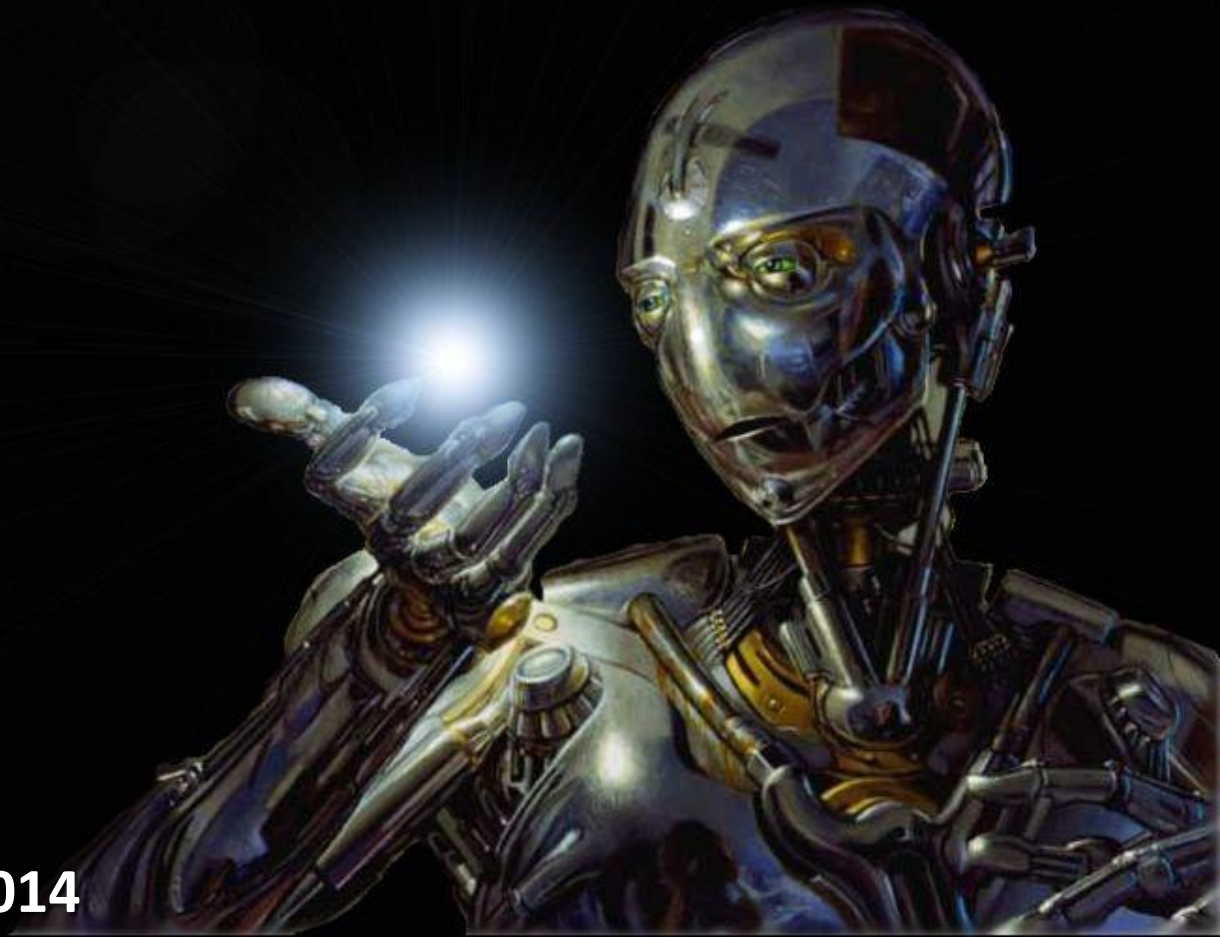


INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Parte 10

Lógica *Fuzzy*



1

Lógica Fuzzy

1 – Lógica Fuzzy

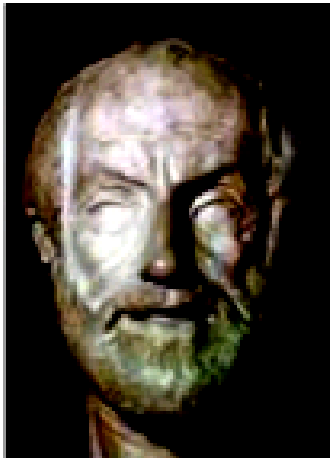
1.1 – Introdução:

- **Lógica** é a ciência que estuda e modela as leis do raciocínio humano.
- A **Lógica Proposicional** mostra-se como um importante auxílio na automatização do raciocínio, porém é insuficiente para a representação de problemas complexos onde é necessário considerar valores intermediários entre **verdadeiro** e **falso**.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Clássica de Aristóteles**
a.C.: Princípio da Bivalência



384 a.C. – 322 a.C.

“Tudo deve ser ou não ser...”
— Aristóteles

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- Lógica Clássica de Aristóteles

Elementos *pertencem* ou *não pertencem* a um dado conjunto A em um universo X , ou seja,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= 1 && \text{se e somente se } x \in A \\ &= 0 && \text{se e somente se } x \notin A \end{aligned}$$

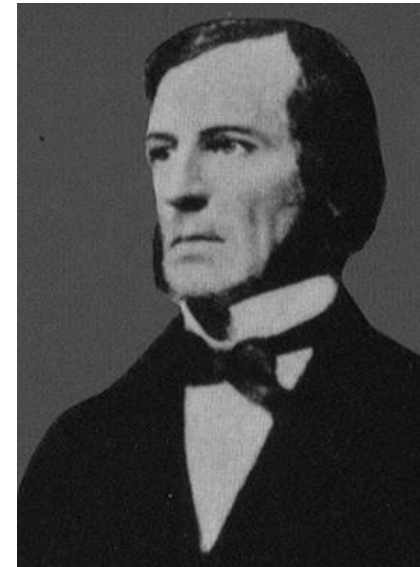
onde $f_A(x)$ é a função característica do conjunto.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Booleana** faz uso de variáveis e constantes formando um conjunto discreto e finito, que unicamente podem assumir dois valores: *1* ou *0*, representando *Sim* ou *Não*.

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1, & \text{Se } X \in A \\ 0, & \text{Se } X \notin A \end{cases}$$



George Boole (1815-1864)

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Booleana** faz uso de variáveis e constantes formando um conjunto discreto e finito, que unicamente podem assumir dois valores: *1* ou *0*, representando *Sim* ou *Não*.

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

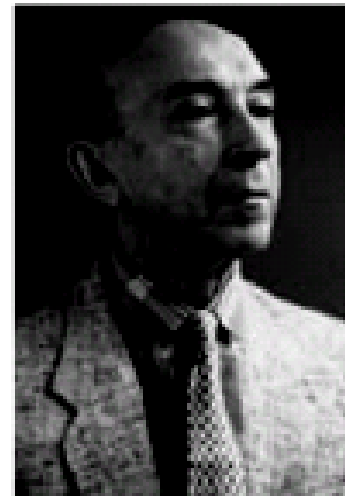
1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy* (nebulosa)** é a ciência que estuda e modela o *modo aproximado* do raciocínio humano. Considera a possibilidade de algo **ser e não ser** ao mesmo tempo.

1965: Lógica Fuzzy (Zadeh)

“Elementos pertencem a um certo conjunto com diferentes graus de pertinência.”



1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy* (nebulosa)** é a ciência que estuda e modela o *modo aproximado* do raciocínio humano. Considera a possibilidade de algo **ser e não ser** ao mesmo tempo.

Um conjunto fuzzy A em um universo X é definido por uma função de pertinência:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

1 – Lógica Fuzzy

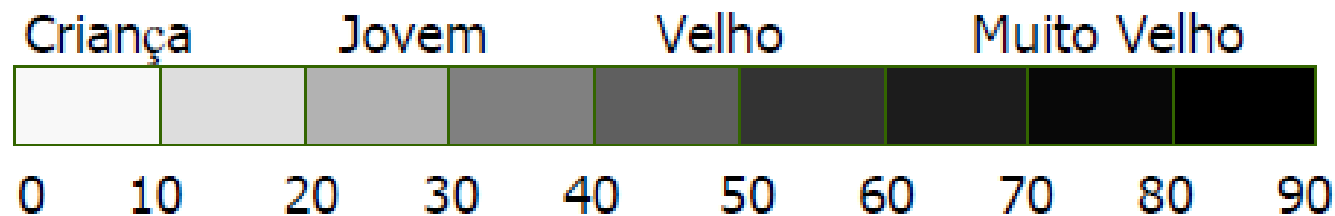
1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy*** é uma técnica inteligente que tem como objetivo modelar o modo aproximado de raciocínio, imitando a habilidade humana de tomar decisões em um ambiente de incerteza e imprecisão.
 - Exemplos: Risco de um investimento, limiares de temperatura, maturidade de uma pessoa, intensidade de fluxos, etc.
- Permite que sistemas inteligentes de controle e suporte à decisão lidem com informações imprecisas ou nebulosas.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

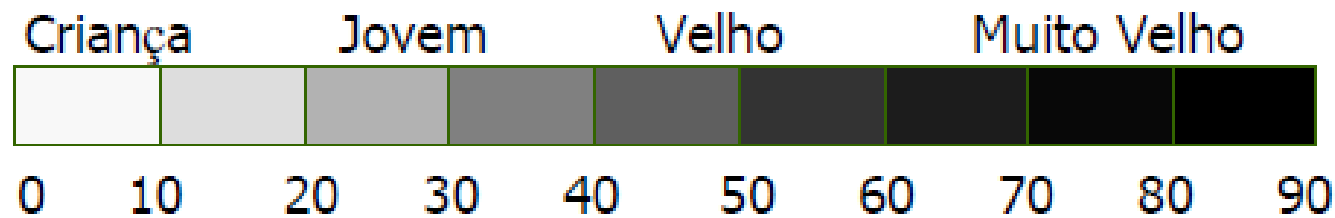
- Exemplo de aplicação: *qual é a idade que define se uma pessoa é jovem ou velha?*



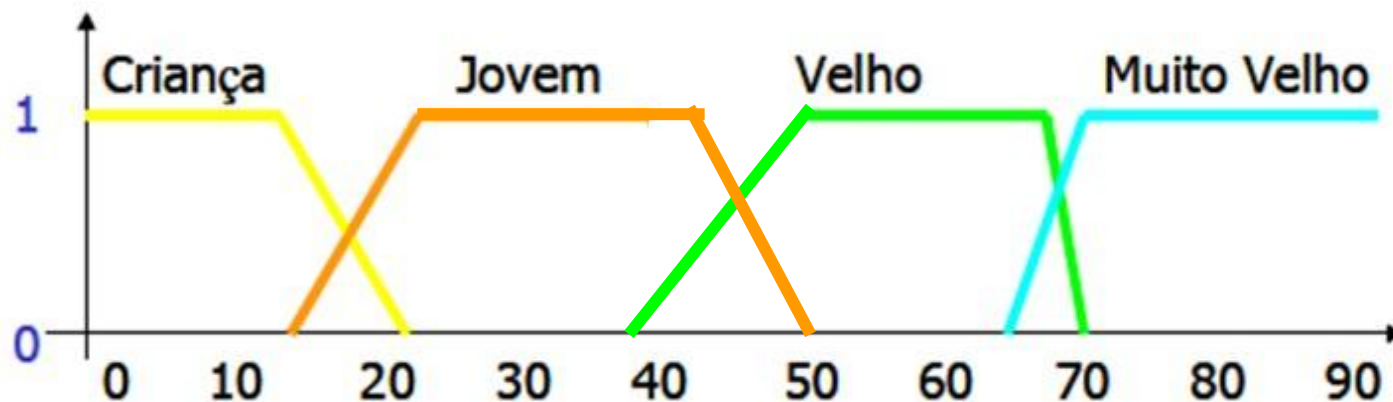
1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- Exemplo de aplicação: *qual é a idade que define se uma pessoa é jovem ou velha?*



- Fuzificação:** define-se os graus de pertinência:



1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy*** é aplicada em problemas onde o conhecimento envolve conceitos subjetivos e intrinsecamente imprecisos, e onde deseja-se obter explicações sobre o resultado do problema.
- **Fuzificação** é o processo de transformar números reais em uma representação ***Fuzzy***, com o objetivo de expressá-lo como uma medida de imprecisão.

