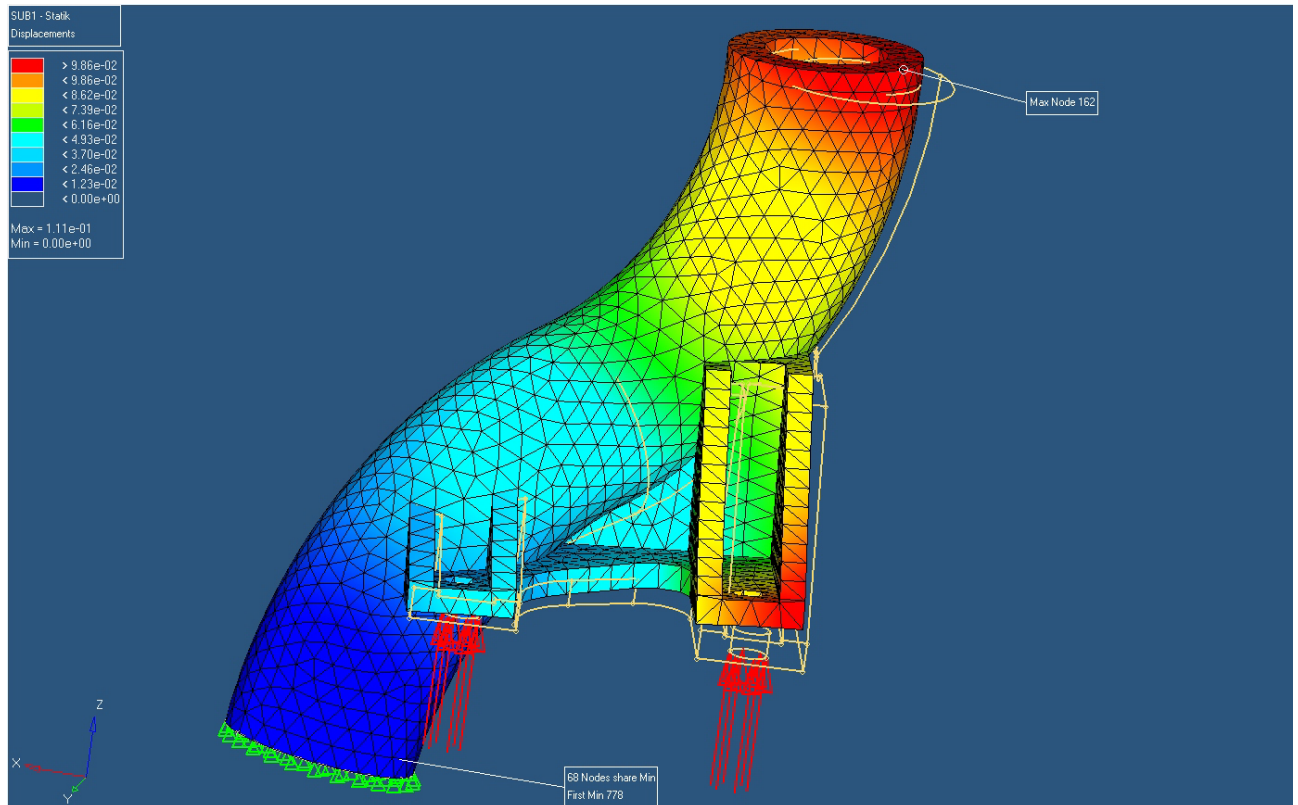


Finite-Elemente-Methode



Prof. Dr.-Ing. Wilfried Fischer

FH Dortmund

4. Auflage

11.10.2011

I Einführung

1 Einsatzgebiete der FEM

Statik (Verformungen, Spannungen, ...)

Dynamik (Eigenfrequenzen, Eigenformen, ...)

Strömungsprobleme (Geschwindigkeiten, Drücke, ...)

Stabilitätsprobleme (Knicklasten, Beullasten, ...)

Temperaturprobleme (Temperaturen, Spannungen, ...)

Akustik (Schallverteilung, ...)

Crash-Verhalten (Verformungen, Beschleunigungen, ...)

Bruchmechanik (J-Integral, K-Faktoren, Rißwachstum, ...)

Umformprozesse

E-Technik (elektrische Feldstärke, ...)

Optimierung (Parameter, Form, Topologie, ...)

...

2 Erwartungen von der FEM

Senkung der Entwicklungszeit

Senkung der Entwicklungskosten

Senkung der Produktionskosten

Einsparung von Material

Frühzeitiges Erkennen von Schwachstellen

Qualitätssteigerung der Konstruktion

Optimierung der Konstruktion

Reduzierung von Versuchsreihen

Flexible Anpassung an Folgekonstruktionen (Modellpflege)

Weiterbildung

Spaß und Interesse an neuen Aufgabengebieten

3 Anforderungen und Voraussetzungen, um diese Erwartungen zu erfüllen

Leistungsfähige Software

(ABAQUS, ADINA, ALGOR, ANSYS, ANTRAS, COSAR, COSMOS, ISAFEM, LUSAS, MARC, MECHANICA, NASTRAN, NISA, OPTISTRUCT, PERMAS, RADIOSS, ...)

