02

UNIDAD

-Des-

Desarrollo de Software

M1

Matemática 1

—

ATANDO CABOS

PROBLEMAS DE CONTEO Y RELACIONES

—

· Aplicaciones de conjuntos: Problemas de conteo y Relaciones entre conjuntos.

· Estas operaciones entre conjuntos, ¿se aplican en alguna situación problemática real?
· ¿Cómo se pueden relacionar dos conjuntos?

MÓDULO DIDÁCTICO 2020

ISSD

07

CLASE

INTRODUCCIÓN

¿Qué tal? ¿Cómo están? ¿Pudieron hacer todo lo que debían durante la semana? Si ustedes hacen memoria, al finalizar la clase pasada les comenté que hoy veríamos un tema muy lindo, estudiaremos algunas aplicaciones de conjuntos: problemas de conteo y relaciones entre conjuntos.

Si uno observa alrededor, puede darse cuenta que casi todo cambia, pero esos cambios no siempre son iguales, ya que existen ciertas dependencias entre unos y otros. Por ejemplo, cambia mi peso, cambia la temperatura, cambia la altura de un árbol, entre otras cosas. Pero mi peso cambia a partir del cambio de otras circunstancias, como podría ser la alimentación, tipo y cantidad de mi actividad laboral, del ejercicio que haga y de otras cosas más, seguramente. Esto significa, entonces, que el peso depende, es decir, se relaciona con la alimentación, con la actividad laboral, con la actividad física, etc.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con la Matemática? Bueno, si uno pudiera conocer la forma en que se relacionan entre sí las magnitudes variables, sería útil para poder predecir o anticipar resultados. La Matemática se encarga de formalizar, mediante un lenguaje específico, esas relaciones.

APLICACIONES CON CONJUNTOS

Lo estudiado hasta aquí sobre conjuntos lo aplicarán tanto en Matemática como en otras materias.

Veremos a continuación algunas aplicaciones en la misma Matemática, como son los **problemas de conteo** y el tema de **relaciones**, y la clase siguiente, **funciones**.

PROBLEMAS DE CONTEO

En los problemas de conteo se trabaja con conjuntos **finitos**, es decir, que tienen una cantidad determinada de elementos. A esta cantidad de elementos se la llama ***cardinal*** del conjunto. Si un conjunto 'A' tiene cinco elementos escribimos #(A) = 5.

Si tenemos dos conjuntos, se puede demostrar la siguiente propiedad:

> ***Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son finitos y:*** **$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$**

Esta propiedad se puede demostrar también para tres conjuntos:

> ***Si A, B y C son conjuntos finitos, entonces:***
> **$\#(A \cup B \cup C)=\#(A)+\#(B)+\#(C)-\#(A \cap B)$**
> **$-\#(A \cap C)-\#(B \cap C)+\#(A \cap B \cap C)$**

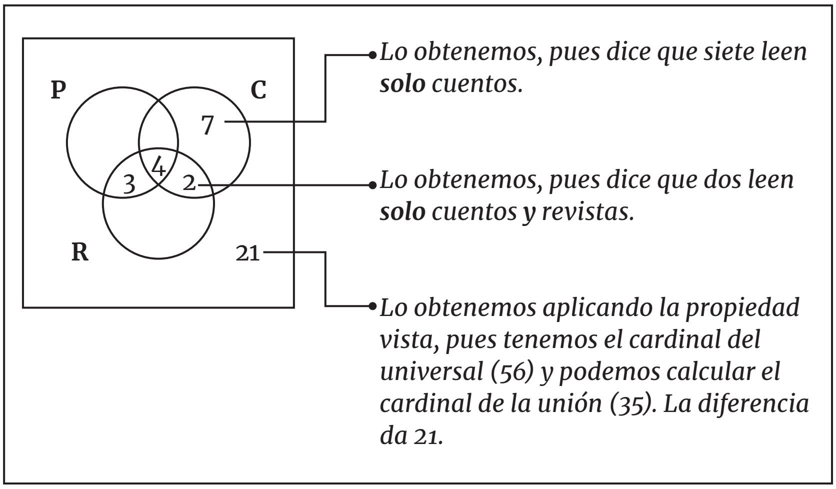
Estas propiedades permiten resolver problemas que llamamos **de conteo**, como el caso siguiente:

Ejemplo N°1:
"Para elegir la bibliografía que va a utilizar durante este ciclo lectivo, una profesora pregunta a sus alumnos acerca de sus preferencias en la lectura. Le responden de la siguiente manera: quince alumnos prefieren la poesía, diecinueve los cuentos de terror y veinte las revistas de actualidad; de ellos, cuatro leen poesía, cuentos de terror y revistas,

dos leen solo cuentos y revistas, siete solo cuentos y tres poesía y revistas. Las preguntas se realizaron a cincuenta y seis alumnos y no era obligatorio responder.

