M1

Matemática 1

02 UNIDAD

05 CLASE

LA HORA DE LOS CIMIENTOS:

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

| Introducción al Álgebra de Conjuntos.

| ¿Qué es un conjunto? ¿Tiene relación con la realidad?
| ¿Cómo se pueden definir los conjuntos?
| ¿Es importante la expresión simbólica?
| ¿Es lo mismo pertenencia que inclusión?

ISSD

-Des-
Desarrollo de Software

MÓDULO DIDÁCTICO
2020

Introducción

¡Hola! Buenos días, buenas tardes o buenas noches. ¿Cómo han pasado esa semana? Supongo que bien, con toda la unidad 1 aprendida, repasada y afianzada, y seguro que ya están ansiosos por saber qué veremos en la clase de hoy. Espero que el tema de “conjuntos” les agrade, ya verán que es entretenido y de gran utilidad.

A continuación, les presento un esquema de los temas que desarrollaremos en esta unidad. |1|

|1|

Álgebra de Conjuntos

Esquema de la Unidad

Conjunto

- Conceptos primitivos
  - Conjuntos
  - Elementos
  - Pertenencia
- Operaciones
  - Producto cartesiano
    - Unión
    - Intersección
    - Complemento
      - Diferencia
- Aplicaciones
  - Conteo
  - Relaciones
  - Funciones

Conceptos primitivos

Introducción

La noción de conjunto es un concepto natural que manejamos a veces casi sin darnos cuenta, en las acciones más simples de nuestra vida cotidiana. De chicos, por ejemplo, armamos grupos (conjuntos) de nuestros juguetes, los agrupamos según distintas características, por ejemplo, un conjunto de autos y uno de juguetes rojos. Así, descubrimos que algunos cumplen con varias propiedades a la vez, y ponemos a los autos rojos en ambos conjuntos (intersección), los contamos (cardinalidad), y así, a través de los procesos de aprendizaje más básicos nos familiarizamos de inmediato con los conjuntos. Tempranamente ya, desde la escuela primaria, hemos tenido contacto con el concepto de conjuntos, su conformación y las operaciones que sobre ellos podemos efectuar. Tal vez por esto, las ideas sobre conjuntos nos resultan tan familiares e intuitivas, al punto de asumirlas en muchos casos como triviales. A lo largo de este apunte nos ocuparemos de dar una clara explicación de estos temas y formalidad a estas ideas.

Conjuntos y elementos

Términos como ***conjuntos y elementos*** son considerados en el contexto de la teoría de conjuntos como primitivos, en el sentido de que no pueden ser definidos estrictamente sin caer en circularidades, sino que más bien se los describe en forma intuitiva. Decimos, entonces, que **un conjunto es una colección *bien definida* de objetos**, los cuales reciben el nombre de **elementos** del conjunto. La expresión ***"bien definida"*** es fundamental en nuestra definición, ya que decimos que un conjunto ***está definido*** si dado cualquier objeto x puede determinarse su pertenencia, o no, al conjunto. Además, hay que señalar que la palabra "objetos" en este contexto se refiere no solo a objetos materiales, sino también a ***objetos abstractos o entes***, que son los que conforman la matemática.

Cuando decimos ***bien definida***, tampoco se hace referencia a la cantidad de elementos, ésta puede ser ***finita***, es decir, que la cantidad se puede contar, o ***infinita***, en esto caso la cantidad de elementos no está determinada.

Pertenencia

Un conjunto puede tener un número finito de elementos (como el conjunto de las cuatro estaciones del año) o un número infinito de elementos (como el conjunto de los número enteros). En general, denotaremos con letras mayúsculas **A, B, C,...** a los conjuntos y con minúsculas **a, b, c,...** a sus elementos, y escribiremos: |2|

Inclusión de conjuntos:

Definición: ***se dice que un conjunto A está incluido en B, si todo elemento de A, pertenece a B.***

En símbolos:

$A \subseteq B$ se lee: *A* "incluido en" *B*

Con respecto a los elementos de B, existen dos posibilidades:

a| Existe algún elemento de B que no pertenece a A. Entoces decimos que A está estrictamente incluido en B.

b| Todo elemento de B pertenece a A. Entonces decimos que A es igual a B.

