entsprechen der Kopplung einzelner Knotenpaare. In den drei lokalen Richtungen werden die Knoten durch diskrete, voneinander unabhängige Federn gekoppelt. Die Federsteifigkeiten werden so bestimmt, daß die Kontaktbedingungen erfüllt sind.

Der Einsatz von Federkontaktelementen ist nur dann sinnvoll, wenn die anschließenden FE-Strukturen mit Elementen vom Polynomgrad $p=1$ vernetzt sind. Anderenfalls kann es infolge der unterschiedlichen Wichtung von Seitenmitten- und Eckknoten bei der

Kraftverteilung im Element zu numerischen Schwierigkeiten kommen. Die Flächen- und Schichtkontaktelemente sind dagegen allgemein anwendbar und geeignet. Allerdings ist der numerische Aufwand bei den Schichtkontaktelementen höher, diese Elemente werden daher dann eingesetzt, wenn zusätzliche Eigenschaften der Kontaktschicht zu berücksichtigen sind. Mit den Flächenkontaktelementen lassen sich darüber hinaus relativ einfach auch Anfangszwänge (z.B. infolge einer Schrumpferbindung) berücksichtigen.

Im folgenden werden beispielhaft die Flächen- bzw. Linienkontaktelemente kurz beschrieben.

8.2.2 Formulierung von Kontaktelementen

Die Ansatzfunktionen der Flächen- bzw. Linienkontaktelemente (im folgenden einfach als Kontaktelemente bezeichnet) sind kompatibel zur Vernetzung der anschließenden Körper, Interpolationsstützstellen sind die Elementknoten. Für die Verschiebungen im Element gilt

$$\mathbf{u}^C = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}^C = [\mathbf{N}_e \quad -\mathbf{N}_e][\hat{\mathbf{u}}^A \quad \hat{\mathbf{u}}^B]^T - \mathbf{N}_e \mathbf{d}^0. \quad (8.9)$$

Da die Verformungen voraussetzungsgemäß klein sind, wird die Geometrieapproximation auf die Elementmittelfläche bezogen.

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}^A + \hat{\mathbf{x}}^B) \quad (8.10)$$

Um die Kontaktbedingungen zu formulieren, wird hier in die Elementmittelfläche ein orthonormales Koordinatensystem gelegt. Dazu werden aus den Krümmungen der natürlichen Koordinaten die Tangentenvektoren $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}$ berechnet und aus ihrem Vektorprodukt $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}$ die Normale auf dem Flächenelement ermittelt. Den Normaleneinheitsvektor erhält man so mit

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}}{\det \mathbf{J}}, \quad \text{wobei} \quad \det \mathbf{J} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} \right| \quad (8.11)$$

und die tangentialen Koordinaten \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 mit

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \right|} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1. \quad (8.12)$$

Der Term $\det \mathbf{J}$ entspricht der Determinante der Jacobi-Matrix aus der Transformationsbeziehung (5.31). Für die inneren Kräfte im Kontaktelement gilt voraussetzungsgemäß

$$\mathbf{q}^C = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^C, \quad (8.13)$$

wobei \mathbf{K} eine Diagonalmatrix mit den Steifigkeitskoeffizienten k_{t_1} , k_{t_2} und k_n ist.

Mit den Gleichungen (8.9) und (8.13) erhält man aus dem zusätzlichen Arbeitsanteil in (8.8) durch Variation für jedes Element die Kontaktelementbeziehung

$$\mathbf{K}_e^C \mathbf{u}_e^C = \mathbf{f}_e^C \quad (8.14)$$

mit der Kontaktelementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e^C und dem Zwangsvektor im Kontaktelement \mathbf{f}_e^C .

$$\mathbf{K}_e^C = \int_{\Gamma^C} [\mathbf{N}_e - \mathbf{N}_e]^T \mathbf{K} [\mathbf{N}_e - \mathbf{N}_e] d\Gamma \quad (8.15)$$

$$\mathbf{f}_e^C = \mathbf{K}_e^C \mathbf{d}_e \quad (8.16)$$

Mit (8.14) bis (8.16) lassen sich die globale Kontaktsteifigkeit \mathbf{K}^C und der Zwangsvektor \mathbf{f}^C aufbauen. Sie entsprechen den mit der Penalty-Funktion-Methode abgeleiteten Beziehungen. Praktisch können die Elementsteifigkeitskoeffizienten in \mathbf{K} als Penalty-Zahlen betrachtet werden, die die Berücksichtigung der Kontaktbedingungen erzwingen. (Die Festlegung der Anfangssteifigkeit entspricht dem Problem der Wahl der Penalty-Zahl. Bewährt hat sich eine Anfangssteifigkeit, die um den Faktor 10^5 größer ist als die durchschnittliche Steifigkeit der Festkörper.) Der konkrete Ausdruck der Kontaktelementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e^C und des Zwangsvektor \mathbf{f}_e^C ist natürlich abhängig von der Ansatzordnung im Element und von der Dimension des Problems.

Hier sind Ansatzfunktionen für Kontaktelemente vom Polynomgrad $p=1$ und $p=2$ zusammengestellt. Natürlich ist auch die Formulierung von Kontaktelementen höherer Ansatzordnung denkbar. Da jedoch ein Kontaktelement nur den Zustand geöffnet oder geschlossen haben kann (nicht teilweise geöffnet), ist der Einsatz höherwertiger Elemente nicht gewinnbringend. Eine verbesserte Berechnungsgenauigkeit ist in Kontaktgebieten nur durch h-Verfeinerung, also Anordnung von möglichst vielen Kontaktelementen zu erreichen.

Linienkontaktelement vom Polynomgrad $p=1$ für ebene und rotationssymmetrische Kontaktprobleme Anzahl der Knoten: 4

$$N_K(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_K \xi) \quad (8.17)$$

Linienkontaktelement vom Polynomgrad $p=2$ für ebene und rotationssymmetrische Kontaktprobleme Anzahl der Knoten: 6

Elementeckknoten:

$$N_K(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi_K \xi) \quad (8.18)$$

Seitenmittenknoten:

$$N_K(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (8.19)$$

Flächenkontaktelement vom Polynomgrad $p=1$ für räumliche Kontaktprobleme Anzahl der Knoten: 8

$$N_K(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_{1K}\xi_1) \cdot (1 + \xi_{2K}\xi_2) \quad (8.20)$$

Flächenkontaktelement vom Polynomgrad $p=2$ für räumliche Kontaktprobleme Anzahl der Knoten: 16

Elementeckknoten:

$$N_K(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_{1K}\xi_1) \cdot (1 + \xi_{2K}\xi_2) \cdot (\xi_{1K}\xi_1 + \xi_{2K}\xi_2 - 1) \quad (8.21)$$

Seitenmittenknoten:

$$N_K(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 + \xi_{1K}\xi_1) \cdot (1 + \xi_{2K}\xi_2) \cdot ((\xi_{1K}\xi_1)^2 + (\xi_{2K}\xi_2)^2 - 1) \quad (8.22)$$

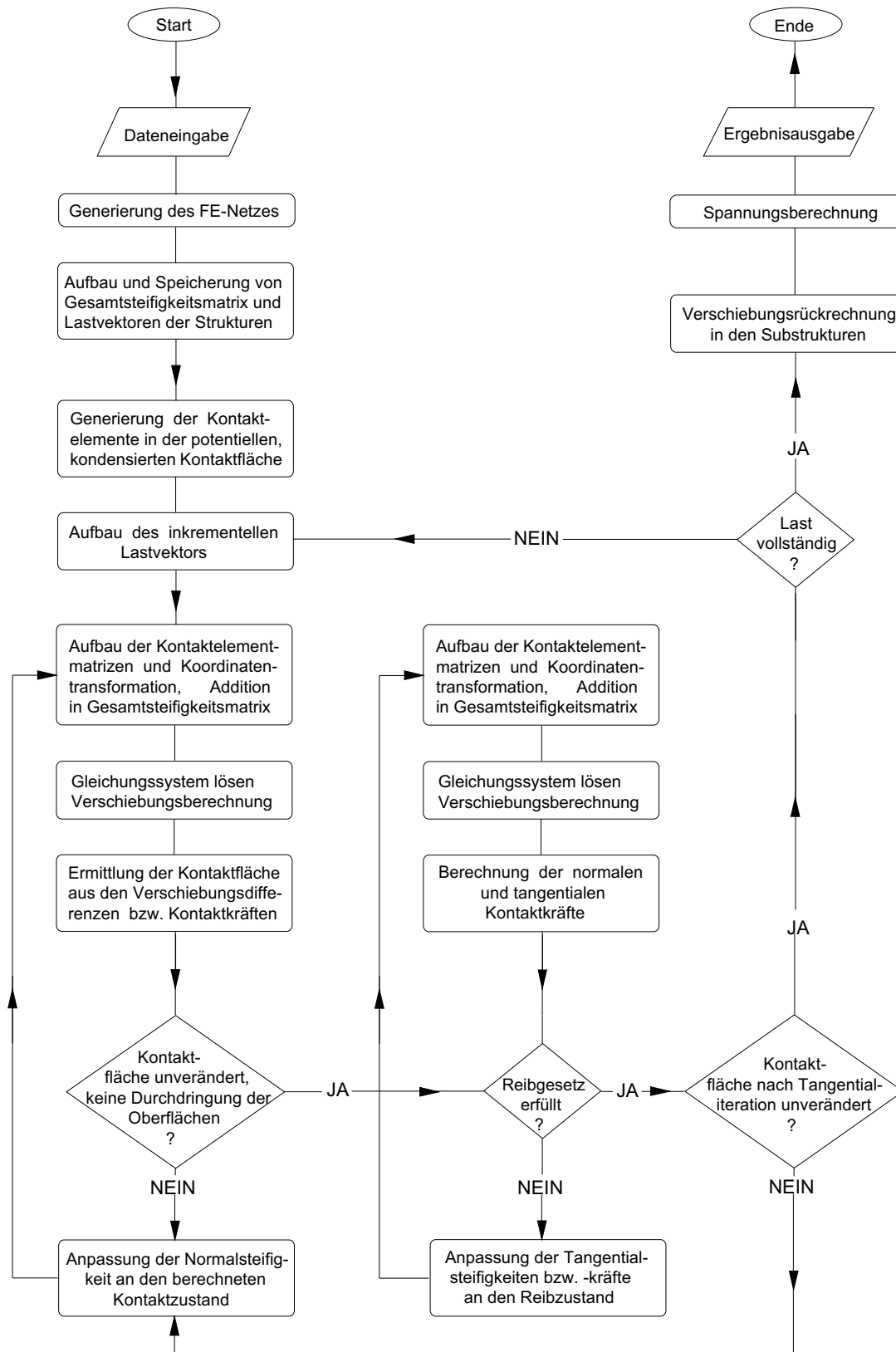
8.2.3 Lösungsalgorithmus

Sowohl die Bestimmung der Kontaktzone als auch die Erfüllung des Reibgesetzes erfolgen in jedem Lastschritt iterativ.

