M1
Matemática 1

UNIDAD 01

CLASE 01

A PURA DISCRECIÓN...

| ¿Qué entiendes por sistema de numeración?
| ¿Cuáles sistemas conoces?
| ¿Cómo se forma un número en el sistema decimal?
| ¿Cómo se forma un número en cualquier otro sistema?

| ¿Por qué hace falta saber qué es un sistema de numeración?
| ¿Cómo se forman los números?
| ¿Se puede realizar la conversión un número en un sistema de numeración a otro sistema?
| ¿Dos números diferentes pueden corresponder a la misma cantidad?

ISSD
-Des-
Desarrollo de Software

MÓDULO DIDÁCTICO
2020

Introducción

Hola, ¡Buenas noches, buenas tardes o buen día!

No sé en que momento del día ustedes se pondrán con la lectura y estudio de esta materia, ojalá sea cualquiera, pero ¡esperamos que lo hagan lo más a menudo posible!

Les contamos que en la permanente búsqueda de alcanzar los mejores resultados de los alumnos, hemos puesto en marcha una adaptación de los módulos de estudio (apuntes) para que se parezcan lo más posible a una clase presencial.

Y, si podemos tomarle asistencia de algún modo, ¡se la tomaremos! No… es una broma, aunque no sería mala idea...

En la clase de hoy comenzaremos a estudiar los sistemas de numeración. Un tema que, aunque no lo parezca, es conocido por ustedes desde que son muy pequeños.

Imaginemos al hombre de la antigüedad en una situación como esta: una persona ya establecida en un lugar practica la cría de animales y, como no es algo común, debe cuidarlos de los arrebatos de sus vecinos y visitantes pasajeros. Esta persona controlaba la cantidad de animales guardando en su bolso de piel una piedrita por cada animal que entraba al corral. Entonces, cuando salían los animales a pastorear, iba sacando, de a una, las piedritas de su bolso y al regresar, cuando caía la noche, las colocaba nuevamente dentro del bolso; si quedaba alguna piedra afuera quería decir que *faltaba que regresara algún animal y entonces salía en su búsqueda. De esa manera, cada piedra representaba un animal.*

Pero, ¿qué pasó? La cantidad de animales fue aumentando, y con ello la cantidad de piedras que debía guardar en el bolso, lo cual se hacía pesado y trabajoso. Entonces a esa persona se le ocurrió lo siguiente: "cuando llene un bolso de piedras, cambio esa cantidad por un palito", y así comenzó a trabajar con dos elementos para llevar el control de la cantidad de animales. Como la cantidad de animales aumentaba aún más, también lo hacían los palitos dentro del bolso hasta que lo llenó, y fue entonces cuando se le ocurrió cambiar la cantidad de palitos que llenaron el bolso por una pieza de cuero. Así comenzó a trabajar con tres elementos para llevar el control de la cantidad de animales.

No estaría mal pensar que podríamos continuar este mecanismo para controlar cualquier cantidad de animales, pero también es evidente que no sería para nada práctico, ya que cada cantidad estaría siempre representada con una serie de elementos concretos, como lo son las piedras, palos, cueros, etc. Fue entonces cuando a alguien se le planteó el interrogante de trabajar con elementos concretos y no con algún tipo de símbolo que los represente. Y así fue como nacieron los sistemas de numeración, que no son más que un conjunto de símbolos y normas o reglas que permiten representar alguna cantidad.

Definición:
"Un sistema de numeración es un conjunto de reglas que permite nombrar y representar cualquier cantidad, a partir de una serie finita de símbolos".

A pura discreción...

Existen distintos sistemas de numeración. El más usado es el **sistema de numeración decimal**, que consta de diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esta sería la serie finita a la cual hace referencia la definición. A estos símbolos se los suele llamar **DÍGITOS** o **CIFRAS**.

La combinación de estos diez símbolos, a partir de ciertas reglas, permite expresar cualquier cantidad en sistema de numeración decimal.

