M1

Matemática 1

UNIDAD 03

CLASE 10

FORMA Y FORMALIDAD EN MATEMÁTICA

| Sintaxis del lenguaje lógico formal. Sucesión estructural.

| ¿Qué condiciones se deben tener en cuenta para que una proposición esté formada correctamente (fbf)?

ISSD

-Des-

Desarrollo de Software

MÓDULO DIDÁCTICO

2020

Introducción

¡Hola! ¿Cómo les va? Espero que hayan podido comprender bien todo lo de la clase anterior. Si bien contiene bastante teoría, no es para nada difícil. Les digo esto porque para comprender esta clase necesitamos tener en claro los conceptos vistos en la clase 9.

Al finalizar el encuentro de hoy vamos a poder diferenciar cuándo una expresión es correcta (es decir, una fbf) o no y, además, vamos a poder reconocer cuáles son los nexos principales dada una expresión. Esto nos va a ayudar más adelante a la hora de realizar una tabla de verdad. ¡Mucha suerte!

Queremos acotar nuestro estudio a cierto tipo de expresiones de nuestro alfabeto ***L***.

Definiremos a continuación las reglas que permiten "seleccionar" algunas secuencias de otras, de la misma manera que en nuestro lenguaje cotidiano sabemos qué expresiones tienen o no sentido. Lo que haremos es distinguir del conjunto de todas las sucesiones de caracteres de nuestro alfabeto lógico, aquellas que respondan a ciertas reglas de **"buena formación"**.

A tal fin debemos definir:

Sucesión Estructural (SE)

Una sucesión **finita de expresiones** $\{ E_1, E_2, E_3 ....E_j,.....E_k,.....E_n \}$ se llama sucesión estructural si y solo si cada expresión Ei se obtiene por aplicación de una y solo una de las siguientes reglas:

| **Regla 1**: $E_i = p$ siendo p una variable proposicional.

| **Regla 2**: $E_i = \neg E_j$ con $j < i$ (significa que cualquier expresión de la secuencia puede ser la negación de otra expresión **que ocurre antes**).

| **Regla 3**: $E_i = (E_j \;\eta\; E_k)$ con ***j, k, < i*** donde $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

η representa cualquier nexo binario, es decir, que la expresión que ocupa la posición ***i*** es dos proposiciones que han ocurrido **antes** unidas por un nexo binario y entre paréntesis.

Si bien estas reglas no son complicadas, en ocasiones resulta difícil su interpretación, a lo mejor es por el modo en que están enunciadas o porque el estudiante no puede creer que solo sea eso. Bueno, por las dudas que les falte terminar de entenderlas, veamos ahora unos casos que las aclaren.

Ejemplos

a| {p ,q ,r ,s ,t } Este conjunto de expresiones es una sucesión estructural (SE) porque

$E_1 = p, E_2 = q, E_3 = r, E_4 = S, E_5 = t$

(Todas las expresiones se forman cumpliendo la **regla 1**)

b| {p , ¬p , ¬¬p , ¬¬¬p , ¬¬¬¬p } Este conjunto es una SE porque cada expresión se obtiene por **regla 1** (E1 es una variable proposicional) o por **regla 2** cuando cada una de ellas es la negación de una expresión anterior donde:

$E_1=p \quad E_2=\neg E_1 \quad E_3=\neg E_2 \quad E_4=E_3 \quad E_5=\neg E_4$

c| {p ,q ,(p $\wedge$ q),r ,((p $\wedge$ q) $\rightarrow$ r)} Este conjunto es una SE porque cada expresión se obtiene mediante **regla 1** o **regla 3**, es decir:

$E_1 = p$ $E_2 = q$ $E_3 = (E_1 \wedge E_2)$ $E_4 = r$ $E_5 = (E_3 \rightarrow E_4)$

d| $\{p, q, (p \wedge q), r, \neg r, t, (\neg r \rightarrow t), \neg(\neg r \rightarrow t)\}$ Es una (SE) donde

$E_1 = p$ $E_2 = q$ $E_3 = (E_1 \wedge E_2)$ $E_4 = r$
$E_5 = \neg E_4$ $E_6 = t$ $E_7 = (E_5 \rightarrow E_6)$ $E_8 = \neg E_7$

La definición anterior establece el modo a partir del cual han de generarse las expresiones que estudiaremos.

