INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

PARTE 4

Buscas em Árvores Mínimas

- Kruskal
- Djikstra
- Prim

Prof. Me. Celso Gallão - 2015

1

Algoritmo de Kruskal

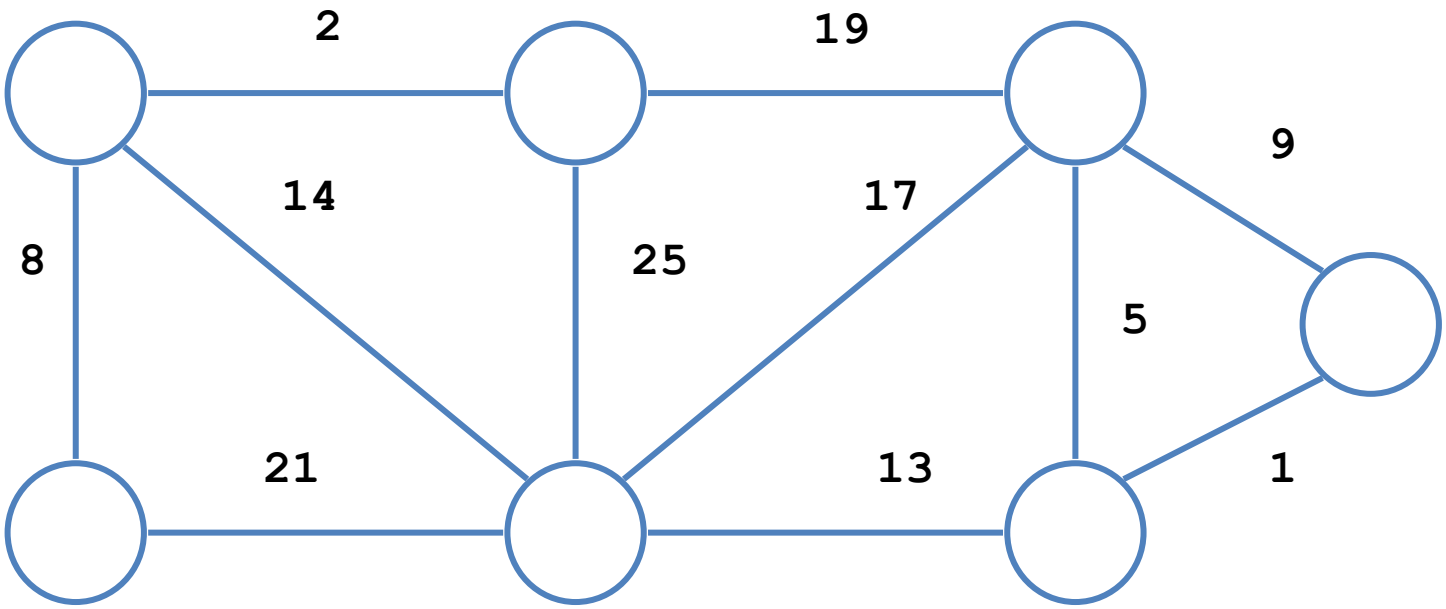
1 – Algoritmo de Kruskal

Características:

- É um algoritmo de busca, guloso, que se baseia no algoritmo de árvore espalhada de peso mínimo.
- Encontra uma aresta segura para adicionar à floresta crescente encontrando, de todas as arestas que conectam duas árvores quaisquer, uma aresta de peso mínimo.
- Encontra um subconjunto das arestas que forma uma árvore com todos os vértices, onde o peso total, dado pela soma dos pesos das arestas da árvore, é minimizado.

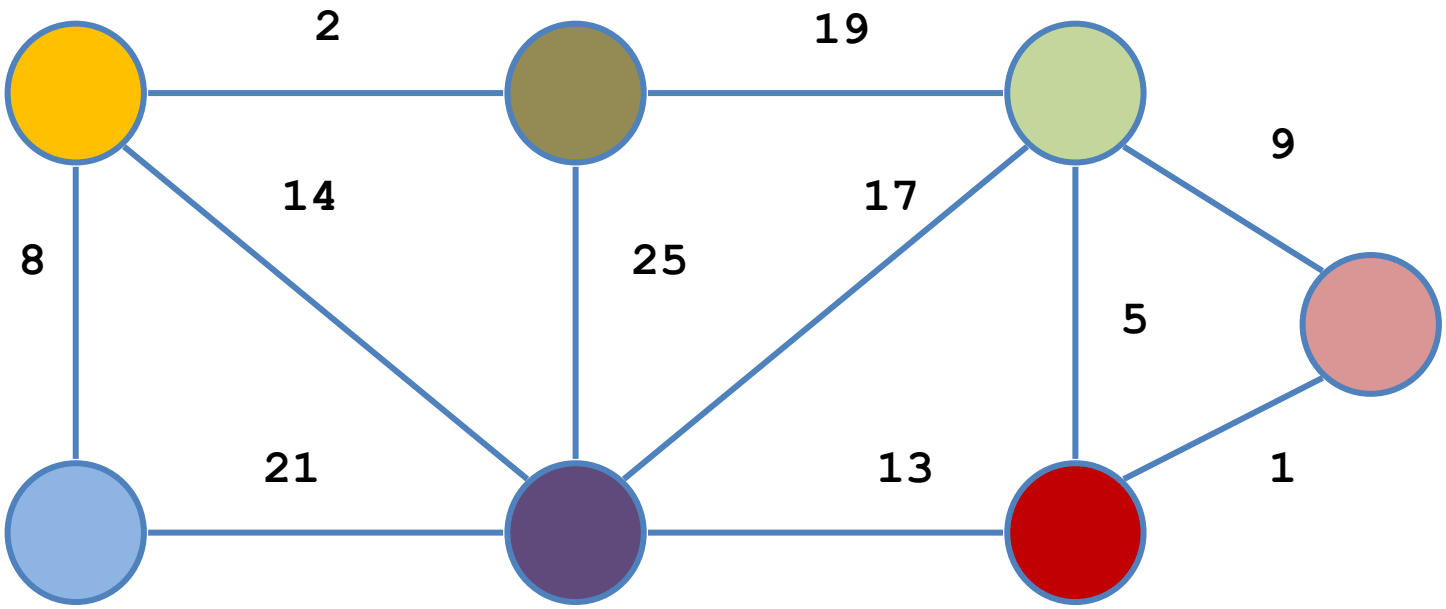
1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



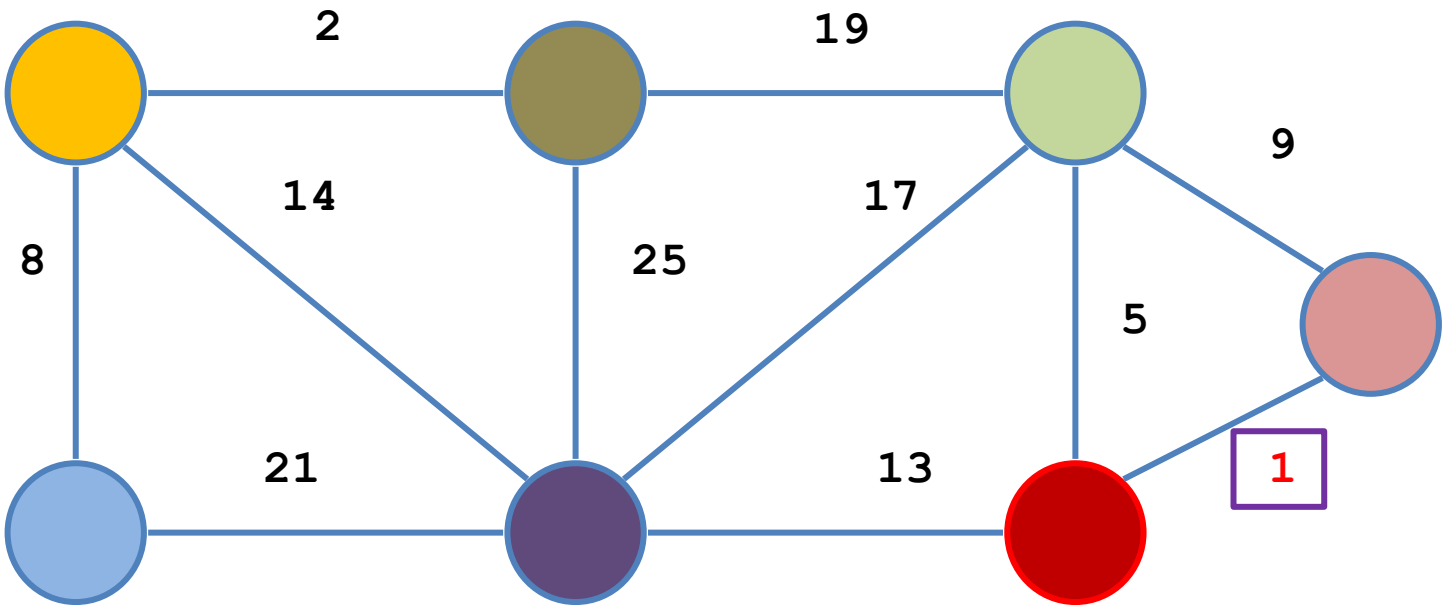
1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



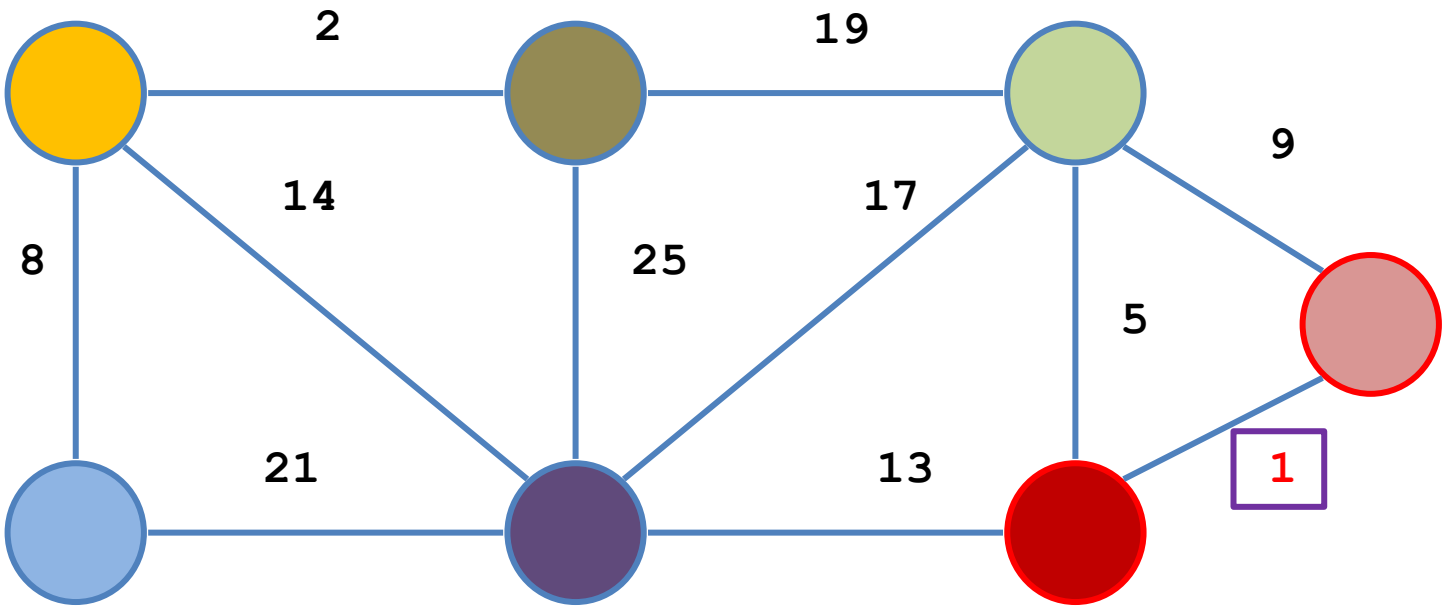
1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



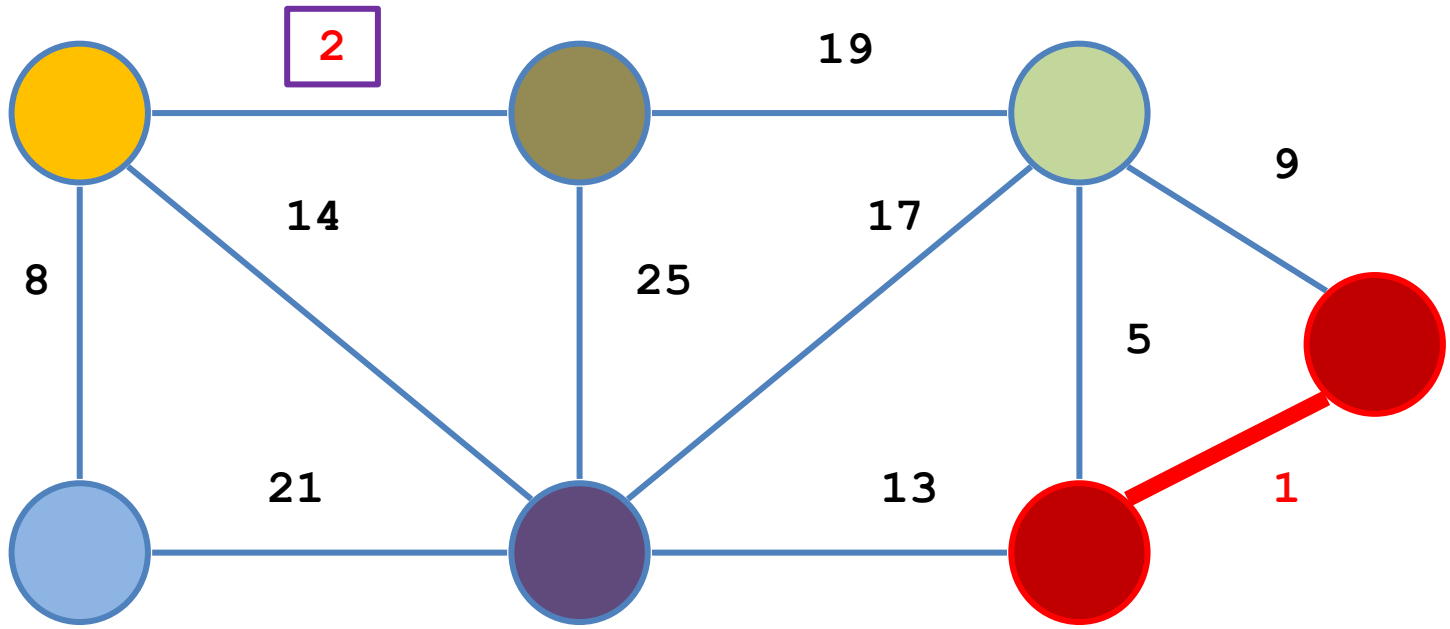
1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



1 – Algoritmo de Kruskal

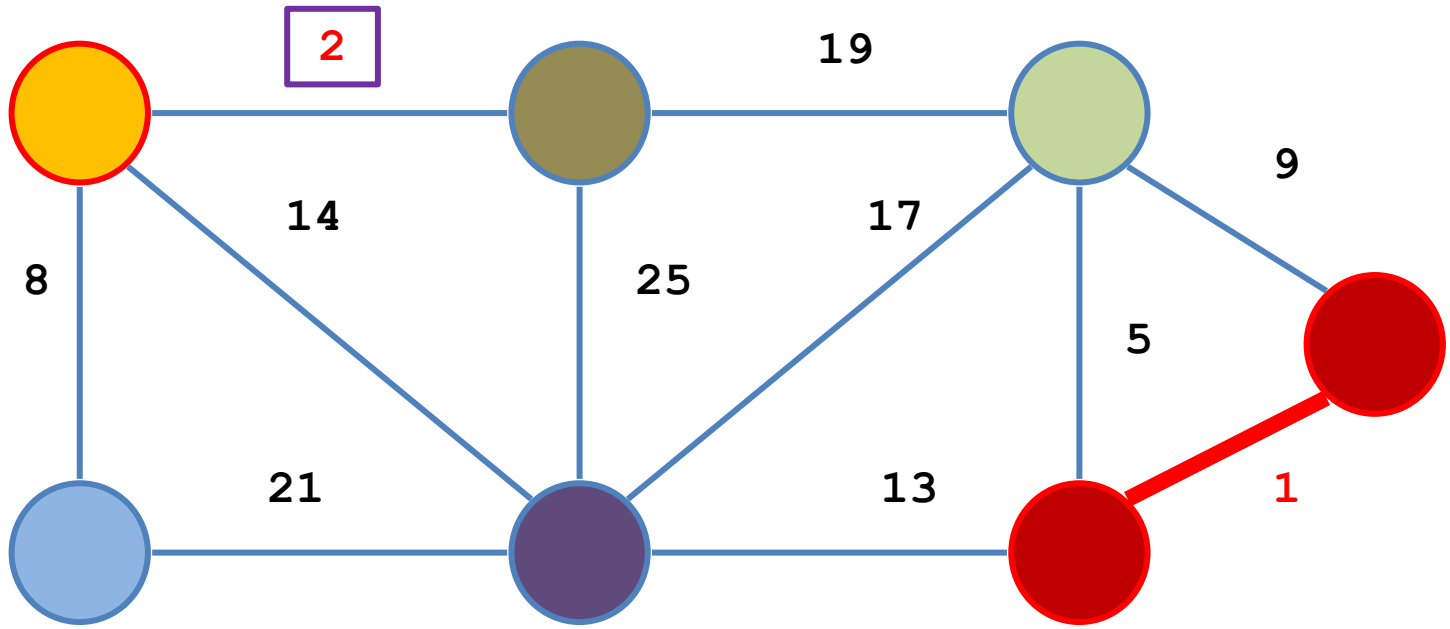
Exemplo:



$w_{T1} = 1$

1 – Algoritmo de Kruskal

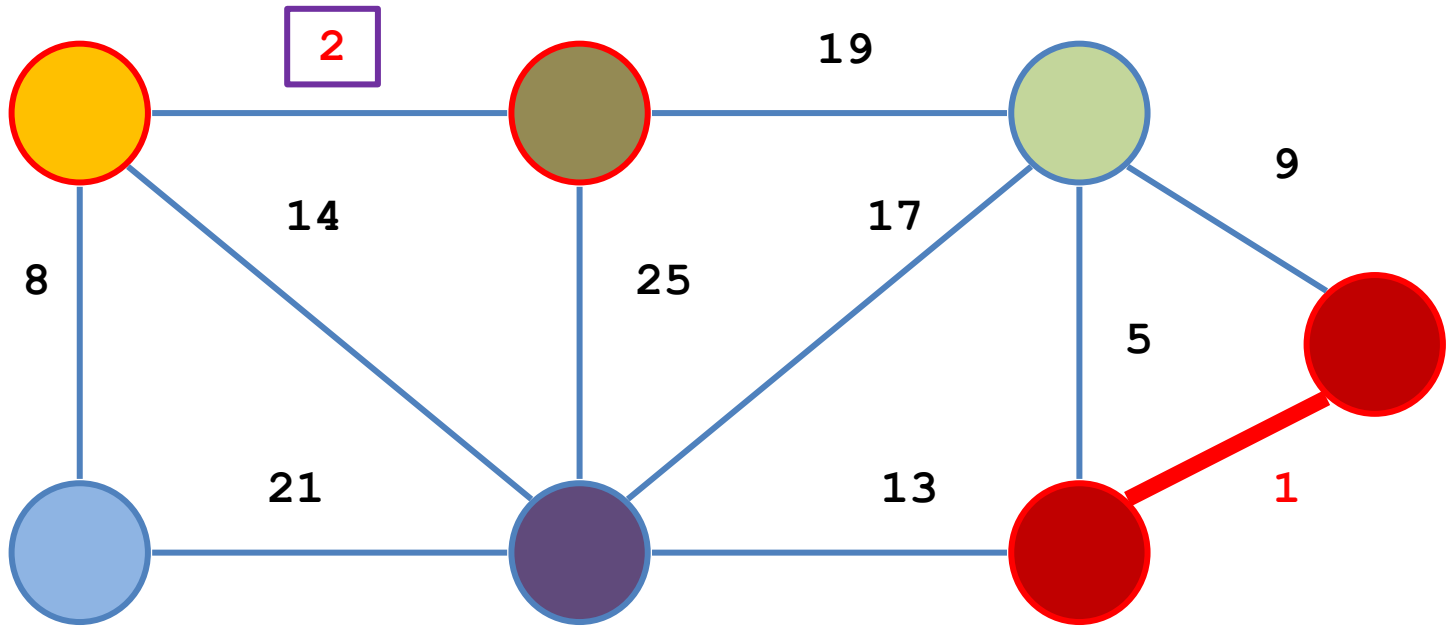
Exemplo:



$w_{T1} = 1$

1 – Algoritmo de Kruskal

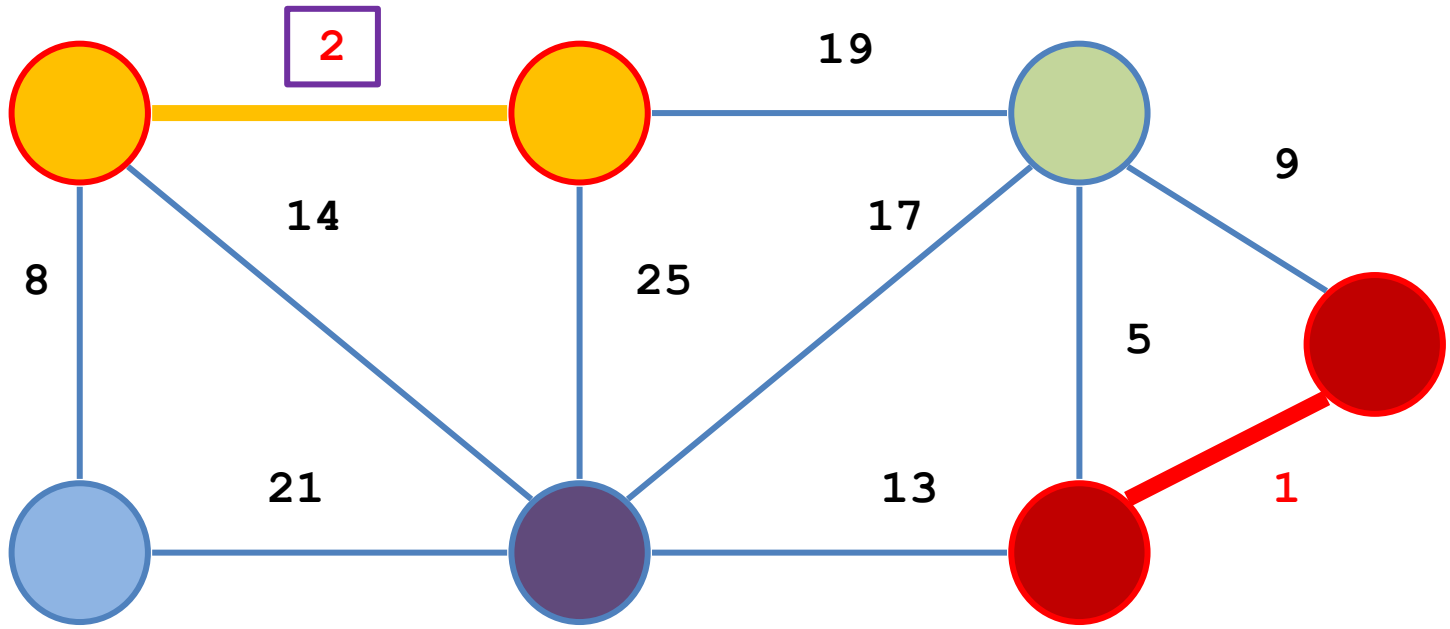
Exemplo:



$w_{T1} = 1$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

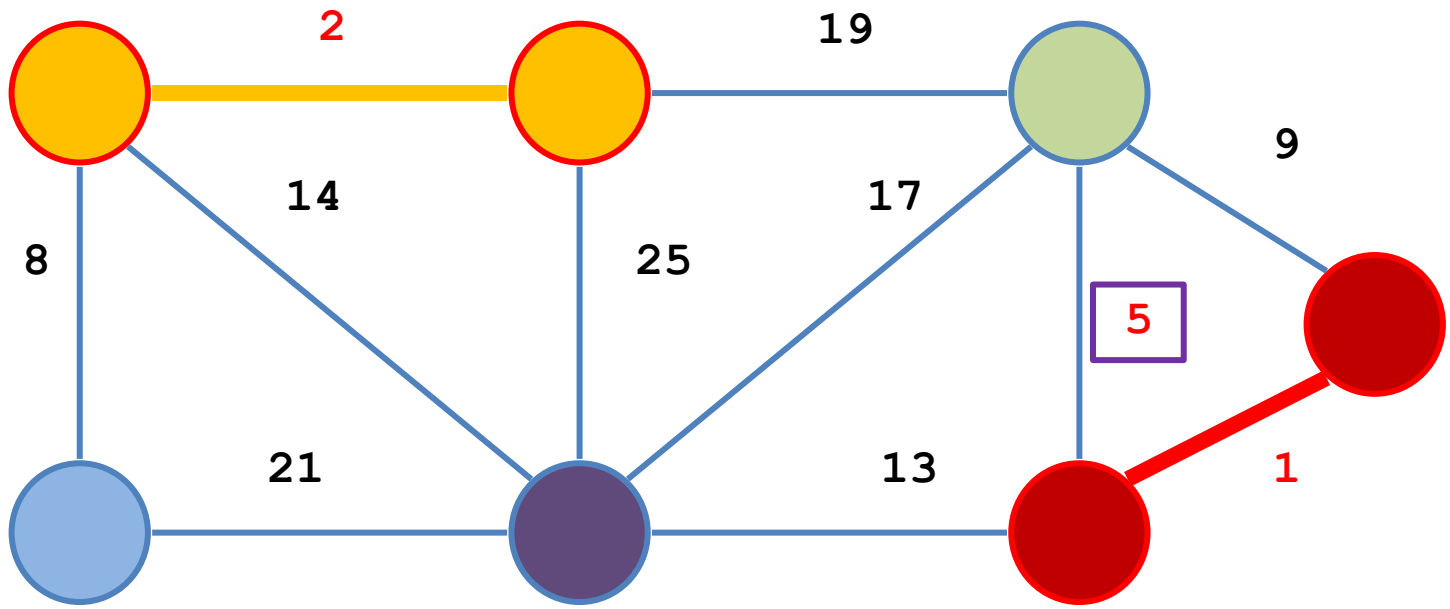


$w_{T1} = 1$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

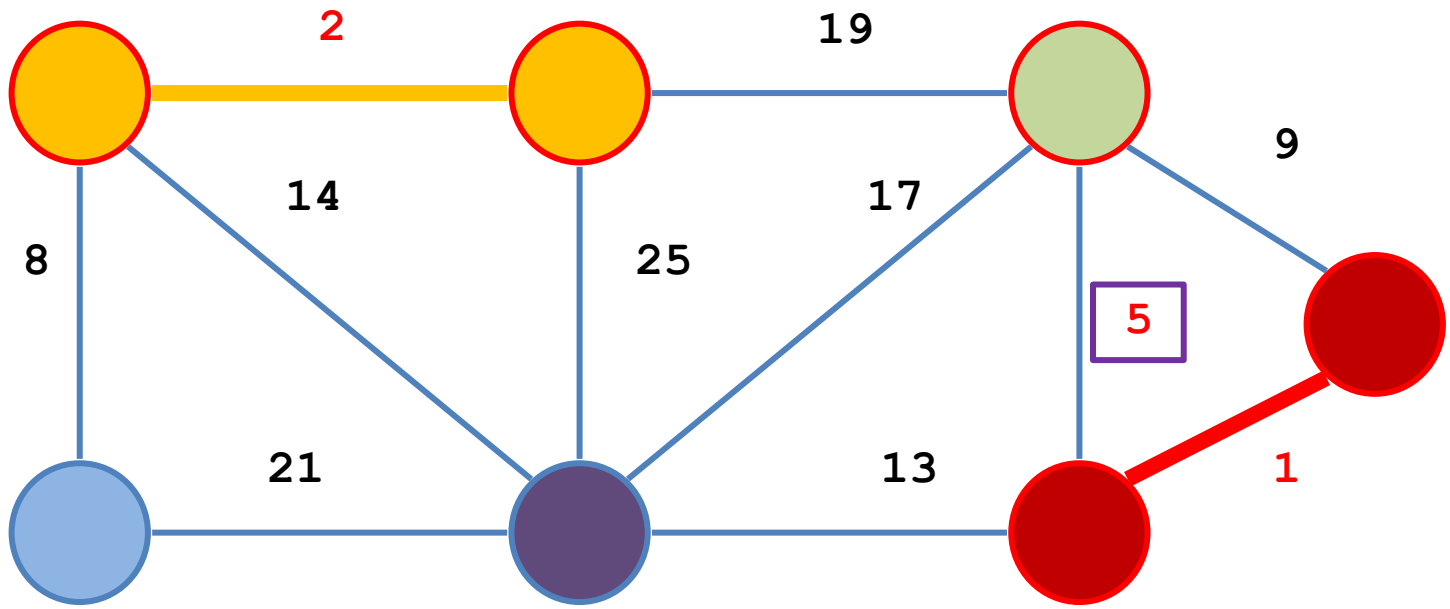


$w_{T1} = 1$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

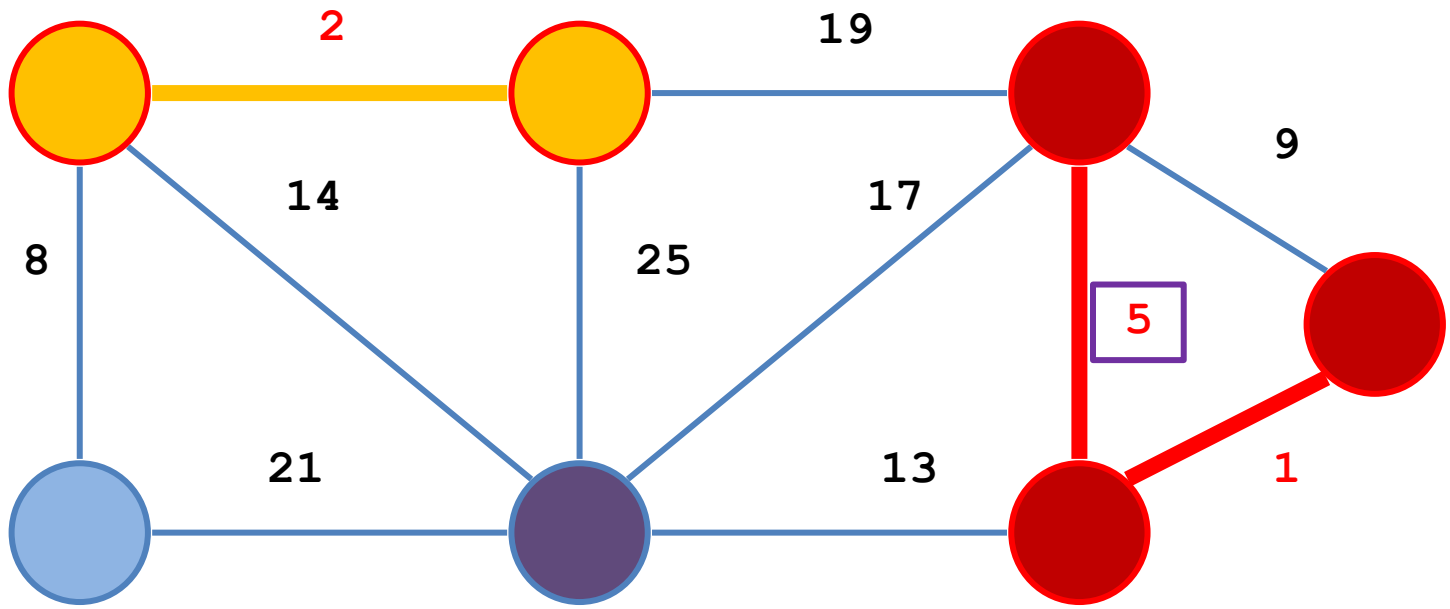


$w_{T1} = 1$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

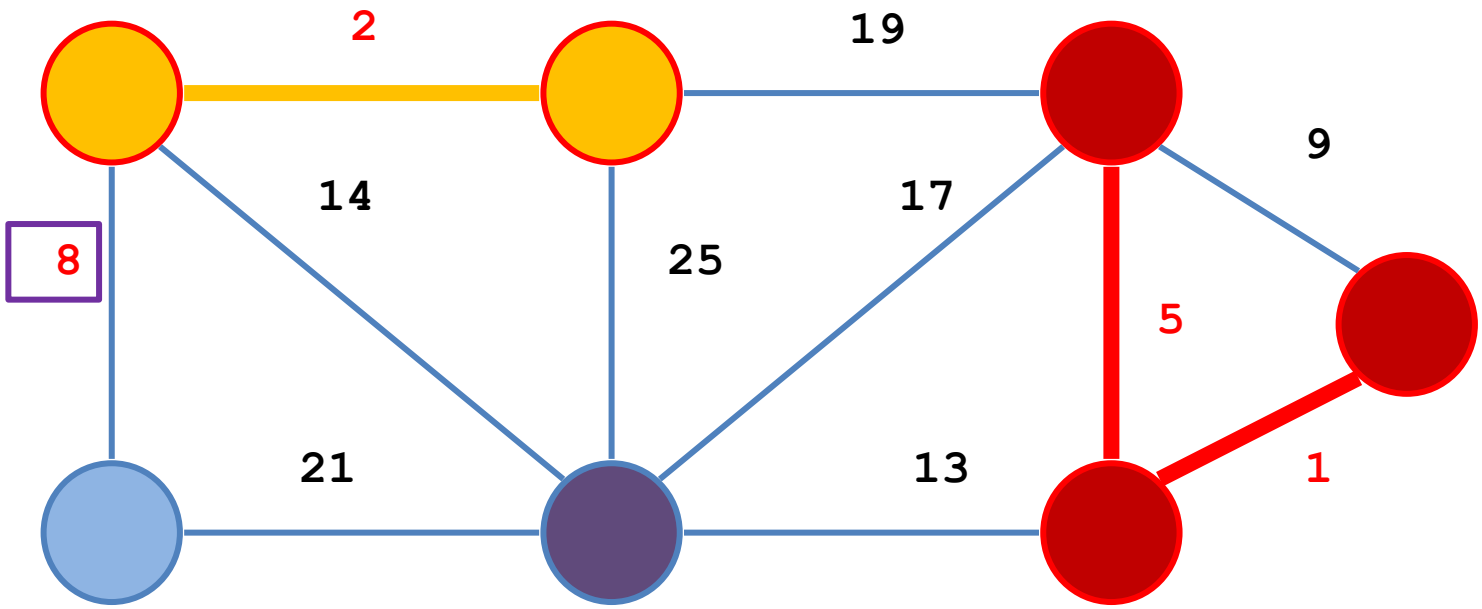


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

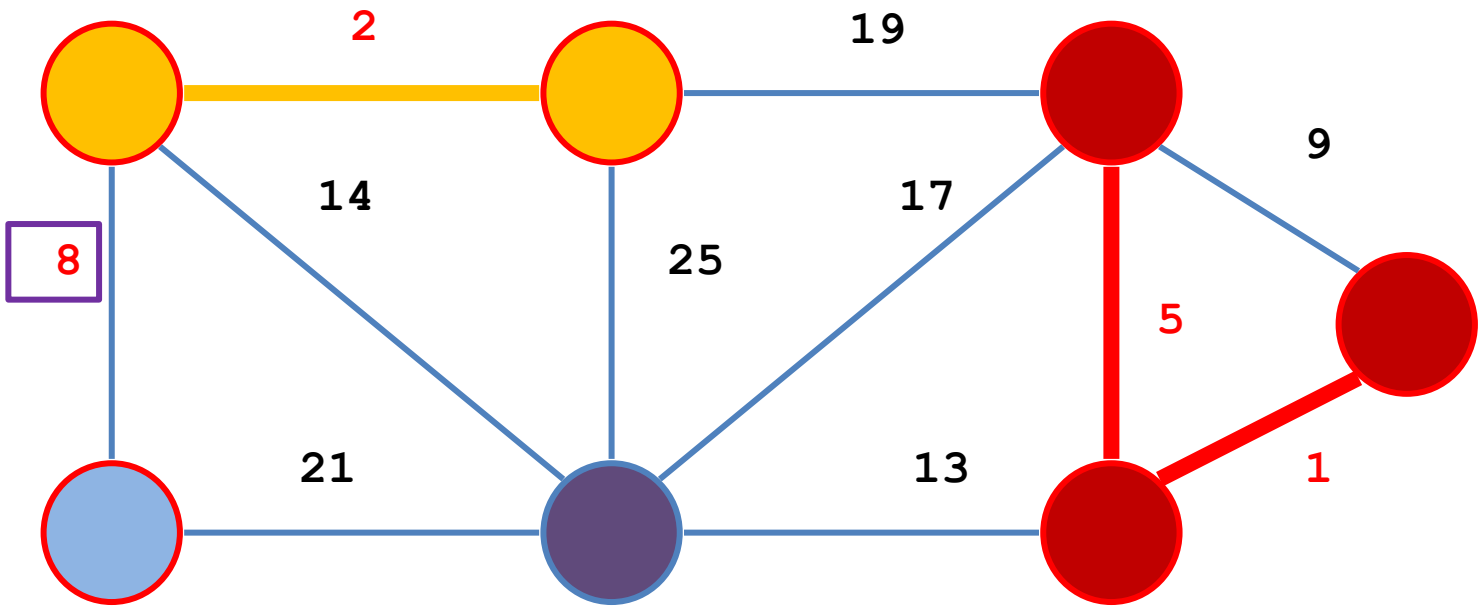


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

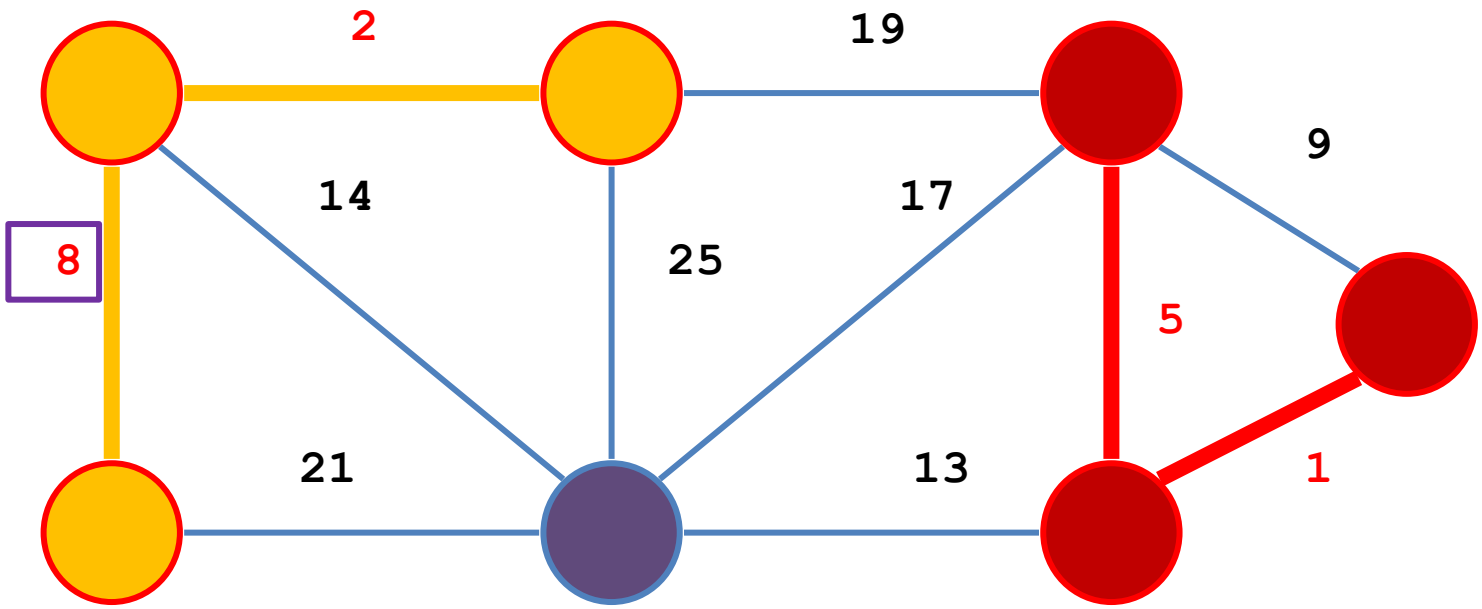


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

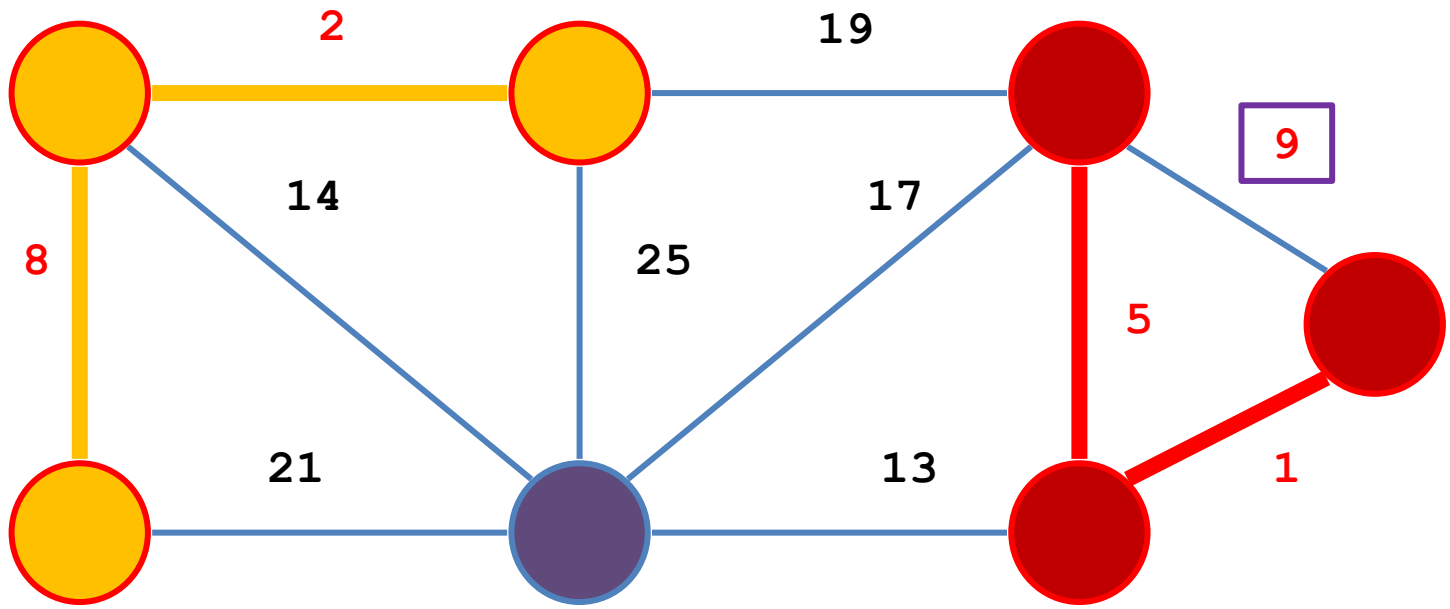


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