Otro sistema de numeración es el **Romano**, cuyos símbolos son:

I, V, X, L, C, D, M

Entre estos dos sistemas tiene prevalencia el decimal, fundamentalmente por dos motivos:

| El símbolo **“0”** (cero), que no existe en el romano.

| El valor posicional de las cifras. Es decir, en un número de tres cifras como **235** quiere indicar. |1|

O sea, según la posición de la cifra, da su “valor” en el número que se quiere indicar.

Los sistemas de numeración como el decimal, donde el valor de la cifra depende de la posición, se los llama **sistemas posicionales**. En cambio, los sistemas donde el valor de la cifra no depende de la posición, como en el Romano, se los llama **no posicionales**.

|1|

2 3 5

→ **5.1**	**=**	**5**	**5 unidades**
→ **3.10**	**=**	**30**	**3 decenas**
→ **2.100**	**=**	**200**	**2 centenas**
		235	

|2|

Sistema binario → 2 unidades

Sistema octal → 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Sistema hexadecimal → 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, A, B, C, D, E, F.*

La notación posicional permite además realizar fácilmente las operaciones elementales de adición, sustracción, multiplicación y división. En cualquier otro sistema no posicional será difícil realizar esas operaciones, como ocurre por ejemplo en el sistema de numeración Romano, en el cual se pueden representar números grandes, pero no se puede operar fácilmente con ellos.

No obstante, el sistema decimal no es el único posicional. Otros sistemas de numeración posicionales son, por ejemplo: |2|

Estos sistemas se estudiarán con mayor detalle luego, debido a la importancia que tienen en el campo de la computación.

Existen infinitos sistemas de numeración posicionales, por lo tanto cualquier serie finita de símbolos que contenga al cero y al uno constituye un sistema. La regla de formación de los números para todos los sistemas posicionales es la misma.

En general, la serie finita de símbolos de un sistema de numeración constituye su BASE (b). Para los ejemplos citados. |3|

Por lo expuesto hasta el momento, debe quedar claro que la CANTIDAD es ÚNICA y que se puede representar de distintas formas según el sistema de numeración en que se trabaje.

|3|

Sistema binario ⟶ b = 2

Sistema octal ⟶ b = 8

Sistema hexadecimal ⟶ b = 16

Ejemplo N°1:
Muy bien, entonces tomemos una cantidad cualquiera de símbolos, como podrían ser los asteriscos que representamos en el siguiente conjunto, y esa "única cantidad" la podemos escribir de diferentes modos según la base que elijamos. |4|

La siguiente tabla muestra algunas de las formas de representación de ciertas cantidades (cada columna representa una misma cantidad). |5|

¡Ah! ¡Pero qué gracioso! Sí, hemos mostrado cómo escribir una cantidad según la base del sistema, pero, ¿cómo se hace la representación?

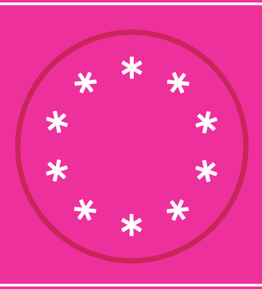
Regla de formación de los números

Dada una cierta cantidad de elementos, para obtener el número que la representa en una determinada base, debemos agrupar los elementos según esa misma base.

Por ejemplo, si queremos formar el número binario que representa a una cierta cantidad, debemos hacer grupos de dos. Si queremos formar un número en base tres, debemos armar grupos de tres elementos, etc.

Es decir que, la cantidad de cada grupo va a ser igual a la cantidad de elementos de la base.
Si en el sistema binario, por ejemplo, al armar los grupos de dos, se forman más de dos grupos, deberemos reagrupar en grupos de dos.

|4|

Cantidad **ÚNICA**	Representaciones **DISTINTAS**
	10 en decimal 1010 en binario 12 en octal A en hexadecimal

|5|

Binario	0	1	10	101	1000	1010	1101	1111	10000
Octal	0	1	2	5	10	12	15	17	20
Decimal	0	1	2	5	8	10	13	15	16
Hexadecimal	0	1	2	5	8	A	D	F	10

Entonces, si la cantidad de grupos excede el número de la base, debemos formar grupos de grupos.

