M1

Matemática 1

UNIDAD 01

CLASE 04

A PRUEBA Y ERROR

| Formato exponencial. Operaciones. Errores.

| ¿Cómo se puede expresar un número que tenga muchas cifras?

| En informática hay veces que necesitamos expresar números muy grandes o muy pequeños, o números fraccionarios… ¿cómo se pueden hacer para almacenar estos datos?

| Las computadoras realizan cálculos aritméticos y lo trabaja en formato exponencial, pero… ¿Cómo lo hace?

ISSD

-Des-
Desarrollo de Software

MÓDULO DIDÁCTICO

2020

Introducción

¡Hola nuevamente! ¿Cómo va este día? Ha pasado una semana desde la última clase y pareciera que fue un mes. ¿Será que extrañan este rato con la Matemática? Seguro que sí, pero recuerden que pueden hacer Matemática no solo en este ámbito ni solo conmigo.

Bueno, bueno, basta de charla y demos comienzo a la clase de hoy que trata sobre un tema algo diferente a lo que veníamos viendo.

Representación de números: forma exponencial

Las computadoras, en general, destinan un tamaño de 1 o 2 bytes para trabajar con números enteros. Con 1 byte se pueden almacenar los números enteros comprendidos entre –128 y 127. Con 2 bytes el rango es un poco mayor, va de –32.768 a 32.767.

Vemos que estos rangos son pequeños, además de no permitir números fraccionarios. Por esto, para representar los números, se utiliza un formato denominado **forma exponencial** que permite representar números fraccionarios y un rango mayor de números.

Un número en este formato consta de:
1| Una **mantisa**, en la que se colocan las cifras significativas* del número según estén de izquierda a derecha, pero sin ningún valor posicional, pues se considera a la coma colocada siempre a la izquierda de la primera cifra no nula del número. La mantisa tiene generalmente una cantidad de posiciones determinada (aquí será de 8 posiciones, correspondientes a 1 byte), si el número tiene mayor cantidad de cifras, se lo corta (trunca o redondea); si tiene menor cantidad, se completan las posiciones con ceros a la derecha.

2| Una **base**, que en cualquier sistema de numeración es 10.

3| Un **exponente**, que es el que determina la posición real de la coma decimal. Si el exponente es **negativo**, a la coma flotante hay que desplazarla tantos lugares como indica el exponente y hacia la

*** Se llaman cifras significativas a todos los dígitos de la derecha del primer dígito no nulo, incluyéndolo.**

izquierda. Si es **positivo**, hay que desplazarla tantos lugares, hacia la **derecha**.

MANTISA. BASE $^{\text{EXPONENTE}}$

Para escribir con formato exponencial de ocho posiciones a * 52618,35267, se considera que la coma está a la izquierda del '5': 0,5261835267.

Se eliminan los dígitos, si son más de ocho: 0,52618352. Se multiplica por la base elevada al exponente adecuado. En este caso ese exponente es '+5', pues estando en el formato exponencial habría que desplazar la coma hacia la derecha 5 lugares para obtener el número original:

$0{,}52618352 \; . \; 10^5 \cong 52618352E5$

El '0' no se coloca porque se da por sentado que está.

* 0,0098746

Cifras significativas: 0,98746
Se completa con ceros: 0,98746000.
Se multiplica por la base elevado al exponente adecuado:

$0{,}98746000 \; . \; 10 -2 \cong 98746000E\text{-}2$

* 342679

Con un poco de práctica se escribe directamente:

$0,34267900\ .\ 10\ 6 \cong 34267900E6$

Como la base siempre es ‘10’ y en la computadora se deben representar en una sola línea los caracteres, se reemplaza el ‘10’ por la letra ‘E’, seguida del exponente, resultando para los ejemplos anteriores el siguiente aspecto:

$0,52618352\ .\ 10^{5} = 52618352E5$
$0,98746000\ .\ 10^{-2} = 98746000E\text{-}2$
$0,34267900\ .\ 10^{6} = 34267900E6$

¿Qué viene ahora? Y, si ya se entendió la explicación del concepto de formato exponencial, lo que nos toca es practicar mediante la resolución de algunos ejercicios, para así afianzar lo aprendido como ya se les comenté en otras tantas oportunidades. Acá les propongo el desempeño 18 para que en 5 minutos escriban en formato exponencial cinco números.

Desempeño 18

Escribe en forma exponencial de ocho posiciones a:

a. 345,6278928;
b. 0,000281;
c. 0,374
d. 0,00000388
e. 25344725289

Respuestas

a. 34562789E3
b. 28100000E-3
c. 37400000E0
d. 38800000E-5
e. 25344725E11

Así como hemos realizado operaciones con números escritos en base 10 y en otras como la binaria, también podemos operar con números escritos en formato exponencial, pero por supuesto, para ello tendremos que aprender el modo de llevarlas a cabo.