Bemerkung 8.1. *Substrukturzerlegung.* Durch Nutzung einer sogenannten Substrukturtechnik läßt sich die Kontaktiteration auf wenige Freiheitsgrade im FE-Gesamtsystem begrenzen. Dazu werden die Körper A und B vernetzt und die Knoten auf der potentiellen Kontaktfläche als externe Knoten kondensiert. Zwischen diesen Knoten werden die Kontaktelemente angeordnet. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und der Lastvektor $\Delta \mathbf{f}$ werden in einen inneren Anteil (den Festkörperteil) und einen externen Kontaktteil zerlegt. Der Festkörperteil bleibt während der Iteration unverändert, nur der — verhältnismäßig kleine — Kontaktteil wird modifiziert. Der Iterationsaufwand wird durch diese Zerlegung auf ein Minimum reduziert.

Zur numerischen Formulierung der Kontaktbedingungen werden die primären Ergebnisgrößen der FE-Rechnung, die Knotenverschiebungen und -kräfte herangezogen. Der aktuelle Abstand \mathbf{d} der Knoten eines Knotenpaares beträgt

$$\mathbf{d} = -\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B + \mathbf{d}^0. \quad (8.23)$$



Ist das Anfangsspiel $\mathbf{d}^0 \neq 0$, dann läßt sich für das Knotenpaar auch eine dimensionsunabhängige fiktive Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{-\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B}{\mathbf{d}^0} \quad (8.24)$$

berechnen. Die geometrische Kontaktbedingung für die Berührung der Körper lautet somit

$$d_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -1 . \quad (8.25)$$

Demzufolge gilt für den Kontaktzustand des Knotenpaares:

- bei $d_n > 0$ bzw. $\epsilon_n > -1$ berühren sich die Körper nicht,
- bei $d_n = 0$ bzw. $\epsilon_n = -1$ liegt Kontakt vor,
- bei $d_n < 0$ bzw. $\epsilon_n < -1$ durchdringen sich die Körper unzulässig.

Wenn an keinem Knoten Kontakt vorliegt, wird das Element geöffnet. Liegen an den Knotenpaaren unterschiedliche Kontaktzustände vor, dann wird zur Entscheidung die statische Kontaktbedingung herangezogen. Bei Berührung der Körper muß die Normalkomponente der resultierenden Schnittkraft im Element F_n eine Druckbelastung repräsentieren.

$$F_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} < 0 \quad (8.26)$$

Nach dem Coulombschen Reibgesetz haften die Oberflächen, wenn für die resultierende Tangentialkraft $F_t = \sqrt{F_{t1}^2 + F_{t2}^2}$ die Bedingung

$$F_t \leq \mu |F_n| \quad (8.27)$$

erfüllt ist. Anderenfalls gleiten die Oberflächen aufeinander, und es muß entweder durch Veränderung der Tangentialsteifigkeitskoeffizienten oder durch entsprechende Zwangskräfte eine tangentiale Verschiebung $u_t > 0$ zugelassen werden. Für die Kontaktkräfte im Element muß schließlich gelten

$$F_t - \mu |F_n| = 0 . \quad (8.28)$$

Der Algorithmus einer FE-Kontaktberechnung ist schematisch in Abbildung 8.4 dargestellt.

9 Biegung von Balken und Platten

Bislang wurden zur Berechnung dreidimensionaler Strukturen räumliche finite Elemente vorgestellt. Durch Verwendung von Platten- und Schalentheorien können unter verschiedenen Voraussetzungen auch mit flächenhaften Elementen räumliche Verschiebungs- und Spannungszustände beschrieben werden. Wir wollen hier einige Überlegungen zu den Besonderheiten derartiger FE-Rechnung zusammenfassen. Wegen der Einfachheit der Darstellung beginnen wir zunächst mit dem Balken und erweitern im Abschnitt 9.2 und 9.3 die Gleichungen dann in die zusätzliche Dimension.

9.1 Modelle der Balkenbiegung

9.1.1 Der schubstarre Balken

Grundsätzlich unterscheidet man in der linearen Theorie der Balkenbiegung schubstarre und schubweiche Modelle. Der klassische, schubstarre Balken wird in diesem Kontext auch *Bernoulli-Balken* genannt, denn es gilt hier die Bernoulli-Hypothese vom Senkrechtbleiben der Querschnitte. Sie besagt bekanntlich, dass Materialpunkte die auf einer Fläche senkrecht zur Balkenachse liegen, sich auch nach der Verformung auf einer ebenen Fläche senkrecht zur verformten Balkenachse befinden. Für die gerade Biegung um eine Hauptzentralachse des Balkens (hier sei x die Längsachse und die Durchbiegung v zeige in y -Richtung) gilt für die Normalspannung infolge Biegung σ_x und für das Biegemoment M_b

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I}y \quad (9.1)$$

$$M_b = EI\rho \quad (9.2)$$

wobei $\rho = \rho(x)$ die Krümmung und I das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts um die Achse ist, um die das Biegemoment dreht, hier also $I = I_{xx}(x)$. Mit den Annahmen der linearen Biegetheorie lässt sich die Krümmung aus der zweiten Ableitung der Durchbiegung nach der Koordinate in Balkenlängsrichtung $\rho = -v''$ ermitteln [5].

Für die Querkraft F_Q und die Linienlast q gelten die Gleichgewichtsbeziehungen

$$F_Q = M'_b \quad (9.3)$$

$$q = -F'_Q, \quad (9.4)$$

die sich nun mit (9.2) zur klassischen Differentialgleichung der Biegelinie zusammenfassen lassen.

$$EIv'''' = q \quad (9.5)$$

Diese Differentialgleichung ist von vierter Ordnung in der gesuchten Durchbiegung $v(x)$.

Zur Ableitung der FE-Gleichungen überführen wir sie wieder in die schwache Form. Mittels Multiplikation mit einer virtuellen Durchbiegung δv , Integration über das Lösungsgebiet $\Omega = l \times A$,

$$\int_{\Omega} (EIv'''' - q) \delta v \, d\Omega = 0 \quad (9.6)$$

sowie partieller Integration und Einsetzen der konstitutiven Beziehungen in die statischen Randbedingungen (für F_Q und M_b) erhalten wir die Variationsgleichung für den Schubstarren Biegebalken:

$$\int_l EIv'' \delta v'' \, dx = \int_l q \delta v \, dx + [M_b \delta v']_{\text{Rand}} + [F_Q \delta v]_{\text{Rand}}. \quad (9.7)$$

Die schwache Form für den Schubstarren Biegebalken enthält zweite Ableitungen in der gesuchten Durchbiegung $v(x)$. FE-Ansatzfunktionen für die Durchbiegungen $v(x)$ müssen somit sowohl in der Funktion selbst als auch in ihrer ersten Ableitung über das gesamte Lösungsgebiet stetig sein, man spricht von C^1 -stetigen Funktionen. Polynome die diese Anforderungen erfüllen sind Hermite-Polynome, siehe [3], für ein 2-Knoten-Balkenelement sind das kubische Polynome. Die 4 Koeffizienten des unbekannten Lösungsvektors sind dann $\hat{\mathbf{u}}_e = [v^{(1)}, v'^{(1)}, v^{(2)}, v'^{(2)}]^T$. Durch (elementweises) Einsetzen der FE-Ansätze in die schwache Form (9.7) erhält man schließlich genau die Elementsteifigkeitsbeziehung $\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_e$, die wir im Kapitel 2.4 anschaulich hergeleitet haben.

9.1.2 Der schubweiche Balken

Die schubweiche Balkentheorie, nach ihrem Entwickler auch *Timoshenko*¹-Theorie genannt, berücksichtigt neben der Biegeverformung auch die Verformung infolge von Schub.

¹Stephen P. Timoshenko (1878-1972)



Abbildung 9.1: Schubstarre und schubweiche Balkenverformung

Statt der Bernoulli-Hypothese nimmt man nun nur an, dass Materialpunkte die vor der Verformung auf einer Fläche senkrecht zur Balkenachse lagen, sich auch nach der Verformung auf einer ebenen Fläche befinden. Diese Fläche kann um einen Verdrehwinkel ϕ zur verformten Balkenachse geneigt sein. Da man die Normale zur Balkenachse wie bei der klassischen Balkentheorie aus der Ableitung der Durchbiegung nach der Koordinate in Balkenlängsrichtung ermitteln kann, gibt es nun eine Gleitung γ mit

$$\gamma = v' - \phi. \quad (9.8)$$

In anderen Worten, der Balken erfährt zusätzlich zur Krümmung durch Biegung eine Scherung, siehe Bild 9.1.

Für zusätzliche Verformungsgrößen müssen wir nun auch Materialgesetze formulieren. Für die Biegenormalspannungen bzw. die Momentenbeanspruchung verwendet die schubweiche Theorie dieselbe Beziehung wie die klassische Biegetheorie, Gleichung (9.2), das Moment ist proportional zur Krümmung. Die Schubspannungen können über die konstitutive Beziehung $\tau = G\gamma$ bestimmt werden, dabei ist $G = E/(2(1 + \nu))$ das Schubmodul. Die Querkraft ist allgemein über das Integral $F_Q = \int_A \tau dA$ bestimmbar, wir setzen hier jedoch vereinfachend an, dass die Gleitung proportional zur Querkraft sei: $F_Q = \tau A_\kappa = GA_\kappa \gamma$. Dabei ist die Schubfläche $A_\kappa = \kappa A$ die um einen sogenannten Schubkorrekturfaktor korrigierte Querschnittsfläche², also

$$F_Q = \kappa GA \gamma. \quad (9.9)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen der schubweichen Theorie unterscheiden sich nicht von jenen des klassischen Balkens (9.3,9.4). Mit (9.2) und (9.9) kommen nur die Verzerrungsgrößen ρ und γ nur in unseren Materialgesetzen vor, sie müssen nun zur Durchbiegung v und zur Querschnittsverdrehung ϕ in Beziehung gesetzt werden (Kompatibilitätsbedingungen). Für die Gleitungen ist das schon mit (9.8) geschehen, für die Krümmung gilt $\rho(x) = \phi'(x)$.