$p \wedge q$ **no** es una expresión obtenida por **regla 3** porque le falta un par de paréntesis. La **regla 3** establece que por cada nexo binario que une dos variables proposicionales, corresponde un par de paréntesis.

$(\neg p)$ **no** es tampoco una expresión obtenida por regla 2 ya que el nexo unitario **no** lleva paréntesis.

(q) **no** es una expresión obtenida por **regla 1** porque las variables proposicionales no llevan paréntesis.

A partir de las reglas que nos permiten escribir sucesiones estructurales, podemos enunciar o proponer expresiones que son lógicamente aceptables. Nos referimos a las fórmulas bien formadas.

Fórmulas bien formadas (f.b.f)

Una expresión es una f.b.f si y solo si existe una sucesión estructural que termine en ella.

Para una mejor interpretación de la definición de fórmula bien formada, presten atención a los ejemplos que a continuación les presento:

Ejemplo 1:

$A = ((p \wedge q)$

¿Puede pensarse en la sucesión {p, q, (p $\wedge$ q),...? A no es una f.b.f ya que no podemos definir mediante las reglas descriptas una SE que termine en ella.

Ejemplo 2:

$B = (((p \wedge q) \vee s) \longrightarrow \neg t)$

Consideremos la sucesión

$\{ p, q, (p \wedge q), s, ((p \wedge q) \vee s), t, \wedge t, (((p \wedge q) \vee s) \longrightarrow \neg t)\}$

| La primera expresión se forma por **regla 1**.
| La segunda expresión se forma por **regla 1**.
| La tercera por **regla 3**.

| La cuarta por **regla 1**.
| La quinta por **regla 3**.
| La sexta por **regla 1**.
| La octava por **regla 2**.
| La novena por **regla 3**.

B es una f.b.f. porque existe una sucesión estructural cuya última fórmula es precisamente B.

Ejemplo 3:

$$C = (\neg (p) \longrightarrow (s \vee q))$$

Si analizamos la sucesión {p, ¬ p, s , q, (s ∨ q), (¬ p ⟶ (s ∨ q))}, vemos que C no es una f.b.f, pues el nexo unitario no introduce un par de paréntesis en la segunda expresión.

Ejemplo 4:

$$D = ((t \neg \wedge \neg p) \longleftrightarrow \neg q))$$

Sea la sucesión {t, p, ¬ p, (t ∧ ¬ p), q, ¬q , ((t ∧ ¬p) ⟷ ¬q)} , se observa que D **no** es una f.b.f. porque no existe manera de formar una sucesión estructural que termine en D. Notemos que existe un nexo unitario que no antecede a una variable proposicional.

Ejemplo 5:

$$E = (\neg (s \vee p) \longleftrightarrow \neg \neg t)$$

Es una f.b.f. ya que existe la sucesión $\{ s, p, (s \vee p), \neg (s \vee p), t, \neg t, \neg\neg t, (\neg(s \vee p) \longleftrightarrow \neg\neg t)\}$ donde se observa que E es la última expresión.

Ejemplo 6:

$$F = ((p \wedge s) \longrightarrow (q \longleftrightarrow s) \longleftrightarrow t)$$

F no es una f.b.f, pues si se observa bien, falta un par de paréntesis que, como ya dijimos, es lo que nos garantiza la no ambigüedad de lectura.

$$F = (((p \wedge s) \longrightarrow (q \longleftrightarrow s)) \longleftrightarrow t) \text{ o } F = ((p \wedge s) \longrightarrow ((q \longleftrightarrow s) \longleftrightarrow t))$$

Así como se puede operar con variables proposicionales, también es posible hacerlo con fórmulas bien formadas, solo que para ello también debemos tener presentes algunas reglas.

Definición recursiva de fórmulas bien formadas

Regla 1| Si A=*p* siendo *p* una variable proposicional, entonces A es f.b.f. (stock Inicial de f.b.f)
Regla 2| Si A es f.b.f., entonces $\neg$ A es f.b.f.
Regla 3| Si A y B son f.b.f. donde $\eta \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$, entonces (A η B) es f.b.f
Regla 4| Solo las cadenas formadas por aplicación de las reglas 1,2,3 son f.b.f. (clausura).