Para tener en cuenta:

La relación de pertenencia se da entre un elemento y un conjunto ($a \in A$), es decir, un elemento pertenece a un conjunto.

|2|

$a \in A$

Para denotar la proposición *"el elemento **a** pertenece al conjunto **A**".*

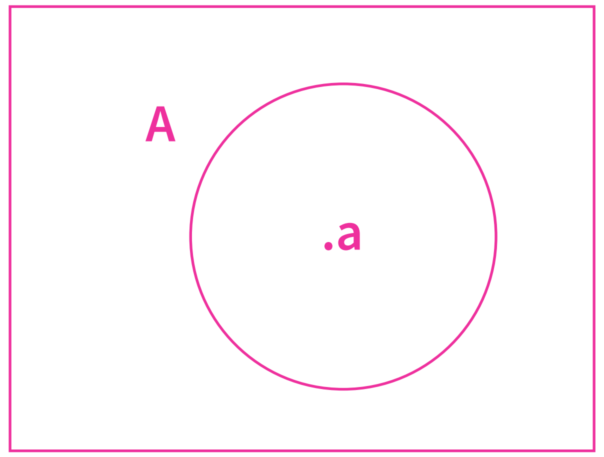


Figura 1: "a pertenece a A"

El caso contrario se escribe como: $a \notin A$

Indicando que *"el elemento **a** NO pertenece a **A**".*

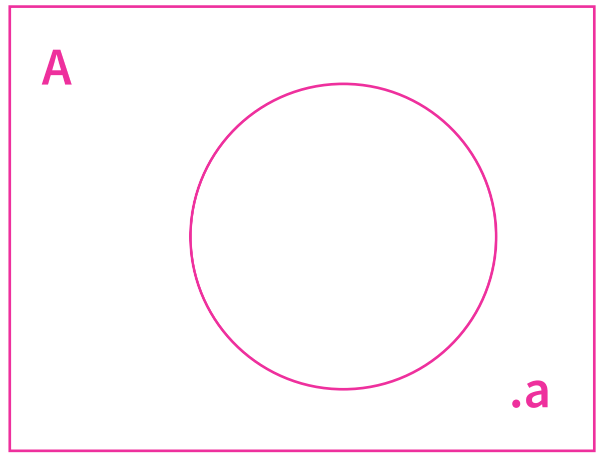


Figura 2: "a **no** pertenece a A"

La relación de inclusión se da entre dos conjuntos de elementos ($A \subseteq B$).

En lo que vas a tener mucho cuidado es en ver cómo están definidos los conjuntos, para así poder decir si la relación que se cumple es de pertenencia o de inclusión.

Por ejemplo:
Dado el conjunto **A= {1;3;5}**, se puede afirmar que:

$1 \in A$ $4 \notin A$ $\{1,3\} \subset A$ $\{1,2\} \not\subset A$

Pero en el siguiente caso, **A={1;{3};5}**, se puede afirmar que:

$1 \in A$ $4 \notin A$ $\{3\} \in A$ *(ya que así está definido en el conjunto)*

$\{\{3\}\} \subset A$ $\{5\} \subset A$

Posiblemente se te ha presentado una confusión, pero tenés que tener muy en cuenta la forma en la que se definió cada conjunto. En este caso, {3} está definido como elemento del conjunto A, por lo tanto la relación que se cumple es de pertenencia, aunque esté entre llaves.

Bien, ahora que ya hemos definido los conceptos primitivos y hemos explicado algunos ejemplos de ellos, no queda más que darles unos minutos para que puedan resolver un desempeño que les permita asegurarse que los entendieron. En cinco minutos continuamos.

Para los temas siguientes, recordá que entre un elemento y un conjunto siempre se habla de *pertenencia* o *no pertenencia*.

Desempeño 21

A Indicá si las siguientes expresiones definen algún conjunto. En caso afirmativo, decí si es finito o infinito; en caso negativo, indicá por qué no lo hacen y da ejemplos.

a. Los hombres altos.
b. Los actuales habitantes de la Luna.
c. Los algoritmos de exactamente cuatro instrucciones.
d. Las estrellas brillantes del cielo austral.

B Sean **A = {1,2}** y **B = {2, 4, 6, 8, 10}**. Indicá la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones (justificá escribiendo la opción correcta):

a. $1 \in A$ b. $9 \in A$ c. $9 \in B$

d. $9 \notin B$ e. $2 \notin A$

Seguramente ustedes, como muchas otras personas, podrían dar a conocer un conjunto y explicar de qué se trata de varias maneras diferentes y yo podría entenderlo. Pero, lamentablemente, para formalizar el lenguaje que utilizamos en Matemática, debo informarles que solo podemos definir un conjunto de tres maneras que ahora intentaré hacerles conocer.