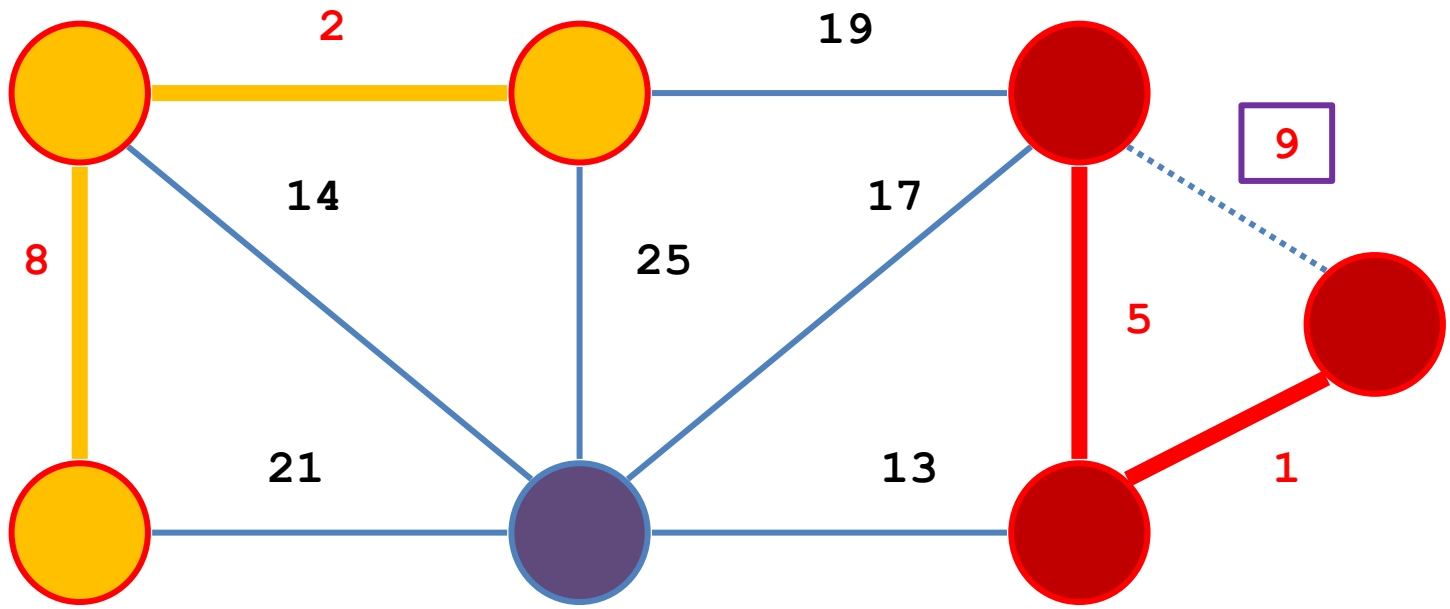


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

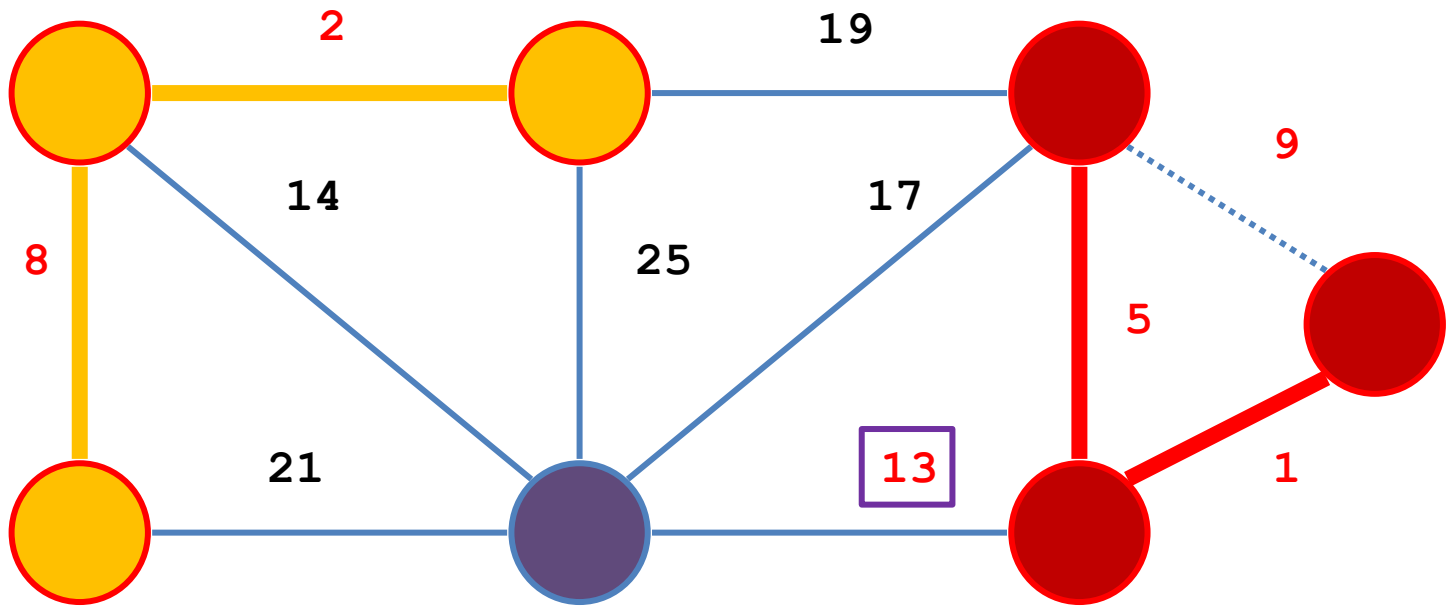


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

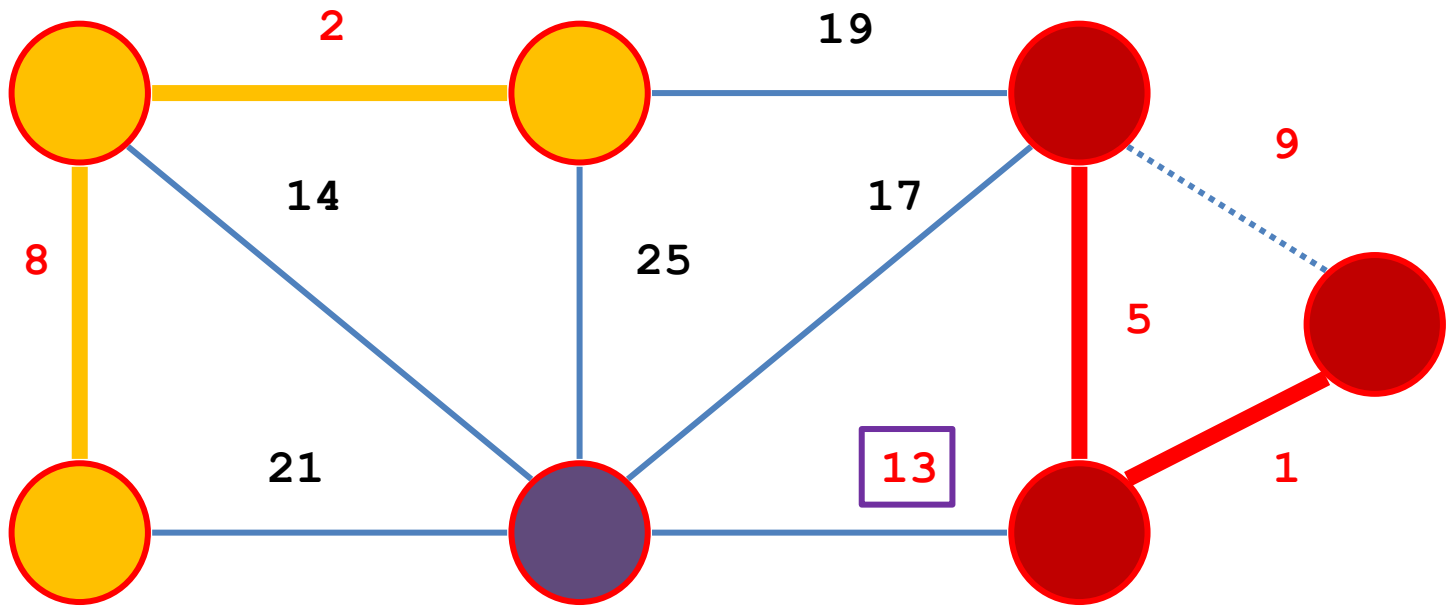


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

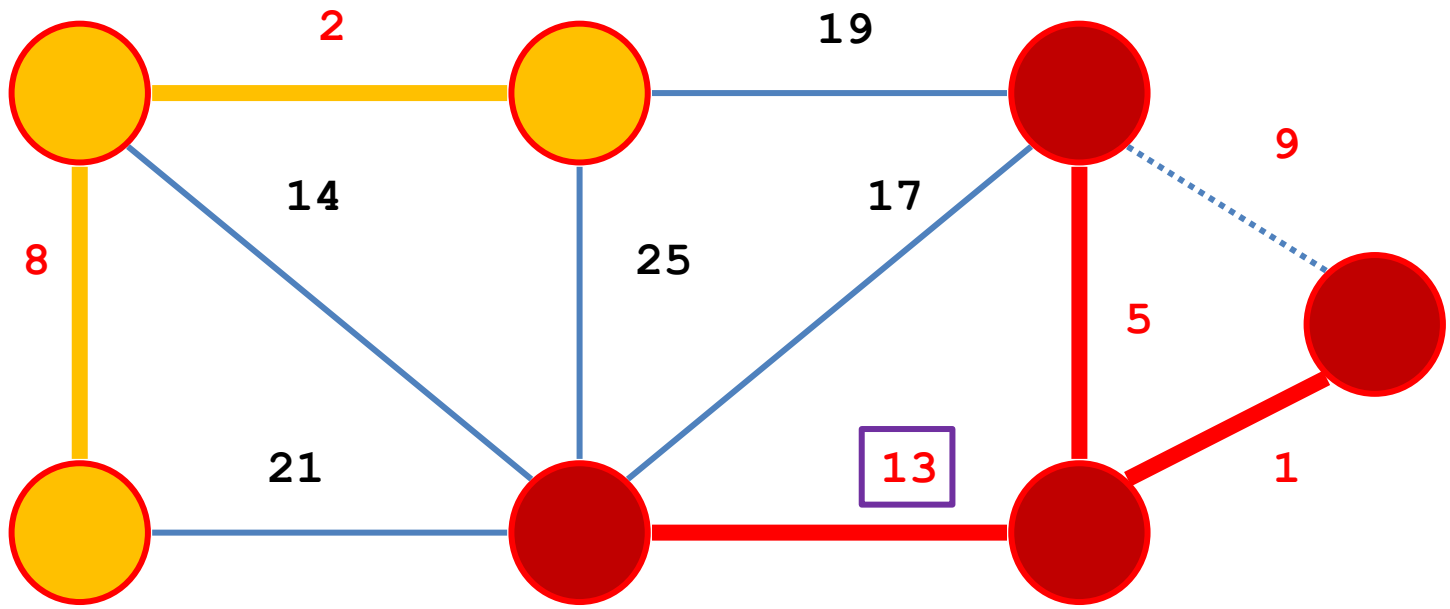


$w_{T1} = 1 + 5$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

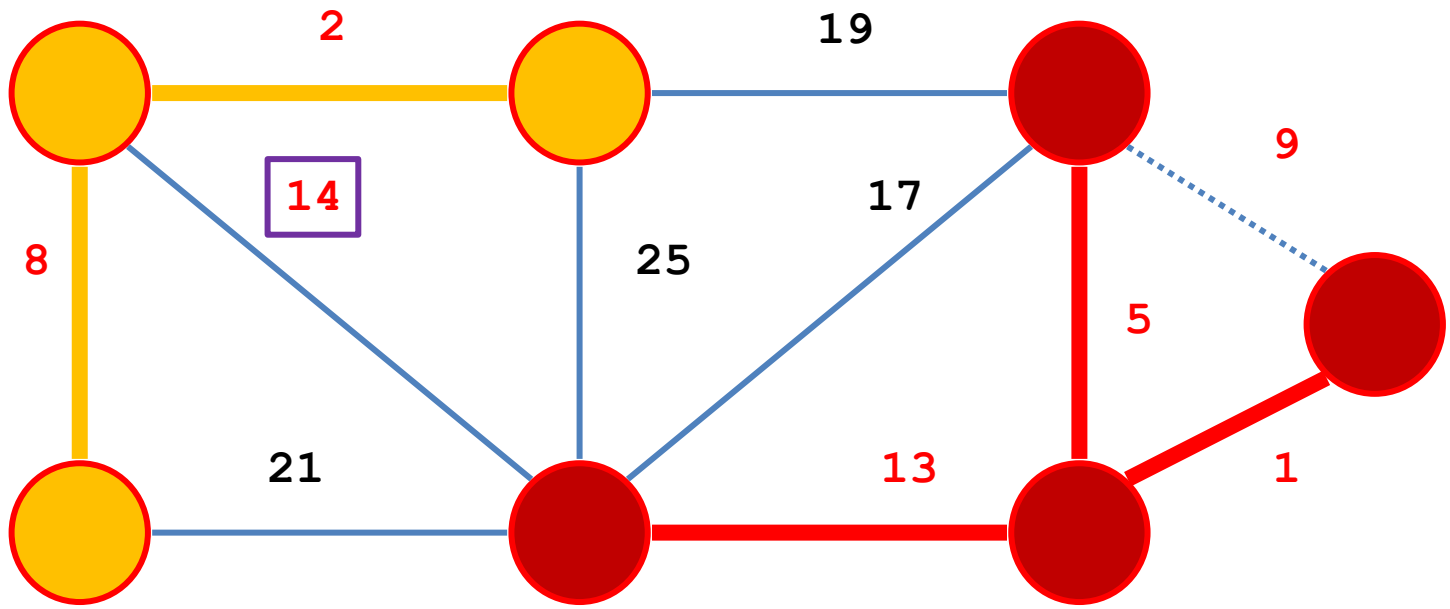


$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:

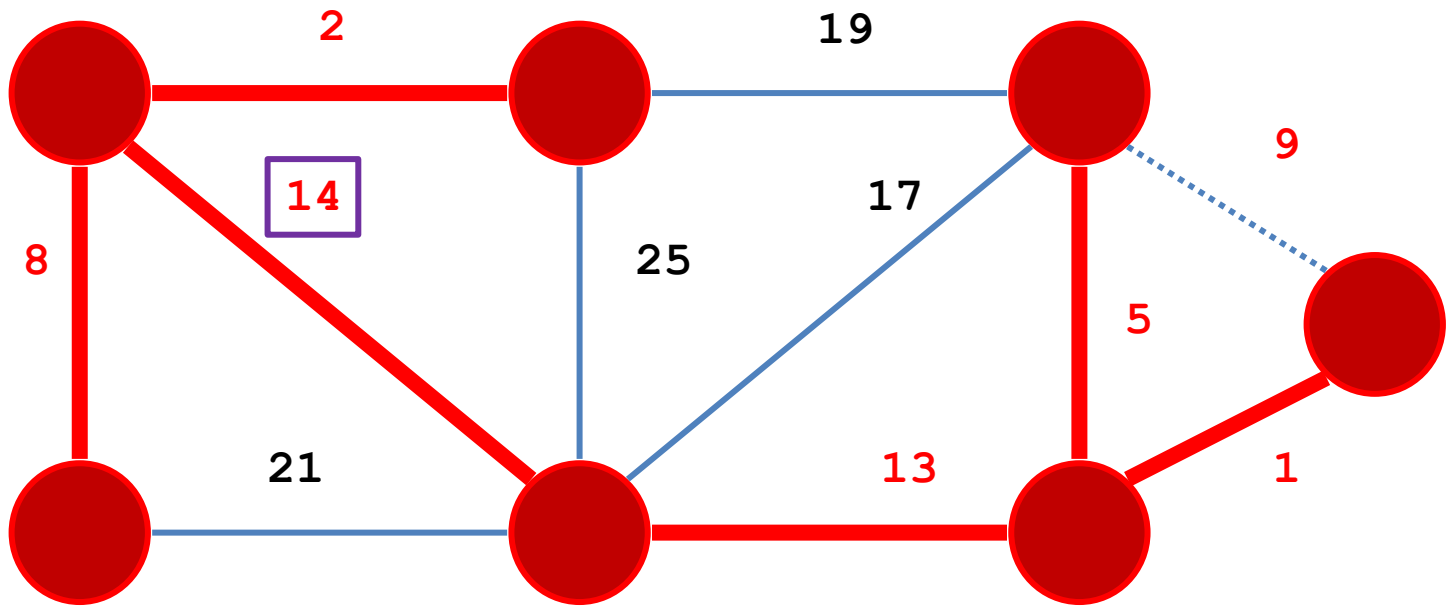


$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



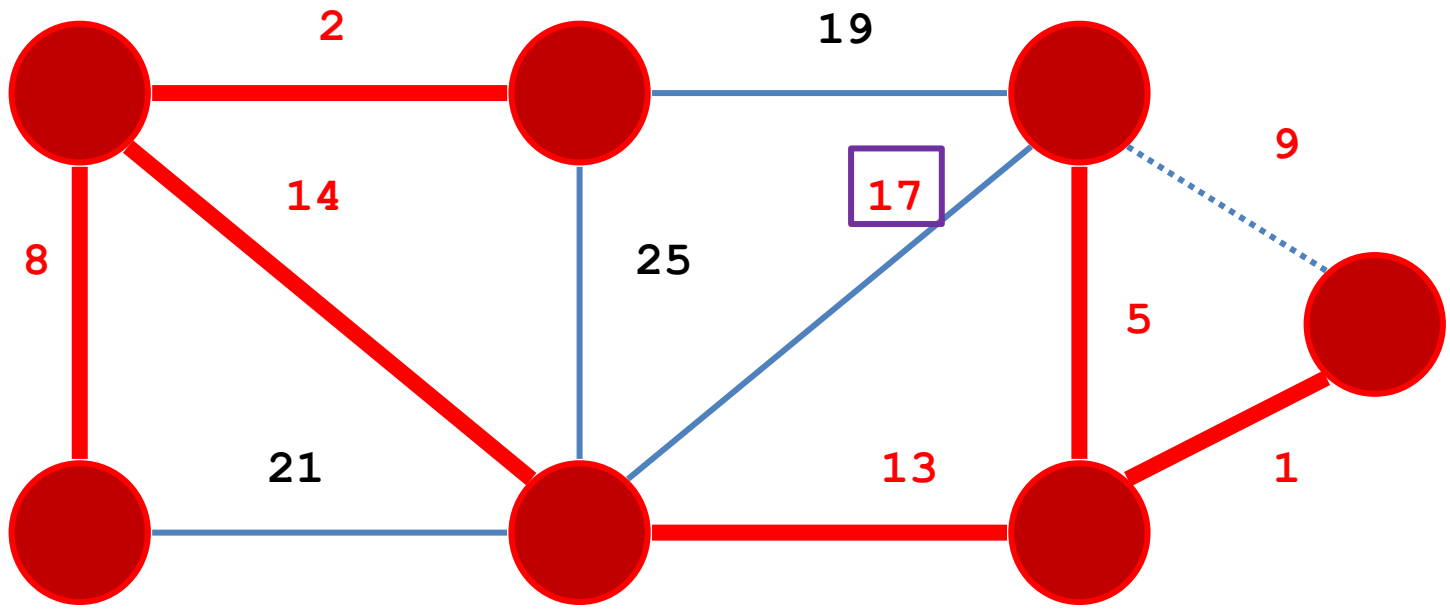
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



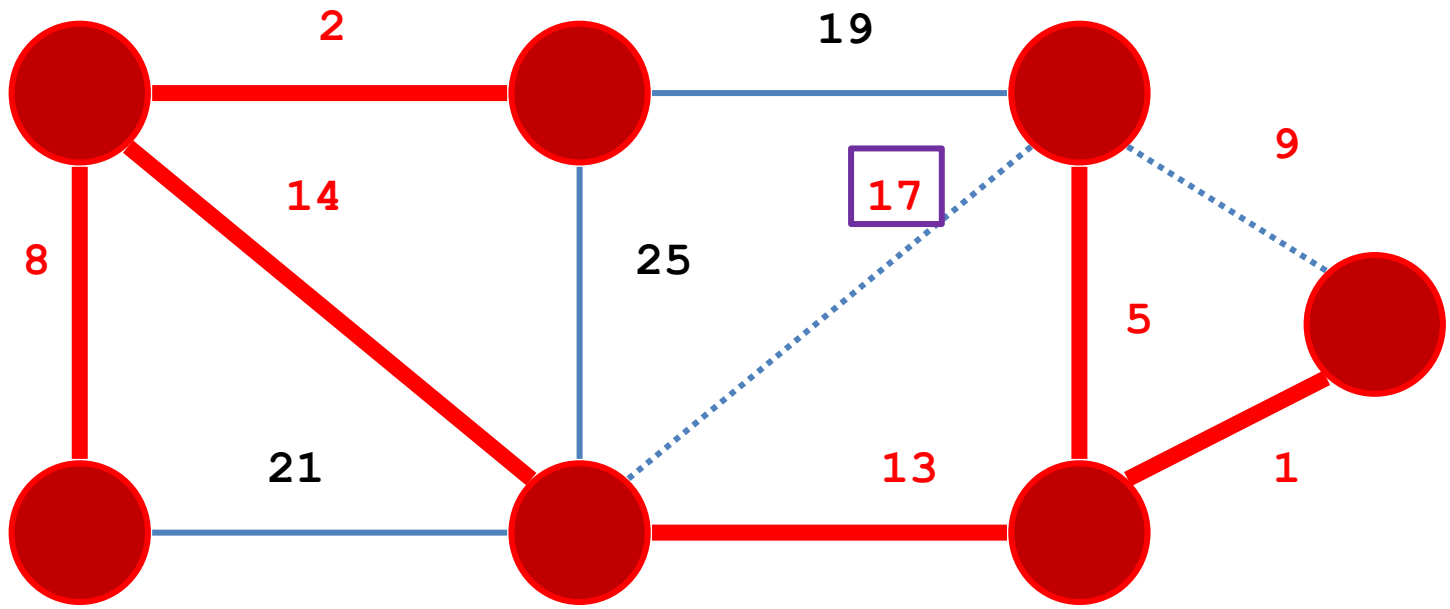
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