Leistungsfähige Hardware

(PC, Workstation, Großrechner)

FEM-Theorie

Kenntnisse über die Grundlagen

Einarbeitungszeit in die FEM-Software

Ingenieurwissen zur kritischen Beurteilung der Ergebnisse

Modellierungsverständnis

(Reale Konstruktion \Rightarrow Berechnungsmodell)

4 Prinzipielle Vorgehensweise bei der Berechnung eines Bauteils mit der FEM

Ersetzen der realen Konstruktion durch ein
Berechnungsmodell
(Preprocessor, z. B. HyperMesh)

Berechnung der Verformungen, Spannungen, Schnittkräfte,
Lagerreaktionen usw. unter vorgegebenen Belastungen und
Lagerungsbedingungen
(FE-Analyseprogramm, Mainprocessor, z. B. OptiStruct)

Beurteilung der Ergebnisse
(Postprocessor, z. B. HyperMesh)

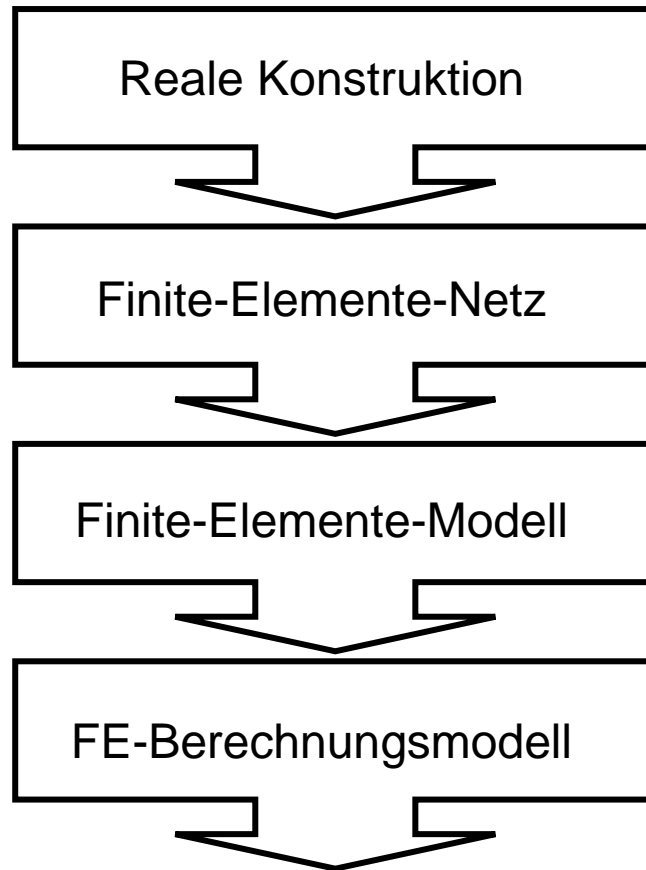
Gezielte **Optimierung** der Konstruktion anhand der
berechneten Verformungen, Spannungen, usw.

Eventuell **erneute Berechnung** mit einer modifizierten
Konstruktion bzw. einem modifizierten Modell

oder

Fertigung des Bauteils

5 Ersetzen der realen Konstruktion durch ein Berechnungsmodell



5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

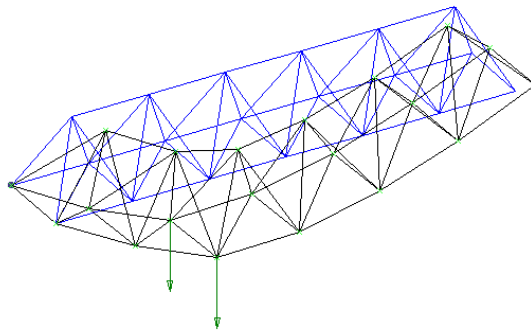
5.1.1 Wahl der Elementtypklasse

Linienelemente:	Stab, Balken, Rohr, Feder, Dämpfer z. B.: Fachwerke Wellen Rahmentragwerke Rohrleitungen
Flächenelemente:	Dreieck, Viereck z. B.: Blechbauteile Karosseriebauteile Behälter Gehäuse Rohrleitungen
Volumenelemente:	Hexaeder, Pentaeder, Tetraeder z. B.: Kurbelwellen Pleuel Getriebegehäuse
Sonstige Elemente:	Punktmasse, Starrkörper
Auswahlkriterien:	Art und Abmessungen des Bauteils Belastung des Bauteils Analysetyp (Statik, Dynamik, ...) Verlangte Resultate (lokal, global) Rechnerkapazität Modellierungszeit
Im Allgemeinen:	Mischung aus mehreren Elementtypen

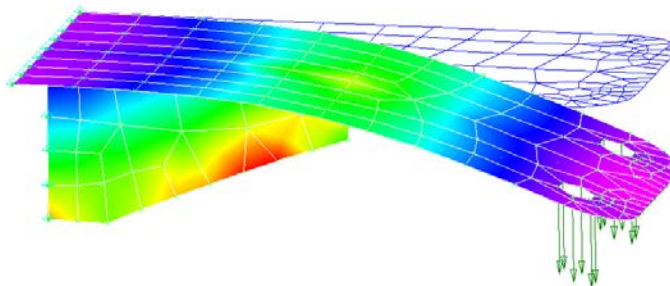
5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.2 Elementtypklasse: Typische Bauteile