Formas de definir un conjunto

Si el conjunto está formado por un número finito de elementos, puede ***determinarse*** inequívocamente, nombrando todos los elementos que lo componen. Esto suele hacerse colocando primero el nombre del conjunto, luego un signo de igualdad y a continuación todos los elementos que lo conforman, encerrados entre llaves e individualizados separándolos con coma o punto y coma.

Por ejemplo:

$$V = \{ a, e, i, o, u \}$$

(Que se lee "***conjunto V formado por los elementos a, e, i, o, u***").

Acá se describe claramente el conjunto **V** de las letras vocales hispanas. En este caso, se dice que el conjunto ***está determinado o definido*** por extensión o por enumeración.

*Un conjunto está definido por **EXTENSIÓN** cuando se enumeran o detallan todos sus elementos.*

Asumiendo el contexto de las ***letras del alfabeto español***, pueden escribirse, por ejemplo, las siguientes proposiciones:

$a \in V$	$b \notin V$	$e \in V$
$n \notin V$	$o \in V$	$g \notin V$

Que resultan verdaderas en virtud de la anterior definición del conjunto **V**.

Otras veces, y en particular cuando tratamos con conjuntos de una cantidad infinita de elementos, la enumeración de miembros no aparece como una notación adecuada y conviene definir al conjunto con una propiedad o característica común solamente a todos sus elementos.

Por ejemplo:

V = { x/ x es una vocal del alfabeto español}

Significa que *"el conjunto V está formado por todos los elementos **x** tales que **x** es una vocal del alfabeto español"*, y también define claramente al conjunto de las letras vocales españolas. En este caso, decimos que el conjunto **está determinado o definido por comprensión** o por propiedad.

*Un conjunto está definido por **COMPRENSIÓN** cuando se da una propiedad que verifican todos sus elementos, y sólo ellos.*

Cabe reiterar que, ni en la noción de ***conjunto*** ni en las dos formas en las que puede definirse un determinado conjunto se hace referencia al orden o a la repetición de elementos. Este no es un descuido, sino la esencia misma de la idea de conjunto como colección de objetos. Así:

A = {a, e, i, i, i, i, o, u}
B = {u, o, i, e, e, a}

Representan al mismo conjunto **V** definido anteriormente.

A veces, abusando de la intuición y de las analogías, suele también definirse un conjunto infinito de elementos por extensión, indicando con puntos suspensivos que existen más elementos que los efectivamente indicados como en:

P = {1, 2, 4, 8, 16, ...}

Cuya correcta definición por comprensión sería:

P = {x / x es una potencia de 2 con exponente entero no negativo}

o

$$P = \{ x / x = 2^n, \ n \in N_0 \}$$

N_0 representa al conjunto de los números naturales incluyendo al cero. Entonces, $n \in N_0$ esta indicando “exponente entero no negativo”.

Para que comparemos. |3|

Otra forma de definir un conjunto es gráficamente, a través de ***Diagramas de Venn***. Esto es como se ha hecho en las figuras 1 y 2, es decir encerrando en una figura cerrada los elementos de un conjunto, que a su vez se indican con puntos.

*Un conjunto está definido **GRÁFICAMENTE** cuando se encierran en una figura cerrada sus elementos, indicados con puntos (Diagrama de Venn).*

|3|

Por extensión	Por comprensión
A= { a, e, i, o, u }	A= { x I x es una vocal }
B= { 0, 2, 4, 6, 8 }	B= { x I x $\in N_0 \wedge$ x μ2 $\wedge$ x < 10 }
C= {1, 3, 5, 7, 9 }	C= { x I x es un número impar menor que 10 }
D= { c, o, n, j, u, t, s }	D= { x I x es una letra de la palabra conjuntos }
E= { b, c, d, f, g, h, j, ...}	E= { x I x es una consonante }
F= { Laura, Javier }	F= { x I x es alumno y está en la clase}
G= {mercurio}	G= { x I x es un metal líquido }

(Observa que los conjuntos B y C están definidos por comprensión, pero de diferente manera…)

El conjunto **V** gráficamente sería: |4|

Ejemplo N°1:
Determiná por extensión y comprensión el conjunto de las provincias mesopotámicas de la República Argentina.

