Università
degli Studi
della Campania
*Luigi Vanvitelli*

Dipartimento di
Ingegneria

Corso di Dinamica e Progetto Generale dei Velivoli: Modulo 1

# *Progetto d'esame: Analisi Stabilità Dinamica di un F-4 McDonnell Douglas*

Professore:
**Luciano Blasi**

candidato
**Ludovico Aricò**
**matr. A15000228**

# Indice

# Dati velivolo

**Table B10.1** Geometric Data for the McDonnell Douglas F-4 Aircraft

| | | |
|---|---|---|
| Wing Surface ($ft^2$) | $S$ | 530 |
| Mean Aerodynamic Chord (MAC) (ft) | $\bar{c}$ | 16 |
| Wing Span (ft) | $b$ | 38.7 |

**Table B10.2** Flight Conditions Data for the McDonnell Douglas F-4 Aircraft

| | | Approach | Cruise (mach < 1) | Cruise (mach > 1) |
|---|---|---|---|---|
| Altitude (ft) | $h$ | 0 | 35,000 | 55,000 |
| Mach Number | $M$ | 0.206 | 0.90 | 1.80 |
| True Airspeed (ft/sec) | $V_{P_1}$ | 230 | 876 | 1,742 |
| Dynamic Pressure (lbs/$ft^2$) | $\bar{q}$ | 62.9 | 283.2 | 434.5 |
| Location of CG - % MAC | $\bar{x}_{CG}$ | 0.29 | 0.29 | 0.29 |
| Steady-state angle of attack (deg) | $\alpha_1$ | 11.7 | 2.6 | 3.3 |

**Table B10.3** Mass and Inertial Data for the McDonnell Douglas F-4 Aircraft

| | | Approach | Cruise (mach < 1) | Cruise (mach > 1) |
|---|---|---|---|---|
| Mass (lbs) | $m$ | 33,200 | 39,000 | 39,000 |
| Moment of Inertia x-axis (slug $ft^2$) | $I_{XX_B}$ | 23,700 | 25,000 | 25,000 |
| Moment of Inertia y-axis (slug $ft^2$) | $I_{YY_B}$ | 117,500 | 122,200 | 122,200 |
| Moment of Inertia z-axis (slug $ft^2$) | $I_{ZZ_B}$ | 133,700 | 139,800 | 139,800 |
| Product of inertia xz-plane (slug $ft^2$) | $I_{XZ_B}$ | 1,600 | 2,200 | 2,200 |

**Table B10.4** Longitudinal Aerodynamic Coefficients for the McDonnell Douglas F-4 Aircraft

| | Approach | Cruise (mach < 1) | Cruise (mach > 1) |
|---|---|---|---|
| **Steady State** | | | |
| $c_{L_1}$ | 1.0 | 0.26 | 0.17 |
| $c_{D_1}$ | 0.20 | 0.030 | 0.0480 |
| $c_{m_1}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{T_{X_1}}$ | 0.20 | 0.030 | 0.0480 |
| $c_{m_{T_1}}$ | 0 | 0 | 0 |
| **Stability Derivatives** | | | |
| $c_{D_0}$ | 0.0269 | 0.0205 | 0.0439 |
| $c_{D_u}$ | 0 | 0.027 | −0.054 |
| $c_{D_\alpha}$ | 0.555 | 0.30 | 0.40 |
| $c_{T_{X_u}}$ | −0.45 | −0.064 | −0.10 |
| $c_{L_0}$ | 0.430 | 0.10 | 0.010 |
| $c_{L_u}$ | 0 | 0.270 | −0.180 |
| $c_{L_\alpha}$ | 2.80 | 3.75 | 2.80 |
| $c_{L_{\dot{\alpha}}}$ | 0.63 | 0.86 | 0.17 |
| $c_{L_q}$ | 1.33 | 1.80 | 1.30 |
| $c_{m_0}$ | 0.02 | 0.025 | −0.025 |
| $c_{m_u}$ | 0 | −0.117 | 0.054 |
| $c_{m_\alpha}$ | −0.098 | −0.40 | −0.780 |
| $c_{m_{\dot{\alpha}}}$ | −0.95 | −1.30 | −0.25 |
| $c_{m_q}$ | −2.0 | −2.70 | −2.0 |
| $c_{m_{T_u}}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{m_{T_\alpha}}$ | 0 | 0 | 0 |
| **Control Derivatives** | | | |
| $c_{D_{i_H}}$ | −0.14 | −0.10 | −0.15 |
| $c_{L_{i_H}}$ | 0.24 | 0.40 | 0.25 |
| $c_{m_{i_H}}$ | −0.322 | −0.580 | −0.380 |

**Figura 1:** Dati velivolo 1

**Table B10.7** Lateral Directional Aerodynamic Coefficients for the McDonnell Douglas F-4 Aircraft

| | Approach | Cruise (mach < 1) | Cruise (mach > 1) |
|---|---|---|---|
| **Stability Derivatives** | | | |
| $c_{l_\beta}$ | −0.156 | −0.080 | −0.025 |
| $c_{l_p}$ | −0.272 | −0.240 | −0.20 |
| $c_{l_r}$ | 0.205 | 0.070 | 0.040 |
| $c_{Y_\beta}$ | −0.655 | −0.680 | −0.70 |
| $c_{Y_p}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{Y_r}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{n_\beta}$ | 0.199 | 0.125 | 0.09 |
| $c_{n_{T_\beta}}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{n_p}$ | 0.013 | −0.036 | 0 |
| $c_{n_r}$ | −0.320 | −0.270 | −0.260 |
| **Control Derivatives** | | | |
| $c_{l_{\delta_A}}$ | 0.0570 | 0.0420 | 0.0150 |
| $c_{l_{\delta_R}}$ | 0.0009 | 0.0060 | 0.0030 |
| $c_{Y_{\delta_A}}$ | −0.0355 | −0.0160 | −0.010 |
| $c_{Y_{\delta_R}}$ | 0.124 | 0.095 | 0.05 |
| $c_{n_{\delta_A}}$ | 0.0041 | −0.0010 | −0.0009 |
| $c_{n_{\delta_R}}$ | −0.072 | −0.066 | −0.025 |

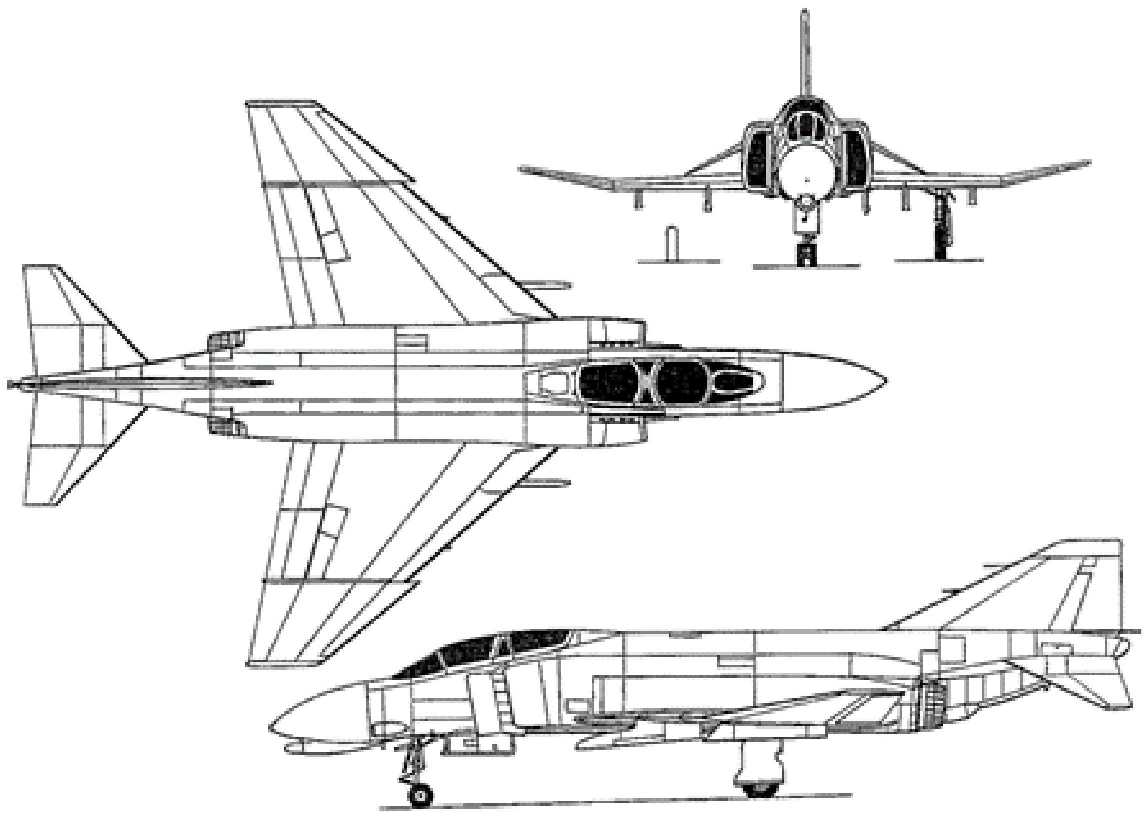

**Figura 2:** Dati velivolo 2

# 1 Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è quello di stilare un'analisi delle dinamiche Longitudinali e Latero - Direzionali del velivolo McDonell Douglas F-4 in una condizione di volo di crociera **Cruise(High)**. Il McDonnell Douglas F-4 è un caccia intercettore e bombardiere statunitense a due posti in tandem, bimotore, a lungo raggio e supersonico, originariamente sviluppato dalla McDonnell Aircraft per la Marina degli Stati Uniti dal 1958 al 1981. Il progetto si strutturerà in una prima fase in cui introdurremo una terna di riferimento *Assi di Stabilità* con la quale andremo a calcolare le derivate di stabilità che rappresentano i coefficienti delle equazioni differenziali che modellano la dinamica del nostro velivolo.

Dopo questa prima fase, il passo successivo è entrare nel vivo ad analizzare le dinamiche dei modi Longitudinali e Latero - Direzionali, in termini di smorzamento, frequenza naturale e rappresentazione dei modi mediante fasori, insieme alla risposta libera del sistema e ad un'analisi di sensitività al variare del baricentro. Le analisi delle dinamiche del velivolo verranno valutate anche dal punto di vista delle qualità di volo del velivolo. Dopodichè, si confronteranno i risultati ottenuti col modello linearizzato con quelli ottenuti con dei modelli approssimati che risaltano le caratteristiche principali dei modi.

Infine si valuteranno gli effetti degli accoppiamenti inerziali sulla manovra di Rollio Rapido e l'effetto del Wind Shear sulla dinamica longitudinale e in particolare sul modo di fugoide.

# 2 Passaggio da Assi Corpo ad Assi di Stabilità

La terna di Assi di stabilità è una particolare terna Assi Corpo caratterizzata dal fatto che il suo asse X ha le stessa direzione del vettore velocità del velivolo nella fase iniziale di volo. Questo ci permette di semplificare le equazioni che regolano il moto perchè elimina le componenti V e W della velocità iniziale lasciando solo la componente $U_0$ lungo x diversa da zero.
L'utilizzo della terna assi di stabilità richiede il passaggio delle matrice d'inerzia e delle derivate di stabilità, valutati in assi corpo, nella terna assi di stabilità. Per quanto riguarda la matrice d'inerzia, si opererà il passaggio mediante una trasformazione di similitudine di questo tipo:

$$\mathbf{I_S} = \mathbf{T_{BS}}^T \mathbf{I_B} \mathbf{T_{BS}} \tag{1}$$

Dove abbiamo definito $\mathbf{T_{BS}}$ **Matrice di Passaggio** e dove gli indici B ed S indicano rispettivamente gli Assi Corpo e gli Assi di Stabilità. La matrice $\mathbf{T_{BS}}$ la definiamo come :

$$\mathbf{T_{BS}} = \begin{bmatrix} cos\alpha_0 & 0 & -sin\alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\alpha_0 & 0 & cos\alpha_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esplicitando il prodotto matriciale otteniamo quindi la seguente matrice:

$$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix}_S = \begin{bmatrix} cos^2\alpha_0 & 0 & sin^2\alpha_0 & -sin2\alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sin^2\alpha_0 & 0 & cos^2\alpha_0 & sin2\alpha_0 \\ cos\alpha_0\ sin\alpha_0 & 0 & -cos\alpha_0\ sin\alpha_0 & cos2\alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix}_B \tag{3}$$

Che valutata nel caso in esame di un angolo d'attacco di trim di $\alpha_1 = 3.3\ deg$ darà i seguenti valori di momenti d'inerzia nel riferimento Assi di Stabilità pari a:

$$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix}_S = \begin{Bmatrix} 25127.5 \\ 122200 \\ 139672.4 \\ -4411.9 \end{Bmatrix} \left[\frac{slug}{ft^2}\right] \tag{4}$$

