

CRYPTOSYSTÈME ET SIGNATURE NUMÉRIQUE D'EL GAMAL

LÉO BESSON - CANDIDAT N°4291

TIPE 2018

Sommaire

1	Le cryptosystème d'El Gamal	2
1.1	Le Groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$	2
1.2	Chiffrement d'El Gamal	2
1.3	Signature d'El Gamal	2
1.4	Problème du logarithme discret	3
2	Application : mise en place d'une messagerie sécurisée	4
2.1	GitHub	4
2.2	Génération des nombres premiers	4
2.2.1	Méthode déterministe	4
2.2.2	Méthode probabiliste : test de Miller-Rabin	4
2.3	Recherche des générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$	5
2.4	Les opérations élémentaires	7
2.4.1	Puissance modulaire	7
2.4.2	Inverse modulaire	8
2.5	L'algorithme de chiffrement symétrique : le DES	9
2.5.1	Présentation du DES	9
2.5.2	Principe de fonctionnement	9
2.5.3	Générations des sous-clés	9
2.5.4	Processus de chiffrement	10
2.5.5	Processus de déchiffrement	11
2.6	Architecture client-serveur	12
3	Analyse de la messagerie sécurisée	14
3.1	Attaque du cryptosystème d'El Gamal	14
3.1.1	Algorithme de Shanks	14
3.1.2	Calcul de l'indice	14
3.2	Comparaison avec le chiffrement RSA	15
3.2.1	Fonctionnement du RSA	15
3.2.2	Attaque du cryptosystème RSA : l'algorithme rho de Pollard	15
3.2.3	Attaque du cryptosystème RSA : le crible algébrique	16
3.3	Attaque sur la signature d'El Gamal	16
4	Programmes (Python 3)	17
4.1	Génération des nombres premiers : déterministe et probabiliste (Miller-Rabin)	19
4.2	Client-serveur	22
4.2.1	Serveur	22
4.2.2	Client	23
4.3	Opérations élémentaires	25
4.4	Data Encryption Standard (DES)	26
4.5	Attaques El Gamal : algorithme de Shanks et calcul de l'indice	38
4.6	RSA	39
4.7	Attaques RSA : Crible algébrique et algorithme rho de Pollard	40

1 Le cryptosystème d'El Gamal

1.1 Le Groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$

Le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$, avec p **premier**, vérifie les propriétés d'un **groupe commutatif** :

- \times est une loi de composition *interne*
- *Associativité* : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)^3, (a \times b) \times c [p] = a \times (b \times c) [p]$
- *Element neutre* : $\forall a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, a \times 1 [p] = 1 \times a [p] = a [p]$
- Tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ est *symétrisable* : $\forall a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \exists b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \mid a \times b \equiv 1 [p]$ (p étant premier, d'après le petit théorème de Fermat, b existe)
- *Commutativité* : $\forall (a, b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)^2, a \times b [p] = b \times a [p]$

1.2 Chiffrement d'El Gamal

Le **chiffrement d'El Gamal** (1984) est une **variante du protocole Diffie-Hellman** qui repose sur le **problème du logarithme discret** (cf. §1.4).

Soit p un nombre **premier** et g un élément **générateur** de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$.

Le destinataire B dispose :

- d'une **clé privée** s qui appartient à l'ensemble $\{1, \dots, p-1\}$
- d'une **clé publique** égale à $g^s [p]$

Lorsque A veut **transmettre un message chiffré** à B, il doit :

1. Choisir un **aléa** k dans $\{1, \dots, p-1\}$.
2. Calculer la **clé de session** $K = (g^s)^k [p]$.
3. Chiffrer son message M à l'aide d'un **algorithme de chiffrement symétrique** quelconque (DES par exemple) pour obtenir le cryptogramme C (dans la présentation originale de ce système, le message M était un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ et le chiffrement consistait simplement en une multiplication par K modulo p).
4. Transmettre le couple (g^k, C) . La quantité g^k étant l'**entête** du cryptogramme.

Pour **déchiffrer** le message, B doit :

1. Calculer la **clé de session** $K = (g^k)^s [p]$ à l'aide de l'entête et de sa clé privée.
2. Déchiffrer le message C en utilisant le **même algorithme de (dé)chiffrement symétrique** que A à l'aide de K .

1.3 Signature d'El Gamal

Ce **mécanisme de signature** repose aussi sur la difficulté du problème du logarithme discret (cf. §1.4).

