



Progetto d'esame Sistemi di Controllo di Volo: Modulo 2

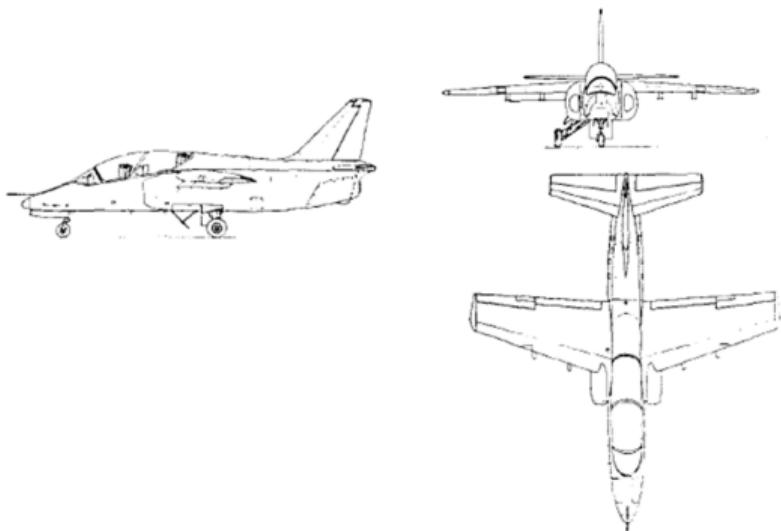
Studente: Ludovico Aricò

Mat. A1500228

Docente: Immacolata Notaro

Dati del Velivolo

Parametro	Valore
$S \text{ [ft}^2]$	136
$\bar{c} \text{ [ft]}$	5.4
$b \text{ [ft]}$	26.3
$h \text{ [ft]}$	25000
M	0.6
TAS $\left[\frac{\text{ft}}{\text{s}}$	610
W [lbs]	4000



Condizioni di volo

Stato	Valore	Stato	Valore
$u[\text{m/s}]$	185.99	$r[\text{rad/s}]$	0
$v[\text{m/s}]$	0	$\phi[\text{rad}]$	0
$w[\text{m/s}]$	0	$\theta[\text{rad}]$	0
$p[\text{rad/s}]$	0	$\psi[\text{rad}]$	0
$q[\text{rad/s}]$	0	$z[\text{m}]$	7658.96

Input	Valore
$\delta_e [\text{rad/s}]$	0
$\delta_a [\text{rad/s}]$	0
$\delta_r [\text{rad/s}]$	0
T[N]	2450.91

Per lo studio della osservabilità e della controllabilità viene valutato il rango delle seguenti matrici:

Osservabilità	Rango
---------------	-------

Long. 5

Lat-Dir. 5

$$\text{rank} [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

Controllabilità	Rango
-----------------	-------

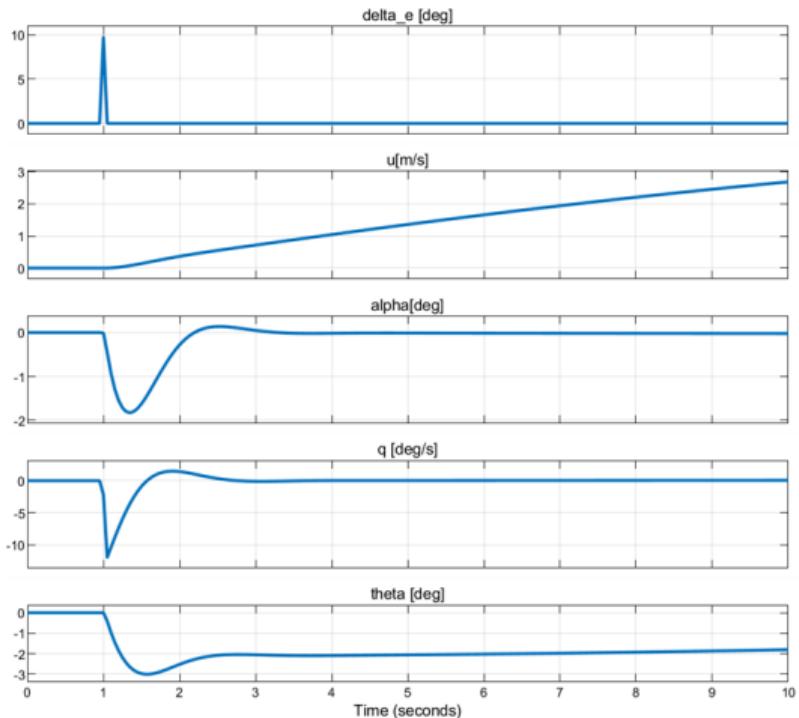
Long. 5

Lat-Dir. 5

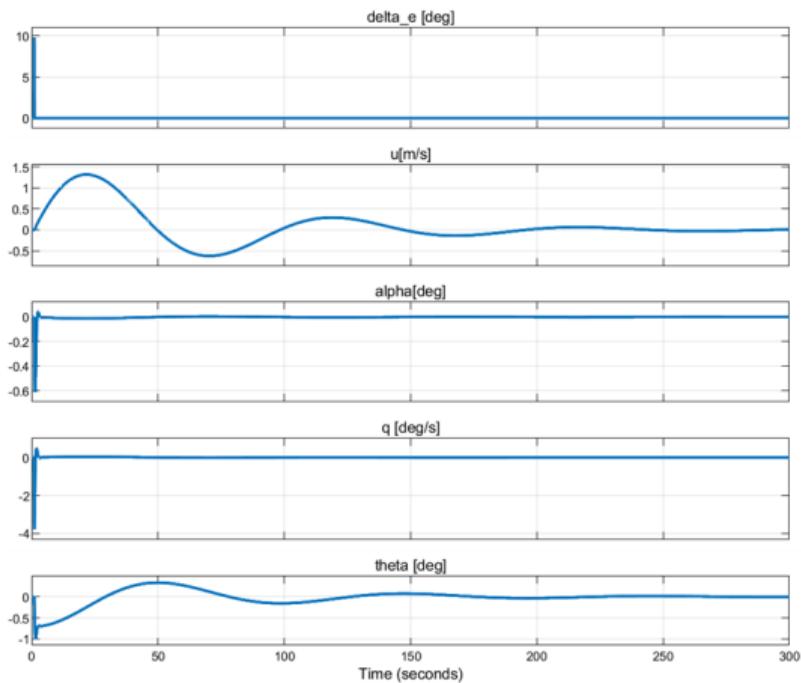
$$\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$$

Ne consegue che il sistema risulta essere completamente osservabile e controllabile.

Risposta ad impulso $\delta_e = 10 [deg]$

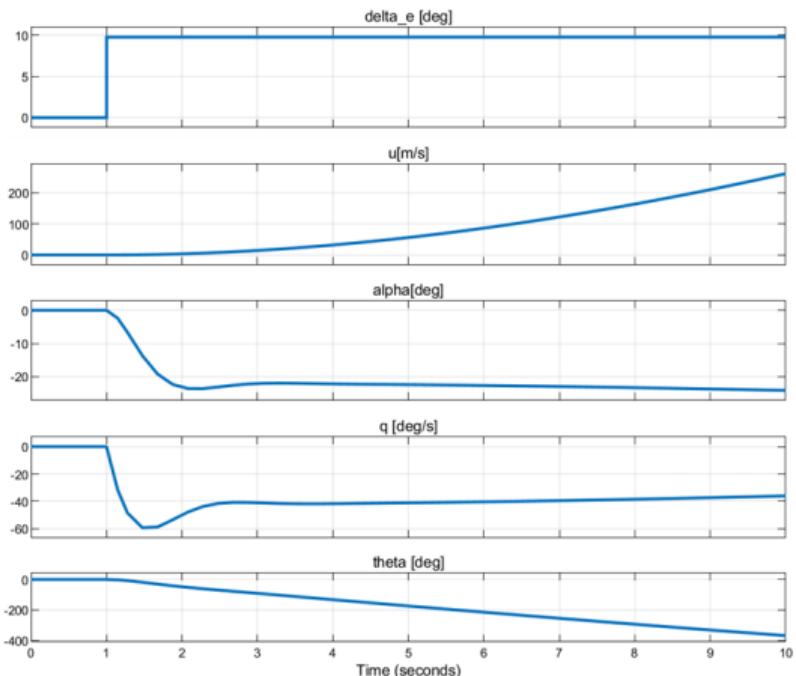


Corto Periodo:

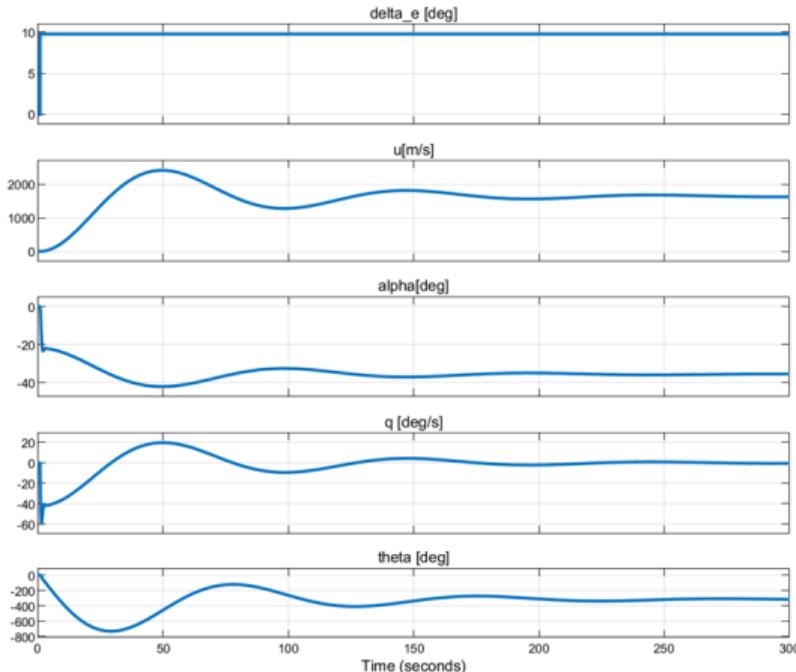


Fugoide

Risposta a gradino $\delta_e = 10 [deg]$

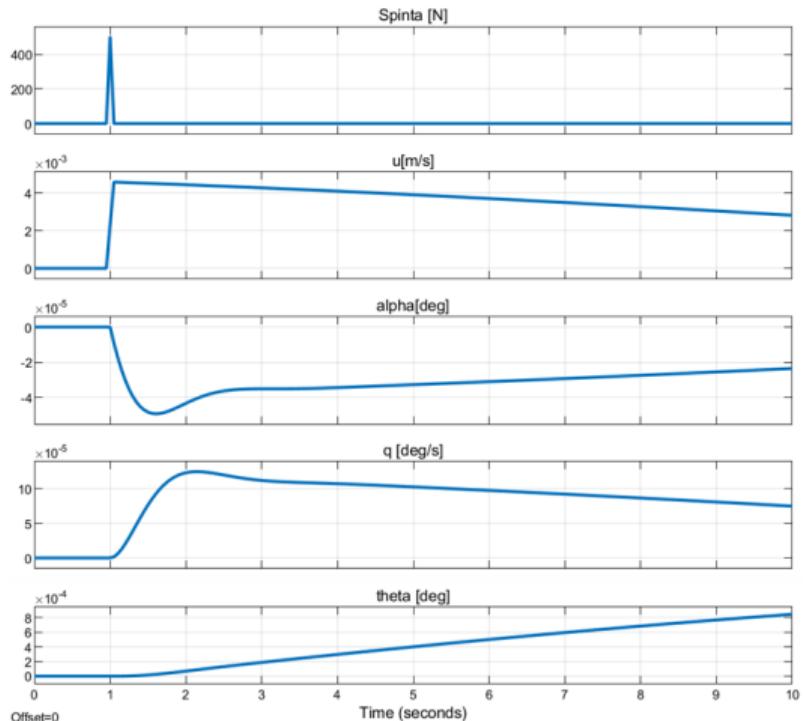


Corto Periodo:

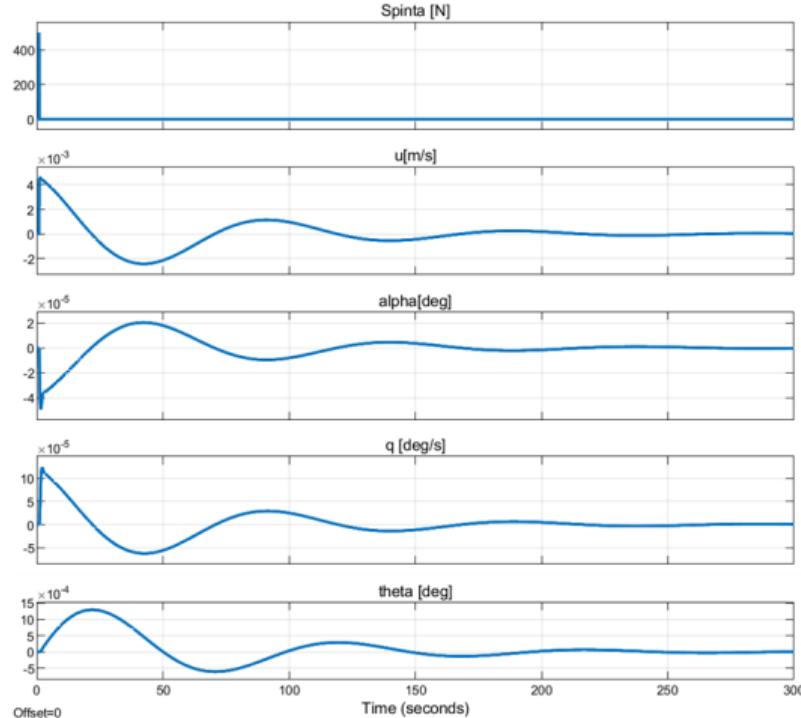


Fugoid

Risposta ad impulso $T = 500 \text{ [N]}$

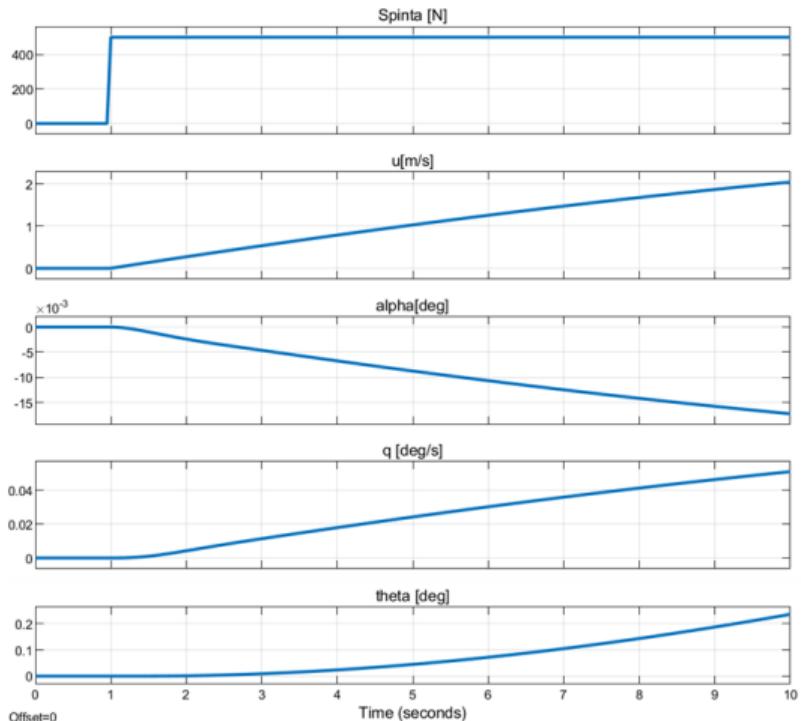


Corto Periodo:

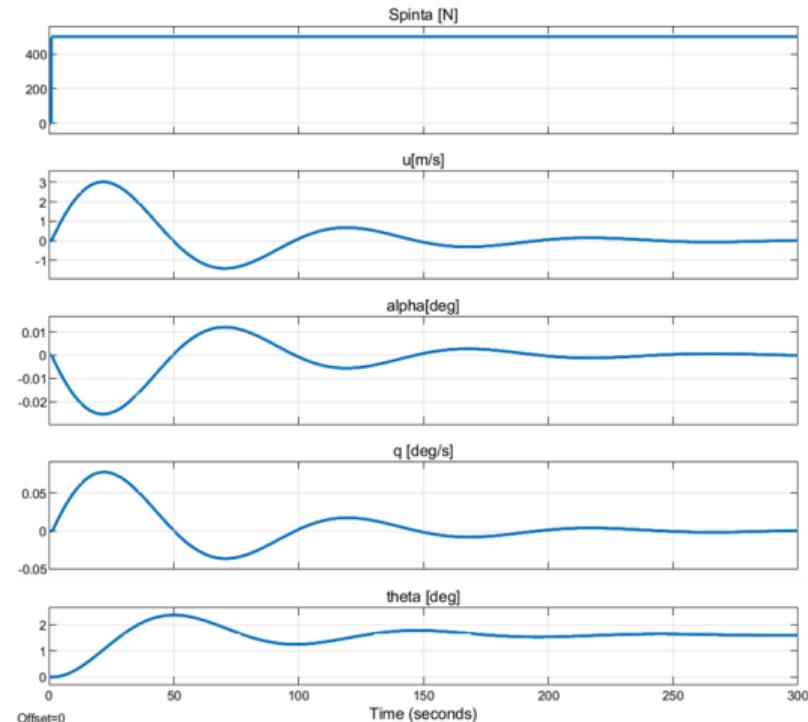


Fugoid

Risposta a gradino $T = 500 [N]$

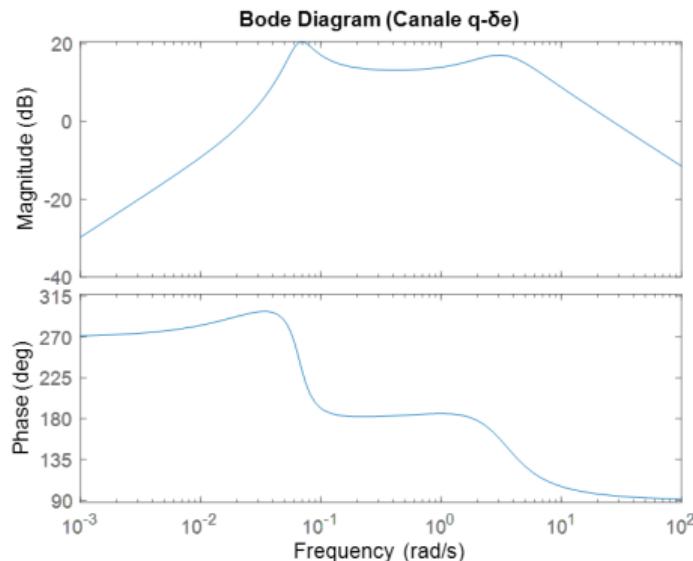


Corto Periodo:

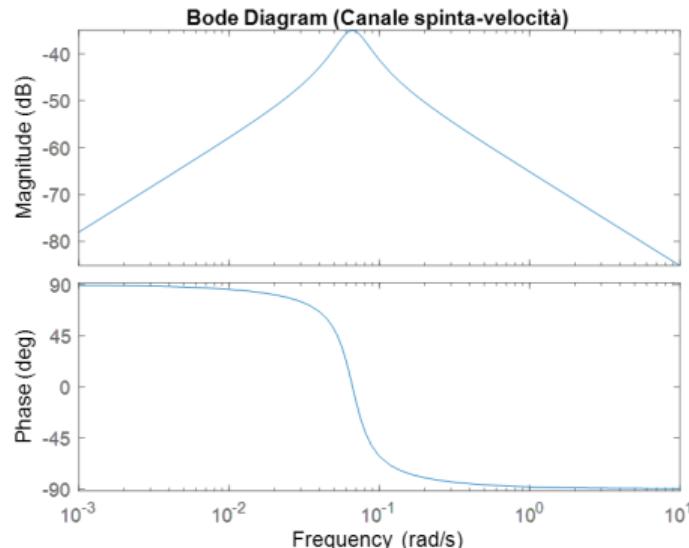


Fugoid

Risposta in frequenza



Canale $q - \delta_e$



Canale $T - u$

Formulazione del Problema:

- Lo scopo è minimizzare il funzionale di costo quadratico per la regolazione del sistema all'origine a ciclo chiuso:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

dove $x(t) = [u \ \alpha \ q \ \theta]^T$ è il vettore degli stati e $u(t) = [\delta_e \ T_m]^T$ è il vettore degli ingressi di controllo.

- Q (matrice di peso per lo stato): Matrice definita semi-positiva che penalizza la deviazione degli stati dal loro valore di equilibrio.
- R (matrice di peso per l'ingresso di controllo): Matrice definita positiva che penalizza l'ampiezza degli sforzi di controllo.

Stabilizzazione con LQR - Risultati

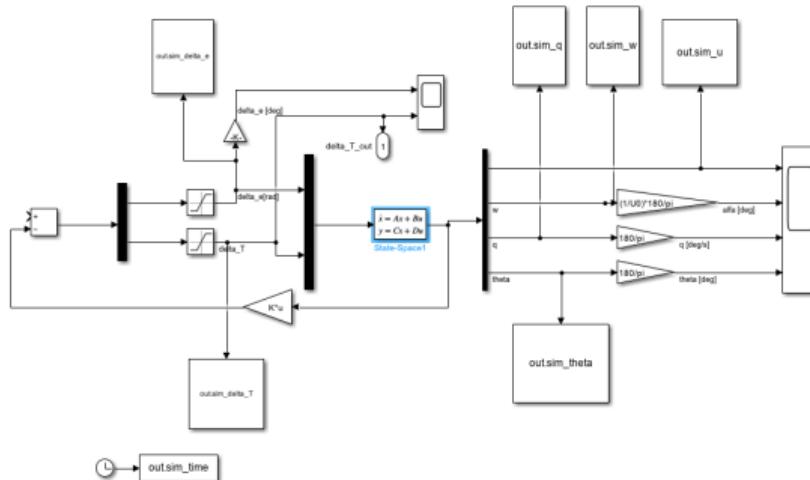


Figura: Schema Simulink

Legge di Controllo Ottima: La legge di controllo risultante è una retroazione lineare dello stato:

$$u(t) = -Kx(t)$$

dove K è la matrice del guadagno di retroazione ($K = R^{-1}B^TP$, con P soluzione dell'equazione algebrica di

Evoluzione degli Stati da Condizioni Iniziali Perturbate

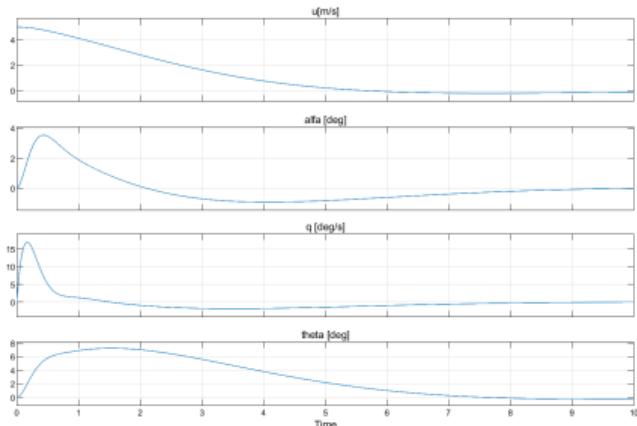


Figura: Evoluzione degli stati L'andamento temporale degli stati principali (velocità u , angoli α, θ , rateo q) nel sistema lineare perturbato ($u_0 = 5$ m/s)

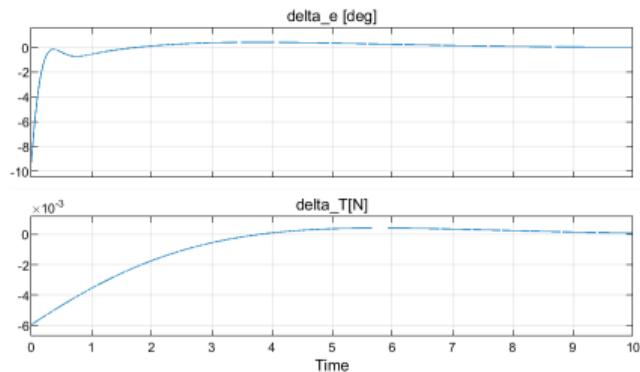


Figura: δ_e e δ_T spinta

- Il grafico mostra la convergenza degli stati verso lo stato di equilibrio.
- Le condizioni iniziali perturbate sono corrette dal controllo a ciclo chiuso.
- La stabilità si evidenzia con il ritorno progressivo a valori prossimi allo zero.

Matrici di pesi LQR:

$$Q_{lqr} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad R_{lqr} = \begin{bmatrix} 80000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Commenti:

E stata usata una matrice di peso Q_{lqr} penalizza maggiormente l'errore di beccheggio θ e l'errore di velocità u e il rateo q è meno α (errore relativo a w/α).

R_{lqr} penalizza significativamente l'uso dell'elevatore δ_e per mantenerlo entro limiti realistici (picchi intorno a $[-8.5^\circ]$) e ridurre i picchi di q (circa $\sim 15^\circ/s$), mentre penalizza meno l'uso della spinta T .

Confronto Pesi LQR

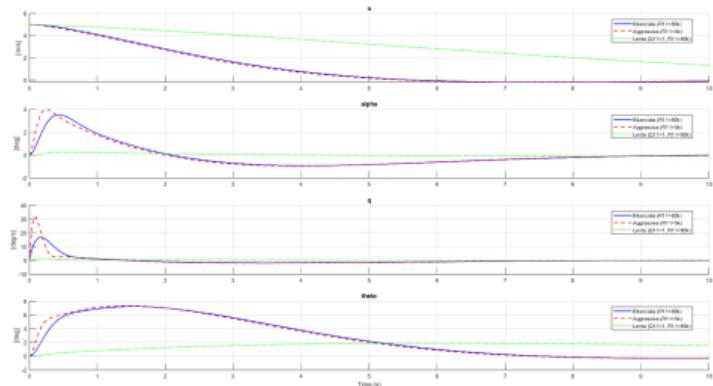


Figura: Evoluzione degli stati da condizioni iniziali perturbate

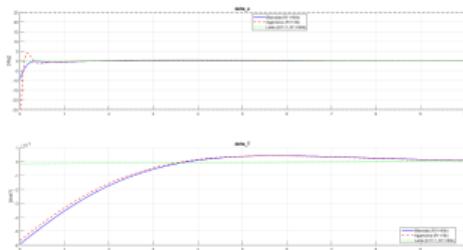
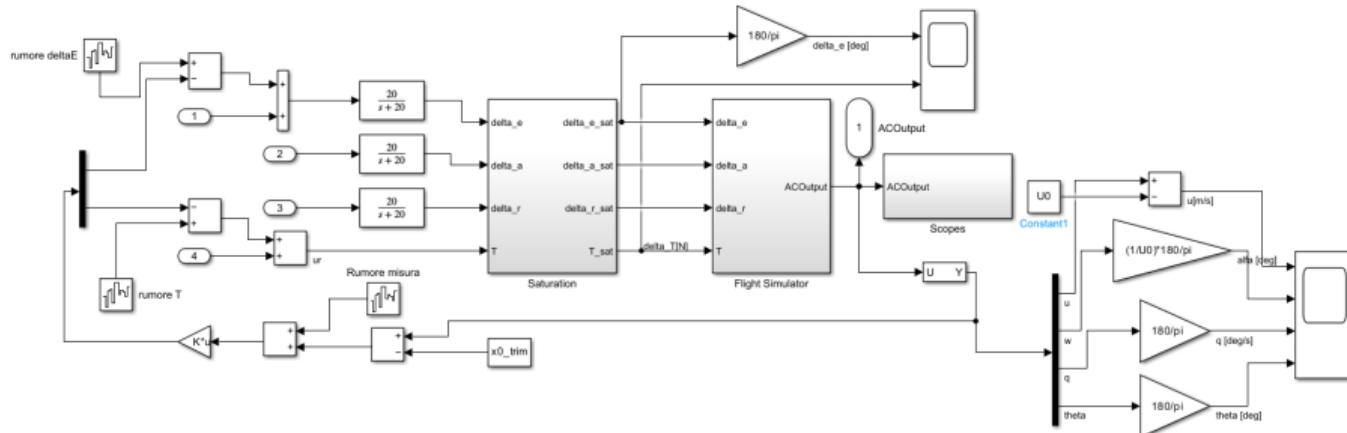


Figura: Ingressi di controllo simulati

- Il confronto grafico tra le diverse tarature LQR ha evidenziato il trade-off intrinseco tra la rapidità di risposta del sistema e l'aggressività del controllo. Pesi elevati sugli stati (Q) e/o bassi sui comandi (R) portano a risposte più veloci ma con picchi dinamici (es. rateo q) e richieste agli attuatori (es. δ_e) potenzialmente eccessive.
- La taratura selezionata come “Bilanciata” ($Q_{lqr} \approx \text{diag}([100, 10, 100, 1000])$, $R_{lqr} = \text{diag}([80000, 100])$) ha dimostrato di fornire un buon compromesso: tempi di assestamento rapidi ma accettabili per la velocità (u) e l'assetto (θ), limitando al contempo il picco del rateo di beccheggio ($q \approx 15 \text{ deg/s}$) e l'escursione massima dell'elevatore ($\delta_e \approx -8.5 \text{ deg}$) entro valori realistici e ben al di sotto dei limiti di saturazione.

Modello Non Lineare: Ingressi ed Evoluzione degli Stati



- **Verifica su Modello Non Lineare:** Il controllore LQR, con la taratura finale ($Q_{lqr} = \text{diag}([100, 10, 100, 1000])$, $R_{lqr} = \text{diag}([80000, 100])$), è stato testato sul modello Simulink non lineare completo, includendo rumore bianco gaussiano sui comandi e sulle misure di stato simulate.

Modello Non Lineare: Ingressi ed Evoluzione degli Stati

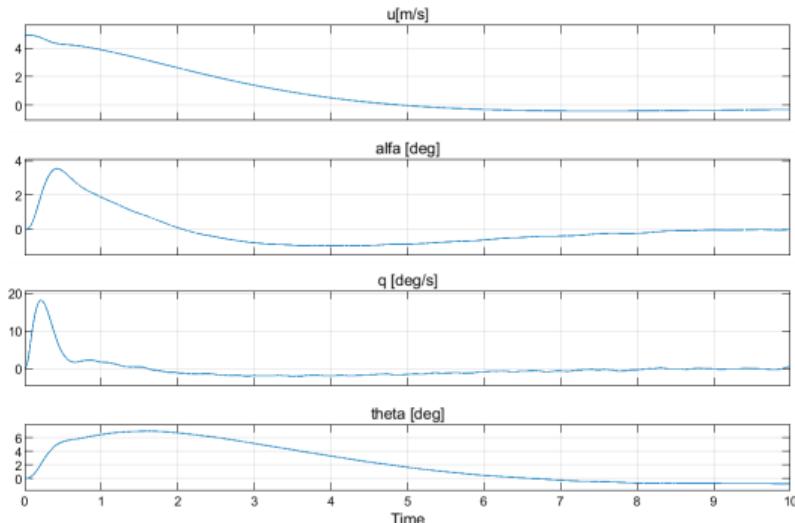


Figura: Evoluzione degli stati L'andamento temporale degli stati principali (velocità u , angoli α , θ , rateo q) nel sistema non lineare perturbato ($u_0 = 5$ m/s)

- Robustezza del Controllore LQR: Il confronto tra modelli lineari e non lineari mostra che il controllore stabilizza il sistema anche con rumore e perturbazioni. Mantiene prestazioni accettabili nonostante le non linearità, garantendo robustezza e affidabilità.