Aritmética del computador

Las computadoras realizan cálculos aritméticos y, cuando lo hacen, los números están en formato exponencial. Hay que conocer solo algunas reglas de la aritmética para entender cómo realizan estos cálculos.

Adición y sustracción

Para realizar estas operaciones es necesario que los números tengan el mismo exponente y así poder sumar o restar directamente sus mantisas, quedándose sin modificar el exponente del resultado.

Para realizar la operación *:

a| 3450E5 + 1274E5

Sumamos directamente las mantisas, ya que los exponentes son iguales. El resultado es:

3450E5 + 1274E5 $= 0{,}3450 \times 10^5 + 0{,}1274 \times 10^5$
$= 0{,}4724 \times 10^5$
= 4724 E5

b| En el caso de tener dos números con diferentes exponentes, aquí va un ejemplo:

2345E 4 + 5567E3

Para que los ejemplos no resulten confusos, se trabajará con 4 posiciones en la mantisa, en lugar de 8. Lo que se verá es independiente del número de posiciones.

Para poder sumar o restar dos números en forma exponencial (recordá que para mayor practicidad solo usaremos cuatro posiciones), se necesita expresar los números con el mismo exponente, y para ello se corrige el que figura con menor exponente. En nuestro ejemplo:

2345E4 + 5567E3 = $0{,}2345 \times 10^4 + \mathbf{0{,}5567 \times 10^3}$

$= 0{,}2345 \times 10^4 + \mathbf{0{,}05567 \times 10^4}$

$= 0{,}29017 \times 10^4$

= 2901E4

Pero para poder operar modificamos el número con menor exponente, quedando entonces:

El paso de $0{,}5567 \times 10^3$ a $0{,}05567 \times 10^4$ lo podemos hacer pasando el primer número al número que en realidad representa, es decir a 556,7, y a partir de este número pasarlo a un número de tal manera que esté multiplicado por 10^4.

De esta manera se pierden dígitos, pero en el número que representa una menor cantidad.

$$(0{,}5567 \times 10^3 = 0{,}05567 \times 10^4)$$

Pasamos a formato exponencial a costa de haber "perdido" unos dígitos:

c| En el caso de trabajar con exponentes negativos, aquí va un ejemplo:

2456E-2 + 2345E-3 – 8965E-4 =

En este caso el mayor de los exponentes es -2 (recordá que entre dos números negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto).

Por lo tanto, la operación sería:

$=0,2456 \times 10^{-2} + 0,2345 \times 10^{-3} - 0,8965 \times 10^{-4}$

En este caso hay que modificar el segundo y el tercer término.
| En realidad, $0,2345 \times 10^{-3}$ representa el número 0,0002345. Si a este número lo queremos expresar multiplicando por una potencia de 10^{-2}, entonces sería $0,02345 \times 10^{-2}$.
| En realidad, $0,8965 \times 10^{-4}$ representa el número 0,00008965. Si lo expresamos utilizando una potencia -2, entonces sería $0,008965 \times 10^{-2}$.

Retomando la operación, y recordando que solo trabajaremos con cuatro dígitos, la operación será:

$= 0,2456 \times 10^{-2} + 0,0234 \times 10^{-2} - 0,0089 \times 10^{-2}$
$= 0,2601 \times 10^{-2}$
$= 2610E-2$

d| 9701E4 + 1520E4 - 9532E3

Corregimos el menor exponente y operamos con las mantisas:

$$0{,}9701.10^4 + 0{,}1520.10^4 - 0{,}0953.10^4 = 1{,}0268.10^4$$

Pero el resultado no ha quedado escrito en forma exponencial, entonces lo modificamos:

$$\begin{aligned} 1{,}0268 \times 10^4 &= 10268 \\ &= 0{,}1026 \times 10^5 \\ &= 1026\text{ E5} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

9701E4 + 1520E4 - 9532E3 = 1026E5

Volviéndose a perder dígitos.

Es muy importante que tengan en cuenta los exponentes para poder sumar y restar, si son distintos siempre se debe corregir “el menor” y llevarlo hasta el mayor. Bueno, aclarado y reiterado el detalle, les toca trabajar a ustedes. En no más de diez minutos resuelvan las operaciones planteadas en el desempeño 19.

Desempeño 19

Realiza:

a. 5483E3 - 4530E3 + 5000E3 =

b. 5678E-4 + 8972E-1 =

Respuestas:

a. 5953E3

b. 8977E-1

Recodá que entre 2 números negativos, es menor el que tiene mayor valor absoluto.

Multiplicación y división

En este caso no es necesario que los exponentes sean iguales. Aquí directamente se multiplican o dividen las mantisas y el exponente del resultado se obtiene de la suma de los exponentes originales en caso de multiplicación, y de la resta en caso de la división.