Paramètres :

- un nombre **premier** p et un **générateur** g du groupe multiplicatif de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$
- la **clé privée** est un entier non nul x dans $\{1, \dots, p-2\}$

— la **clé publique** est $g^x [p]$

Calcul d'une signature :

1. Choisir un entier k **aléatoire** dans $\{1, \dots, p-1\}$.
2. Calculer $r = g^k [p]$.
3. Résoudre l'équation dite **équation de signature d'inconnue s** : $\boxed{h = xr + ks}$ dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}^*$.

La **solution de l'équation de signature** est : $s = (h - rx)k^{-1}$ dans $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}^*, \times)$.

La **signature du message** de condensé h est le couple (r, s) .

La **vérification de la signature** consiste à **tester l'égalité** $g^h = (g^x)^r \times r^s$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$.

1.4 Problème du logarithme discret

Tout le cryptosystème d'El Gamal repose sur le fait qu'il est "difficile" de **trouver l'entier k** à partir de $g^k [p]$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$: c'est ce qu'on appelle le **problème du logarithme discret**.

2 Application : mise en place d'une messagerie sécurisée

2.1 GitHub

GitHub est un service d'hébergement et de gestion de projets en ligne que nous avons utilisé pour **gérer les codes sources** de nos programmes. Les programmes, codés en **Python 3** dans le cadre des TIPE, sont en *Open Source* à l'adresse github.com/ludothai/TIPE-2018.

2.2 Génération des nombres premiers

2.2.1 Méthode déterministe

1. Choix d'un nombre p aléatoire de taille n .
2. Test des entiers inférieurs à \sqrt{p} comme diviseurs de p .
3. Si aucun entier divise p , alors p est premier.

Complexité : $O(\sqrt{10^n})$

2.2.2 Méthode probabiliste : test de Miller-Rabin

1. Choix d'un nombre p aléatoire de taille n .
2. Effectuer k tests de Miller-Rabin.
3. Si tous les tests sont des succès alors p est *pseudo-premier* et a une probabilité de ne pas être premier de $\frac{1}{4^k}$; sinon on choisit un nouveau p aléatoire et on recommence.

Complexité : $O(n^2)$

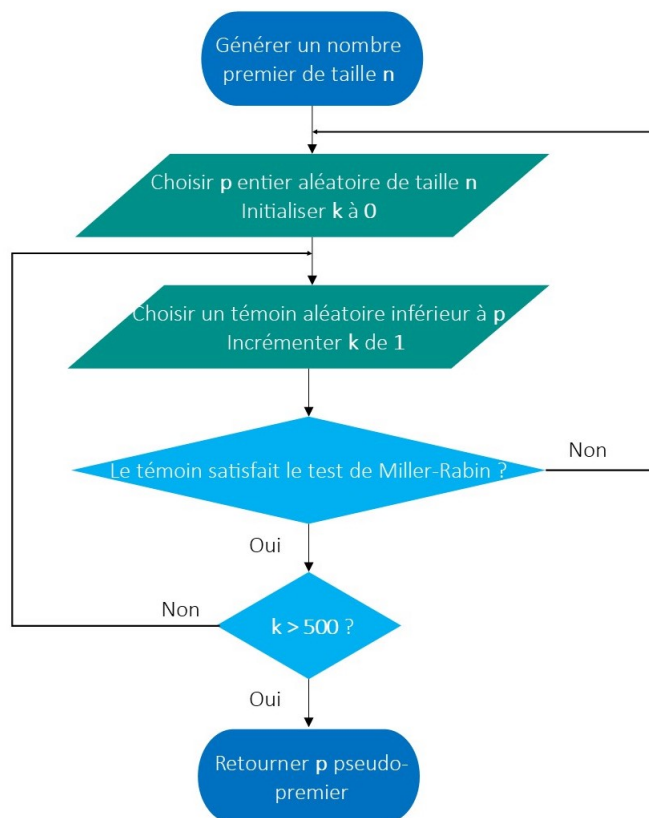


FIGURE 1 – Fonctionnement du test de primalité de Miller-Rabin

Détails théoriques du test :

Si p est premier alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps (résultat du cours qui s'obtient avec le théorème de Bezout).
On s'intéresse à l'équation :

$$x^2 = 1$$

dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme c'est un corps, c'est en particulier un anneau intègre. En factorisant l'équation ci-dessus sous la forme :

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

on s'aperçoit que les seules solutions de cette équation, par intégrité, sont 1 et -1 . (1)

Soit p premier.

