03 UNIDAD

-Des-
Desarrollo de Software

M1
Matemática 1

• Lógica proposicional. Semántica del lenguaje.

¡LLEGÓ LA HORA DE LA VERDAD!

SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL

• ¿Qué valor de verdad tiene una proposición?
• ¿Cuántas posibilidades de verdad o falsedad
hay en una proposición?
• ¿Cómo se hace una tabla de verdad?

MÓDULO DIDÁCTICO 2020

11 CLASE

ISSD

INTRODUCCIÓN

¡Buenas! ¿Cómo están? ¿Cómo vamos con la lectura del material? Espero que puedan llevar la materia al día; ya estamos cerca del final de la asignatura, lo que significa que también estamos más cerca de los exámenes.

Como les comenté en el inicio de esta unidad, vamos a estudiar dos partes, una referida al modo correcto de escribir las expresiones y la otra al significado de ellas. Esto último es lo que veremos en la clase de hoy, llamado semántica del lenguaje formal.

SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL

Hemos definido la sintaxis del lenguaje proposicional que se caracteriza por dos aspectos fundamentales:
· La **no ambigüedad de lectura**, porque toda fórmula bien formada se lee de forma unívoca.
· La **decidibilidad sintáctica** que hace referencia a que en un número finito de pasos se puede decidir si una expresión está o no bien formada.

Si la fórmula A es de gran longitud, se necesita de un procedimiento que al cabo de un número finito de etapas permita decidir si la expresión está o no bien formada.

Un procedimiento que luego de un número finito de etapas permite arribar a un resultado, en matemática se llama **algoritmo**.

La existencia de un algoritmo para la sintaxis del lenguaje formal permite establecer si cualquier fórmula está o no bien formada.

La etapa de compilación de un lenguaje de programación utiliza este tipo de test. Cuando dicho test existe para un conjunto de expresiones determinado, se dice que dicho conjunto es **decidible**.

Queremos ahora definir una interpretación para el lenguaje. Este aspecto se denomina **Semántica del Lenguaje Formal**.

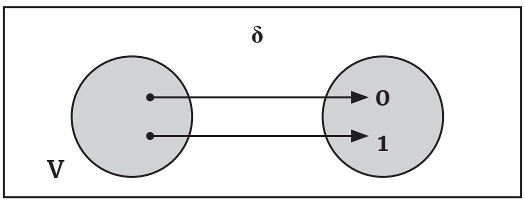
Dada la f.b.f $\mathbf{A = \neg\ ((q \longrightarrow \neg\ p) \vee q)}$, se desea, tal como se dijo anteriormente, asignarle un valor de verdad que podrá ser verdadero o falso (uno o cero).

El valor de verdad que se le asigne a la f.b.f A **solo dependerá** de los valores que adopten las variables proposicionales que en A intervienen.

Si en A ocurren, como en este caso, dos variables proposicionales, habrá 22 combinaciones distintas. Esto es, A tomará distinto valor si p y q son ambas verdaderas, o ambas falsas, o una verdadera y la otra falsa, etc.

En general, si una f.b.f. posee **n** variables proposicionales, existen 2n distribuciones de valores de verdad distintos.

Una distribución de valores de verdad (d.d.v.v.) es **una función** que a cada variable proposicional le asigna el valor 0 o el valor 1.



Luego, la función δ le asigna a cada variable proposicional el valor 1 o (excluyente) el valor 0.

δ es una función que relaciona el conjunto de las variables proposicionales V con el conjunto {0,1} y que, si recuerdan, denotábamos así:

$$\delta : V \longrightarrow \{0,1\} \quad \text{tal que} \quad \delta(v)=0 \quad \veebar \quad \delta(v)=1$$

La semántica formal no dice cuándo las variables $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_i, \ldots$ son verdaderas o falsas, sino que permite deducir cómo una determinada distribución de valores de verdad a cada una de las variables proposicionales determina el valor de la fórmula bien formada donde ellas intervienen.

Esta función se puede extender a todo el conjunto de fórmulas bien formadas de la siguiente manera:

Función *Conjunto de llegada*

φ: {conjunto de f.b.f} $\longrightarrow$ {0,1} tal que: φ **(p) = 0** $\veebar$ φ **(p) = 0**

Conjunto de partida *o "excluyente"*

> ***Ten en cuenta que:***
> ***El valor de verdad de una fórmula bien formada solo depende de los valores de verdad de las variables proposicionales que intervienen en dicha fórmula.***

TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad resumen el cálculo del valor de verdad de una fórmula para todas las distribuciones de valores de verdad (d.d.v.v.) posibles.

Si **A = ¬p**

p	¬p
0	1
1	0

Como la fórmula A posee una variable proposicional, existen solamente dos d.d.v.v. (distribuciones de valor de verdad) posibles.