El fenómeno de recurrencia lingüística se refiere a la característica propia de todo sistema lingüístico según el cual los símbolos son reutilizables, es decir, pueden volver a emplearse cuantas veces sea necesario en distintas combinaciones para expresar mensajes. Este fenómeno se manifiesta en la economía lingüística que supone el hecho que con unas pocas decenas de fonemas se puedan expresar millones de oraciones distintas, es decir, que con un número finito de símbolos puede expresarse un número infinito de mensajes.

Ejemplos:
Si A= p, entonces A es f.b.f. porque satisface regla 1.
Si B= $\neg$(s $\vee$ p), entonces B es f.b.f, entonces (s $\vee$ p) es f.b.f. y B se obtiene por **regla 2**.
Si C= ((p $\wedge$ s) $\longrightarrow$ q), entonces C es f.b.f, pues lo son (p $\wedge$ s), y q y C se obtienen por aplicación de la regla 3.

Después de estos ejemplos creo que ya les habrá quedado más claro el concepto. Ahora llegó el momento de resolver algunos desempeños que se los planteo en la siguiente actividad. Tienen veinte minutos para la resolución.

Desempeño 33

Determiná si las siguientes expresiones son o no f.b.f. En caso negativo, indicá la o las causas; en caso afirmativo, encontrá una sucesión estructural que termine en ella.

$A = (\neg (p) \longleftrightarrow (\neg s \vee \neg t))$

$B = (\neg (r \wedge \neg p) \longleftrightarrow \neg \neg t)$

$C = (\neg (p \vee \neg q) \longrightarrow \neg q)$

$D = ((t \longleftrightarrow \neg t) \longrightarrow (p \vee s) \wedge \neg q)$

$E = ((p \vee q) \longrightarrow \neg(s))$

$F = ((t \wedge \neg p) \longleftrightarrow \neg q)$

$G= (\neg (s \vee \neg p) \longleftrightarrow t)$

$H = ((t \longleftrightarrow s) \longrightarrow (q \vee t) \wedge s)$

Espero no hayan tenido dificultad al resolver los ejercicios. Si les quedó alguna duda no tienen más que preguntar.

De todas las secuencias de caracteres que podemos generar con nuestro alfabeto ***L***, solo serán objeto de nuestro estudio las fórmulas bien formadas.

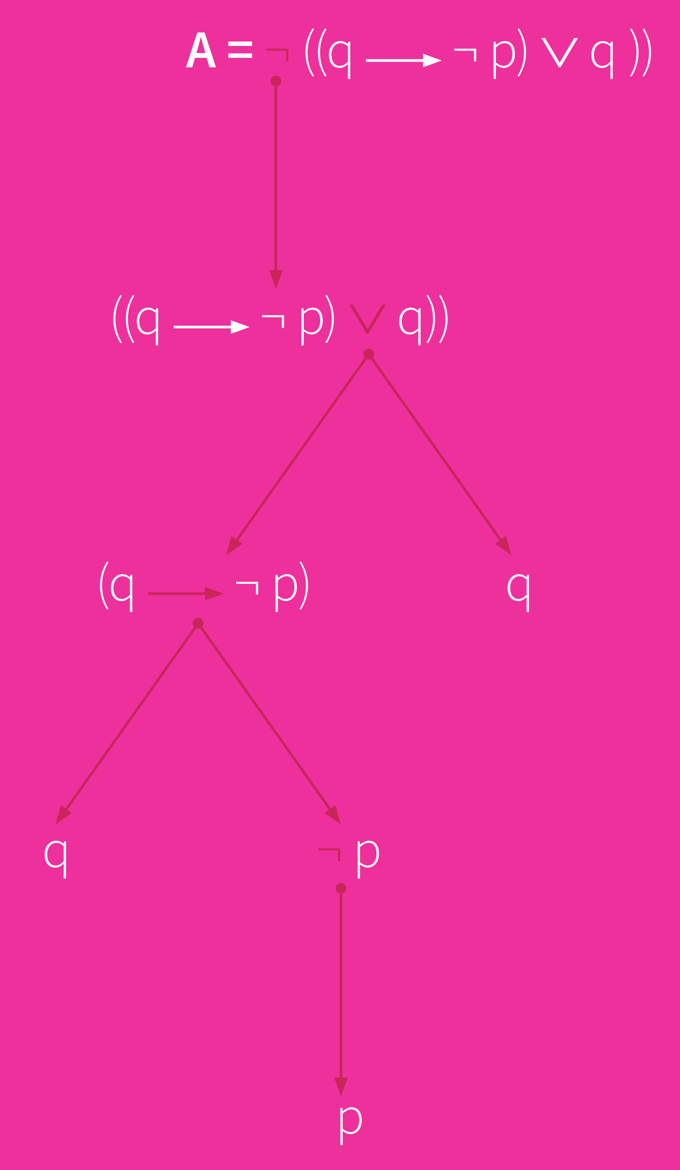
De esta manera, el lenguaje artificial construido está exento de ambigüedad, es decir, que si A es una fórmula bien formada, entonces se expresa de manera unívoca como:
A = p siendo p una variable proposicional.
A = ¬ B siendo B una f.b.f.
A =(B η C) siendo B ,C f.b.f y donde η $\in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$.