²Ohne auf weitere Details eingehen zu wollen sei erwähnt, dass die tatsächliche Schubspannung ja einen mindestens quadratischen Verlauf über den Querschnitt haben muss, am oberen und unteren freien Ende muss sie schließlich Null sein. Um ihre effektive Größe zu berücksichtigen wird meist $\kappa = 5/6$ gesetzt.

Der schubweiche Balken wird somit durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\kappa GA(v'(x) - \phi(x)) + EI\phi''(x) = 0 \quad (\text{Biegungsdifferentialgleichung}), \quad (9.10)$$

$$\kappa GA(v''(x) - \phi'(x)) = -q(x) \quad (\text{Schubdifferentialgleichung}). \quad (9.11)$$

Diese Gleichungen bilden ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir haben nun zwei unbekannte Funktionen zu bestimmen, nämlich die Durchbiegung $v(x)$ und die davon unabhängige Querschnittsverdrehung $\phi(x)$. Geometrische Randbedingungen können nun sowohl für $v(x)$ als auch für $\phi(x)$ gegeben sein.

Die Gleichungen (9.10) und (9.11) stellen die Basis für die nun zu entwickelnde FE-Formulierung dar. Um zu der schwachen Form zu kommen, multiplizieren wir zunächst (9.11) mit einer Testfunktion δv und integrieren über den betrachteten Bereich $\Omega = l \times A$,

$$\int_{\Omega} (\kappa GA(v'' - \phi') - q) \delta v \, d\Omega = 0. \quad (9.12)$$

Mit partieller Integration sowie $v'' \delta v = (v' \delta v)' - v' \delta v'$ und $\phi' \delta v = (\phi \delta v)' - \phi \delta v'$ folgt daraus

$$- \int_l \kappa GA v' \delta v' \, dx - \int_l \kappa GA \phi \delta v' \, dx + \int_l q \delta v \, dx + [\kappa GA v' \delta v]_{\text{Rand}} + [\kappa GA \phi \delta v]_{\text{Rand}} = 0. \quad (9.13)$$

Dieselben Schritte werden nun für (9.10) durchgeführt

$$\int_{\Omega} (\kappa GA(v' - \phi) + EI\phi'') \delta \phi \, d\Omega = 0 \quad (9.14)$$

und mit $\phi'' \delta \phi = (\phi' \delta \phi)' - \phi' \delta \phi'$ erhalten wir

$$\int_l EI \phi' \delta \phi' \, dx + \int_l \kappa GA(v' - \phi) \delta \phi \, dx - [EI \phi']_{\text{Rand}} = 0. \quad (9.15)$$

Addition der Gleichungen (9.13) und (9.15) und Einsetzen der konstitutiven Beziehungen liefert uns die **schwache Form des schubweichen Balkenproblems**.

$$\int_l EI \phi' \delta \phi' \, dx + \int_l \kappa GA(v' - \phi) (\delta v' - \delta \phi) \, dx = \int_l q \delta v \, dx + [F_Q \delta v]_{\text{Rand}} + [M_b \delta \phi]_{\text{Rand}} \quad (9.16)$$

Man stellt fest, daß der erste Term der linken Seite die virtuelle Arbeit des Momentes (Biegeanteil) und der zweite Term die virtuelle Arbeit der Querkraft (Schubanteil) darstellt. Die rechte Seite folgt aus der Belastung des Balkens. Es kommen in der schwachen Form nur erste Ableitungen von v und ϕ bzw. ihren Variationen vor, so das C^0 -steige

(z.B. lineare) Ansatzfunktionen für die finiten Elemente ausreichen. An jedem Knoten sind zwei Freiheitsgrade zu berechnen: Durchbiegung $v^{(k)}$ und Verdrehwinkel $\phi^{(k)}$. Bei dem im Kapitel 2 hergeleiteten schubstarren Balken mußte die Neigung $v'^{(k)}$ anstelle von $\phi^{(k)}$ bestimmt werden. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also bei der schubstarren und der schubweichen Theorie gleich. Die Elementsteifigkeitsbeziehungen und die Systemsteifigkeitsbeziehung werden nun in der üblichen Weise hergeleitet, wir erhalten aber ein Gleichungssystem, das dieselbe Aufspaltung in Biege- und Schubanteil wie in der schwachen Form aufweist.

$$(\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_S)\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (9.17)$$

Bei naiver Wahl der Ansatzfunktionen (z.B. lineare Ansätze für v und ϕ) sind jedoch die berechneten Ergebnisse der FE-Methode im physikalischen Sinne falsch. Dies liegt hier daran, daß das tatsächliche Verformungsverhalten sehr dünner Balken mit der Timoshenko-Balkentheorie in Kombination mit den einfachen linearen Ansätzen nicht wiedergegeben werden kann, die berechneten Verschiebungen sind viel zu klein. Dieses Phänomen nennt man *shear locking*. Locking tritt nicht nur bei Balken (und Platten) auf, ist hier aber besonders typisch, siehe unten.

9.2 Platten und FE-Diskretisierung nach der Kirchhoff–Theorie

Allgemein wird bei dem mechanischen Modell *Platte* davon ausgegangen, daß der Querschnitt eben bleibt und in Dickenrichtung keine Spannungen auftreten. In der klassischen Plattentheorie nach Kirchhoff werden darüber hinaus die Querschubverformungen vernachlässigt, man spricht von der schubstarren Platte, vgl. Abbildung 9.2. Die Kirchhoff-Platte ist somit das räumliche Pendant zum Bernoulli-Balken. Eine Normale zur ursprünglichen Plattenmittelfläche bleibt auch Normale der verformten Mittelfläche. Liegt die Platte in der x - y -Ebene und wird mit w die Plattendurchbiegung bezeichnet, dann gilt für die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{u} , [9, 11].

$$\begin{aligned} u \equiv u_1 &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v \equiv u_2 &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w \equiv u_3 &= w(x, y) . \end{aligned} \quad (9.18)$$

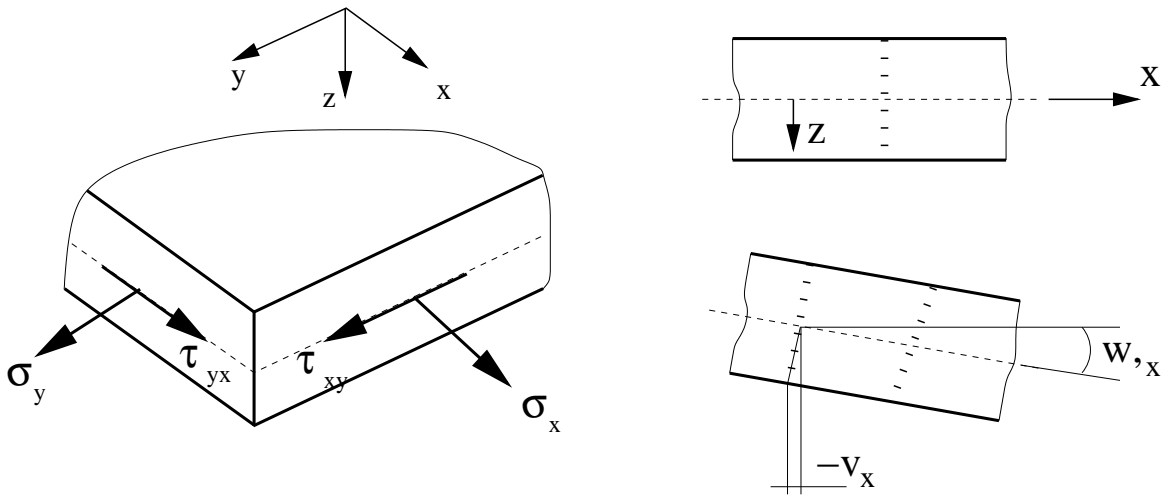


Abbildung 9.2: Modellierung von Platten

Diese Betrachtungsweise führt auf eine Bipotentialgleichung für die Plattendurchbiegung,

$$\Delta\Delta w = \frac{p(x, y)}{K}, \quad (9.19)$$

wobei K hier die Plattensteifigkeit abkürzt

$$K = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{t^3}{12}(\lambda + 2\mu). \quad (9.20)$$

Dabei bedeutet t die Plattendicke (thickness) und E, ν Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl bzw. λ, μ die Lamè-Konstanten, vgl. Kapitel 3. In Gleichung (9.19) gilt für den Differentialoperator (Laplace-Operator)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (9.21)$$

Die Differentialgleichung ist also von vierter Ordnung. Mit (9.20) kann man auch schreiben

$$t^3 \left(\frac{\lambda}{12} + \frac{\mu}{6} \right) \Delta\Delta w = p(x, y). \quad (9.22)$$

Die geometrischen Randbedingungen werden für die Verschiebungen und Neigungen der Platte, die statischen Randbedingungen für Momente und Querkräfte formuliert.

Die zugeordnete schwache Formulierung des Randwertproblems läßt sich entsprechend dem Vorgehen in den Kapiteln 3 und 9.1 herleiten; sie enthält dann 2. Ableitungen der Verschiebungen. (Angreifende Einzellasten und Momente sind hier nicht aufgeführt, man kann sie als Sonderfälle der Belastung $p(x, y)$ auffassen.)

$$K \int_{\Omega} \Delta(\delta w) \Delta(w) d\Omega = \int_{\Omega} \delta w p d\Omega \quad (9.23)$$

Für die Berechnung einer konformen FE-Näherungslösung benötigt man folglich C^1 -stetige Ansatzfunktionen, also FE-Ansätze bei denen sowohl die Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ als auch deren erste Ableitung $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ im gesamten Gebiet stetig sind. Die in den vorangegangenen Kapiteln aufgeführten zwei- und dreidimensionalen Ansatzfunktionen sind C^0 -stetig und können folglich *nicht* verwendet werden. Lediglich die für die Balkenbiegung verwendeten Hermite-Polynome erfüllen die Stetigkeitsforderungen. Für rechteckige Plattenelemente können damit — entsprechend der Vorgehensweise im Kapitel 5.1 — Ansatzfunktionen in zwei Raumrichtungen aufgebaut werden.