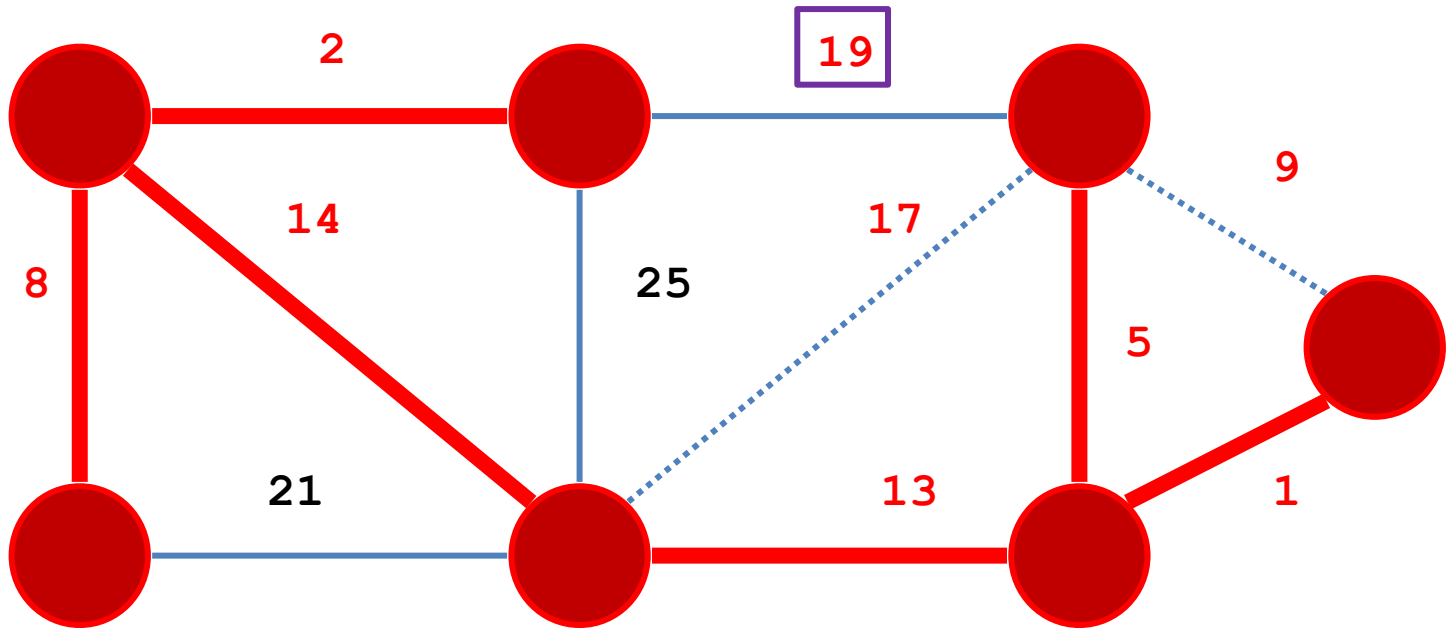
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



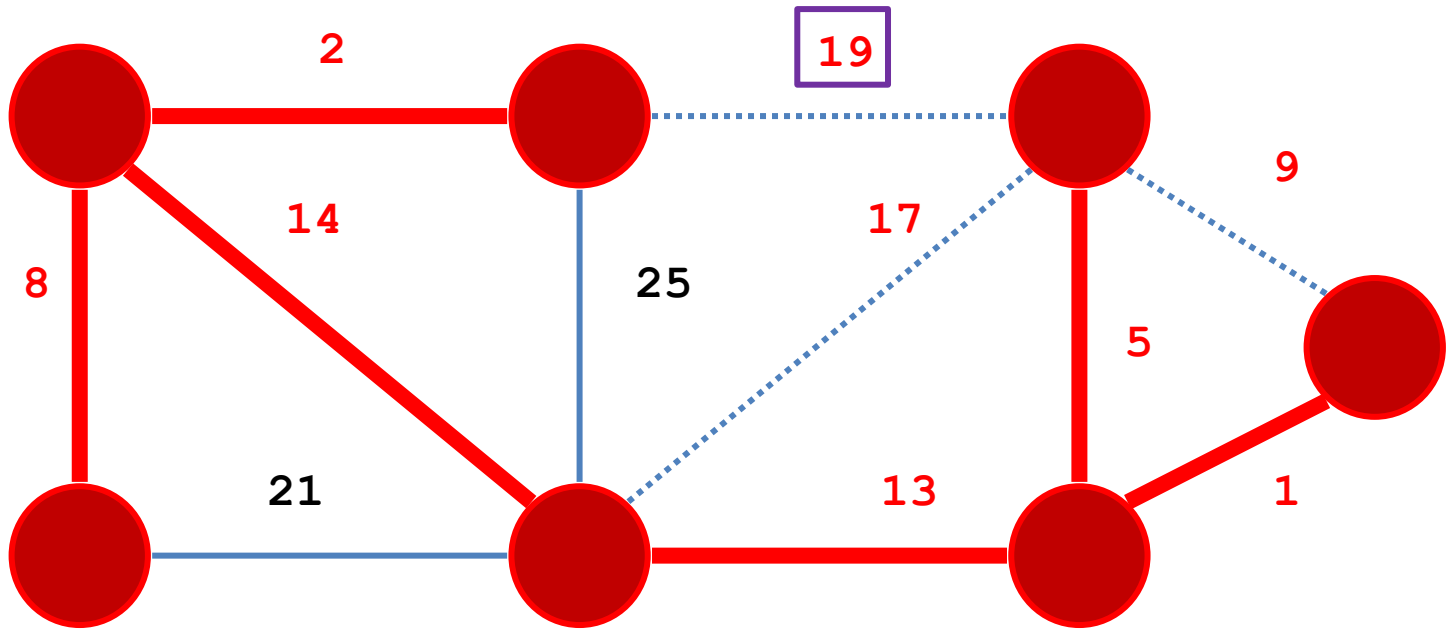
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



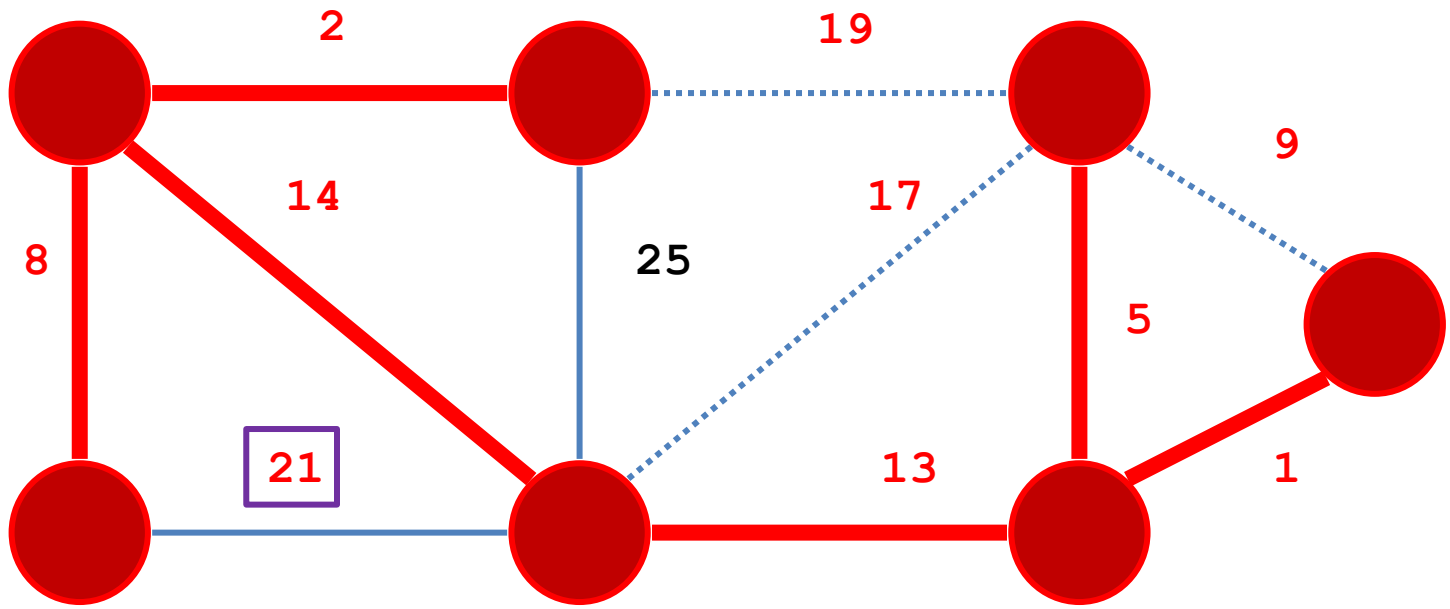
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



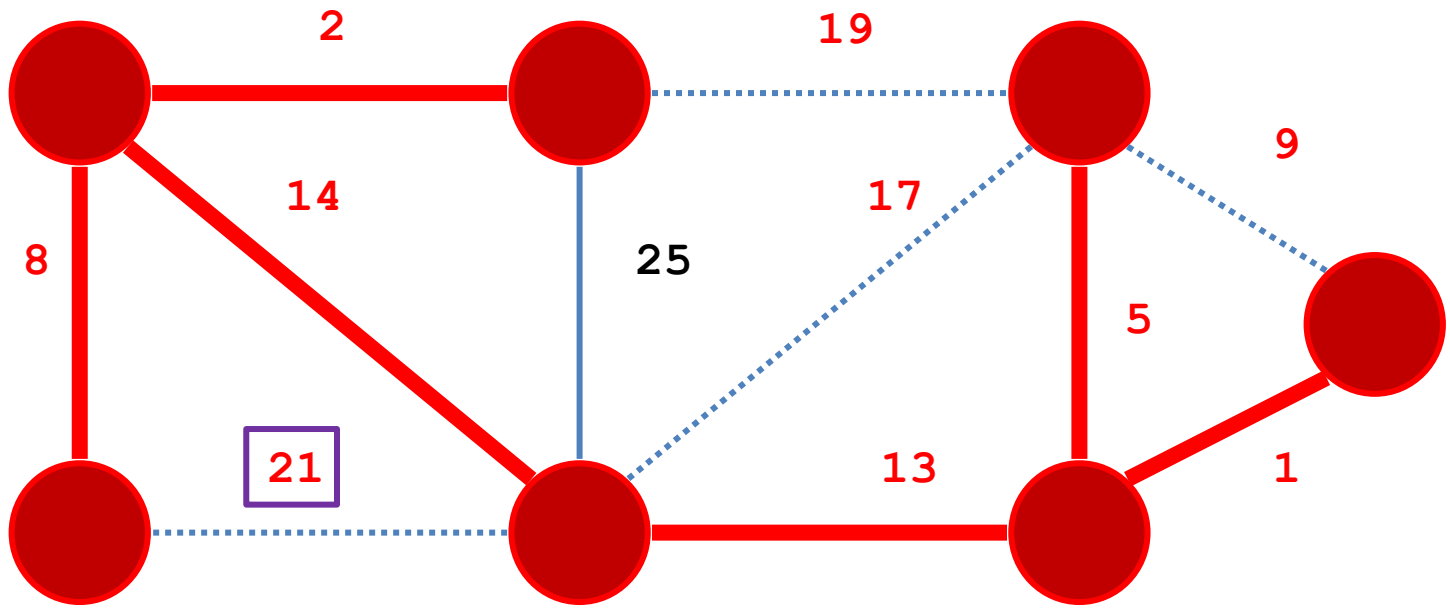
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



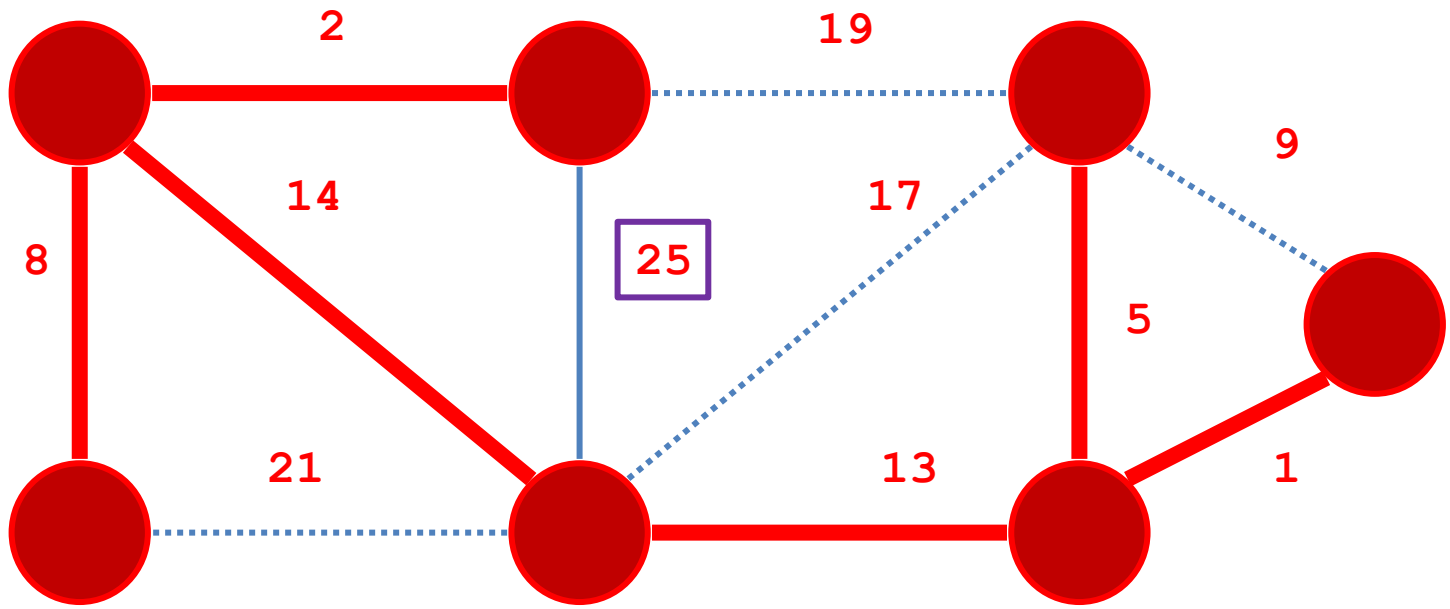
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



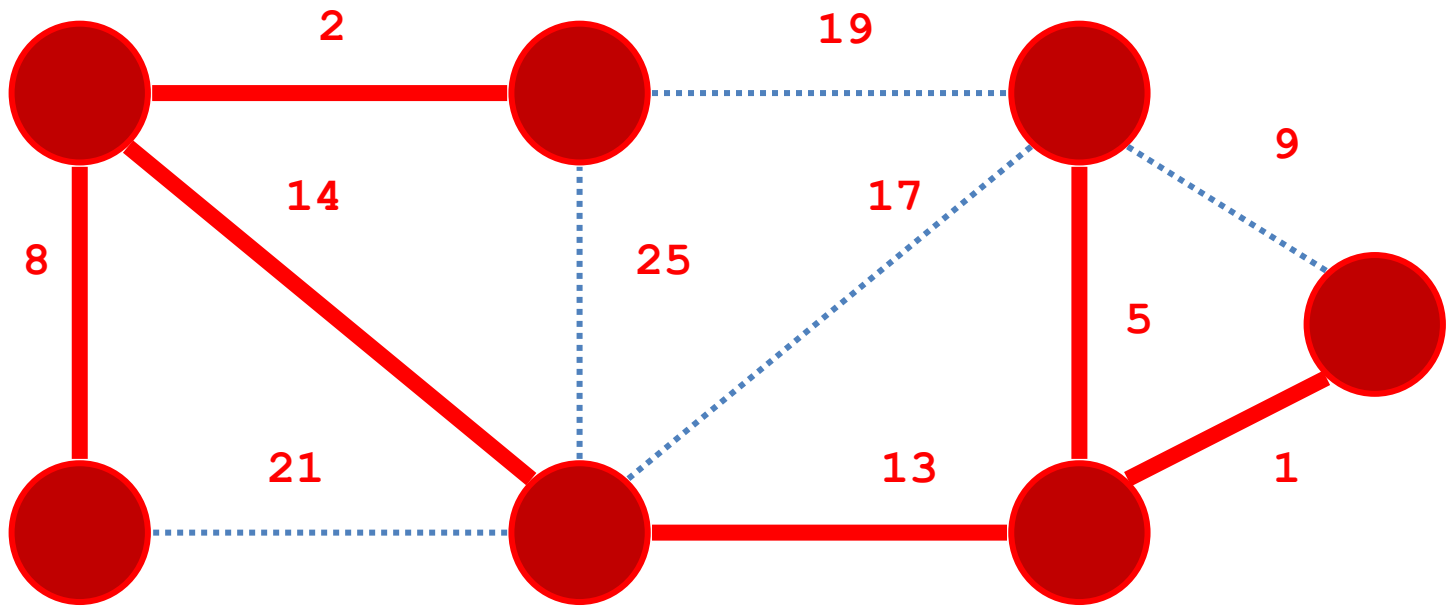
$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14$

1 – Algoritmo de Kruskal

Exemplo:



$w_{T1} = 1 + 5 + 13$

$w_{T2} = 2 + 8 + 14$

$w_{T1 + T2} = 1 + 5 + 13 + 2 + 8 + 14 = 43$

1 – Algoritmo de Kruskal

Algoritmo:

```
Kruskal(){
1   A = ∅;
2   for cada vértice v ∈ V[G]
3       do MakeSet(v);
4   Ordene as arestas E de forma crescente ao peso w
5   for cada aresta (u,v) ∈ E (ordenado)
6       do if FindSet(u) ≠ FindSet(v)
7             then  A = A U {(u,v)};
8   Union(FindSet(u), FindSet(v));
9   return A;
}
```

1 – Algoritmo de Kruskal

Algoritmo:

```
Kruskal(){
1   A = ∅;
2   for cada vértice v ∈ V[G]
3       do MakeSet(v);
4   Ordene as arestas E de forma crescente ao peso w
5   for cada aresta (u,v) ∈ E (ordenado)
6       do if FindSet(u) ≠ FindSet(v)
7             then  A = A U {(u,v)};
8   Union(FindSet(u), FindSet(v));
9   return A;
}
```

Inicializa o conjunto **A** como o conjunto vazio e criam **V** árvores, cada uma contendo 1 vértice.

1 – Algoritmo de Kruskal

Algoritmo:

```
Kruskal(){
1   A = ∅;
2   for cada vértice v ∈ V[G]
3       do MakeSet(v);
4   Ordene as arestas E de forma crescente ao peso w
5   for cada aresta (u,v) ∈ E (ordenado)
6       do if FindSet(u) ≠ FindSet(v)
7             then  A = A U {(u,v)};
8   Union(FindSet(u), FindSet(v));
9   return A;
}
```

As arestas em **E** são ordenadas em sequência crescente por peso.

1 – Algoritmo de Kruskal

Algoritmo:

```
Kruskal(){
1   A = ∅;
2   for cada vértice v ∈ V[G]
3       do MakeSet(v);
4   Ordene as arestas E de forma crescente ao peso w
5   for cada aresta (u,v) ∈ E (ordenado)
6       do if FindSet(u) ≠ FindSet(v)
7             then  A = A U {(u,v)};
8   Union(FindSet(u), FindSet(v));
9   return A;
}
```

Verifica, para cada aresta **(u,v)**, se os pontos extremos **u** e **v** pertencem à mesma árvore. Se sim, a aresta é descartada pois **não é permitido ciclo**. Se não, a aresta é adicionada em **A** e os vértices são intercalados.

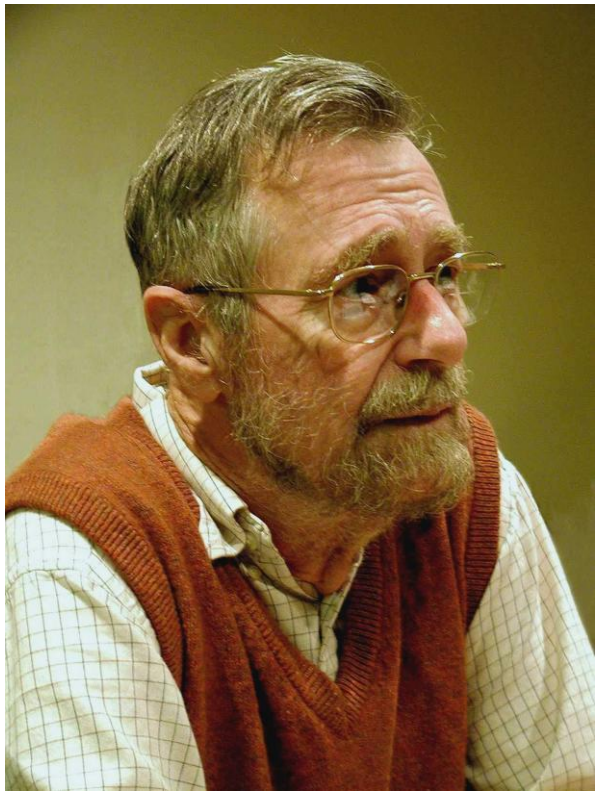
2

Algoritmo de Djikstra

2 – Algoritmo de Djikstra

Características:

- O **algoritmo de Dijkstra**, concebido pelo cientista da computação holandês Edsger Dijkstra em 1956 e publicado em 1959.



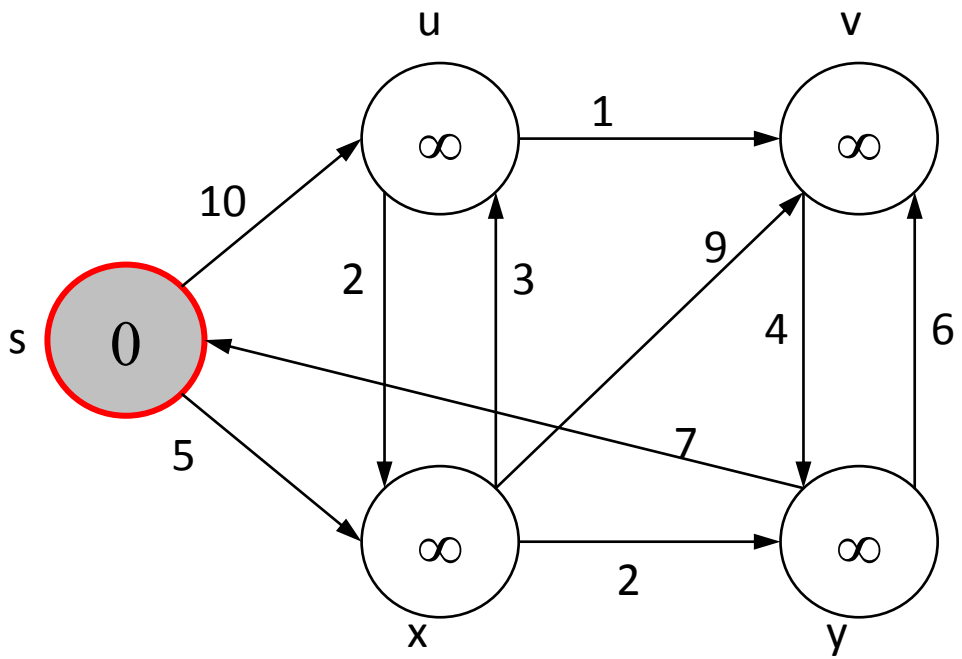
2 – Algoritmo de Djikstra

Características:

- É um algoritmo de busca, guloso, que resolve o problema de caminhos mais curtos de única origem em um grafo orientado ponderado.
- As arestas não podem ter pesos negativos.