On écrit p sous la forme :

$$p = 2^s \times d + 1$$

(s est le nombre maximal de fois que l'on peut mettre 2 en facteur dans $p - 1$).

Soit a (appelé *témoin de Miller*) dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on pose la suite $(b_i)_{0 \leq i \leq s}$ avec $b_i = a^{2^i} \times d$

Par le petit théorème de Fermat, on sait que $b_s \equiv 1[p]$. On montre grâce à (1) que s'il existe k tel que b_k ne soit pas congru à 1 modulo p alors il existe un indice $i \in \{k, \dots, s-1\}$ tel que $b_i \equiv -1[p]$. (2)

En effet, posons $i = \sup \{j \mid b_j \text{ ne soit pas congru à 1 modulo } p\}$. Un tel nombre existe car b_k n'est pas congru à 1 modulo p (l'ensemble que l'on considère est non vide), et pour tout $j \geq s$, $b_j \equiv 1[p]$ (l'ensemble est majoré par s). Ainsi, on a $i \in \{0, \dots, s-1\}$. D'autre part $b_i^2 = b_{i+1} \equiv 1[p]$.
D'après (1), $b_i \equiv -1[p]$. La première possibilité est exclue par définition de i . Donc $b_i \equiv 1[p]$.

Le test de Miller-Rabin consiste à calculer la suite des b_i pour voir si elle vérifie bien (2). On dit que p **pass**e le test si les b_i satisfont effectivement (2). Si p ne **pass**e pas le test alors on est sûr que p n'est **pas premier** sinon on ne peut rien dire. Il reste à itérer ce processus avec plusieurs témoins de Miller, l'heuristique du système étant "*plus p passe de tests, plus il a de chances d'être premier*".

L'efficacité de ce test vient du fait que le nombre de témoins "menteurs", c'est-à-dire les témoins qui permettent à p de passer le test alors qu'il n'est effectivement pas premier, est inférieur à $1/4$ du nombre d'entiers inférieurs à p .

2.3 Recherche des générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$

Pour mettre en place le cryptosystème d'El Gamal, il faut avoir à disposition un **nombre p premier très grand** (au moins 100 chiffres) et ensuite **trouver un générateur g** du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$. Nous avons choisi de **prendre le problème à l'envers** en cherchant d'abord l'élément générateur g puis un très grand nombre premier p .

Les **nombre**s de Sophie Germain sont des nombres q tel que :

- q est premier
- $2q + 1$ est aussi premier

En partant de cette idée, nous avons **expérimenté une méthode** pour **trouver un couple de nombre premier** très grand, qui offre la possibilité de mettre en place le cryptosystème efficacement.