Luego, el número se forma escribiendo de derecha a izquierda el dígito de la base que corresponda con la cantidad de elementos sueltos (o sea, que no alcanzaron para armar un grupo), seguido del dígito que corresponda a la cantidad de grupos, después el que corresponda a la cantidad de grupos de grupos, etc.

¡Ahora sí! Parece sencillo, agrupamos y agrupamos y volvemos a agrupar, ¡es un trámite! Con el próximo ejemplo seguro quedará más claro y despejaremos cualquier duda que haya quedado:

Por ejemplo, para la cantidad:

* * * * * * * * * * * * * * *

| En **sistema de base tres**, podemos agrupar del siguiente modo. |6|

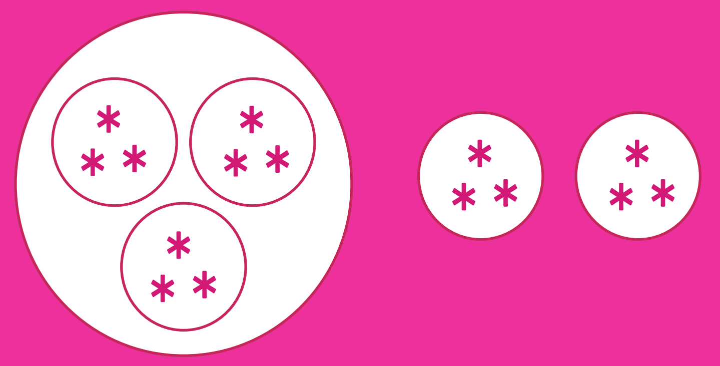
Hemos armado 1 grupo de 3 grupos de 3, 2 grupos de 3 y 0 elementos sueltos.

Los dígitos a usar son: 0 (elementos sueltos)
2 (grupos de 3)
1 (grupo de 3 grupos de 3)

Entonces, el número en base 3 que representa la cantidad indicada es 120.

| En el **sistema octal** a la misma cantidad podríamos agruparla así: |7|

|6|



|7|

Hemos armado 1 grupo de 8 y 7 elementos sueltos.

Los dígitos a usar son: 7 (elementos sueltos)
1 (grupo de 8)

Entonces, el número en base octal que representa la cantidad indicada es 17.

En el **sistema hexadecimal** no podemos armar un grupo de 16 elementos, sino que son simplemente 15 elementos sueltos.

El dígito de la base hexadecimal a usar es F. Por lo tanto, el número en base 16 que representa la cantidad indicada es F.
Bueno, ya está, demasiada explicación y resolución de nuestra parte. Ha llegado el turno de ustedes ¿qué les parece? Sólo deberán repetir el procedimiento que arriba le explicamos para diferentes bases. ¡Ojo! No es para que lo hagan mañana, ni más tarde, es para "ya", tienen diez minutos para hacerlo...

Referencia:
Cuando los sistemas de numeración tienen más de 9 cifras, es necesario recurrir a otros símbolos (las letras por ejemplo) para obtener nuevas cifras, ya que 10 (que le sigue al 9) tiene dos.

Desempeño 1

Expresá la cantidad del ejemplo anterior, utilizando agrupamientos en las bases:

a. 4

b. 10

c. 13

d. 2

Si querés te ayudo con el primero, es decir, en base 4:

Si con esa cantidad armamos grupos de cuatro elementos, quedarían tres sin agrupar, que serían las unidades 3 grupos de 4 cada uno y a esos tres elementos ya no los podemos agrupar más. Por lo tanto, esa cantidad en base 4 será:

$$\boxed{* \ * \ * \ *}\ \boxed{* \ * \ * \ *}\ \boxed{* \ * \ * \ *}\ * \ * \ * = 33_{(4}$$

El 4 como subíndice expresa la base utilizada. Más adelante se lo explicamos mejor.