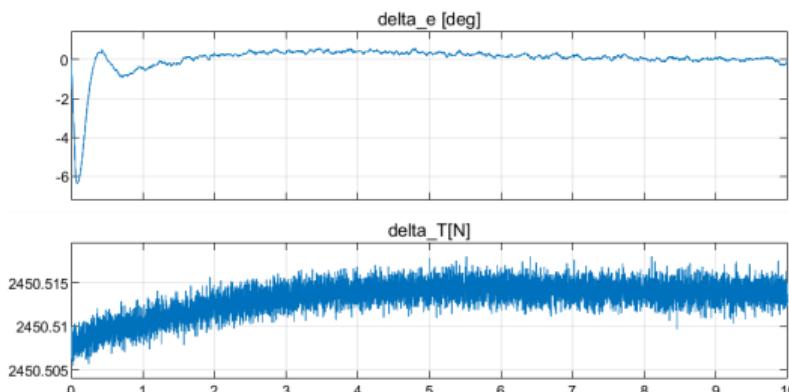


Figura: Ingressi (modello non lineare)

Inseguitore Lineare Quadratico Integrale (LQI)

- L'inseguitore Lineare Quadratico Integrale (LQI) è un'estensione del regolatore ottimo LQR. Mentre l'LQR standard è progettato per stabilizzare il sistema portando lo stato a zero, l'LQI introduce la capacità di far seguire a determinate uscite del sistema dei segnali di riferimento costanti con errore a regime nullo.
- L'azione "Integrale" nel nome LQI deriva dall'inclusione di stati integrali dell'errore nel sistema aumentato. Questi stati integrali sono fondamentali per eliminare gli errori di inseguimento a regime per riferimenti costanti.
- L'obiettivo è progettare una legge di controllo che minimizzi un funzionale di costo quadratico, tenendo conto sia della deviazione dello stato dall'origine (come in LQR) sia dell'errore di inseguimento integrato.
- L'LQI trova applicazione in svariati contesti, come nel controllo di veicoli, dove si desidera che specifiche variabili di uscita (ad esempio, velocità, angolo di beccheggio, quota) seguano dei valori di riferimento desiderati.

Equazioni Chiave dell'Inseguitore LQI

- **Definizione dell'Errore di Inseguimento:** Per far sì che l'uscita $y(t) = Cx(t)$ segua un riferimento $r_y(t)$, definiamo l'errore come:

$$e(t) = r_y(t) - y(t) = r_y(t) - Cx(t)$$

L'azione integrale introduce uno stato aggiuntivo, $x_I(t)$, la cui derivata è l'errore:

$$\dot{x}_I(t) = e(t) = r_y(t) - Cx(t)$$

- **Dinamica del Sistema Aumentato:** Il sistema originale con stato x viene aumentato con lo stato integrale x_I , portando a una nuova rappresentazione:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r_y(t)$$

- **Legge di Controllo Ottimo:** La legge di controllo ottima $u(t)$ è ottenuta applicando la teoria LQR al sistema aumentato. Essa assume la forma di una retroazione lineare sia sullo stato originale x che sullo stato integrale x_I :

$$u(t) = -K \begin{Bmatrix} x \\ x_I \end{Bmatrix} = -[K_P \quad K_I] \begin{Bmatrix} x \\ x_I \end{Bmatrix} = -K_P x(t) - K_I x_I(t)$$

dove la matrice di guadagno $K = [K_P \quad K_I]$ è calcolata minimizzando un funzionale di costo quadratico che penalizza sia lo stato aumentato che l'ingresso di controllo. K_P rappresenta il guadagno proporzionale e K_I il guadagno integrale.

Schema Simulink Lineare

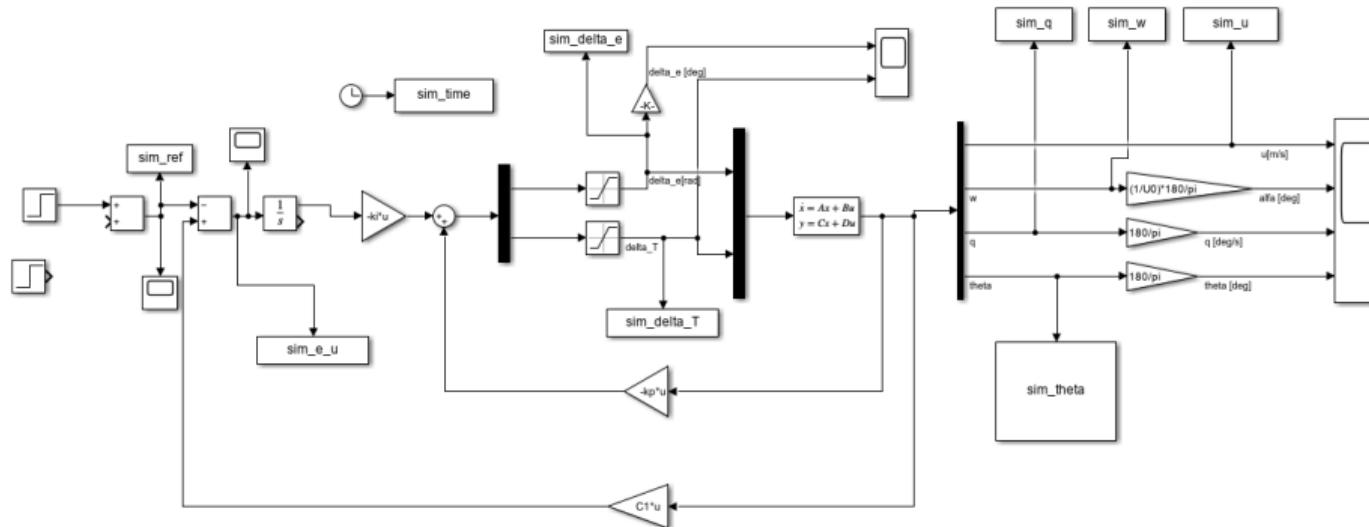


Figura: Schema Simulink Lineare per il controllo LQI.

- **Matrice $Q_{\tilde{\text{plot}}}$:**

$$Q_{\tilde{\text{plot}}} = \text{diag} [1 \quad 10 \quad 100 \quad 10^9 \quad 100 \quad 10^8]$$

- **Matrice $R_{\tilde{\text{plot}}}$:**

$$R_{\tilde{\text{plot}}} = \text{diag} [10 \quad 0.01]$$

- La taratura del controllore LQI è stata finalizzata per garantire l'inseguimento del riferimento di beccheggio θ con errore nullo a regime ($e_\theta \rightarrow 0$).
- Dopo la correzione di errori implementativi e attraverso un tuning iterativo dei pesi $Q_{\tilde{\text{plot}}}$ e $R_{\tilde{\text{plot}}}$, si è raggiunta una configurazione $(Q_{\tilde{\text{plot}}}^*, R_{\tilde{\text{plot}}}^*)$ che soddisfa l'obiettivo primario.
- Tale configurazione assicura l'azzeramento dell'errore per θ con un transitorio ben smorzato e comandi δ_e, δ_T ammissibili, rappresentando il miglior compromesso identificato tra prestazioni e sforzo di controllo.
- **Matrice K_p (comando da stato x):**

$$K_p = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0028 & -1.0009 \\ 0.0546 & 0.0003 & -0.0002 & -0.0487 \end{bmatrix}$$

- **Matrice K_i (comando da stato ξ):**

$$K_i = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -0.0001 & 3.1607 \\ -0.0999 & -3.1787 \end{bmatrix}$$

Segnale di Ingresso a Gradino sul Riferimento θ

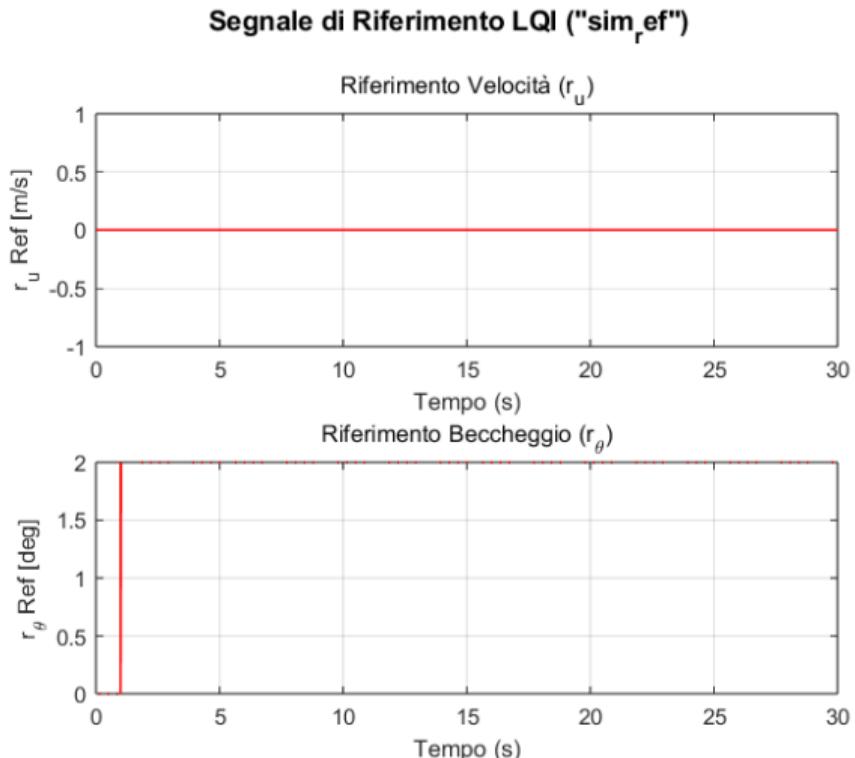


Figura: Segnale di ingresso a gradino sul riferimento θ .

Risposta al Gradino del Riferimento su θ

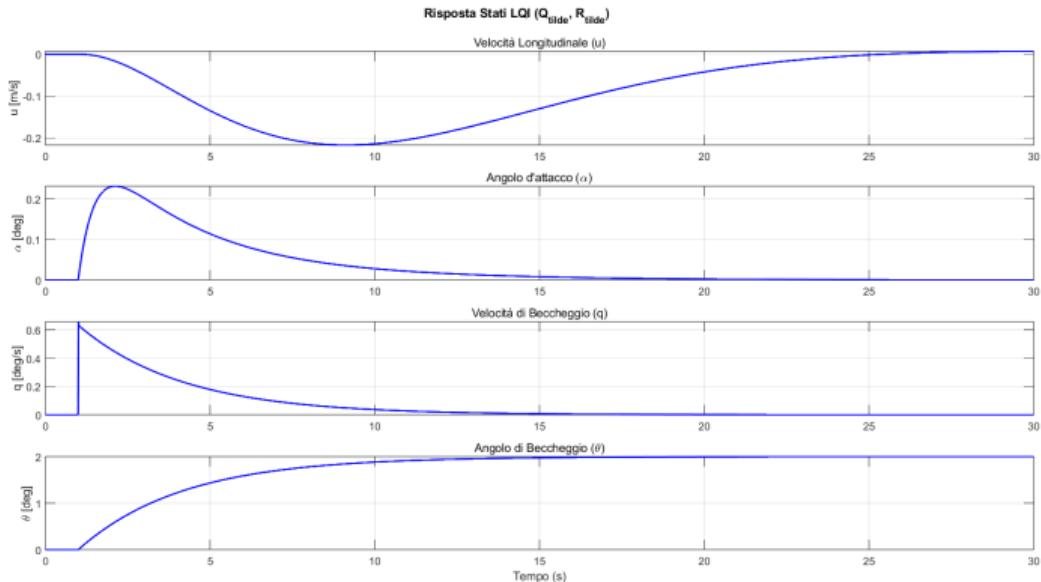


Figura: Risposta del sistema al segnale di ingresso a gradino sul riferimento θ .

Andamento degli Ingressi δ_e e Spinta T

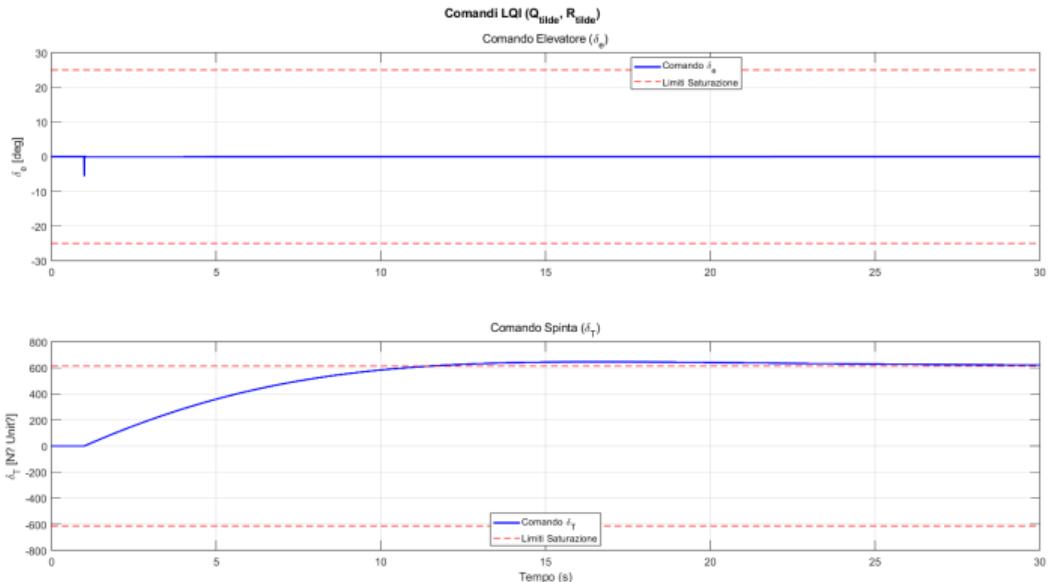


Figura: Andamento degli ingressi δ_e e Spinta T in risposta al gradino sul riferimento θ .

Segnale di Ingresso a Gradino sul Riferimento u

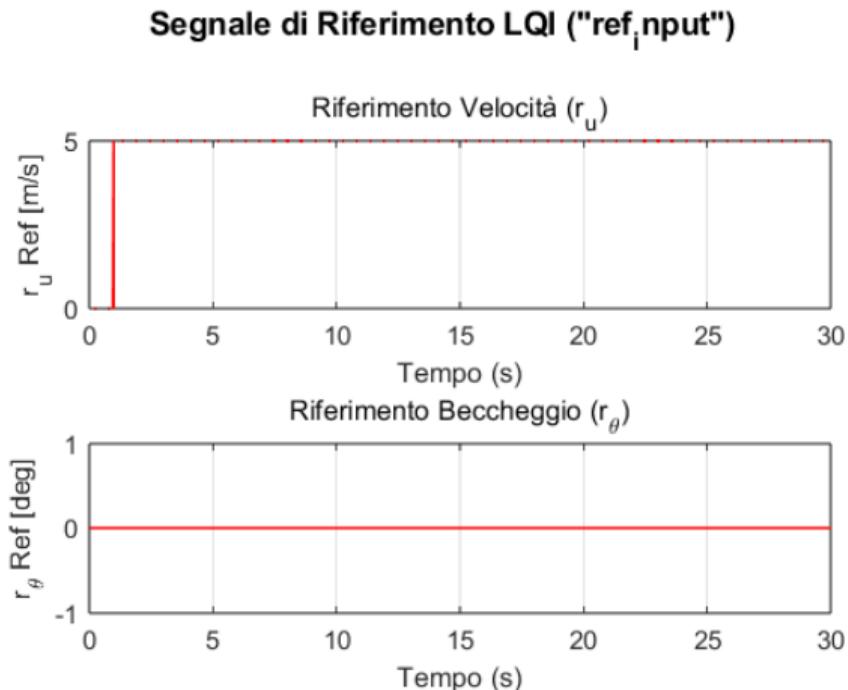


Figura: Segnale di ingresso a gradino sul riferimento u .