1 – Lógica Fuzzy

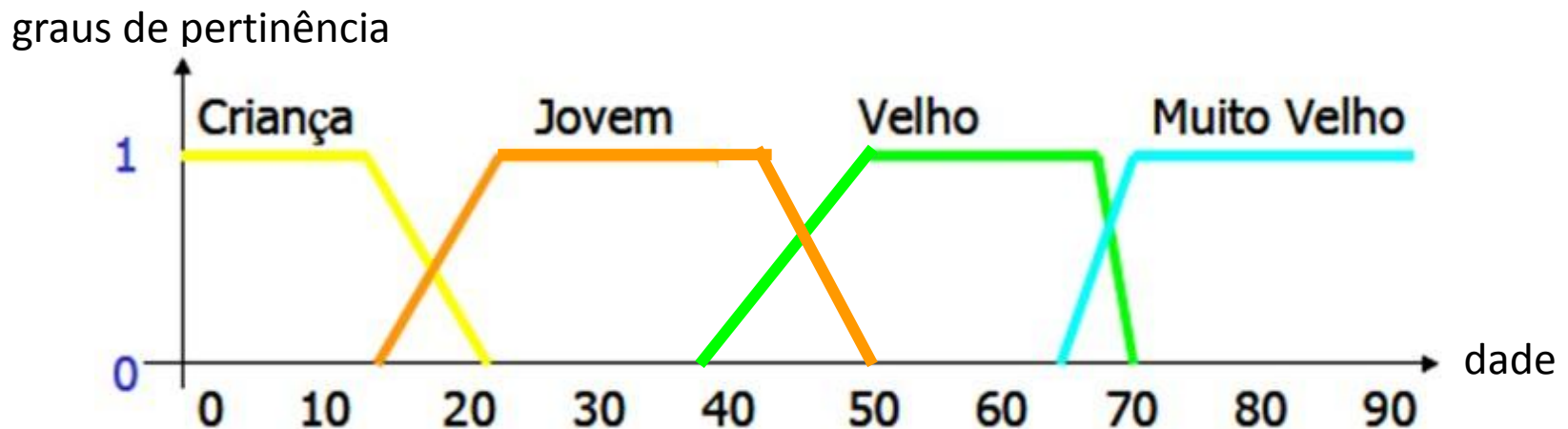
1.2 – Grau de Pertinência:

- É o **nível de compatibilidade** (incerteza) de um elemento do conjunto com o conceito semântico deste conjunto.
- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o grau de pertinência descreve propriedades que têm valores contínuos, associando as partições desses valores com um conceito semântico.
 - Essas partições podem, e devem, coincidir (*overlap*) para modelagem da ambiguidade.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

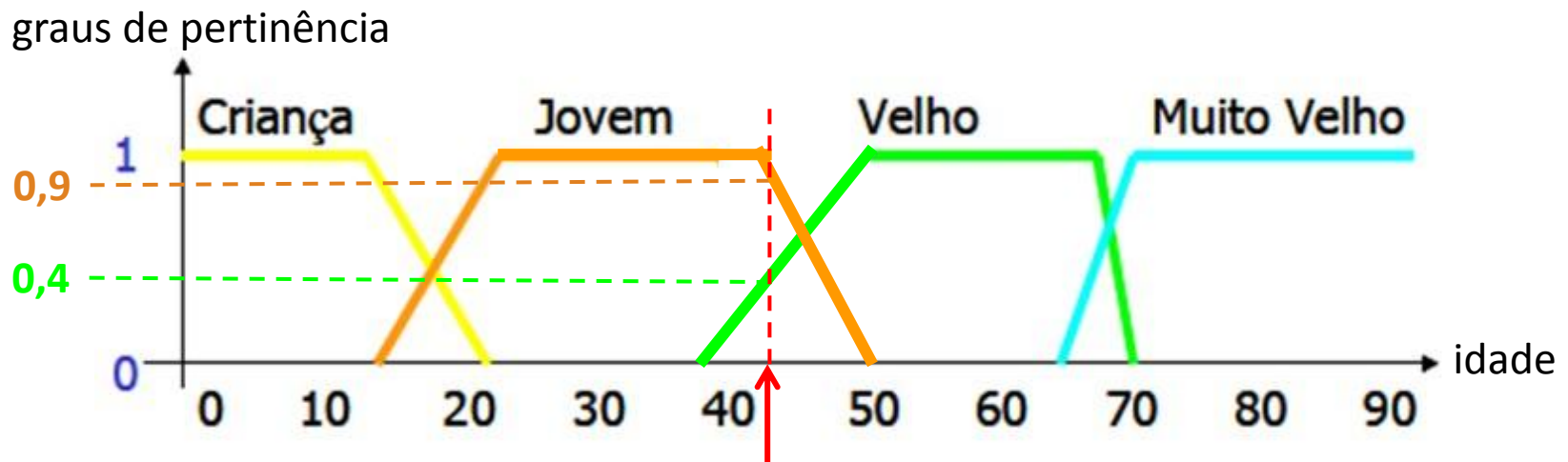
- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*



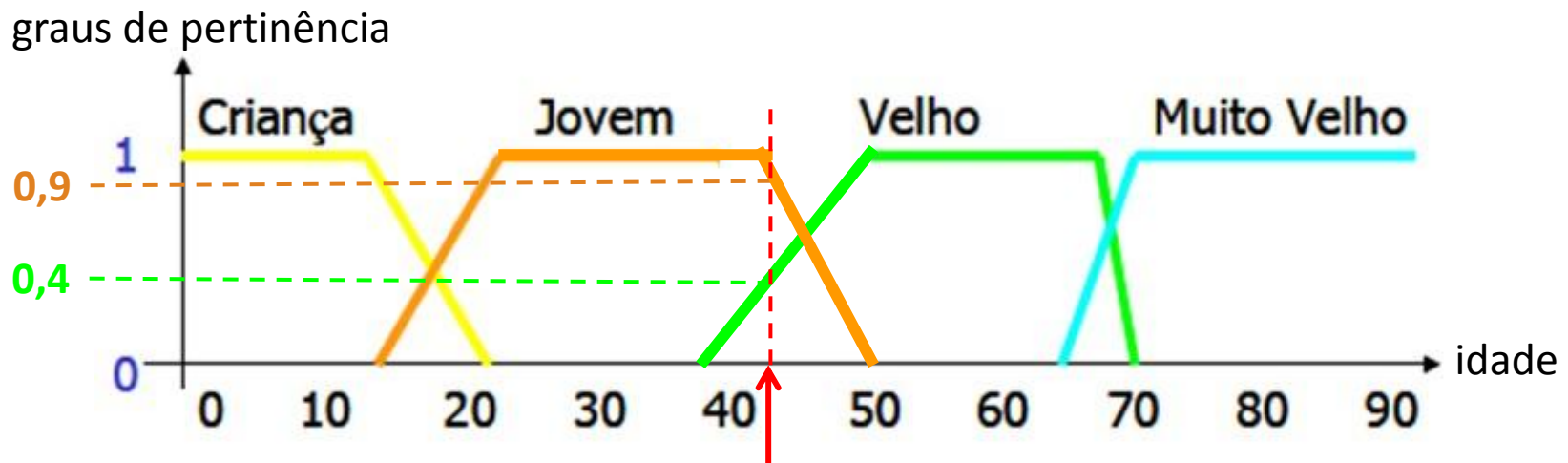
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

*Fabiana tem grau de pertinência 0,4 para velho e 0,9 para jovem. Assim, **Fabiana é mais jovem do que velha!***

Fabiana é jovem e velha ao mesmo tempo, porém com graus de pertinência diferentes.



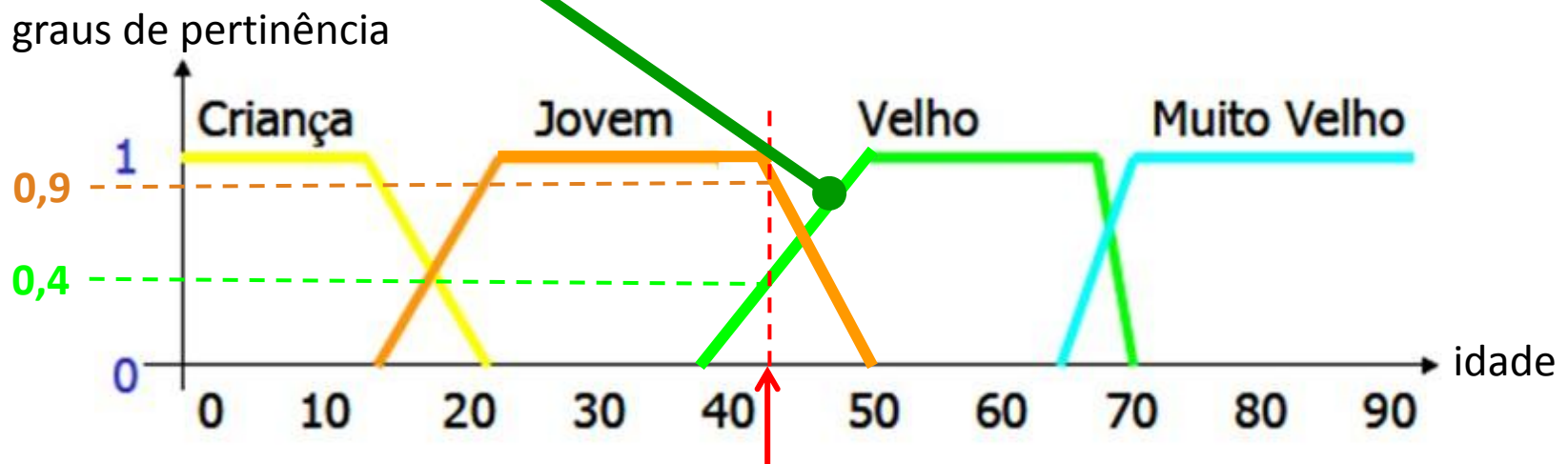
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR CRESCENTE: } \mu_A(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

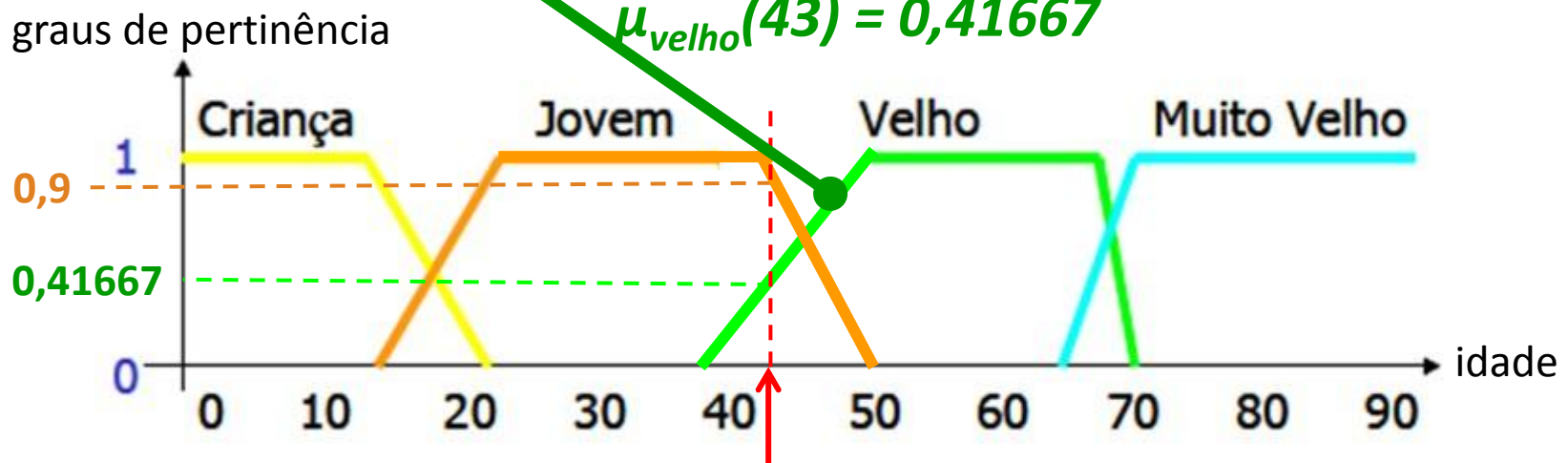
Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR CRESCENTE: } \mu_A(x) = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = (43 - 38) / (50 - 38)$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = 5 / 12$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = 0,41667$$