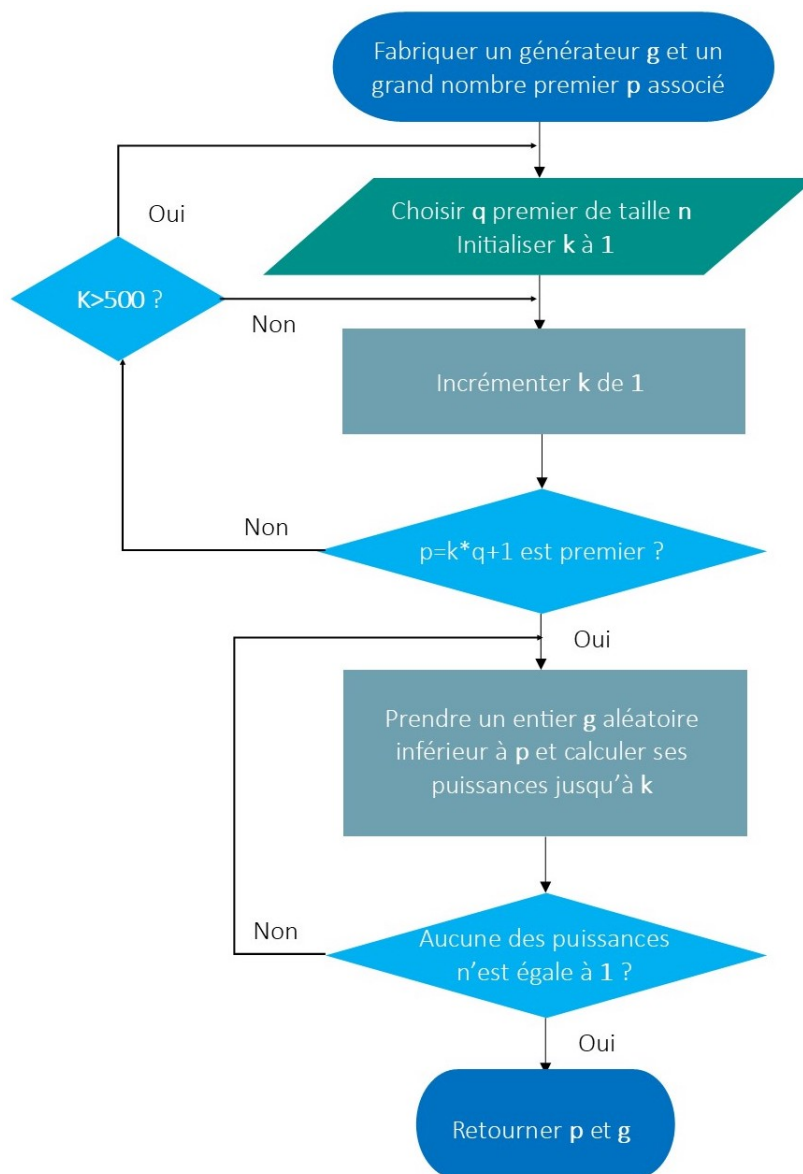


FIGURE 2 – Méthode de recherche des générateurs

Tout d'abord il faut trouver un nombre q premier puis chercher un nombre p premier de la forme $p = kq + 1$, en faisant **varier** k . En testant cette méthode sur machine, nous avons conjecturé qu'il est toujours **possible de trouver** p qui convient avec des **valeurs de k de l'ordre de quelques centaines** (la valeur maximale atteinte par k était 5000).

Grâce à cette méthode, les **facteurs de $p - 1$ sont maintenant connus** (ce qui est presque impossible avec un nombre à 200 chiffres pris au hasard) et peu nombreux. En effet les **facteurs de $p - 1$** sont tous les **nombre qui se mettent sous la forme z ou zq** où z est un diviseur de k . D'après le théorème de Lagrange tous ces nombres sont susceptibles d'être **l'ordre d'un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$** .

Dès lors, si r est **l'ordre d'un élément x** et si r n'est pas un diviseur de k (ce que nous pouvons tester facilement) alors r **s'écrit sous la forme zq** et est donc très grand (de l'ordre de grandeur p à $\log(k)$ près). x est ainsi le **générateur d'un sous-groupe** de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ et possède le **même nombre d'éléments** que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ en ordre de grandeur.

En implémentant cette méthode, nous nous sommes aperçus qu'il est aisé de trouver un élément x **générateur d'un grand sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$** .

2.4 Les opérations élémentaires

2.4.1 Puissance modulaire

Méthode : Exponentiation rapide en base 2

Variables :

- **res** : résultat
- **a** : base à la puissance 2^i avec i l'indice de la boucle en cours

Etapes :

1. Conversion de l'exposant en binaire.
2. On parcourt l'exposant en binaire (i ème coefficient) : si le coefficient vaut 1 on multiplie le résultat par a et on en extrait le reste modulo n . Puis on met a au carré.
3. On retourne le résultat.