Die Herleitung von C^1 -stetigen Elementen mit dreieckigen Grundformen oder gekrümmten Kanten ist nicht so einfach. Ein allgemeiner kubischer Ansatz kann beispielsweise nicht auf die drei Knotenverschiebungswerte eines Dreiecks reduziert werden. Möglich ist das aber z.B. bei einem Ansatz der Form

$$w = a_0 + a_1x + a_2y + \dots + a_{21}y^5 \quad (9.24)$$

wobei die unbekannten Koeffizienten nach Umformen an jedem Knoten durch die Werte $\mathbf{u}^{(k)} = [w \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,xy} \ w_{,xx} \ w_{,yy} \ w_{,n}]^T$ ersetzt werden ($w_{,n}$ ist die Normalenableitung an einer Dreieckseite). Das resultierende Element ist konform, aber eben von relativ hoher Polynomordnung. Da man oft effektiver mit niedriger Polynomordnung arbeitet, wurden für Platten eine Vielzahl nichtkonformer Elemente abgeleitet, siehe z.B. [13]. Durch numerische Tests (Patchtest etc.) hat man bei denen auch gezeigt, dass sie für verfeinerte Netze konvergieren. In der Vorlesung werden sogenannte diskrete Kirchhoff-Elemente vorgestellt (DKT). Hier werden nicht über die gesamten Elementränder die Stetigkeitsanforderungen erfüllt, sondern nur an ausgewählten Punkten. Für hinreichend feine Netze erfüllen diese Elemente die Konvergenzbedingungen und für praktische Probleme sind sie effektiv anwendbar.

9.3 Platten und FE-Diskretisierung nach der Reissner–Mindlin–Theorie

Um die Probleme bei der Konstruktion von C^1 -Elementen zu umgehen, wird bei der FE-Diskretisierung von Plattenproblemen häufig die Reissner–Mindlin–Theorie bevor-

zugt. Die Reissner–Mindlin-Platte ist praktisch das räumliche Pendant zum Timoshenko-Balken. Hier wird bei Verformung eine Neigung der Normalen zur Mittelfläche zugelassen, so dass die Verschiebung durch Durchbiegung w und zusätzlich durch Verdrehwinkel ϑ_x und ϑ_y bestimmt wird. Man spricht auch von der Schubweichen Platte. Für die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{u} gilt

$$\begin{aligned} u \equiv u_1 &= -z\vartheta_x(x, y) \\ v \equiv u_2 &= -z\vartheta_y(x, y) \\ w \equiv u_3 &= w(x, y) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Wie im Kapitel 9.1 gelangt man damit zu einem System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung für die voneinander unabhängigen Variablen $\boldsymbol{\theta} = [\vartheta_x, \vartheta_y]$ und w . In unserer Notation, d.h. die Matrix \mathbf{D} ist die Differentialmatrix (3.5) für den Fall des ebenen Spannungszustandes und $\nabla^T = [\partial/\partial x \ \partial/\partial y]$, lauten sie

$$\mathbf{D}^T \mathbf{E}_B \mathbf{D} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{E}_S (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (9.26)$$

$$\nabla^T \mathbf{E}_S (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) = p, \quad (9.27)$$

wobei die Abkürzungen

$$\mathbf{E}_B = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_S = \kappa Gt \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

verwendet wurden. Um den Unterschied zur Kirchhoff-Theorie zu verdeutlichen, kann man das Differentialgleichungssystem auch in Matrixform schreiben:

$$\frac{1}{2}K \begin{bmatrix} \Delta - \kappa^2 + c \frac{\partial^y}{\partial x^y} & c \frac{\partial^y}{\partial x \partial y} & -\kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ c \frac{\partial^y}{\partial x \partial y} & \Delta - \kappa^2 + c \frac{\partial^y}{\partial y^y} & -\kappa^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} & \kappa^2 \frac{\partial}{\partial y} & \kappa^2 \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p(x, y) \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

mit $c = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ sowie Δ nach Gleichung (9.21) und dem Schubkorrekturfaktor $\kappa \approx 5/6$.

Die Differentialgleichungen (9.26-9.27) können nun wieder in eine Variationsgleichung überführt werden. Bezeichnet man als V den Raum der möglichen (zulässigen) Verschiebungen der Platte mit dem Gebiet Ω (siehe auch Kapitel 3.4.5), dann lautet die schwache Formulierung für die Reissner-Mindlin-Platte: Finde $(w, \boldsymbol{\theta}) \in V \times V^2$, so dass

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{E}_B \mathbf{D}(\delta \boldsymbol{\theta}) \, dx + \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{E}_S (\nabla \delta w - \delta \boldsymbol{\theta}) \, dx = \int_{\Omega} p \, \delta w \, dx, \quad (9.30)$$

für alle virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen $(\delta w, \delta \boldsymbol{\theta}) \in V \times V^2$.

Die schwache Formulierung dieses Randwertproblems enthält nun nur Ableitungen 1. Ordnung, so daß die Variablen ϑ_x , ϑ_y und w jeweils durch C^0 -stetige FE-Ansätze berechnet werden können. Folglich sind die vorgestellten 2D-Ansatzfunktionen des Kapitels 5 theoretisch für die Berechnung von Plattenproblemen nach der Reissner–Mindlin–Theorie einsetzbar. Die Verschiebungen und die Verdrehwinkel müssen dafür unabhängig voneinander mit Ansatzfunktionen approximiert werden. Allerdings stößt man bei schlechter Wahl der Ansätze auf das Problem des shear-lockings. Der Effekt des Lockings sowie Möglichkeiten es zu umgehen, werden im folgenden kurz erläutert.

Wie eine einfache, intuitive Wahl von Ansatz- und Testfunktionen für Durchbiegung und Verdrehwinkel zu falschem numerischen Lösungen führen kann, zeigt das Beispiel einer eingespannten quadratischen Platte mit 1 m Seitenlänge. Für eine gleichmäßig verteilte Last wurde von Timoshenko & Woinowsky-Krieger in [21] eine analytische Lösung für die Durchbiegung in der Mitte angegeben, die hier als Referenz gewählt wird.

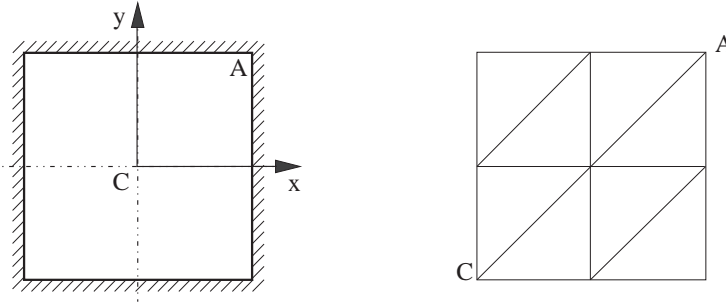


Abbildung 9.3: Quadratischen Platte und erstes FE-Netz.

Diskretisiert man nun sowohl Durchbiegung w , als auch die Verdrehwinkel ϑ_x , ϑ_y mit linearen Ansatzfunktionen, dann berechnet man die im Bild (9.4) dargestellten Ergebnisse. Ausgehend von einem grobem Netz aus 8 dreieckigen Elementen, siehe Bild 9.3, wird das Netz immer mehr verfeinert. Auf der Abzisse ist die Anzahl der Freiheitsgrade logarithmisch aufgetragen, die Ordinate beschreibt den Fehler der Durchbiegung $w_{\text{FEM}}/w_{\text{analytisch}}$. Das FE-Netz wird sehr stark verfeinert, dennoch bleibt, in Abhängigkeit von der Plattendicke t die Lösung weit von der richtigen Lösung entfernt. Das berechnete Verhalten ist viel zu steif, die Durchbiegung wird blockiert. Hervorgerufen wird dies durch die unterschiedliche Wichtung der Biege- und Scherterme in Gleichung (9.31), man spricht deshalb von *shear-locking* bei geringer Plattendicke, $t \rightarrow 0$. In der Form (9.31) sieht man es der Gleichung zunächst nicht an, aber dividiert man die gesamte Gleichung durch t^3 , dann steht vor dem Schubanteil ein Faktor $1/t^2$, der für kleine Dicken $t \rightarrow 0$ gegen unendlich strebt.

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{E}^* \mathbf{D}(\delta \boldsymbol{\theta}) \, dx + \frac{1}{t^2} \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\theta})^T (\nabla \delta w - \delta \boldsymbol{\theta}) \, dx = \int_{\Omega} p^* \delta w \, dx \quad (9.31)$$

Hier kürzt \mathbf{E}^* die Matrixform des modifizierten Elastizitätstensor

$$\mathbb{C}_{ijkl} := \frac{1}{6\kappa} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{12} \frac{\lambda}{\mu\kappa} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (9.32)$$

ab, die Last wurde entsprechend skaliert.