Risposta al Gradino del Riferimento su u

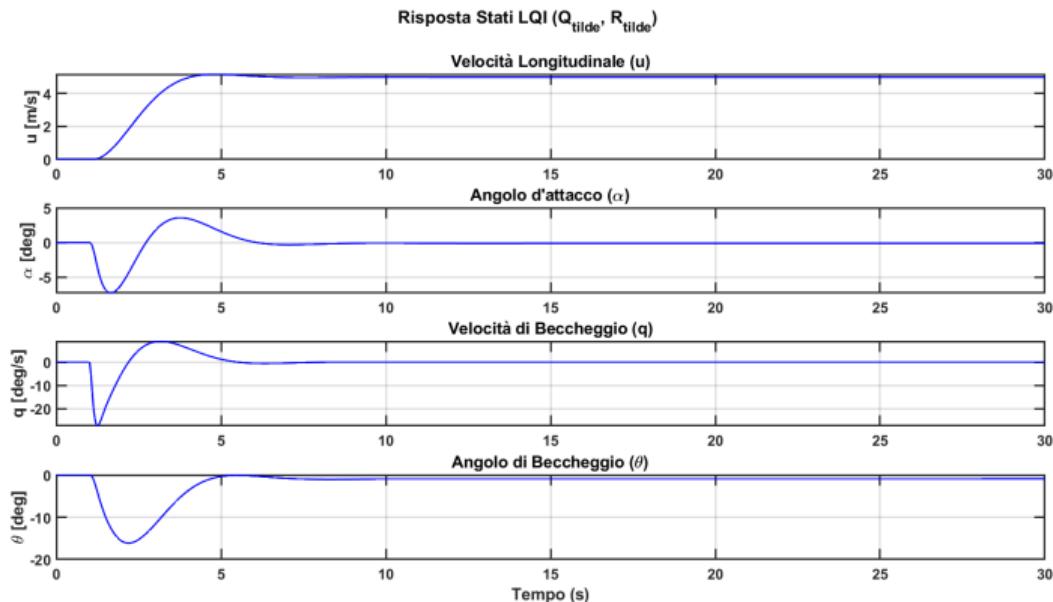


Figura: Risposta del sistema al segnale di ingresso a gradino sul riferimento u .

Andamento degli Ingressi δ_e e Spinta T

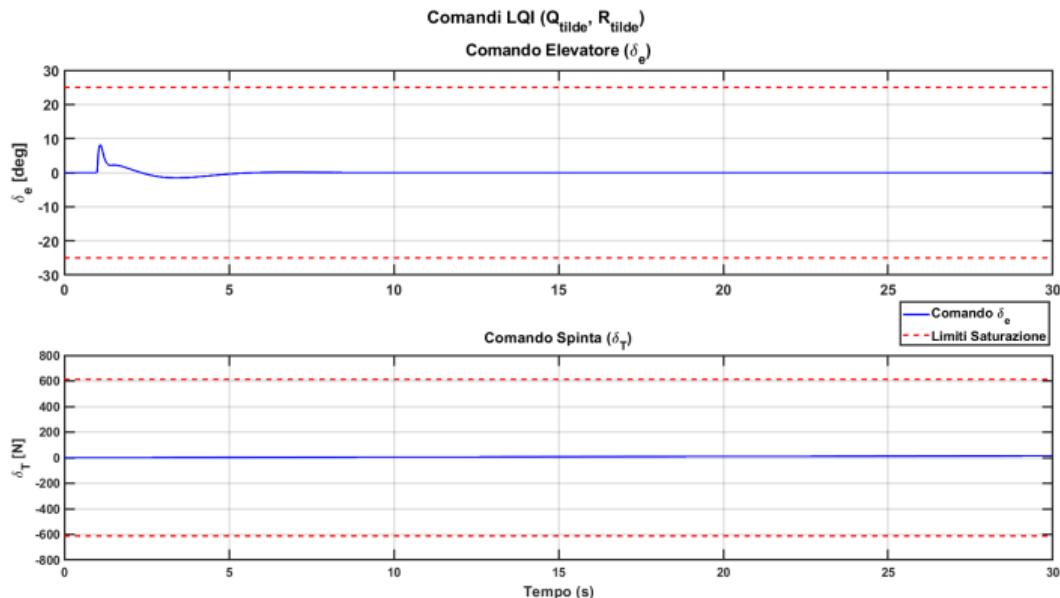
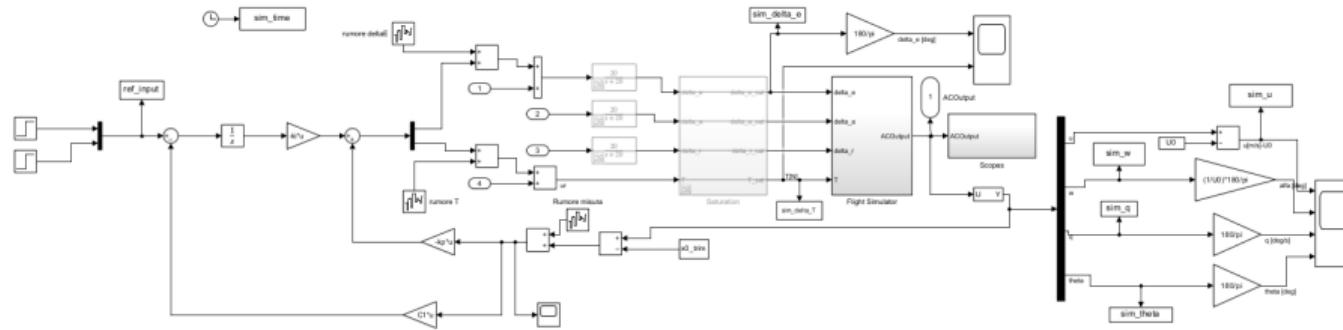


Figura: Andamento degli ingressi δ_e e Spinta T in risposta al gradino sul riferimento u .

Schema Simulink Non Lineare



- **Verifica su Modello Non Lineare:** Il controllore LQI, con la taratura finale ($\tilde{Q} = \text{diag} [1 \ 10 \ 100 \ 10^9 \ 100 \ 10^8]$, $\tilde{R} = \text{diag} [10 \ 0.01]$), è stato testato sul modello Simulink non lineare completo, includendo rumore bianco gaussiano sui comandi e sulle misure di stato simulate.

Risposta al Gradino del Riferimento su θ (Non Lineare)

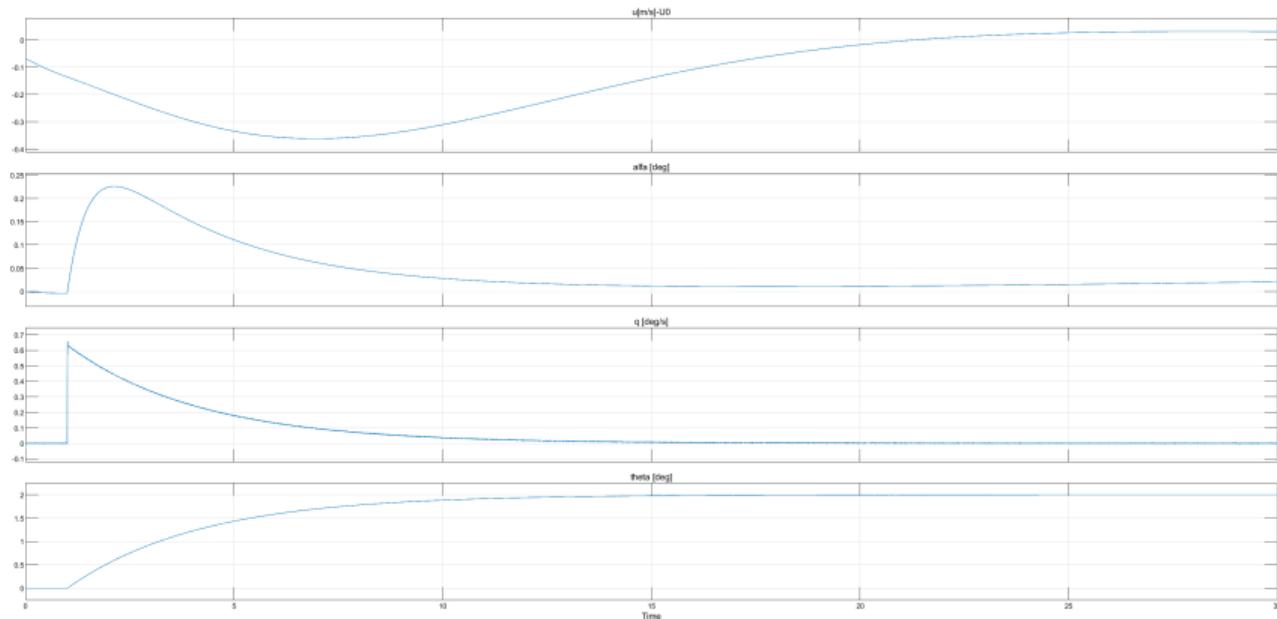


Figura: Risposta del sistema al segnale di ingresso a gradino sul riferimento θ (modello non lineare).

Andamento degli Ingressi δ_e e Spinta T (Non Lineare)

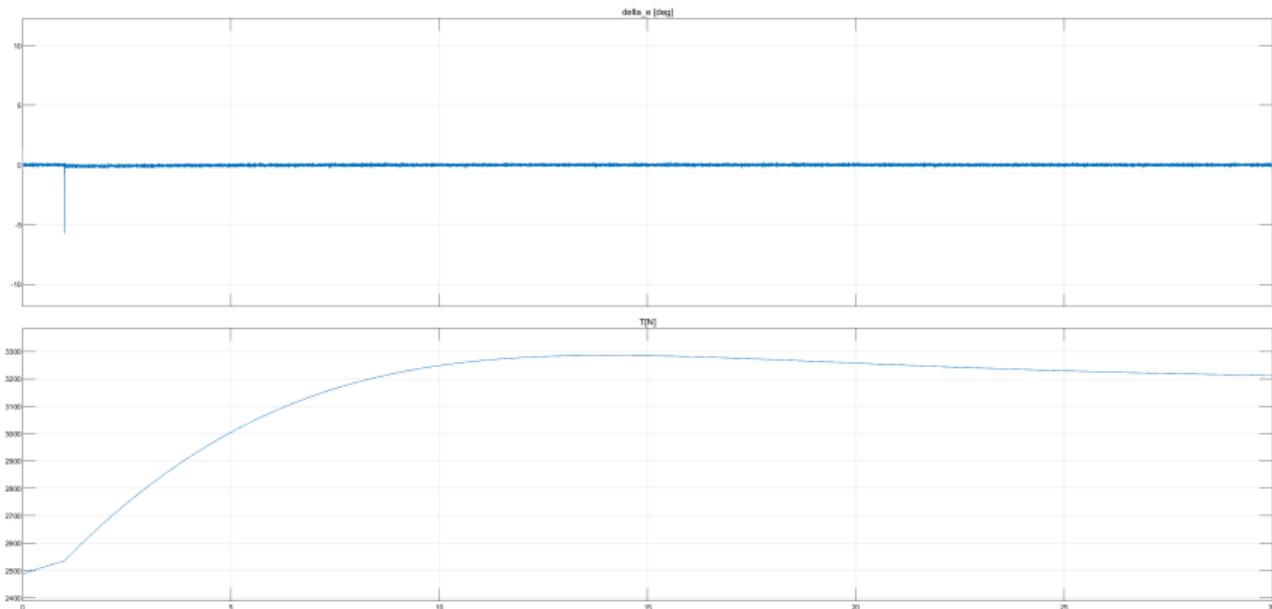


Figura: Andamento degli ingressi δ_e e Spinta T in risposta al gradino sul riferimento θ (modello non lineare).

Risposta al Gradino del Riferimento su u (Non Lineare)

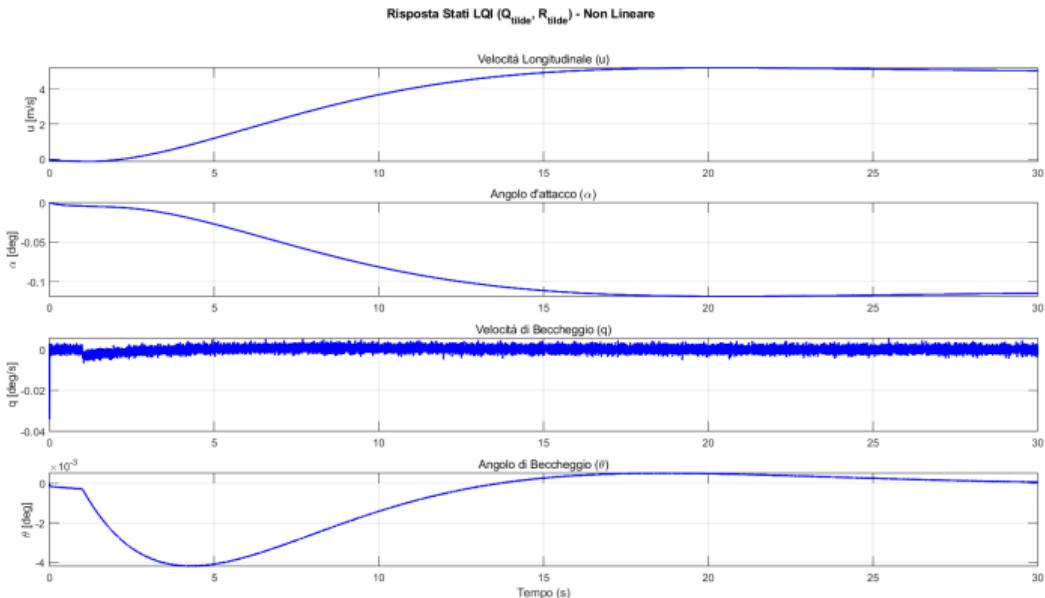


Figura: Risposta del sistema al segnale di ingresso a gradino sul riferimento u (modello non lineare).

Andamento degli Ingressi δ_e e Spinta T (Non Lineare)

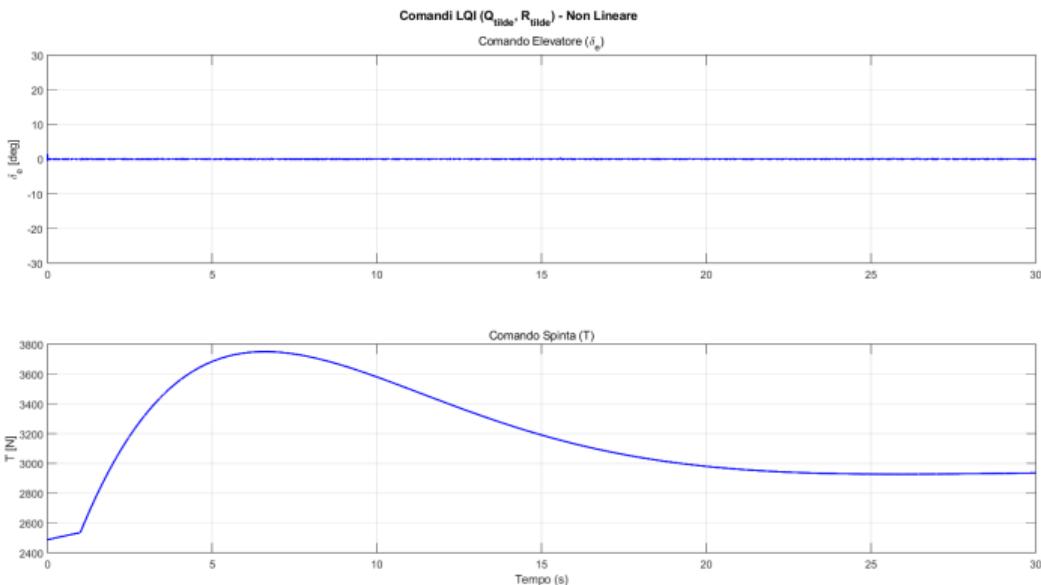


Figura: Andamento degli ingressi δ_e e Spinta T in risposta al gradino sul riferimento u (modello non lineare).

Problema di Ottimizzazione MPC

Obiettivo

Trovare la sequenza di controlli futuri $U(k|k) = [u(k|k)^T, \dots, u(k + N_c - 1|k)^T]^T$ che minimizza il costo J su un orizzonte N_c .