Complexité : $O(\log(a))$

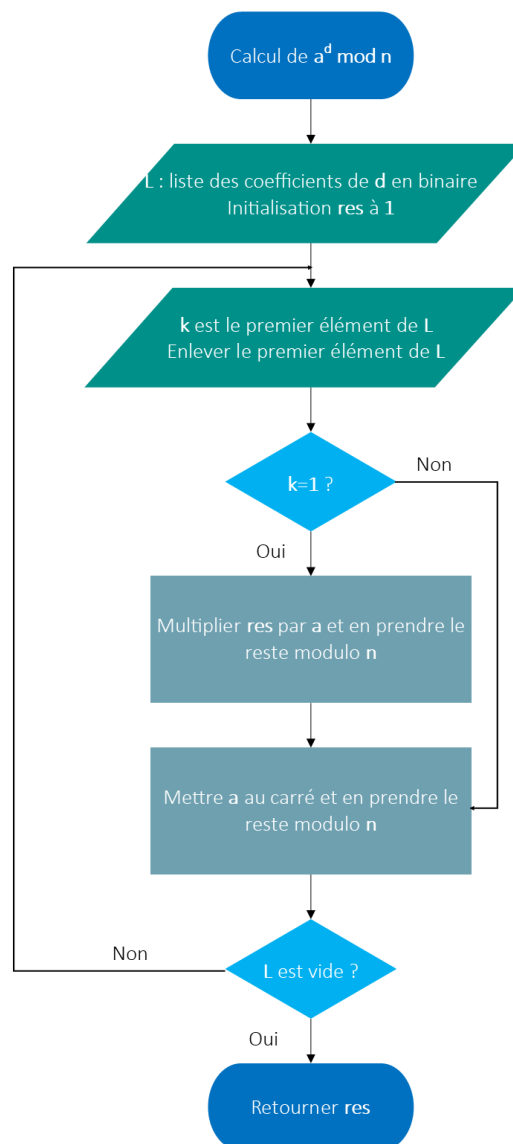


FIGURE 3 – Schéma du calcul d'une puissance modulaire

2.4.2 Inverse modulaire

Méthode : Algorithme d'Euclide étendu (recherche des coefficients de l'équation de Bézout)

Le but est de calculer r_i, u_i, v_i tel que $r_i = u_i a + v_i p$

Etapes :

Tant que $r_i \neq 0$

Faire

$$q = E\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)$$

$$r_{i+1} = r_{i-1} - q r_i$$

$$u_{i+1} = u_{i-1} - q u_i$$

$$v_{i+1} = v_{i-1} - q v_i$$

Retourner u_i

En effet, $1 = u_i a + v_i p$ donc $u_i a \equiv 1[p]$

Complexité : $O((\log(p))^2)$

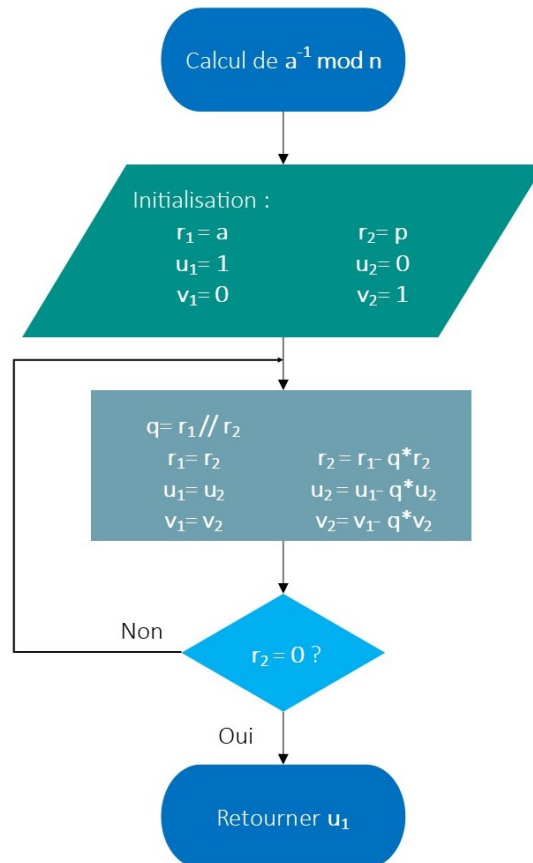


FIGURE 4 – Schéma du calcul d'une inverse modulaire

2.5 L'algorithme de chiffrement symétrique : le DES

2.5.1 Présentation du DES

Le "DES" qui signifie *Data Encryption Standard* est un algorithme de chiffrement qui permet de **chiffrer un message** à partir de la clé de chiffrement qui lui ait fourni. On dit que c'est un algorithme de chiffrement **symétrique** car les étapes pour chiffrer et déchiffrer les messages sont les mêmes.

L'algorithme DES est un algorithme de **chiffrement par bloc** puisqu'il transforme des blocs de 64 bits en d'autres blocs de 64 bits en manipulant des clés individuelles de 64 bits ramenées à 56 bits (un bit de chaque octet peut être utilisé pour le contrôle de parité).

2.5.2 Principe de fonctionnement

Une fois qu'un message (binaire) est découpé et complété en bloc de 64 bits, on applique le DES (fonction f sur la Figure) à chaque bloc avant de les rassembler en un seul bloc constituant le message crypté.