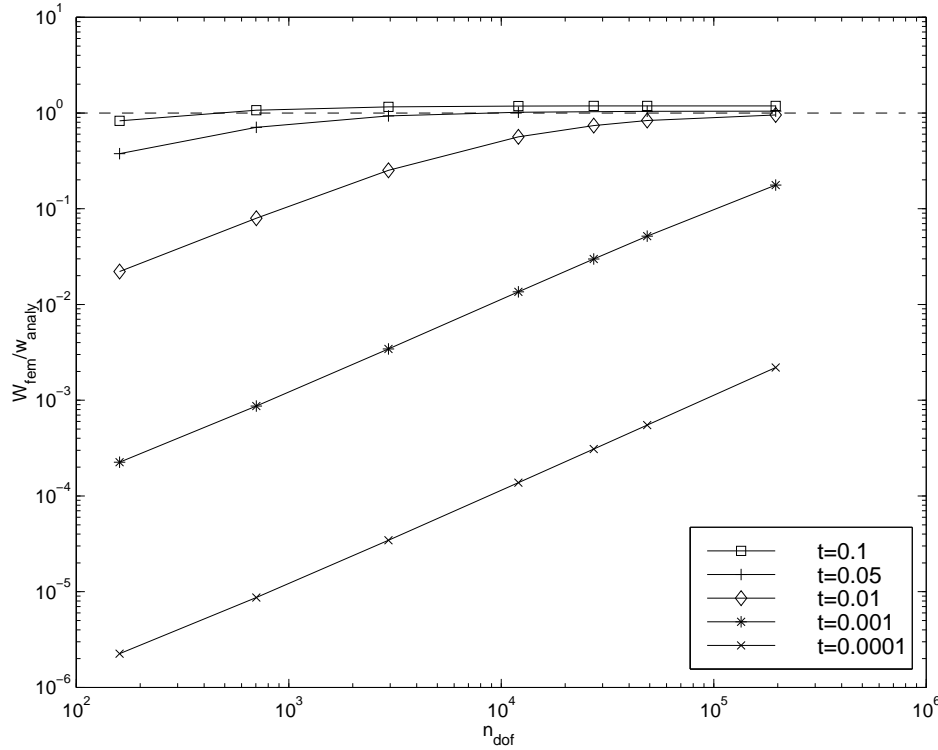


Abbildung 9.4: Locking bei der Berechnung der quadratischen Platte.

Ingenieurmäßig umgeht man das Problem des shear-lockings durch reduzierte Integration des Schubanteils. Man nennt eine solche Vorgehensweise auch *selektive* Integration. Das ist recht intuitiv und führt nur in einigen Fällen zu verlässlichen Resultaten.

In der neueren mathematischen Literatur werden sogenannte gemischte Methoden zur Formulierung von locking-freien finiten Plattenelementen nach der Reissner-Mindlin-Theorie vorgeschlagen, [2]. Hier wird der Schubanteil durch Einführen einer neuen, so genannten Schervariablen aufgespalten. Die Verdrehwinkel und die Schervariablen werden dann mit unterschiedlichen Ansatzfunktionen approximiert. Mit der Definition der Schervariablen (shear variable)

$$\gamma := \left(\frac{1}{t^2} - \alpha\right)(\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \quad 0 < \alpha < t^{-2}, \quad (9.33)$$

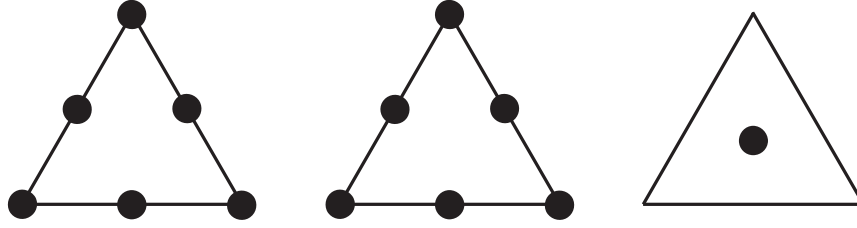


Abbildung 9.5: Locking-freies Plattenelement mit quadratischen Ansätzen für Durchbiegung und Verdrehung.

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 a(w, \boldsymbol{\theta}; v, \boldsymbol{\phi}) &:= \int_{\Omega} \varepsilon(\boldsymbol{\theta}) : \mathbb{C} \varepsilon(\boldsymbol{\phi}) \, dx + \alpha \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \cdot (\nabla v - \boldsymbol{\phi}) \, dx \\
 b(w, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \\
 c(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\eta}) &:= t^2 / (1 - \alpha t^2) \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

lautet das Reissner-Mindlin Problem dann:

Finde $(w, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) \in V(\Omega) \times V(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2$ so daß

$$\begin{aligned}
 a(w, \boldsymbol{\theta}; v, \boldsymbol{\phi}) + b(v, \boldsymbol{\phi}; \boldsymbol{\gamma}) &= \int_{\Omega} f v \, dx \\
 b(w, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\eta}) - c(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\eta}) &= 0
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

für alle Testfunktionen $(v, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta}) \in V(\Omega) \times V(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2$.

Interessanterweise sind die gemischten Methoden mit gesonderter Approximation der Schervariablen (9.33) verwandt mit der von Ingenieuren schon länger verwendeten reduzierten Integration einzelner Komponenten.

Übertragen in FE-Ansatzräume $V_h \times W_h \times \Gamma_h$ lautet das der FE-Berechnung zugrundeliegende Problem nun:

Finde $(w_h, \boldsymbol{\vartheta}_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in V_h \times W_h \times \Gamma_h$ so daß

$$\begin{aligned}
 a(w_h, \boldsymbol{\vartheta}_h; v_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + b(v_h, \boldsymbol{\varphi}_h; \boldsymbol{\gamma}_h) &= \int_{\Omega} f v_h \, dx \\
 b(w_h, \boldsymbol{\vartheta}_h; \boldsymbol{\eta}_h) - c(\boldsymbol{\gamma}_h; \boldsymbol{\eta}_h) &= 0
 \end{aligned}$$

for all $(v_h, \boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in V_h \times W_h \times \Gamma_h$. Die Wahl der Ansatzräume $V_h \times W_h \times \Gamma_h$ ist nun zwar immer noch nicht trivial, aber einfacher und mathematisch analysierbar geworden. Ein mögliches locking-freies Element ist im Bild 9.5 dargestellt. Dieses Dreieckselement hat 20 Freiheitsgrade und ist somit ein relativ einfaches Plattenelement.

9.4 Gemischte Variationsprinzipie

Im Kapitel 3.1 wurde das Potential für den elastischen Körper als Funktion der Verschiebung \mathbf{u} formuliert, (3.20). In speziellen Anwendungen kann es jedoch sinnvoll sein, Potentiale als Funktionen mehrerer Variablen einzuführen. Ein Beispiel ist die oben beschriebene Reissner-Mindlin-Platte, in anderen Fällen werden Spannungen und Dehnungen unabhängig eingeführt.

Das Dreifeld-Funktional (Hu-Washizu Potential) des Körpers lautet für Verschiebung \mathbf{u} , Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}$ und Spannung $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} [W(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla_{sym} \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{p}}] dx - \int_{\partial\Omega_2} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{u} dx \quad (9.36)$$

Die einzelnen Funktionen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ sind natürlich nicht unabhängig voneinander und die Beziehungen zwischen ihnen müssen bei der Approximation beachtet werden. Die Variation nach den einzelnen Funktionen führt zu

$$D\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} \delta(\nabla_{sym} \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}} \delta \mathbf{u}] dx - \int_{\partial\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \vec{\mathbf{n}} \delta \mathbf{u}_i dx - \int_{\partial\Omega_2} \bar{\mathbf{q}} \delta \mathbf{u}_i dx = 0 \quad (9.37)$$

$$D\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} = \int_{\Omega} [W(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\sigma}(\nabla_{sym} \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) - \bar{\mathbf{p}} \mathbf{u}_i] dx - \int_{\partial\Omega_1} \boldsymbol{\sigma} \vec{\mathbf{n}} (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) dx = 0 \quad (9.38)$$

sowie

$$D\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} = \int_{\Omega} [W_{,\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\sigma}] \delta \boldsymbol{\epsilon} dx = 0. \quad (9.39)$$

Gemischte Finite-Elemente-Methoden erfordern generell eine fundierte mathematische Analyse, da eine intuitive Wahl von Ansatz- und Testfunktionen zu instabilem numerischem Verhalten führen kann.

10 Zur Genauigkeit der FEM

Die grundlegenden Eigenschaften einer FE-Lösung werden bereits mit den bei der Modellierung getroffenen Näherungsannahmen festgelegt. Modellfehler ergeben sich nicht nur aus der Erfassung des Kontinuums durch ein diskretes Netz, sondern auch aus der Lastbeschreibung, den Materialdaten und der Approximation des Strukturrandes. Auch die zugrundeliegende Theorie hat ihre Grenzen. So treten beispielsweise bei Randwertaufgaben der linearen Elastizitätstheorie häufig Singularitäten auf, obwohl Verformungen und Spannungen im realen Bauteil stets endlich sind. Bei der Beurteilung einer FE-Analyse ist deshalb stets zu fragen, ob Modellierung und Genauigkeit der numerischen Lösung des Randwertproblems in einem angemessenen Verhältnis zueinander stehen.

Nur wenn die Lösung des Randwertproblems im Ansatzraum der finiten Elemente liegt kann sie mit der FEM exakt berechnet werden. Im allgemeinen ist das jedoch nicht der Fall, sondern es entstehen **Diskretisierungsfehler**. Die Differenz zwischen exakter Lösung des Randwertproblems \mathbf{u} und FE-Lösung \mathbf{u}_h

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \quad \mathbf{e} \in V \quad (10.1)$$

wird als Fehlerfunktion \mathbf{e} der FE-Lösung bezeichnet. Diese Fehlerfunktion ist eine vektorwertige Funktion im Gebiet. Wie wissen, dass die Energienorm einer Verschiebungsfunktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ die Formänderungsarbeit des Systems misst, vergleiche Kapitel 3.

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_E = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega} = \sqrt{2W_f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))} \quad (10.2)$$

Ein naheliegendes Maß für den Fehler ist deshalb die Energienorm der Fehlerfunktion (10.1).