**DINAMICA LONGITUDINALE**

| | |
|---|---|
| $X_u = \frac{q_0 S[(C_{T_u} + 2C_{T_0}) - (C_{D_u} + 2C_{D_0})]}{mU_0}$ | $M_u = \frac{q_0 cS(C_{m_u} + 2C_{m_0})}{I_{yy}U_0}$ |
| $X_\alpha = -\frac{q_0 S(C_{D_\alpha} - C_{L_0})}{m}$ (trascurando $C_{T_\alpha}$) | $M_\alpha = \frac{q_0 ScC_{m_\alpha}}{I_{yy}}$ |
| $X_{\delta_T} = \frac{q_0 SC_{T_{\delta_T}}}{m}$ | $M_{\dot\alpha} = \frac{q_0 Sc^2 C_{m_{\dot\alpha}}}{2U_0 I_{yy}}$ |
| $Z_u = -\frac{q_0 S(C_{L_u} + 2C_{L_0})}{mU_0}$ | $M_q = \frac{q_0 Sc^2 C_{m_q}}{2U_0 I_{yy}}$ |
| $Z_\alpha = -\frac{q_0 S(C_{L_\alpha} + C_{D_0})}{m}$ | $M_{\delta_e} = \frac{q_0 ScC_{m_{\delta_e}}}{I_{yy}}$ |
| $Z_{\dot\alpha} = -\frac{q_0 ScC_{L_{\dot\alpha}}}{2mU_0}$ | $M_{\delta_T} = 0$ |
| $Z_q = -\frac{q_0 ScC_{L_q}}{2mU_0}$ | |
| $Z_{\delta_e} = -\frac{q_0 SC_{L_{\delta_e}}}{m}$ | |
| $Z_{\delta_T} = 0$ | |

**DINAMICA LATERO-DIREZIONALE**

| | |
|---|---|
| $Y_\beta = \frac{q_0 SC_{y_\beta}}{m}$ | $L_{\delta_a} = \frac{q_0 SbC_{l_{\delta_a}}}{I_{xx}}$ |
| $Y_p = \frac{q_0 SbC_{y_p}}{2mU_0}$ | $L_{\delta_r} = \frac{q_0 SbC_{l_{\delta_r}}}{I_{xx}}$ |
| $Y_r = \frac{q_0 SbC_{y_r}}{2mU_0}$ | $N_\beta = \frac{q_0 SbC_{n_\beta}}{I_{zz}}$ (*) |
| $Y_{\delta_r} = \frac{q_0 SC_{y_{\delta_r}}}{m}$ | $N_p = \frac{q_0 Sb^2 C_{n_p}}{2U_0 I_{zz}}$ |
| $L_\beta = \frac{q_0 SbC_{l_\beta}}{I_{xx}}$ | $N_r = \frac{q_0 Sb^2 C_{n_r}}{2U_0 I_{zz}}$ |
| $L_p = \frac{q_0 Sb^2 C_{l_p}}{2U_0 I_{xx}}$ | $N_{\delta_a} = \frac{q_0 SbC_{n_{\delta_a}}}{I_{zz}}$ |
| $L_r = \frac{q_0 Sb^2 C_{l_r}}{2U_0 I_{xx}}$ | $N_{\delta_r} = \frac{q_0 SbC_{n_{\delta_r}}}{I_{zz}}$ |

(*) compresi eventuali effetti propulsivi.

**Figura 3:** Derivate Longitudinali e Latero - Direzionali

Le derivate di stabilità negli assi di stabilità verrano calcolate utilizzando le relazioni in 3:

**Tabella 1:** Derivate di Stabilità Longitudinali

| Variabile | Valore | Unità di misura |
|---|---|---|
| $X_u$ | -0.0050 | $[s^{-1}]$ |
| $X_w$ | -0.0251 | $[s^{-1}]$ |
| $X_{\delta_T}$ | 0 | $[s^{-1}]$ |
| $Z_\alpha$ | -541.273 | $[ft/s^2]$ |
| $Z_{\dot\alpha}$ | -0.1484 | $[ft/s]$ |
| $Z_q$ | -1.1346 | $[ft/s]$ |
| $M_u$ | 0.0009347 | $[ft^{-1}s^{-1}]$ |
| $M_\alpha$ | -23.5186 | $[s^{-2}]$ |
| $M_{\dot\alpha}$ | -0.0346 | $[s^{-1}]$ |
| $M_q$ | -0.2769 | $[s^{-1}]$ |
| $Z_{\delta_e}$ | -47.51 | $[ft/s^2]$ |
| $M_{\delta_e}$ | -47.51 | $[s^{-2}]$ |

**Tabella 2:** Derivate di Stabilità Latero - Direzionali

| Variabile | Valore | Unità di misura |
|---|---|---|
| $Y_\beta$ | -133.0376 | $[ft/s^2]$ |
| $Y_p$ | 0 | $[ft/s^2]$ |
| $Y_r$ | 0 | $[ft/s^2]$ |
| $Y_{\delta_r}$ | 9.5027 | $[ft/s^2]$ |
| $L_\beta$ | -8.8668 | $[s^{-2}]$ |
| $L_p$ | -0.7879 | $[s^{-1}]$ |
| $L_r$ | 0.1576 | $[s^{-1}]$ |
| $L_{\delta_a}$ | 5.3201 | $[s^{-2}]$ |
| $L_{\delta_r}$ | 1.0640 | $[s^{-2}]$ |
| $N_\beta$ | 5.7426 | $[s^{-2}]$ |
| $N_p$ | 0 | $[s^{-1}]$ |
| $N_r$ | -0.1843 | $[s^{-1}]$ |
| $N_{\delta_a}$ | -0.0574 | $[s^{-2}]$ |
| $N_{\delta_r}$ | -1.5952 | $[s^{-2}]$ |

# 3 Longitudinale

Per definire le equazioni di Eulero che regolano la dinamica del nostro velivolo partiamo da queste ipotesi:

- **Il velivolo è rigido**
- **Il piano XZ coincide con il piano di simmetria del velivolo**
- **Assenza degli effetti giroscopici**
- **Comandi bloccati**
- **Ipotesi di Piccole Perturbazioni**
- **Ipotesi di *quasi stazionarietà***
- **Trascurate le derivate delle forze e dei momenti simmetrici X Z M rispetto alle variabili asimmetriche $\Delta\delta_a, \Delta\delta_r, v, p, r$ e viceversa**

Queste ipotesi ci permetteranno di disaccoppiare le dinamiche Longitudinali e Latero - Direzionali e di linearizzare le equazioni intorno ad una posizione di equlibrio :

$$\begin{cases} \dot{u} = -g\theta\cos\Theta_0 + X_u u + X_\alpha \alpha + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ \dot{\alpha}\left(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}\right) = -g\theta\sin\Theta_0 + Z_u u + Z_\alpha\alpha + \left(U_0 + Z_q\right)q + Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ \dot{q} = M_u u + M_\alpha\alpha + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + M_q q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ \dot{\theta} = q \end{cases} \tag{5}$$

A partire da questo sistema di equazioni, attraverso una rappresentazione matriciale nello spazio di stato possiamo compattare la notazione e scriverla come:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \tag{6}$$

Dove **A** rappresenta la matrice di stato del sistema e **B** la matrice di controllo e **X** vettore degli stati . Se esplicitiamo l'equazione 6 avrà quest'aspetto:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & Z_\alpha & 0 & -g\ cos\Theta_0 \\ \frac{Z_u}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_\alpha}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{U_0 + Z_q}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & -\frac{g\ sin\Theta_0}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ M_u + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_u}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_u}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & M_q + M_{\dot{\alpha}}\frac{U_0 + Z_q}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & -\frac{M_{\dot{\alpha}}\ g\ sin\Theta_0}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & X_{\delta_t} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_{\delta_t}}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ M_{\delta_e} + \frac{Z_{\delta_e}\ M_{\dot{\alpha}}}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} & M_{\delta_t} + \frac{Z_{\delta_t}\ M_{\dot{\alpha}}}{U_0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_e \\ \Delta\delta_t \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Sostituendo i dati riferiti alle derivate di stabilità del nostro valivolo, all'interno delle matrici otteniamo i valori delle matrici di stato A e di controllo B:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0050 & -43.7123 & 0 & -32.1866 \\ -0.0000 & -0.3107 & 0.9993 & 0 \\ 0.0009 & -23.5077 & -0.3115 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0273 & 0 \\ -11.4568 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A noi interessa valutare la risposta **libera del sistema**:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$$

quindi il termine legato alla **risposta forzata** non lo considereremo, di conseguenza il sistema che andremo ad analizzare terrà conto solo della matrice **A**. Gli autovalori associati alla matrice **A** li possiamo valutare andando a scrivere il polinomio caratteristico del nostro sistema che sarà dato dal:

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{9}$$

Questo determinante svolto ci determinerà la cosidetta quartica di stabilità del nostro sistema:

$$A\ s^4 + B\ s^3 + C\ s^2 + D = 0 \tag{10}$$

le cui radici sono:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = n_{1,2} \pm i\omega_{1,2} = -\zeta_{1,2}\omega_{n_{1,2}} \pm i\omega_{n_{1,2}}\sqrt{1-\zeta_{1,2}^2} \\ \lambda_{3,4} = n_{1,2} \pm i\omega_{3,4} = -\zeta_{3,4}\omega_{n_{3,4}} \pm i\omega_{n_{3,4}}\sqrt{1-\zeta_{3,4}^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Dove indichiamo con $\zeta$ lo smorzamento e $\omega_n$ la frequenza naturale del modo. In generale le due coppie di radici soluzione di questo polinomio descrivono due modi caratteristici della dinamica longitudinale, uno caratterizzato da alto smorzamento e alta frequenza, più lontani dall'asse immaginario e uno caratterizzato da un basso smorzamento e bassa frequenza quindi più vicini dall'asse immaginario, ovvero rispettivamente il **corto periodo** e la **fugoide** che nel nostro caso valgono:

**Tabella 3:** Autovalori di Fugoide e Corto Periodo

| | **Autovalori** $\lambda$ | **Smorzamento** $\zeta$ | **Frequenza naturale** $[s^{-1}]$ |
|---|---|---|---|
| Corto Periodo | $-3.096\times10^{-1}\pm4.8465\times10^{0}i$ | $6.38\times10^{-2}$ | $4.86\times10^{0}$ |
| Fugoide | $-4.00\times10^{-3}\pm2.65\times10^{-2}i$ | $1.49\times10^{-1}$ | $2.68\times10^{-2}$ |

## 3.1 Fugoide

Il modo di fugoide come abbiamo detto in precedenza è il modo oscillatorio caratterizzato da uno smorzamento maggiore e una minore frequenza. Se valutiamo la risposta del sistema ad un $q_0 = 20\ deg$ valutiamo l'andamento della risposta libera:

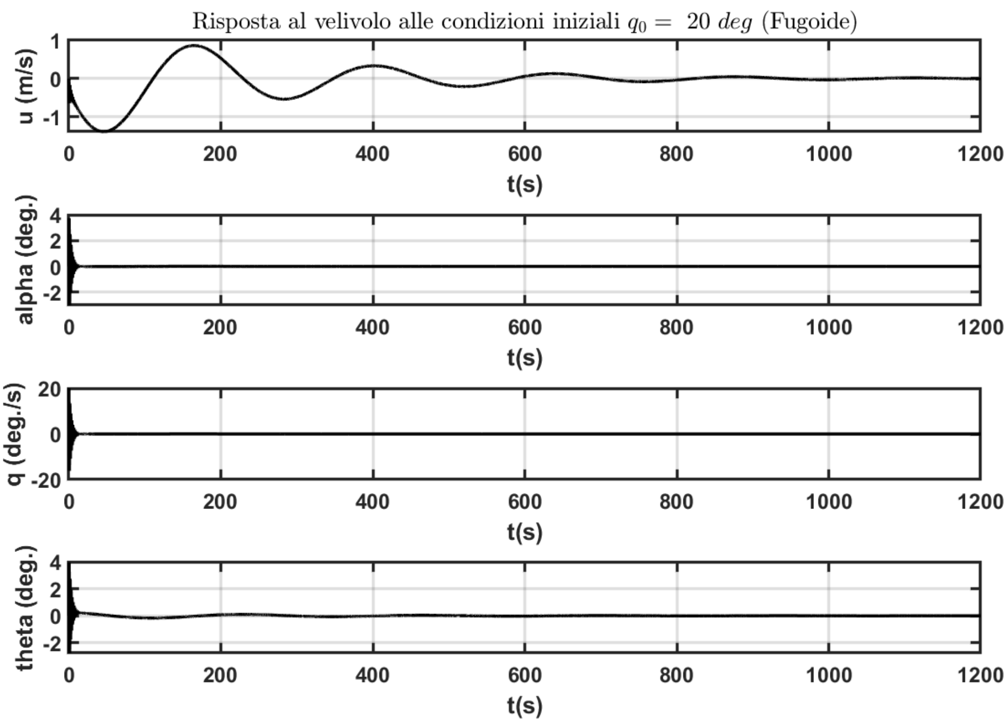


**Figura 4:** Andamento del modo di fugoide ad una $q_0 = 20deg$

Vediamo che le variabili con variazioni significative sono la $u$ e la $\theta$, le variabili q e $\theta$ dopo le oscillazioni iniziali dovute al modo con frequenza più alta di corto periodo, si annullano. Le oscillazioni che impiegano più tempo per estinguersi sono le u che richiedono circa 1000 secondi per azzerarsi. Possiamo valutare il diagramma fasoriale del modo di Fugoide, in cui vediamo l'andamento degli autovettori destri corrispondenti agli autovalori di Fugoide, calcolati andando a sostituire gli autovalori $\lambda_i$ all'interno dell'equazione:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = 0 \tag{12}$$

Prendiamo uno degli autovettori e li rappresentiamo in un diagramma fasoriale chiamato anche **Diagramma di Argand**. Attraverso questi diagrammi fasoriali viene esplicitata maggiormente la dipendenza di questo modo, dalla velocità $u$ e dall'angolo $\theta$.