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:

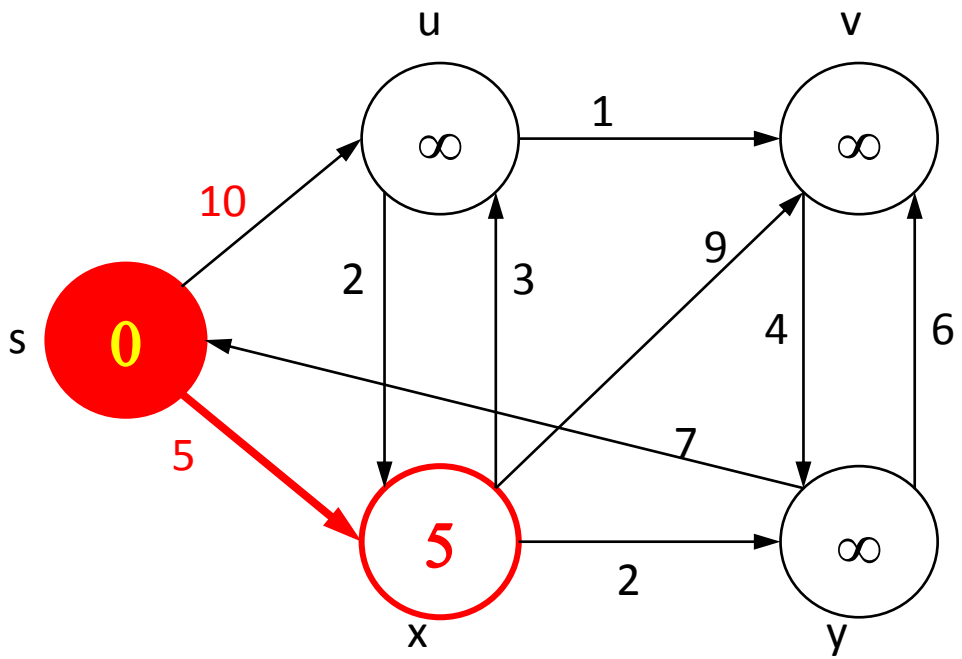


Inicialmente todos os vértices têm um custo infinito, exceto **s** (a raiz da busca) que tem valor 0:

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	∞	∞	∞	∞
Precedentes	-	-	-	-	-
Fechado	Não	-	-	-	-

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **s**

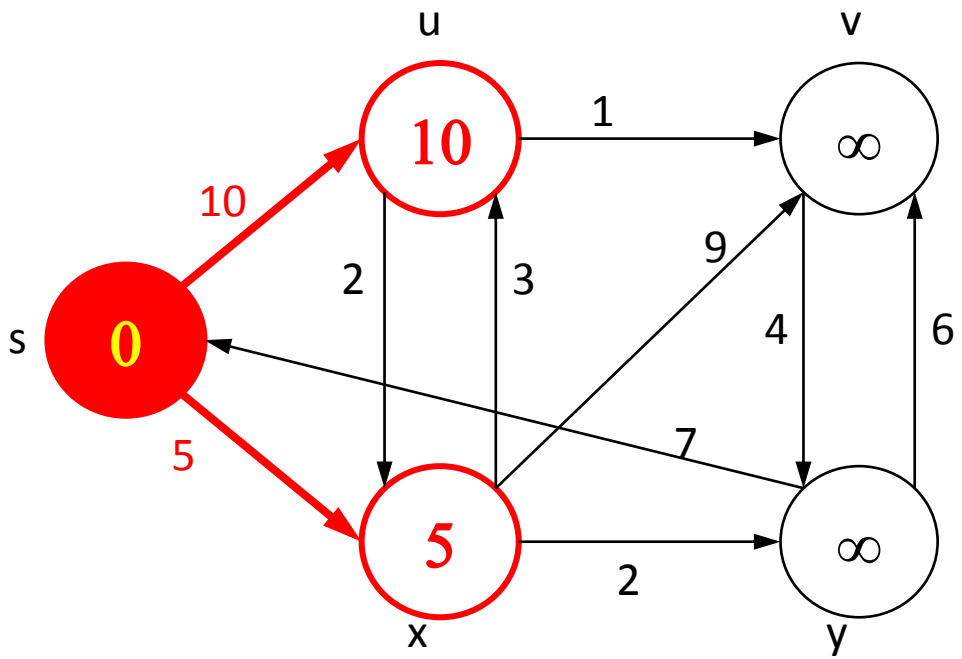
Feche **s**.

Recalcule as estimativas de **u** e **x**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	∞	∞	**5**	∞
Precedentes	s	-	-	s	-
Fechado	Sim	-	-	Não	-

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **s**

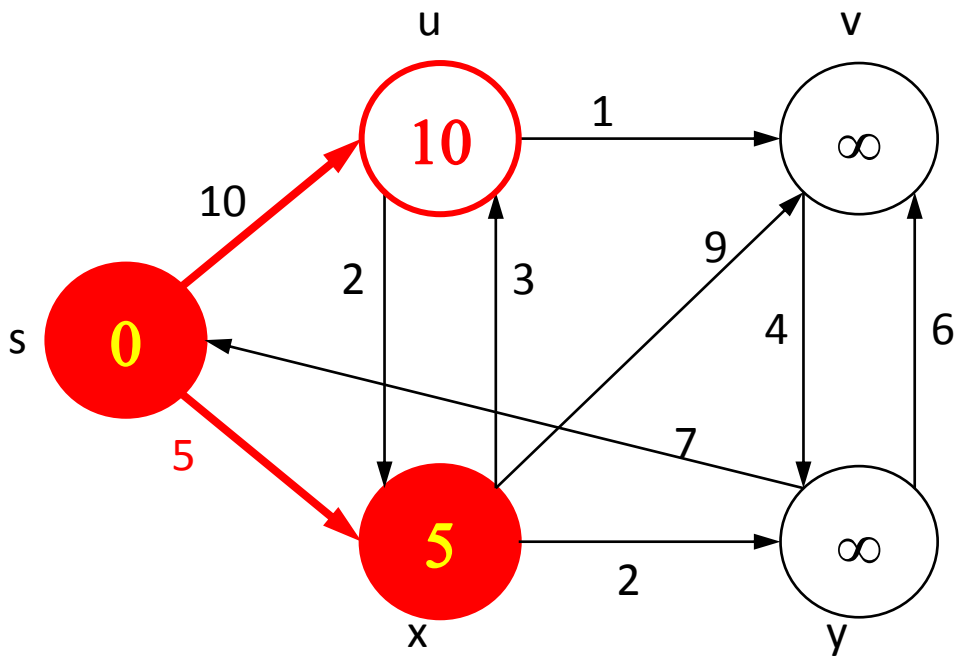
Feche **s**.

Recalcule as estimativas de **u** e **x**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**10**	∞	**5**	∞
Precedentes	s	s	-	s	-
Fechado	Sim	Não	-	Não	-

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **x**

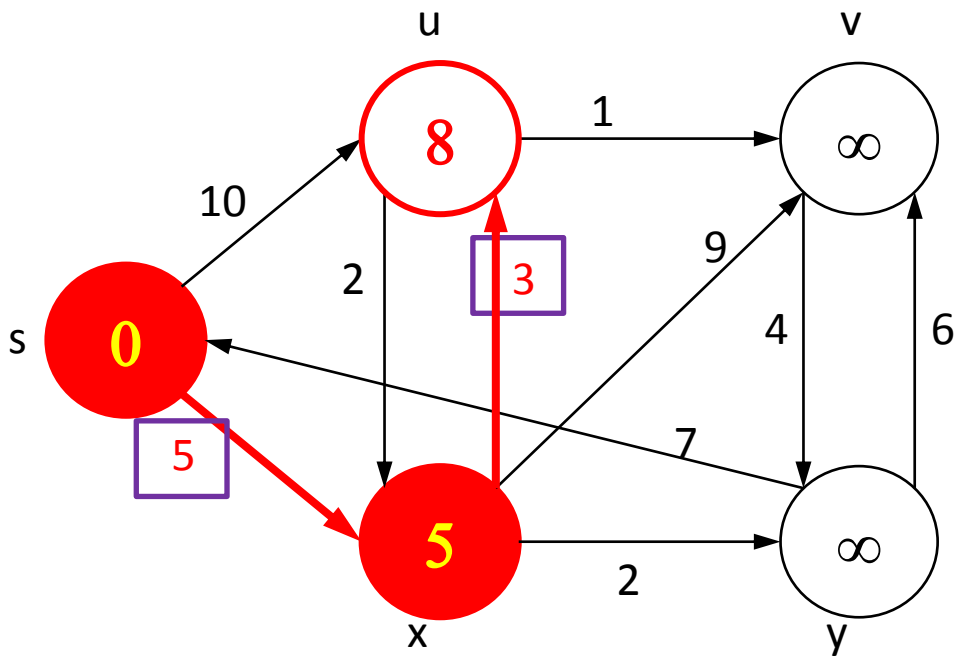
Feche **x** .

Recalcule as estimativas de **u**, **v** e **y**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**10**	∞	**5**	∞
Precedentes	s	s	-	s	-
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Não

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **x**

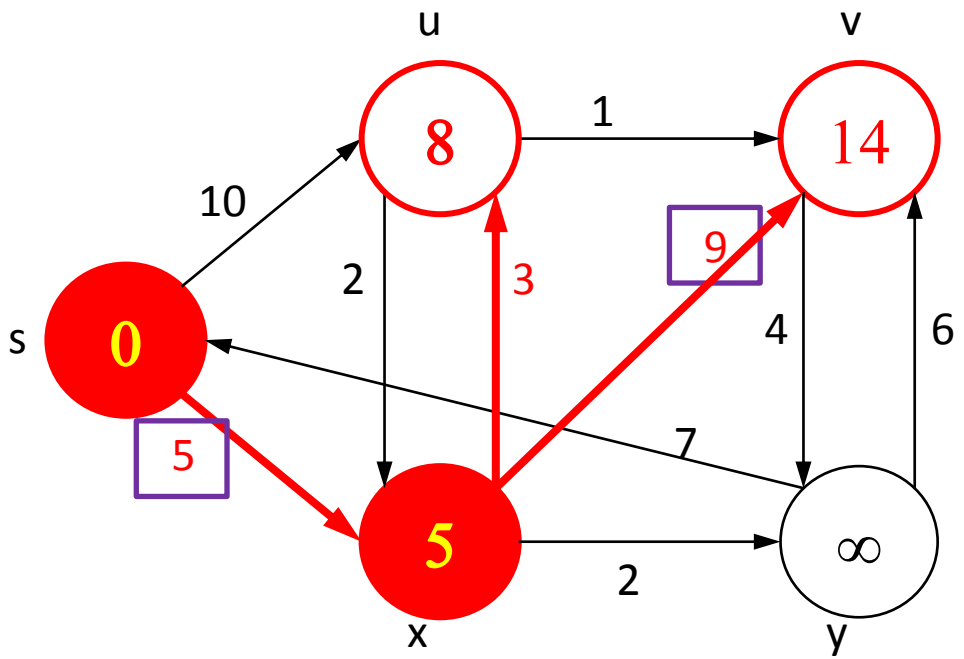
Feche **x** .

Recalcule as estimativas de **u**, **v** e **y**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	∞	**5**	∞
Precedentes	s	x	-	s	-
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Não

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **x**

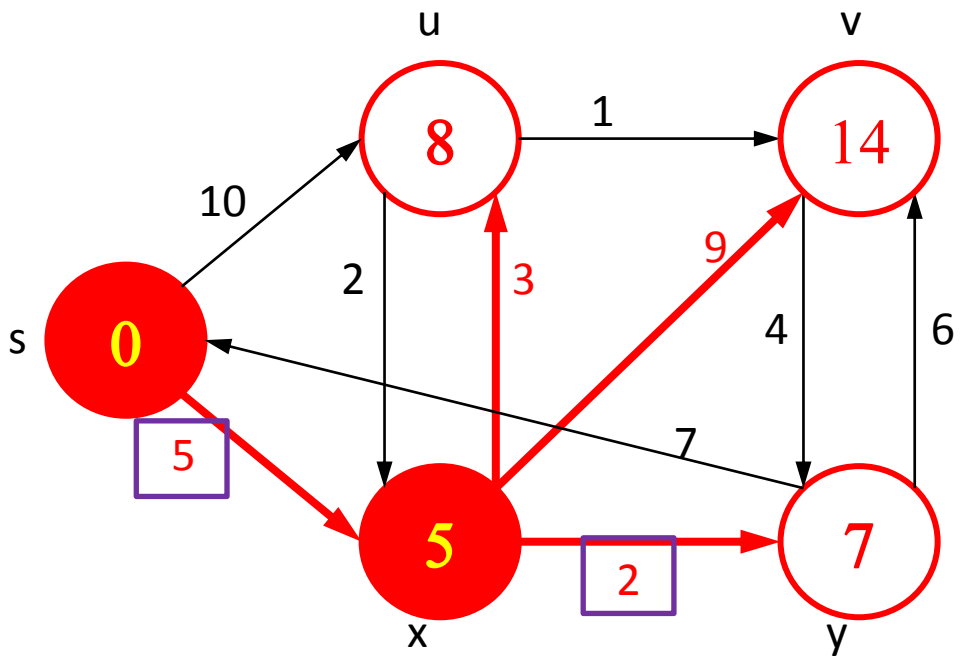
Feche **x** .

Recalcule as estimativas de **u**, **v** e **y**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**14**	**5**	∞
Precedentes	s	x	x	s	-
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Não

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **x**

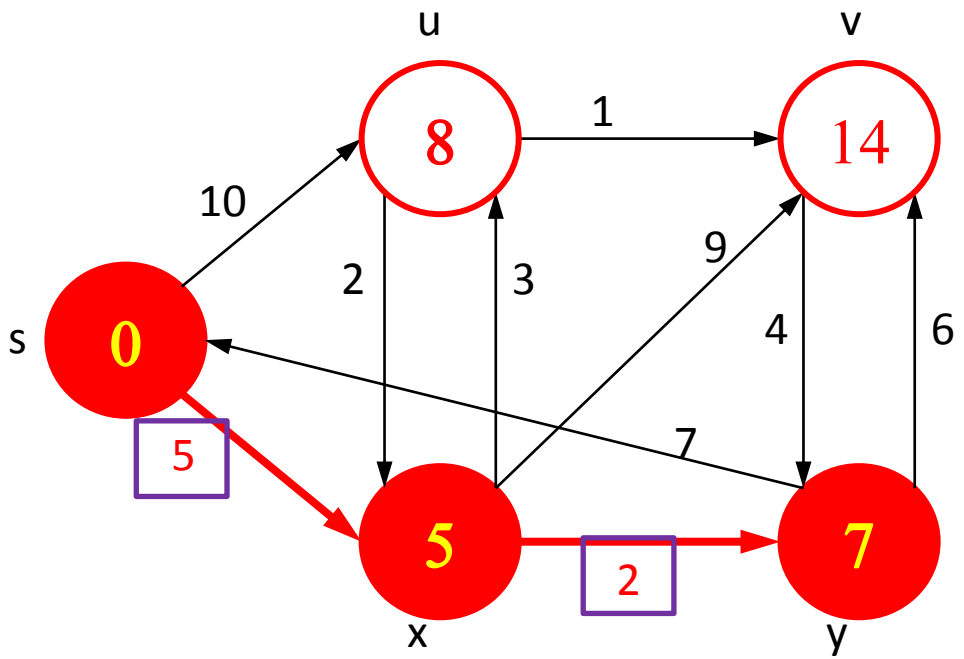
Feche **x** .

Recalcule as estimativas de **u**, **v** e **y**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**14**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	x	s	x
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Não

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **y**

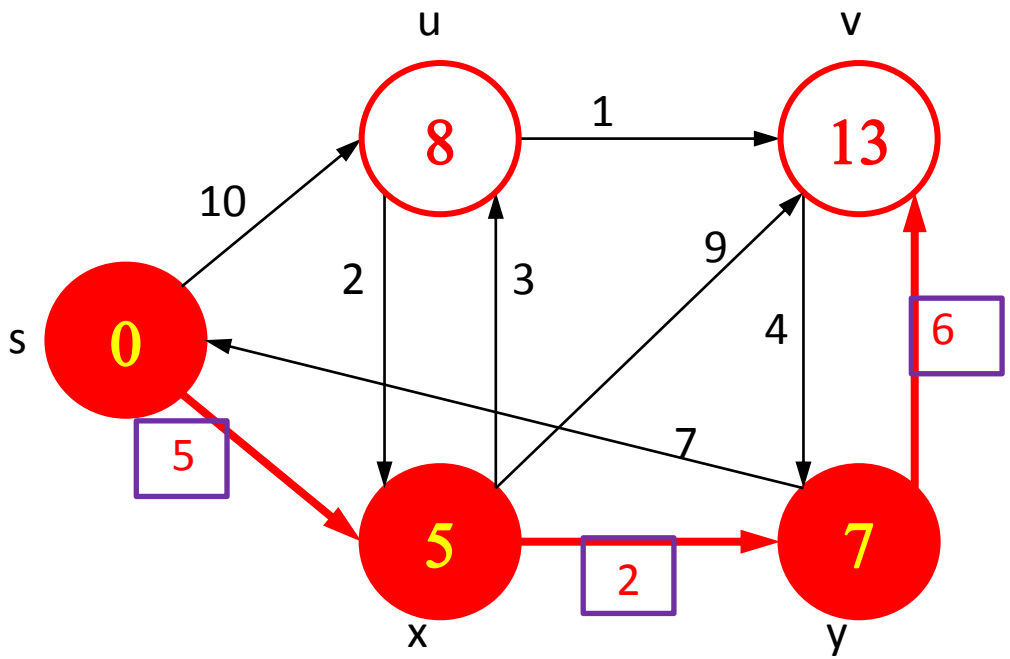
Feche **y** .

Recalcule as estimativas de **v**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**14**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	x	s	x
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Sim

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **y**

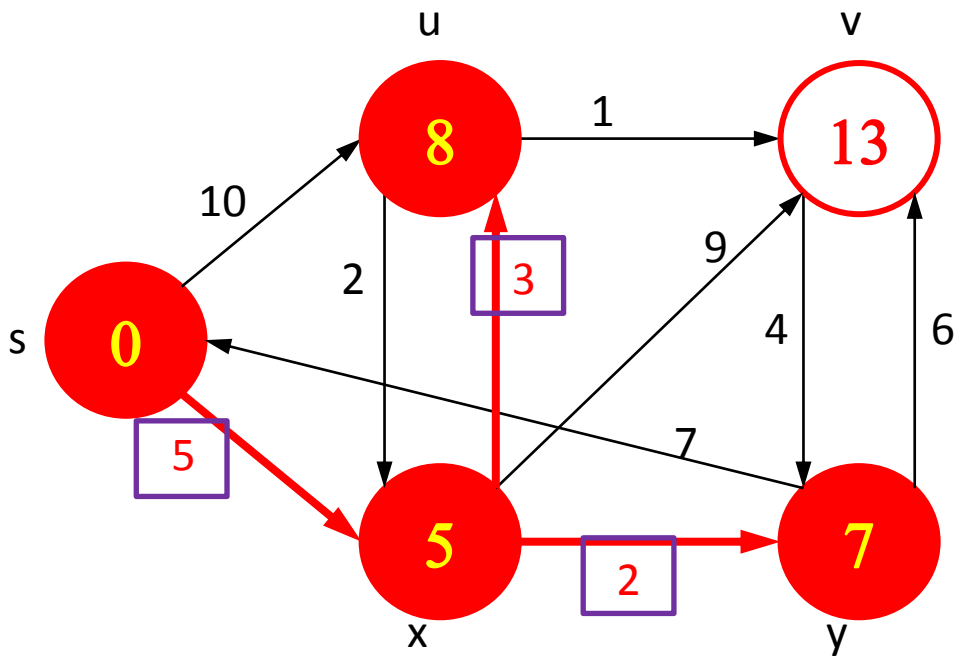
Feche **y** .

Recalcule as estimativas de **v**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**13**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	y	s	x
Fechado	Sim	Não	Não	Sim	Sim

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **u**

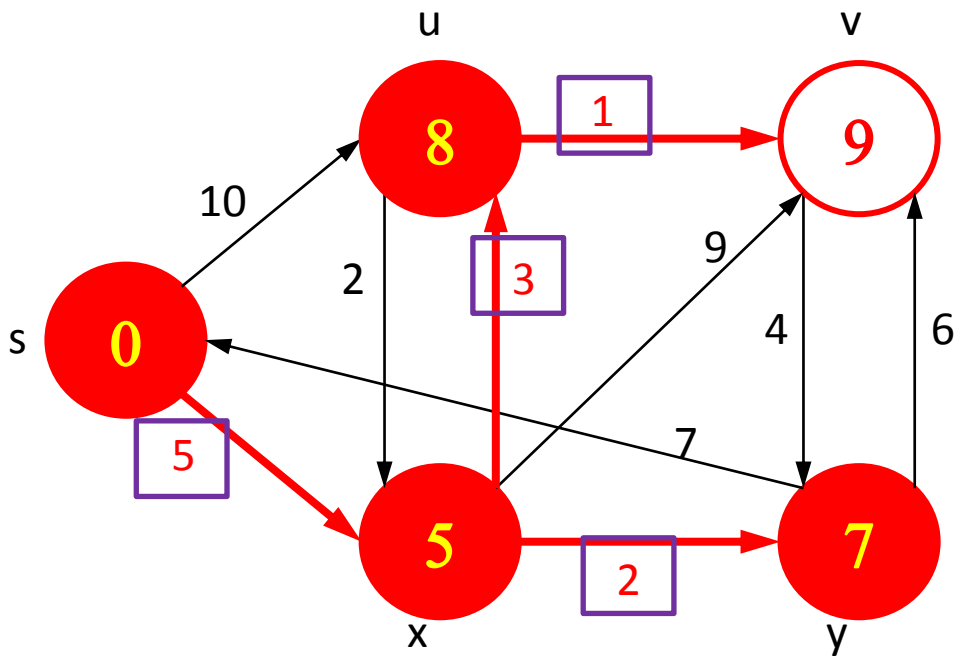
Feche **u** .