Solución:

M = {Entre Ríos, Corrientes, Misiones}

M = {x / x es una provincia argentina de la Mesopotamia}

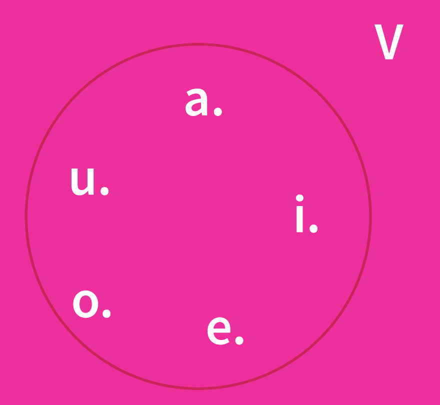
En el primer caso, ***enumeramos*** todos los elementos del conjunto, mientras que en el segundo definimos el conjunto indicando una ***propiedad común a todos sus elementos***.

Ejemplo N°2:
Definí por extensión y por comprensión al conjunto P formado por los dígitos impares.

Solución:
Por extensión
P = { 1, 3, 5, 7, 9}
Por comprensión
P = { x / x es impar y   0 < x < 10}

Por comprensión la respuesta no es única, pues puede existir más de una propiedad que describa solo a esos elementos. Por ejemplo, para P podría ser también P = {x /x = 2n +1 y 0 < n < 4}.

|4|



Es probable que alguna de las formas explicadas sea igual a la que a ustedes se les hubiese ocurrido, y por ello creo que no les habrá costado interpretarlas. Para asegurarnos de esto, les pido que resuelvan el ejercicio que les planteo a continuación. Para eso les doy cinco minutos.

Recorda:

Un conjunto está definido por EXTENSIÓN cuando se enumeran o detallan todos sus elementos.

Un conjunto está definido por COMPRENSIÓN cuando se da una propiedad que verifican todos sus elementos, y sólo ellos.

Un conjunto está definido GRÁFICAMENTE cuando se encierran en una figura cerrada sus elementos, indicados con puntos (Diagrama de Venn).

Desempeño 22

Definí por extensión y comprensión los siguientes conjuntos:

a. Los naturales pares menores que diez.

b. Los cuadrados de los primeros nueve números naturales.

c. Los números enteros negativos mayores que menos cuatro.

Para terminar con nuestra clase de hoy, definiremos algunos conjuntos muy particulares, como también la igualdad entre conjuntos, concepto muy sencillo e intuitivo.

Conjuntos especiales

Extenderemos el concepto de conjunto definiendo el ***conjunto vacío*** (denotado por $\varnothing$) como aquel que no contiene elemento alguno, y considerando como conjunto a aquel que posea un único elemento, ***conjunto unitario***.

Además, al hablar de conjuntos, normalmente se supone un determinado ***universo de discurso*** al cual pertenecen naturalmente todos los objetos a los que se hace referencia en el estudio. En los ejemplos anteriores, está implícito en el término vocales que estamos hablando de ***letras*** y no de comidas o países europeos.

Denotaremos con "$\mathcal{U}$" al ***conjunto universal*** del cual son miembros todos los elementos bajo estudio.