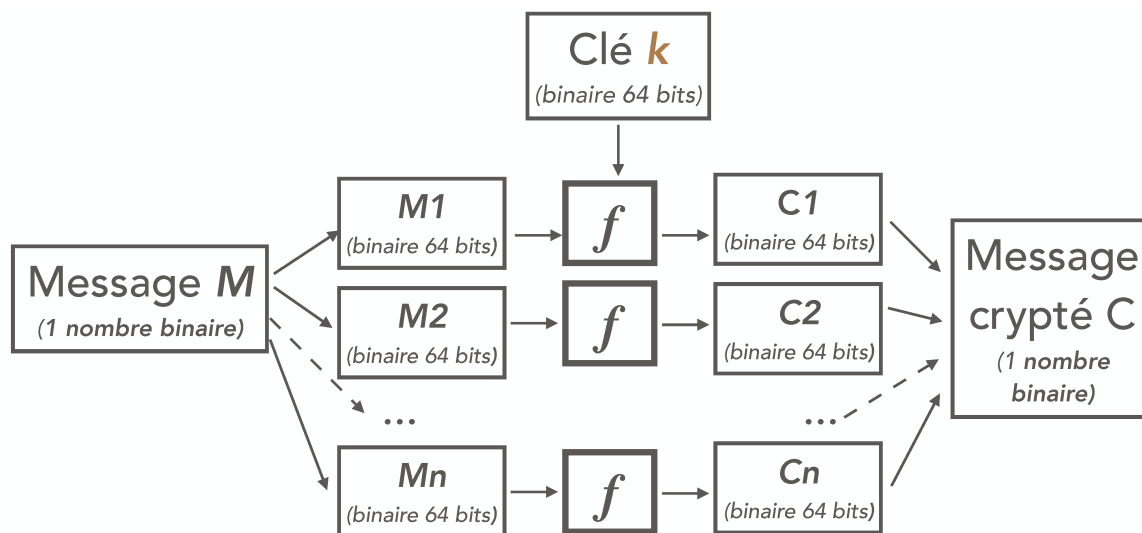


FIGURE 5 – Découpage en blocs pour le chiffrement DES

Le DES est constitué de 2 parties. Tout d'abord il y a **génération des 16 sous-clés** de 48 bits à partir d'une clé de 64 bits, puis il y a le **processus de chiffrement** pour chaque bloc de 64 bits.

2.5.3 Générations des sous-clés

A partir d'une clé de 64 bits, **16 sous-clés** nécessaires au chiffrement sont générées.

Après une **permutation initiale PC-1** (où les bits de fin d'octet sont notamment enlevés), la clé de 64 bits est **réduit** en une clé de 56 bits. Ces 56 bits sont ensuite **partagés en 2 blocs** A0 et B0 de 28 bits. Ces 2 blocs vont subir **16 itérations** pour **générer les 16 sous-clés**.

Tout d'abord chaque bloc va subir un **nombre de décalage à gauche D_i** , selon l'indice i de l'**itération**, formant ainsi 2 nouveaux blocs de 28 bits. Ces derniers vont servir :

- à la génération de la **prochaine sous-clé**
- à **générer la sous clé K_i** : les deux blocs de 28 bits sont **rassemblés** pour former un bloc de 56 bits qui va subir une **permutation PC-2**, donnant ainsi la clé K_i

En répétant 16 fois le processus, on obtient alors les **16 sous-clés numérotées de 1 à 16**.

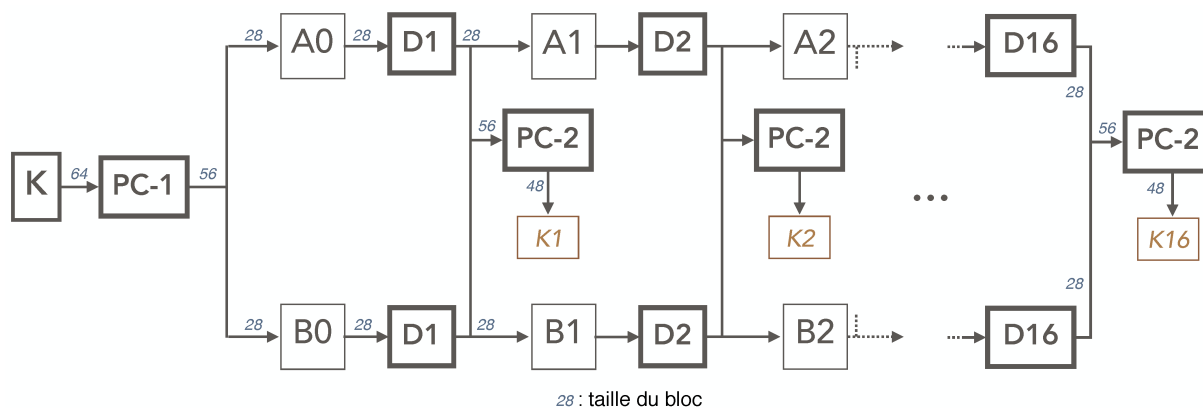


FIGURE 6 – Génération des sous-clés

2.5.4 Processus de chiffrement

Le chiffrement DES, constitué de permutations et de substitutions, peut être découpé en 3 étapes :