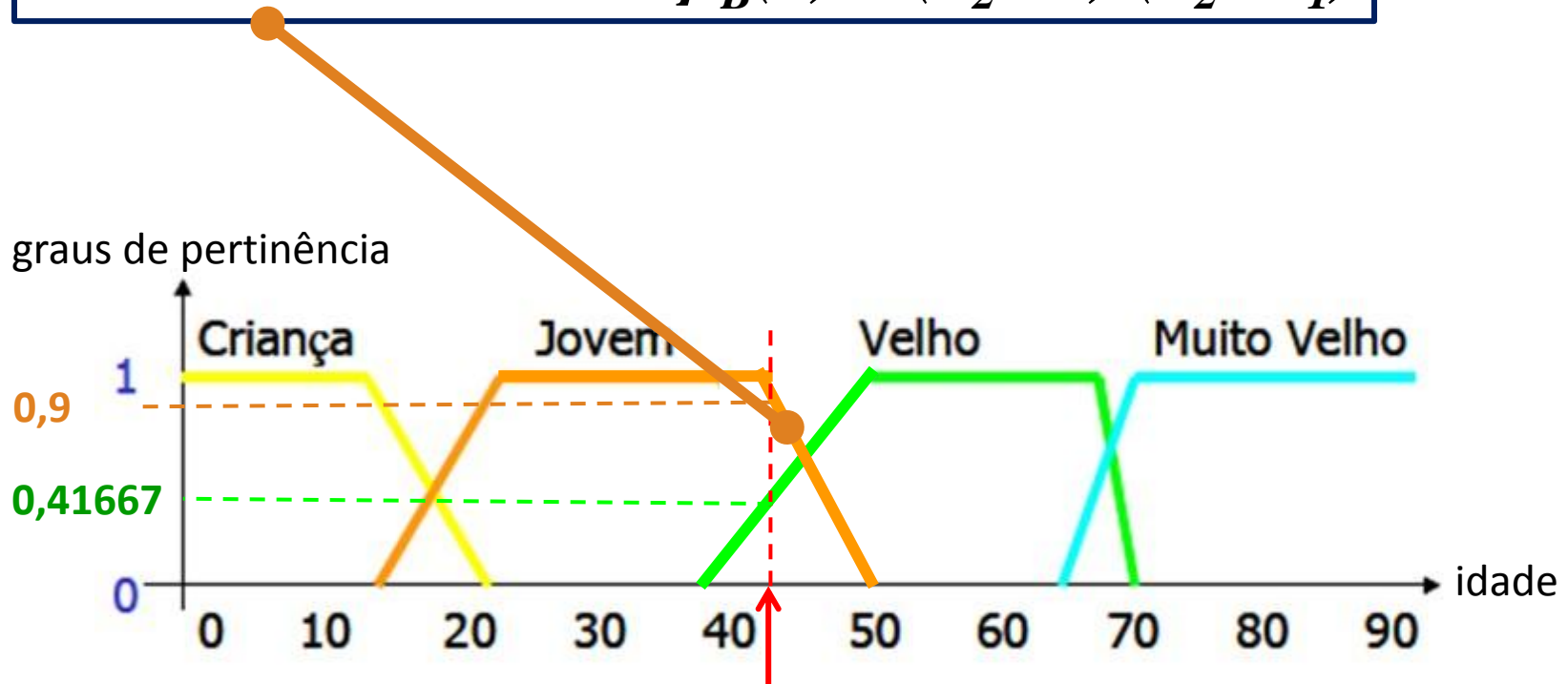
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR DECRESCENTE: } \mu_B(x) = (x_2 - x)/(x_2 - x_1)$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

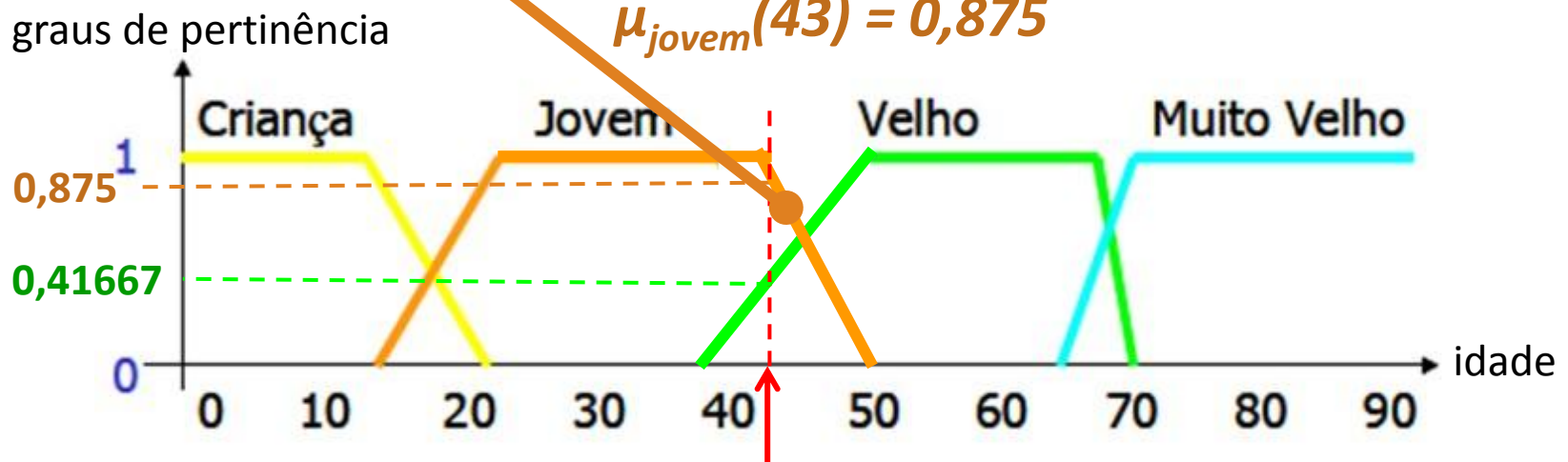
Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR DECRESCENTE: } \mu_B(x) = (x_2 - x) / (x_2 - x_1)$$

$$\mu_{jovem}(43) = (50 - 43) / (50 - 42)$$

$$\mu_{jovem}(43) = 7 / 8$$

$$\mu_{jovem}(43) = 0,875$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**, a pertinência explica eventos que ocorrem em um espaço aleatório.
 - É baseada em um espaço de amostras e não em instâncias individuais.
 - Antes de selecionar um elemento de uma certa população sabe-se as chances do evento ocorrer.
 - Após selecionar o elemento, não existe mais a probabilidade (a incerteza).

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*
 1. *Qual a probabilidade de encontrarmos Coca-Cola neste drink?*
 2. *Qual a probabilidade de encontrarmos Run neste drink?*
 3. *Qual a probabilidade de encontrarmos Gelo neste drink?*
 4. *Qual a probabilidade de encontrarmos Guaraná neste drink?*

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*
 1. *Qual a probabilidade de encontrarmos Coca-Cola neste drink?* **50%**
 2. *Qual a probabilidade de encontrarmos Run neste drink?* **100%**
 3. *Qual a probabilidade de encontrarmos Gelo neste drink?* **100%**
 4. *Qual a probabilidade de encontrarmos Guaraná neste drink?* **0%**

1 – Lógica Fuzzy

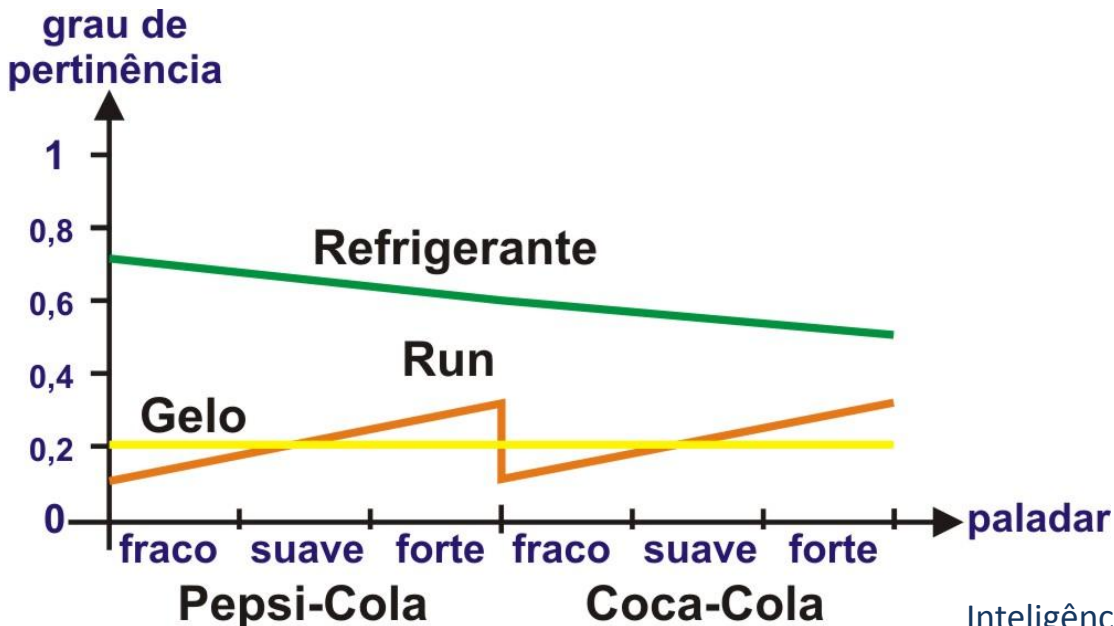
1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

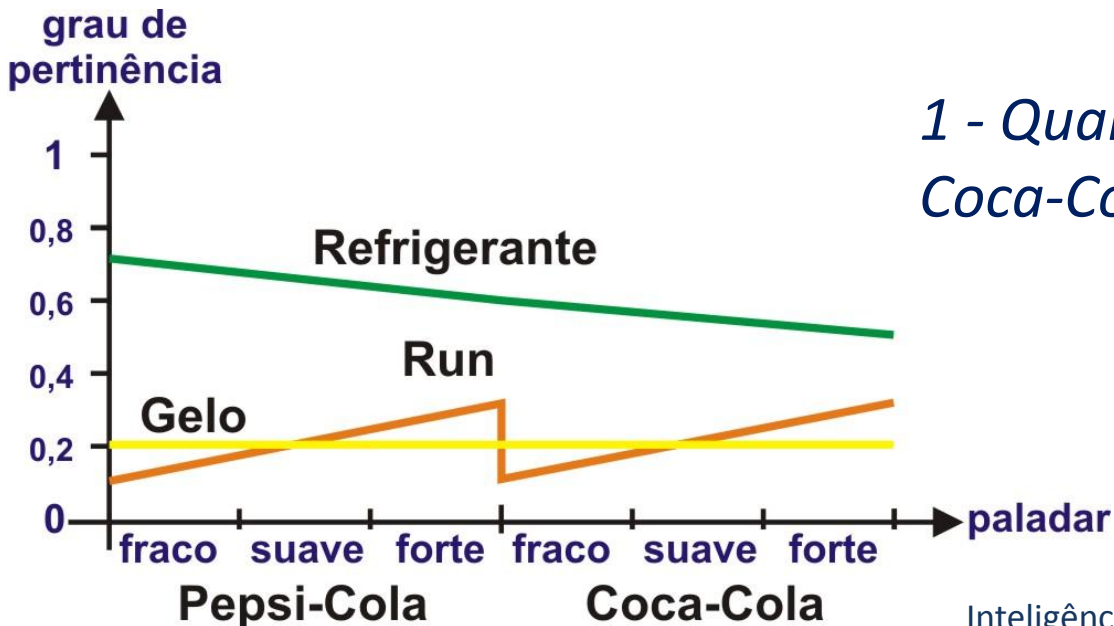
- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