Der Diskretisierungsfehler setzt sich aus unterschiedlichen Fehleranteilen zusammen. Da bei der FEM die exakte Lösung im energetischen Sinne orthogonal auf den FE-Ansatzraum projiziert wird, bezeichnet man den dabei entstehenden Fehler als Projektionsfehler. Die Energienorm der Fehlerfunktion misst somit die minimale Differenz zwischen exakter Lösung des Randwertproblems und FE-Lösung. Sie wird deshalb auch

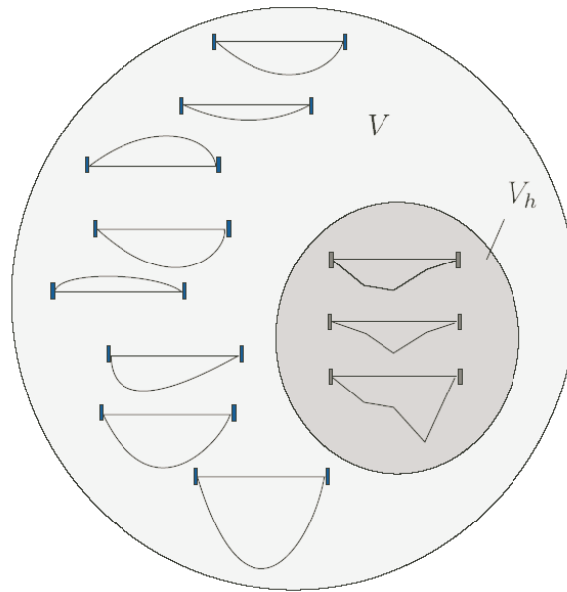


Abbildung 10.1: Illustration des Raumes der FE-Ansatzfunktionen V_h als Unterraum aller möglichen Verschiebungszustände V , nach [13].

als natürliche Norm der FEM bezeichnet.

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \|\mathbf{u}\|_E^2 - \|\mathbf{u}_h\|_E^2 \quad (10.3)$$

Erfüllen die finiten Elemente nicht die Stetigkeitsbedingungen der Variationsformulierung oder sind sie inkompatibel miteinander verknüpft, dann liegt der FE-Ansatzraum V_h nicht in V . Es tritt zusätzlich ein Konsistenzfehler auf. Die Konvergenz der FEM ist dann nicht mehr gesichert.

Ein weiterer Fehleranteil resultiert aus der zum Aufbau der Elementsteifigkeitsbeziehungen notwendigen Integration. Bei beliebig gekrümmten Elementrändern ist eine exakte Integration gewöhnlich nicht zu realisieren. Deshalb ist die numerische Integration so durchzuführen, daß der Integrationsfehler maximal von gleicher Ordnung wie der Projektionsfehler ist.

Von **Konvergenz** der FEM spricht man, wenn die FE-Näherungslösung des Randwertproblems durch Erhöhen der Anzahl der Freiheitsgrade im FE-System beliebig verbessert werden kann. Der Einfluß einzelner Diskretisierungsparameter auf die FE-Lösung läßt sich a priori mit Hilfe der **Konvergenzordnung** abschätzen. Sie wird aus der Differenz der Taylorreihenentwicklungen von exakter Lösung und Näherungslösung in

der L^2 -Norm berechnet. Bei einem linear-elastischen Problem mit glattem Lösungsverlauf (ohne Singularitäten) konvergiert die FE-Verschiebungsfunktion mit der Ordnung $O(h_e^{p+1})$ und die Formänderungsarbeit mit $O(h_e^{2p})$. Dabei bezeichnet h_e eine charakteristische Elementabmessung des Netzes und p ist die Ordnung des höchsten vollständigen Polynoms im FE-Ansatzraum. Die Genauigkeit der Spannungen ist entsprechend (5.24) um eine Ordnung geringer als die der Verschiebungen. Als glatt wird nach [19] ein Lösungsverlauf bezeichnet, der sich in allen Punkten des Lösungsgebietes in einer Taylorreihenentwicklung darstellen läßt. Bei singulären Störungen enthält dagegen die Lösung Terme der Form r^Θ , wobei r den radialen Abstand vom singulären Punkt beschreibt und Θ die Regularität der Lösung charakterisiert.

Mit (10.3) ergibt sich auch für die Energienorm der Fehlerfunktion die Konvergenzordnung $O(h_e^p)$. Es gilt

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq C^* h_e^{2p} . \quad (10.4)$$

Die Konvergenz hat asymptotischen Charakter. Drückt man die charakteristische Elementabmessung h_e durch die Anzahl der Freiheitsgrade des FE-Systems n und die Dimension des Randwertproblems m aus, $h_e \approx n^{-\frac{1}{m}}$, dann erhält man für genügend große n die Beziehung ¹

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq C^* h_e^{2p} \approx C n^{-\frac{2p}{m}} . \quad (10.5)$$

Durch Logarithmieren von (10.5) gelangt man zu einer Geradengleichung, deren Anstieg durch die Konvergenzordnung $\beta = \frac{2p}{m}$ bestimmt ist.

$$\ln \|\mathbf{e}\|_E^2 \approx \ln C - \beta \ln n \quad (10.6)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen an die exakte Lösung und an die Gestaltung des FE-Netzes können durch Erhöhen der Polynomordnung p auch exponentiell konvergierende FE-Lösungen berechnet werden. Ist der Lösungsverlauf gestört, dann wird die Konvergenzordnung zusätzlich durch die Regularität der Lösung beeinflusst, so daß $\beta = \frac{2}{m} \min(\Theta - 1, p)$ gilt [19].

Die Konvergenzordnung eines Problems ist allgemein nicht a priori bekannt. Um die mit einem bestimmten FE-Netz erzielte Genauigkeit für ein konkretes Modellproblem beurteilen zu können, sind a posteriori (also nach der Lösung) Fehleranalysen notwendig.

Lokale Aussagen zum Fehler in den finiten Elementen sind mit Hilfe von **Fehlerindikatoren** möglich. Ein Fehlerindikator η_e schätzt elementweise den Fehler (in einer

¹ C^* , C , c , ... bezeichnen im folgenden Konstanten

geeigneten Norm) ab. Die Summe der Fehlerindikatoren bildet den **Fehlerschätzer** η , der den Gesamtfehler der FE-Lösung angibt (error estimator):

$$\eta = \left(\sum_{e \in \mathcal{T}} \eta_e^2 \right)^{1/2}$$

Die lokalen, elementweisen Beiträge zum Fehlerschätzer können dazu genutzt werden, im einer einmal berechneten FE-Lösung die besonders fehlerbehafteten Bereiche zu markieren (deshalb der Name Fehlerindikator). Fehlerindikatoren werden in diesem Sinne genutzt, um eine gezielte Netzverfeinerung zu steuern, man spricht von **adaptiven Algorithmen**. Dabei wird in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Starte mit einer sehr groben Vernetzung \mathcal{T}_0 .
2. Berechne die Lösung mit diesem Netz \mathcal{T}_k .
3. Berechne die Fehlerindikatoren $\eta(e)$ für alle Elemente $T \in \mathcal{T}_k$.
4. Berechne den Fehlerschätzer

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta(T)^2 \right)^{1/2}$$

und beende ggf. die Rechnung wenn der Wert unter einer Zielvorgabe liegt.

5. Markiere ein Element als ROT wenn

$$\eta(e) \geq \frac{1}{2} \max_{e' \in \mathcal{T}_h} \eta(e').$$

6. Verfeinere die markierten Elemente, vorzugsweise mit einer ROT-GRÜN-BLAU Verfeinerung um stark verzerrte Elementformen und hängende Knoten zu vermeiden. Setze mit dem neuen Netz \mathcal{T}_k bei 2. fort.

Die ROT-GRÜN-BLAU Verfeinerung illustriert Bild 10.2. Diese Technik arbeitet bei dreieckigen Elementformen sehr effektiv. Verfeinerungsstrategien bei viereckigen Elementformen sind komplizierter.

Einen Fehlerindikator nennt man asymptotisch exakt, wenn bei fortgesetzter Netzverfeinerung der Fehlerschätzer gegen den wirklichen Fehler konvergiert (asymptotically exact).

$$c_1 \frac{\eta}{\|e\|} \rightarrow 1$$

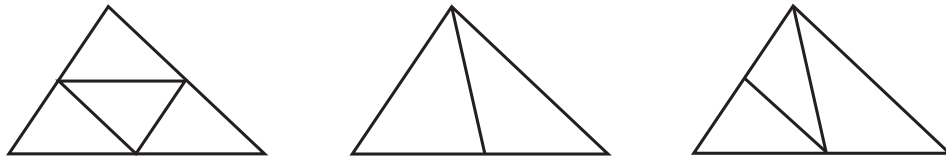


Abbildung 10.2: Elementteilung nach der ROT-BLAU-GRÜN Verfeinerungstechnik

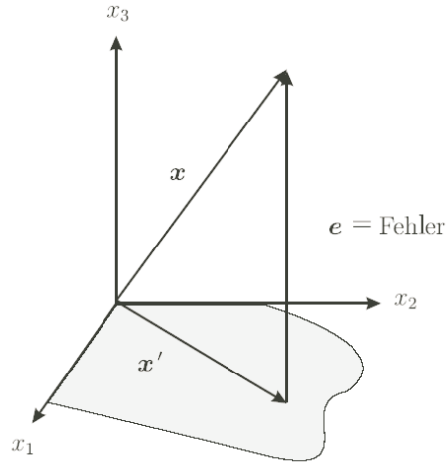


Abbildung 10.3: Fehler der FEM

Ist der Fehler nach oben beschränkt, nennt man den Fehlerschätzer zuverlässig (upper error bound: reliability).

$$\|\cdot\| \leq c_2 \eta$$

Existieren untere Schranken für den Schätzer, nennt man ihn effektiv (lower error bound: efficiency).

$$\|\cdot\| \geq c_3 \eta$$

Die Konstanten c_i sind (meist nicht näher bestimmte) positive Zahlen.

Die Entwicklung solcher Fehlerindikatoren sowie die Abschätzung von oberen und unteren Schranken für den Gesamtfehler, wurde insbesondere durch die Mathematiker vorangetrieben. Die grundlegenden Arbeiten dazu stammen von Babuška und seinen Mitarbeitern. Sie entwickelten für unterschiedliche Probleme theoretisch begründete Fehlerschätzungen aus den Projektionseigenschaften der FEM (siehe Bild 10.3).

Neben mathematisch begründeten Fehlerschätzern kommen häufig auch aus der Anschauung abgeleitete, heuristische Fehlerindikatoren zum Einsatz. Dazu werden lokale

Defekte der FE-Lösung betrachtet und beispielsweise durch Mittelungsmethoden Aussagen zur Fehlerverteilung abgeleitet. Der Vorteil heuristischer Fehlerschätzer ist neben ihrer Anschaulichkeit, daß sie meist relativ einfach in vorhandene FE-Programme implementiert werden können. Am bekanntesten ist der Zienkiewicz-Zhu-Fehlerindikator. Er wird im folgenden kurz erläutert.

