M1
Matemática 1

UNIDAD 03

CLASE 09

LÓGICA PROPOSICIONAL

LA MATEMÁTICA ES DISCRETA O AVANZADA. ESTA MATEMÁTICA NO ES AVANZADA. POR LO TANTO, ESTA MATEMÁTICA ES DISCRETA.

| Lógica proposicional.

| ¿Qué es el lenguaje lógico formal?

ISSD

-Des-
Desarrollo de Software

MÓDULO DIDÁCTICO
2020

Introducción

En la clase de hoy comenzaremos la unidad N° 3 que trata sobre la lógica proposicional. No se asusten, abordaremos los elementos más importantes. En una primera parte veremos la forma correcta en la que se deben escribir las expresiones, y en la segunda etapa de esta unidad trataremos de interpretar el significado de cualquier expresión bien escrita. Si bien la clase de hoy, como casi toda la unidad, es muy pero muy teórica, deben tratar de mantener la atención para poder comprender cada idea desde el principio.

Elementos de lógica proposicional

La lógica es la ciencia que estudia los mecanismos del pensamiento, el cual se trasmite mediante un lenguaje. La palabra “lenguaje” se utiliza en general con muy diversos significados, pero se le atribuye en forma específica el de ser el medio de comunicación de ideas, emociones y sentimientos por medio de un sistema de símbolos producidos de manera deliberada por seres humanos.

Finnochiaro definió en 1964: ***“el lenguaje es un sistema de símbolos vocales arbitrarios que permiten a todas las personas de un pueblo, o a otras personas que han aprendido el sistema de esa cultura, comunicarse o interactuar”.***

Se llama “lengua” al conjunto de sonidos articulados y organizados en un sistema gramatical que sirven para comunicar pensamientos y sentimientos. Las ideas se manifiestan a través de la lengua, ya sea escrita o hablada. En síntesis, se denomina lengua a las diferentes clases de los sistemas de comunicación existentes.

Nos comunicamos por medio de oraciones y la combinación de éstas, pueden tomar formas muy complicadas, pero el análisis de su construcción ofrece la posibilidad de desentrañar su esencia lógica.

Las sentencias pueden ser de diversos tipos, pero solo nos ocuparemos de uno particular, aquellas que pueden solo ser **verdaderas** o **falsas**. Es decir, en nuestro lenguaje cotidiano existen expresiones interrogativas (por ejemplo ¿Qué hora es?), imperativas (¡Deje eso en su lugar!), optativas (¡Ojalá gane el viaje a Cuba!), etc., pero carece de sentido especificar si ellas son verdaderas o falsas.

Llamaremos luego **sentencias**, **enunciados** o **proposiciones** a las oraciones que podremos considerar verdaderas o falsas.

A menudo se emplean oraciones a las que solo se les puede asignar un valor en un contexto determinado, por ejemplo “soy linda”, “te quiero”, “soy más inteligente”, etc. Estas oraciones son o no verdaderas según **quién** las dice, **cuándo** se dicen y **a quién se dicen**.

Queremos definir un lenguaje basado en el principio de bivalencia que expresa “todo enunciado es o verdadero o falso”.

La lógica utilizada en matemática (y en ciencia en general) es una lógica de este tipo.

Definiremos, entonces, la sintaxis y la semántica de un **lenguaje artificial**, y estudiaremos en el marco de este lenguaje qué grado de verdad podemos atribuirle a una expresión, en función de las variables que intervienen en ella.

Recordemos que la **sintaxis** es la parte de la gramática que enseña a coordinar y enlazar las palabras para formar oraciones y expresar conceptos (indica la forma como se estructuran las palabras para formar oraciones), mientras que la **semántica** estudia la **significación** de las palabras y oraciones.

Luego, debemos distinguir nuestro lenguaje cotidiano del que vamos a definir, al que llamaremos **lenguaje formal**.

Sintaxis del lenguaje formal

Nuestro alfabeto lógico *L* del lenguaje es un conjunto formado por otros tres conjuntos **sin elementos en común**.