Funzionale di Costo J

$$\begin{aligned} \min_{U(k|k)} J(x(k|k), U(k|k)) &= x(k + N_c|k)^T Q_p x(k + N_c|k) \\ &+ \sum_{i=0}^{N_c-1} \left(x(k + i|k)^T Q x(k + i|k) + u(k + i|k)^T R u(k + i|k) \right) \end{aligned}$$

Soggetto a:

- **Dinamica Discreta:** $x(k + i + 1|k) = Ax(k + i|k) + Bu(k + i|k)$
- **Vincoli:**

$$x_m \leq x(k + i|k) \leq x_M \quad (i = 1..N_c)$$

$$u_m \leq u(k + i|k) \leq u_M \quad (i = 0..N_c - 1)$$

Minimizzazione Quadratica

$$\begin{aligned} \min_{U(k)} \quad & \frac{1}{2} U(k)^T G U(k) + (f(x(k|k)))^T U(k) \\ \text{soggetto a} \quad & L U(k) \leq E(x(k|k)) \\ & U_m \leq U(k) \leq U_M \end{aligned}$$

Dove:

- $G = 2(H^T \bar{Q} H + \bar{R})$ (Hessiana, costante)
- $f(x(k|k)) = 2(H^T \bar{Q} \Phi x(k|k))$ (Termine lineare, dipende da $x(k|k)$)
- Φ, H : Matrici di predizione basate su A, B .
- \bar{Q}, \bar{R} : Matrici di peso aumentate basate su Q, Q_p, R .
- L, E : Matrici derivate da Φ, H e dai vincoli su x .
- U_m, U_M : Vettori con i limiti su u .

Vincoli sugli Ingressi (Attuatori)

Gli ingressi $u(k + i|k)$ devono soddisfare i seguenti limiti per $i = 0, \dots, N_c - 1$:

$$\begin{aligned} -0.5236 \text{ [rad]} &\leq u_1(k + i|k) \leq 0.5236 \text{ [rad]} \quad (\approx \pm 30^\circ) \\ -0.5 \text{ [N]} &\leq u_2(k + i|k) \leq 0.5 \text{ [N]} \end{aligned}$$

Vincoli sugli Stati

Gli stati predetti $x(k + i|k) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ devono rispettare i seguenti limiti per $i = 1, \dots, N_c$:

$$\begin{aligned} -15 &\leq x_1(k + i|k) \leq 15 \text{ [m/s]} \\ -0.2618 &\leq x_2(k + i|k) \leq 0.2618 \text{ [rad]} \quad (\approx \pm 15^\circ) \\ -0.0175 &\leq x_3(k + i|k) \leq 0.0175 \text{ [rad/s]} \quad (\approx \pm 1^\circ/\text{s}) \\ -0.1745 &\leq x_4(k + i|k) \leq 0.1745 \text{ [rad]} \quad (\approx \pm 10^\circ) \end{aligned}$$

Applicazione (Orizzonte Recedente)

Soluzione e Applicazione (Receding Horizon)

- ① Si misura/stima lo stato attuale $x(k|k)$.
- ② Si calcolano $f(x(k|k))$ e $E(x(k|k))$.
- ③ Si risolve il QP (es. con quadprog) per trovare $U^*(k)$.
- ④ Si applica solo il primo controllo: $u(k) = u^*(k|k)$.
- ⑤ Si ripete al passo $k + 1$.

Esempio di Codice MATLAB per MPC

```
% --- Formulazione Vincoli per Quadprog ---
% Vincoli di tipo Box (limiti inferiori/superiori) sugli ingressi U
Umax = repmat(ub, Nc, 1); % Ripete ub per Nc volte verticalmente
Umin = repmat(lb, Nc, 1); % Ripete lb per Nc volte verticalmente

% Vincoli di tipo Lineare (L*U <= E) sugli stati predetti X = phi*x0 + H*u
% xmin <= X <= xmax => xmin <= phi*x0 + H*u <= xmax
% H*u <= xmax - phi*x0
% -H*u <= -xmin + phi*x0
Xmax_vec = repmat(xmax, Nc, 1); % Vettore limiti superiori stati
Xmin_vec = repmat(xmin, Nc, 1); % Vettore limiti inferiori stati
% keyboard; % Comando per fermare l'esecuzione e ispezionare

L = [H; -H]; % Matrice L per i vincoli lineari
E = [Xmax_vec - phi * x0; % Vettore E per i vincoli lineari (parte upper bound)
      -Xmin_vec + phi * x0]; % Vettore E per i vincoli lineari (parte lower bound)

% --- Formulazione Funzione Obiettivo per Quadprog ---
% Minimizza 0.5 * U' * G * U + f' * U
% Corrisponde a J = sum(x_k'Qx_k + u_k'Ru_k) sull'orizzonte
% Dove x_k = phi_k*x0 + H_k*u
G = 2 * (H' * Q_tilde * H + R_tilde); % Matrice Hessiana (fattore 2 per quadprog)
f = (2 * x0' * phi' * Q_tilde * H); % Termine lineare (trasposto per quadprog)

% --- Risoluzione del Problema di Programmazione Quadratica (QP) ---
% Opzioni per quadprog (silenzia output e usa algoritmo specifico se necessario)
options = optimoptions('quadprog', 'Display', 'off'); % 'iter' per vedere output
            % 'Algorithm','interior-point-convex'); % o 'active-set'

% Chiamata al solver QP
[U, ~, flag] = quadprog(G, f, L, E, [], [], Umin, Umax, [], options);
```

- Le matrici di peso utilizzate sono:

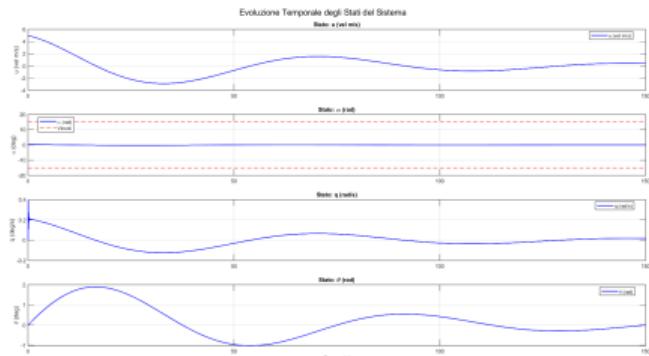
$$Q = \text{diag}(1e1 \times [100, 1e3, 1e2, 1e4])$$

$$R = \text{diag}(1e-1 \times [1, 1e2])$$

- L'algoritmo utilizza il comando `quadprog` per risolvere il problema di ottimizzazione quadratica
- La soluzione fornisce la sequenza di controllo ottimale nell'orizzonte di predizione
- Solo il primo elemento della sequenza viene applicato al sistema

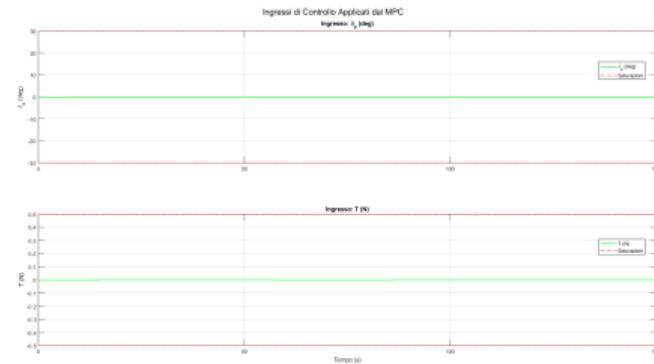
Figura: Implementazione MPC in MATLAB.

Andamento dello Stato del Sistema



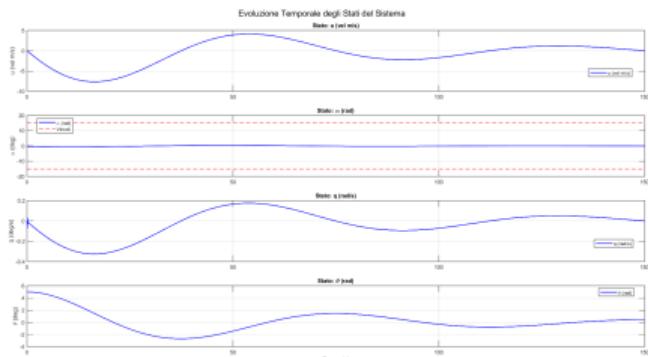
Evoluzione temporale dello stato del sistema
per $u_0 = 5 \text{ m/s}$.

Andamento dell'Ingresso di Controllo

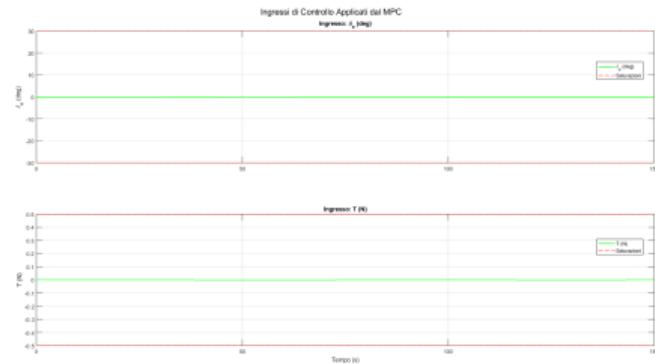


Evoluzione temporale dell'ingresso di controllo
per $u_0 = 5 \text{ m/s}$.

Andamento dello Stato del Sistema



Andamento dell'Ingresso di Controllo



Evoluzione temporale dello stato del sistema per $\theta_0 = 5$ [deg].

Evoluzione temporale dell'ingresso di controllo per $\theta_0 = 5$ [deg].

- **Stima dello Stato:** Permette di stimare variabili di stato non direttamente misurabili o affette da rumore.
- **Fusione Sensoriale:** Combina le informazioni provenienti da diverse fonti di misura (sensori) per ottenere una stima più accurata e completa.
- **Filtraggio del Rumore:** Attenua gli effetti del rumore di processo e di misura, fornendo una stima più "pulita" dello stato.
- **Supporto a Controllo Avanzato:** Fornisce la stima dello stato necessaria per tecniche di controllo ottimali come LQR (Linear Quadratic Regulator) e MPC (Model Predictive Control).

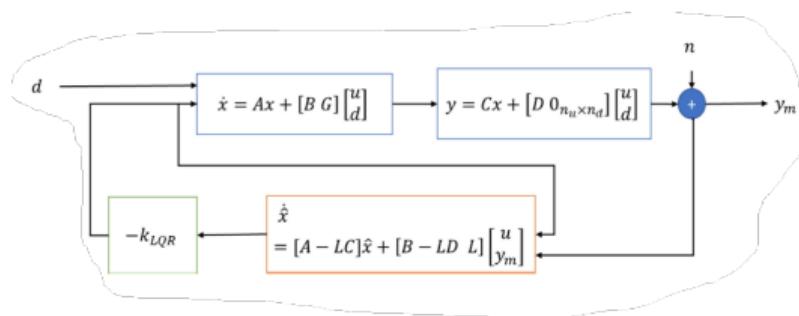


Figura: Schema introduttivo del filtro di Kalman.

Schema Simulink utilizzato per la simulazione lineare.

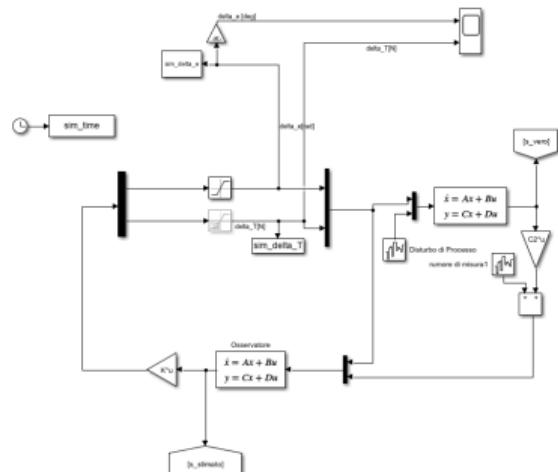


Figura: Schema Simulink del sistema lineare con osservatore.

Risultati Modello Lineare: Confronto Stati ($u_0 = 5$ m/s)

Confronto tra gli stati reali del modello lineare e quelli stimati dal filtro di Kalman con $u_0 = 5$ m/s.

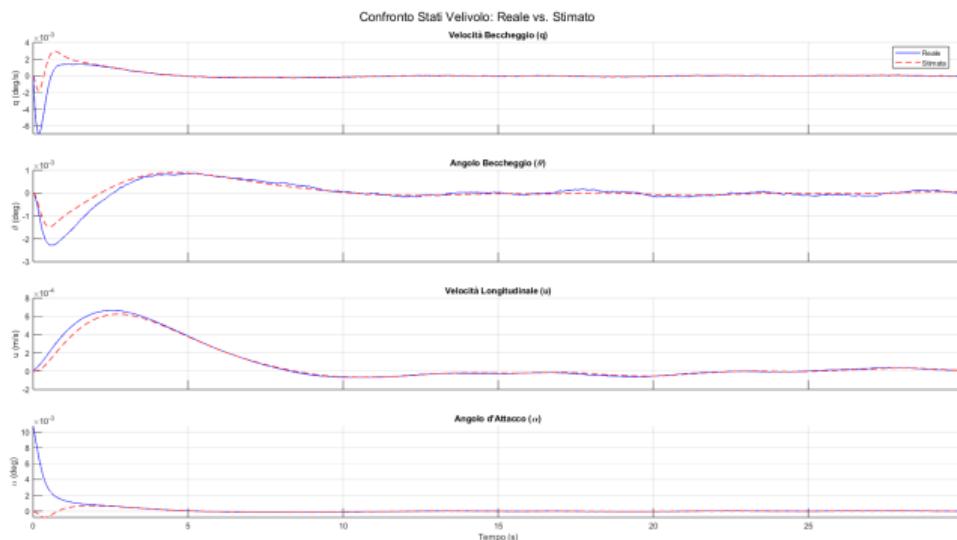


Figura: Stati reali vs. stimati (Lineare, $u_0 = 5$ m/s).

Risultati Modello Lineare: Errore di Stima ($u_0 = 5$ m/s)

Andamento dell'errore di stima (Stato Reale - Stato Stimato) per gli stati longitudinali con $u_0 = 5$ m/s.

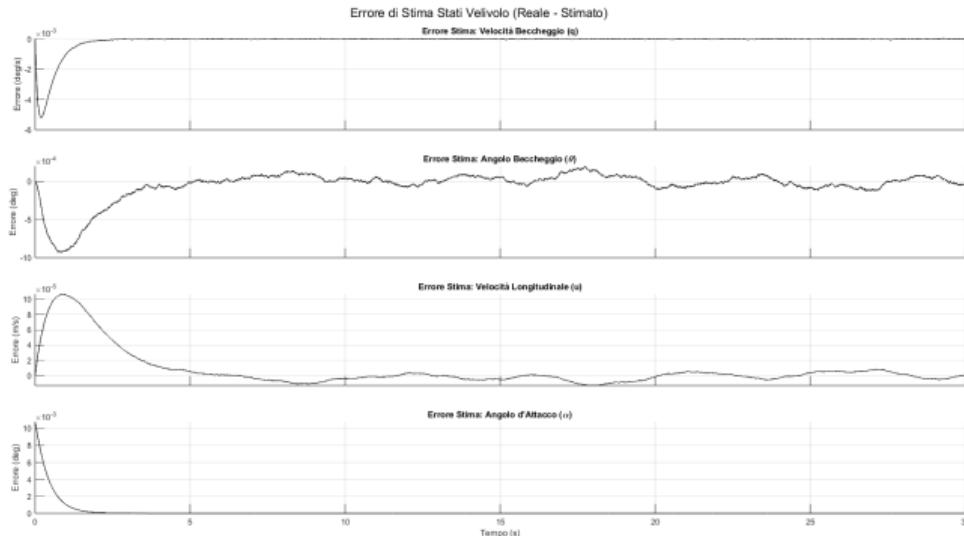


Figura: Errore di stima (Lineare, $u_0 = 5$ m/s).