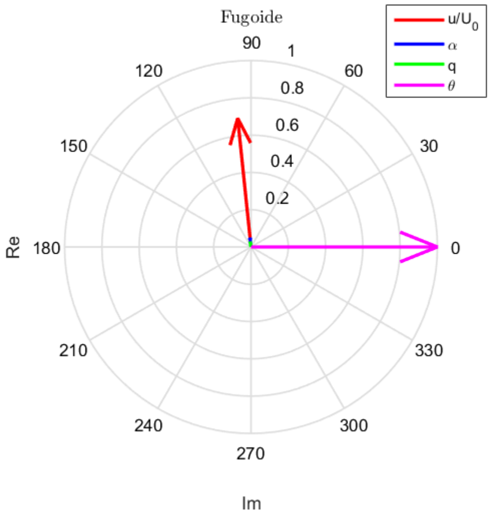


**Figura 5: Diagramma di Argand Fugoide**: Gli angoli $\alpha$ e $\theta$ e la velocità angolare q, sono stati normalizzati rispetto alla variabile $\theta$ mentre la componente u del vettore velocità rispetto a quella iniziale

$$\mathbf{v}_{ph} = \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6937\angle\ 95.9124° \\ 0.0477\angle\ 95.8565° \\ 0.0268\angle\ 98.5882° \\ 1.0000\angle\ 0° \end{Bmatrix} \tag{13}$$

### 3.1.1 Modello Approssimato di Fugoide

Per la valutazione approssimata prendiamo la matrice A completa 7 e trascuriamo le variazioni di $\alpha$ e trascuriamo l'equazione di equilibrio intorno al baricentro e trascuriamo le derivate $Z_\alpha, Z_q << U_0$

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ -\frac{Z_u}{U_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{14}$$

i valori di $\omega_{n_{ph}}$ e $\zeta$, andando a sviluppare il determinante della matrice

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

e trovando le radici del polinomio caratteristico, possiamo individuarli come:

$$\omega_{n_P} = \sqrt{\frac{-gZ_u}{U_0}}; \quad \zeta_{n_P} = \frac{-X_u}{\omega_{n_P}} \tag{15}$$

Che confrontiamo con quelli ottenuti dal modello completo:

**Tabella 4:** Caratteristiche degli autovalori confrontati : Fugoide

| | Modello Completo | Modello Approssimato |
|---|---|---|
| $\zeta$ | $1.49 \times 10^{-1}$ | $1.40 \times 10^{-1}$ |
| $\omega_n$ $[rad\ s^{-1}]$ | $2.68 \times 10^{-2}$ | $1.80 \times 10^{-2}$ |
| Autovalori $\lambda$ | $-4.00 \times 10^{-3} \pm 2.65 \times 10^{-2}i$ | $-2.51 \times 10^{-3} \pm 1.78 \times 10^{-2}i$ |

Notiamo quindi che il modello approssimato si discosta considerevolmente dai valori del modello completo.

### 3.1.2 Luogo delle radici: Fugoide

Andiamo ora ad analizzare il luogo delle radici al variare del margine statico. Per valutarlo, si è aggiornata la derivata $C_{m_\alpha}$ nella matrice 7 longitudinale con un range di valori del margine statico $\bar{N}_0 - \bar{X}_{cg}$ considerando la derivata :

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha}(\bar{X}_{cg} - \bar{N}_0) \tag{16}$$

Dove:

$$\boxed{\bar{N}_0 = \ 0.5686}$$

: Rappresentiamo quindi il luogo delle radici:

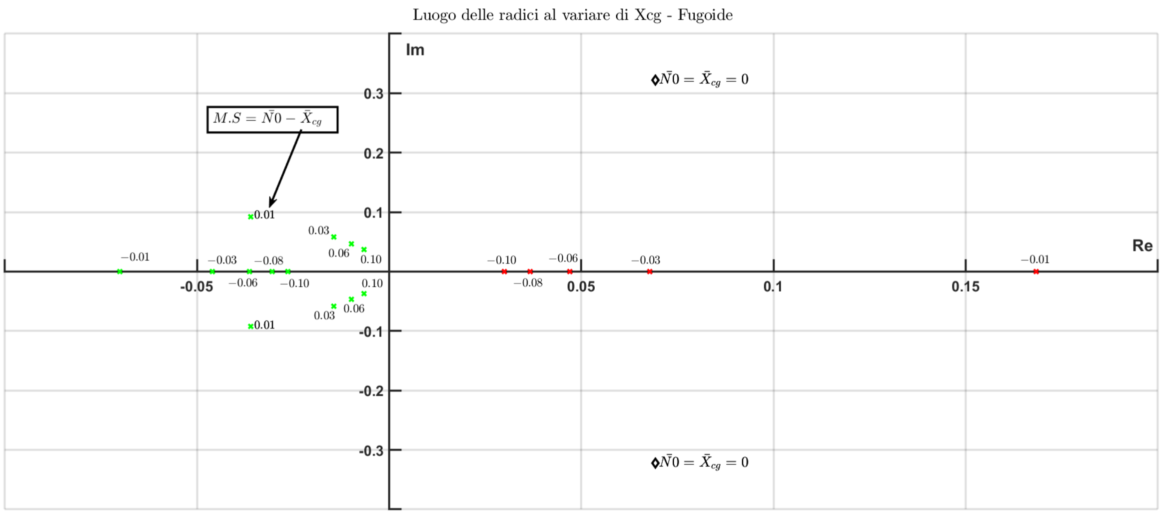


**Figura 6:** Luogo delle Radici del modo di Fugoide al variare del margine statico $-0.10 \leq \bar{N}_0 - \bar{X}_{cg} \leq 0.10$

Notiamo come per valori positivi del margine statico (baricentro davanti al $\bar{N}_0$) gli autovalori sono una coppia di autovalori complessi e coniugati stabili a $Re(\lambda_i) < 0$. Per una posizione del baricentro pari al punto neutro, le radici di fugoide diventano complesse e coniugate instabili a $Re(\lambda_i) > 0$ , mentre arretrando ulteriormente il baricentro per valori del margine statico negativo, le radici si sdoppiano in una coppia di radici aperiodiche, una stabile a $Re(\lambda_i) < 0$ e una instabile a $Re(\lambda_i) > 0$

## 3.2 Corto Periodo

Il modo di Corto Periodo come abbiamo detto in precedenza è il modo oscillatorio caratterizzato da un basso smorzamento e una maggiore frequenza rispetto a quello di Fugoide. Se valutiamo la risposta libera del sistema ad un $q_0 = 20deg$ :

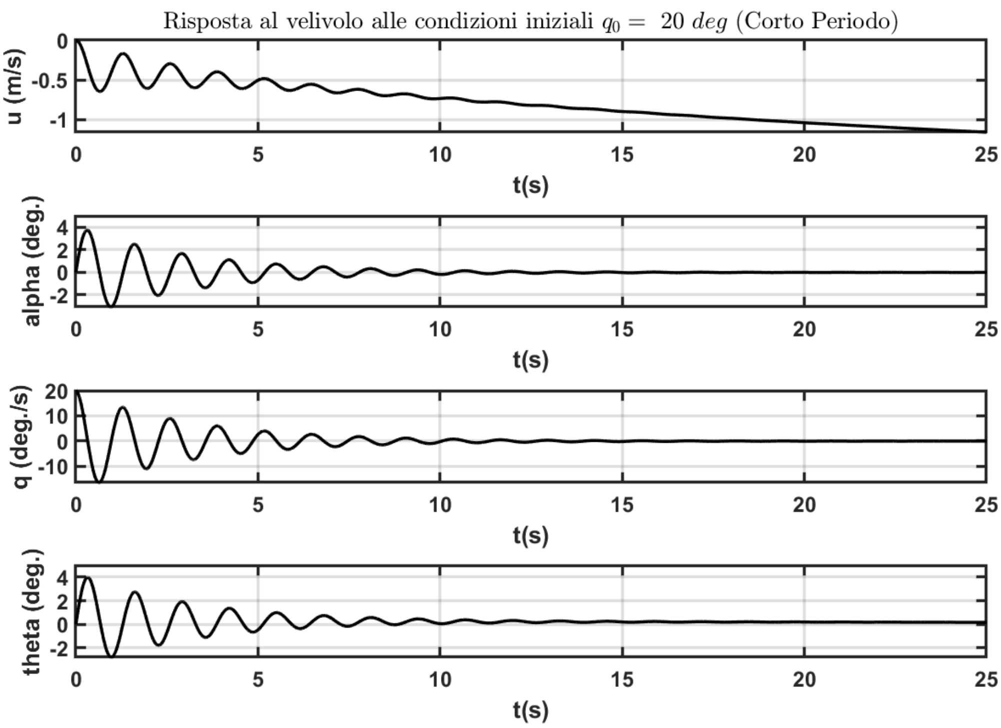


**Figura 7:** Andamento del modo di Corto Periodo ad una $q_0 =$ 20 $deg$

Notiamo che le variazioni più significative le abbiamo per le variabili $\alpha$ e q che si estinguono dopo circa 15 secondi, mentre le altre due variabili continueranno ad oscillare e si azzereranno per tempi caratteristici più lunghi essendo le variabili che caratterizzano principalmente il modo di Fugoide. Nella 7 notiamo che $\theta$ smorza molto velocemente le oscillazioni dei primi secondi, ma non riesce ad azzerarsi. Possiamo valutare a questo punto gli autovettori destri riferiti agli autovalori di Corto Periodo andando a sostituire uno dei due autovalori complessi e coniugati di Corto Periodo all'interno della seguente equazione e risolvere il sistema:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = 0 \tag{17}$$

Il risultato è un autovettore che rappresentiamo in un diagramma fasoriale chiamato anche **Diagramma di Argand**. Attraverso questi diagrammi fasoriali viene esplicitata maggiormente le variabili che subiscono variazioni più significative nel modo di Corto Periodo, ovvero l'angolo d'attacco $\alpha$ e la velocità angolare $q$ e l'angolo di beccheggio $\theta$. $U_0$:

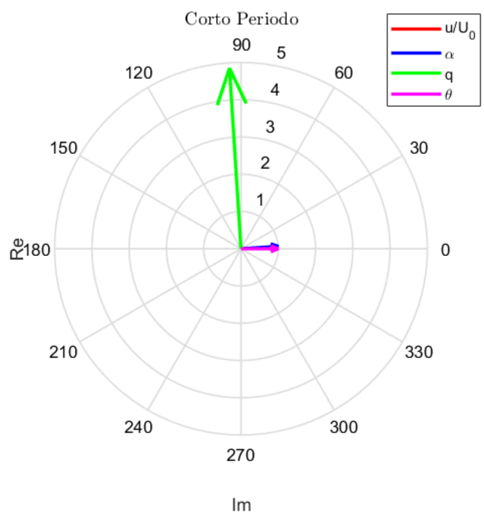


**Figura 8: Diagramma di Argand Corto Periodo**: Gli angoli $\alpha$ e $\theta$ e la velocità angolare q, sono stati normalizzati rispetto alla variabile $\theta$ mentre la componente u del vettore velocità rispetto a quella iniziale

$$\mathbf{v}_{sp} = \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0090\angle\ 88.5176° \\ 1.0013\angle\ 3.6683° \\ 4.8564\angle\ 93.6554° \\ 1.0000\angle\ 0° \end{Bmatrix}; \tag{18}$$

### 3.2.1 Modello Approssimato di Corto Periodo

Per la valutazione approssimata prendiamo la matrice A completa 7 e trascuriamo le variazioni di $u$ consideriamo le condizioni iniziali di volo livellato $\Theta = 0$ e trascuriamo le derivate $Z_{\dot{\alpha}}, Z_q << U_0$ otteniamo quindi il seguente sistema :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_\alpha}{U_0} & 1 \\ M_\alpha + \dfrac{M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha}{U_0} & M_q + M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ q \end{Bmatrix} \tag{19}$$

Si è passati quindi da una matrice di stato 4x4 ad una matrice che dipende da sole 2 variabili di stato. I parametri di $\omega_{n_{ph}}$ e $\zeta$, andando a sviluppare il determinante della matrice

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

e trovando le radici del polinomio caratteristico, possono essere identificati come:

$$\omega_{n_P} = \sqrt{\frac{M_q Z_\alpha}{U_0} - M_\alpha}; \quad \zeta_{n_P} = -\frac{M_q + M_{\dot{\alpha}} + \frac{Z_\alpha}{U_0}}{2\omega_{n_P}} \tag{20}$$

Che confrontiamo con quelli ottenuti dal modello completo:

**Tabella 5:** Caratteristiche degli autovalori confrontati

| | Modello Completo | Modello Approssimato |
|---|---|---|
| $\omega_n$ $[rad\ s^-1]$ | 4.86 | 4.86 |
| $\zeta$ | 6.38e-02 | 6.40e-02 |
| Autovalori $\lambda$ | -3.10e-01 $\pm 4.85e+00i$ | -3.11e-01 + 4.85e+00i |

Possiamo concludere quindi che il modello approssimato ha un buon comportamento nel descrivere le caratteristiche del modo di Corto Periodo, visto che gli autovalori si discostano poco numericamente nei due modelli: bisogna guardare la prima cifra decimale per poter notare delle differenze, stesso discorso per lo smorzamento e la frequenza naturale.