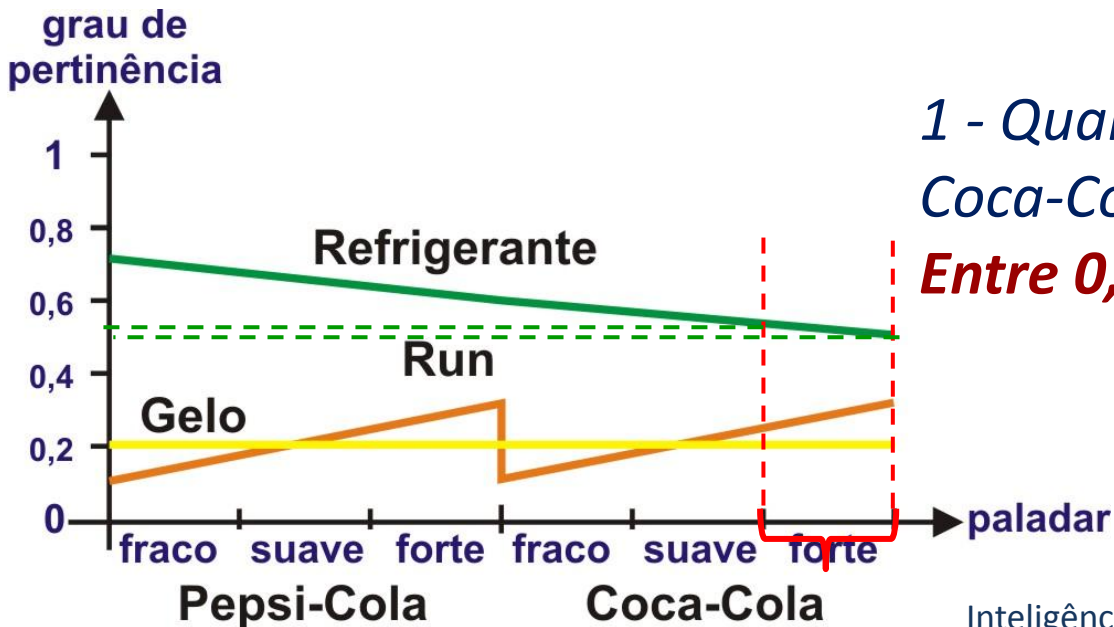


1 - Qual grau de pertinência de Coca-Cola para um drink forte?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

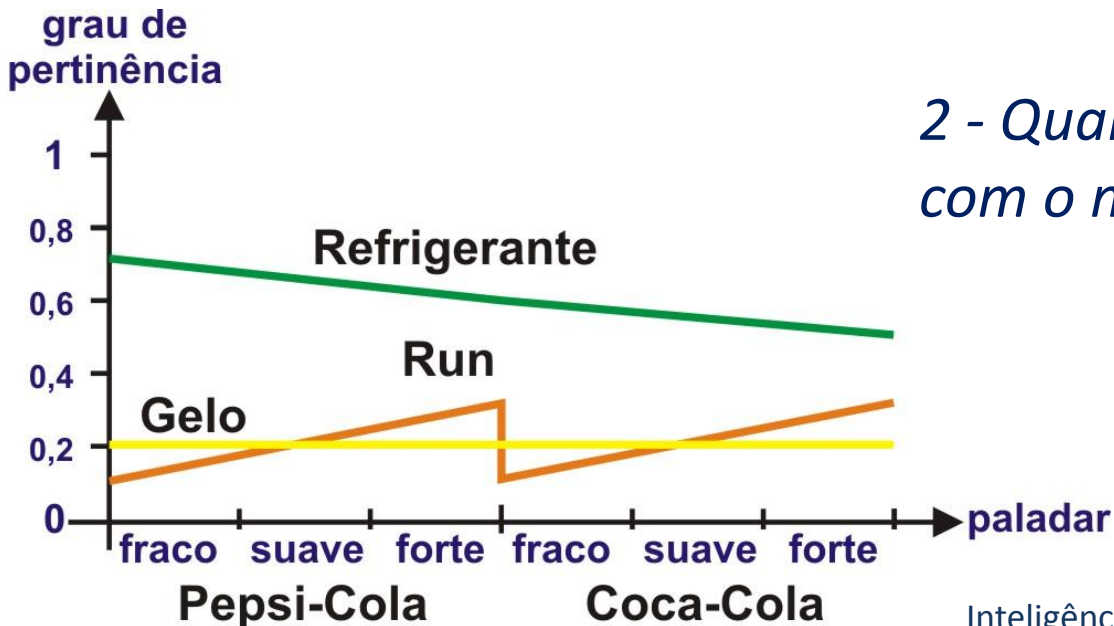


1 - Qual grau de pertinência de Coca-Cola para um drink forte?
Entre 0,5 e 0,55 aproximadamente

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

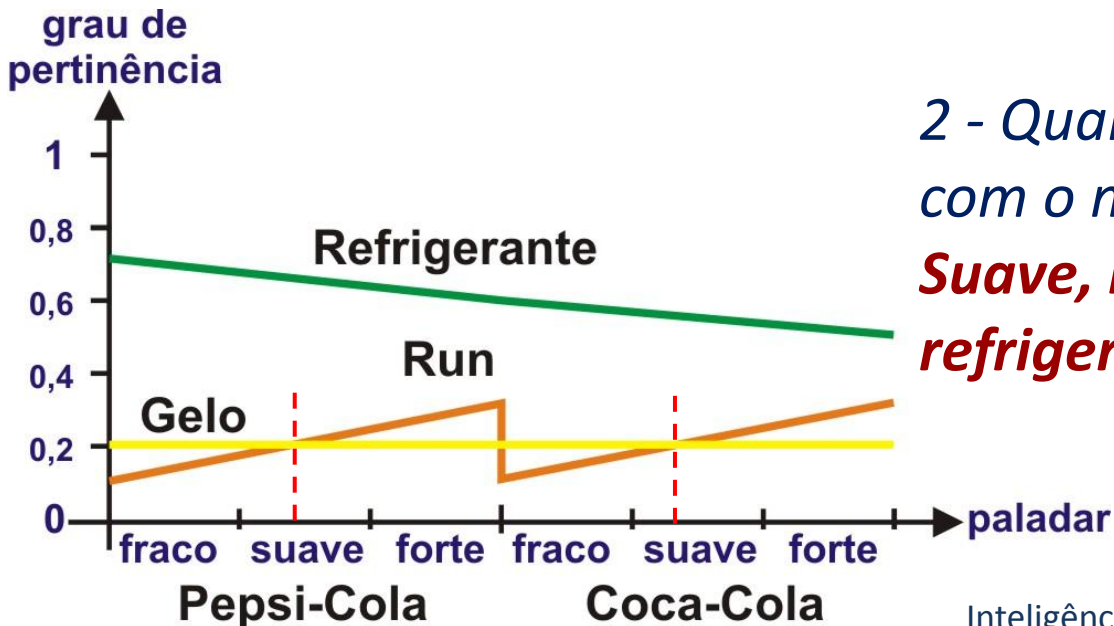


2 - Qual o paladar para Run e Gelo com o mesmo grau de pertinência?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

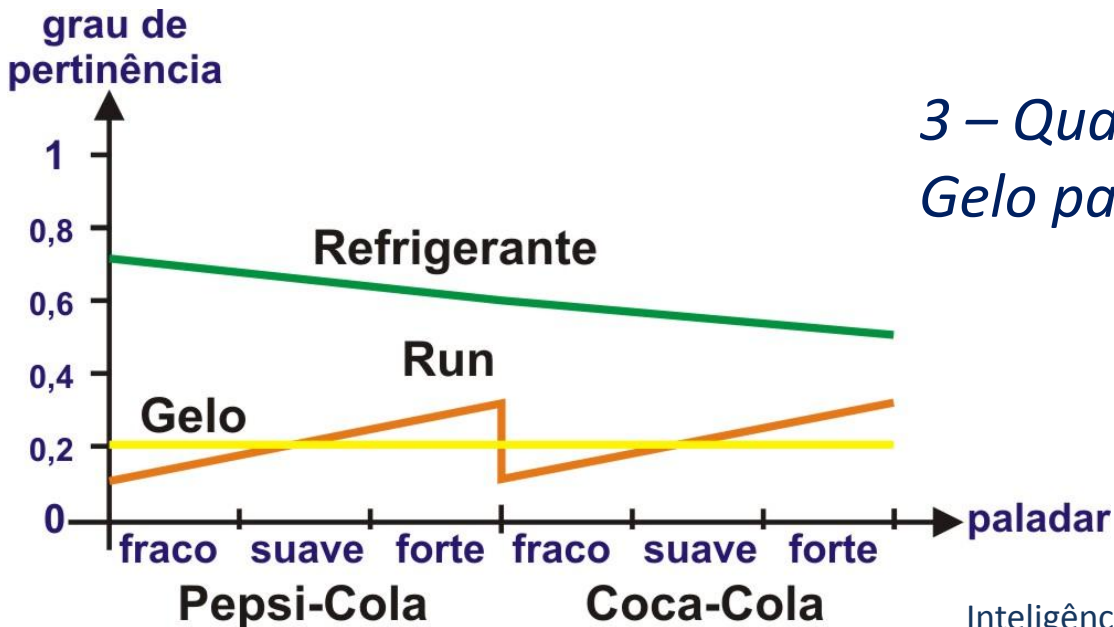


2 - Qual o paladar para Run e Gelo com o mesmo grau de pertinência?
Suave, independente do refrigerante escolhido.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

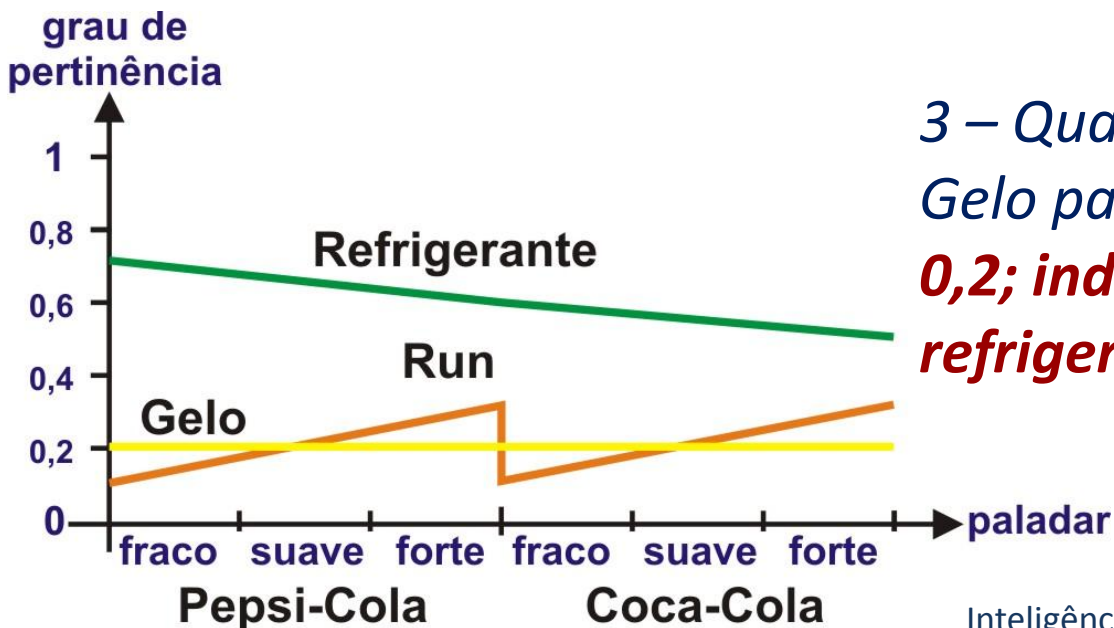


3 – Qual o grau de pertinência de Gelo para este drink?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



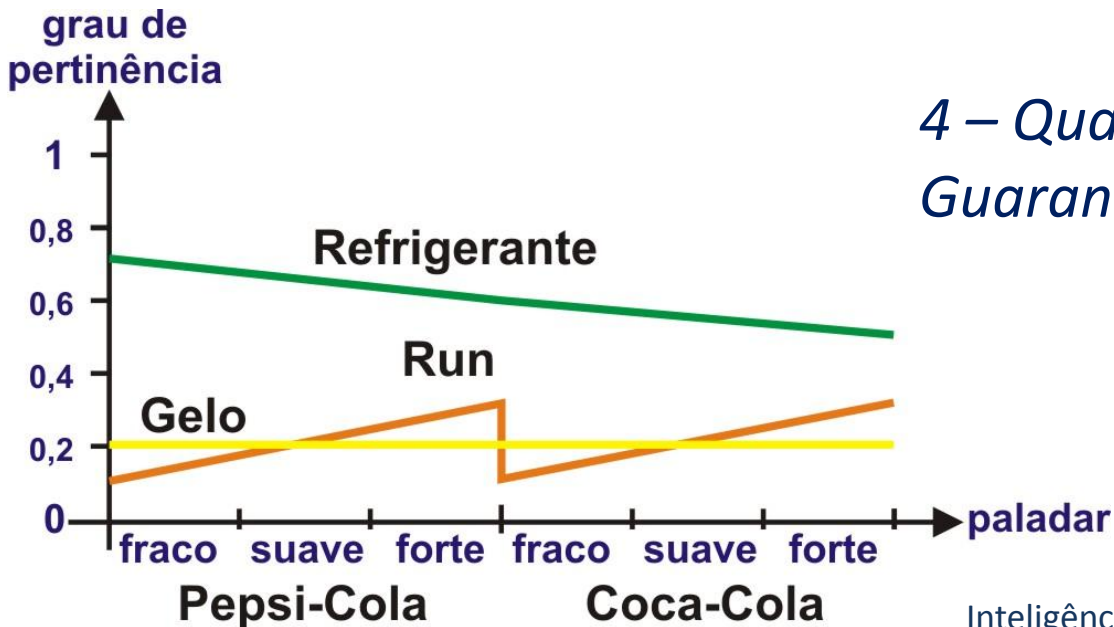
3 – Qual o grau de pertinência de Gelo para este drink?