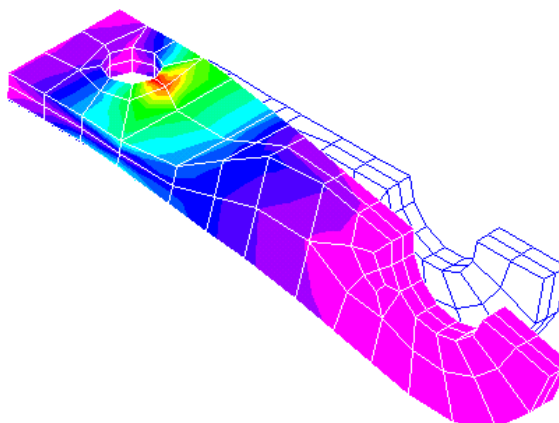
Typisches Bauteil mit Linienelementen:



Typisches Bauteil mit Flächenelementen:



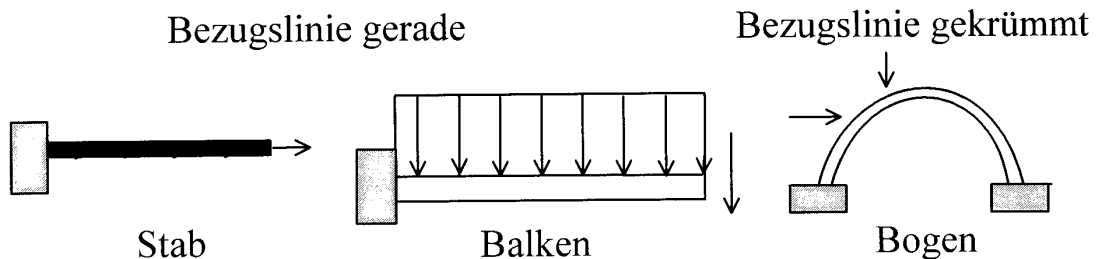
Typisches Bauteil mit Volumenelementen:



5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

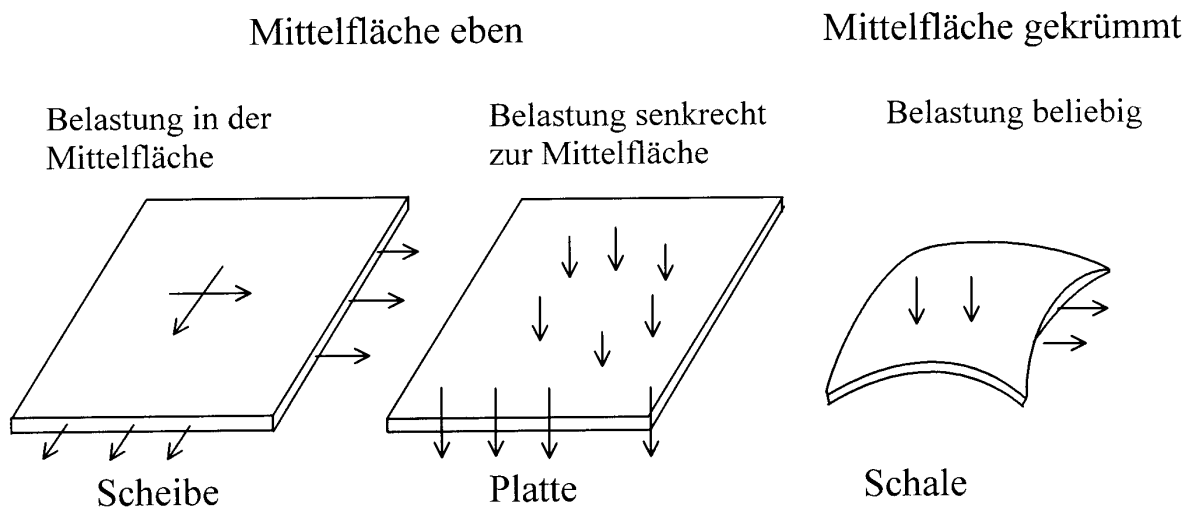
5.1.3 Elementtypklasse: Zuordnung zur Mechanik

Eindimensionales Kontinuum \Rightarrow Linienelemente



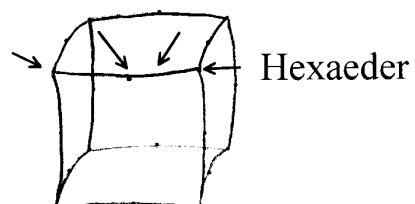
Zweidimensionales Kontinuum \Rightarrow Flächenelemente

Dicke klein im Vergleich zu den Längenabmessungen



Dreidimensionales Kontinuum \Rightarrow Volumenelemente

Ausdehnung in allen Richtungen
in der gleichen Größenordnung,
Oberflächen gekrümmt,
Belastungen in allen Richtungen



5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.4 Geometriemodell (Geometry)

Modellierung des Bauteils durch

Kreieren (Create),
Verschieben (Translate),
Rotieren (Rotate),
Skalieren (Scale),
Spiegeln (Reflect),
Projizieren (Project),
Positionieren (Position)

von

Geometrie-Koordinatenwerten

Punkt (Point, Node),

Geometrie-Linien-Elementen

Linie (Line),
Kreis (Circle),
Bogen (Arc),

Geometrie-Flächen-Elementen

Oberfläche (Surface),

Geometrie-Volumen-Elementen

Volumen (Solid)

und / oder

Übernahme der Konstruktionsdaten

aus Zeichnungen,
aus CAD-Dateien,
von Modellen

5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.5 Festlegung des Finite-Elemente-Typs