Muy bien, pasados los 10 minutos volvemos a la explicación del resto de temas previstos para hoy. Así como una misma cantidad puede ser expresada en distintas bases, es de suma utilidad conocer las relaciones entre las diferentes representaciones. Por ejemplo, una persona dice que posee $34_{(5}$ animales y otra manifiesta que posee más, ya que tiene $222_{(3}$. Para poder resolver este conflicto numérico será necesario expresar las cantidades en una misma base, ya sea pasando el $34_{(5}$ a base 3 o el $222_{(3}$ a la base 5. Es por este motivo que a continuación estudiaremos, estudiaremos, estudiaremos (no piensen que me equivoqué, es solo para recordarles que necesitamos estudiar) como decía, estudiaremos la conversión de un sistema a otro, es decir, cómo expresar una cantidad en diferentes bases.

Conversión de un sistema de numeración a otro

Como se trabajará con distintas bases, para distinguir en cuál está escrito un número dado, se colocará luego de sus cifras y como subíndice el número de la base en que está escrito, a excepción de la base decimal en la que no se escribirá nada. Ejemplo:

$$\mathbf{121_{(3} \quad 121 \quad 121_{(5}}$$

Estos tres números corresponden a distintas cantidades expresadas en sistema de base 3, decimal y base 5, respectivamente.

En esta sección veremos los procedimientos a través de los cuales un número en una determinada base (b) lo podemos expresar en cualquier otra (b’).

Estos procedimientos que surgen directamente de la regla de formación de los números son:

Conversión de un número en base b a base decimal

Analicemos la regla de conversión a través de ejemplos.

Ejemplo N° 2

Si queremos expresar el número $1203_{(4}$ en base decimal, hagamos una lectura de lo que las cifras de dicho número representan en términos de la regla de formación de los números. |8|

Sumando $3 + 0.4 + 2.4.4 + 1.4.4.4 = 99$ obtenemos la cantidad en el sistema decimal.

Es decir **$1203_{(4} = 99$**

Ejemplo N° 3

Para convertir el número $325_{(6}$ a base decimal hacemos: |9|

En general, el procedimiento de conversión a la base decimal consiste en multiplicar las cifras del número a convertir de derecha a izquierda por potencias crecientes de la base, empezando de exponente cero (esto es la NOTACIÓN EXPANDIDA del número) y luego sumar estos resultados. El número que se obtiene es la representación de la cantidad en el sistema decimal.

Ejemplo N° 4

Para convertir $4621_{(7}$ a decimal hacemos:

Cifras del número tomadas de derecha a izquierda.

$4621_{(7} = 1 \,.\, 7^0 + 2 \,.\, 7^1 + 6 \,.\, 7^2 + 4 \,.\, 7^3$ → ***Notación expandida.***

Potencias crecientes de la base.

|8|

$1\ 2\ 0\ 3_{(4}$

3 elementos sueltos - o sea, 3 elementos
0 grupos de 4 elementos - o sea, 0.4 elementos
2 grupos de grupos de 4 - o sea, 2.4.4 elementos
1 grupo de grupos de gr. de 4 - o sea, 1.4.4.4 elementos

|9|

$3\ 2\ 5$

5 elementos - 5 elementos
2 grupos de 6 elementos - 2.6 elementos
3 grupos de grupos de 6 - 3.6.6 elementos

Entonces: **4621$_{(7}$ = 1681**

Si el número tiene parte decimal, ésta se convierte continuando con la notación expandida, pero con potencias negativas y decrecientes desde “-1” hacia la derecha de la coma.