El conjunto V definido por

$V = \{a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots p, q, r, s, t \ldots\ldots\ldots\}$ que también suele representarse por
$V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \ldots\ldots\ldots p_i, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ donde p_i son variables proposicionales o atómicas.

Donde p_i para cada i puede simbolizar una sentencia distinta, por ejemplo:
p_1 puede ser la representación de "Me compraré zapatos".
p_2 puede ser la representación de "Me compraré una cartera".

El conjunto K de los conectores lógicos

$$K = \{\neg\} \cup \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$$

Los conectores se concatenan a las variables proposicionales para formar nuevas expresiones.

¬ es un conector **unitario**, es decir que antecede a una variable proposicional o a una expresión negándola.

Si p_1 **simboliza** "Me compraré zapatos", $\neg p_1$ representa "No me compraré zapatos".

Queremos definir un lenguaje basado en el principio de bivalencia que expresa "todo enunciado es o verdadero o falso".

Los nexos { $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ } son conectores **binarios**, esto es, cualquiera de ellos unen **dos** proposiciones formando una nueva expresión a partir de dos de ellas.

($p_1 \vee p_2$) es una codificación de “me compraré zapatos” **o** “me comparé una cartera”.

Cada nexo binario representa: |1|

| El conjunto P de los paréntesis

P = { (,) }

Luego, nuestro alfabeto lógico *L* es el conjunto que resulta de la unión de estos tres conjuntos disjuntos entre sí: |2|

$L = \{ V \cup K \cup P \}$

Pero ¿qué estamos queriendo formalizar?

Cuando aprendimos nuestro lenguaje natural definimos nuestro alfabeto, es decir, que identificamos qué símbolos utilizamos para representar nuestros fonemas, palabras y frases de nuestro idioma, que las secuencias de símbolos de ese alfabeto.

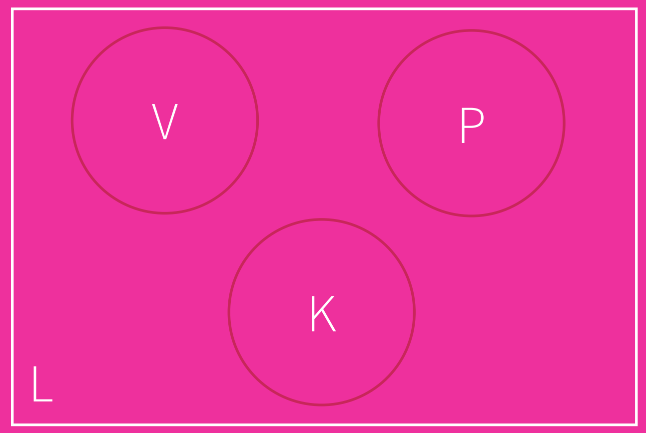
A partir de estos símbolos, formando **series finitas** o cadenas de caracteres formamos palabras, oraciones, etc.

Llamaremos **expresión** a una secuencia **finita** de caracteres yuxtapuestos del alfabeto.

|1|

$\wedge$	Conjunción “ y ”
$\vee$	Disyunción “ o ”
$\rightarrow$	Condicional “ entonces ”
$\leftrightarrow$	Bicondicional o “ si y solo si ”

|2|



Así, **mamá, amigo, hermano, instituto** son expresiones de nuestro lenguaje natural, pero también los son **m+a=/e; 2***($0?**, que aunque son una secuencia de símbolos empleados en nuestro lenguaje natural, no representan ninguna palabra o expresión a las que le atribuimos sentido. Tampoco la siguiente secuencia ՐшђФלם, es una expresión de nuestro **idioma natural**, ya que no es una secuencia de caracteres de nuestro alfabeto natural.

Es la sintaxis la que enseña a discriminar entre expresiones a las que asignamos algún valor sobre otras que descartamos.

No son expresiones del **lenguaje lógico** que acabamos de definir:

((-p $\longleftrightarrow$ +q))))) ya que – , + no pertenecen alfabeto lógico
[p *q] ---- pues * $\notin$ L
p>q ---- pues > $\notin$ L

Es decir, en ellas se usan símbolos que no se han definido en el alfabeto lógico.