Linienelemente: (1D Elements)	Stab (Rod), Rohr (Tube), Balken (Bar, Beam), Schweißelement (Weld)
Flächenelemente: (2D Elements)	Schale (Shell), Schubblech (Shear)
Volumenelemente: (3D Elements)	Volumen (Solid)
Sonstige Elemente: (Other Elements)	Punktmasse (Mass), Feder (Bush, Elas), Dämpfer (Damp), Kontakt (Gap), Starrkörper (Rigid), Akustikelement (Acoustic)

5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.6 Elementeigenschaften (Properties)

Stab	Querschnittsfläche A , Torsionsträgheitsmoment J
Rohr	Außendurchmesser OD , Wandstärke T
Balken	Querschnittsfläche A , Hauptträgheitsmomente I_1, I_2 , Torsionsträgheitsmoment J
Schweißelement	Abstand D
Schale	Dicke T
Schubblech	Dicke T
Volumen	-
Punktmasse	Masse M
Feder	Federsteifigkeit K
Dämpfer	Dämpferkonstante B
Kontakt	Anfangskontakt, Steifigkeit, Reibung
Starrkörper	-
Akustikelement	

5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.7 Materialverhalten (Materials)

Materialverhalten: Isotrop,
Orthotrop,
Anisotrop,
Fluidisch,
Linear-elastisch,
Nichtlinear

Materialkennwerte: Elastizitätsmodul E ,
Querkontraktionszahl ν ,
Schubmodul G ,
Dichte ρ

z. B.:

Werkstoff: Stahl, isotrop

Analysotyp: Statik, linear-elastisch:

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.3$$

5.1 Reale Konstruktion \Rightarrow FE-Netz

5.1.8 Vernetzung (Mesh)

Unterteilung der Geometrie-Elemente in Finite Elemente bzw. direkte Vernetzung mit der gewünschten Feinheit

Manuell: Vorgabe von Unterteilungen (element size) für jedes Geometrie-Element und Vernetzung der Geometrie-Elemente

Automatisch: Vorgabe einer gewünschten Finite-Element-Kanten-Länge (elem size) oder einer Elementanzahl (elem density) und automatische Vernetzung eines Gebietes

Direkt: Direkte Generierung von Finiten Elementen (Mesh Create)

Im Allgemeinen: Mischung aus manueller, automatischer und direkter Vernetzung

\Rightarrow FE-Netz

5.2 FE-Netz \Rightarrow FE-Modell

5.2.1 Belastung (BCs)

Idealisierung und Definition der Belastung des Bauteils

Lastfall:	Einzelner Lastfall (Load Collector) Kombination von Lastfällen (Load Step)
Belastungsangabe:	Knotenbezogen (nodes) Elementbezogen (elems) Geometriebezogen (by geoms)
Belastungsart:	Statisch - Dynamisch Stationär - Nichtstationär Linear - Nichtlinear
Belastungstyp:	Einzelkraft (Forces) Einzelmoment (Moments) Flächenlast (Pressures) Temperatur (Temperatures) Eigengewicht (Gravity) Verformung (Displacement) Geschwindigkeit (Velocity) Beschleunigung (Acceleration) ...

5.2 FE-Netz \Rightarrow FE-Modell

5.2.2 Randbedingung (BCs - Constraints)

Idealisierung und Definition der Lagerung des Bauteils

Randbedingungsfall:	Lagerungsfall (Load Collector)
Randbedingungsangabe:	Knotenbezogen (nodes) Geometriebezogen (by geoms)
Randbedingungstyp:	Einzelne Randbedingung (SPC) Kopplung (MPC)
Randbedingung:	Einspannung (Fixed) Gelenkig gelagert (Pinned) Verdrehfest (No Rotation) Symmetrie (Symmetry) Antimetrie (Antisym) Frei (Free) Einzelne Freiheitsgrade (FHG) (Degree of Freedom (DOF)): dof1 – Translation in x-Richtung dof2 – Translation in y-Richtung dof3 – Translation in z-Richtung dof4 – Rotation um die x-Achse dof5 – Rotation um die y-Achse dof6 – Rotation um die z-Achse

\Rightarrow FE-Modell

5.3 FE-Modell \Rightarrow FE-Berechnungsmodell

Weitere Angaben zur Durchführung der Berechnung

Analysetyp:

- Festigkeitsanalyse (linear static)
- Wärmeübertragung (heat transfer)
- Eigenschwingungen (normal modes)
- Knicken/Beulen (linear buckling)
- Harmonische Schwingungserregung (freq. resp direct/modal)
- Transiente Schwingungserregung (transient direct/modal)
- Nichtlineare Statik (non-linear quasi-static)
- Mehrkörperdynamik (multi-body dynamics)
- Dauerfestigkeit (fatigue)
- Große Deformationen (geometric non-linear)
- Optimierung (optimization)

Spezifikation des Last- und Randbedingungsfalls (Load Step)

Umfang der Ergebnisausgabe

Angaben zum Restart

...