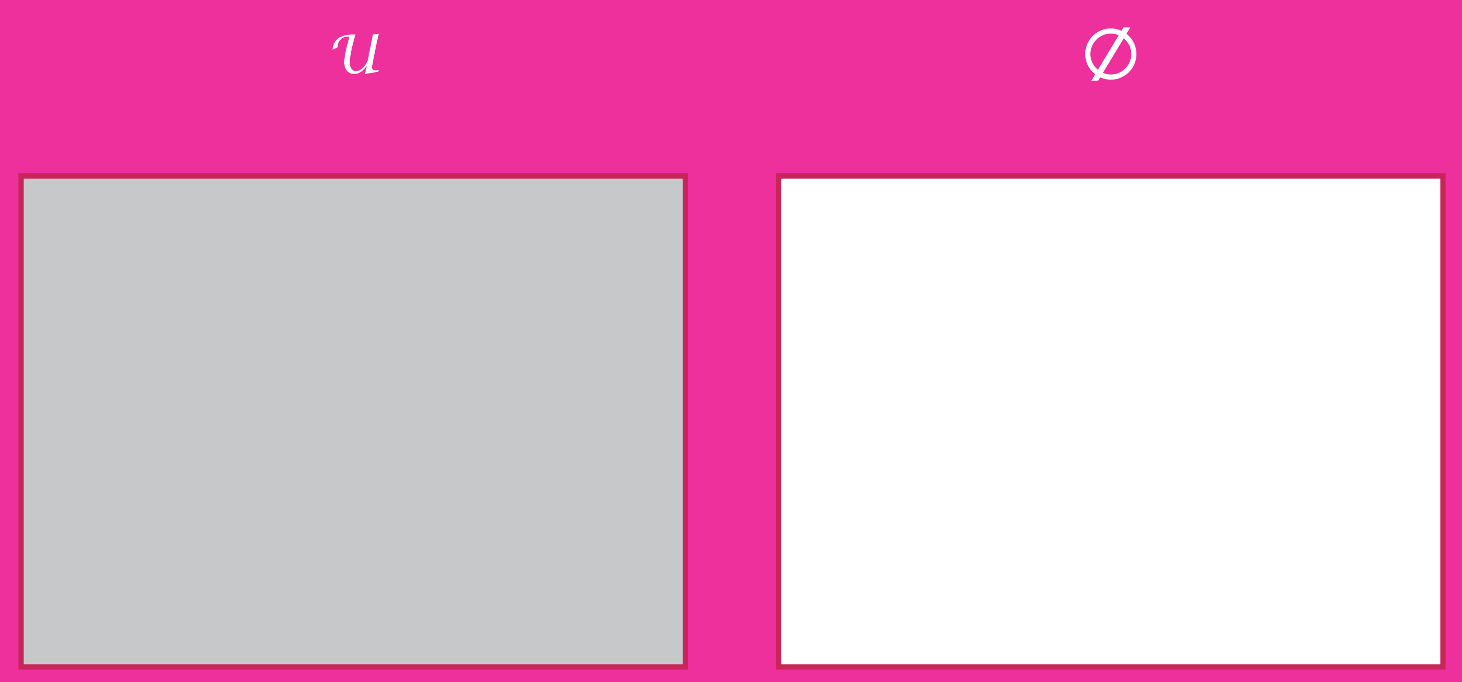
Figura 3: Conjuntos universal y vacío (áreas sombreadas). |5|

Entonces:

Conjuntos vacíos → *sin elementos* $\varnothing$
Conjunto unitario → *un elemento*
Conjunto universal → *todos los elementos* $\mathcal{U}$

Por su importancia en matemáticas, y dado que serán utilizados para ejemplificar diversos conceptos, daremos una notación especial a los siguientes conjuntos:

|5|



N = {x / x es un número natural}
Z = {x / x es un número entero}
Q = {x / x es un número racional}
R = {x / x es un número real}
N_0 = {x / x es un número natural o x es el número cero}
Z^+ = {x / x es un número entero positivo}

Noten que **N** *y* **Z^+** *representan al mismo conjunto, por lo que puede emplearse uno u otro de forma equivalente.*

Igualdad de conjuntos
Como ya se indicó, la repetición de elementos y su orden de presentación en la definición de un conjunto particular no tiene efectos sobre su determinación efectiva. Teniendo esto en cuenta:

Definición: *Dados dos conjuntos A y B, se dice que son iguales (y lo denotamos por A = B) si solamente están formados por los mismos elementos.*

La anterior definición se conoce también como **Principio de extensión**.

Ejemplo N° 3:
Dado el conjunto A= {1, 2, 3} definí otros tres iguales al mismo.

Solución:

B = {2, 3, 1, 1}

C = {x / x $\in$ N y x < 4}

D = {x / (x = 1) ó (x = 2) ó (x = 3)}

Ya formalizadas las definiciones, como cierre de clase hagan por favor el siguiente desempeño Nº 23 completo. Es muy simple, así que no se tomen más de cinco minutos.

Desempeño 23

a Indicá cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:

$A = \{x \,/\, (x \in N)\ \ (x \text{ es primo})\ \ (x\ < 10)\}$

$B = \{x \,/\, (x \in Z)\ \ (x<8)\}$

$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$D = \{1; 7; 5; 3; 1\}$

$E = \{2; 3; 4; 5; 6; 1; 7\}$

b Explicá cuándo dos conjuntos son distintos y estudiá todos los casos posibles.

Mañana no se olviden de repasar y de resolver los desempeños del trabajo. Nos vemos la semana próxima, o antes si ustedes lo necesitan.