De esto resulta que para toda f.b.f A, si A no se reduce a una variable proposicional, entonces contiene un **conector principal único (o nexo principal)** que es “¬” si ***A* = ¬ *Bi*** o es η si A=(BηC) siendo B ,C f.b.f y η $\in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$.

Conocer el conector principal de una f.b.f. equivale a conocer la o las f.b.f. a partir de las cuales ésta se ha generado a través de alguna de las reglas de formación.

Ejemplo 1: |1|

|1|



*Conocer el conector principal de A permite identificar mediante qué otras fórmulas (llamadas subfórmulas) ha sido generada la f.b.f. A. El diagrama anterior recibe el nombre de Árbol genealógico de una f.b.f. En él se han marcado en **color magenta** el nexo principal de A y el de cada una de sus subfórmulas. Para comprender mejor el concepto de árbol genealógico, haremos a continuación un ejercicio entre los dos, yo te voy a ayudar.*

Desempeño 34

Dada:

$B = (\neg (t \longrightarrow (\neg p \vee t)) \wedge \neg \neg p)$

Determiná si B es o no una fórmula bien formada. En caso afirmativo encontrá una sucesión estructural que termine en B, identificá el nexo principal y construí el árbol genealógico de la fórmula B.

Resolución desempeño 34

En cada subfórmula se ha marcado con magenta el nexo principal de cada una.

Considerá la secuencia

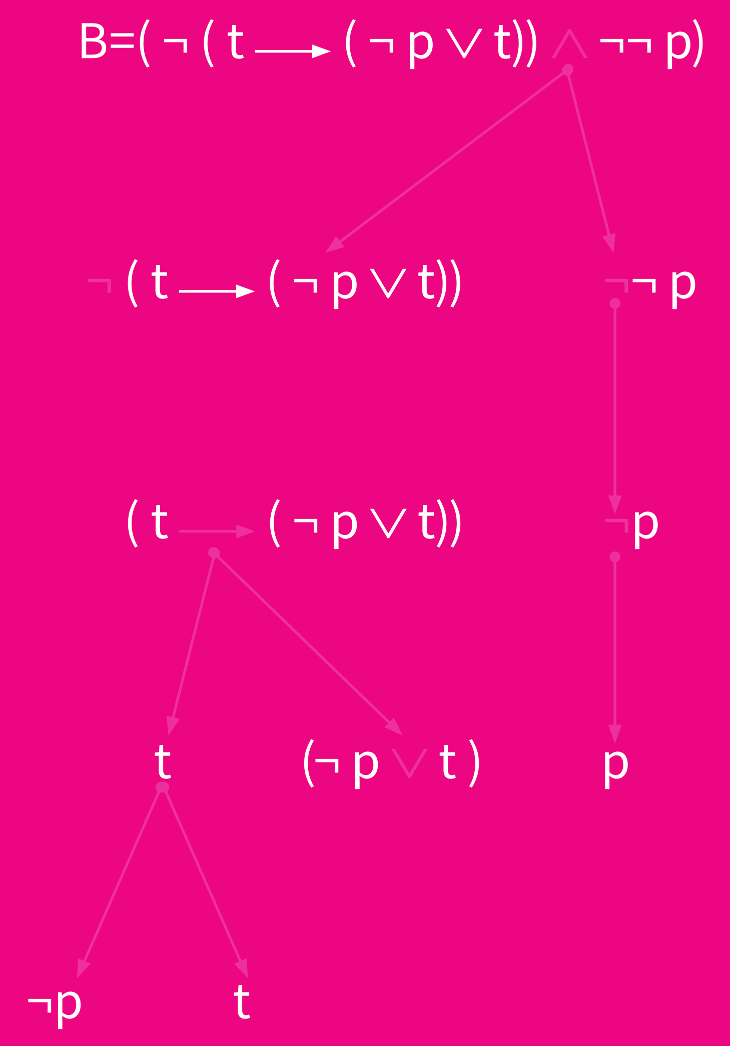
$\{ t, p, \neg p, (\neg p \vee t), (t \rightarrow (\neg p \vee t)), \neg (t \rightarrow (\neg p \vee t)), \neg\neg p, (\neg (t \rightarrow (\neg p \vee t)) \vee \neg\neg p) \}$