Aus dem Argument, daß ein im gesamten Lösungsgebiet stetiger Spannungsverlauf genauer ist als die FE-Lösung mit Spannungssprüngen an der Oberfläche benachbarter Teilgebiete $\partial\Omega_s$, leiten Zienkiewicz und Zhu Fehlerindikatoren ab. Ein geglättetes, kontinuierliches Spannungsfeld $\bar{\sigma}$ erhält man beispielsweise aus den gemittelten Knotenspannungen $\hat{\sigma}$ und den Verschiebungsansatzfunktionen entsprechend (5.6) mit dem Ansatz²

$$\bar{\sigma} = \mathbf{N}_e \hat{\sigma} . \quad (10.7)$$

Für jedes Element wird nun der Fehler der Spannungsfunktion \mathbf{e}_σ approximiert.

$$\mathbf{e}_\sigma = \bar{\sigma} - \sigma_h \quad (10.8)$$

Diesen Fehler misst man in der L^2 - oder Energienorm

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_E^2 = \int_{\Omega_e} \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{e}_\sigma d\Omega \quad (10.9)$$

und bezieht ihn auf eine geeignete Größe (z.B. die Formänderungsarbeit im Element). Man erhält so relativ einfach und anschaulich einen Fehlerindikator, der sich ohne größeren Aufwand in ein FE-System implementieren läßt. Allerdings hat diese Methode auch Grenzen, z.B. können auch falsche Spannungen relativ glatt sein und so einen geringen Fehler vortäuschen, vgl. [13]. Der Zienkiewicz-Zhu- oder einfach Z^2 -Fehlerindikator ist dennoch (mit verschiedenen Modifikationen) weit verbreitet und auch in kommerziellen Systemen anzutreffen.

²Die Näherung setzt knotenbezogene Elementformulierungen voraus.

11 Abschließende Betrachtungen

11.1 Einordnung der FEM

Die Methode der Finiten Elemente ist nach Meinung der Autorin zwar das bedeutendste numerische Verfahren der Mechanik aber natürlich keineswegs das einzige. In folgenden werden einige weitere wesentliche numerische Berechnungsmethoden kurz kommentiert.

11.1.1 Das Verfahren der finiten Differenzen

Das Differenzenverfahren basiert auf der Idee, die in der zu lösenden partiellen Differentialgleichung auftretenden Ableitungen durch finite Differenzen zu ersetzen. Bei einer dreidimensionalen Struktur mit den unbekannten Verschiebungen in Richtung der x -, y - und z -Koordinaten benötigt man beispielsweise ein dreidimensionales Gitter. Man erhält schließlich $m \times n$ Gleichungen für m Unbekannte und n Gitterpunkte, die man ähnlich wie in der FEM in Matrizen zusammenfasst. Unregelmäßige, nicht koordinatenachsenorientierte Gitter bereiten jedoch Schwierigkeiten bei der Beschreibung zweiter Ableitungen. Für die Probleme der Festkörpermechanik mit ihrer typischerweise komplizierten Geometrie ist das Differenzenverfahren zu unflexibel. Verwendet wird es gern dort, wo regelmäßige Gitter eingesetzt werden können, z.B. zur Diskretisierung der Zeit bei Bewegungen. Häufig wird es in der Strömungsmechanik angewendet.

11.1.2 Die Methode der finiten Volumen

Wie bei dem Differenzenverfahren wird eine Diskretisierung mit einem regelmäßigen Gitter vorgenommen. Das Gesamtvolumen wird in eine endliche Anzahl finiter Volumina unterteilt. Für diese Volumina werden Bilanzgleichungen aufgestellt. Eine wichtige Größe ist dabei der Fluß über den Elementrand (z.B. Spannungen bzw. Spannungsfluß). Der theoretische Hintergrund ist der, das sich die schwache Formulierung des Randwertproblems mittels partieller Integration in eine Form umschreiben läßt, die Integrale über den

Rand der "Volumenelemente" enthält. Dadurch ist gewährleistet, daß der Fluß, der aus einem Kontrollvolumen ausströmt, in ein anderes hineinströmt. Die Randintegrale können mit unterschiedlichen Ansätzen approximiert werden. Wie das Differenzenverfahren wird die Finite-Volumen-Methode vorwiegend in der Strömungsmechanik angewendet. Es können damit stationäre und instationäre Strömungen von sowohl inkompressiblen als auch kompressiblen Fluiden simuliert werden.

11.1.3 Das Galerkin-Verfahren

Beim Galerkin-Verfahren, das im Kontext der Elastizitätstheorie besser als Ritz-Galerkin-Verfahren bezeichnet wird, formt man zunächst die zu lösende partielle Differentialgleichung in die sogenannte schwache Formulierung um. Die Differentialgleichung bezeichnet man hier dabei häufig als Residuum, das Verfahren auch als Methode der gewichteten Residuen. Gewichtet wird die Differentialgleichung mit der Testfunktion $v \in V$ (siehe Vorgehensweise in Kapitel 3.1), anschließend wird über das gesamte betrachtete Gebiet integriert. Wird der Funktionenraum V so gewählt, daß alle zur Lösung notwendigen Funktionen darin eingeschlossen sind, so ist die schwache Form äquivalent zu der starken Form. Dies bedeutet, dass die partielle Differentialgleichung exakt erfüllt wird. Im allgemeinen gelingt es jedoch nicht, alle möglichen Testfunktionen zu berücksichtigen, d. h. die Ansätze für die Lösung (z. B. für die Verschiebungsvektor u) und für die Testfunktion v werden nur bestimmte Funktionen enthalten. Üblich ist es zu fordern, dass die Ansatzfunktionen den wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen genügen. Die partielle Differentialgleichung und die dynamischen (Spannungs-) Randbedingungen werden dann nur im integralen Mittel erfüllt. Der aufmerksame Leser fragt sich nun, wo da der Unterschied zur FEM ist. Nun, es gibt ihn nicht, das Ritz-Galerkin-Verfahren ist praktisch FEM mit einem Element für das gesamte Gebiet. Es führt dadurch auf ein in der Regel stark gekoppeltes Gleichungssystem für die in den Ansätzen enthaltenen unbekannten Parameter (z.B. Knotenverschiebungen). Betrachtet man die Ansatzfunktionen der FEM als im gesamten Lösungsgebiet definierte Funktionen welche nur auf einem lokalen Träger — den zugehörigen finiten Elementen — Werte ungleich Null annehmen, dann ist das Verfahren von Ritz und Galerkin völlig identisch mit der FEM. In der mathematischen Literatur wird die FEM gerne als Galerkin-Verfahren bezeichnet, schließlich war Galerkin ein Mathematiker (siehe Fußnote im Abschnitt 3.1). Der Begriff "Methode der finiten Elemente" ist dagegen ein von Ingenieuren geprägter...

11.1.4 Das Ritzsche Verfahren

Beim Ritzschen Verfahren wird im Gegensatz zum Ritz-Galerkin-Verfahren von einem Potential, also einer Energieformulierung, ausgegangen. Dieses Potential setzt sich aus einem inneren Energieanteil, der Verzerrungsenergie, und einem äußeren Energieanteil, der (negativen) Arbeit der äußeren Kräfte, zusammen. Aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials folgt, daß die erste Variation des Potentials verschwinden muß. Hier sollte jedoch betont werden, daß ein derartiges Potential nur in Spezialfällen existiert, z.B. bei elastischem Materialverhalten und konservativer Belastung. Sind diese Voraussetzungen gegeben, kommen wir (vorausgesetzt wir arbeiten mit denselben Ansatzfunktionen) mit dem Ritz-Verfahren auf dieselbe Gleichung für die unbekannten Parameter wie mit dem Ritz-Galerkin-Verfahren.

11.1.5 Die Randelemente-Methode (BEM)

Ein ganz anderes numerisches Lösungsverfahren ist die Randelemente-Methode (Boundary-Elemente-Method). Ausgangspunkt ist hier die Überlegung, das homogene Differentialgleichungen der Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (11.1)$$

eine analytische Lösung besitzen. Keine Volumenlasten und konstante Materialdaten vorausgesetzt, kommen solche Gleichungen in der linearen Elastizitätstheorie typischerweise vor. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen werden als Fundamentallösungen bezeichnet. (Eine wichtige Rolle spielen dabei die Greenschen Funktionen.) Damit läßt sich die schwache Form so umschreiben, daß nur noch die unbekannten Randgrößen (Belastungen) als Variablen auftauchen. Das resultierende Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ wichtet praktisch die Anteile der einzelnen Fundamentallösungen an der Gesamtlösung. Die Matrix \mathbf{A} ist allerdings vollbesetzt und unsymmetrisch. Die Lösung eines solchen Gleichungssystems ist damit wesentlich aufwendiger als die Lösung der typischen FEM-Gleichung. Sind die Randgrößen berechnet, dann können die Feldgrößen (d.h. die unbekannten Variablen im Gebietsinneren) bestimmt werden.

Der entscheidende Vorteil der Rand-Elemente-Methode liegt darin, daß eine Diskretisierung nur auf dem Rand der Struktur erforderlich ist. Dies reduziert die Anzahl der Unbekannten wesentlich. Allerdings liegen Fundamentallösungen nur in speziellen Fällen vor, z. B. in der linearen Elastizitätstheorie. Daher ist bei nichtlinearen Problemstellungen die Anwendung der Rand-Elemente-Methode in der klassischen Form nicht möglich. Große Bedeutung hat die BEM dann, wenn ein "unendlich großes" Gebiet betrachtet wird. Typische Anwendungen findet man in der Bruchmechanik (Diskretisierung eines

Risses im unendlichen elastischen Medium) oder auch in der Bodenmechanik (sofern man den Boden als elastisch idealisieren kann). Auch Kopplungen von BEM und FEM sind möglich und für ausgewählte Problemstellungen zweckmäßig. Beispielsweise läßt sich ein Fundament besser mit finiten Elementen untersuchen, der umgebende (elastische) Felsboden stellt aber ein unendliches Gebiet dar. Eine Diskretisierung der Außenoberfläche des Bauwerks mit Randelementen ermöglicht eine Berechnung des Spannungszustandes in dem umgebenden Boden. Die BEM wird praktisch verwendet, ist aber längst nicht so universell einsetzbar wie die FEM. Große Verformungen sind damit beispielsweise nicht zu erfassen.