Sí son expresiones del lenguaje lógico:

$(((((p \vee \longrightarrow \neg (s))q$
$((t \wedge \neg p) \longleftrightarrow \neg q)sq$
$(\neg(s \vee \neg p$
$p_1)) \longleftrightarrow p_2 \wedge p_3, \vee p_4 \longrightarrow p_6))$

Porque todas ellas son una secuencia finita de los elementos de L. Sin embargo, como veremos, solo estudiaremos algunas secuencias que cumplirán ciertas reglas de formación.

Por medio de los conectores tales como “no”, “ y ” “ o ” “entonces” etc., se pueden construir expresiones compuestas a partir de sentencias simples.

Si afirmamos ” 2 es menor que 3” y “ 3 es menor que 4”, podemos formar una sentencia como ” 2 no es mayor 3 entonces 2 es menor que 4”.

Mediante una sentencia o proposición p podemos construir una **no** p; que simbolizaremos $\neg$ p.
O a partir de p, q , y r (cada una de ella representa una sentencia o expresión), pueden generarse otras frases tales como (p o q) ,(p entonces q), ((p y q) o r), etc.

Unimos expresiones a través del conjunto de los conectores lógicos del alfabeto ***L***, generando así nuevos enunciados.

$\neg$ es un nexo unitario que niega la expresión que le precede.

Mientras que $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ son nexos binarios, es decir, cualquiera de ellos une dos proposiciones que a su vez podrán unir otras dos mediante reglas que hemos de definir.

Pueden generarse de esta forma diversas expresiones formando secuencias de elementos de ***L***.

Sean p, q, s expresiones:
Si p **simboliza** “hoy llueve”, $\neg$ p **simboliza** “hoy **no** llueve”.
Si q **simboliza** “no saldré a pasear”, ($p \wedge q$) **simboliza** “ hoy llueve y no saldré a pasear”.

$\neg p \wedge q$ ¿simboliza hoy no llueve y no saldré a pasear? o ¿no es cierto que hoy llueve y saldré a pasear?

Luego, ($\neg p \wedge q$) y $\neg (p \wedge q)$ son **expresiones distintas**.

Como se los dije al iniciar la clase, hoy teníamos que aguantar mucha charla teórica y ya lo habrán podido comprobar en carne propia. Pero ya está, pasó todo lo previsto para hoy, solo les queda hacer el siguiente ejercicio y mañana o pasado repasar los conceptos nuevamente. ¡Suerte!

¡Es necesario el uso de los paréntesis para la no ambigüedad de lectura de nuestra codificación del lenguaje!

Desempeño de síntesis

Respondan o definan:

1. Definan lógica, lenguaje y lengua.
2. Principio de bivalencia.
3. Lenguaje formal, sintaxis y semántica.
4. Alfabeto lógico.
5. ¿Por qué es necesario el uso de paréntesis?

Como habrán notado hasta ahora, esta unidad es diferente a lo que venimos trabajando. Vimos solo una presentación de cuáles son los tipos de proposiciones con las cuales vamos a trabajar. Ya veremos más y van a ir comprendiendo mejor.

¡Hasta la próxima clase!

Créditos

Imágenes

Encabezado: Image by Elchinator from Pixabay
https://pixabay.com/photos/math-work-mathematics-formulas-4711302/

Tipografía

Para este diseño se utilizó la tipografía ***Source Sans Pro*** diseñada por Paul D. Hunt.
Extraida de Google Fonts.

Si detectás un error del tipo que fuere (falta un punto, un acento, una palabra mal escrita, un error en código, etc.), por favor comunicate con nosotros a *correcciones@issd.edu.ar* e indicanos por cada error que detectes la página y el párrafo. Muchas gracias por tu aporte.

Bibliografía

Hoffman y Kunze (1979): Álgebra Lineal. Ed Prentice/Hall. México

Howard, Antón (1976): Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. México

Molina, Félix J. (2000): Álgebra y Geometría. (Editado en fascículos) Ed. Científica Universitaria. Córdoba. Argentina

Rojo, Armando (1996): Álgebra. Armando. Ed El Ateneo. Bs. As. Argentina