Esta secuencia constituye una sucesión estructural cuya última fórmula es B ya que:

| $E_1 = t$ | $E_2 = p$ | $E_3 = \neg E_2$ | $E_4 = (E_3 \vee E_1)$ | $E_5 = (E_1 \rightarrow \vee E_4)$

| $E_6 = \neg E_5$ | $E_7 = \neg E_3$ | $E_8 = (E_6 \wedge E_7) = B$

Por lo tanto, B es una f.b.f cuyo árbol genealógico es:



Desempeño 35

Para cada f.b.f del desempeño 33, encontrá una sucesión estructural que termine en ella. Identificá el nexo principal de la f.b.f. y construí su árbol genealógico.

Desempeño 36

Indicá si las siguientes formulas son o no bien formadas. En caso de no serlo, justificá. Y en caso de ser fbf, escribí la sucesión estructural de ella y su árbol genealógico.

a. $A = ((\neg p \vee \neg q) \longrightarrow \neg p)$
b. $B = (\neg p \vee \longrightarrow r) \vee p)$
c. $C = (\neg p \vee (\neg q)) \longrightarrow r$
d. $D = (\neg(p \vee q) \wedge (p \longrightarrow \neg q)$
e. $E = ((\neg q \longleftrightarrow p) \longrightarrow (\vee \neg\neg\neg q)) \longrightarrow r$
f. $F = ((\neg p \wedge \neg\neg q) \longleftrightarrow (\neg\neg r)$
g. $G = (((\neg(\neg p) \vee (q)) \longleftrightarrow (\neg(\neg p)))$

Lógica proposicional... Y lenguaje simbólico

Algunos ejemplos... Va con ayuda...

Luego de hacer una muy buena lectura de las clases 9 y 10, te invito a que trabajes con este desempeño. Creo que son ejemplos claros para que vayas analizando si has entendido bien o no, y para ver de que se trata esto de las proposiciones que tanto se pueden utilizar después para trabajar con conectores lógicos y tablas de verdad…

1 Simbolizá las siguientes proposiciones:

a. No vi la película, pero leí la novela.
b. Ni vi la película ni leí la novela.
c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.
d. Vi la película aunque no leí la novela.
e. No me gusta trasnochar ni madrugar.
f. O tu estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.
g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí.
h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento.
i. O está lloviendo y nevando, o está soplando el viento.
j. Si hay verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.
k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

2 Simbolizá:

a. Si p, entonces q
b. No es el caso que p y q
c. p solamente si q y no r
d. p o no-q
e. Si p y q, entonces nor o s
f. Si p, entonces q, y si q, entonces p

Símbolo	Conectiva	Expresión
$\wedge$	Conjunción	Y
$\vee$	Disyunción	O
$\neg$	Negación	NO
$\rightarrow$	Condicional	Si...Entonces
$\leftrightarrow$	Bicondicional	Si y solo si

3 Formalizá las siguientes proposiciones:

a. No es cierto que no me guste bailar. [p: me gusta bailar].
b. Me gusta bailar y leer libros de ciencia ficción. [p: me gusta bailar. q: me gusta leer libros de ciencia ficción].
c. Si los gatos de mi hermana no soltaran tanto pelo me gustaría acariciarlos. [p: los gatos de mi hermana sueltan pelo. q: me gusta acariciar los gatos].
d. Si y solo si viera un marciano con mis propios ojos, creería que hay vida extraterrestre. [p: ver un marciano con mis propios ojos. q: creer en los extraterrestres].
e. Una de dos: o salgo a dar un paseo o me pongo a estudiar como un energúmeno. [p: salir a dar un paseo. q: estudiar como un energúmeno].
f. Si los elefantes volaran o supieran tocar el acordeón, pensaría que estoy como loco y dejaría que me internaran en un psiquiátrico. [p: los elefantes vuelan. q: los elefantes tocan el acordeón. r: estar loco. s: internar en un psiquiátrico].