Desempeño de síntesis

1 Definí cinco conjuntos por comprensión y cinco por extensión.

2 Dá ejemplos de conjuntos unitarios por comprensión.

3 Nombrá los elementos del conjunto definido por:

$$D = \{ (x, y) / x, y \in No \wedge y = 2x - 6 \}$$

4 Definí por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $A = \{ (x, y) / x, y \in N \wedge 2x - 4 = y \}$
b. $B = \{ (x, y) / x, y \in N \wedge 3x + y = 2 \}$
c. $C = \{ (x, y) / x, y \in N \wedge 2x + y = 6 \}$
d. $D = \{ (x/x \in Z \wedge x = 4n-2 \wedge n \in N \wedge n < 5\}$
e. $E = \{ x/x, n \in N \wedge x = 6-3n \wedge n < 5\}$

5 ¿Cuál es el conjunto cuyos elementos se obtienen de la expresión $x = 2k - 3$ con $k \in N$ y $1 < k < 6$?

6 Definí de otra forma el conjunto anterior.

7 Indicá si son verdaderas las siguientes afirmaciones, siendo D el conjunto definido en el desempeño nº 3. Justificá tu respuesta.

a. $0 \in D$
b. $-6 \in D$
c. $(0,6) \subset D$
d. $\{5,4\} \subset D$
e. $\{(10,14)\} \subset D$
f. $\{(5,14)\} \in D$
g. $(4,2) \in D$
h. $\{6\} \subset D$

8 Dados los conjuntos:

$I = \{\{7,8\},\{2,3,4\},\{9,10\}\}$
$J= \{7,8,2,3,4,9,10\}$
$K= \{\{7\},\{8\},\{2\},\{3\},\{4\},\{9\},\{10\}\}$

a. ¿Es I = J = K? Justificá cualquier respuesta.
b. Indicá cuáles de las siguientes expresiones son correctas. En caso de no serlo, escribí la correcta:

a. $\{7,8\} \in I$
b. $\{7,8\} \subset I$
c. $\{7,8\} \subset J$
d. $\{7,8\} \in J$
e. $\{7\} \in I$
f. $\{7\} \subset K$
g. $\{7,8\} \in K$
h. $\{7,8\} \subset K$
i. $\{7\} \in K$
j. $\{7\} \subset I$
k. $\{7\} \in J$
l. $\{\{7\},\{8\}\} \subset K$

Repuestas:
3| D ={(3;0),(4,2)(5,4)(6,6)(7,8)(8,10)........}

4| A = {(3;2); (4;4); (5;6);(6;8). . .}
B= { }
C={(1,4)(2,2)}
D= {2,6,10,14}
E= {3}

5| {-1, 1, 3, 5, 7, 9}

7| Verdadera e) y g).

8| a. No son todos los conjuntos iguales.

b. **(puede haber variación en las correcciones ya que hay distintas maneras de corregir).**

a| V
b| F $\{7,8\} \in I$
c| V
d| F $\{7,8\}$ J
e| F $\{7\} \in K$
f| F $\{7\}$ J
g| F $\{7,8\} \in I$
h| F $\{7,8\}$ J
i| V
j| F $\{7\}$ J
k| F $7 \in J$
l| V

Como verán, hemos comenzado a trabajar con un tema diferente al de la primera unidad, que no lleva tanto cálculo y, quizás, puedan aplicarlo más a la vida cotidiana. Hablamos de condiciones de mayor, de menor, de igualdad, de números múltiplos, etc. Les dejo un ejemplo para que lo analicen:

En el nivel secundario, el Ciclo Orientado, los alumnos aprueban las materias siempre y cuando el promedio general sea mayor o igual a 6 (seis). En caso de no aprobar, se llevan la materia a Coloquio de diciembre si el promedio es mayor o igual que 4 (cuatro) y menor que 6 (seis), o se la llevan a febrero si el promedio es menor que 4 (cuatro).

Tema conocido, ¿verdad? Este ejemplo se puede expresar en forma simbólica, ya que los colegios tienen programas que de acuerdo al promedio les permiten saber en qué condición queda el alumno al finalizar el año.

¡Hasta la próxima clase!

Créditos

Imágenes

Encabezado: Image by Elchinator from Pixabay
https://pixabay.com/photos/math-work-mathematics-formulas-4711302/

Tipografía

Para este diseño se utilizó la tipografía ***Source Sans Pro*** diseñada por Paul D. Hunt.
Extraida de Google Fonts.

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a *correcciones@issd.edu.ar* e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo. Muchas gracias por tu aporte.

Bibliografía

Hoffman y Kunze (1979): Álgebra Lineal. Ed Prentice/Hall. México

Howard, Antón (1976): Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. México

Molina, Félix J. (2000): Álgebra y Geometría. (Editado en fascículos) Ed. Científica Universitaria. Córdoba. Argentina

Rojo, Armando (1996): Álgebra. Armando. Ed El Ateneo. Bs. As. Argentina