Si **B = (p ∨ q)**

p	q	p ∨ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Observen que en la fórmula B intervienen dos variables proposicionales, por tanto existen cuatro d.d.v.v. posibles. Para cada una de ellas el valor de la fórmula B se calcula como el máximo valor entre el valor de la variable p y el valor de la variable q.

Si **C = (p $\wedge$ q)**

p	q	p $\wedge$ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En la fórmula C intervienen dos variables proposicionales (existen cuatro d.d.v.v. posibles). Para cada una de ellas el valor de la fórmula C se calcula como el mínimo valor entre el valor de la variable p y el valor de la variable q.

Si **D = (p $\longrightarrow$ q)**

p	q	(p $\longrightarrow$ q)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

En la fórmula D intervienen dos variables proposicionales (existen cuatro d.d.v.v. posibles). Para cada una de ellas el valor de la fórmula D se calcula como el máximo valor entre el valor **negado** de la variable p y el valor de la variable q.

Si **D = (p $\longleftrightarrow$ q)**

p	q	(p $\longrightarrow$ q)	(q $\longrightarrow$ p)	(p $\longleftrightarrow$ q)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

En la fórmula D intervienen dos variables proposicionales (existen cuatro d.d.v.v. posibles). Para cada una de ellas el valor de la fórmula D se calcula como el mínimo valor entre los valores de
(p $\longrightarrow$ q) y (q $\longrightarrow$ p).

Veamos cómo aplicamos esta función para establecer el valor de **cualquier fórmula**:

Ejemplo:
a| Sea la siguiente f.b.f. **F = ($\neg$ (s $\longrightarrow$ (p $\wedge$ $\neg$ q)) $\wedge$ t)**

Intervienen cuatro variables proposicionales y existen por lo tanto dieciséis d.d.v.v. posibles.

Hemos distinguido el nexo principal de la fórmula F, cuyo valor se determinará para cada d.d.v.v. como el mínimo valor entre el valor de $\neg (s \longrightarrow (p \wedge \neg q))$ y el valor de t.

	p	q	s	t	$(p\wedge\neg q)$	$(s \longrightarrow (p\wedge\neg q))$	$\neg(s \rightarrow (p\wedge\neg q))$	$\wedge$	t
δ_1	0	0	0	0	0	1	0	**0**	0
δ_2	0	0	0	1	0	1	0	**0**	1
δ_3	0	0	1	0	0	0	1	**0**	0
δ_4	0	0	1	1	0	0	1	**1**	1
δ_5	0	1	0	0	0	1	0	**0**	0
δ_6	0	1	0	1	0	1	0	**0**	1
δ_7	0	1	1	0	0	0	1	**0**	0
δ_8	0	1	1	1	0	0	1	**1**	1
δ_9	1	0	0	0	1	1	0	**0**	0
δ_{10}	1	0	0	1	1	1	0	**0**	1
δ_{11}	1	0	1	0	1	1	0	**0**	0
δ_{12}	1	0	1	1	1	1	0	**0**	1
δ_{13}	1	1	0	0	0	1	0	**0**	0
δ_{14}	1	1	0	1	0	1	0	**0**	1
δ_{15}	1	1	1	0	0	0	1	**0**	0
δ_{16}	1	1	1	1	0	0	1	**1**	1

El valor de la fórmula f queda determinado para toda d.d.v.v. en la columna destacada. Así, la distribución p=0, q=1 y t=0 corresponde a δ_7 y el valor de la fórmula F para δ_6 es igual a 0, lo que denotamos δ_6 (F)=0. Pero observen que para δ_{16} el valor de la fórmula F es 1 y lo escribimos δ_{16} (F)= 1.

Lo que les comentaré a continuación no son más que algunas definiciones referidas a los resultados de las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas bien formadas, con el objeto de acordar la misma terminología según los casos.

Cuando una fórmula toma valor 1 para algunas d.d.v.v. y para otras toma el valor 0, diremos que es una **contingencia**.

> ***Definición: Una f.b.f. A es una contingencia si existe al menos un δ_1 d.d.v.v. tal que $\varphi\ \delta_1$ (A)=0, y existe al menos un δ_2 d.d.v.v. tal que $\varphi\ \delta_2$ (A)= 1.***

b| Sea la fórmula **B= $((p \longrightarrow t) \vee (\neg t \vee p))$**

Para construir su tabla de verdad notemos que intervienen en B dos variables proposicionales, es decir, que habrá 4 d.d.v.v. distintas. El nexo principal de la formula b es v, por lo que el valor de B se calculará como el máximo valor entre el valor que adopten para cada d.d.v.v $(p \longrightarrow t)$ y $(\neg t \vee p)$.