Ejemplo N° 5

Para convertir 23,431$_{(6}$ a base 10 se hace:

$$\underbrace{\mathbf{3}\,.\,6^{0} + \mathbf{2}\,.\,6 + \mathbf{4}}_{\textit{Conversión de la parte entera.}}\,.\,\underbrace{6^{-1} + \mathbf{3}\,.\,6^{-2} + \mathbf{1}\,.\,6^{-3}}_{\textit{Conversión de la parte decimal.}}$$

Obteniéndose como resultado: **23,431$_{6}$ = 15,7546296**

Ahora que ya aprendimos a pasar de la base b (cualquier base) a la base 10, sea un número entero o decimal, es hora de que nuevamente hagan algunos ejercicios, y nuevamente también les ruego, les pido, solicito y exijo que los hagan ahora. Gracias, en quince minutos nos vemos.

Desempeño 2

Convertí a base decimal:

a. $1321_{(4}$
b. $1321_{(5}$
c. $1321_{(6}$
d. $1{,}321_{(7}$
e. $0{,}132_{(4}$
f. $13{,}21_{(6}$

Te doy las respuestas, para que controles…

a. 121
b. 211
c. 337
d. 1,4723
e. 0,46875
f. 9,36111

Deben tener presente que al controlar los ejercicios resueltos, pueden o no coincidir los resultados. Uno de los motivos podría ser que ustedes se hayan equivocado, con lo cual deberán rehacerlo, pero también es probable que el resultado escrito en la respuesta esté mal, lo que hará que aunque ustedes no se hayan equivocado, lo rehagan igual. Esto es una buena práctica ¡qué buena estrategia! ¿No?

Como ya han pasado los quince minutos que les dí para la resolución de los ejercicios, es momento de seguir con las explicaciones.

A continuación, trataremos de ver el procedimiento inverso al aprendido recién, es decir, ahora haremos la conversión de la base decimal a una base b cualquiera.

Conversión de un número en base decimal a base b

Así como lo hicimos en la explicación de la conversión anterior, trataremos de hacer esta otra también con la ayuda de ejemplos que nos permitan comprender el procedimiento.

Ejemplo Nº 6
Si quisiéramos expresar el número 446 en la base 5, deberíamos, según la regla de formación vista, hacer grupos de cinco elementos. Esto lo podemos hacer a través de sucesivas divisiones del número 446 en 5. |10|

Interpretemos los restos y cocientes obtenidos:

| La primera división indica que se pueden armar 89 grupos de 5 y queda un elemento suelto.
| La segunda división indica que de esos 89 grupos pueden hacerse 17 grupos de grupos y quedan cuatro grupos de cinco.
| La tercera división indica que de esos 17 grupos de grupos pueden hacerse 3 grupos de grupos de grupos de 5 y quedan dos grupos de grupos de cinco.
| El último cociente ya fue analizado e indica 3 grupos de grupos de 5.

Por lo tanto, el número 446 en base cinco es 3241: **$446 = 3241_{(5}$**

En general, el procedimiento de conversión desde la base decimal a otra consiste en hacer sucesivas divisiones del número en la base en que queremos expresarlo. El número que se obtiene escribiendo el último cociente y los restos desde el último hacia el primero corresponde al resultado en la base deseada.

|10|

```
446 |_5
 46  89 |_5
  1  39  17 |_5
      4   2   3
```

Ejemplo N° 7:

Expresá el número 108 en base 4. Hacemos sucesivas divisiones. |11|

El último cociente (1) y los restos del último al primero forman el número 1230.

Por lo tanto, el número 108 es 1230 en base 4: **108 = 1230$_{(4}$**

Ejemplo N° 8:

Expresá el número 96185 en base 13 * |12|

El último cociente es 3; los restos del último al primero son 4, 10, 1 y 11. En este caso, al formar el número, debemos recordar que 10 en base 13 se representa por A y 11 por B, entonces el resultado es

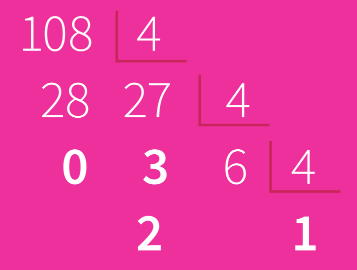
$$\mathbf{96185 = 34A1B_{(13}}$$

Si el número a convertir tiene parte decimal, ésta se convierte por separado, multiplicándola por la base y considerando que tiene parte entera ‘0’.