L'errore converge rapidamente a valori prossimi allo zero.

Ingressi Modello Lineare ($u_0 = 5$ m/s)

Ingressi di controllo applicati durante la simulazione lineare.

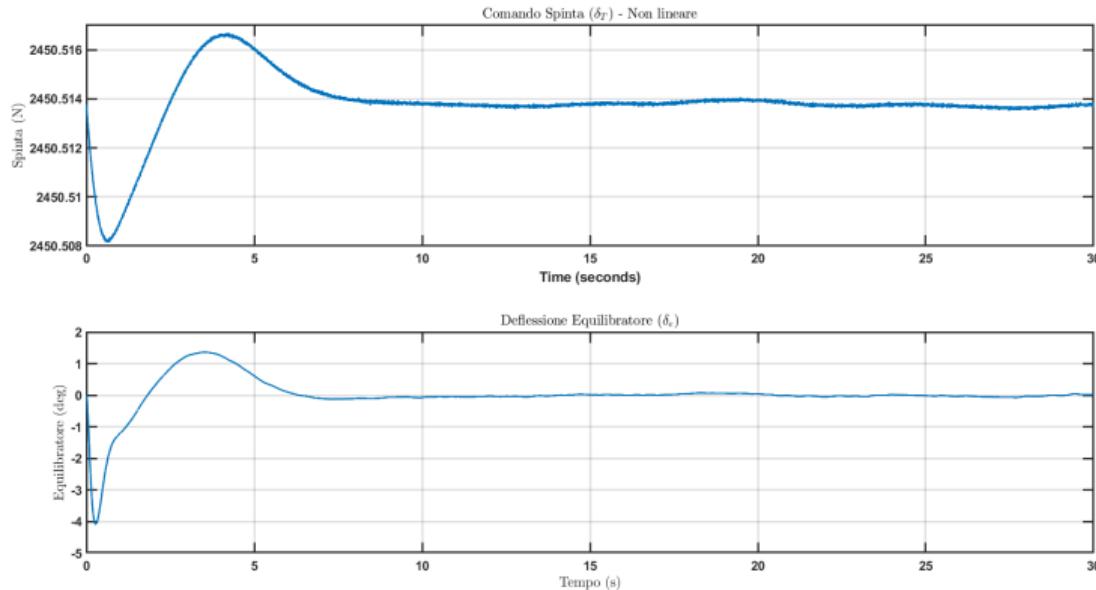


Figura: Ingressi di controllo (Non Lineare, $u_0 = 5$ m/s).

Implementazione su Modello Non Lineare ($u_0 = 5 \text{ m/s}$)

Schema Simulink dell'interfacciamento tra l'osservatore (lineare) e il simulatore non lineare del velivolo con $u_0 = 5 \text{ m/s}$.

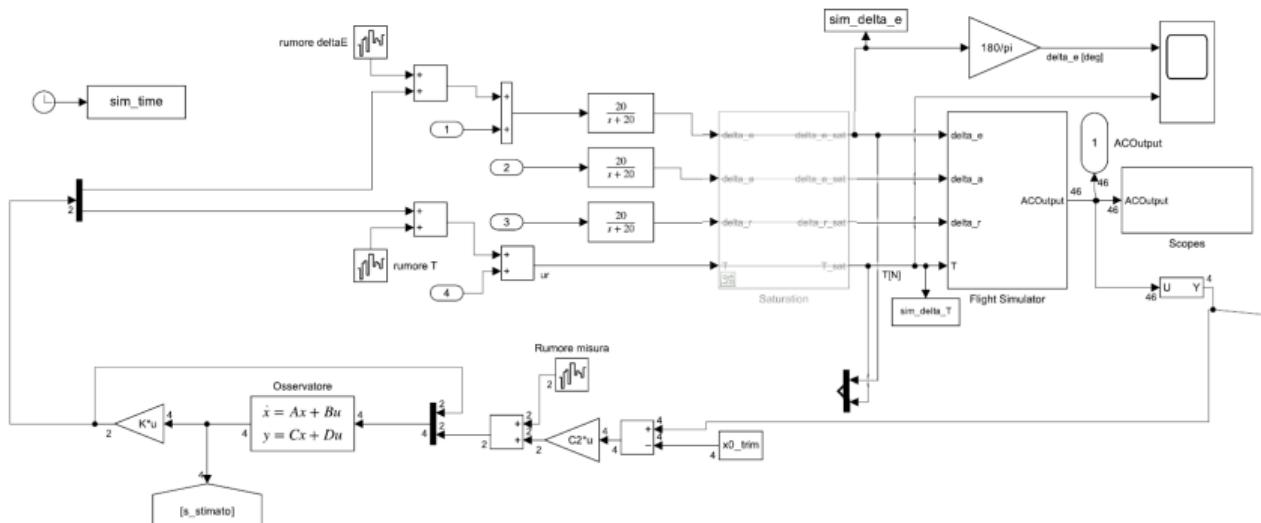


Figura: Schema Simulink del sistema non lineare con osservatore ($u_0 = 5 \text{ m/s}$).

Include l'aggiunta dei disturbi di processo e misura.

Risultati Modello Non Lineare: Confronto Stati ($u_0 = 5$ m/s)

Confronto tra gli stati reali del modello non lineare e quelli stimati dal filtro di Kalman con $u_0 = 5$ m/s.

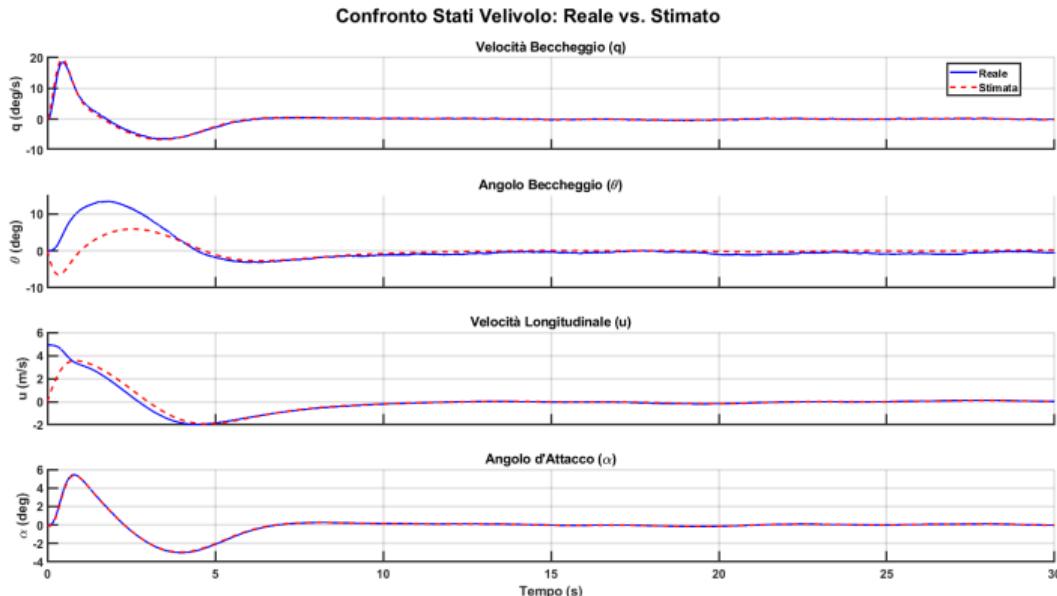


Figura: Stati reali vs. stimati (Non Lineare, $u_0 = 5$ m/s).

Risultati Modello Non Lineare: Errore di Stima ($u_0 = 5 \text{ m/s}$)

Errore di stima nel caso non lineare (Simulazione a $u_0 = 5 \text{ m/s}$). Convergenza a regime degli errori, prestazioni buone vicino al punto di linearizzazione.

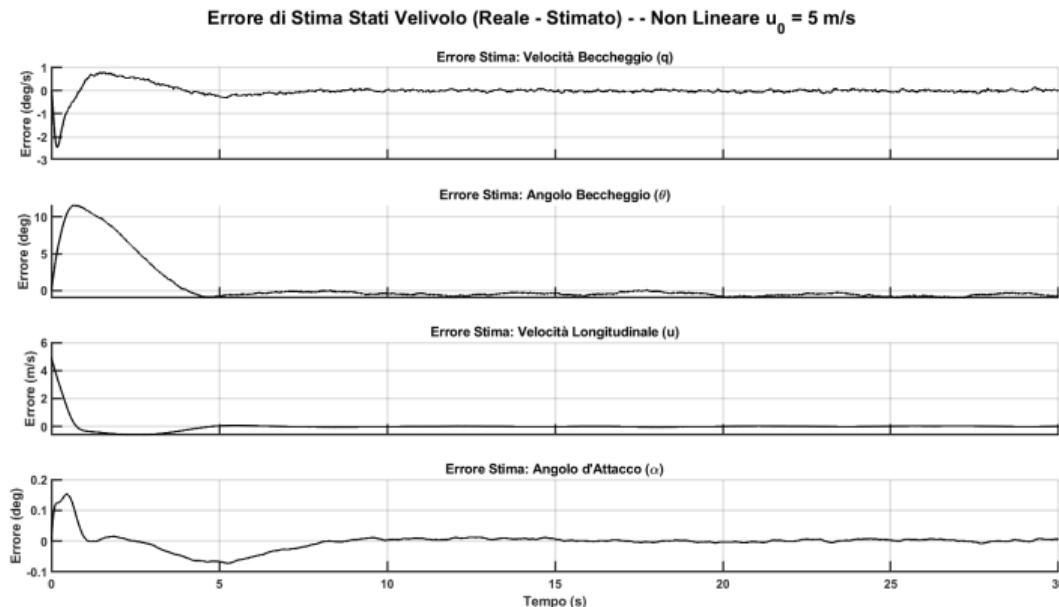


Figura: Errore di stima (Non Lineare, $u_0 = 5 \text{ m/s}$).

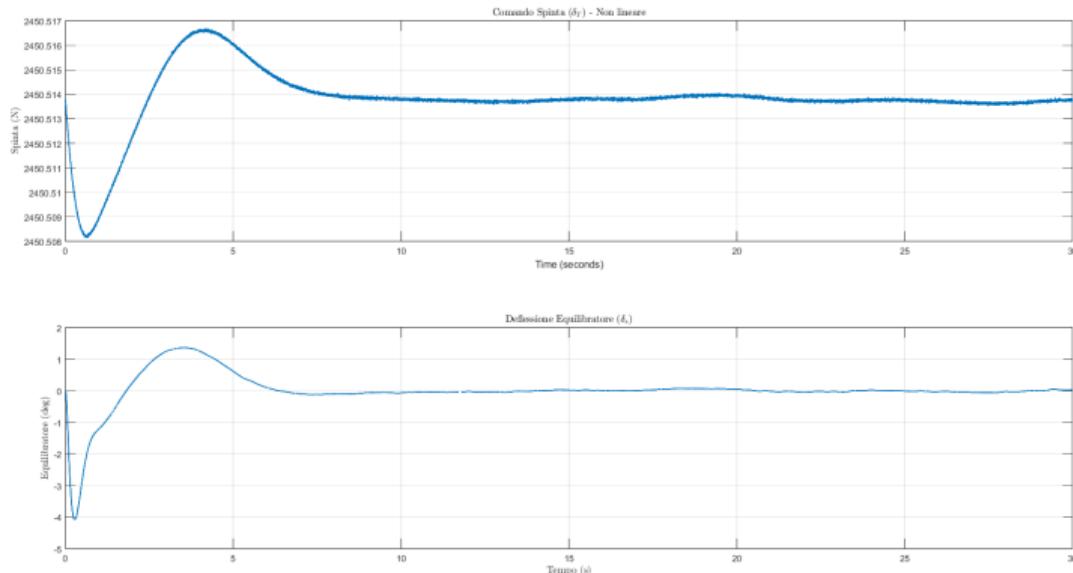
Ingressi Modello Lineare ($u_0 = 5 \text{ m/s}$)

Figura: Ingressi di controllo applicati durante la simulazione lineare. (Non Lineare, $u_0 = 5 \text{ m/s}$).

Risposta a $q_0 = 5$ deg/s: Introduzione

- Analisi delle prestazioni del filtro di Kalman con disturbo sulla velocità angolare di beccheggio.
- Condizione iniziale: $q_0 = 5$ deg/s.
- Verifica della capacità del filtro di stimare correttamente gli stati in presenza di un disturbo significativo.

Risposta a $q_0 = 5$ deg/s: Confronto Stati (Lineare)

Confronto tra gli stati reali del modello lineare e quelli stimati dal filtro di Kalman con $q_0 = 5$ deg/s.

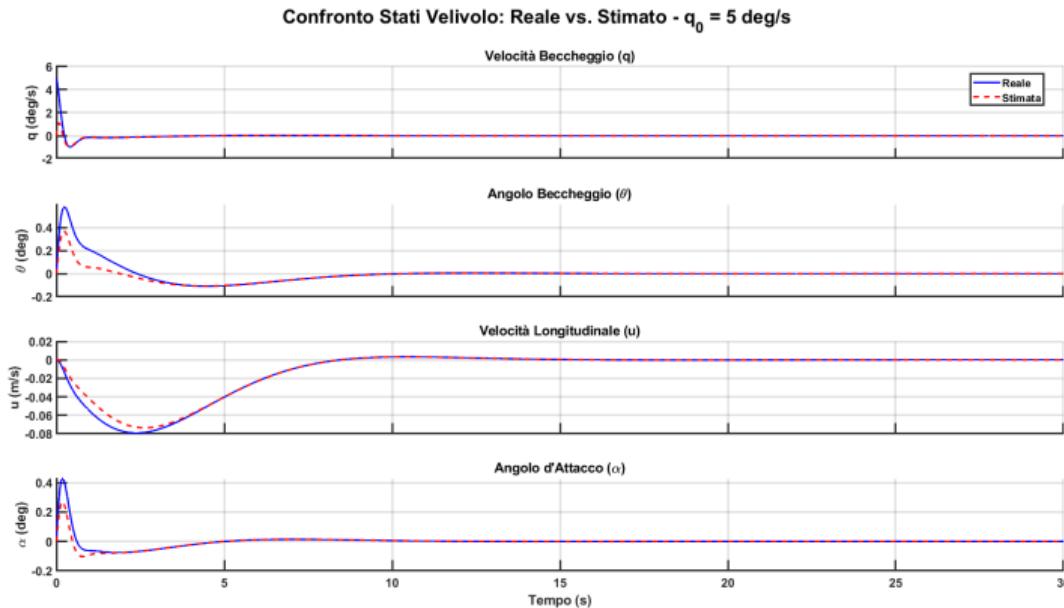


Figura: Stati reali vs. stimati con $q_0 = 5$ deg/s (Lineare).

Il filtro segue accuratamente la dinamica anche con disturbo iniziale significativo.

Risposta a $q_0 = 5 \text{ deg/s}$: Errore di Stima (Lineare)

Andamento dell'errore di stima con condizione iniziale $q_0 = 5 \text{ deg/s}$ nel modello lineare.