Recalcule as estimativas de **v**.

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**13**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	y	s	x
Fechado	Sim	Sim	Não	Sim	Sim

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



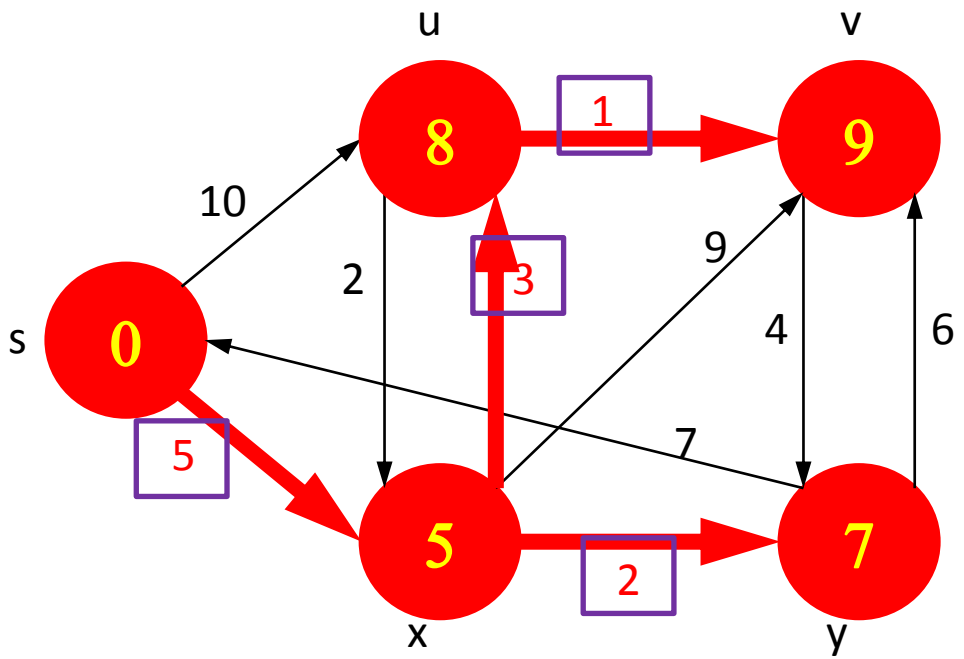
Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **v**

Feche **v** .

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**9**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	u	s	x
Fechado	Sim	Sim	Não	Sim	Sim

2 – Algoritmo de Djikstra

Exemplo:



Selecione o vértice aberto de estimativa mínima: **v**

Feche **v** .

Vértices	s	u	v	x	y
Estimativas	**0**	**8**	**9**	**5**	**7**
Precedentes	s	x	u	s	x
Fechado	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

2 – Algoritmo de Djikstra

Algoritmo:

```
Dijkstra(G,w,s)
1 for cada vertex u ∈ V
2   d(u)= ∞
3   pai(u)=(NIL)
4 d(s) = 0
5 S ← Ø
6 Q = V[G]
7 while Q ≠ Ø
8     do  u ← extractMin(Q)
9         S ← S ∪ {u}
10          for cada v ∈ adjacente(u)
11          Relax(u,v,w)
```

3

Algoritmo de Prim

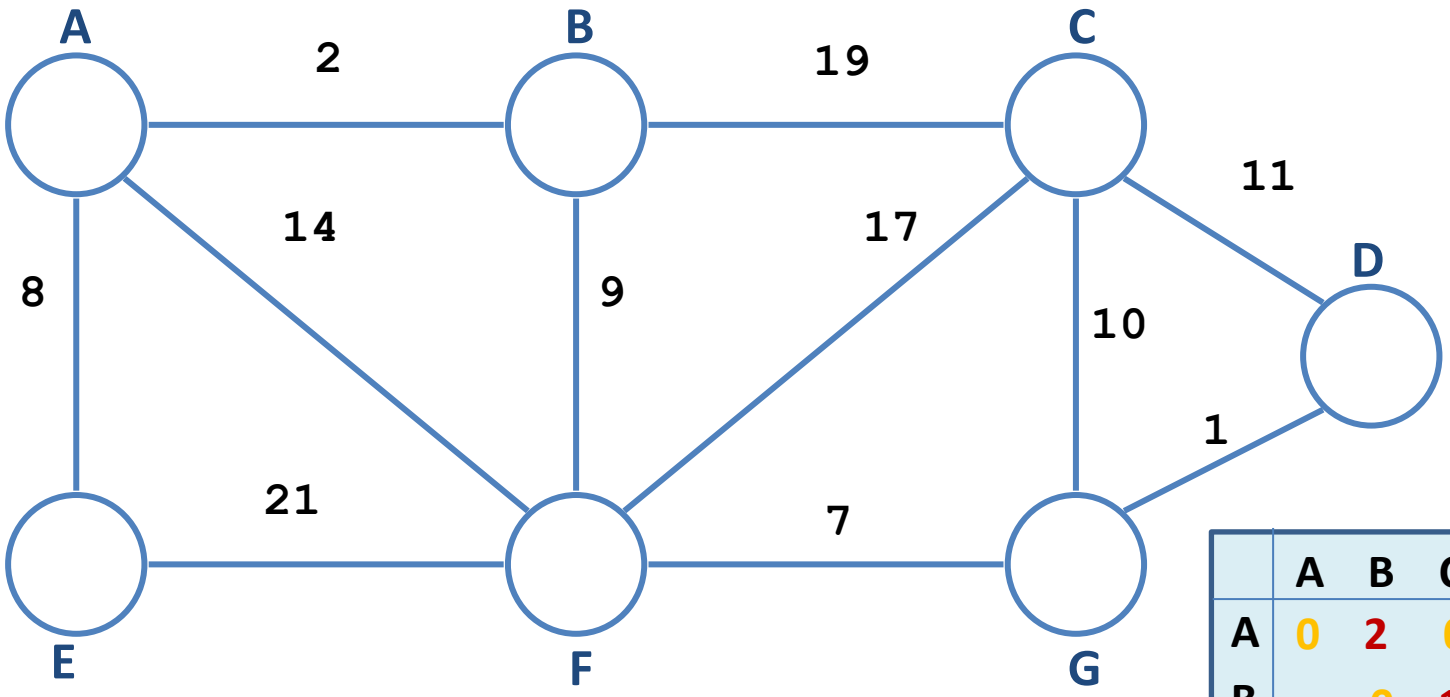
3 – Algoritmo de Prim

Características:

- O **algoritmo de Prim** é um algoritmo guloso, utilizado para encontrar uma árvore geradora mínima em um grafo conectado, ponderado, ~~orientado ou não~~.Não Orientado
- Foi desenvolvido em 1930 pelo matemático Vojtěch Jarník e depois pelo cientista da computação Robert C. Prim em 1957 e redescoberto por Edsger Dijkstra em 1959.
- Deve-se determinar um vértice de origem.
- Fornecerá uma resposta que não necessariamente é a única.

3 – Algoritmo de Prim

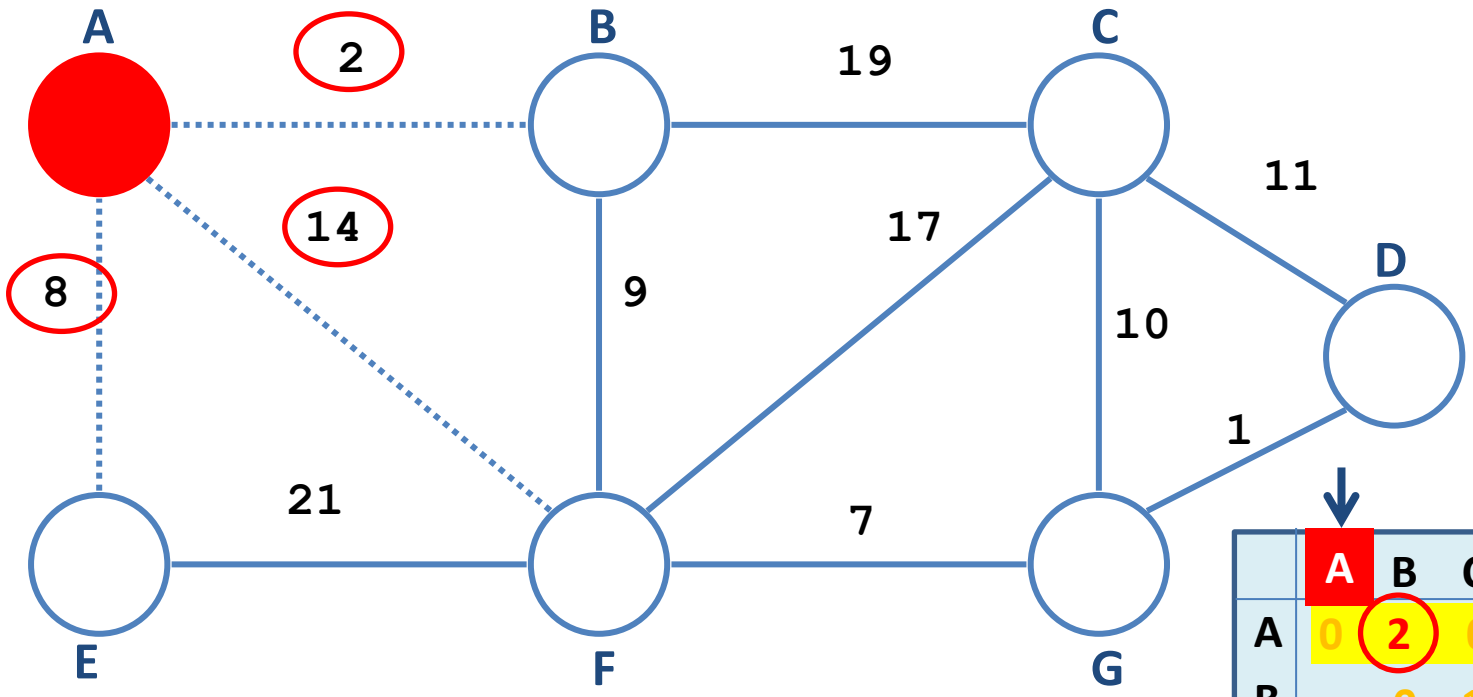
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

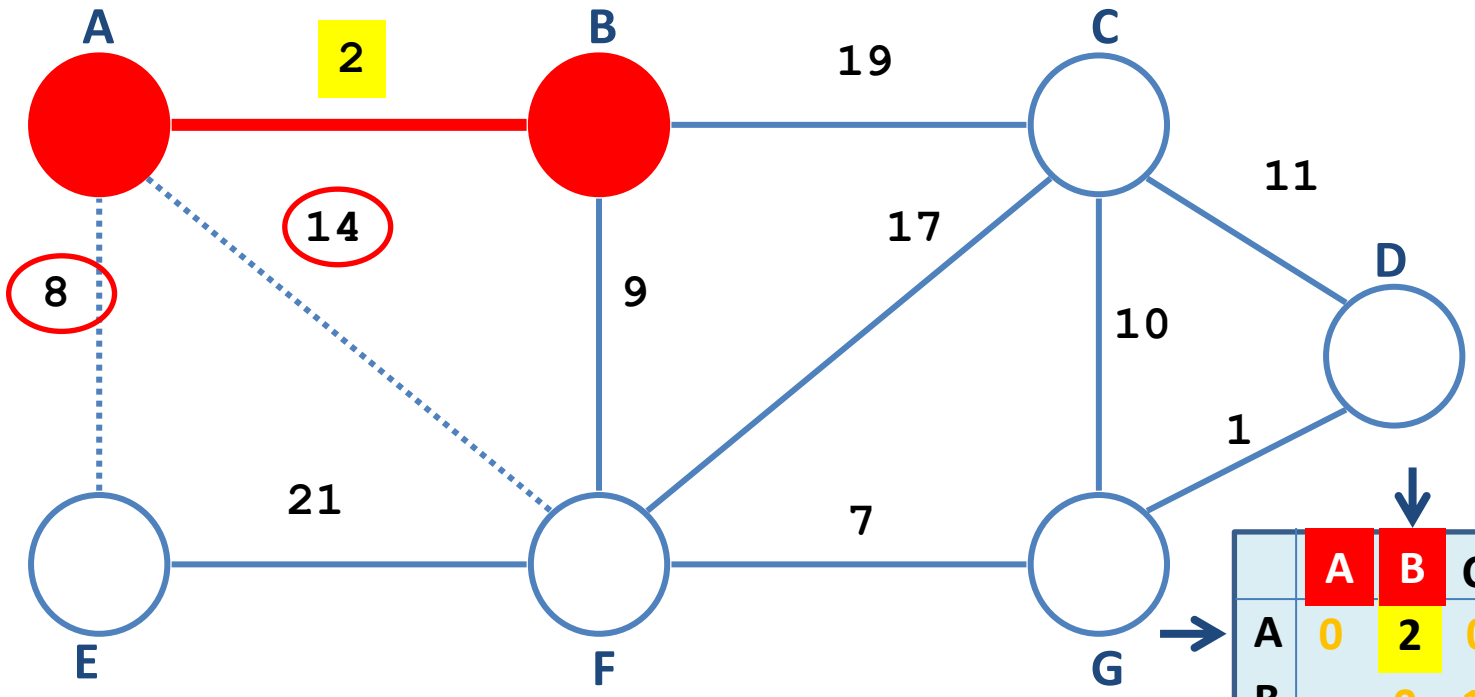
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

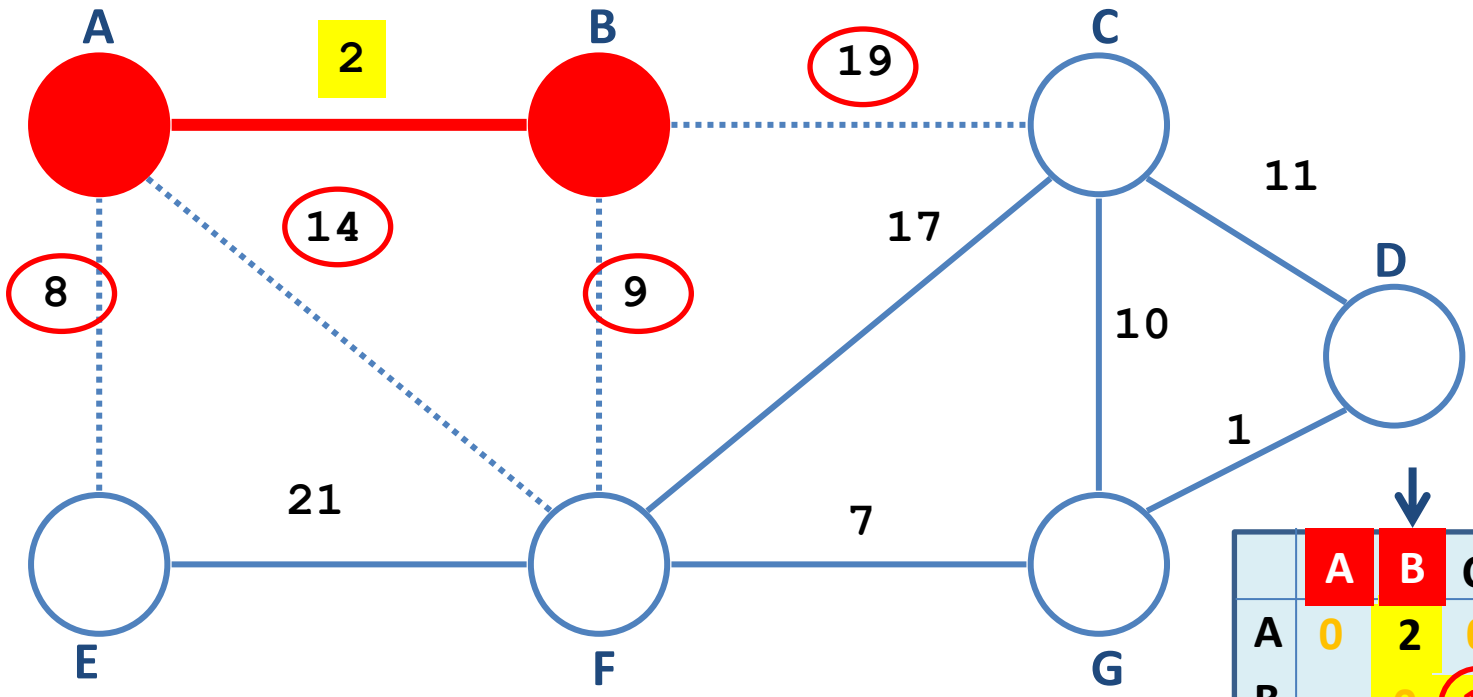
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

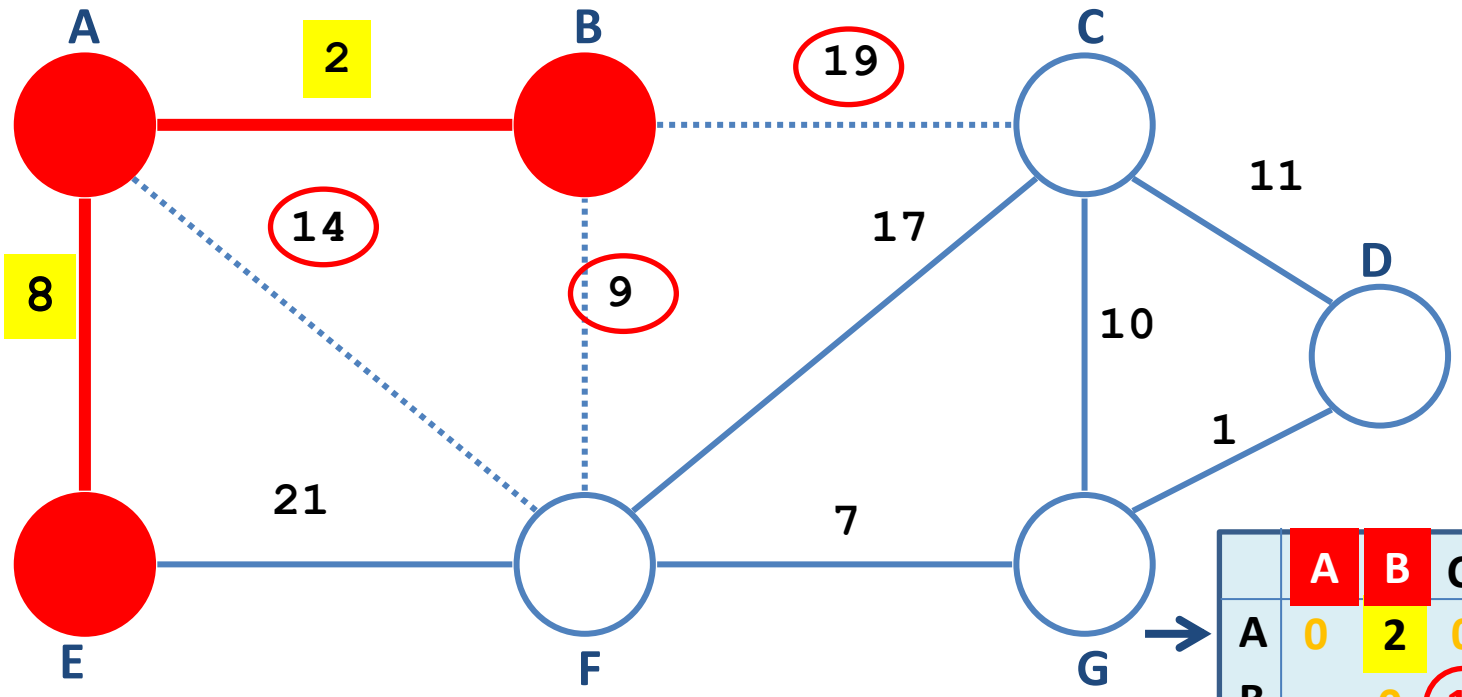
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

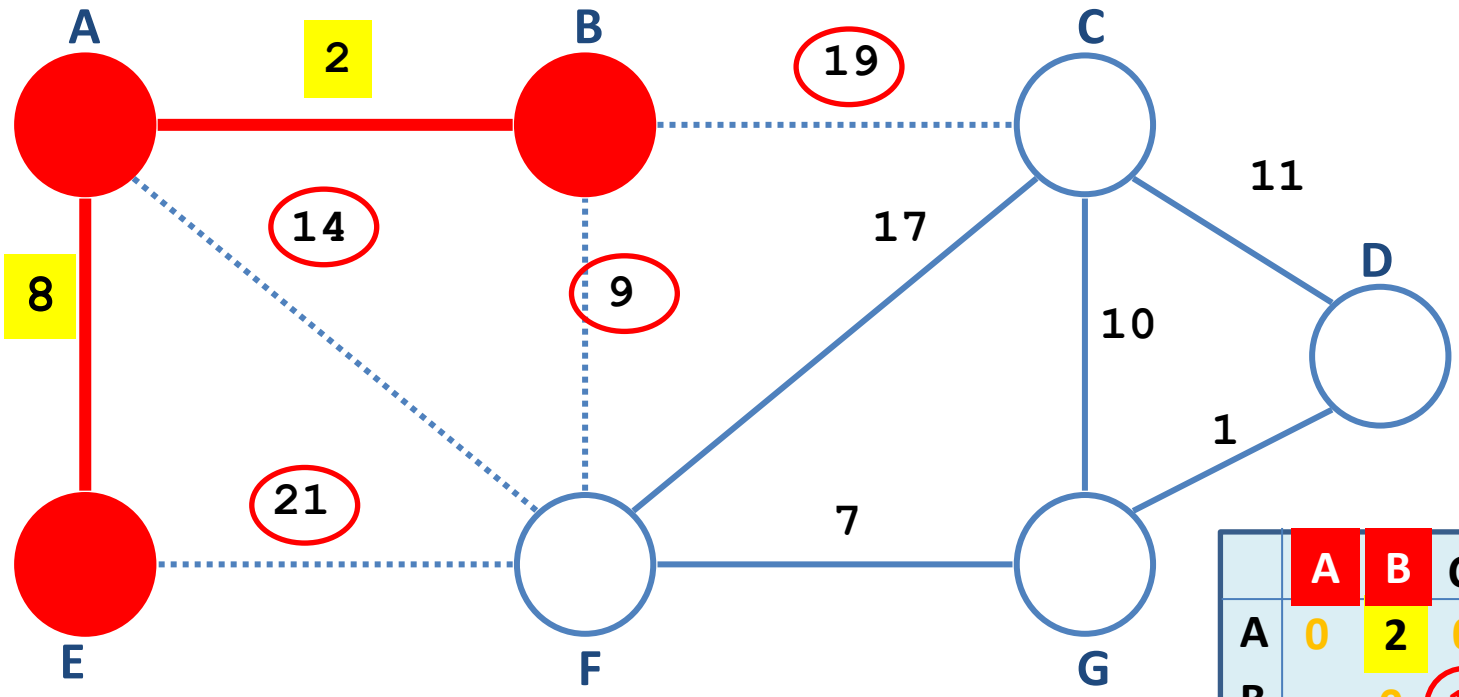
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