1. permutation initiale du bloc
2. 16 itérations appelées *Ronde*
3. permutation finale

Après une **permutation initiale P_i** , le bloc de 64 bits est **séparé en 2 blocs** de 32 bits (G0 à gauche et D0 à droite) qui vont effectuer **16 itérations** appelées *Ronde*. Chaque *Ronde* prend donc en entrée 2 blocs de 32 bits (un bloc à droite et un bloc à gauche) et retourne en sortie 2 autres blocs de 32 bits :

- le **bloc de gauche en sortie** est le **bloc de droite en entrée**.
- le **bloc de droite en sortie** est obtenue de la manière suivante : le bloc de droite en entrée est d'abord **étendu** en un bloc de 48 bits à l'aide de la fonction d'**extension E** , puis un **OU exclusif** est effectué entre le **bloc étendu** et la **sous-clé K_i** correspondant à l'itération. Ce nouveau bloc de 48 bits passe ensuite par une **fonction de substitution S** avant de réaliser un **OU exclusif** avec le **bloc de gauche en entrée** pour donner le **bloc de droite en sortie**.

Enfin, après les 16 *Rondes*, les blocs de 32 bits (G16 et D16) sont regroupés pour reformer un bloc de 64 bits qui va subir une **permutation finale P_f** , donnant ainsi un bloc crypté.

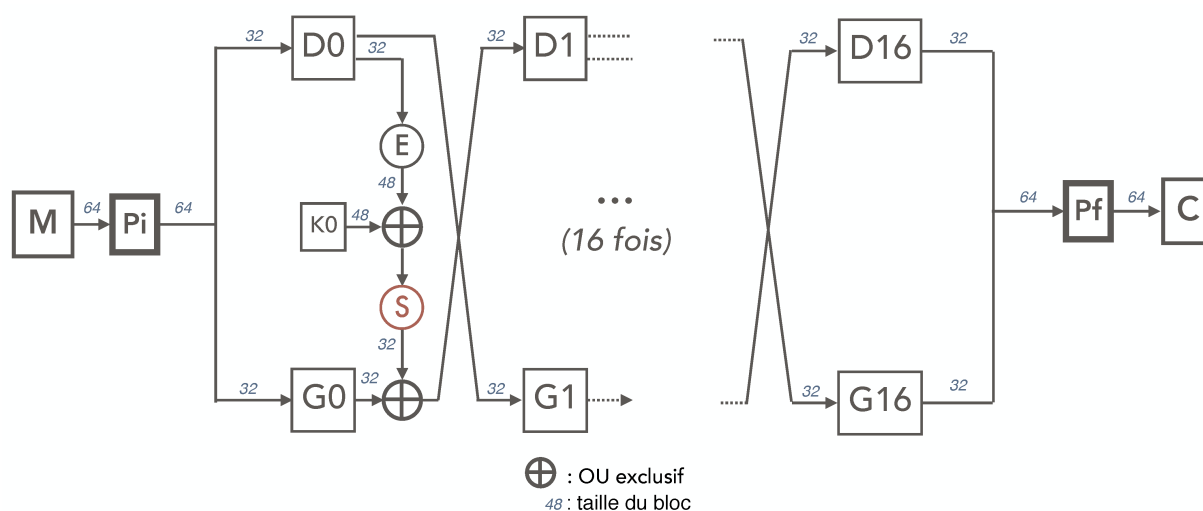


FIGURE 7 – Chiffrement DES

Fonction de substitution S :

La fonction de substitution S prend en entrée un bloc de 48 bits et renvoie en sortie un bloc de 32 bits.