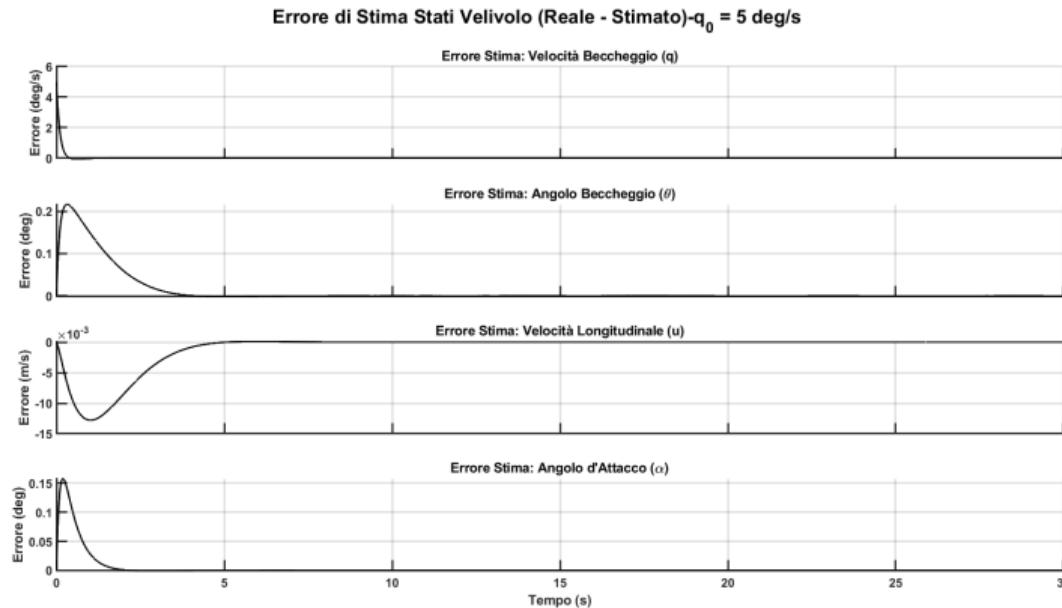


Figura: Errore di stima con $q_0 = 5 \text{ deg/s}$ (Lineare).

L'errore converge rapidamente nonostante la significativa perturbazione iniziale.

Ingressi Modello Lineare ($q_0 = 5 \text{ m/s}$)

Ingressi di controllo applicati durante la simulazione lineare.

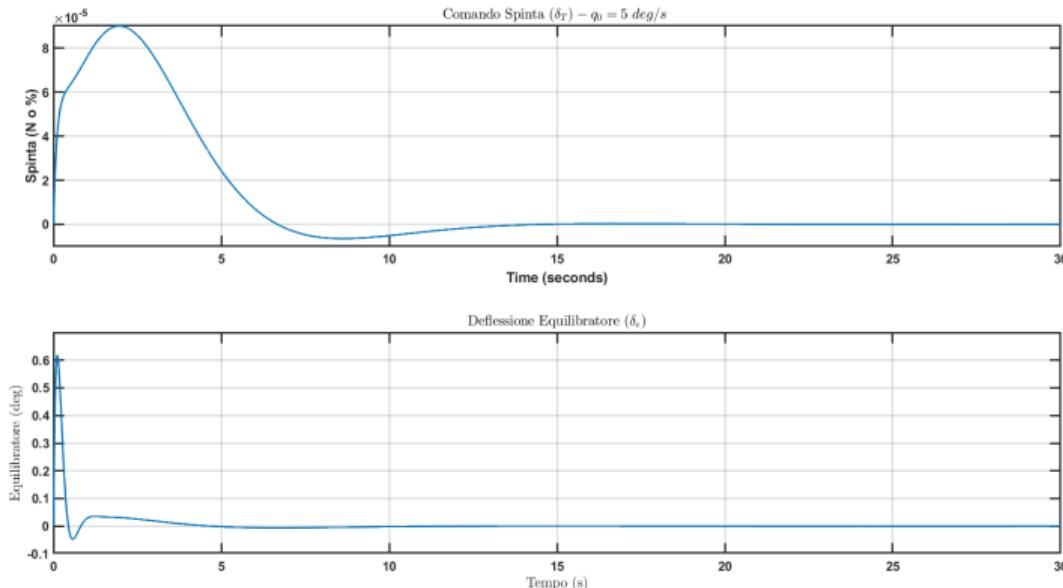


Figura: Ingressi di controllo (Non Lineare, $u_0 = 5 \text{ m/s}$).

Risposta a $q_0 = 5$ deg/s: Confronto Stati (Non Lineare)

Confronto tra gli stati reali del modello non lineare e quelli stimati dal filtro con $q_0 = 5$ deg/s.

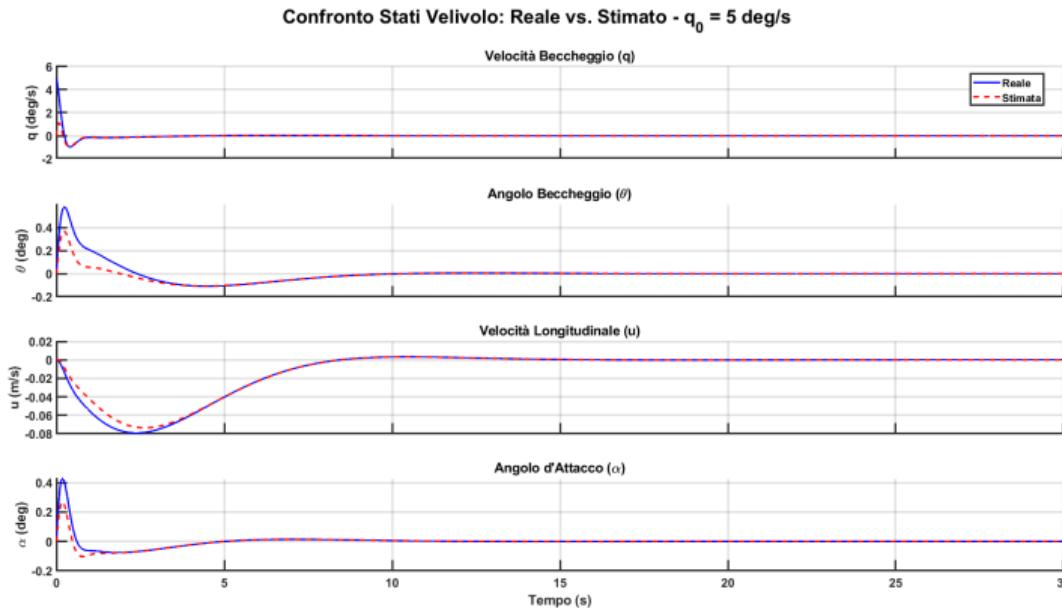


Figura: Stati reali vs. stimati con $q_0 = 5$ deg/s (Non Lineare).

Il filtro mantiene buone prestazioni anche sul modello non lineare con disturbo angolare.

Risposta a $q_0 = 5 \text{ deg/s}$: Errore di Stima (Non Lineare)

Errore di stima nel caso non lineare con perturbazione iniziale $q_0 = 5 \text{ deg/s}$.

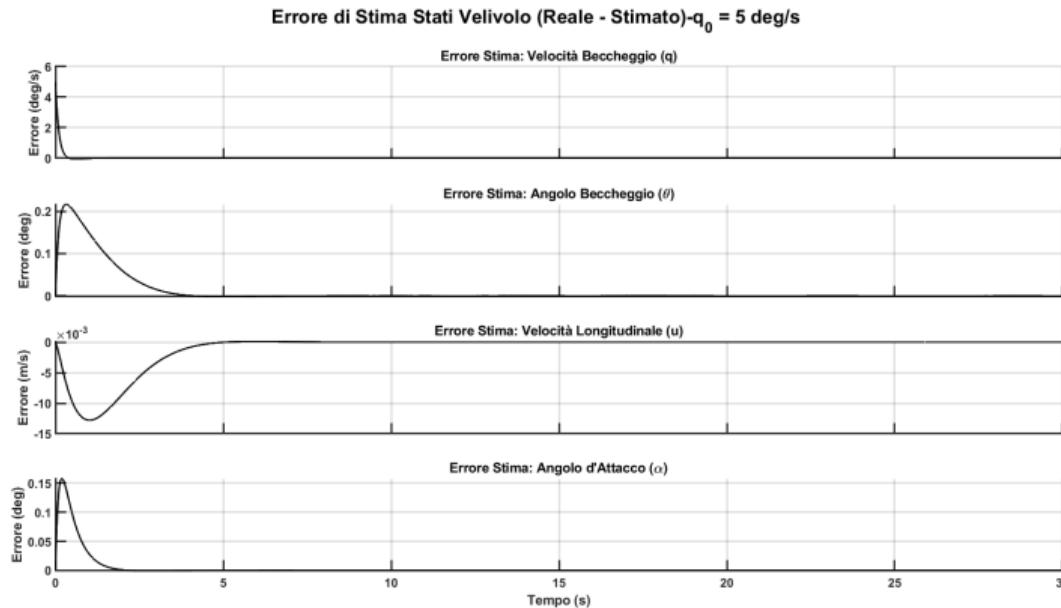


Figura: Errore di stima con $q_0 = 5 \text{ deg/s}$ (Non Lineare).

Gli errori convergono con dinamiche simili al caso lineare, confermando la robustezza dell'osservatore.

Ingressi Modello Lineare ($q_0 = 5 \text{ m/s}$)

Ingressi di controllo applicati durante la simulazione lineare.

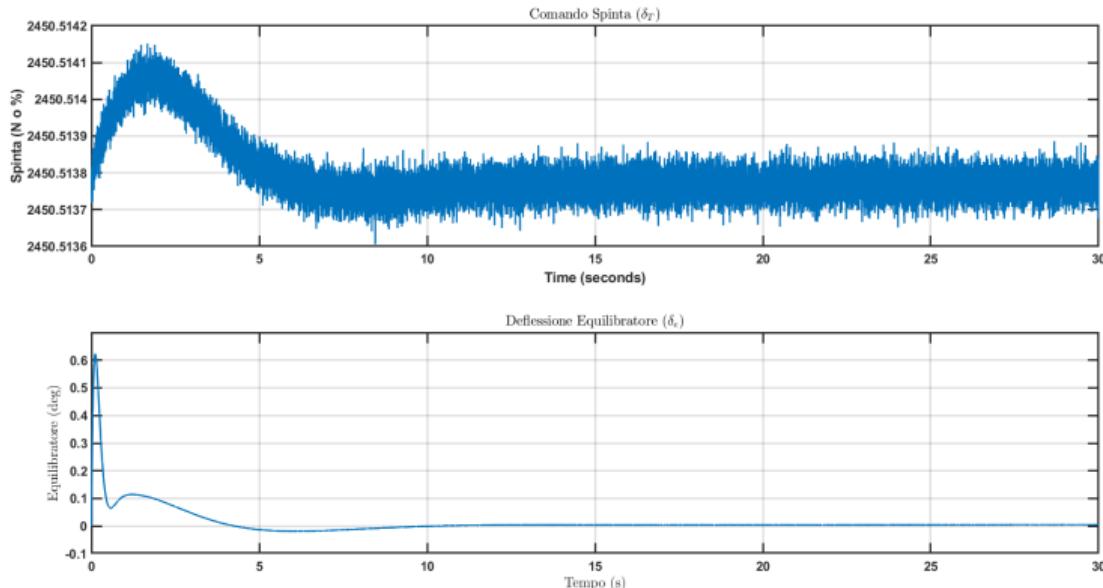


Figura: Ingressi di controllo (Non Lineare, $u_0 = 5 \text{ m/s}$).

- Il filtro di Kalman è stato implementato con successo per la stima degli stati longitudinali.
- Le prestazioni sono state valutate sia sul modello lineare di progetto che su un simulatore non lineare.
- L'osservatore basato sul modello lineare si dimostra efficace anche sul sistema non lineare, almeno vicino al punto operativo considerato.
- Gli errori di stima convergono rapidamente a valori bassi in entrambi i casi.
- La taratura del filtro (matrici Q e R) influenza il compromesso tra velocità di convergenza e rumore residuo.

- **Problema:** Determinare l'orientamento (assetto) di un corpo tramite gli angoli di Eulero (ϕ, θ, ψ) .
- **Sensori IMU:**
 - **Giroscopi:** Misurano velocità angolari (p, q, r) con bias (b_p, b_q, b_r) e rumore. L'integrazione causa deriva.
 - **Accelerometri:** Misurano l'accelerazione (principalmente gravità), utili per rollio e beccheggio, ma sensibili ad accelerazioni lineari.
 - **Magnetometri:** Misurano il campo magnetico terrestre, per l'imbardata, ma soggetti a distorsioni.
- **Filtro di Kalman:** Necessario per combinare le misure rumorose e ottenere una stima ottimale dell'assetto.

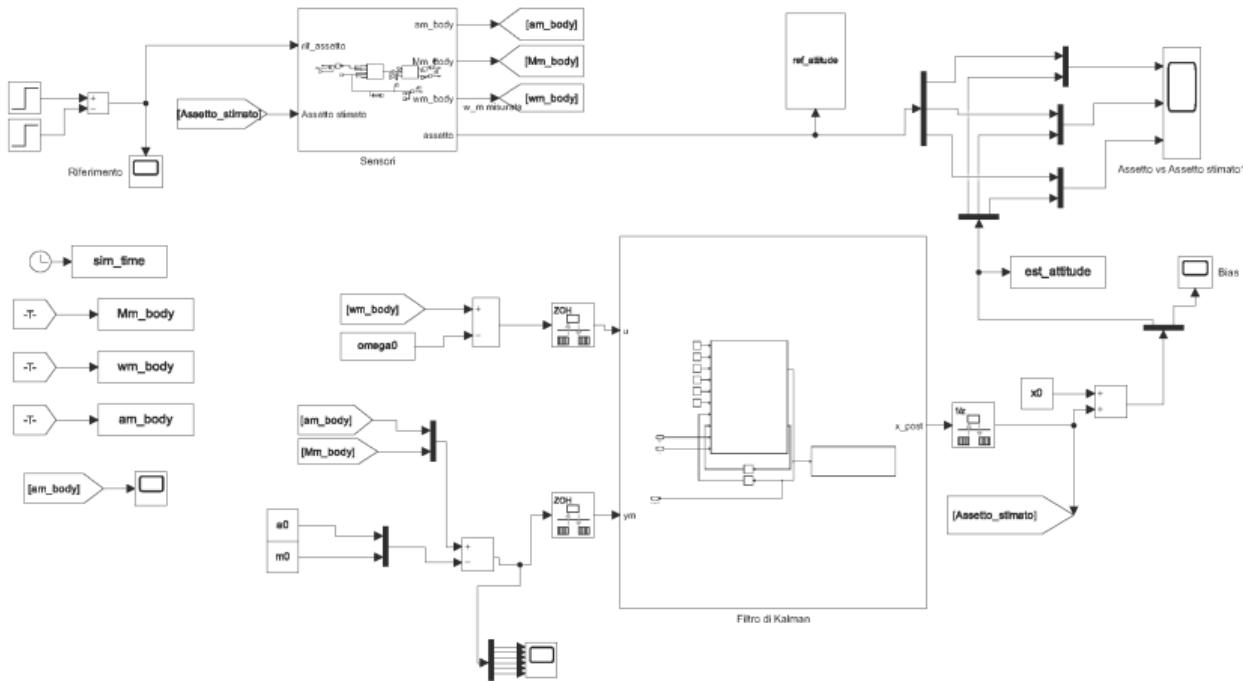
- **Modello Cinematico:** Lega le velocità angolari alle derivate degli angoli di Eulero:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - b_p \\ q - b_q \\ r - b_r \end{bmatrix}$$

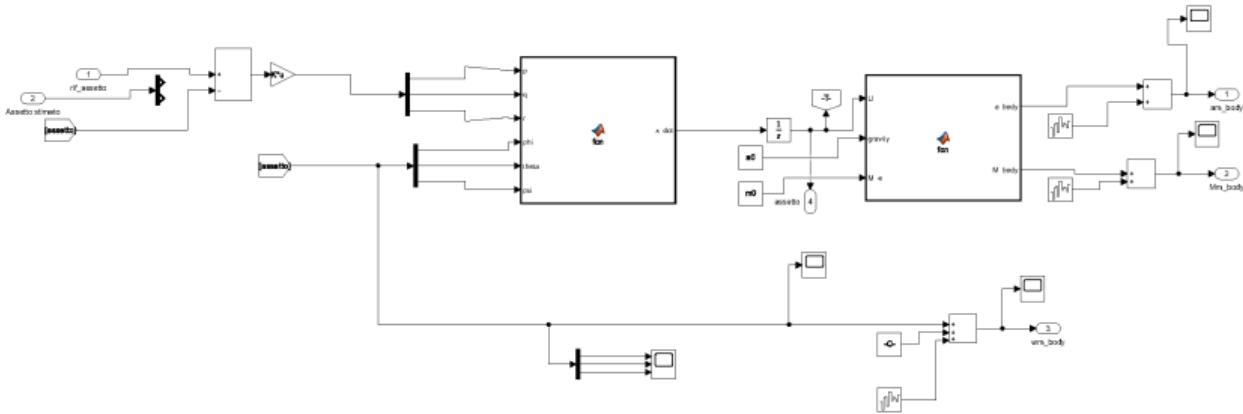
Non dipende da parametri fisici del veicolo.