### 3.2.2 Luogo delle radici: Corto Periodo

Andiamo ora ad analizzare il luogo delle radici al variare del margine statico. Per valutarlo, si è aggiornata la derivata $C_{m_\alpha}$ nella matrice 7 longitudinale con un range di valori del margine statico $\bar{N}_0 - \bar{X}_{cg}$ considerando la derivata :

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha}(\bar{X}_{cg} - \bar{N}_0) \tag{21}$$

Dove

$$\boxed{\bar{N}_0 = \ 0.5686}$$

Rappresentiamo quindi il luogo delle radici:

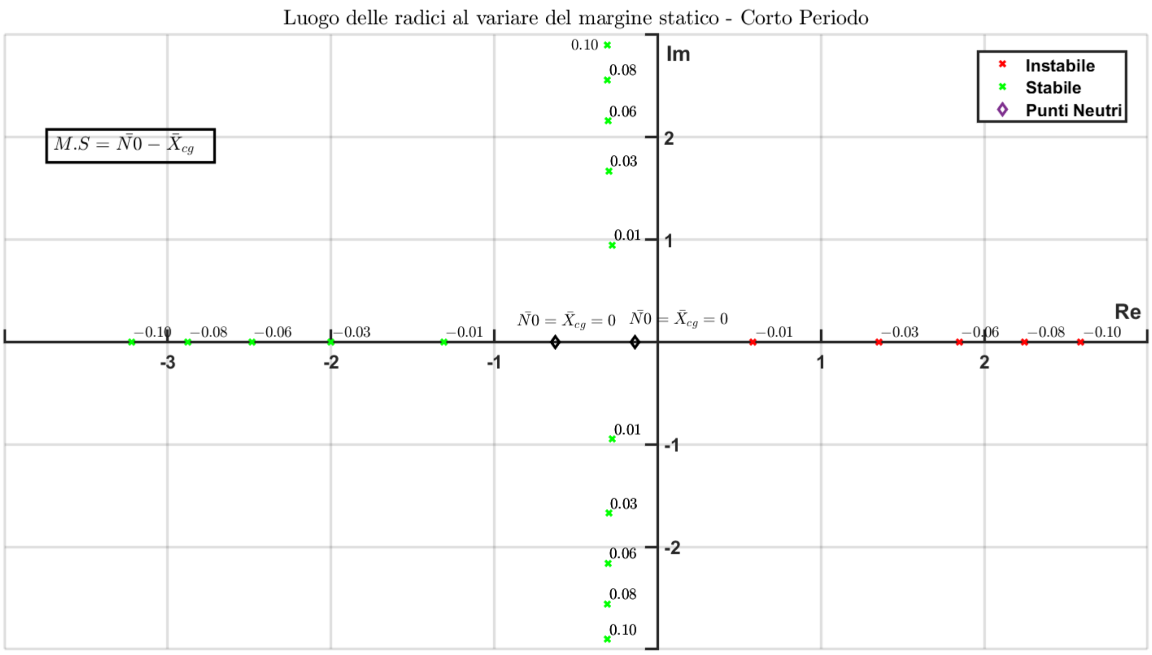


**Figura 9:** Luogo delle Radici del modo di Corto Periodo al variare del margine statico $-0.10 \leq \bar{N}_0 - \bar{X}_{cg} \leq 0.10$

Notiamo come per valori positivi del margine statico (baricentro davanti al $\bar{N}_0$) gli autovalori sono una coppia di autovalori complessi e coniugati stabili a $Re(\lambda_i) < 0$.
In corrispondenza della posizione del baricentro pari al punto neutro posteriore $\bar{N}_0$, le radici di Corto Periodo diventano una coppia di radici aperiodiche stabili, quindi con $Re(\lambda_i) < 0$ , mentre arretrando ulteriormente il baricentro per valori del margine statico negativo, le radici si sdoppiano in una coppia di radici aperiodiche, una stabile a $Re(\lambda_i) < 0$ e una instabile a $Re(\lambda_i) > 0$

## 3.3 Qualità di volo Longitudinali

Per definire le qualità di volo che regolano i modi Longitudinali riportiamo per semplicità la tabella 3.

| | **Autovalori $\lambda$** | **Smorzamento $\zeta$** | **Frequenza naturale $[s^{-1}]$** |
|---|---|---|---|
| Corto Periodo | $-3.096 \times 10^{-1} \pm 4.8465 \times 10^{0}i$ | $6.38 \times 10^{-2}$ | $4.86 \times 10^{0}$ |
| Fugoide | $-4.00 \times 10^{-3} \pm 2.65 \times 10^{-2}i$ | $1.49 \times 10^{-1}$ | $2.68 \times 10^{-2}$ |

Partiamo col definire le qualità di volo del modo di **Fugoide**, confrontandoli con la tabella:

| | **Phugoid mode** | **Short period mode** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Category** | **All** | **A & C** | | **B** | |
| | | $\zeta_{SP_{min}}$ | $\zeta_{SP_{max}}$ | $\zeta_{SP_{min}}$ | $\zeta_{SP_{max}}$ |
| **Level 1** | $\zeta_P \geq 0.04$ | 0.35 | 1.30 | 0.30 | 2.00 |
| **Level 2** | $\zeta_P \geq 0$ | 0.25 | 2.00 | 0.20 | 2.00 |
| **Level 3** | $T_2 \geq 55$ sec. | 0.15 (*) | - | 0.15 (*) | - |

(*) Questo valore può essere ridotto, per quote superiori ai 20000 ft , se accettato dal cliente

**Tabella 6:** Qualità di volo Longitudinali

- Notiamo quindi che la **Fugoide** avendo uno smorzamento pari a $\zeta_P = 0.149$ rientra nelle qualità di volo di **Livello 1**.
- Mentre il **Corto Periodo**, considerando la categoria **B** a cui appartiene la fase di volo **Cruise**, vediamo che rientra nel **Livello 3** avendo una $\zeta_{SP} = 0.0638$

La qualità di volo inoltre va valutata anche per quanto riguarda la frequenza naturale $\omega_{nSP}$ andando a valutare il seguente rapporto che rappresenta il rapporto tra la variazione, a regime, del fattore di carico normale e la corrispondente variazione dell'angolo di attacco, a seguito di una deflessione dell'equilibratore del tipo a gradino:

$$\frac{n(\infty)}{\alpha(\infty)} \approx -\frac{Z_\alpha}{g} = 16.82 \tag{22}$$

Entrando con questo valore sull'asse x, e con la $\omega_{nSP}$ sull'asse y all'interno del grafico che segue, potremo valutare il livello di qualità di volo del nostro velivolo che risulterà di **Livello 1** :

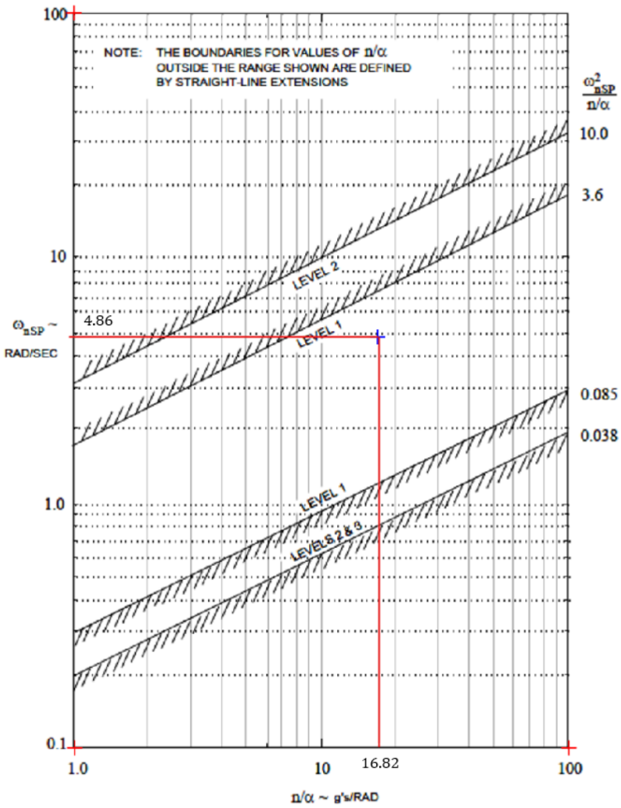


**Figura 10:** Qualità di volo $\omega_{n_{SP}}$

# 4 Latero Direzionale

Per definire le equazioni di Eulero che regolano la dinamica Latero - Direzionale del nostro velivolo, partiamo dalle stesse ipotesi fatte nello studio della dinamica Longitudinale. Ora andremo ad utilizzare delle variabili trasformate, al fine di snellire la notazione e il calcolo, queste variabili sono le seguenti:

$$L_i^{'} = \frac{L_i + \dfrac{I_{xz}}{I_{xx}} N_i}{1 + \dfrac{I_{xz}^2}{I_{xx} i_{zz}}}; \quad N_i^{'} = \frac{N_i + \dfrac{I_{xz}}{I_{xx}} L_i}{1 + \dfrac{I_{xz}^2}{I_{xx} I_{zz}}} \tag{23}$$

Quindi le equazioni che regolano il problema Latero - Direzionale diventano:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \dfrac{Y_\beta}{U_o}\beta + \dfrac{Y_p}{U_0}p + \left(\dfrac{Y_r}{U_0} - 1\right) r + \dfrac{1}{U_0} g\varphi \cos\Theta_0 + \dfrac{Y_{\delta_r}}{U_0}\Delta\delta_r \\ \dot{p} = L'_\beta\beta + L'_p p + L'_r r + L'_{\delta_a}\Delta\delta_a + L'_{\delta_r}\Delta\delta_r \\ \dot{r} = N'_\beta\beta + N'_p p + N'_r r + N'_{\delta_a}\Delta\delta_a + N'_{\delta_r}\Delta\delta_r \\ \dot{\varphi} = p + r\tan\Theta_0 \end{cases} \tag{24}$$

Che compattate con una notazione matriciale nello spazio stato 6 assumeranno questa forma:

$$
\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{U_0} & \frac{Y_p}{U_0} & \left(\frac{Y_r}{U_0} - 1\right) & \frac{-g\ cos\Theta_0}{U_0} \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan\Theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Y_{\delta_r}}{U_0} \\ L'_{\delta_a} & L'_{\delta_r} \\ N'_{\delta_a} & N'_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_a \\ \Delta\delta_r \end{Bmatrix} \tag{25}
$$

Al solito individuiamo la matrice **A** di stato e **B** di controllo insieme al vettore di stato **X** che avrà questa volta le variabili asimmetriche che governano la dinamica Latero - Direzionale ovvero:

- $\beta$ Angolo di derapata [deg]
- $p$ Velocità angolare di rollio [$deg\ s^{-1}$]
- $r$ Velocità angolare di imbardata [$deg\ s^{-1}$]
- $\phi$ Angolo di rollio [$deg$]

Sostituendo i valori delle derivate di Stabilità della tabella 2 ricaviamo quindi le due matrici A e B:

$$
\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -0.0764 & 0 & -1.0000 & 0.0185 \\ -9.9302 & -0.7923 & 0.1910 & 0 \\ 6.0563 & 0.0250 & -0.1903 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0055 \\ 5.3599 & 1.3516 \\ -0.2267 & -1.6379 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}
$$

Ai fini del calcolo della risposta libera a noi interessa solo la matrice A. Individuando il determinante dell'equazione

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

ricaviamo quindi la quartica di stabilità vista già nell'equazione 10 e quindi, avremo quattro radici:

- una coppia complessa e coniugata che determina il modo di **Dutch Roll**
- un polo aperiodico più veloce caratterizzato quindi da una frequenza naturale più elevata che determina il modo di **Rollio**
- un polo aperiodico ad una frequenza più bassa (più vicino all'asse immaginario) che determina il modo di **Spirale**.

**Tabella 7:** Autovalori Latero - Direzionale

| | **Autovalori** $\lambda$ | **Smorzamento** $\zeta$ | **Frequenza naturale** $[s^{-1}]$ |
|---|---|---|---|
| Rollio | $-0.78$ | 1.00 | 0.78 |
| Spirale | $-0.00278$ | 1.00 | 0.0287 |
| Dutch Roll | $-0.138 \pm 2.46i$ | 0.0561 | 2.46 |

A seguire la tabella con le caratteristiche principali di questi modi, di cui andremo ad analizzare le caratteristiche principali e la risposta di ognuno.