\Rightarrow FE-Berechnungsmodell

6 Prinzipielle theoretische Vorgehensweise am Beispiel der „Scheibe“ in der Statik

6.1 Differentialgleichungen für das Kontinuum

Elastizitätsgesetz:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: Spannungen

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: Verzerrungen

E: Elastizitätsmodul

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

ν : Querkontraktionszahl

G: Schubmodul

Verzerrungs - Verschiebungs - Relation:

$$\varepsilon_x = u'$$

$[]'$: Ableitung nach x

$$\varepsilon_y = v'$$

$[]''$: Ableitung nach y

$$\gamma_{xy} = u' + v'$$

u, v: Verschiebungen

Gleichgewicht:

$$\sigma'_x + \tau'_{xy} + f_x = 0$$

f_x, f_y : Volumenkräfte

$$\sigma'_y + \tau'_{xy} + f_y = 0$$

6 Prinzipielle theoretische Vorgehensweise am Beispiel der „Scheibe“ in der Statik

6.2 Prinzip der virtuellen Verrückungen (P.d.v.V.):

$$\delta A_i = \delta A_a$$

Virtuelle innere Arbeit:

$$\delta A_i = \iint \underline{\sigma}^T \cdot \underline{t} \cdot \delta \underline{\varepsilon} \, dx dy$$

Virtuelle äußere Arbeit:

$$\delta A_a = \iint \underline{f}^T \delta \underline{u} \, dx dy + \int \underline{\sigma}_r^T \cdot \underline{t} \cdot \delta \underline{u}_r \, ds$$

mit:

- $\underline{\sigma}$: Spannungsvektor
- $\underline{\varepsilon}$: Verzerrungsvektor
- \underline{f} : Lastvektor
- \underline{u} : Verschiebungsvektor
- \underline{t} : Scheibendicke
- $(\)_r$: Randgröße
- $\delta(\)$: virtuelle Größe

6 Prinzipielle theoretische Vorgehensweise am Beispiel der „Scheibe“ in der Statik

6.3 Klassische Finite-Elemente-Methode

Deformationsgrößenverfahren:

Die Unbekannten im aufzustellenden Gleichungssystem sind
Deformationen
(hier: Verschiebungen u in x-Richtung und v in y-Richtung)

also:

Elimination aller Verzerrungen und Schnittkräfte mit Hilfe der
Verzerrungs - Verschiebungs - Relation und dem Elastizitätsgesetz

und:

Einführung von „Ansatzfunktionen“ für die wirklichen und für die
virtuellen Verschiebungen im P.d.v.V.

Daraus folgt das lineare Gesamtgleichungssystem:

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}$$

mit:

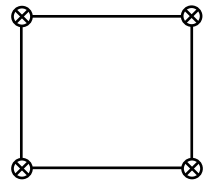
$\underline{\underline{S}}$:	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{u}}$:	Gesamtverschiebungsvektor
$\underline{\underline{F}}$:	Gesamtbelastungsvektor

6 Prinzipielle theoretische Vorgehensweise am Beispiel der „Scheibe“ in der Statik

6.4 Ansatzfunktionen für die Verschiebungen $u(\xi, \eta)$

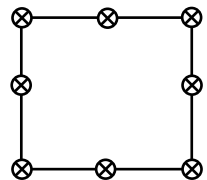
Bilinearer Ansatz, QUAD4:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta$$



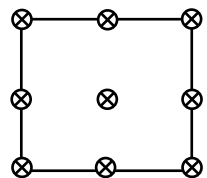
Quadratischer Ansatz, Serendipity, QUAD8:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2$$



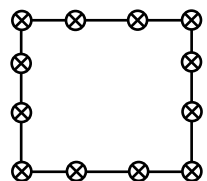
Quadratischer Ansatz, Lagrange, QUAD9:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 + c_9\xi^2\eta^2$$



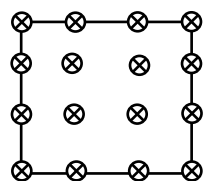
Kubischer Ansatz, Serendipity, QUAD12:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3 + c_{11}\xi^3\eta + c_{12}\xi\eta^3$$