Para la multiplicación y división se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Producto de potencias de igual base : $\mathbf{a^n . a^p = a^{n+p}}$

Cociente de potencias de igual base : $\mathbf{a^n : a^p = a^{n-p}}$

Para resolver:
a| 4732E4 . 1175E3, se multiplican las mantisas (0,4732x0,1175=0,055601) y se suman los exponentes (7), resultando:

$0{,}4732 \times 10^4 \,.\, 0{,}1175 \times 10^3 = 0{,}0556 \times 10^7$

Correctamente expresado es $0{,}5560 \times 10^6$ = 5560E6.

Nuevamente se pierden dígitos.

Para el caso:

b| 6842E-5: 7365E5, se dividen las mantisas (0,6842 : 0,7365= 0,928988...) y se restan los exponentes (-10), resultando:

$$0{,}6842\text{x}10\ {-5} :\ 0{,}7365\text{x}105 = 0{,}9289\text{x}10^{-10}$$
$$= 9289\text{E-}10$$

Nuevamente se pierden dígitos.

No vamos a dejar de practicar con este tema, ya que estamos en el baile, bailemos, y mientras bailamos, resolvamos un par de operaciones, pero no se tomen más de cinco minutos, ya que tenemos que continuar con el último tema de esta clase y de la unidad.

Desempeño 20

Resolvé:

a. 6743E-5 . 3588E-6 =

b. 7866E5 : 9786E9 =

Respuestas:

a. 2419E-11

b. 8038E-4

Precisión en las computadoras: errores

Como habrás podido observar en los ejemplos anteriores, se hacía mención a la pérdida de dígitos debido a la forma en que las computadoras almacenan los datos (usan una cierta cantidad de los dígitos que tiene el número) y como resultado de operar con ellos.

Esto hace que las computadoras no sean tan precisas y encuentre ERRORES.

Matemáticamente, se consideran errores absolutos y errores relativos.

Hablamos de **error absoluto** cuando hacemos referencia a la diferencia que hay entre el valor verdadero del número y el valor calculado o utilizado por la computadora.

Si **A** es el valor verdadero y **A’** el calculado, entonces el error absoluto E es:

$$E_a = |A - A'| \;*$$

Este error, si bien nos da una idea de la diferencia entre los valores, no es suficiente. Observemos el siguiente ejemplo:

Supongamos que A es $1000 y A’ es $998, entonces el error absoluto es $E_a = 2$.

Si en cambio A es $4 y A’ es $ 6 el error absoluto es $E_a = 2$.

Las ‘barras’ que encierran a la diferencia indican el ‘valor absoluto’ de la resta, es decir, el valor sin tener en cuenta el signo que se obtenga.

Tenemos el mismo error, sin embargo, por sentido común, sabemos que en el segundo caso el error cometido es más 'grave'.

Para tener una mejor idea de la 'gravedad' del error se define el **error relativo** como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero.

Entonces:

$$E_r = \frac{|A - A'|}{A}$$

Este error se suele dar en forma de porcentaje.

Veamos la utilidad de la definición de este error, con los números del ejemplo anterior:

En el primer caso: $E_r = \frac{2}{1000} = 0{,}002$

$E_p = E_r \, x100 \longrightarrow E_p = 0{,}2\%$

E_r es error relativo

En el segundo caso: $E_r = \frac{2}{4} = 0{,}5$

$E_p = E_r \, x100 \longrightarrow E_p = 50\%$

E_p es error porcentual

Vemos claramente en los resultados que el error relativo nos da mejor información.

Tipos de errores

En el caso de las computadoras se producen principalmente dos tipos:

Errores de truncamiento y redondeo

Es el que se produce al introducir un número y expresarlo en formato exponencial.

El truncamiento se da cuando se sacan dígitos del número (porque tiene más que las posiciones utilizadas) sin considerar cuál es la primera cifra que se saca.

El redondeo es cuando sí se considera la primera cifra que se saca. El redondeo se hace teniendo presentes las siguientes reglas:

| *Si la primera cifra a suprimir es menor que '5', las cifras anteriores no varían.*

| *Si la primera cifra a suprimir es mayor a '5' (o igual que '5' seguida de algunas cifras no nulas), se le suma '1' a la última cifra que se deja.*

| *Si la primera cifra a suprimir es igual a '5' seguida de ceros, se incrementa en '1' la última cifra si es impar y no se modifica si es par.*

Errores de propagación

Estos son los que se producen al realizar operaciones con los números en formato exponencial y es necesario eliminar dígitos para conservar este formato.

El error se ***'propaga'*** con la operación.

El cálculo de estos errores, en la mayoría de los casos, es complejo desde el punto de vista matemático, por lo que no se desarrollará en este curso.