4 Une cada proposición con su formalización:

"Llueve" = p
"Hace sol" = q

a. Llueve y hace sol.	$\neg p$
b. Llueve y no hace sol.	$(p \vee q)$
c. Llueve o hace sol.	$(p \wedge q)$
d. Si no llueve, hace sol.	$(p \wedge \neg q)$
e. No es cierto que llueva.	$\neg \neg p$
f. No es cierto que no llueva.	$(q \longleftrightarrow \neg p)$
g. Hará sol si y solo si no llueve.	$(\neg p \longrightarrow q)$

5 Une cada proposición con su formalización:

"Llueve" = p
"Hace sol" = q
"Las brujas se peinan" = r

a. Llueve y hace sol.	$(p \wedge q)$
b. No es cierto que si llueve y hace sol las brujas se peinan.	$(\neg r \longrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
c. Las brujas se peinan únicamente si llueve y hace sol.	$(\neg[(p \wedge q) \longrightarrow r)$
d. Cuando las brujas no se peinan, no llueve o no hace sol.	$((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r))$
e. Llueve y las brujas no se peinan o bien hace sol y las brujas no se peinan.	$(r \longleftrightarrow (p \wedge q))$

6 Une cada proposición con su formalización:

"Las estrellas emiten luz" = p
"Los planetas reflejan la luz" = q
"Los planetas giran alrededor de las estrellas" = r

a. Si las estrellas emiten luz, entonces los planetas la reflejan y giran alrededor de ellas.	$(q \longleftrightarrow (p \land r))$
b. Las estrellas emiten luz o los planetas la reflejan y, por otra parte, los planetas giran alrededor de ellas.	$(p \longrightarrow (q \land r))$
c. Los planetas reflejan luz si y solo si las estrellas la emiten y los planetas giran alrededor de ellas.	$(\neg(p \land q) \longrightarrow \neg r)$
d. Si no es cierto que las estrellas emiten luz y que los planetas la reflejan, entonces éstos no giran alrededor de ellas.	$((p \lor q) \land r)$

Respuestas:

1|

a. $(\neg p \wedge q)$

b. $(\neg p \wedge \neg q)$

c. $\neg(p \wedge q)$

d. $(p \wedge \neg q)$

e. $(\neg p \wedge \neg q)$

f. $(p \vee q)$

g. $(\neg p \longrightarrow \neg q)$

h. $(p \wedge (q \vee r))$

i. $((p \wedge q) \vee r)$

j. $(p \longrightarrow (\neg q \wedge \neg r))$

k. $(p \longleftrightarrow q)$

2|

a. $(p \longrightarrow q)$

b. $\neg(p \wedge q)$

c. $(p \longleftrightarrow (q \wedge \neg r))$

d. $(p \vee \neg q)$

e. $((p \wedge q) \longrightarrow (\neg r \vee s))$

f. $((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$

3|

a. $\neg \neg p$

b. $(p \wedge q)$

c. $(\neg p \longrightarrow q)$

d. $(p \longleftrightarrow q)$

e. $(p \vee q)$

f. $((p \vee q) \longrightarrow (r \wedge s))$

¿Y qué les pareció? Estuvo mejor esta clase ¿no?; al menos algo más entretenida. Para terminar les pido que no dejen de repasar y estudiar en los próximos días. Hasta luego, buena semana y...

¡Nos vemos la clase que viene!

Créditos

Imágenes

Encabezado: Image by Elchinator from Pixabay
https://pixabay.com/photos/math-work-mathematics-formulas-4711302/

Tipografía

Para este diseño se utilizó la tipografía ***Source Sans Pro*** diseñada por Paul D. Hunt.
Extraida de Google Fonts.

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a *correcciones@issd.edu.ar* e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo. Muchas gracias por tu aporte.

Bibliografía

Hoffman y Kunze (1979): Álgebra Lineal. Ed Prentice/Hall. México

Howard, Antón (1976): Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. México

Molina, Félix J. (2000): Álgebra y Geometría. (Editado en fascículos) Ed. Científica Universitaria. Córdoba. Argentina

Rojo, Armando (1996): Álgebra. Armando. Ed El Ateneo. Bs. As. Argentina