- **Stato:** $x = [\phi, \theta, \psi, b_p, b_q, b_r]^T$. Dinamica del bias modellata.
- **Misure:** Accelerometro (rollio, beccheggio) e magnetometro (imbardata).
Relazioni non lineari con matrici di rotazione.
- **Linearizzazione:** Necessaria per il filtro di Kalman (lineare) tramite la Symbolic Toolbox di MATLAB. Calcolo delle matrici Jacobiane A, B, C, D .
- **Simulink:** Implementazione del filtro e del modello linearizzato per la simulazione e la validazione.

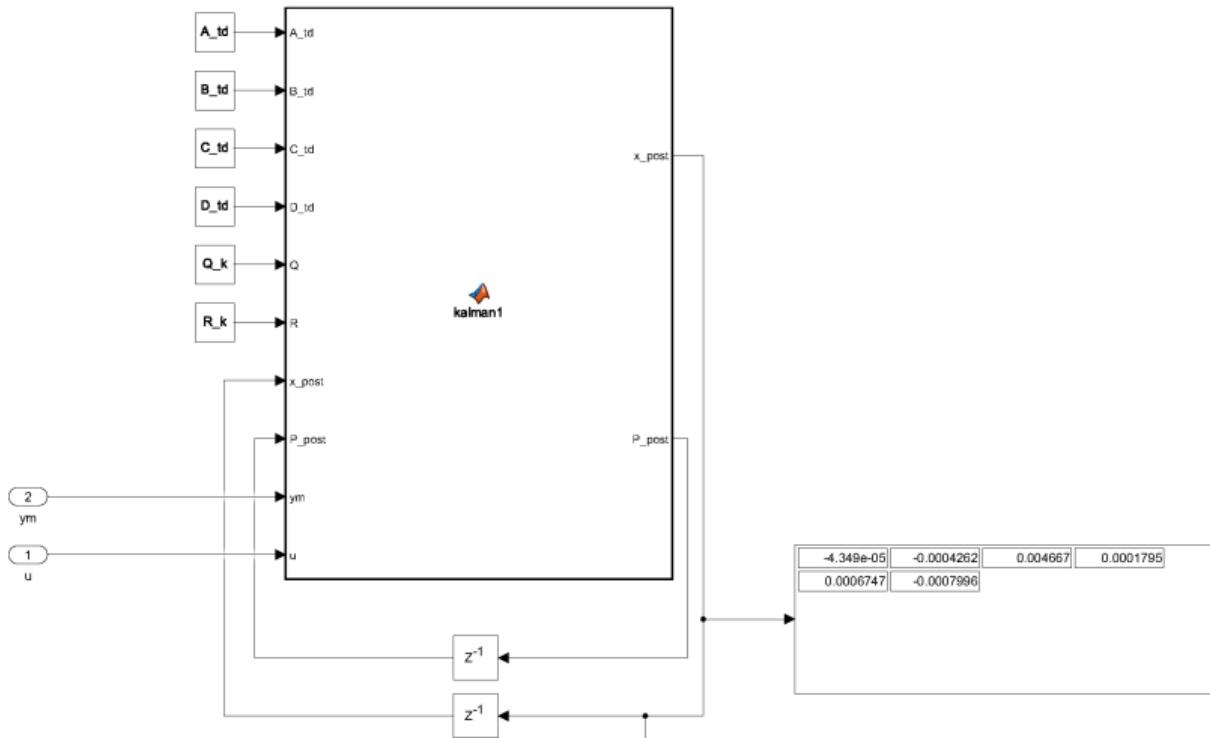
Presentazione del Filtro d'Assetto



Schema Simulink Sensori e Modello Cinematico



Schema Simulink del Filtro di Kalman Discreto



Fase di Predizione (Stime a priori)

A partire dalla stima dello stato e dalla covarianza dell'errore al passo precedente ($k - 1$), si proiettano queste quantità al passo corrente (k) utilizzando il modello del sistema:

$$\hat{x}_k^- = A_{d,k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + B_{d,k-1} u_{k-1}$$

$$P_k^- = A_{d,k-1} P_{k-1}^+ A_{d,k-1}^T + Q_{k-1}$$

Questa fase di predizione utilizza il modello dinamico discretizzato per stimare lo stato attuale prima di incorporare le nuove misurazioni.

Dove:

- \hat{x}_k^- è la stima a priori dello stato al passo k
- $A_{d,k-1}$ è la matrice di transizione di stato discreta
- $B_{d,k-1}$ è la matrice di ingresso discreta
- u_{k-1} è l'ingresso di controllo al passo $k - 1$
- P_k^- è la matrice di covarianza dell'errore a priori
- P_{k-1}^+ è la covarianza a posteriori al passo $k - 1$
- Q_{k-1} è la covarianza del rumore di processo

Fase di Aggiornamento e Variabili

Utilizzando la misurazione corrente (y_k) e la stima a priori, si calcola una stima a posteriori più precisa e si aggiorna la covarianza dell'errore:

$$L_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - C_k \hat{x}_k^-)$$

$$P_k^+ = (I - L_k C_k) P_k^- (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T$$

Variabili dell'Aggiornamento

- L_k : Guadagno di Kalman.
- C_k : Matrice di osservazione.
- R_k : Matrice di covarianza del rumore di misura.
- y_k : Misurazione al passo k .
- \hat{x}_k^+ : Stima a posteriori dello stato al passo k .
- P_k^+ : Matrice di covarianza dell'errore a posteriori al passo k .
- I : Matrice identità.

- **Filtro Utilizzato:** Filtro di Kalman Lineare (LKF) su modello linearizzato (6 stati: assetto + bias giroscopi).
- **Scenario di Test:** Manovra di Pitch applicando un riferimento a gradino sulla velocità angolare q .

Segnale di Riferimento Ingresso (Velocità Angolari "ref_input")

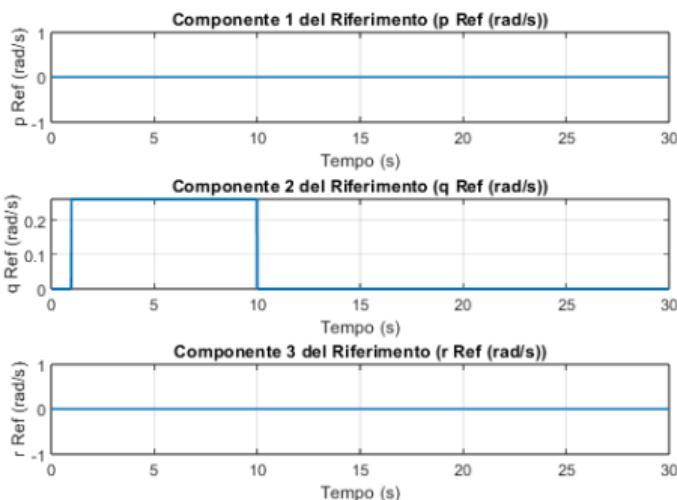


Figura: Segnale di riferimento in ingresso (velocità angolari p, q, r).

- **Osservazioni:**

- È necessaria un'analisi di sensitività per valutare l'influenza della matrice Q_k sulla stima dell'assetto.
- Una maggiore incertezza su b_q (elementi diagonali di Q_k) migliora la compensazione degli errori sistematici.
- La scelta ottimale di Q_k bilancia accuratezza e stabilità della stima.

- **Configurazioni adottate:**

- **Qk1:** Configurazione base (bassa incertezza su tutti gli stati).

$$Q_{k1} = 1 \times 10^{-12} \cdot \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

- **Qk2:** Aumentata incertezza solo sul bias di pitch b_q (100 volte). Questa configurazione ha dato i risultati migliori per la manovra di pitch.

$$Q_{k2} = 1 \times 10^{-12} \cdot \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 100, 1\}$$

- **Qk3:** Aumentata incertezza sugli angoli (10 volte) e sul bias b_q (100 volte).

$$Q_{k3} = 1 \times 10^{-12} \cdot \text{diag}\{10, 10, 10, 1, 100, 1\}$$

- **Qk4:** Scala globale 10^{-11} e incertezza moderata (10 volte) sul bias b_q .

$$Q_{k4} = 1 \times 10^{-11} \cdot \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 10, 1\}$$

Risultati Stima Assetto (Post-Taratura)

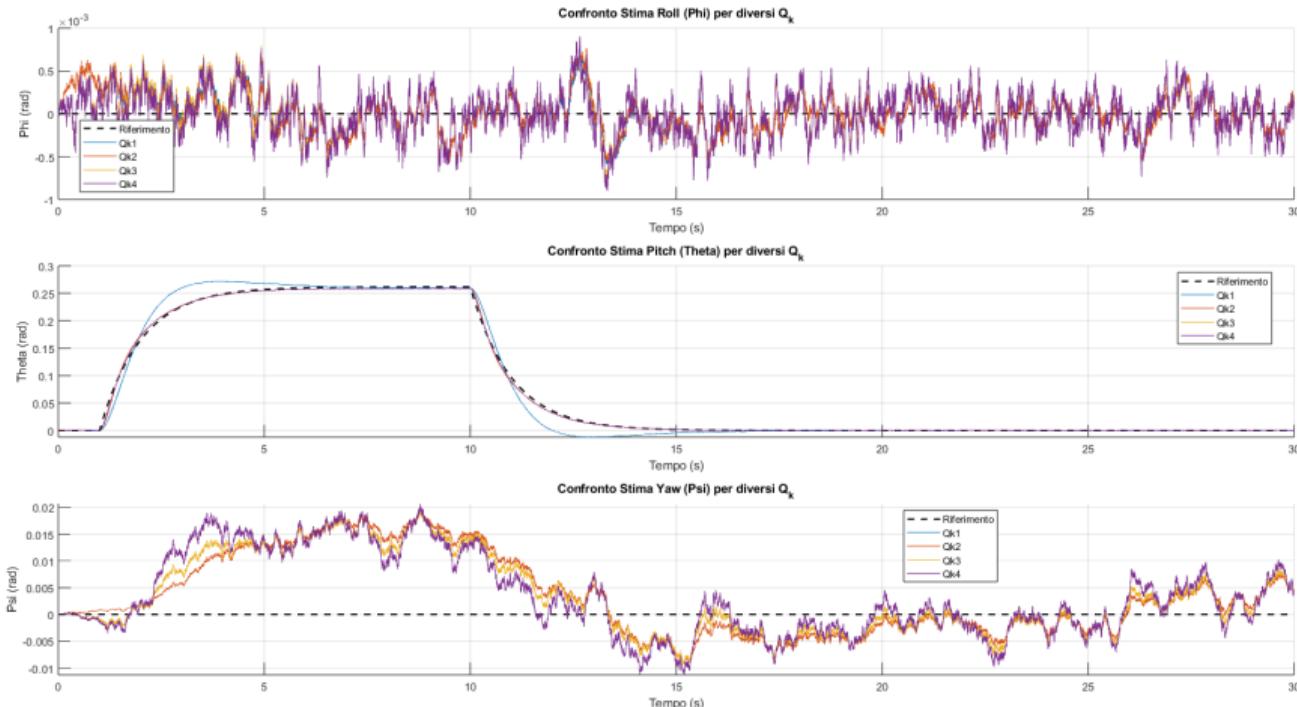


Figura: Confronto Assetto di Riferimento vs. Assetto Stimato.

Sensore d'Assetto - Fase di Aggiornamento (Stime a posteriori)

Risultati Osservati (Grafico Confronto):

- **Roll (ϕ) / Pitch (θ):** Le prestazioni (inseguimento, offset residuo) sono apparse poco sensibili alla variazione di ΔT_{filtro} nel range testato ($0.01s \rightarrow 0.001s$).
- **Yaw (ψ):** Si è notato un **chiaro aumento del rumore** ad alta frequenza nella stima al diminuire di ΔT_{filtro} (vedi grafico a destra, linea blu vs arancione/gialla).

Risultati Stima Assetto (Post-Taratura), analisi su ΔT_{filtro}

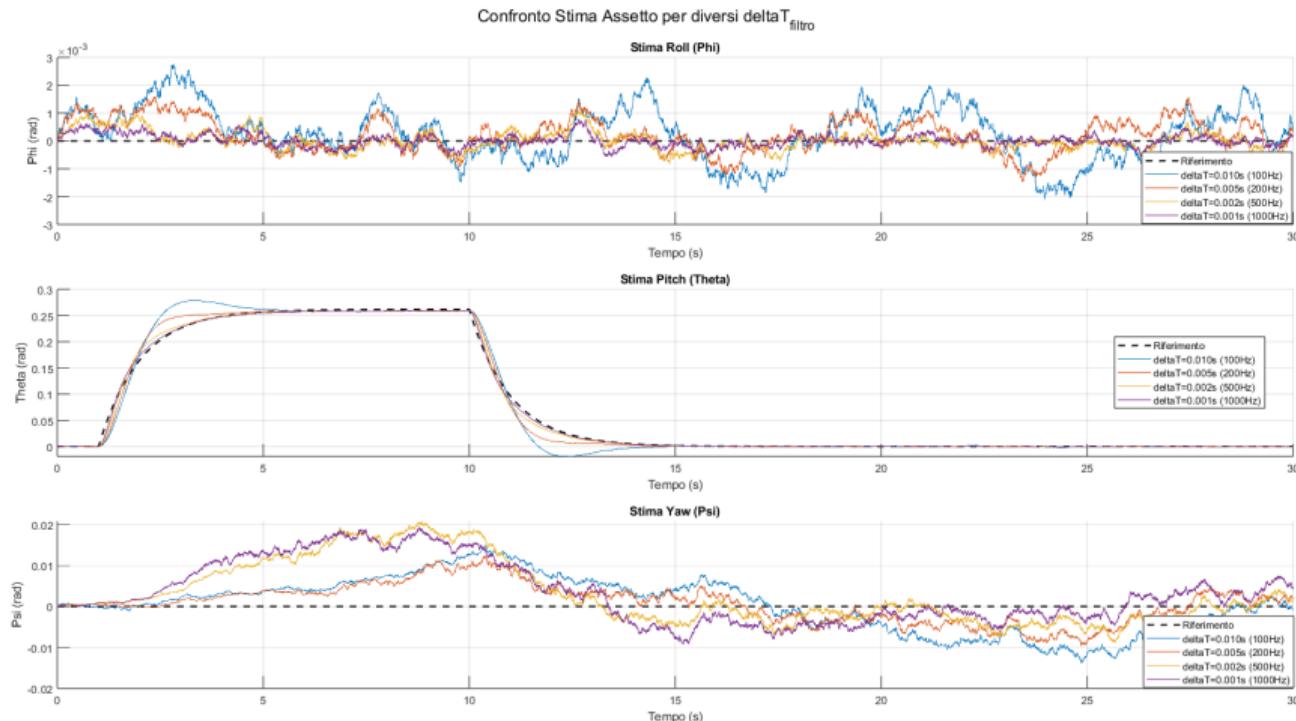


Figura: Confronto Assetto di Riferimento vs. Assetto Stimato.

Sensore d'Assetto - Fase di Aggiornamento (Stime a posteriori)

Conclusioni

- La taratura **accurata** delle matrici di covarianza del rumore (Q_k , R_k) è risultata **essenziale** per ottenere prestazioni soddisfacenti dall'LKF.
- In particolare, modellare una **maggior incertezza sul bias** del giroscopio ('bq' in Q_k) ha permesso al filtro di compensare efficacemente gli errori sistematici osservati inizialmente sull'angolo di Pitch.
- L'analisi della stima dei bias conferma il meccanismo di compensazione attivato dal filtro.

Grazie per l'attenzione!