## 4.1 Rollio

Valutiamo quindi la risposta del modo di Rollio ad una variazione delle condizioni iniziali pari a $p_0 = 20\ deg$:

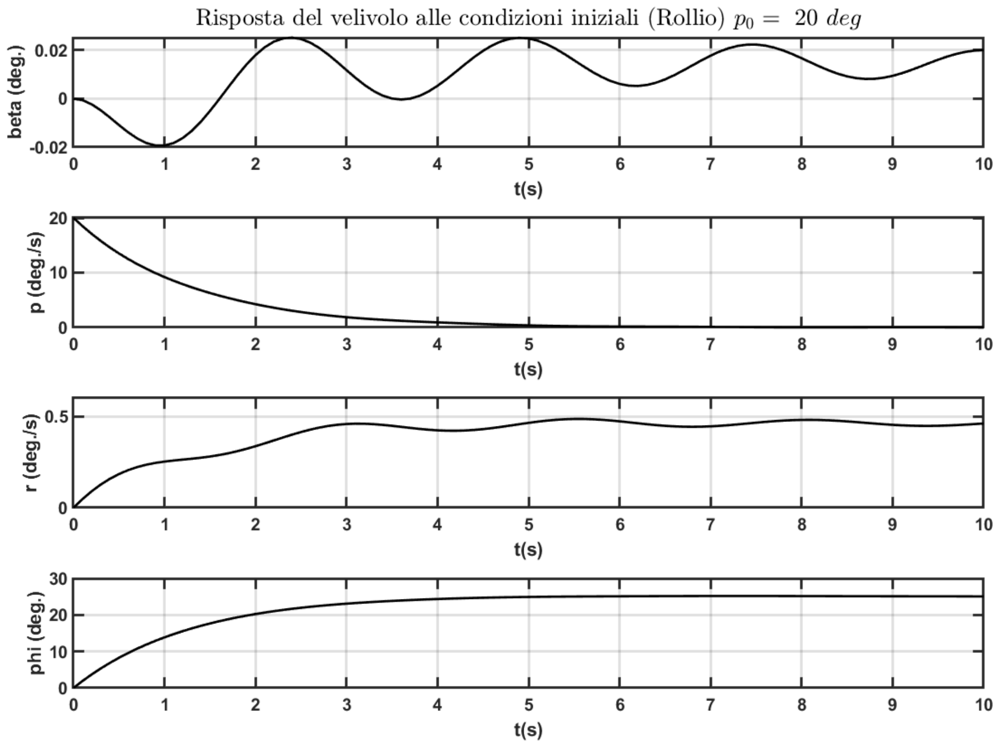


**Figura 11:** Risposta modo di Rollio a $p_0 = 20\ deg$

Quindi notiamo come le variazioni più significative sono riferite all'angolo $\phi$ e la velocità angolare $p$. Le oscillazioni di $p$ si estinguono dopo circa 5 secondi, infatti il tempo caratteristico della radice di Rollio è:

$$\boxed{T_{roll} = \frac{1}{Re(\lambda_{roll})} = 1.28\ [s]} \tag{27}$$

Come fatto in precedenza possiamo calcolare l'autovettore destro riferito al modo di Rollio che sarà pari a:

$$\mathbf{v}_{roll} = \begin{Bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0013\angle\ 0^\circ \\ -0.7801\angle\ 0^\circ \\ 0.0194\angle\ 0^\circ \\ 1.0000\angle\ 0^\circ \end{Bmatrix} \tag{28}$$

### 4.1.1 Modello approssimato del modo di Rollio

Il moto di Rollio può essere approssimato con un modello ad un grado di libertà, $\phi$. Il modello lo possiamo ottenere considerando la seguente equazione differenziale ottenuta tenendo conto delle forze aerodinamiche e inerziali:

$$I_{xx}\ddot{\phi} = \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \Delta\delta_a \tag{29}$$

Ricordando che $p = \dot{\phi}$ possiamo risolvere il problema attraverso la trasformata di Laplace:

$$p(s) = \frac{L_{\delta_a}}{(s - L_p)} \Delta\delta_a(s); \quad \phi(s) = \frac{L_{\delta_a}}{s(s - L_p)} \Delta\delta_a(s); \tag{30}$$

Valutiamo la risposta ad un segnale in ingresso agli alettoni di tipo gradino $\Delta\delta_a(s) = \frac{\Delta\delta_a}{s}$ per la p(s) e la $\phi(s)$

$$p(t) = -\frac{L_{\delta_a\Delta\delta_a}}{L_p} \left(1 - e^{-\dfrac{t}{T_R}}\right); \ \phi(t) = -\frac{L_{\delta_a\Delta\delta_a}}{L_p} t - \frac{L_{\delta_a\Delta\delta_a}}{{L_p}^2} \left(1 - e^{-\dfrac{t}{T_R}}\right); \tag{31}$$

Si è definita la costante di tempo

$$\boxed{T_R = -\frac{1}{L_p} = \frac{1}{\lambda_R} = 1.269\ [s]}$$

Se confrontiamo il modello approssimato con il modello completo abbiamo:

**Tabella 8:** Confronto modello completo e modello approssimato di Rollio

| | **Autovalori $\lambda$** | Costante di tempo $\tau$ $[s]$ |
|---|---|---|
| Rollio - Modello Completo | $-0.78$ | 1.282 |
| Rollio - Approssimato | $-0.79$ | 1.269 |

Estinto il termine transitorio, la risposta a regime dell'evoluzione della velocità di rollio p(t) nel tempo la possiamo valutare come il seguente limite:

$$p_{ss} = \lim_{t \to +\infty} p(t) = -\frac{L_{\delta_a\Delta\delta_a}}{L_p} \tag{32}$$

Di seguito vediamo l'andamento della risposta a gradino e la confrontiamo con il valore della risposta ad un gradino unitario sulla deflessione dell'alettone del sistema completo che tiene conto della matrice 25, così da valutare la bontà del modello approssimato:

Valutiamo i valori nella tabella Notiamo quindi che il modello a 1 g.d.l stima una velocità

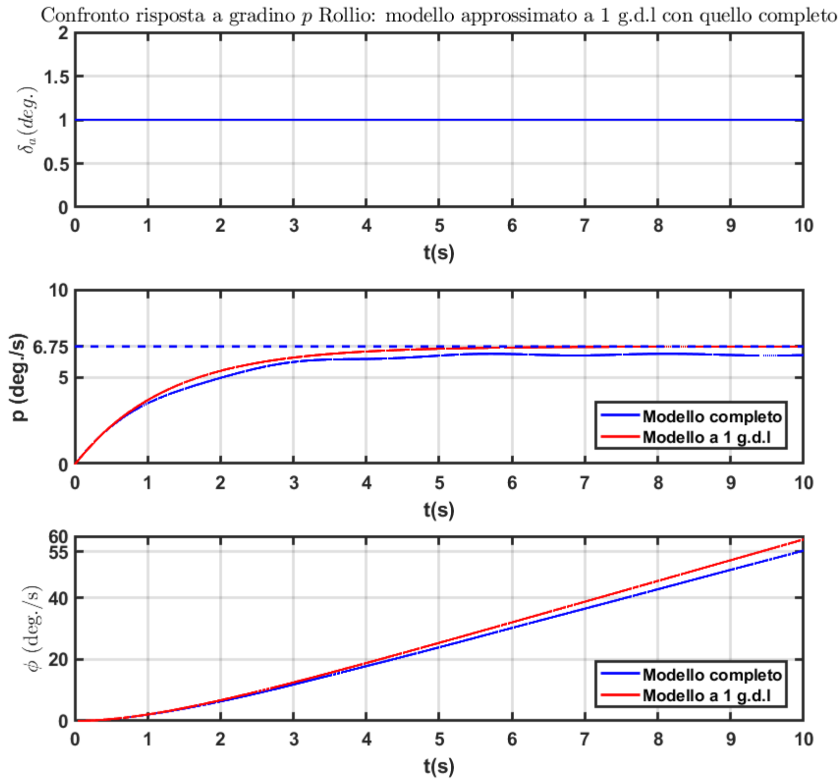


**Figura 12:** Risposta al gradino unitario $\Delta\delta(t) = 1(t)\ deg$ della $p(t)$ confronto tra modello completo e modello a 1 g.d.l, notiamo una risposta stazionaria pari a $p_{ss} =\ 6.75\ [rad\ s^{-1}]$ per il modello a 1 g.d.l

**Tabella 9:** Confronto modello completo e modello approssimato di Rollio

| | **p** $[deg\ s^{-1}]$ | $\phi$ $[deg]$ | **Tempo** [s] |
|---|---|---|---|
| Modello 1 g.d.l | 6.75 | 1.282 | 10 |
| Modello Completo | 6.33 | 1.269 | 10 |

di rollio maggiore rispetto a quello completo con tutti i gradi di libertà, stesso discorso vale per la $\phi(t)$.

## 4.2 Modo di Spirale

Ora andiamo a valutare l'andamento del modo di spirale ad una variazione iniziale della $\phi_0 = 20\,\mathrm{deg}$

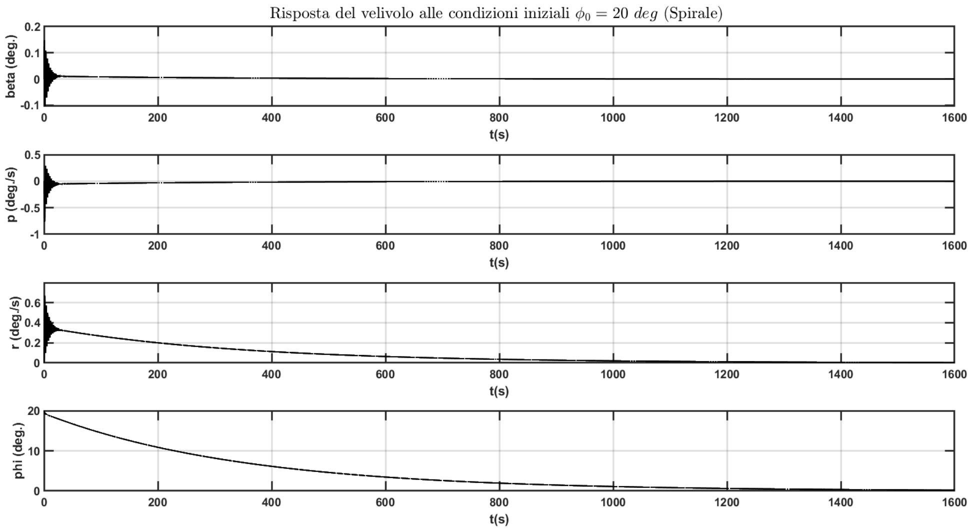


**Figura 13:** Risposta iniziale modo di Spirale ad una variazione di $\phi_0 = 20\ deg$

Notiamo come le variazioni più significative le abbiamo per le variabilli $\phi$ e $r$, che dopo delle oscillazioni iniziali poco smorzate dovute al modo di Dutch Roll, abbiamo che la $\beta$ e la $p$ si azzerano immediatamente, mentre $r$ e $\phi$ impiegano circa 1600 secondi per annullarsi, infatti il tempo caratteristico della radice di Spirale è:

$$\boxed{T_s = \frac{1}{Re(\lambda_s)} = 1610\ [s]}$$

Come fatto in precedenza possiamo calcolare l'autovettore destro riferito al modo di spirale che sarà pari a:

$$\mathbf{v}_S = \begin{Bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0006\angle\ 0° \\ 0.0029\angle\ 180° \\ 0.0184\angle\ 0° \\ 1.0000\angle\ 0° \end{Bmatrix} \tag{33}$$

### 4.2.1 Modello approssimato del modo di Spirale

Il modo approssimato di Spirale consideriamo un volo livellato iniziale $\Theta_0 = 0$ trascuriamo la $\phi$ rispetto a $\beta$ e $r$ otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = L'\beta + L_r'r \\ r' = N_\beta' + N_r'r \end{cases} \tag{34}$$

Da cui si ricava l'equazione differenziale:

$$\dot{r} = \left( \frac{N_\beta' L_r'}{L_r'} + N_r' \right) \tag{35}$$

Risolvendo l'equazione differenziale con la trasformata di Laplace e ipotizzando che $N_i' \approx N_i;\ L_i' \approx L_i$, ipotesi valida dal momento che:

$$\begin{cases} I_{xz} << I_{xx} \\ I_{xz} << I_{zz} \end{cases} \tag{36}$$

otteniamo l'autovalore del modo di Spirale:

$$\boxed{\lambda_s = -\frac{1}{T_s} = \frac{L_\beta N_r - N_\beta L_r}{L_\beta} = -0.082} \tag{37}$$

che confrontiamo con l'autovalore di Spirale del modello completo:

**Tabella 10:** Confronto modello completo e modello approssimato di Spirale

| | **Autovalori** $\lambda$ |
|---|---|
| Spirale - Modello Completo | $-0.00278$ |
| Spirale - Approssimato | $-0.082$ |

Notiamo quindi che dal punto di vista numerico questo modello non risulta accurato. La sua utilità risiede soprattutto nella relazione dell'autovalore approssimata 37 che ci sottolinea l'importanza del rapporto tra la stabilità direzionale $N_\beta$ e laterale $L_\beta$ ai fini della stabilità del modo: infatti condizione necessaria per avere l'autovalore di Spirale negativo è che:

$$L_\beta N_r - N_\beta L_r > 0$$

Quindi un'alta stabilità laterale $L_\beta$ favorirà la stabilità del polo di Spirale al contrario un'eccessiva stablità direzionale $N_\beta$ la sfavorirà.