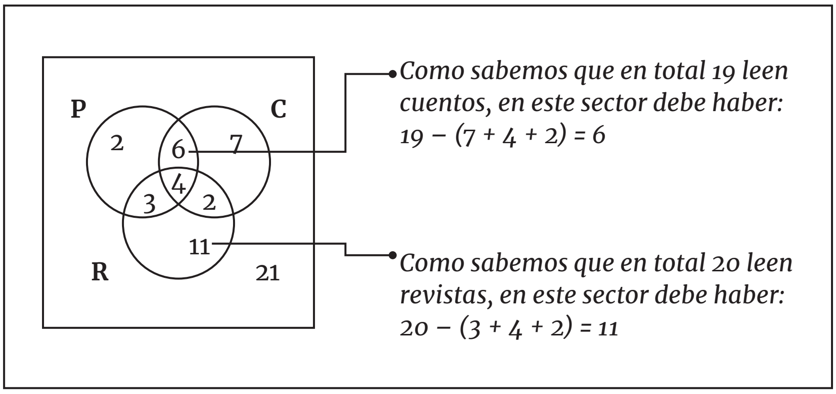
a| ¿Cuántos alumnos leen solo revistas?
b| ¿Cuántos alumnos no contestaron?

Solución: Para resolver estos problemas es muy útil utilizar diagramas de Venn para ubicar la información que nos brinda el enunciado. En este caso, tenemos tres conjuntos que llamaremos **P** (poesías), **C** (cuentos) y **R** (revistas) disponiéndolos en su forma más general, y colocando la información en cada región:



Advertencia*: El número que se coloca en el diagrama no representa un elemento del conjunto como habitualmente ocurre, sino que corresponde a la cantidad de elementos que hay en el sector.*

Ahora podemos calcular la cantidad de elementos en el resto de los sectores y contestar luego las preguntas:



Entonces, podemos decir que:
a| Hay 11 alumnos que leen solo revistas.
b| Hay 21 alumnos que no contestaron.

Ahora les va a tocar esto cuando deban resolver, en no más de diez minutos, el desempeño 27. ¡Suerte!

Desempeño 27

- Resuelvan, aplicando lo recién visto, los siguientes problemas:

1| En una empresa se realiza una encuesta con el propósito de averiguar a través de qué fuentes reciben información sus empleados. Los resultados de la encuesta dieron los siguientes datos: dieciocho de los empleados reciben información solo a través de la televisión, diez solo de la radio, veinticuatro a través de los diarios y de la radio, cuarenta y tres no leen diarios, veintisiete solo leen diarios y ven televisión y cincuenta y cinco nunca escuchan radio. Todos los empleados contestaron que se informan a través de estas fuentes.

Realiza diagrama de Venn y responde:
a| ¿Cuántos empleados se informan a partir de los tres medios?
b| ¿Cuántos empleados se informan a través de la radio?
c| ¿Cuántos empleados se informan solamente con los diarios?
d| ¿Cuántos empleados no se informan a través de la televisión?
e| ¿Cuántos empleados fueron encuestados?

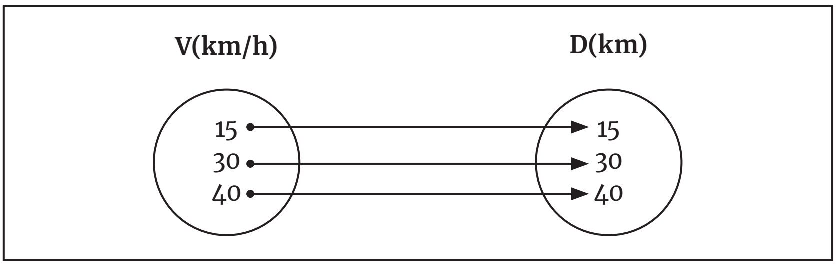
2| Una casa mayorista de electrodomésticos realiza una encuesta entre sus clientes para saber qué electrodomésticos comprarían en el mes siguiente. De ellos, doscientos setenta respondieron que comprarían cocinas, cuatrocientos cincuenta comprarían heladeras, cincuenta estiman comprar cocinas, heladeras y lavarropas, veinte comprarían sólo cocinas y lavarropas, pues ya tiene heladeras, ochenta sólo lavarropas, ciento sesenta cocinas y doscientos sólo heladeras. Hubo cuarenta y cinco clientes que no respondieron a la encuesta.