La parte entera de este ***primer producto*** será la ***primera cifra*** a la derecha de la coma del número convertido.

A la parte decimal de este producto (considerada con parte entera ‘0’) se la vuelve a multiplicar por la base. La parte entera de este ***segundo producto*** será la ***segunda cifra*** a la derecha de la coma del número convertido.

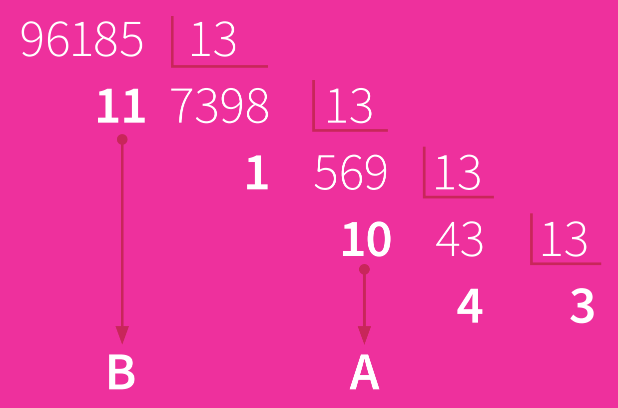
|11|



Comentario

Observá que las divisiones son enteras, es decir, que una vez que se han utilizado todas las cifras del dividendo no se agrega cero ni se trabaja con coma.

|12|



Referencia:

En este ejemplo y en los sucesivos solo se colocará el resto de las divisiones, sin escribir los pasos intermedios.

Este proceso se repite hasta obtener una parte decimal nula o hasta que observemos que comienzan a repetirse los valores. O bien, se decide de ante mano con cuantas cifras después de la coma se quiere trabajar. Veamos un ejemplo para aclarar las ideas:

Ejemplo N° 9:
Para convertir 213,56 a base 11, convertimos la parte entera. |13|

Convertimos la parte decimal:

0,56 x 11 = **6**,16	* 0,6
0,16 x 11 = **1**,76	* 0,61
0,76 x 11 = **8**,36	* 0,618
0,36 x 11 = **3**,96	* 0,6183
0,96 x 11 = **10**,56	* 0,6183A
0,56	

* Aquí observamos que comienza a repetirse, por lo que no hace falta seguir resultando.

Entonces: $\mathbf{0{,}56 = 0{,}6183A6183A.....}_{(11}$

$\mathbf{213{,}56 = 184{,}6183A6183A.....}_{(11}$

|13|

```
213 | 11
  4   19 | 11
       8    1
```

$213 = 184_{(11}$

Desempeño 3

¿Se cansaron? Esperamos no haberlos aburrido mucho, sino todo lo contrario. Ojalá se hayan divertido durante esta primera clase y por supuesto hayan entendido todo lo que tratamos de explicarles.
Antes de terminar con esta clase les vamos a pedir por favor que se tomen otros quince minutos y resuelvan lo que a continuación les presento:

Convertí a la base indicada:

a. 314 a base 3

b. 21 a base 2

c. 61,09 a base 13, con tres decimales.

d. 19,185 a base 16, con dos decimales.

Te doy las respuestas, para que controles...

a. $102122_{(3}$

b. $10101_{(2}$

c. $49{,}122_{(13}$

d. $13{,}2F_{(16}$

Desempeño de síntesis

No conforme con todo lo que hicieron ya, le vamos a pedir aún más. No ahora, puede ser mañana o dentro de un par de días. Con el objetivo de repasar y afianzar los conceptos vistos hoy, resuelvan los siguientes ejercicios.

¡Mucha suerte! No se dejen estar ni un día con el estudio. ¡Hasta la próxima clase!