## 4.3 Dutch Roll

Ora andiamo a valutare l'andamento del modo di spirale ad una variazione iniziale della $\beta_0 = 10\ deg$

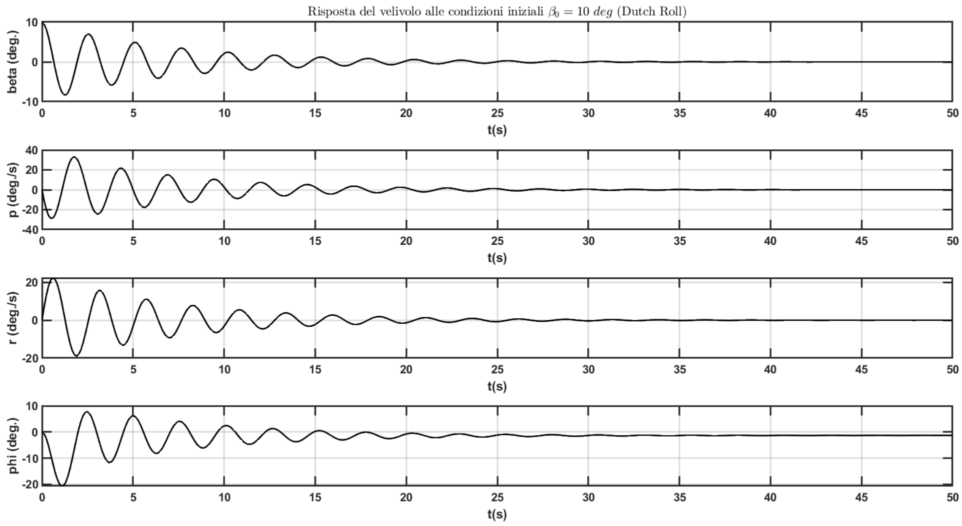


**Figura 14:** Risposta iniziale modo di Dutch Roll ad una variazione di $\beta_0 = 10\ deg$

Tutte la variabili subiscono delle variazioni considerevoli. Il tempo caratteristico della radice di Dutch Roll è:

$$\boxed{T_s = \frac{1}{Re(\lambda_s)} = 7.25\ [s]}$$

Come fatto in precedenza possiamo calcolare l'autovettore destro riferito al modo di Dutch Roll che sarà pari a:

$$\mathbf{v}_{DR} = \begin{Bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6308\angle\ 14.3973° \\ 2.4615\angle\ -93.2143° \\ 1.5467\angle\ 102.2934° \\ 1.0000\angle\ 0° \end{Bmatrix} \tag{38}$$

Che rappresentato sul **Diagramma di Argand**:

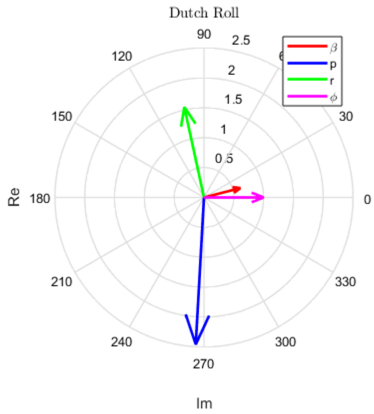


**Figura 15:** Diagramma di Argand: Dutch Roll

### 4.3.1 Modello approssimato del modo di Dutch Roll

Trascuriamo l'equazione di equilibrio dei momenti di rollio, quindi rimuoviamo la variabile $\phi$, otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{U_0} & \left(\dfrac{Y_r}{U_0} - 1\right) \\ N'_\beta & N'_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} \tag{39}$$

Il quale risolto ci fornirà le caratteristiche del modo di Dutch Roll:

$$\omega_{n_{DR}} = \frac{\sqrt{Y_\beta N_r - N_\beta Y_r + U_0 N_\beta}}{U_0}; \quad \zeta_{DR} = -\frac{1}{2\omega_{n_{DR}}} \frac{Y_\beta + U_0 N_r}{U_0} \tag{40}$$

Che confrontato con il modello completo, notiamo che il modello approssimato risulta numericamente accurato:

**Tabella 11:** Confronto modello approssimato Dutch Roll

| | **Autovalori $\lambda$** | **Smorzamento** $\zeta$ | **Frequenza naturale** $[s^{-1}]$ |
|---|---|---|---|
| Dutch Roll - Approssimato | $-0.13 \pm 2.40i$ | 0.0543 | 2.40 |
| Dutch Roll | $-0.138 \pm 2.46i$ | 0.0561 | 2.46 |

## 4.4 Qualità di Volo Latero - Direzionale

Per le qualità di volo Latero - Direzionali riportiamo per semplicità la tabella 7:

| | **Autovalori $\lambda$** | **Smorzamento $\zeta$** | **Frequenza naturale $[s^{-1}]$** |
|---|---|---|---|
| Rollio | $-0.78$ | 1.00 | 0.78 |
| Spirale | $-0.00278$ | 1.00 | 0.0287 |
| Dutch Roll | $-0.138 \pm 2.46i$ | 0.0561 | 2.46 |

Partiamo dagli autovalori di **Rollio**. Per poterne valutare le qualità di volo partiamo dal valore della costante di tempo di rollio che abbiamo ricavato nella 27 che riportiamo:

$$\boxed{T_{roll} = \ 1.28 \ [s]}$$

| **Roll mode - maximum roll time constant (seconds)** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Class** | **Category** | **Level 1** | **Level 2** | **Level 3** |
| **I, IV** | **A** | 1.0 | 1.4 | 10 |
| **II, III** | | 1.4 | 3.0 | |
| **All** | **B** | 1.4 | 3.0 | |
| **I, II-C, IV** | **C** | 1.0 | 1.4 | |
| **II-L, III** | | 1.4 | 3.0 | |

**Tabella 12:** Qualità di volo Longitudinali

Essendo il nostro aereo un caccia intercettore, fa parte della **Classe IV** e la condizione di volo in cui ci troviamo, **Cruise High** ci posiziona nella **Categoria B**. Se confrontiamo quindi il valore della costante di tempo $\tau$ con quella nella tabella seguente notiamo che il velivolo rientra nella categoria di **Livello 1**.

A questo potremmo aggiungere anche dei requisiti addizionali sul modo di Rollio legato al tempo minimo richiesto per compiere una rotazione $\phi$ col fondo corsa degli alettoni pari a $\delta_{a_{max}} = 20\ deg$, in particolare per la classe e la categoria del nostro velivolo abbiamo che il requisito è evidenziato nella tabella seguente:

| Roll performance requirements – time to roll through (seconds) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Class | Level | Speed (*) | Category A (GA) 30° | 50° | 90° | Category B 90° | Category C 30° |
| IV | 1 | VL | 1.1 | | | 2.0 | 1.1 |
| | | L | 1.1 | | | 1.7 | |
| | | M | | | 1.3 | | |
| | | H | | 1.1 | | | |
| | 2 | VL | 1.6 | | | 2.8 | 1.3 |
| | | L | 1.5 | | | 2.5 | |
| | | M | | | 1.7 | | |
| | | H | | 1.3 | | | |
| | 3 | VL | 2.6 | | | 3.7 | 2.0 |
| | | L | 2.0 | | | 3.4 | |
| | | M | | | 2.6 | | |
| | | H | | 2.6 | | | |

**Tabella 13:** Qualità di volo **Rollio**: requisito addizionale sulla velocità di Rollio

Notiamo quindi che per avere una qualità di volo di **Livello 1** per la nostra categoria e classe è richiesto un tempo di $t < 1.7\ s$ per una risposta a gradino con fondo corsa degli alettoni. Quindi valutiamo tale risposta per il nostro velivolo con il seguente grafico e notiamo che rientra nel **Livello 1**:

$$\boxed{\phi = 90\ deg\ ;\ t = 1.61\ s}$$

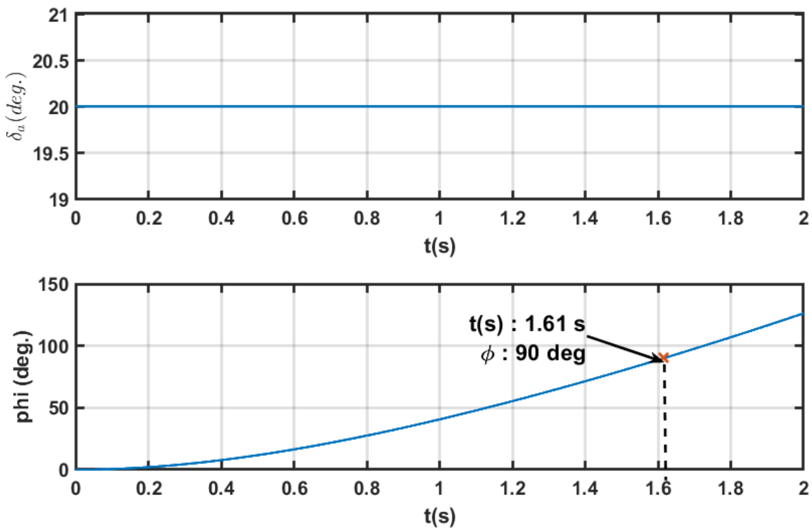


**Figura 16:** Qualità di volo **Rollio**: risposta ad una deflessione massima degli alettoni di $\delta_a = 20\ [deg]$

Per quanto riguarda il modo di Dutch Roll dobbiamo valutare tre parametri che sono:

$$\boxed{\zeta_{DR} = 0.0561;\ \omega_{n_{DR}} = 2.46\ [rad\ s^{-1}];\ \zeta_{DR}\ \omega_{n_{DR}} =\ 0.1380\ [rad\ s^{-1}]}$$

che confrontati con quelli presenti nella seguente tabella ci individuano una qualità di volo di **Livello 2**

| Dutch Roll mode - Minimum damping requirements | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Level** | **Category** | **Class** | **Min $\zeta_{DR}$ (*)** | **Min $\zeta_{DR}\omega_{n_{DR}}$ (*) [rad/s]** | **Min $\omega_{n_{DR}}$ [rad/s]** |
| **1** | **A (CO & GA)** | **IV** | 0.4 | - | 1.0 |
| | **A (other)** | **I, IV** | 0.19 | 0.35 | 1.0 |
| | | **II, III** | 0.19 | 0.35 | 0.4 (**) |
| | **B** | **All** | 0.08 | 0.15 | 0.4 (**) |
| | **C** | **I, II-C, IV** | 0.08 | 0.15 | 1.0 |
| | | **II-L, III** | 0.08 | 0.10 | 0.4 (**) |
| **2** | **All** | **All** | 0.02 | 0.05 | 0.4 (**) |
| **3** | **All** | **All** | 0 | - | 0.4 (**) |

**Tabella 14:** Qualità di volo **Dutch Roll**

Per quanto riguarda il modo di **Spirale**, essendo stabile, non è necessario valutarne le qualità di volo rientrando automaticamente nel **Livello 1**.

# 5 Rollio Rapido

La manovra di rollio rapido è una manovra caratterizzata da forte variazioni di velocità angolare di rollio $p$ in cui gli effetti degli accoppiamenti inerziali cominciano a diventare rilevanti. Lo studio del rollio rapido verrà condotto andando a considerare delle opportune ipotesi semplificative così da rendere le equazioni lineari e a coefficienti costanti. Tali ipotesi sono:

- **Ipotesi di piccole perturbazioni** ad eccezione della velocità angolare di rollio $p$
- **Azionamento istantaneo degli alettoni** La cui deflessione rimarrà costante per tutta la manovra, questa ipotesi porta con sè un ulteriore semplificazione che ci permette di porre: $\dot{p} = 0$ e $p = p_{ss}$
- **Costanza della velocità del velivolo** visto che la manovra avviene molto rapidamente $\dot{u} = 0$
- **Eliminazione delle equazioni ausiliari nelle variabili $\theta$ e $\phi$** avendo trascurato le componenti gravitazionali nelle equazioni di equlibrio alla traslazione
- **Condizioni iniziali** sono quelle di una manovra simmetrica stabilizzata, pertanto:

$$\dot{\beta}_0 = \dot{\alpha}_0 = \dot{P}_0 = \dot{Q}_0 = \dot{R}_0 = \beta_0 = P_0 = R_0 = \Phi_0 = 0$$

  a cui aggiungiamo anche $Q_0 = 0$ per semplicità.

Abbiamo considerato il termine del prodotto d'inerzia $I_{xz} = 0$, questo significa assumere che la terna di assi stabilità è assimilabile a quella degli assi di inerzia, questa ipotesi semplificativa risulta accettabile in quanto $I_{xz}$ risulta molto minore di $I_{xx}$, $I_{yy}$ e $I_{zz}$. Queste ipotesi, considerando la $Z_q, Z_{\dot{\alpha}} << U_0$ permette di ricavare la seguente matrice di stato:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_\alpha}{U_0} & 1 & -p_{ss} & 0 \\ M_\alpha + \dfrac{M_{\dot{\alpha}}}{Z_\alpha}U_0 & M_q + M_{\dot{\alpha}} & -M_{\dot{\alpha}} - p_{ss} & \dfrac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}p_{ss} \\ \hdashline p_{ss} & 0 & \dfrac{Y_\beta}{U_0} & \dfrac{Y_r}{U_0} - 1 \\ 0 & \dfrac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}p_{ss} & N_\beta & N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{41}$$

La matrice di stato che abbiamo ottenuto può essere vista come la composizione di 4 sottomatrici in cui la matrice $A_{11}$ e $A_{22}$ rappresentano rispettivamente le matrici, nella trattazione approssimata, relativamente al moto di **corto periodo** e di **Dutch Roll**. Per una data deflessione degli alettoni possiamo valutare la stabilità del sistema valutando **il luogo delle radici** al variare della $p_{ss}$. Però prima di procedere allo studio del luogo delle radici usando la matrice completa, procediamo ad analizzare l'effetto delle coppie giroscopiche con una matrice semplificata, ottenendo quindi quello che prende il nome di Diagramma di Philips.