Realiza el diagrama de Venn y responde:
a| ¿A cuántos clientes se les efectuó la encuesta?
b| ¿Cuántas personas comprarían lavarropas?
c| ¿Cuántas personas de las que respondieron a la encuesta no comprarían cocinas?
d| ¿Cuántas personas comprarían cocinas y heladeras?
e| ¿Cuántas personas solo comprarían cocinas y heladeras?

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las relaciones surgen naturalmente entre magnitudes, ya sean físicas o económicas u de otra índole, como se los dije más arriba. Es sabido por todos que el interés pagado por un banco está en ‘relación’ o en ‘función’ de la cantidad de dinero depositado y el tiempo, así como la distancia que un auto puede recorrer en media hora está en ‘relación’ o en ‘función’ de la velocidad que desarrolle.

Siguiendo con el ejemplo de la velocidad-distancia, podemos ver que los distintos valores de la velocidad forman un conjunto, los distintos valores de la distancia forman otro conjunto, y la relación entre ellos determina pares ordenados que podemos graficar con diagramas de Venn:



Comentario
Es de notar que en una relación, un punto del dominio puede tener varias imágenes, así como un punto de conjunto imagen puede ser imagen de más de un punto del dominio. Esto nos permitirá diferenciar una relación de una función, tema que estudiaremos más adelante.

Veremos entonces cómo se define matemáticamente la relación entre conjuntos (que con el ejemplo se prevé que se utilizará el producto cartesiano) y todo lo vinculado al tema.

> ***Definición: Dados dos conjuntos A y B, se llama relación R de A en B (R:A $\bullet\!\!\longrightarrow$ B) al subconjunto de A x B formado por pares ordenados que satisfacen una determinada propiedad, siendo la primera componente perteneciente a A y la segunda componente perteneciente a B.***

Una relación se denota: **R: A $\bullet\!\!\longrightarrow$ B / ... propiedad ...**

Más sencillamente, se podría decir que:

> ***"Dados dos conjuntos A y B, establecer una relación entre ellos es fijar una regla que vincule sus elementos."***

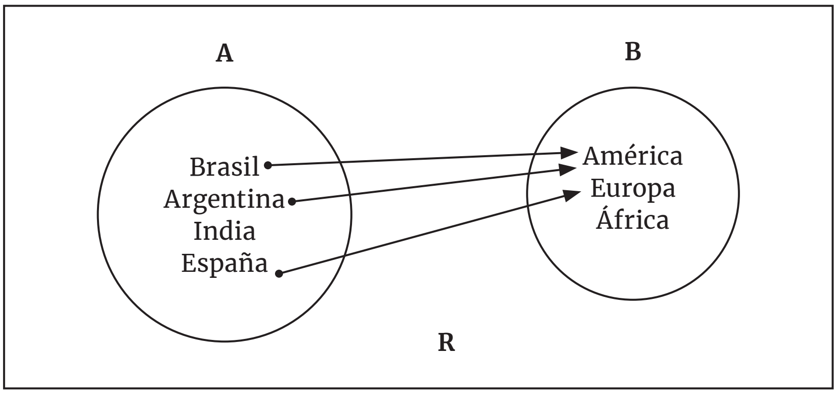
Ejemplo N°1:
Dados A = {Brasil; Argentina; India; España} y B = {América; Europa; África}, el producto cartesiano A x B es:

A x B = {(Brasil; América); (Arg.;América); (India;América) (Esp.;América); (Brasil;Europa); (Arg.;Europa); (India;Europa); (Esp.;Europa); (Brasil;Africa); (Arg.;Africa); (India;Africa); (Esp.Africa)}

La propiedad en función de la cual se arman los pares ordenados o se vinculan los elementos puede ser, por ejemplo: **R: A $\longrightarrow$ B / ... es un país de ...**

Por extensión, la relación es: R = {(Brasil;América); (Argentina;América); (España;Europa)}

Gráficamente: (Diagrama de Venn)



Como se ve en el ejemplo, la relación es un subconjunto del producto cartesiano.

Ejemplo N°2:
Dados $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y la relación

R: C ⟶ D / ... es la mitad de ...

Por extensión la relación es: **R = {(2,4), (3,6), (4,8)}**

Desempeño 28

· Realicen la representación gráfica en diagrama del ejemplo anterior.