Errores de conversión

Como verán en las asignaturas específicas, la computadora no trabaja con números decimales sino con números binarios. Al convertir unos en otros se producen errores que también quitan precisión a las computadoras.

El redondeo es cuando sí se considera la primera cifra que se saca. El redondeo se hace teniendo presentes las siguientes reglas:

- Si la primera cifra a suprimir es menor que ‘5’, las cifras anteriores no varían.
- Si la primera cifra a suprimir es mayor a ‘5’ (o igual que ’5’ seguida de algunas cifras no nulas), se le suma ‘1’ a la última cifra que se deja.
- Si la primera cifra a suprimir es igual a ‘5’ seguida de ceros, se incrementa en ‘1’ la última cifra si es impar y no se modifica si es par.

Desempeño de síntesis

1 Expresá en formato exponencial de ocho posiciones los siguientes números:

a. 837465
b. 12,6543
c. 0,0000000564
d. 192,4329784
e. 0,0092303
f. 10

2 Convertí los números expresados en forma exponencial de ocho posiciones:

a. $0,42864000\ 10^{4}$
b. $0,43200000\ 10^{-3}$
c. $0,98451200\ 10^{9}$
d. $0,45187600\ 10^{-1}$
e. 0,12110000 10
f. $0.72770000\ 10^{0}$

3 Realizá las siguientes operaciones en formato exponencial (trabajá con cuatro posiciones):

a. 2532 E4 X 3532 E6 =
b. 2532 E5 : 4728 E2=
c. 4725 E-4 : 2532 E2=
d. 4725 E5 X 2847 E3=
e. 2538 E –4 X 4938 E-2=
f. (4038 E-4 : 2538 E -2) – (1235 E-5 X 3548 E4)=
g. 4872 E5 + 4927 E4 – 3549 E3=
h. 4253 E4 X 1893 E3=
i. 7534 E-2 : 4328 E –3=

4

a. Redondeá los siguientes números a dos cifras decimales:

b. Truncá los siguientes números a dos cifras decimales:

c. Explicá la diferencia entre redondeo y truncamiento:

a| 1,234
b| 2,3459
c| 3,23677
d| 3,458
e| 1,349
f| 1,2555
g| 6,56234
h| 0,34334
i| 0,12333
j| 0,698
k| 0,435
l|0,345
m| 0,725
n| 0,79555
o| 9,5611
p| 0,12398

Respuestas

1|

a. 83746500E6
b. 12654300E2
c. 56400000E-7
d. 19243297E3
e. 92303000E-2
f. 10000000E2

2|

a. 4286,4
b. 0,000432
c. 984512000
d. 0,0451876
e. 1,211
f. 0,7277

3|

a. 8943 E9

b. 5355 E3

c. 1866 E –5

d. 1345 E8

e. 1253 E –6

f. 1152 E-1

g. 5329 E5

h. 8050 E6

i. 1740 E2

4|

a.

a| 1,23

b| 2,35

c| 3,24

d| 3,46

e| 1,35

f| 1,26

g| 6,56

h| 0,34

i| 0,12

j| 0,70

k| 0,44

l| 0,34

m| 0,72

n| 0,80

o| 9,56

p| 0,12

4|

b.

a| 1,23

b| 2,34

c| 3,23

d| 3,45

e| 1,34

f| 1,25

g| 6,56

h| 0,34

i| 0,12

j| 0,69

k| 0,43

l| 0,34

m| 0,72

n| 0,79

o| 9,56

p| 0,12

¡Llegamos! Hemos concluido con esta clase, y con ella también terminamos la unidad 1. Espero que las explicaciones hayan sido claras y los temas de su agrado. Por las dudas que se hagan los distraídos, les recuerdo que tienen un desempeño de síntesis en donde se presentan ejercicios para repasar, no hoy, pero sí mañana o en dos días. No se olviden de la estrategia de los resultados.

¡Hasta la próxima clase!

Créditos

Imágenes

Encabezado: Image by Elchinator from Pixabay
https://pixabay.com/photos/math-work-mathematics-formulas-4711302/

Tipografía

Para este diseño se utilizó la tipografía ***Source Sans Pro*** diseñada por Paul D. Hunt.
Extraida de Google Fonts.

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a *correcciones@issd.edu.ar* e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo. Muchas gracias por tu aporte.

Bibliografía

Hoffman y Kunze (1979): Álgebra Lineal. Ed Prentice/Hall. México

Howard, Antón (1976): Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. México

Molina, Félix J. (2000): Álgebra y Geometría. (Editado en fascículos) Ed. Científica Universitaria. Córdoba. Argentina

Rojo, Armando (1996): Álgebra. Armando. Ed El Ateneo. Bs. As. Argentina