## 5.1 Diagramma di Philips

Per valutare l'effetto delle coppie aerodinamiche dovute alla stabilità statica longitudinale e direzionale, a partire dalla matrice 41 , consideriamo nulle le derivate aerodinamiche al di fuori di $M_\alpha$ e $N_\beta$, ottenendo quindi la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -p_{ss} & 0 \\ M_\alpha & 0 & 0 & \dfrac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}p_{ss} \\ p_{ss} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dfrac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}p_{ss} & N_\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Applicando il criterio di Routh a questa matrice, il risultato che otteniamo è che per la stabilità asintotica del mio sistema, devo garantire la seguente disuguaglianza:

$$\left[M_\alpha - \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}{p_{ss}}^2\right]\left[N_\beta - \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}{p_{ss}}^2\right] > 0 \tag{43}$$

Questa condizione ci permette di definire delle regioni in cui possiamo andare ad individuare delle regioni di stabilità e instabilità:

$$\begin{matrix} -\dfrac{M_\alpha}{p_{ss}^2} < \dfrac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} & -\dfrac{M_\alpha}{p_{ss}^2} > \dfrac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \\ \dfrac{N_\beta}{p_{ss}^2} < \dfrac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}} & \dfrac{N_\beta}{p_{ss}^2} > \dfrac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}} \end{matrix} \tag{44}$$

Inoltre da queste condizioni, possiamo individuare delle rette asintotiche che ci permettono di visualizzare meglio le regioni di stabilità e instabilità all'imbardata e al beccheggio, queste rette hanno equazione:

$$-\frac{M_\alpha}{p_{ss}^2} = \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}; \quad \frac{N_\beta}{p_{ss}^2} = \frac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}} \tag{45}$$

Mentre il velivolo è rappresentato da una retta passante per il centro avente come coefficiente angolare:

$$\boxed{k = -\frac{M_\alpha}{N_\beta} = 4.095} \tag{46}$$

Considerando una serie di valori di $p_{ss}$ ottenuti a partire da una certa deflessione dell'alettone $\delta_a$ mediante la seguente relazione:

$$p_{ss} = -\frac{L_{\delta_a}}{L_p}\Delta\delta_a \tag{47}$$

possiamo ottenere il Diagramma di Philips:

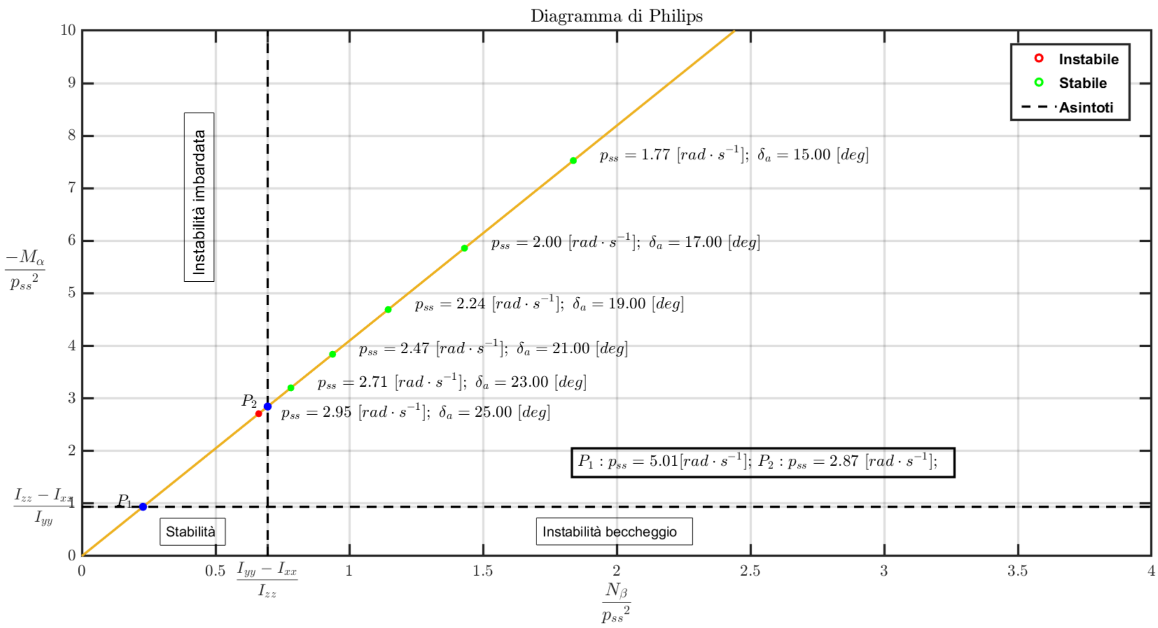


**Figura 17:** Diagramma di Philips

Il diagramma di Philips mi individua quindi due punti di intersezione con le rette definite in precedenza, che chiameremo $P_1$ e $P_2$ definite da queste relazioni:

$$P_1 = \sqrt{N_\beta \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}}; \quad P_2 = \sqrt{-M_\alpha \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}} \tag{48}$$

Che mi vanno a definire un possibile intervallo di $p_{ss}$ in cui possiamo avere, nel nostro caso, una divergenza all'imbardata o al beccheggio (nel nostro caso, la regione di intersezione della retta con i due asintoti cade nella regione dello spazio che determina un'instabilità all'imbardata). L'intervallo di $p_{ss}$ delimitato dai due punti $P_1$ e $P_2$ di nostro interesse va da:

$$\boxed{2.87 < p_{ss}\ [rad\ s^{-1}] < 5.01}$$

I valori all'interno di questo intervallo vanno confrontati con il valore massimo che abbiamo in corrispondenza di una deflessione degli alettoni di

$$\boxed{\delta_{a_{max}} = 20\ deg}$$

che analizzando il Diagramma di Philips, notiamo come tale deflessione degli alettoni corrisponde ad un valore di $p_{ss}$ compreso tra:

$$\boxed{2.24 < p_{ss}\ [rad\ s^{-1}] < 2.47}$$

quindi possiamo concludere che in corrispondenza di questa deflessione massima degli alettoni, il corrispondente valore di $p_{ss}$ è ampiamente fuori dall'intervallo critico di Philips.

## 5.2 Studio sul modello completo

Non possiamo fermarci ad analizzare questo intervallo di possibile instabilità, ma tale intervallo va confrontato con uno studio sul modello completo 41. Questo perchè si può dimostrare che i termini che abbiamo approssimato con la matrice 42, possono condurre ad un aumento (o ad una riduzione) del campo di stabilità reale, ovvero dell'intervallo di $p_{ss}$ per cui è garantita la stabilità degli autovalori .
Dalla relazione 47 che ci fornisce il valore della Velocità angolare di rollio a regime per una deflessione a gradino degli alettoni, possiamo far variare la $p_{ss}$ in funzione della deflessione degli alettoni $\Delta\delta_a$, dopodichè possiamo sostituire la $p_{ss}$ nella matrice completa 41 così da valutare l'andamento del luogo delle radici di **Dutch Roll** e **Corto Periodo** al variare della $p_{ss}$ ottenendo quindi:

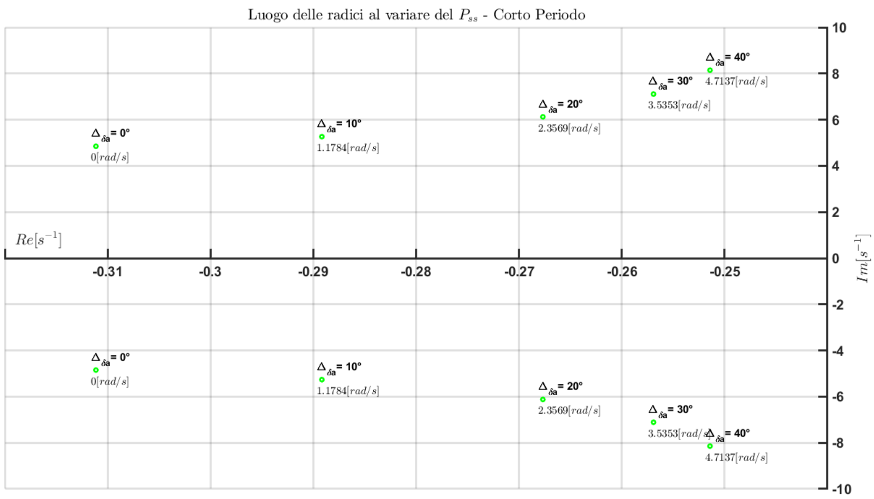


**Figura 18:** Luogo delle radici di Corto Periodo considerando il modello completo al variare della $p_{ss}$: non sono presenti radici instabili

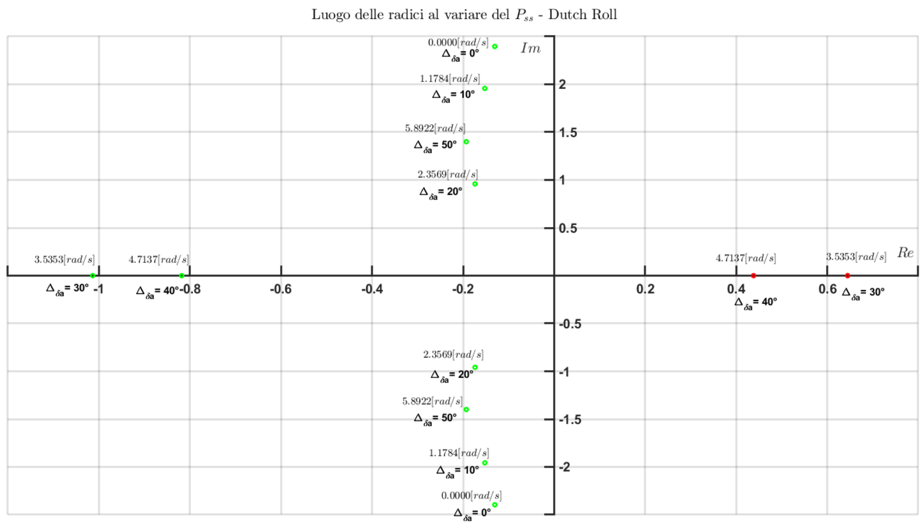


**Figura 19:** Luogo delle radici considerando il modello completo al variare della $p_{ss}$: in rosso le radici instabili (aperiodiche) in verde le radici stabili

Notiamo quindi che il modo di Corto Periodo non presenta radici instabili a differenza di quello di Dutch Roll per la quale notiamo che tra i 20 $deg \leq \Delta\delta_a \leq 30$ $deg$ c'è un valore di $p_{ss}$ in cui si ha il passaggio nel semipiano destro dei poli di Dutch Roll. Per valutare meglio il valore di $p_{ss}$ per la quale abbiamo delle instabilità, possiamo rappresentare gli stessi risultati attraverso un grafico 3d in cui la terza dimensione è rappresenta proprio dal valore di $p_{ss}$: Notiamo quindi che le radici sono complesse e coniugate con $Re(\lambda_i) < 0$, poi convergono

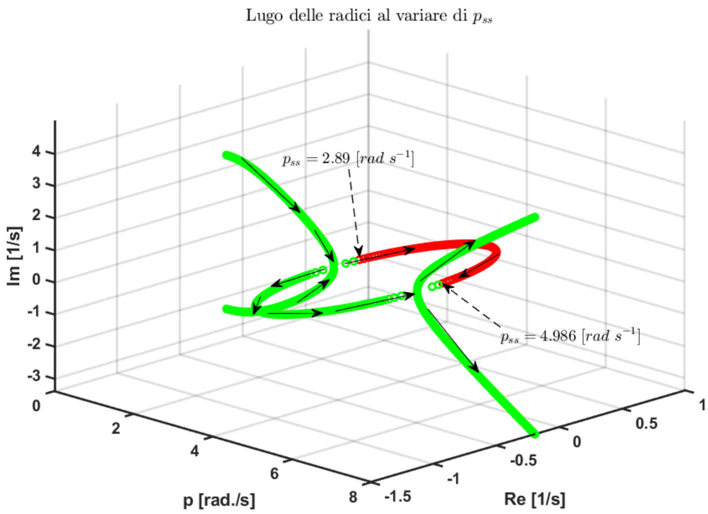


**Figura 20:** Luogo delle radici considerando il modello completo al variare della $p_{ss}$: in rosso le radici instabili (aperiodiche) in verde le radici stabili

sull'asse reale e diventano una coppia di radici aperiodiche. Dopodichè una radice continua a rimanere nel semipiano negativo stabile, l'altra invece va nel semipiano instabile, per poi ricongiungersi nuovamente ritornando ad essere una coppia di radici complesse e coniugate.

Vediamo che analizzando questo diagramma, l'intervallo di valori per cui abbiamo un'instabilità è il seguente:

$$\boxed{2.89 < p_{ss}\ [rad\ s^{-1}] < 4.98}$$

se confrontiamo tale intervallo critico con quello che abbiamo ottenuto con il modello approssimato:

| | $p_{ss_{min}}$ $[rad\ s^{-1}]$ | $\Delta\delta_{a_{min}}$ [deg] | $p_{ss_{max}}$ $[rad\ s^{-1}]$ | $\Delta\delta_{a_{max}}$ [deg] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Completo | 2.89 | 24.52 | 4.98 | 42.26 |
| Modello Approssimato | 2.87 | 24.354 | 5.01 | 42.51 |

**Tabella 15:** Confronto modello completo e modello approssimato della $p_{ss}$

Quindi l'intervallo di valori instabili di $p_{ss}$ valutato con il Diagramma di Philips risulta, seppur di poco, più piccolo rispetto a quello completo.

# 6 Risposte alla turbolenza atmosferica

Per trattare le perturbazioni atmosferiche all'interno delle equazioni del moto Longitudinali consideriamo le componenti

$$u_g, v_g, w_g$$

della velocità del vento, con le ipotesi semplificative viste per la trattazione del modello Longitudinale in più facciamo le seguenti ipotesi:

**Tabella 16:** Ipotesi semplificative

- ipotesi di assetto livellato $\Theta_0 = 0$
- $u_g = 0$
- ingressi del sistema $\alpha_g$ e $q_g$ trascurando quindi gli ingressi la deflessione dell'equilibratore $\Delta\delta_e$ e la manetta $\Delta T$
- $U_0 >> Z_\alpha;\ Z_{\dot{\alpha}}$

Ricaviamo il seguente sistema nello spazio di stato:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{U_0} & \frac{Z_\alpha}{U_0} & 1 & 0 \\ M_u + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_u}{U_0} & M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha}{U_0} & M_q + M_{\dot{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} X_\alpha & 0 \\ \frac{Z_\alpha}{U_0} & 0 \\ M_\alpha & M_q - M_{\dot{\alpha}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_g \\ q_g \end{Bmatrix} \tag{49}$$

Dove:

$$\alpha_g = -\frac{w_g}{U_0}; \quad q_g = -\frac{\partial w_g}{\partial t}\frac{1}{U_0} \tag{50}$$

Gli autovalori Longitudinali rimangono identici a quelli valutati in precedenza essendo A uguale alla 7. A questo punto andremo ad analizzare quindi la risposta forzata del sistema considerando una raffica istantanea (gradino) e una raffica del tipo $(1 - cos)$, quest'ultima confrontando la risposta con un modello a 1 g.d.l e 2 g.d.l .