δ	p	t	$(p \longrightarrow t)$	$\vee$	$(\neg t \vee p)$
δ_1	0	1	1	**1**	1
δ_2	0	0	1	**1**	0
δ_3	1	1	0	**1**	1
δ_4	1	0	1	**1**	1

El valor de la fórmula B para cualquier d.d.v.v. se observa en la columna del nexo principal. Obsérvese que para cualquier distribución de las variables que intervienen en B, su valor es 1, por lo que B es una tautología.

> ***Definición: Una f.b.f. A es una tautología si y solo si su valor es uno para toda d.d.v.v. Es decir, A es tautología si y solo si $\varphi\ \delta$ (A)=1 para toda δ d.d.v.v.***

c| Sea $C = ((r \longrightarrow t) \wedge \neg (r \longrightarrow t))$

Intervienen en C dos variables proposicionales, luego habrá cuatro d.d. v.v. distintas y el valor de C se calculará como el mínimo valor entre los valores de $(r \longrightarrow t)$ y $\neg(r \longrightarrow t)$ para cada d.d.v.v.

δ	r	t	$(r \longrightarrow t)$	$\wedge$	$(\neg r \longrightarrow t)$
δ_1	0	0	1	**0**	0
δ_2	0	1	1	**0**	0
δ_3	1	0	0	**0**	1
δ_4	1	1	1	**0**	0

Noten que el valor de C es 0 para cualquier d.d.v.v. Diremos que C es una contradicción.

> ***Definición: Una f.b.f. A es una contradicción si y solo si su valor es cero para toda d.d.v.v. Es decir, A es contradicción si y solo si $\varphi\ \delta$ (A)= 0 para toda δ d.d.v.v.***

Observación: En el transcurso del tema hemos asignado tanto a las variables proposicionales el valor 0 como el 1. Podríamos haber utilizado cualquier otra codificación bivalente, como ser alto - bajo; o verdadero – falso; o conduce – no conduce, etc.

Vamos a hacer ahora entre todos un ejemplo para determinar si una f.b.f. es una contingencia, una tautología o una contradicción.

Ejemplo
Tomemos la expresión $A = ((q \longrightarrow t) \vee (t \longrightarrow p))$ correspondiente a una f.b.f. y realicemos la tabla de verdad para conocer si corresponde a una contingencia, tautología o contradicción. Para hacer la tabla escribimos primero las dos implicaciones y por último la disyunción entre ellas.

p	q	t	$(q \longrightarrow t)$	$(t \longrightarrow p)$	$\vee$
0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	0	**1**

p	q	t	$(q \longrightarrow t)$	$(t \longrightarrow p)$	$\vee$
0	1	0	0	1	**1**
0	1	1	1	0	**1**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

Entonces, como podemos observar, para todos los valores que tomen las variables proposicionales p, q y t la expresión A es verdadera ¡siempre!. De esta manera estamos en condiciones de asegurar que A es una **tautología**.

Desempeño de síntesis

· Realicen las tablas de verdad de las siguientes proposiciones. Tengan en cuenta el orden de las proposiciones que p, q y r. Lo que está entre paréntesis son los resultados de las tabla de verdad.

a| $((p \wedge q) \vee \neg r)$
b| $(((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \longrightarrow p)$
c| $((p \wedge \neg q) \longleftrightarrow (p \wedge r))$
d| $(((p \longrightarrow \neg q) \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee r))$
e| $(((p \wedge q) \vee \neg r) \wedge \neg\neg p)$
f| $((p \wedge \neg q) \wedge \neg q)$
g| $((p \wedge \neg q) \longrightarrow r)$
h| $((\neg(p \wedge q) \vee \neg q) \longrightarrow (p \vee r))$
i| $((p \vee \neg r) \wedge \neg q)$
j| $((\neg p \vee \neg q) \longrightarrow (p \wedge \neg q))$
k| $(((\neg p \vee \neg q) \longrightarrow (p \vee r)) \longrightarrow \neg r)$
l| $((p \vee \neg q) \longrightarrow r)$
m| $(((p \wedge \neg q) \longrightarrow \neg\neg r) \longleftrightarrow (p \vee q))$

Resultados de la tabla de verdad

a| (10101011)
b| (00101111)
c| (11110110)
d| (1110100)
e| (00001011)
f| (0010)
g| (11110111)
h| (01011111)
i| (10001100)
j| (0011)
k| (10101010)
l| (01110101)
m| (00110111)

Con este ejemplo damos por finalizada la clase de hoy que, como ya habrán notado, fue bastante tranquila. A pesar de ello no se confíen ni dejen de repasar ni estudiar, como así también de resolver el ejercicio siguiente para mañana o pasado. Les deseo una buena semana y nos vemos la clase próxima que, además de ser la última, será sencilla como la de hoy.

¡Hasta la última clase!

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a **correcciones@issd.edu.ar** e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo.
MUCHAS GRACIAS POR TU APORTE.