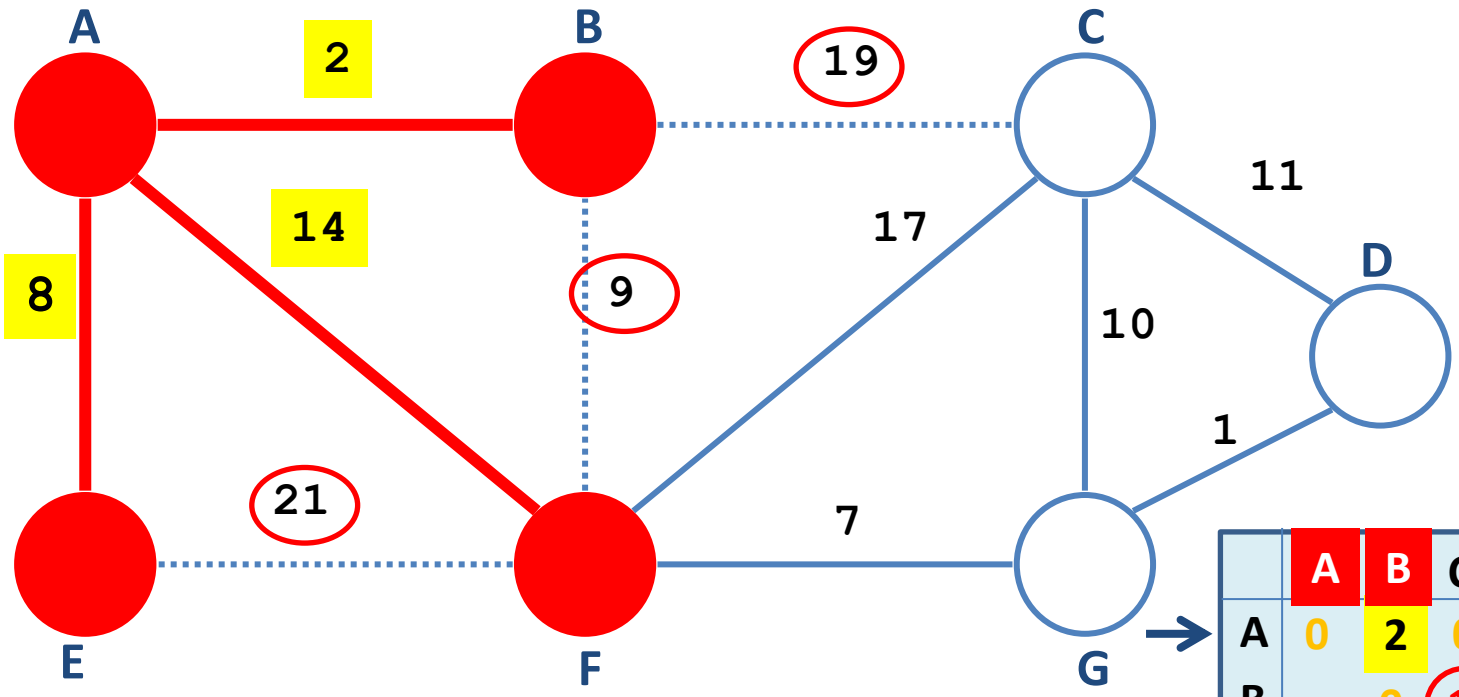
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

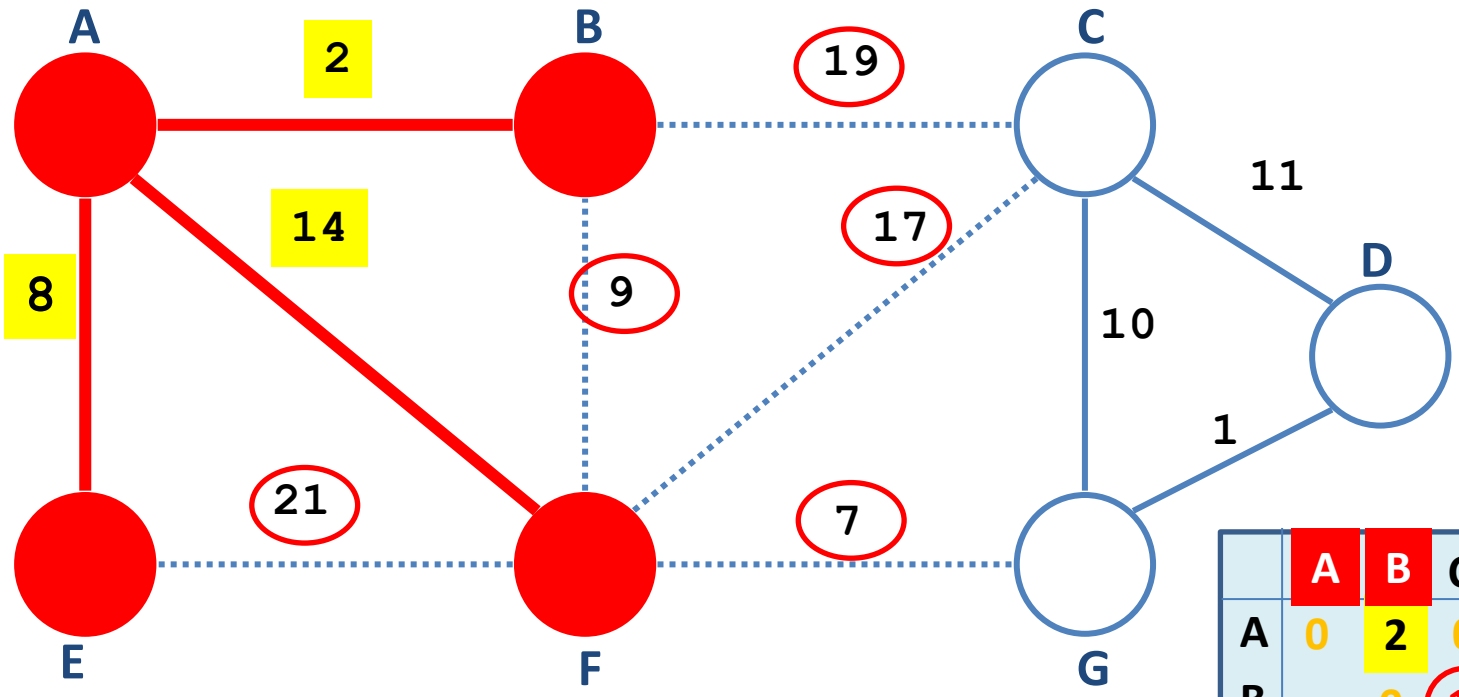
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

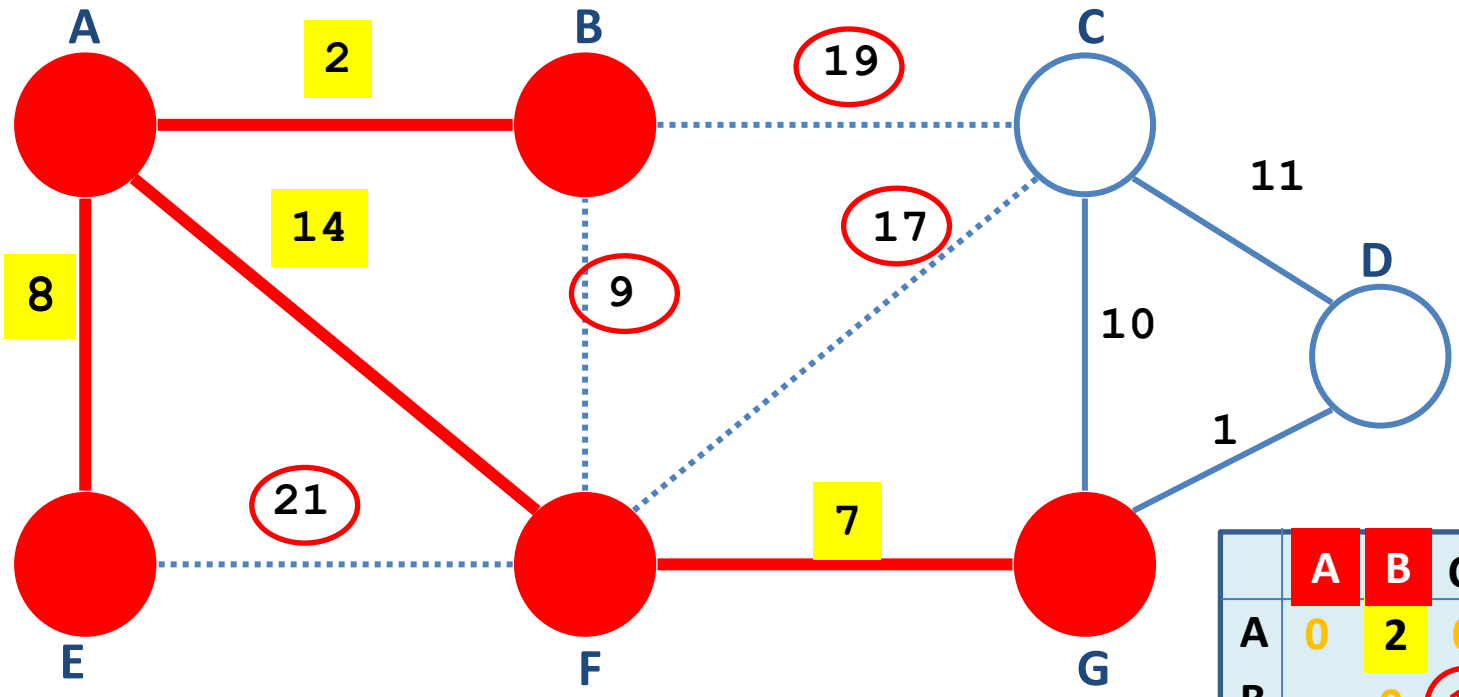
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

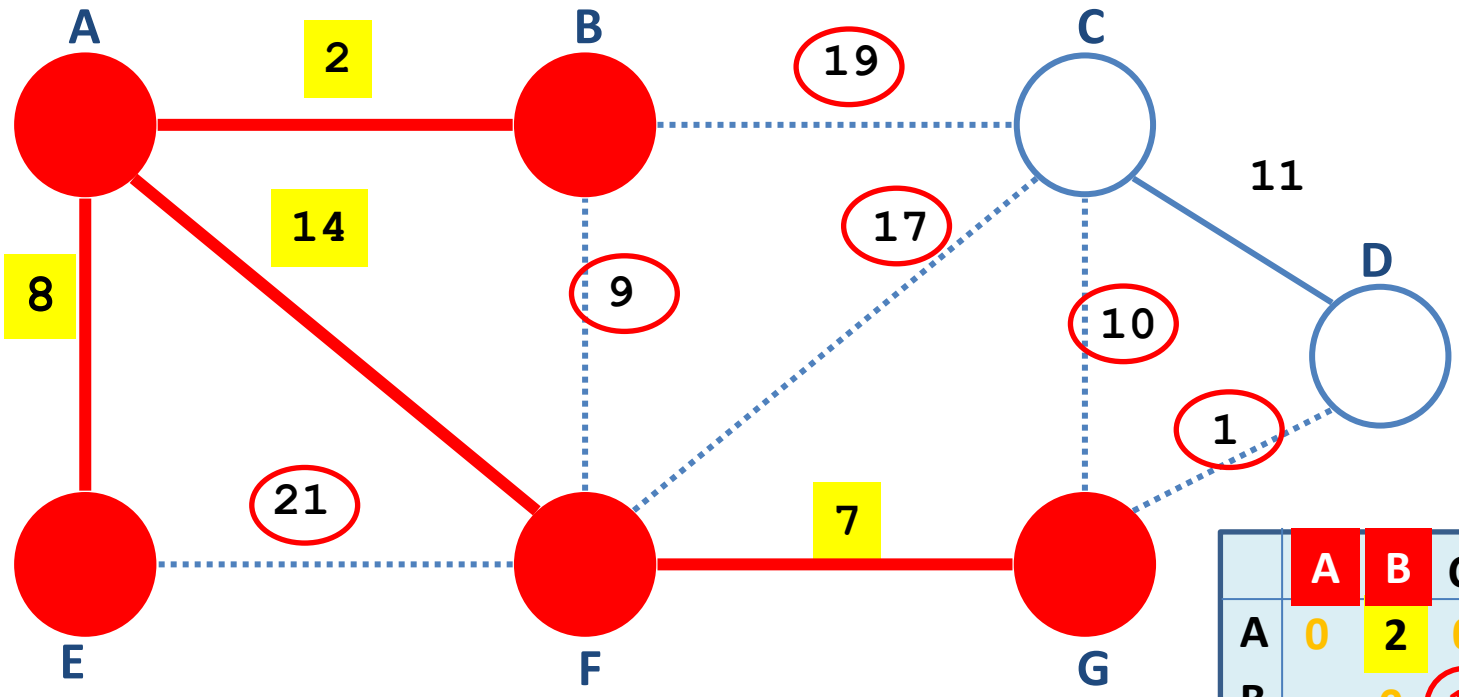
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

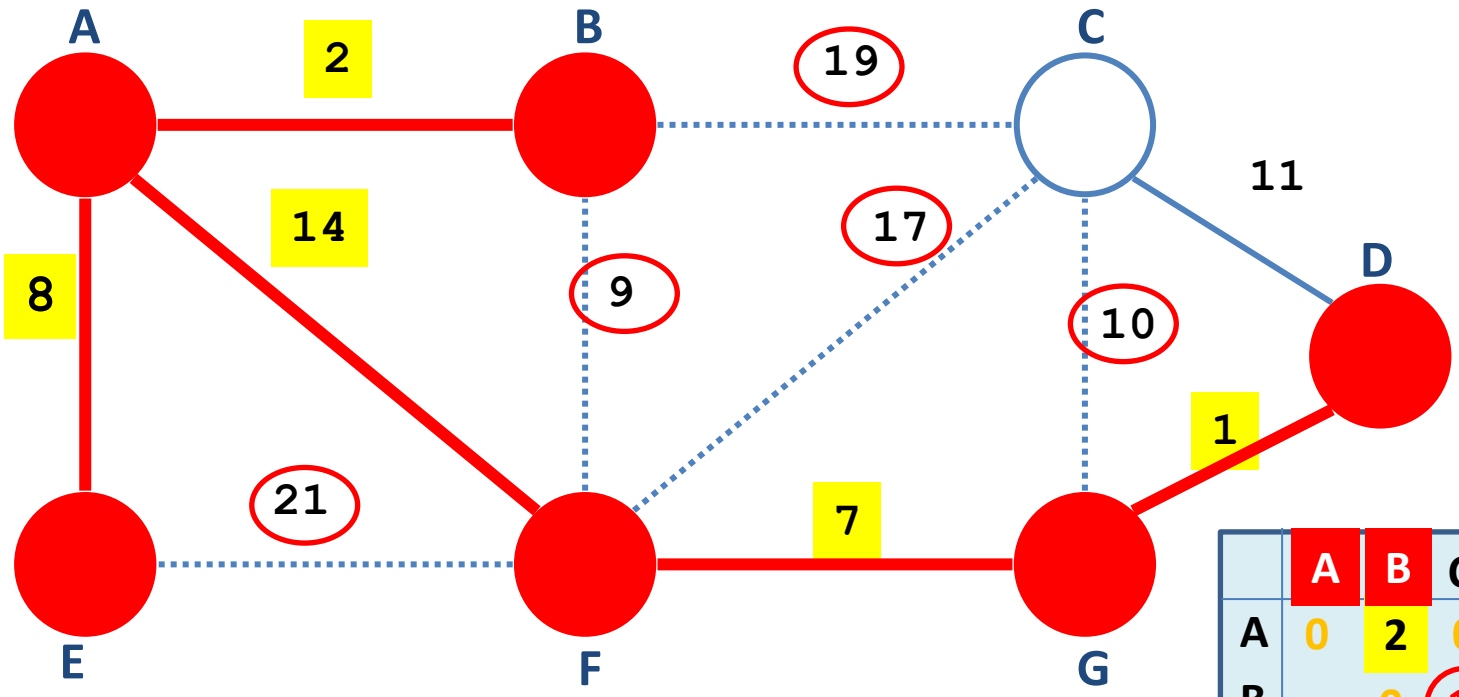
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

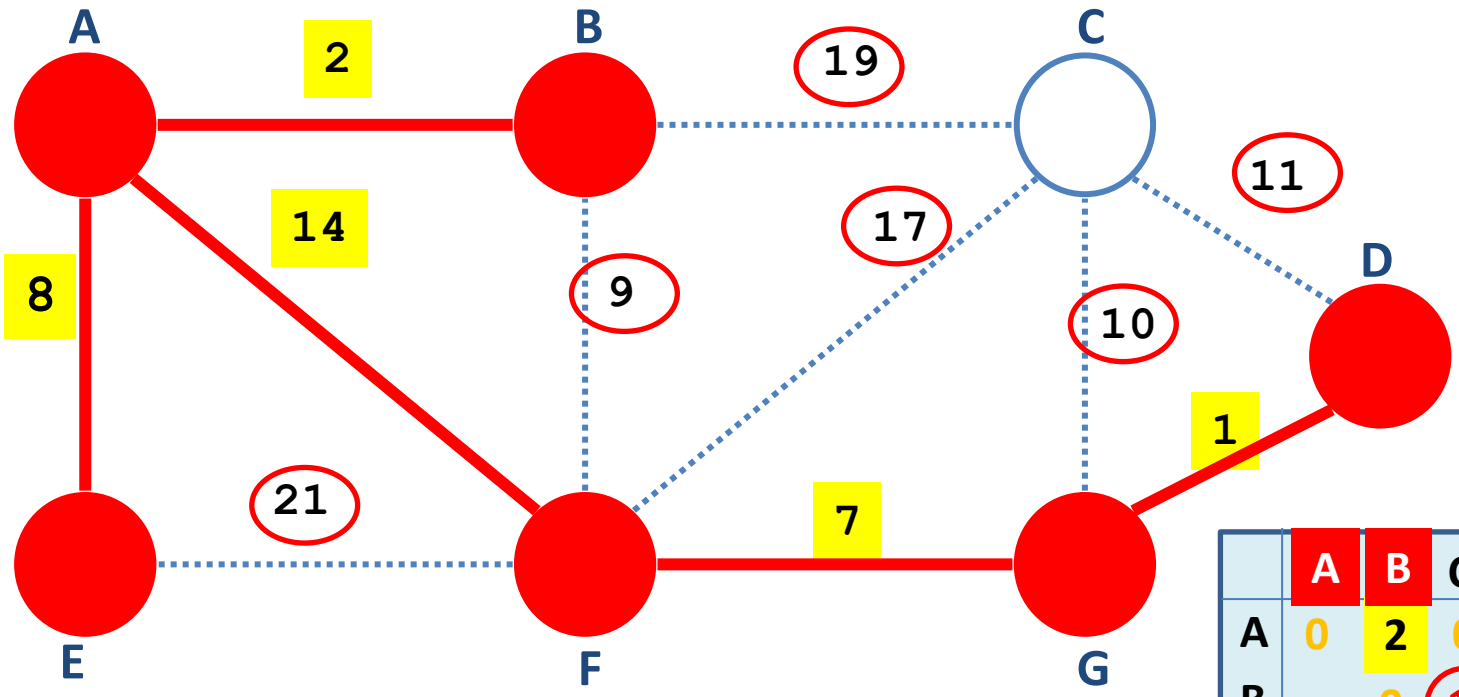
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	11	0	17	10
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