11.2 Nichtlineare Probleme

In diesem Text wurde davon ausgegangen, daß die Verschiebungen und Gleitungen der Kontinua klein sind und sich das Material linear-elastisch verhält. Damit läßt sich ein Großteil der im Maschinenbau typischen Probleme erfassen, jedoch gewinnt zunehmend auch die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte an praktischer Bedeutung. Diese Effekte führen dann auf nichtlineare Randwertaufgaben bzw. bei zusätzlicher Zeitabhängigkeit auf Anfangs-Randwertaufgaben.

Für nichtlineare FE-Berechnungen wird zwischen physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten sowie Nichtlinearität infolge Kontakt unterschieden, wobei diese Effekte natürlich auch gleichzeitig auftreten können. Diese Probleme werden in der Vorlesung FEM II behandelt. Hier nur ein kurzer Ausblick.

Physikalische Nichtlinearitäten resultieren aus nichtlinearem Materialverhalten. Dabei kann das Materialgesetz sowohl durch nichtlinear-elastische Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen als auch durch plastisches Verhalten gegeben sein. Die FE-Berechnung physikalisch nichtlinearer Probleme basiert auf den linearen Standardverfahren, sie führt aber — mit wesentlich größerem Aufwand — erst auf iterativem Weg zur Lösung. Die FE-Berechnung erfolgt dann mit schrittweiser Aufbringung der Belastung.

Geometrische Nichtlinearitäten entstehen infolge nichtlinearer Beziehungen zwischen Verschiebungen und Verzerrungen. (Dafür sind die Dehnungsmaße der nichtlinearen Kontinuumsmechanik zu verwenden.) Die Forderungen an die FE-Ansatzfunktionen entsprechen dem linearen Fall, es werden die gleichen Interpolationsfunktionen für Koordinaten und Verschiebungen verwendet. Die Elementkoordinaten berücksichtigen jeweils den Zuwachs in den Verschiebungen zwischen vorangegangener bzw. Anfangskonfiguration und momentaner Konfiguration (updated bzw. total Lagrange). Dementsprechend sind auch

für die Spannungen geeignete Maße zu wählen.

Große Verschiebungen führen häufig auf Kontaktprobleme, bei denen dann auch große Gleitungen auftreten. Ein Kontaktalgorithmus auf der Basis einander zugeordneter Knoten ist hier nicht mehr ausreichend. Statt dessen sind z.B. die Kontaktbedingungen im Sinne einer Master–Slave–Technik zwischen Kontaktknoten und zugeordneter Fläche zu formulieren (vgl. Abb. 8.2).

11.3 Programme für FE-Analysen

Ein FE-Programm für ein kleines spezielles Problem zu schreiben ist kein Problem. Entsprechend viele, mehr oder minder professionell gestrickte Codes kann man sich im WWW besorgen oder kaufen. Ein wirklich nützliches FE-Programm erfordert allerdings auch die entsprechende graphische Benutzeroberfläche und einige CAD-Funktionen — und das ist nur selten kostenlos zu haben.

Im folgenden sind einige in der Industrie häufig verwendete FE-Programme zusammengestellt. Für gelegentliche und relative einfache FE-Analysen werden gern **CAD-Systeme mit integriertem FE-Modul** verwendet. Beispiele sind:

I-DEAS weit verbreiteter Pre-/Post-Prozessor mit integriertem CAD- und Analyse-Modul, umfangreiche Funktionalität, Lösungsmodule für Statik, Eigenfrequenz, Zeit- und Frequenz-Antwortverhalten, Stabilitätsanalyse, kleine Werkstoff- und geometrische Nichtlinearitäten, Temperaturfelder, Spritzguss-Simulation, Akustikberechnung, Bauteil-Optimierung, guter automatischer Netzgenerator, volle Assoziativität von Geometrie- zu FE-Modell
Hersteller: SDRC heute EDS

Autocad Mechanical Desktop benutzt den ANSYS-Solver mit Tetraeder-Elementen, nur als Entscheidungshilfe für den Konstrukteur geeignet, für lineare Statik und (maximal 6) Eigenfrequenzen, Belastungen und Auflager sind an der Geometrie definierbar, jedoch keine Assoziativität zwischen Geometrie und Netz.
Hersteller: Autodesk

Catia / GPS für lineare Statik, Dynamik, kleine Instabilität, Belastungen und Auflager sind an der Geometrie definierbar, Assoziativität zwischen Geometrie und Netz ist vorhanden, angepasste Vernetzung ist möglich.
Hersteller: IBM

Pro-Engineer / Pro-Mechanika für lineare Statik, Eigenwerte und Beulanalyse, gute Benutzeroberfläche, generell p-Elemente (Ansatzfunktionen höherer Polynomordnung), sehr gute Lösungsverfahren, Belastungen und Auflager sind an der Geometrie definierbar, Assoziativität zwischen Geometrie und Netz vorhanden
Hersteller: PTC

Unigraphics / UG-Scenario für lineare Statik, Eigenwerte, Wärmedehnung, nur parabolische Tetraeder-Elemente, Belastungen und Auflager sind an der Geometrie definierbar, Assoziativität zwischen Geometrie und Netz vorhanden
Hersteller: EDS

Ursprünglich reine FE-Systeme haben inzwischen auch aufgerüstet und CAD Funktionen integriert. **Klassische universelle FE-Programme** sind:

ANSYS komplexes Programm mit verschiedenen Lösungsmodulen für Statik, Eigenfrequenz, Zeit- und Frequenz-Antwortverhalten, Dynamik von Mehrkörpersystemen, Stabilitätsanalyse, Werkstoff und geometrische Nichtlinearitäten, Temperaturfelder, Spritzguss-Simulation, 3D turbulente Strömung, Akustikberechnung, einige p-Elemente, Bauteil-Optimierung, automatischer Netzgenerator, Integration in mehrere CAD-Systeme, auch PC-Versionen erhältlich, grosse Verbreitung
Hersteller und Vertrieb: SAS IP (USA), CADfem (D)

ABAQUS für allgemeine Anwendungen in linearen Statik und Dynamik, insbesondere aber für Nichtlinearitäten, umfangreiche Bibliothek für Materialmodelle, Temperatur-Probleme, Schockanalysen, Erweiterungsmodule z.B. für Offshore-Rechnungen
Hersteller:

NASTRAN komplexes Programm mit verschiedenen Lösungsmodulen für Statik, Eigenfrequenz, Zeit- und Frequenz-Antwortverhalten, Dynamik von Mehrkörpersystemen, Stabilitätsanalyse, Werkstoff und geometrische Nichtlinearitäten, Temperaturfelder und mehr, grosse Verbreitung in Raumfahrt und Automobilindustrie, für komplexe Anwendungen
Hersteller: MSC (USA)

MARC für nichtlineare Analysen mit plastischen Verformungen, ca. 100 verschiedene Elemente, für komplexe Anwendungen
Hersteller: Marc Analysis Research Corporation / USA, jetzt: MSC (USA)

COSMOS/M Statik, Eigenfrequenz, Zeit- und Frequenz-Antwortverhalten, Stabilitätsanalyse, Temperaturfeld, Bauteil-Optimierung, automatischer Netzgenerator, für verschiedene Betriebssysteme, PC's und Workstations verfügbar
Hersteller: Structural Research and Analysis Corporation (USA)

COSAR Statik, Dynamik, Eigenfrequenz, Stabilitätsanalyse, Temperaturfelder, mechanische Anwendungen, nichtlineare Werkstoffe, elasto- und visko-plastisch, preisgünstige PC- und Workstation-Version
Hersteller: FEMCOS, Magdeburg (D)

Daneben gibt es zahllose Programme für spezielle Anwendungen, z.B. im Bauwesen. In der Forschung empfehlen sich Programme wie Hypermesh oder Parasolid als Pre- und Postprozessoren, den eigentlichen Berechnungskern will man ja selbst entwickeln.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Betten. *Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [2] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer-Verlag, 1992.
- [3] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1983.
- [4] G.R. Cowper. Gaussian Quadrature Formulas for Triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:405–408, 1973.
- [5] J. Dankert. *Numerische Methoden der Mechanik*. Fachbuchverlag Leipzig, 1977.
- [6] J. Dankert and H. Dankert. *Technische Mechanik*. B. G. Teubner Verlag, 1998.
- [7] U. Fischer, J. Grochla, S. Koczyk, and W. Weese. *Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik*. Carl-Hanser-Verlag, München, 1982.
- [8] E. Gekeler. *Mathematische Methoden zur Mechanik*. Springer, Berlin (to appear), 2006.
- [9] K. Girkmann. *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Wien, 1963.
- [10] H. Goering, H. G. Roos, and L. Tobiska. *Finite Element Methode*. Akademie-Verlag, Berlin, 1988.
- [11] H. Göldner. *Lehrbuch Höhere Festigkeit Bd.1 & 3*. Fachbuchverlag Leipzig, 1984.
- [12] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 1992.
- [13] F. Hartmann and C. Katz. *Statik mit Finiten Elementen*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

- [14] T.J.R. Hughes. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour. In *Computational Methods for Transient Analysis*. North Holland: Amsterdam, 1983.
- [15] Y. Jinyun. Symmetric gaussian quadrature formulae for tetrahedronal regions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:349–353, 1984.
- [16] N. I. Mußchelischwili. *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. Fachbuchverlag Leipzig, 1971.
- [17] H. R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991.
- [18] H. Schwetlick and H. Kretzschmar. *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig, 1991.
- [19] B. A. Szabò and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. Verlag John Wiley and Sons, 1991.
- [20] M. Tan. *Studienarbeit*. TU Berlin, 2006.
- [21] S. T. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw–Hill Book Company, 1987.
- [22] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [23] www-page by D. N. Arnold: www.math.psu.edu/dna, 2003
- [24] www-page by C. Felippa: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/Home.html>, 2005
- [25] www-page by B. Beckert: <http://www.uni-koblenz.de/beckert/Lehre/Seminar-Softwarefehler/Folien/schaden.pdf>