Como se los comenté antes de comenzar el tema, la Matemática intenta formalizar las relaciones mediante un lenguaje específico, es por esta razón que debemos ser rigurosos en el modo de expresarnos y respetar los términos que definiremos.

Terminología

Si **R** es una relación de A en B, se llama "**conjunto de partida**" al conjunto A y "**conjunto de llegada**" al conjunto B.

Los elementos del conjunto de partida que intervienen en la relación se llaman *pre-imágenes* y forman un conjunto denominado **DOMINIO**.

En símbolos: $DmR = \{a \mid a \in A$ y para algún $b \in B$ se cumple que $(a,b) \in R\}$

¿Qué relación de inclusión hay entre DmR y A?

Los elementos del conjunto de llegada que intervienen en la relación se llaman *imágenes* y forman un conjunto denominado **Codominio o Conjunto Imagen.**

En símbolos: $ImR = \{b \mid b \in B$ y para algún $a \in A$ se cumple que $(a,b) \in R\}$

¿Qué relación de inclusión hay entre ImR y B?

En el ejemplo anterior se tiene: DmR = {Brasil; Argentina; España} y ImR = {América; Europa}

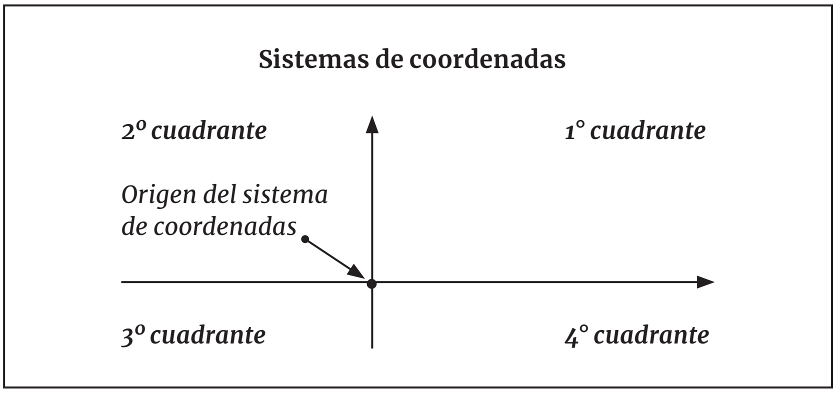
Desempeño 29

· Determinen el dominio y la imagen de la relación del Ejemplo Nº2.

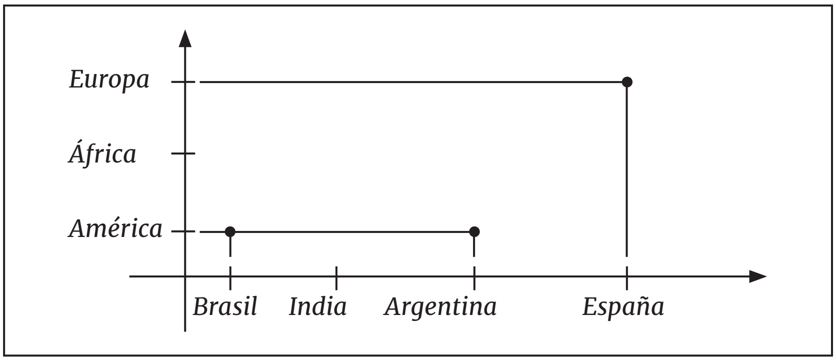
Así como vimos que una relación se puede definir de diferentes modos, en gran cantidad de ocasiones es muy, pero muy útil poder visualizar de otro modo la relación. Por ello, es posible hacer una representación gráfica que muestre cómo varía una magnitud a partir de la variación de la otra.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RELACIÓN

Además de la representación por diagramas de Venn, a una relación se la puede representar en forma cartesiana. En esta forma de representación se usa un sistema de coordenadas cartesianas (dos rectas que se corten perpendicularmente con igual escala). Sobre la recta horizontal, dividiendo en unidades iguales, se colocan los elementos del conjunto de partida. A esta recta se la llamará eje de abscisas o **eje x**. Sobre la recta vertical, también dividida, se colocan los elementos del conjunto de llegada. A esta recta se la llamará eje de las ordenadas o **eje y**.



Ejemplo N°3:
Representación cartesiana del Ejemplo Nº1



Los pares de una relación se representan valiéndose de una tabla, de la siguiente manera:

X	Y
Brasil	América
Argentina	América
España	Europa

Los puntos del sistema de coordenadas anterior representan los pares ordenados de la relación.