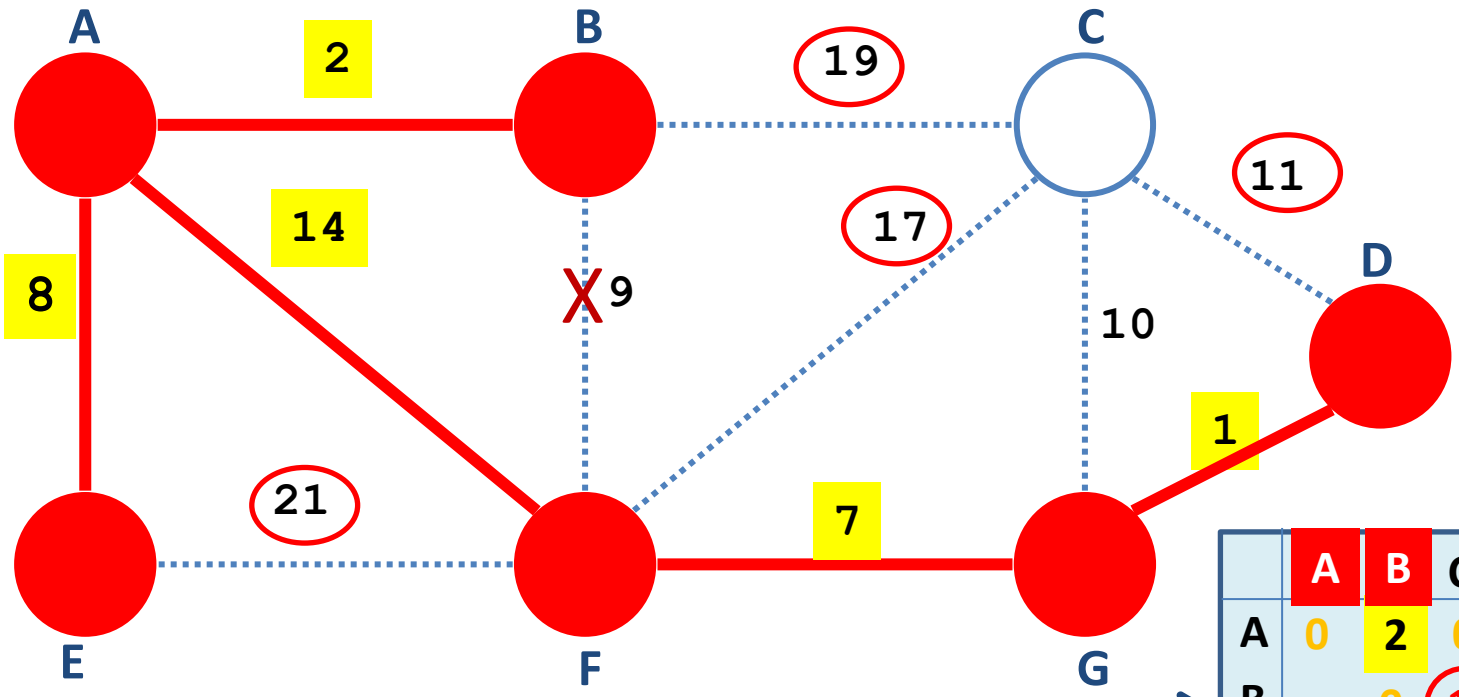
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	11	0	17	10
D →				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

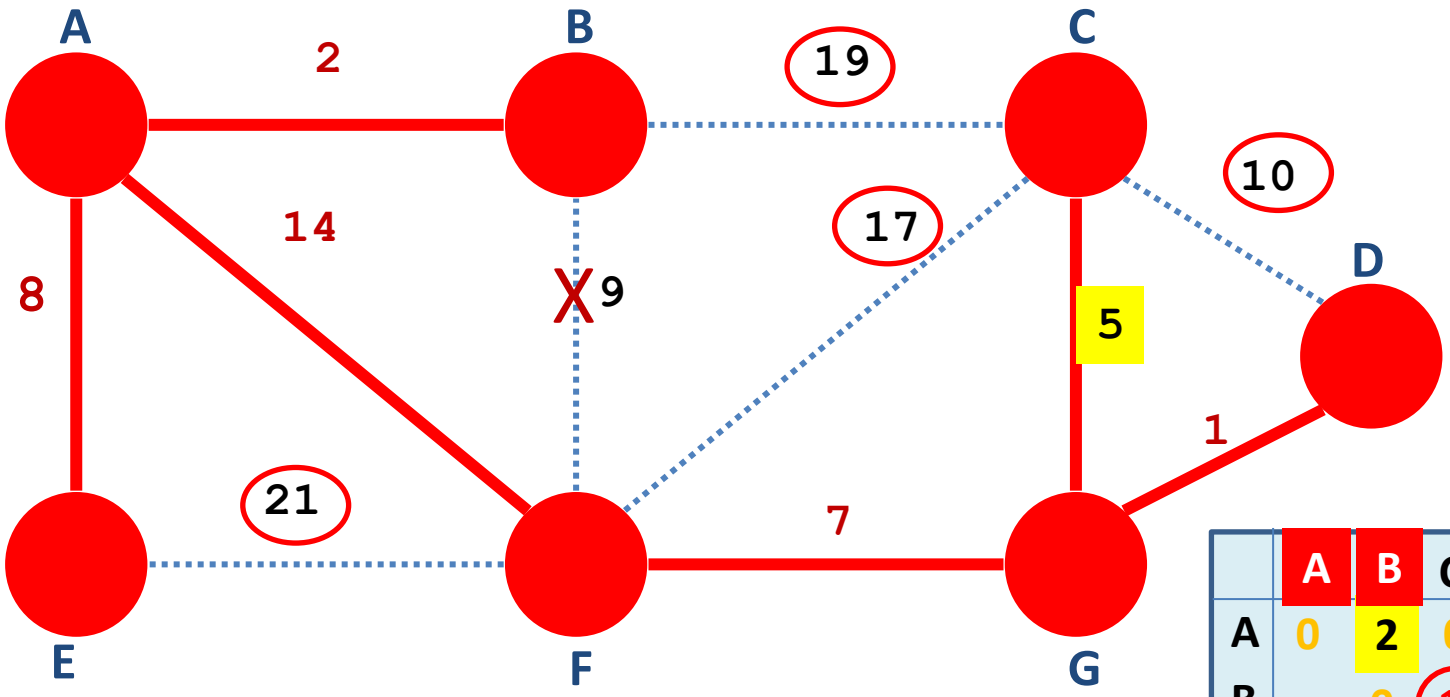
Exemplo: iniciando em A



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	X	0
C			0	11	0	17	10
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A

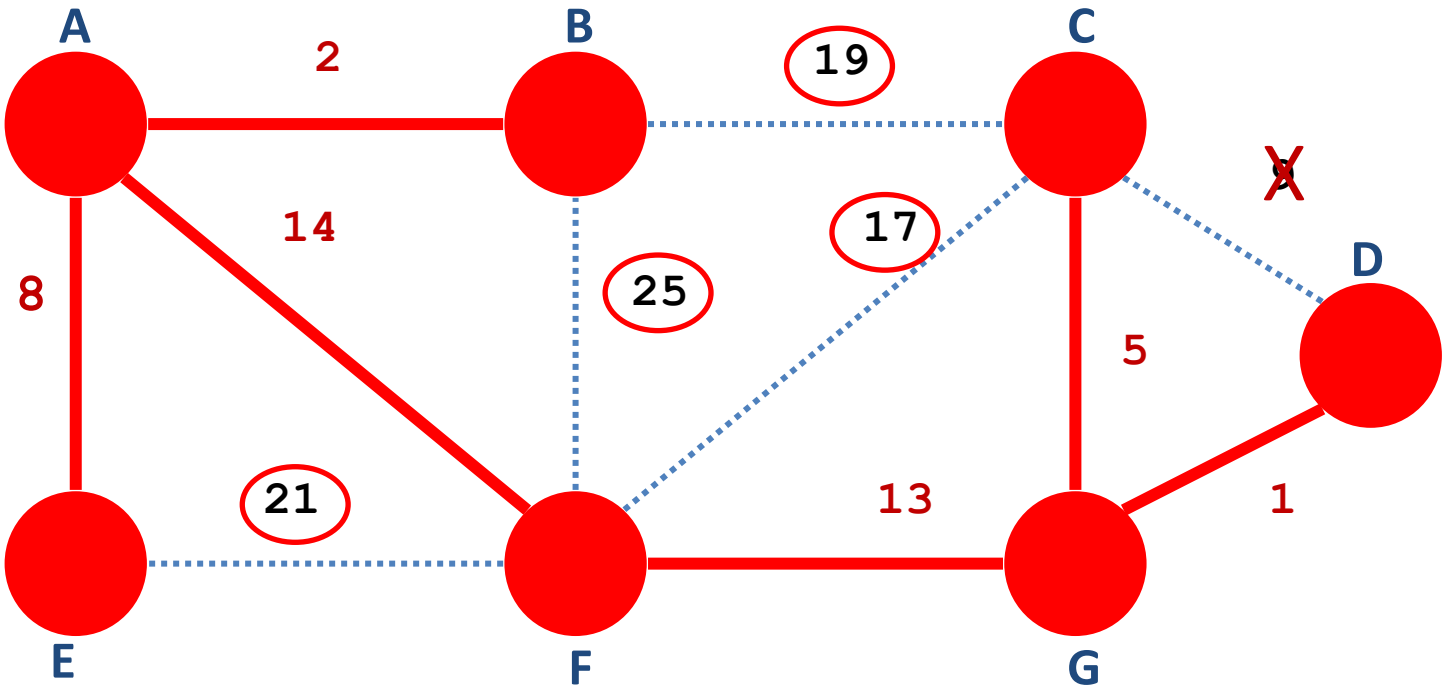


NÃO TERMINEI !!!!!!

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2	0	0	8	14	0
B		0	19	0	0	9	0
C			0	10	0	17	5
D				0	0	0	1
E					0	21	0
F						0	7
G							0

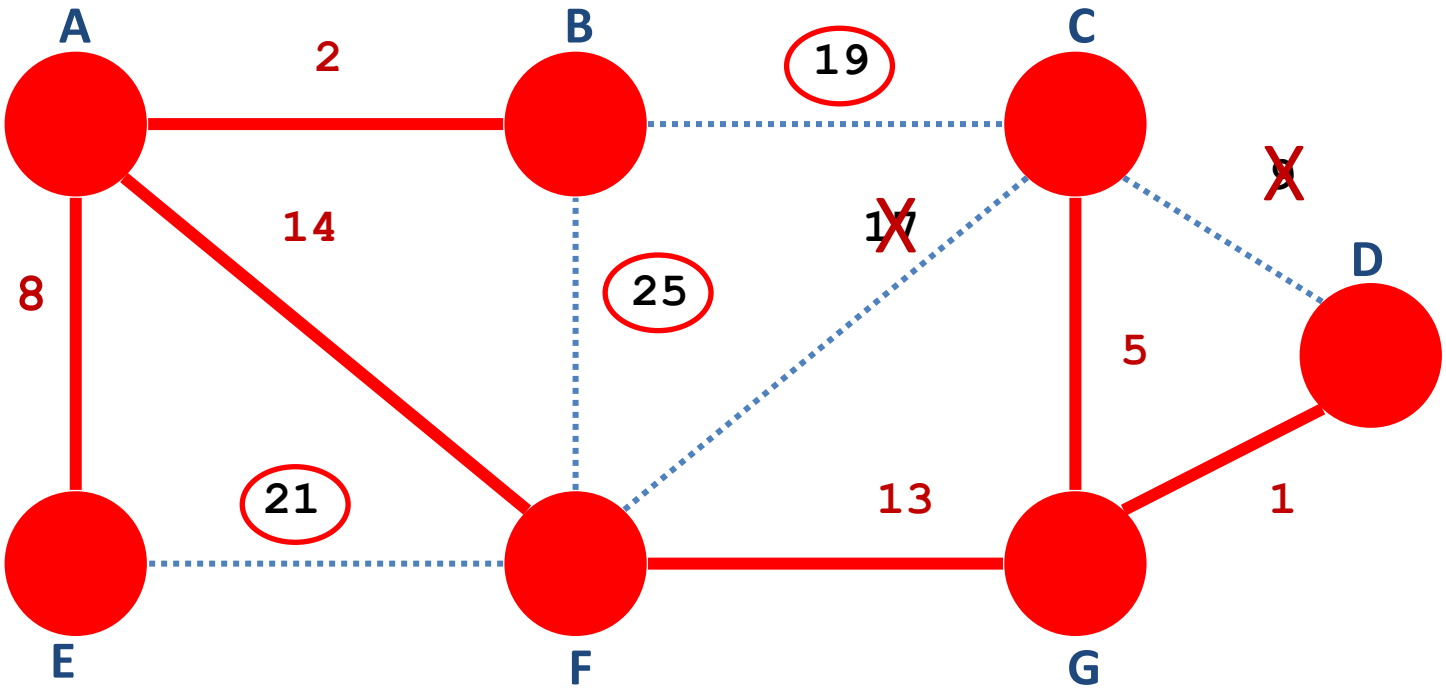
3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A



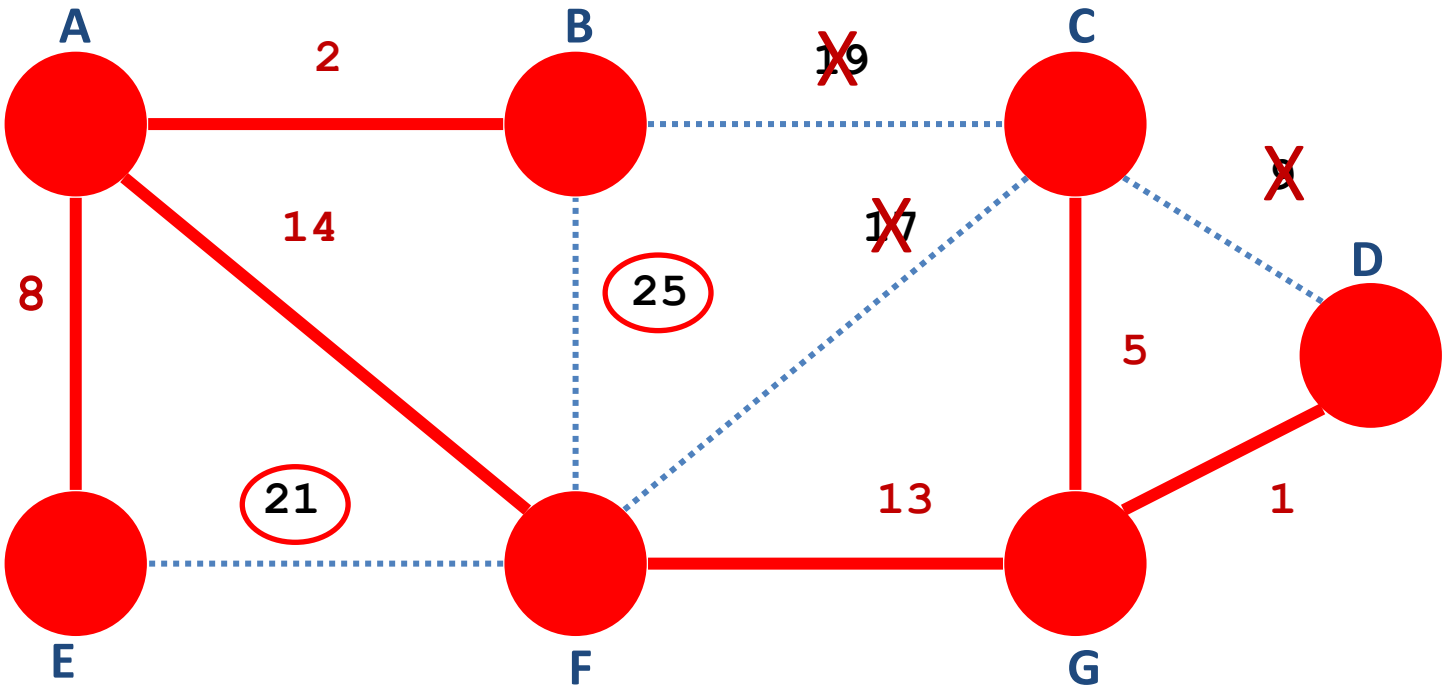
3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A



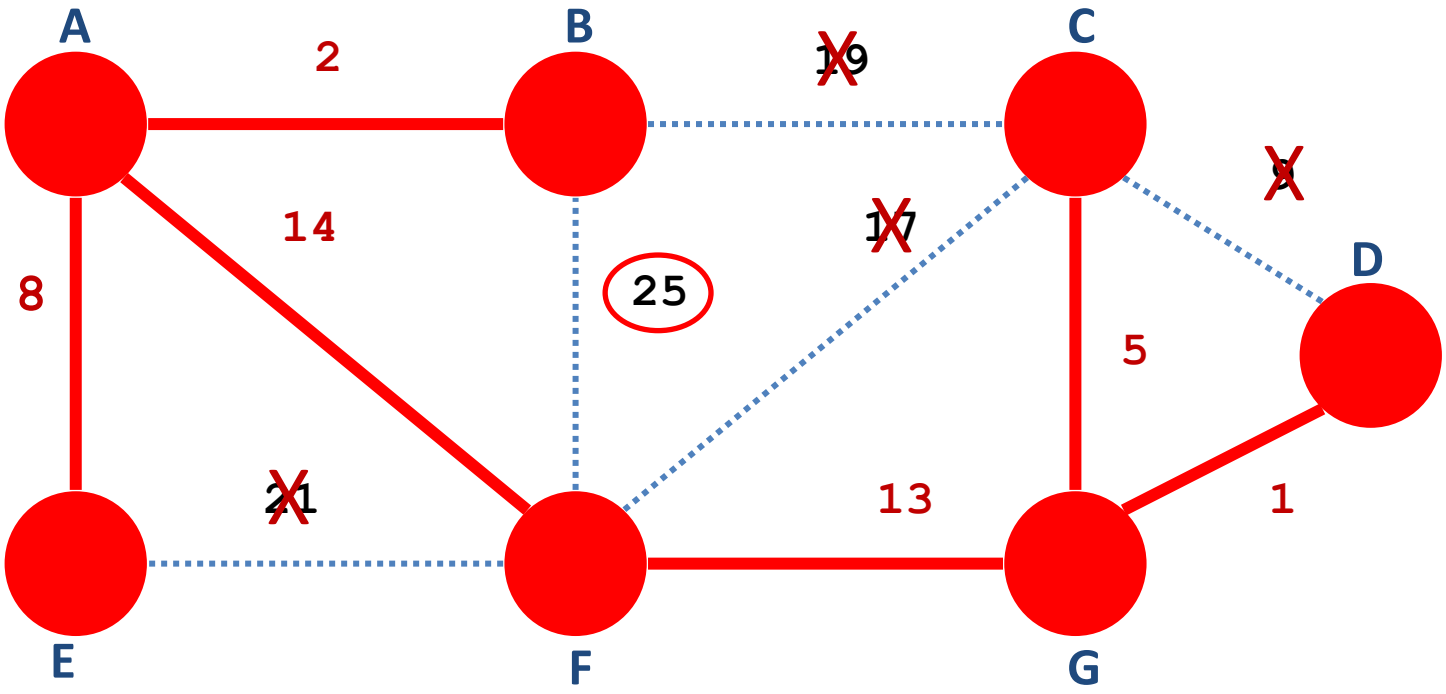
3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A



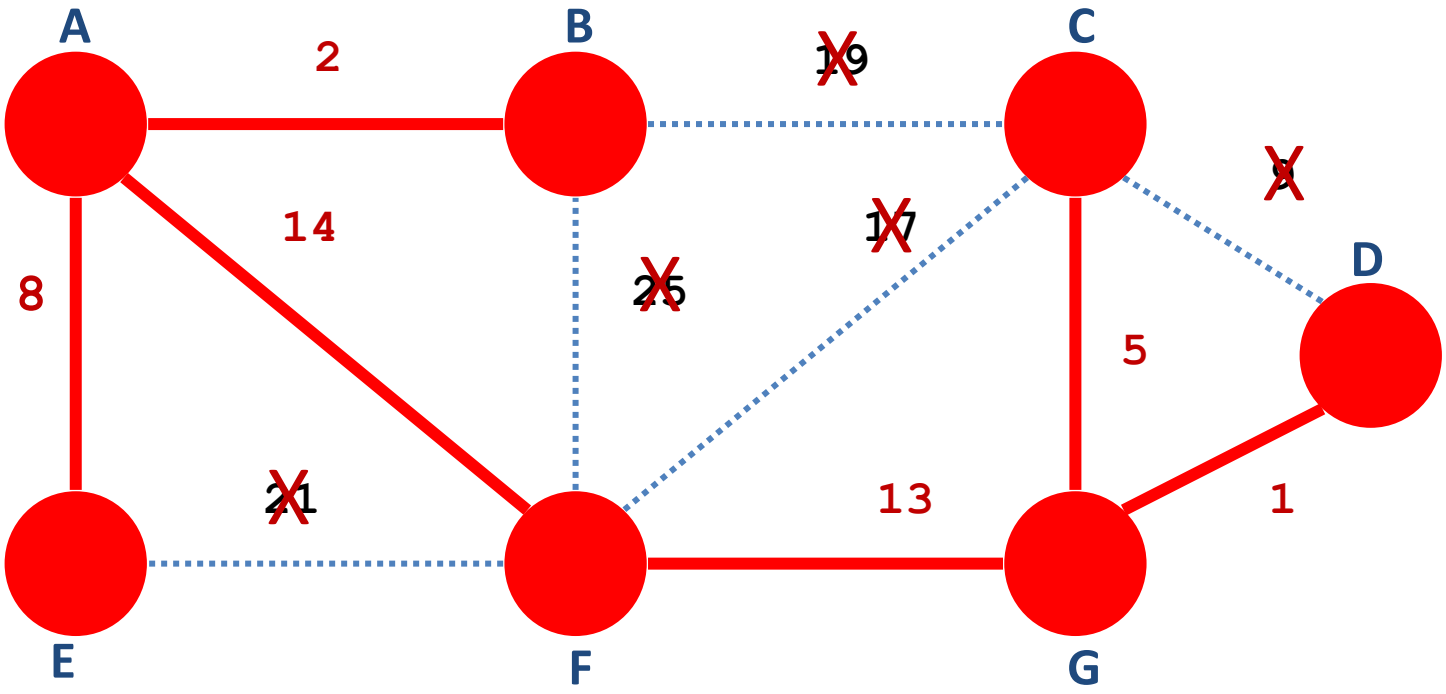
3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A



3 – Algoritmo de Prim

Exemplo: iniciando em A



3 – Algoritmo de Prim

Algoritmo:

```
PRIM(G,w,r)
1 for cada u em V[G] do
2     chave[u] ← ∞
3     pai[u] ← NIL
4 chave[r] ← 0
5 Q ← V[G]
6 while Q != {} do
7     u ← EXTRACT-MIN(Q)
8        for cada v em Adj[u] do
9             if v ∈ Q e w(u,v) < chave[v]
10                then pai[v] ← u
11                chave[v] ← w(u,v)
```

Bibliografias

i. CORMEN, LEISERSON, RIVEST, STEIN, **Algoritmos: Teoria e Prática**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Campus, 2002: Capítulo 23.

ii. TONIDANDEL, Flávio, Slides das aulas de Algoritmos Computacionais. FEI, 2011.

iii. http://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/custo-minimo/dijkstra.html

iv. http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/dijkstra.html

v. http://www.lcad.icmc.usp.br/~nonato/ED/Dijkstra/node84.html

vi. http://en.wikipedia.org/wiki/Prim%27s_algorithm

vii. http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/courses/mo417/2003s1/aulas/2003-05-16.html

viii. https://sites.google.com/site/tecprojalgoritmos/problemas/prim-e-kruskal