0,2; independente do paladar e do refrigerante escolhido.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

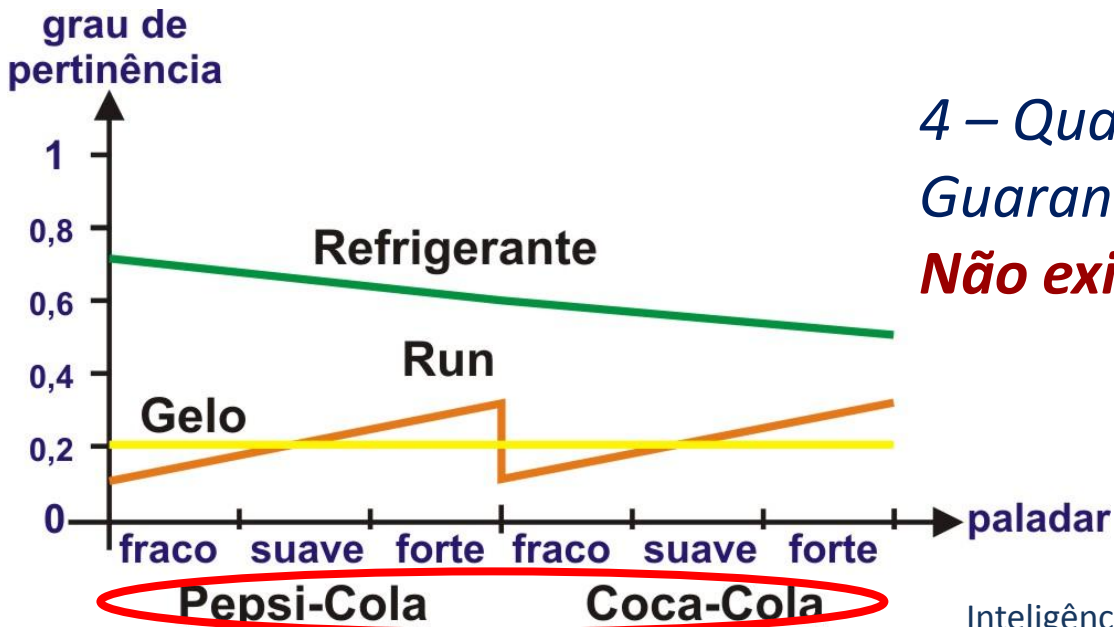


4 – Qual o grau de pertinência de Guaraná para este drink?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



4 – Qual o grau de pertinência de Guaraná para este drink?

Não existe.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o que significa dizer:
 - Gabriela é alta com grau de pertinência 0,85.
- No contexto da **Probabilidade**, o que significa dizer:
 - Gabriela tem a probabilidade 0,85 de ser alta.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o que significa dizer:
 - Gabriela é alta com grau de pertinência 0,85.

Gabriela é bem compatível com uma pessoa alta, pois possui 0,85 de grau de pertinência para a característica alta.

- No contexto da **Probabilidade**, o que significa dizer:
 - Gabriela tem a probabilidade 0,85 de ser alta.

Não se faz a menor ideia da altura de Gabriela, pois ela pode até ser uma anã, pois ela apenas tem 85% de chance de ser alta.

1 – Lógica Fuzzy

1.3 – Vantagens e Desvantagens:

- **Vantagens:**
 - Facilidade de lidar com dados imprecisos.
 - Facilita as descrições das regras pelos especialistas.
 - Diminuição da quantidade de regras.
 - Permite a explicação do raciocínio.

1 – Lógica Fuzzy

1.3 – Vantagens e Desvantagens:

- **Desvantagens:**
 - Necessidade de especificar funções de pertinência.
 - Necessidade de especialista do domínio.
 - Necessidade de conhecimento de dados históricos.

2

Operações com Conjuntos *Fuzzy*

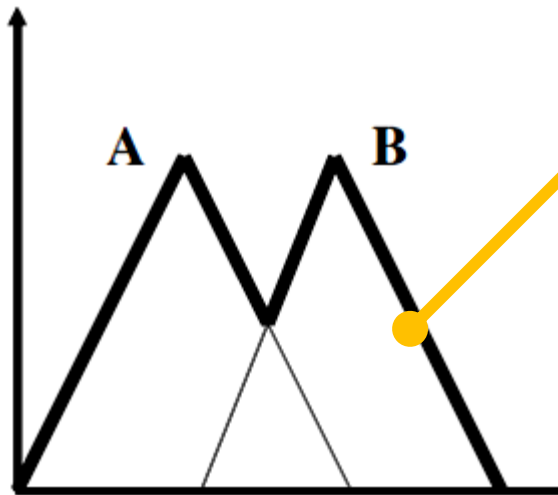
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

a) **União** ou **Disjunção** (OU lógico):

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \mu_{(A+B)}(x) = \textit{máximo} \{ \mu_{(A)}(x) , \mu_{(B)}(x) \}$$



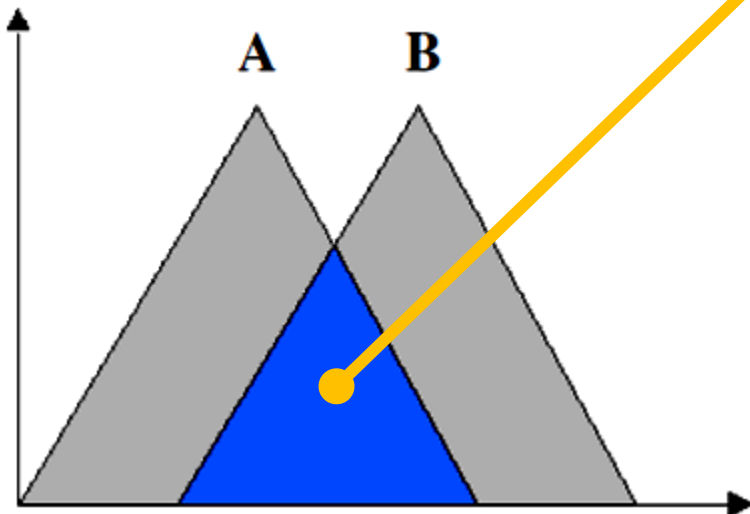
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

b) **Interseção** ou **Conjunção** (E lógico):

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_{(A.B)}(x) = \text{mínimo} \{ \mu_{(A)}(x) , \mu_{(B)}(x) \}$$



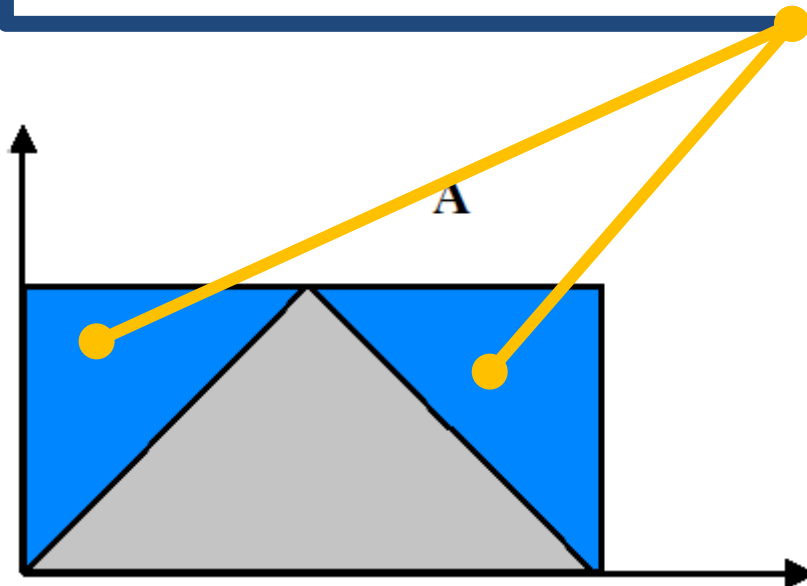
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

c) **Negação** ou **Complemento** (Não lógico):

$$\neg \mu_{(A)}(x) = 1 - \mu_{(A)}(x)$$



2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

d) **Condicional** (Se..então lógico):

$$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a + b$$

$$\mu_{(A \rightarrow B)}(x) = \textit{máximo} \{ 1 - \mu_{(A)}(x) , \mu_{(B)}(x) \}$$

Ou ainda, aplicando De Morgan:

$$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg(a \cdot \neg b)$$

$$\mu_{(A \rightarrow B)}(x) = 1 - \textit{mínimo} \{ \mu_{(A)}(x) , 1 - \mu_{(B)}(x) \}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

e) **Ou Exclusivo (Xor)**:

$$a \oplus b \rightarrow \neg (a \leftrightarrow b)$$

$$a \oplus b \rightarrow \neg ((a \rightarrow b) \wedge (a \leftarrow b))$$

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = 1 - (\textit{mínimo} \{ \textit{máximo} \{ 1 - \mu_{(A)}(x) , \mu_{(B)}(x) \} , \textit{máximo} \{ 1 - \mu_{(B)}(x) , \mu_{(A)}(x) \} })$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Utilizados para representar conceitos causadores de ambiguidades:

a) **Muito:** $\mu^2_{(A)}(x)$

b) **Pouco:** $\sqrt[2]{\mu_{(A)}(x)}$

c) **Extremamente:** $\mu^3_{(A)}(x)$

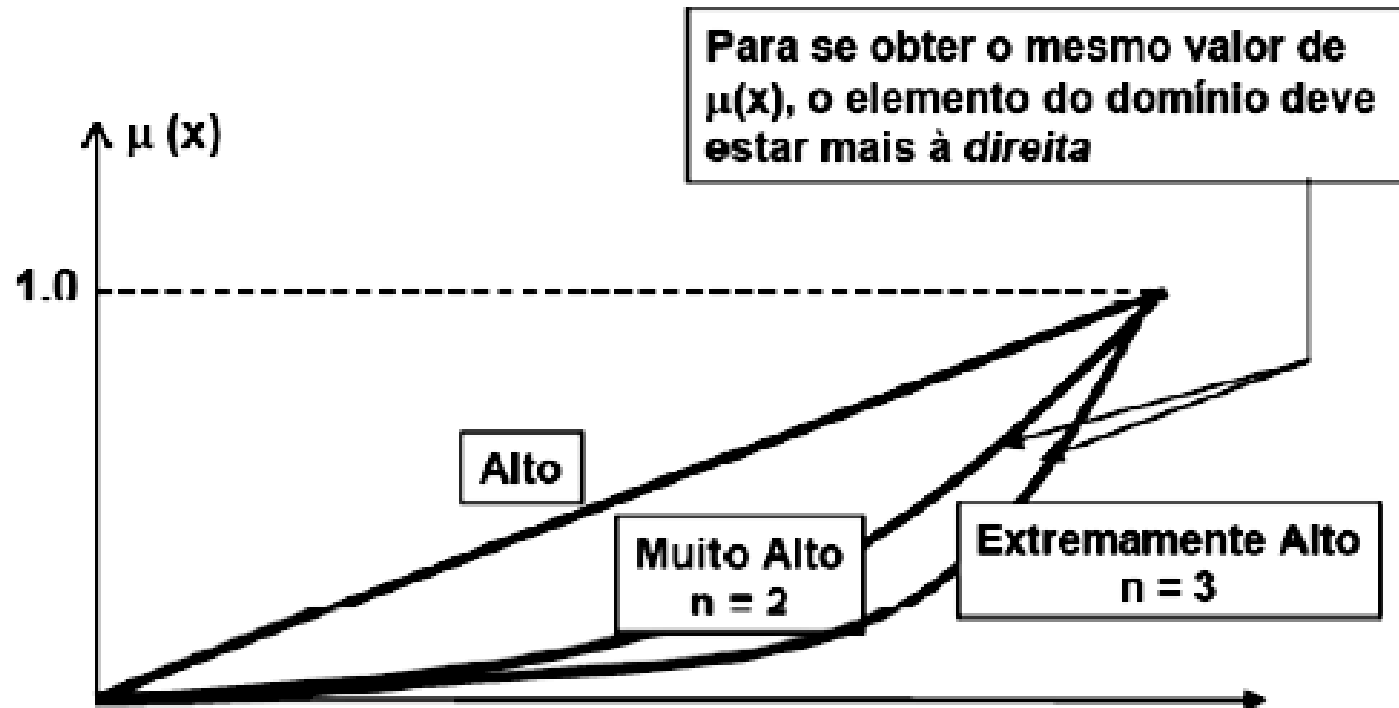
d) **Mais ou Menos:** $\sqrt[3]{\mu_{(A)}(x)}$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Exemplo 1:

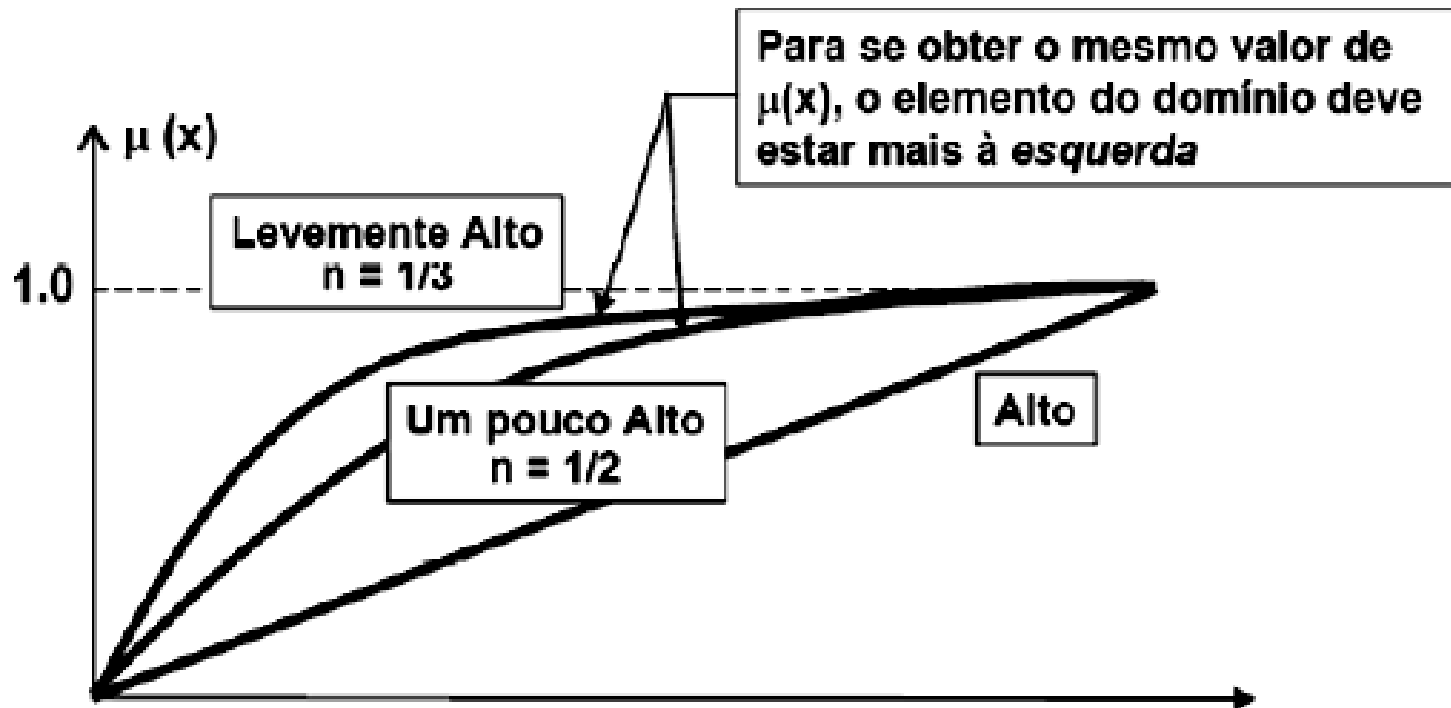


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Exemplo 2:



2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Variáveis Linguísticas:

- Permitem que a linguagem da modelagem *Fuzzy* expresse a semântica usada por especialistas.
- São os qualificadores.
- Encapsula conceitos imprecisos numa forma computacionalmente eficiente.
- Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para a caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos. São os nomes dos conjuntos *Fuzzy*.

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

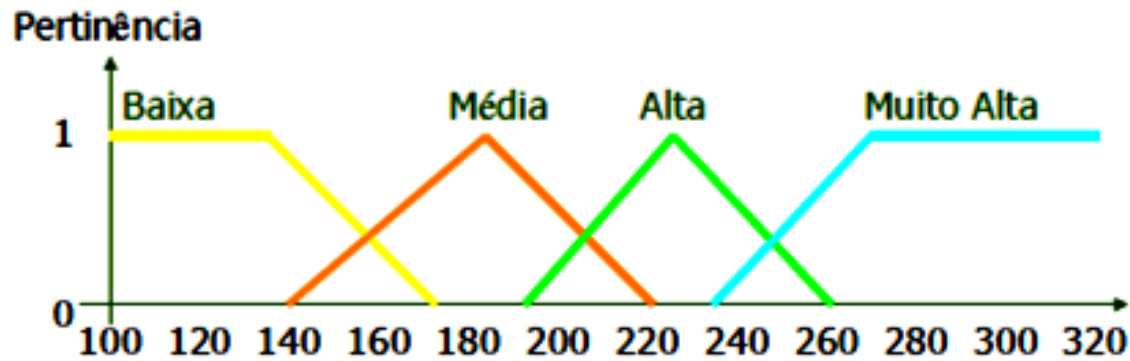
2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Variáveis Linguísticas:

Por exemplo:

SE temperatura É NÃO MUITO alta ENTÃO risco É reduzido um POUCO.

Ex.: Temperatura de um processo

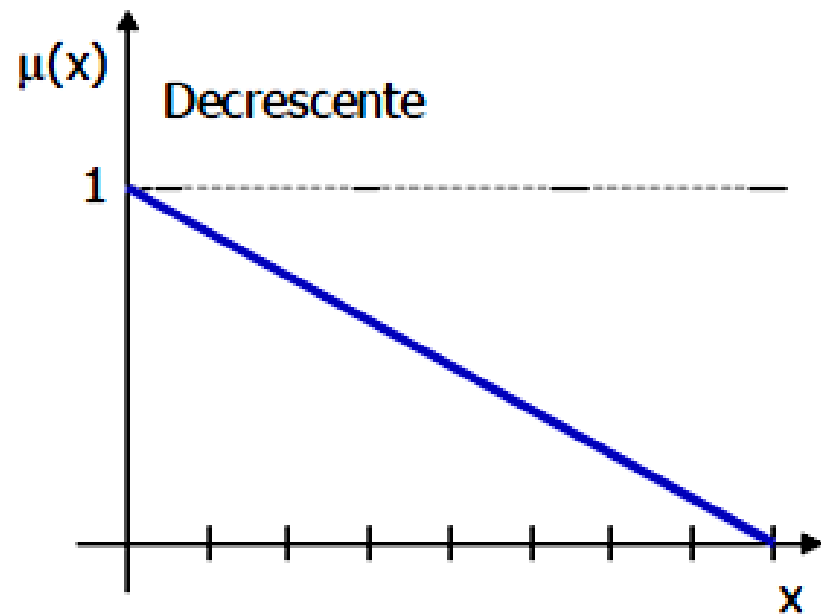
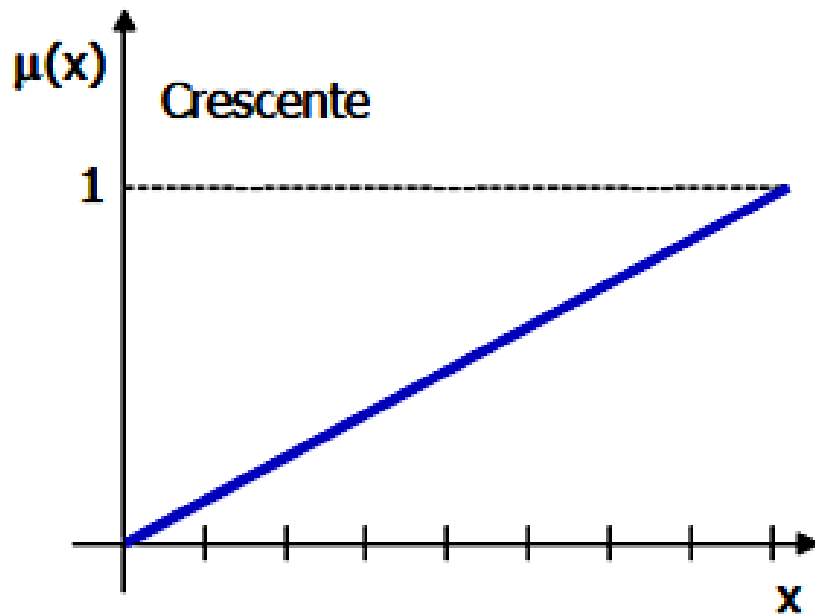


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

a) Linear Crescente e Decrescente:

São os tipos mais simples.

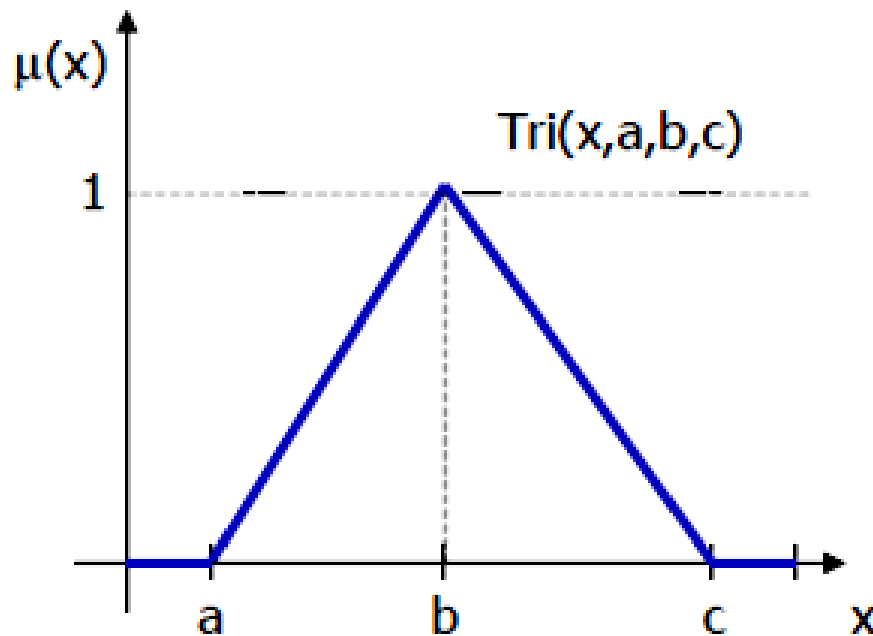


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

b) Triangular:

Caso especial, derivado do tipo linear.



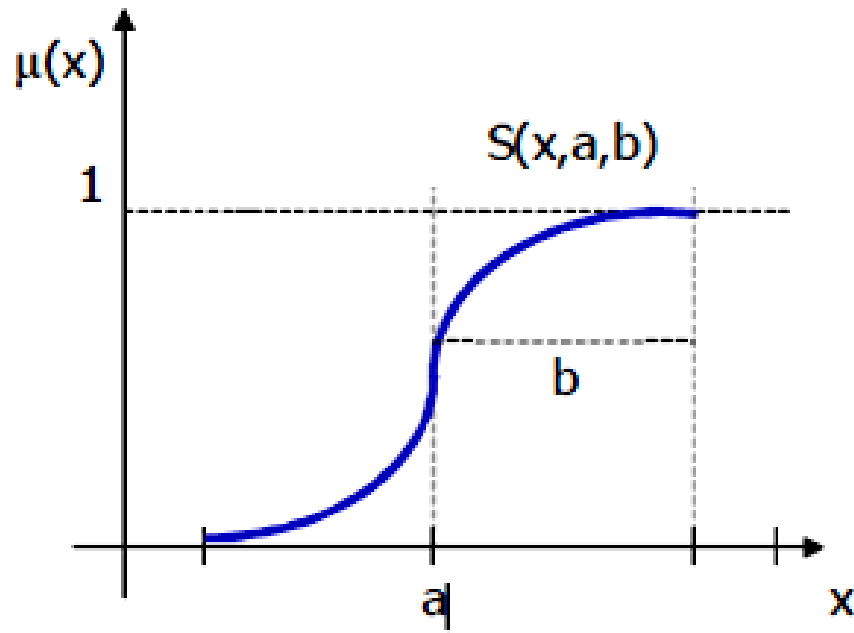
$$\text{Tri}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 - (b - x) / (b - a) & a < x \leq b \\ (c - x) / (c - b) & b < x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

c) Formato *S*:

Equação Quadrática.