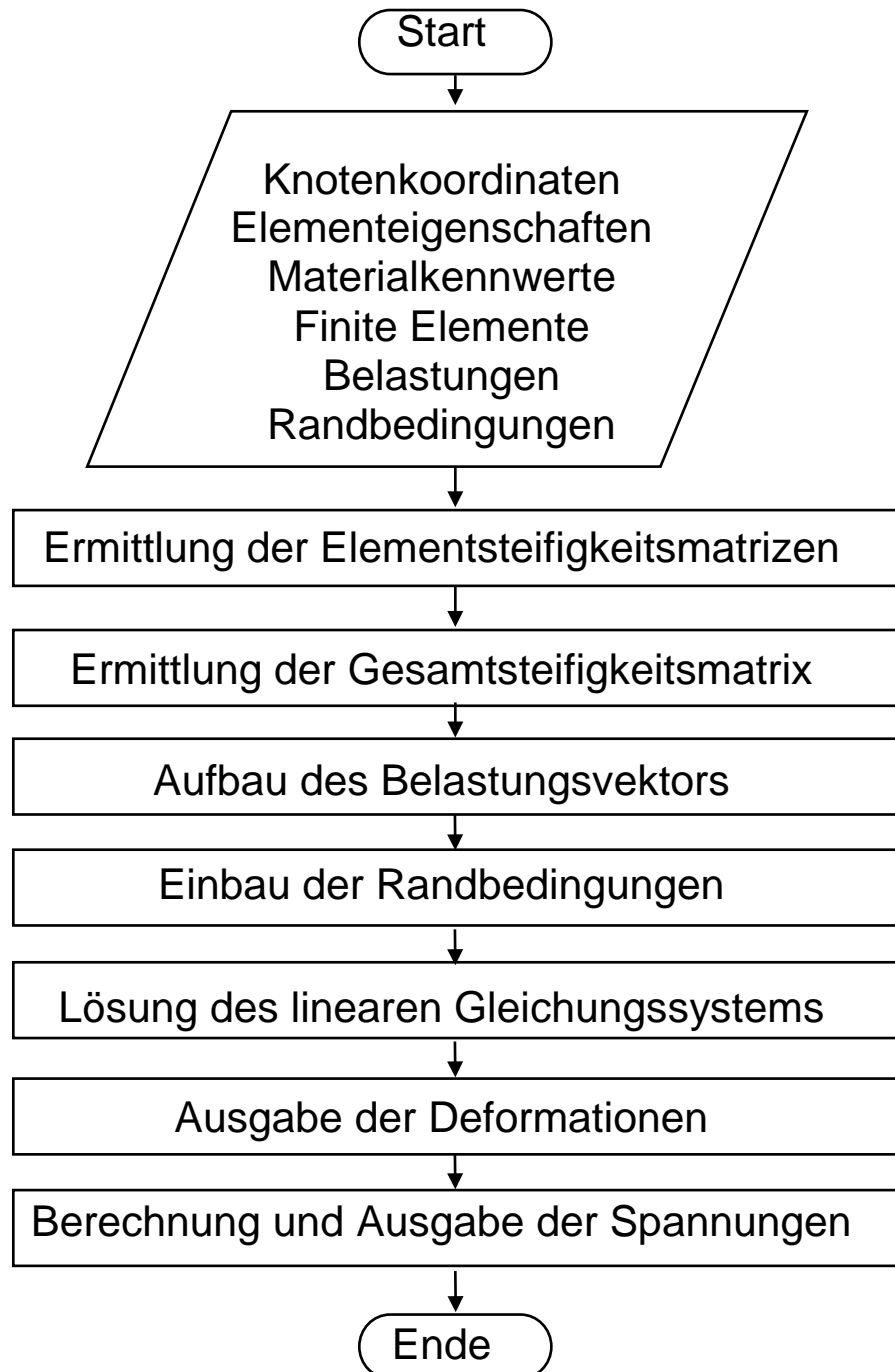


Kubischer Ansatz, Lagrange, QUAD16:

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3 + c_{11}\xi^3\eta + c_{12}\xi\eta^3 + c_{13}\xi^2\eta^2 + c_{14}\xi^2\eta^3 + c_{15}\xi^3\eta^2 + c_{16}\xi^3\eta^3$$