## 6.1 Raffica istantanea

Per lo studio della raffica istantanea prendiamo la matrice 49 e prendiamo solo l'equazione di traslazione lungo Z considerando quindi un modello a 1 g.d.l con solo $\alpha$ e cancellando $q$ e $u$ e $\dot{\theta}$:

$$Tg\ \dot{w} + w = w_g \tag{51}$$

Nell'equazione 51 abbiamo trasformato esplicitato $w$ ricordando che:

$$\alpha = \frac{w}{U_0}$$

e abbiamo definito $T_g$ costante di tempo come:

$$\boxed{T_g = \frac{2(W/S)}{\rho g U_0 C_{L_\alpha}} = 3.2183 \ [s]}$$

A questo punto possiamo definire la risposta ad un ingresso di tipo raffica istantanea, ovvero una raffica che definiamo come:

$$w_g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_g & t > 0 \end{cases} \tag{52}$$

andando a risolvere il sistema 51 con Laplace abbiamo questa risposta nel tempo della $w(t)$:

$$w(t) = A_g \left( 1 - e^{-\dfrac{t}{T_g}} \right) \tag{53}$$

Avendo definito $A_g = -35 \ [ft \ s^{-1}]$ velocità della raffica ascendente. A noi interessa la derivata $\dot{w(t)}$ che sarà uguale a:

$$\dot{w(t)} = \frac{A_g}{T_g} e^{-\dfrac{t}{T_g}} \tag{54}$$

Che ci servirà per il calcolo del fattore di carico:

$$n(t) = 1 - \frac{\dot{w}(t) \ U_0}{g} \tag{55}$$

Possiamo quindi valutare il fattore di carico massimo che si ha al tempo $t = 0$ come:

$$\dot{w(0)} = \frac{A_g}{T_g} \Longrightarrow \boxed{n_{max} = 1 - \frac{A_g \ U_0}{T_g \ g} = 1.3379} \tag{56}$$

Possiamo valutare l'andamento temporale di $n(t)$ come:

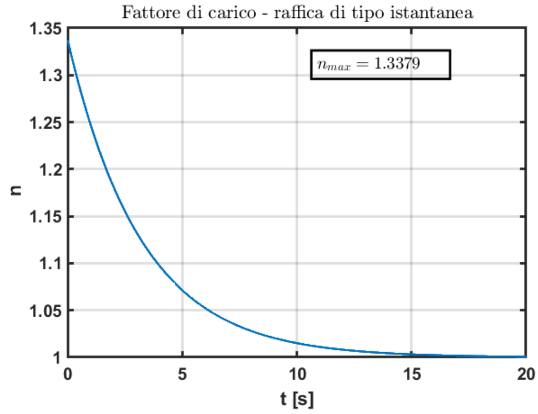


**Figura 21:** Andamento fattore di carico - n Raffica istantanea

## 6.2 Raffica di tipo $(1 - cos)$ ad un grado di libertà

Un modello più accurato di raffica rispetto a quello di tipo istantaneo può essere la raffica di tipo $''1 - cos''$ la cui legge temporale è scrivibile come:

$$w_g(t) = \begin{cases} \frac{Ag}{2}\left(1 - cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{57}$$

In cui $T$ è il tempo necessario ad attraversare la raffica, definito come:

$$T = \frac{L}{U_0}$$

dove $L = 25\bar{c} = 400$ $[m]$ e considerando una raffica ascendente $A_g = 35[ft\ s^{-1}]$. A questo punto è possibile calcolare la risposta del sistema 51 alla 57 che sarà:

$$w(t) = \frac{A_g}{2}\left\{(1 - \cos\omega t) - \frac{1}{1 + (\omega T_g)^{-2}}\left(e^{-t/T_g} + \frac{1}{\omega T_g}\sin\omega t - \cos\omega t\right)\right\} \tag{58}$$

Dove abbiamo definito $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La 58 derivata e sostituita nella relazione del fattore di carico 55 ci darà:

$$n = 1 - \frac{\dot{w}(t)}{g} = 1 - \frac{A_g}{2g}\left[\omega\sin\omega t + \frac{1}{1 + (\omega T_g)^{-2}}\left(\frac{1}{T_g}e^{-t/T_g} - \frac{1}{T_g}\cos\omega t - \omega\sin\omega t\right)\right] \tag{59}$$

che rappresentiamo di seguito:

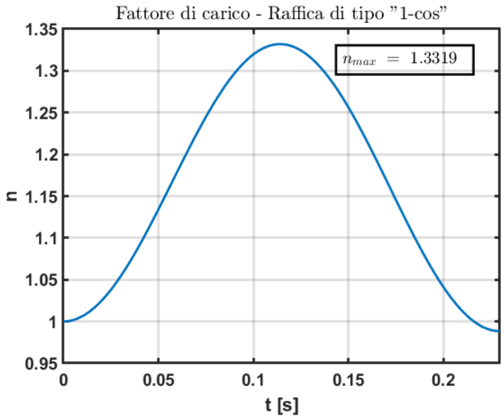


**Figura 22:** Andamento fattore di carico - n Raffica $(1 - cos)$ a 1 g.d.l in cui esplicitiamo il valore massimo del fattore di carico $n_{max} = 1.3319$

## 6.3 Raffica di tipo $(1 - cos)$ con due gradi di libertà

Per per una migliore valutazione dei risultati ottenuti con il modello ad un grado di libertà prendiamo la matrice completa scritta all'inizio di questa sezione 49 e estrapoliamo la sottomatrice che fa capo ai gradi di libertà $\alpha$ e $\theta$, ovvero la traslazione lungo Z e la rotazione intorno a Y ottenendo questo nuovo sistema ridotto:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_\alpha}{U_0} & 1 \\ M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha}{U_0} & M_q + M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Z_\alpha}{U_0} & 0 \\ M_\alpha & M_q - M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_g \\ q_g \end{Bmatrix} \tag{60}$$

Nel caso bidimensionale, sostituiremo la relazione per il fattore di carico utilizzata nel caso monodimensionale con l'equazione 55 con la relazione che tiene conto anche del grado di libertà rotazionale:

$$n = 1 - \frac{\dot{\gamma} U_0}{g} = 1 + \frac{U_0(\dot{\theta} - \dot{\alpha})}{g} \tag{61}$$

Valutiamo quindi l'andamento del fattore di carico $n(t)$ e lo confrontiamo con il modello ad 1 g.d.l notando che i due modelli hanno un fattore di carico massimo numericamente molto vicino:

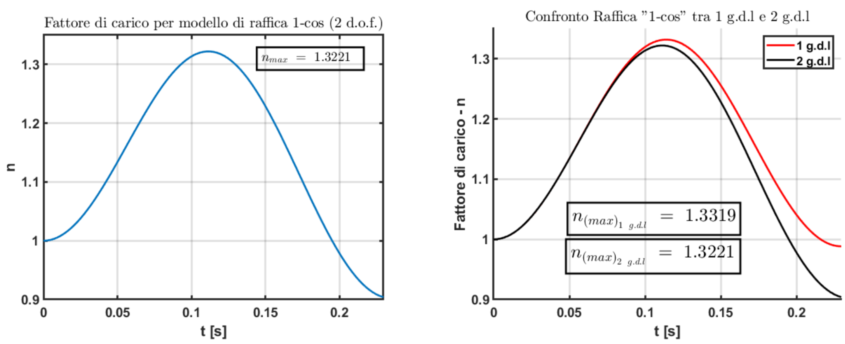


**Figura 23:** Andamento fattore di carico - n Raffica $(1 - cos)$ a 1 g.d.l e 2g.d.l

**Tabella 17:** Tabella fattore di carico massimo confronto tra modelli

| $(1-cos)$ | **Fattore di carico massimo - n** |
|---|---|
| 1 g.d.l | 1.3319 |
| 2 g.d.l | 1.3221 |

## 6.4 Wind shear

Con **Wind Shear** chiamiamo l'effetto di variazione della velocità del vento in intensità e direzione che avviene in un intervallo di tempo molto breve.Questo fenomeno è dovuto al movimento relativo di masse d'aria in presenza di un fronte temporalesco o dallo strato limite del suolo il cui profilo di velocità è determinato dall'orografia del terreno. Noi tratteremo Wind Shear verticali con variazioni della sola componente orizzontale $u_g$ del vento e positivi, ovvero aumenta l'incremento della velocità all'aumentare della quota. Se poniamo quindi:

$$u_g = \frac{du_g}{dh}h = -\frac{du}{dh}h \tag{62}$$

Possiamo scrivere le equazioni del Longitudinale tenendo presente quindi che la velocità sarà data da

$$u = u - ug = u + \frac{du}{dh}h$$

con le stesse ipotesi che abbiamo usato in precedenza nella tabella 16 con un'aggiunta: tenuto conto del fatto che c'è bisogno di inserire un ulteriore equazione, visto che $u_g$ è una funzione della quota, utilizzeremo l'equazione della traiettoria:

$$\dot{h} = -\frac{dz'}{dt} = U_0(\theta - \alpha) \tag{63}$$

Quindi il sistema nella sua forma matriciale $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ nello spazio di stato avrà quest'aspetto:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & 0 & -g & X_u\frac{du}{dh} \\ \frac{Z_u}{U_0} & \frac{Z_\alpha}{U_0} & 1 & 0 & \frac{Z_u}{U_0}\frac{du}{dh} \\ M_u + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_u}{U_0} & M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\alpha}{U_0} & M_{\dot{\alpha}} + M_q & 0 & \left(M_u + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_u}{U_0}\right)\frac{du}{dh} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -U_0 & 0 & U_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \\ h \end{Bmatrix} \tag{64}$$

Gli autovalori che risentono di più dell'effetto del Wind shear sono gli autovalori di **Fugoide**: considerando un range in cui far variare il gradiente $\frac{du}{dh}$, tracciamo quindi un luogo delle radici dei poli di Fugoide:

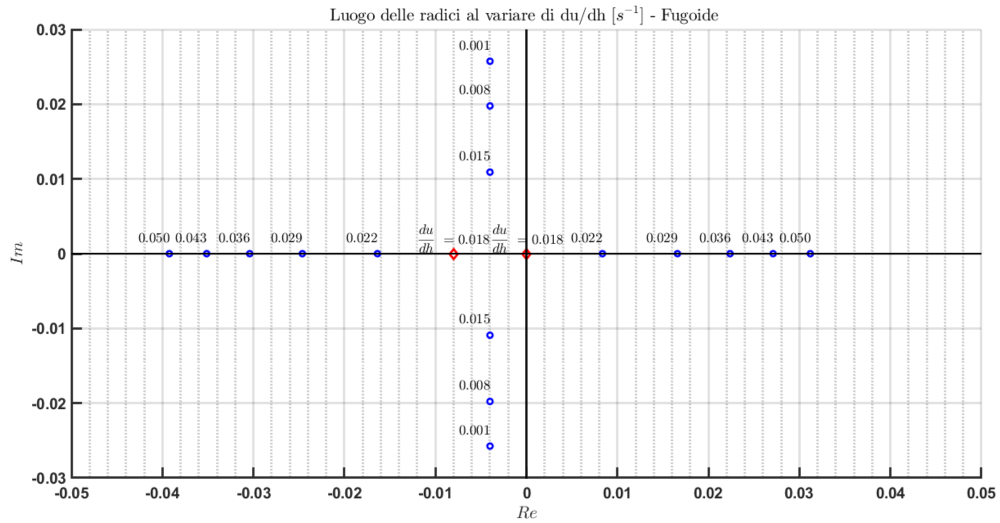


**Figura 24:** Luogo della radici al variare del gradiente $\dfrac{du}{dh}$

Abbiamo scelto un intervallo in cui far variare il gradiente pari a:

$$\frac{du}{dh} \leq 0.05$$

che corrisponde ad un Wind shear debole. Notiamo quindi che c'è un valore critico del gradiente, che nel nostro caso è pari a:

$$\boxed{\frac{du}{dh} = 0.018\ [s^{-1}]} \tag{65}$$

in corrispondenza della quale le mie radici si sdoppiano sull'asse reale e diventano una coppia di radici aperiodiche di cui una è posta nell'origine. Quindi superato questo valore del gradiente, ovvero superato un valore $\frac{du}{dh} > 0.018$ le mie radici di Fugoide diventano una coppia di radici aperiodiche di cui una che va nel semipiano destro positivo, quindi instabile, con tutte le conseguenze che porta con sè in termini di difficoltà a manovrare il velivolo da parte del pilota nelle fasi di volo in cui può risultare più marcato l'effetto del Wind shear, come nella fase di salita e discesa. Se confrontiamo il valore del $\frac{du}{dh}$ ottenuto nella 65 con quello che otteniamo considerando il modello approssimato di Fugoide, notiamo quindi dei valori di frequenza naturale e smorzamento che sono:

$$\omega_{n_p} = \sqrt{\frac{-gZ_u}{U_0}\left(1 - \frac{U_0}{g}\frac{du}{dh}\right)}; \quad \zeta_p = \frac{-X_u}{2\omega_{n_p}} \tag{66}$$

Da qui notiamo un valore critico per il quale si ha l'annullamento della frequenza naturale pari a

$$\frac{U_0}{g}\frac{du}{dh} = 1 \tag{67}$$

Tale risultato mi permette di ricavare quindi un valore critico del $\frac{du}{dh}$ che risulta essere identico al 65 ricavato con il modello completo:

$$\boxed{\frac{du}{dh} = 0.018\ [s^{-1}]} \tag{68}$$