Desempeño 30

· Realicen la representación cartesiana con su tabla de la relación del Ejemplo Nº2.

Desempeño de síntesis

1| Digan qué relación sugieren los siguientes conjuntos, determinando el posible conjunto de partida y conjunto de llegada.
A = {(Paraná; Entre Ríos); (La Rioja; La Rioja); (Cba; Cba); (Viedma; Río Negro)……}
B = {(Verdi; Aida); (Mozart; Las Bodas de Fígaro); (Bizet; Carmen); (Chopin; Polonesa); (Vivaldi, Las cuatro estaciones)}
C = {(2;2); (4;2); (6;3); (15;5); (6;2); (12;2); (12;3) ; (15;3)}

2| Sean A = {a,b,c}; B = {1,2}
a| Definir AxB
b| ¿(1,2) ∈ AxB? ; ¿(0,1) ∈ AxB? ; ¿(1,0) ∈ Ax B?

3| Sean A={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 } y B= { 1, 2, 3 }.
Se pide:
a| Dar la relación de A en B que satisface "divide a".
b| Dar la relación de A en B que satisface "es menor o igual que".
c| Dar la relación de B en A que verifica "x = y".

4| Sean los conjuntos: $P = \{x / x \in N \wedge x = 2 \wedge x < 8\}$ y $S = \{x / x \in Z \wedge -7 \leq x \leq 2\}$

Y la relación:
R: $P \longrightarrow S$ /… es valor absoluto de…

Se pide:
a| Obtener el producto cartesiano que contiene a la relación.
b| Determinar el conjunto relación.
c| Dar dominio e imagen por extensión.
d| Representar la relación por diagrama y sistema cartesiano.

5| Con respecto a la relación del item 4, determinar (si existe):
a| La pre-imagen de 7;
b| La imagen de 2;
c| La pre-imagen de 6;
d| La pre-imagen de −4

6| Definan por extensión el conjunto P de elementos que se obtienen a través de la expresión:
$x =3n -1$ con $x \in N$ y $4 < n \leq 9$.

7| Definan por extensión el conjunto N de elementos que se obtienen a través de la expresión:
$x = 2n - 3$ con $n \in N$ y $4 \leq n \leq 9$

8| Nombren de otra manera los elementos del conjunto definidos en los items 6 y 7.

9| Un problema para resolver:
Cuando se preguntó a una delegación deportiva formada por trescientos setenta atletas sobre

su afición respecto al teatro, danza o poesía, se encontró que ciento sesenta y cinco prefieren el teatro, ciento ochenta prefieren la danza, ciento cincuenta la poesía, cien el teatro y la danza, veinticinco el teatro y la poesía, cuarenta danza y poesía y veinte las tres preferencias.

Realicen el gráfico y respondan cuántos de estos trescientos setenta atletas tienen las preferencias indicadas y expresen con una operación entre conjuntos cada una de las respuestas:

a| Al menos una de estas tres preferencias.
b| Ninguna de estas tres preferencias.
c| Solo una de estas tres preferencias.
d| Solo danza.
e| Solo poesía y teatro.

Respuestas

2| a| AxB = {(a,1) ; (a,2) (b,1) (b,2) (c,1) (c,2)}
b| No (todas las respuestas)

3| a| {(1,1) (1,2) (1,3) (2,2) (3,3)}
b| {(1,1) (1,2) (1,3) (2,2) (2,3) (3,3)}
c| {(1,1) (2,2) (3,3)}

4| a| PxS
b| {(2,-2) (4,-4)(6,-6) (2,2)}
c| Dm = {2,4,6} Im = {2,-2,4,6}

5| a| No existe
b| 2 y −2
c| No existe
d| 4

6| P = {14,17,20,23,26}

7| N = {5,7,9,11,13,15}

9| a| $\#(T \cup D \cup P) = 350$
b| $\#(T \cup D \cup P) = 20$
c| $\#(T \cup D \cup P) - [(T \cap D) \cup (T \cap D) \cup (T \cap P)] = 225$
d| $\#(D - (T \cup P)) = 60$
e| $\#((P \cap T) - D) = 5$

Espero que se hayan comprendido los temas de hoy. Hay muchas aplicaciones de conjuntos y muchos problemas que se pueden resolver. Cuando en la próxima clase estudiemos el tema de funciones, haremos una integración de todo lo visto hasta ahora.

¡Hasta la próxima clase!