7 Prinzipieller Ablauf eines FE-Programms



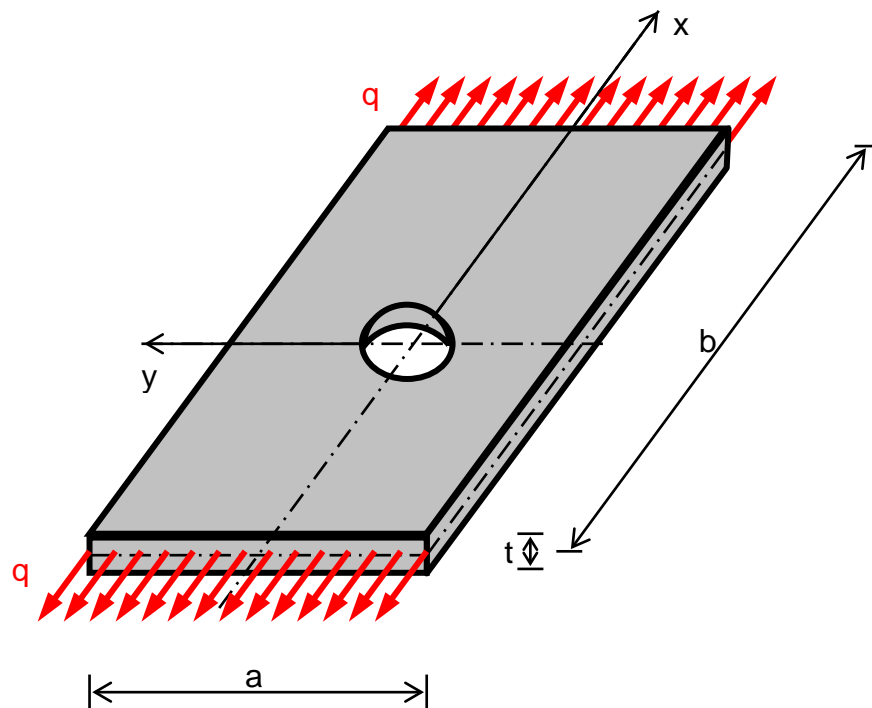
8 Literatur zur Einführung in die FEM

Adam	BASIC-Programme zur Methode der finiten Elemente, Teubner-Verlag, 1986
Bathe	Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, 1986
Fröhlich	FEM-Anwendungspraxis, Vieweg-Verlag, 2005
Fröhlich	FEM-Leitfaden, Springer-Verlag, 1995
Groth	FEM-Anwendungen, Springer-Verlag, 2002
Hahn	Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre, Akademische Verlagsgesellschaft, 2. Auflage, 1982
Heim	FEM mit NASTRAN, Hanser-Verlag, 2005
Klein	FEM, Vieweg-Verlag, 5. Auflage, 2003
Knothe / Wessels	Finite Elemente, Springer-Verlag, 1991
Link	Finite Elemente in der Statik und Dynamik, Teubner-Verlag, 3. Auflage, 2002
Mayr / Thalhofer	Numerische Lösungsverfahren in der Praxis, Hanser-Verlag, 1993
Müller / Rehfeld / Katheder	FEM für Praktiker, Expert-Verlag, 2. Auflage, 1995
Rieg / Hackenschmidt	Finite Elemente Analyse für Ingenieure, Hanser-Verlag, 2000
Schwarz	FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente, Teubner-Verlag, 1981
Schwarz	Methode der finiten Elemente, Teubner-Verlag, 1980
Steinbuch	Finite Elemente – Ein Einstieg, Springer-Verlag, 1998
Steinbuch	Simulation im konstruktiven Maschinenbau, Fachbuchverlag, 2004
Steinke	Finite-Element-Methode, Cornelsen-Verlag, 1992
Steinke	Finite-Elemente-Methode, Springer-Verlag, 2004
Zienkiewicz	Methode der finiten Elemente, Hanser-Verlag, 2. Auflage, 1984

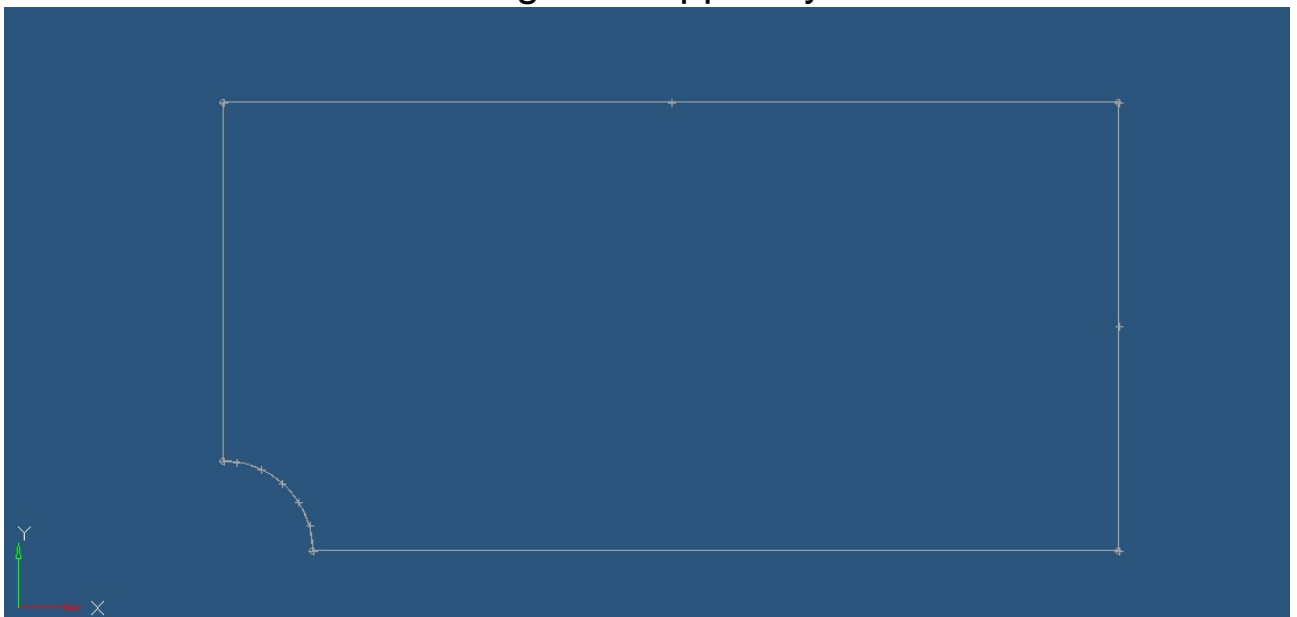
9 Prinzipielle Durchführung einer FEM-Berechnung

Berechnung der Verformungen und der Spannungen eines Zugstabes mit Bohrung

9.1 Zugstab mit Bohrung:



9.2 Geometrie-Modell (Geometry): Ausnutzung der Doppel-Symmetrie



9 Prinzipielle Durchführung einer FEM-Berechnung

Berechnung der Verformungen und der Spannungen eines Zugstabes mit Bohrung

9.3 Materialkennwerte (Materials):

Stahl:

Isotrop, Anwendung im linear-elastischen Bereich:

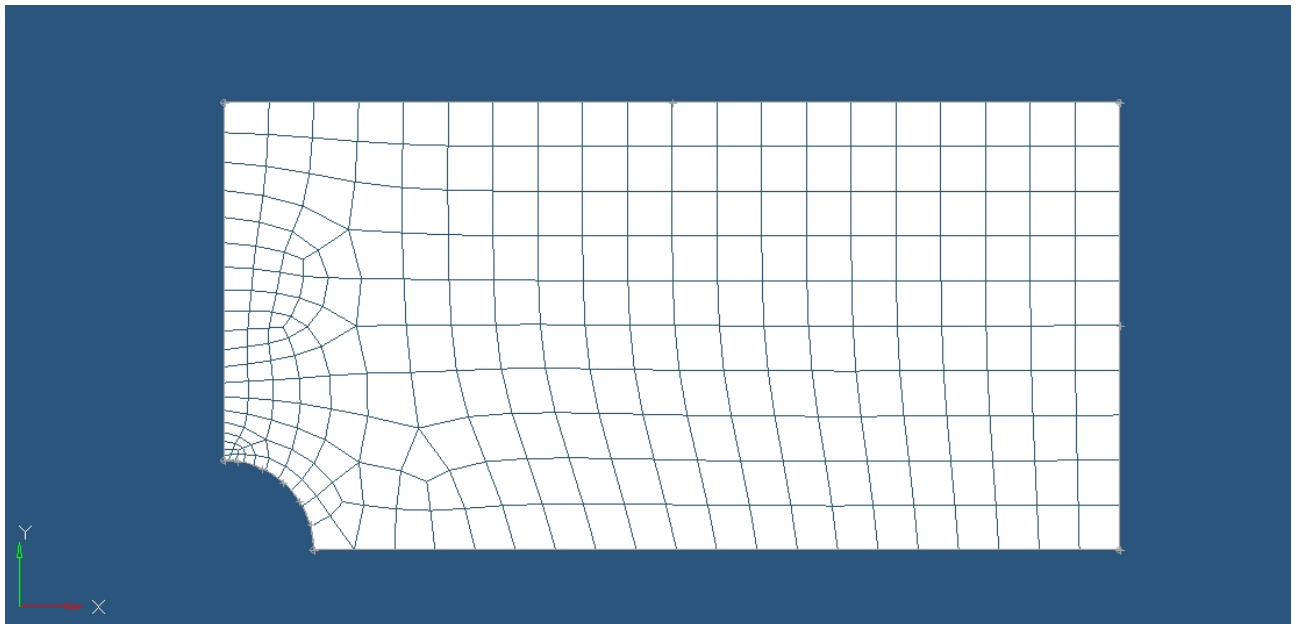
Elastizitätsmodul: $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Querkontraktionszahl: $\nu = 0.3$

9.4 Elementeigenschaften (Properties):

Dicke: $t = 5 \text{ mm}$

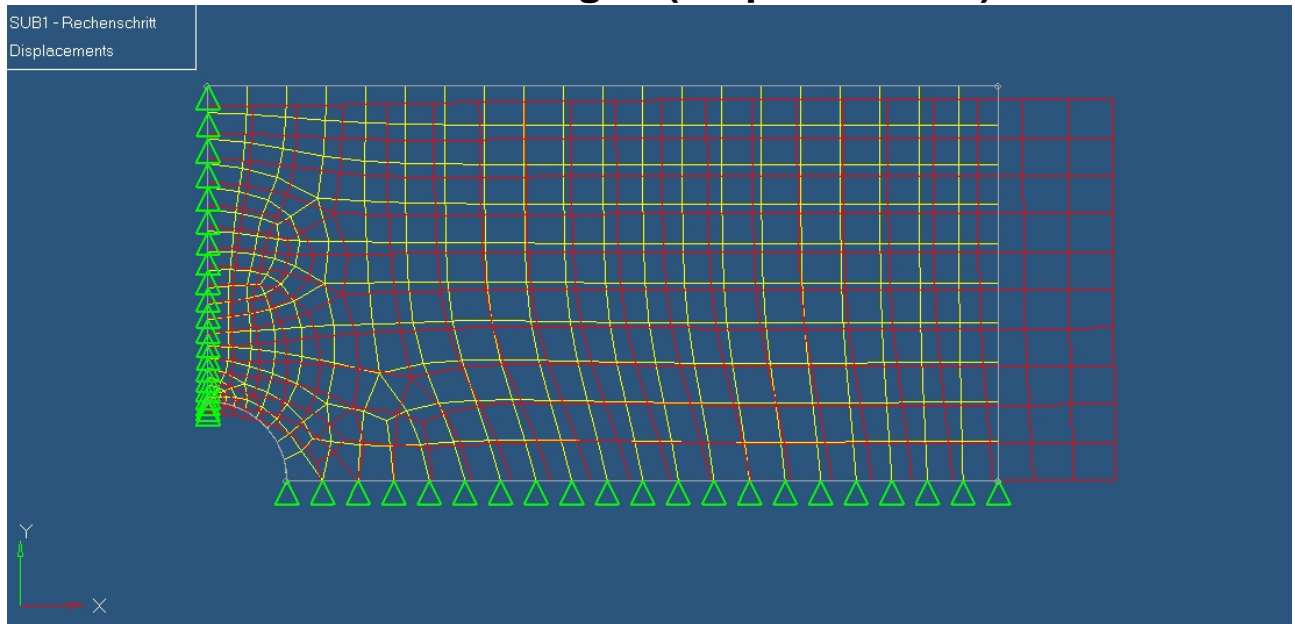
9.5 Finite-Elemente-Netz (Mesh):



9 Prinzipielle Durchführung einer FEM-Berechnung

Berechnung der Verformungen und der Spannungen eines Zugstabes mit Bohrung

9.8 Verformungen (Displacements):



9.9 Spannungen (Stresses):