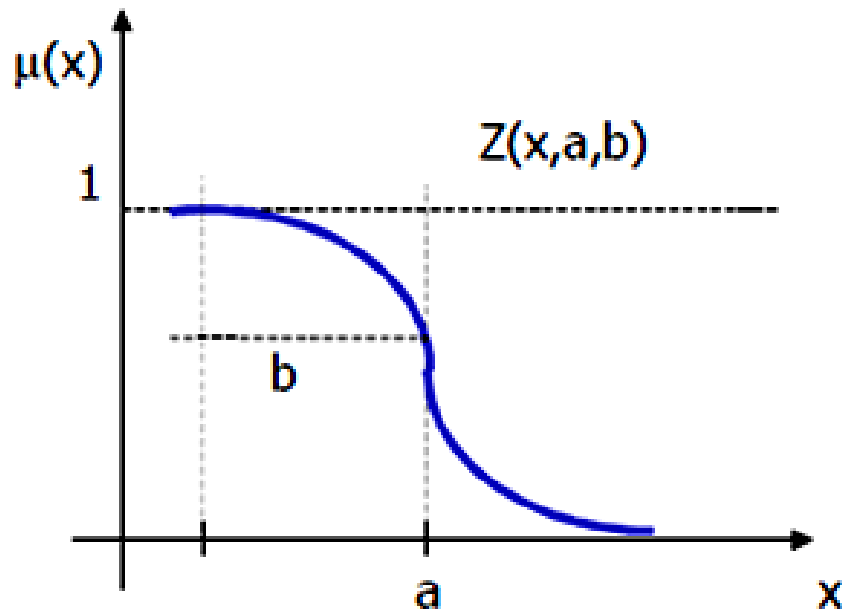
$$S(x, a, b) = \begin{cases} 0 & x \leq a - b \\ [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b < x \leq a \\ 1 - [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 1 & x > a + b \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

d) Formato Z :

Complemento do Formato S : $Z(x,a,b) = 1 - S(x,a,b)$



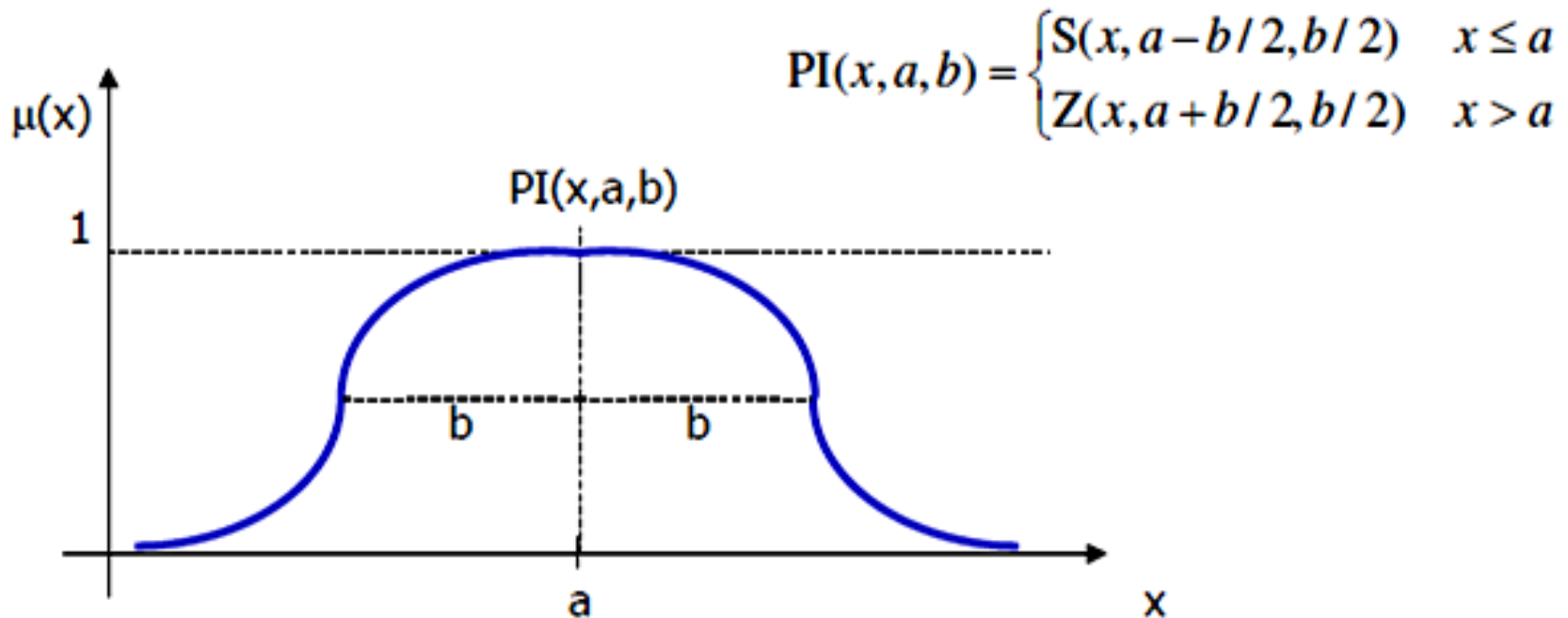
$$Z(x,a,b) = \begin{cases} 1 & x \leq a-b \\ 1 - [x - (a-b)]^2 / 2b^2 & a-b < x \leq a \\ [(a+b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a+b \\ 0 & x > a+b \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

e) Formato *Pi*:

Junção das curvas *S* e *Z*.

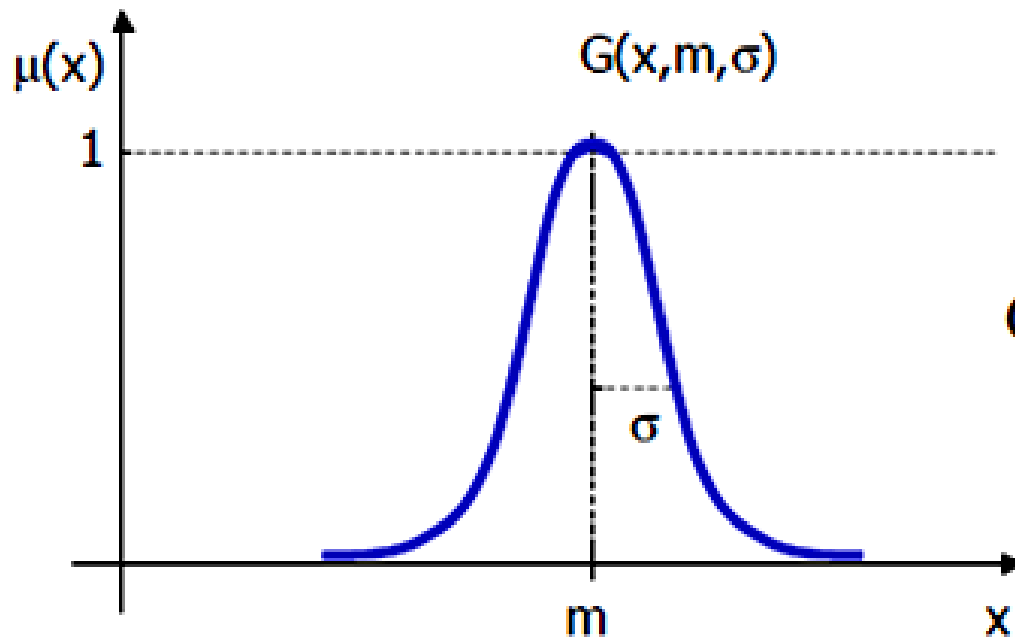


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

f) Gaussiana:

Simétrica, radial e unimodal.



$$G(x, m, \sigma) = \exp\left(\frac{-(x - m)^2}{\sigma^2}\right)$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.4 – Defuzificação:

- Transforma o valor *fuzzy* em um valor relativo à realidade.
- Deve ser também especificado por especialista do domínio.
- Principais modelos de defuzificação:
 - Método do **Critério Máximo**
 - Método da **Média dos Máximos**
 - Método do **Centro Geométrico**

3

Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

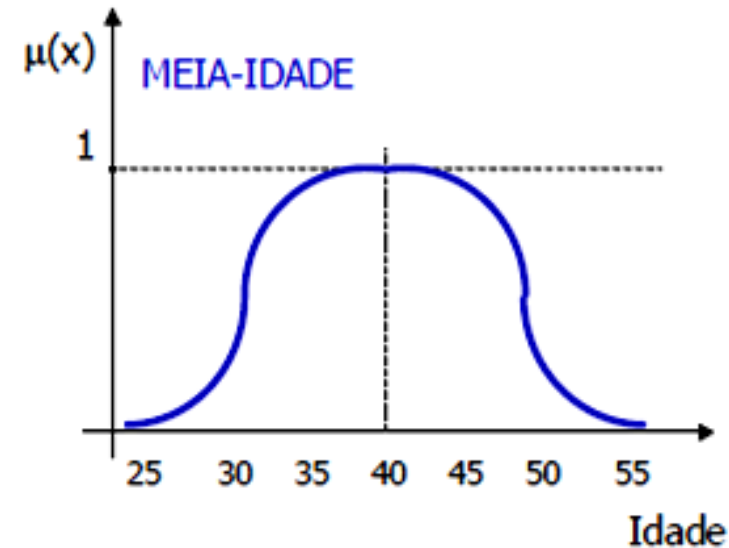
| Nome | Idade | Altura |
|---------|-------|--------|
| Abel | 36 | 1.70 |
| Marcelo | 58 | 1.75 |
| Carlos | 64 | 1.65 |
| João | 32 | 1.78 |
| Pedro | 40 | 1.77 |
| Tiago | 22 | 1.60 |
| Felipe | 47 | 1.73 |
| André | 25 | 1.75 |

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura |
|---------|-------|---------------|--------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 |

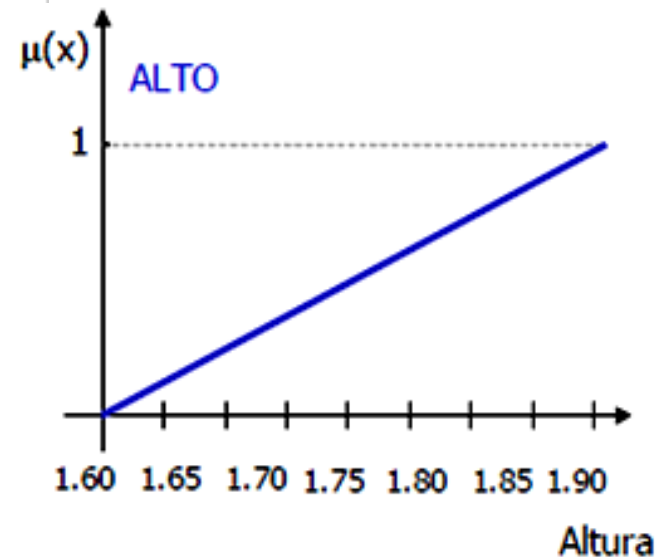


3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(X)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(X)$ |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 |



3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 |

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \textit{mínimo} \{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ | Fuzzy |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|-------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 | 0.00 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 | 0.00 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 | 0.47 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 | 0.00 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 | 0.10 |

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \textit{mínimo} \{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ | Fuzzy |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|-------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 | 0.00 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 | 0.00 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 | 0.47 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 | 0.00 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 | 0.10 |

Resposta: Abel, João, Pedro, Felipe e André.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 |

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 |

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \text{máximo}\{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ | Fuzzy |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|-------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 | 0.83 |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 | 0.64 |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 | 0.23 |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 | 0.70 |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 | 1.00 |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 | 0.13 |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 | 0.74 |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 | 0.64 |