1| Dada la cantidad * * * * * * * * * * * * * a través de agrupamientos expresala en:

a. base 5
b. base 10
c. base 2
d. base 14

2| Convertí a base decimal:

$1011_{(2}$ | $-31_{(8}$ | $30{,}02_{(4}$ | $BA1{,}7_{(16}$ | $-468_{(9}$ | $1442{,}31_{(5}$

3| Determiná cuales son todos los posibles sistemas de numeración a los que pueden pertenecer los siguientes números:

1011 | -871 | AB23 | -9910 | 436

4| Realizá las conversiones a las bases indicadas:

a. $ABA_{(15} \longrightarrow {}_{(7}$

b. $73{,}173_{(8} \longrightarrow {}_{(14}$

c. $1312 \longrightarrow {}_{(4}$

d. $53171_{(8} \longrightarrow {}_{(9}$

e. $-0{,}343_{(6} \longrightarrow {}_{(5}$

f. $1{,}332_{(4} \longrightarrow {}_{(10}$

5| Realizá las siguientes conversiones, según el sistema pedido en cada caso:

a. $425{,}12_{(5}$ a base 8
b. $11101{,}111_{(2}$ a base 16
c. $1110011{,}01_{(2}$ a base 8
d. $AB{,}2_{(16}$ a base 2
e. $384_{(8}$ a base 2
f. $14{,}57_{(8}$ a base 2
g. 155 a base 2
h. 1001 a base 5
i. $432{,}541_{(6}$ a base 7
j. $2132{,}312_{(4}$ a base 6
k. $41444_{(5}$ a base 16
l. $31{,}428C_{(11}$ a base 7

Respuestas

1| a. $23_{(5}$ b. 13 c. $1101_{(2}$ d. $D_{(14}$

2| 11 | -25 | 12,125 | 2977,4375 | -386 | 247,64

3| (Ayuda: analizá teniendo en cuenta qué elementos forman cada base)

4|

a. $10033_{(7}$

b. $\cong 43{,}3511_{(14}$

c. $110200_{(4}$

d. $33326_{(9}$

e. -0,3030...

f. 1,96875

5|

a) No es posible

b) $1D{,}E_{(16}$

c) $163{,}2_{(8}$

d) $10101011{,}001_{(2}$

e) No es posible

f) 1100,101111

g) $10011011_{(2}$

h) $13001_{(5}$

i) $323{,}6433_{(7}$

j) $422{,}5021_{(6}$

k) $ABD_{(16}$

l) No es posible

Llegamos al final de la primera clase. Tratamos de brindarles las herramientas básicas para trabajar con los diferentes sistemas de numeración y las conversiones entre ellos. Creo que al leerla comprendieron, pero también sabemos que cuando se sienten a hacer los desempeños de síntesis se van a encontrar con que los cálculos y las formas de conversión se confunden. No se hagan problema, es normal que esto suceda. Por eso les aconsejamos que realicen un cuadro o esquema con los procedimientos propios de cada una de las conversiones, para de esta manera organizar la clase. Ayuda mucho. Se lo aseguramos. Aún así, no duden en preguntar cualquier duda.

¡Nos despedimos hasta la próxima clase!

Créditos

Imágenes

Encabezado: Image by Elchinator from Pixabay
https://pixabay.com/photos/math-work-mathematics-formulas-4711302/

Tipografía

Para este diseño se utilizó la tipografía ***Source Sans Pro*** diseñada por Paul D. Hunt.
Extraida de Google Fonts.

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a *correcciones@issd.edu.ar* e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo. Muchas gracias por tu aporte.

Bibliografía

Hoffman y Kunze (1979): Álgebra Lineal. Ed Prentice/Hall. México

Howard, Antón (1976): Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. México

Molina, Félix J. (2000): Álgebra y Geometría. (Editado en fascículos) Ed. Científica Universitaria. Córdoba. Argentina

Rojo, Armando (1996): Álgebra. Armando. Ed El Ateneo. Bs. As. Argentina