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \text{máximo}\{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

| Nome | Idade | $\mu_{MI}(x)$ | Altura | $\mu_{ALTO}(x)$ | Fuzzy |
|---------|-------|---------------|--------|-----------------|--------|
| Abel | 36 | 0.83 | 1.70 | 0.44 | 0.83 ← |
| Marcelo | 58 | 0.00 | 1.75 | 0.64 | 0.64 ← |
| Carlos | 64 | 0.00 | 1.65 | 0.23 | 0.23 ← |
| João | 32 | 0.47 | 1.78 | 0.70 | 0.70 ← |
| Pedro | 40 | 1.00 | 1.77 | 0.69 | 1.00 ← |
| Tiago | 22 | 0.00 | 1.60 | 0.13 | 0.13 ← |
| Felipe | 47 | 0.74 | 1.73 | 0.62 | 0.74 ← |
| André | 25 | 0.10 | 1.75 | 0.64 | 0.64 ← |

Resposta: Todos.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Composição por Produto Cartesiano:

- Para encontrar respostas para relações entre conjuntos *Fuzzy*, é bastante usual utilizar a composição por produto cartesiano entre matrizes.
- Efetua-se a multiplicação entre as matrizes relacionais, substituindo cada **multiplicação** pela operação *mínimo* e cada **adição** pela operação *máximo*.

$$\mu_{(A \circ B)}(a, c) = \textit{máximo} \{ \textit{mínimo} \{ \mu_{(A)}(a, b) , \mu_{(B)}(b, c) \} \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

| R1(U1,U2) | Frio | Calor |
|-----------|------------|------------|
| Primavera | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 0,1 | 1 |
| Outono | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 1 | 0,2 |

| R2(U2,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|--------|--------------|
| Frio | 0,1 | 0,9 | 0,5 |
| Calor | 1 | 0,2 | 0,7 |

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,1} & 0,9 & 0,5 \\ \mathbf{1} & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,63} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

Na matemática clássica, temos:

$$A \circ B[1,1] = \mathbf{a[1,1].b[1,1]} + \mathbf{a[1,2].b[2,1]} = \mathbf{0,03} + \mathbf{0,6} = \mathbf{0,63}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

| R1(U1,U2) | Frio | Calor |
|-----------|------------|------------|
| Primavera | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 0,1 | 1 |
| Outono | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 1 | 0,2 |

| R2(U2,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|--------|--------------|
| Frio | 0,1 | 0,9 | 0,5 |
| Calor | 1 | 0,2 | 0,7 |

$$\begin{bmatrix} \text{R1} \\ \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \text{R2} \\ \mathbf{0,1} & 0,9 & 0,5 \\ \mathbf{1} & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{R3} \\ \mathbf{0,6} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Na *lógica fuzzy*, temos:

$$\mu_{(A \circ B)}[1,1] = \text{máximo} \{ \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.3}, \mathbf{0.1}) \}, \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.6}, 1) \} \} = \mathbf{0.6}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

| R1(U1,U2) | Frio | Calor |
|-----------|------------|------------|
| Primavera | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 0,1 | 1 |
| Outono | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 1 | 0,2 |

| R2(U2,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|------------|--------------|
| Frio | 0,1 | 0,9 | 0,5 |
| Calor | 1 | 0,2 | 0,7 |

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & \mathbf{0,9} & 0,5 \\ 1 & \mathbf{0,2} & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & \mathbf{0,3} & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

Na *lógica fuzzy*, temos:

$$\mu_{(A \circ B)}[1,2] = \text{máximo} \{ \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.3}, \mathbf{0.9}) \}, \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.6}, \mathbf{0.2}) \} \} = \mathbf{0.3}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

| R1(U1,U2) | Frio | Calor |
|-----------|------|-------|
| Primavera | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 0,1 | 1 |
| Outono | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 1 | 0,2 |

| R2(U2,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|--------|--------------|
| Frio | 0,1 | 0,9 | 0,5 |
| Calor | 1 | 0,2 | 0,7 |

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,5 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

| R1(U1,U2) | Frio | Calor |
|-----------|------|-------|
| Primavera | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 0,1 | 1 |
| Outono | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 1 | 0,2 |

| R2(U2,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|--------|--------------|
| Frio | 0,1 | 0,9 | 0,5 |
| Calor | 1 | 0,2 | 0,7 |

$$\begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

| R3(U1,U3) | Ventilador | Casaco | Guarda-chuva |
|-----------|------------|--------|--------------|
| Primavera | 0,6 | 0,3 | 0,6 |
| Verão | 1 | 0,2 | 0,7 |
| Outono | 0,5 | 0,7 | 0,5 |
| Inverno | 0,2 | 0,9 | 0,5 |

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

| Tabela 1 | Peso | | Altura | | Piloto | | Salário | |
|-----------|------|--------------------|--------|---------------------|--------|----------------------|-----------|-----------------------|
| | Kg | $\mu(\text{leve})$ | cm | $\mu(\text{baixo})$ | nota | $\mu(\text{piloto})$ | R\$ / mês | $\mu(\text{salario})$ |
| Gervásio | 85 | 0,1 | 130 | 0,9 | 10 | 1 | 20.000,00 | 0,5 |
| Anestésio | 65 | 0,7 | 160 | 0,5 | 7 | 0,7 | 35.000,00 | 0,8 |
| Pancárdio | 50 | 0,9 | 157 | 0,7 | 5 | 0,5 | 12.000,00 | 0,2 |
| Chulésio | 45 | 1 | 162 | 0,4 | 8 | 0,8 | 27.000,00 | 0,6 |

| Tabela 2 | $\mu(\text{muito_leve})$ | $\mu(\text{baixo})$ | $\mu(\text{excelente_piloto})$ | $\mu(\text{pouco_salário})$ |
|-----------|---------------------------|---------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Contratar | 0,9 | 0,7 | 0,5 | 0,8 |

Tabela 1: graus de pertinência em cada componente, de cada jôquei.

Tabela 2: graus de pertinência desejado para a contratação (Regras Fuzzy).

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

| Tabela 1 | Peso | | Altura | | Piloto | | Salário | |
|-----------|------|--------------------|--------|---------------------|--------|----------------------|-----------|-----------------------|
| | Kg | $\mu(\text{leve})$ | cm | $\mu(\text{baixo})$ | nota | $\mu(\text{piloto})$ | R\$ / mês | $\mu(\text{salario})$ |
| Gervásio | 85 | 0,1 | 130 | 0,9 | 10 | 1 | 20.000,00 | 0,5 |
| Anestésio | 65 | 0,7 | 160 | 0,5 | 7 | 0,7 | 35.000,00 | 0,8 |
| Pancárdio | 50 | 0,9 | 157 | 0,7 | 5 | 0,5 | 12.000,00 | 0,2 |
| Chulésio | 45 | 1 | 162 | 0,4 | 8 | 0,8 | 27.000,00 | 0,6 |

| Tabela 2 | $\mu(\text{muito_leve})$ | $\mu(\text{baixo})$ | $\mu(\text{excelente_piloto})$ | $\mu(\text{pouco_salário})$ |
|-----------|---------------------------|---------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Contratar | 0,9 | 0,7 | 0,5 | 0,8 |

| Tabela 3 | Peso | Altura | Piloto | Salário |
|-----------|---------------------------|---------------------|---------------------------------|------------------------------|
| | $\mu(\text{muito_leve})$ | $\mu(\text{baixo})$ | $\mu(\text{excelente_piloto})$ | $\mu(\text{pouco_salario})$ |
| Gervásio | 0,01 | 0,9 | 1 | 0,71 |
| Anestésio | 0,49 | 0,5 | 0,343 | 0,89 |
| Pancárdio | 0,81 | 0,7 | 0,125 | 0,45 |
| Chulésio | 1 | 0,4 | 0,512 | 0,77 |

$\text{muito_leve} = \text{leve}^2$
 $\text{excelente_piloto} = \text{piloto}^3$
 $\text{pouco_salário} = \text{sqrt}(\text{salário})$

Tabela 3: graus de pertinência de cada jôquei, adaptado à contratação.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

$$\mu_{(contratar)}(jôquei) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_{(peso)}; \mu_{(altura)}; \mu_{(piloto)}; \mu_{(salário)} \} \}$$

| Gervásio | Jôquei | Contrato | Min |
|-----------------------|--------|------------|-------------|
| Peso | 0,01 | 0,90 | 0,01 |
| Altura | 0,90 | 0,70 | 0,70 |
| Piloto | 1,00 | 0,50 | 0,50 |
| Salário | 0,71 | 0,80 | 0,71 |
| $\mu_{(contratar)} =$ | | Máx | 0,71 |

| Anestésio | Jôquei | Contrato | Min |
|-----------------------|--------|------------|-------------|
| Peso | 0,49 | 0,90 | 0,49 |
| Altura | 0,50 | 0,70 | 0,50 |
| Piloto | 0,34 | 0,50 | 0,34 |
| Salário | 0,89 | 0,80 | 0,80 |
| $\mu_{(contratar)} =$ | | Máx | 0,80 |

| Pancário | Jôquei | Contrato | Min |
|-----------------------|--------|------------|-------------|
| Peso | 0,81 | 0,90 | 0,81 |
| Altura | 0,70 | 0,70 | 0,70 |
| Piloto | 0,13 | 0,50 | 0,13 |
| Salário | 0,45 | 0,80 | 0,45 |
| $\mu_{(contratar)} =$ | | Máx | 0,81 |

| Chulésio | Jôquei | Contrato | Min |
|-----------------------|--------|------------|-------------|
| Peso | 1,00 | 0,90 | 0,90 |
| Altura | 0,40 | 0,70 | 0,40 |
| Piloto | 0,51 | 0,50 | 0,50 |
| Salário | 0,77 | 0,80 | 0,77 |
| $\mu_{(contratar)} =$ | | Máx | 0,90 |

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jóquei deve ser contratado?

$$\mu_{(contratar)}(j\acute{o}quei) = m\acute{a}x \{m\acute{i}n \{ \mu_{(peso)}; \mu_{(altura)}; \mu_{(piloto)}; \mu_{(sal\acute{a}rio)} \} \}$$

$$\mu_{(contratar)}(Gerv\acute{a}sio) = m\acute{a}x \{m\acute{i}n \{ 0.01; 0.7; 0.5; 0.71 \} \} = 0.71$$

$$\mu_{(contratar)}(Anest\acute{e}sio) = m\acute{a}x \{m\acute{i}n \{ 0.49; 0.5; 0.34; 0.8 \} \} = 0.8$$

$$\mu_{(contratar)}(Panc\acute{a}rio) = m\acute{a}x \{m\acute{i}n \{ 0.81; 0.7; 0.13; 0.45 \} \} = 0.81$$

$$\mu_{(contratar)}(Chul\acute{e}sio) = m\acute{a}x \{m\acute{i}n \{ 0.9; 0.4; 0.5; 0.77 \} \} = 0.9$$

$$Deve-se contratar = m\acute{a}x \{ \mu_{(contratar)}(j\acute{o}quei) \} = 0,9 = Chul\acute{e}sio$$

“ Na medida em que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade de fazer afirmações precisas e ainda significativas sobre seu comportamento diminui, até um limiar em que a precisão e a significância (relevância) tornam-se características praticamente exclusivas mutuamente”.

[Zadeh, em “O Princípio da Incompatibilidade”, 1973]

Bibliografias

1. ROSA, João Luis Garcia. **Fundamentos da Inteligência Artificial**. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
2. ARTERO, Almir Olivette. **Inteligência Artificial: Teórica e Prática**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
3. SIMÕES, Marcelo Godoy; SHAW, Ian S. **Controle e Modelagem Fuzzy**. 2ª ed. São Paulo: Blusher Fapesp, 2007.
4. NASCIMENTO JR., Cairo Lúcio; YONEYAMA, Takashi. **Inteligência Artificial em Controle e Automação**. 2ª ed. São Paulo: Blusher Fapesp, 2004.

Outras Referências

1. THOMAZ, Carlos E. **Inteligência Computacional**. Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Universitário da FEI, 2010.
2. BARRETO, Guilherme de Alencar. **Redes Neurais Artificiais: Conjuntos Fuzzy e Redes RBF**. Departamento de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, 2008.
3. GOMIDE, Fernando. **Sistemas Fuzzy**. DCA-FEEC-Unicamp, <http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA072/transp/EA072SistemasFuzzy7.2.pdf>