Tout d'abord, le bloc de 48 bits est **décomposé en 8 blocs** de 6 bits, avec chaque bit numéroté de 1 à 6. Ensuite, pour chacun des 8 blocs de 6 bits, un nombre de 4 bits est retourné après **substitution par un coefficient (entier) de la matrice S_i** (i allant de 1 à 8) **correspondante**. La sélection du coefficient se fait de la manière suivante :

- les bits 1 et 6 correspondent aux 2 bits de positionnement *ligne*, convertis en entier pour donner le **numéro de ligne** de la matrice S_i
- les bits 2 à 5 correspondent aux 4 bits de positionnement *colonne*, convertis en entier pour donner le **numéro de colonne** de la matrice S_i

Une fois **l'entier récupéré** dans la matrice S_i associée, celui ci est **converti** en nombre binaire de 4 bits.

Enfin, les 8 nombres binaires de 4 bits sont **concaténés pour former un bloc de 32 bits** qui va subir une permutation P avant d'effectuer le *OU exclusif* avec le bloc de gauche.

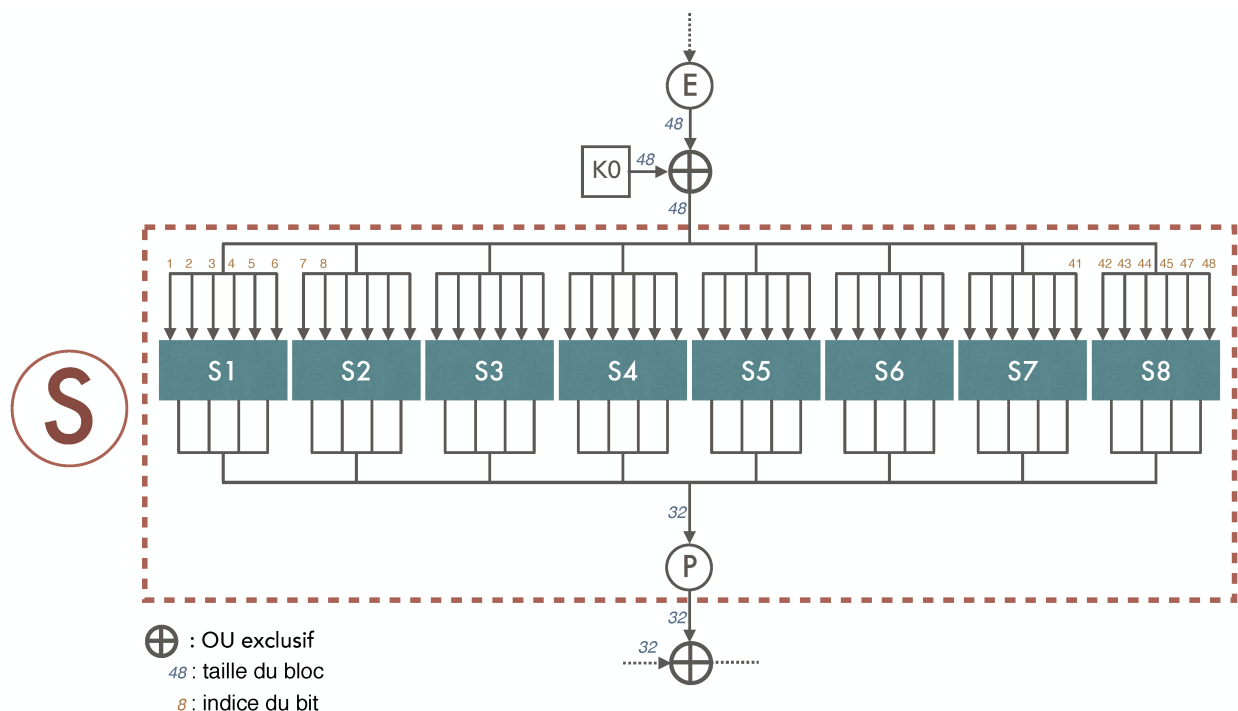


FIGURE 8 – Fonction de substitution S

2.5.5 Processus de déchiffrement

Le processus de déchiffrement est **identique au processus de chiffrement** à une **exception** près : les **16 sous-clés sont utilisées dans l'ordre inverse**. Ainsi la clé K_{16} devient la clé K_1 , puis la clé K_{15} devient la clé K_2 etc...

2.6 Architecture client-serveur

Architecture Client-Serveur est l'architecture utilisée pour la majorité des communications sur internet. Le module "socket" de Python est utilisé pour ouvrir des connexions utilisant le **protocole TCP/IP**. Le serveur est donc repéré par son adresse IP et le port qu'il dédie à la messagerie. Une programmation dite "en parallèle" est mise en place à l'aide du module **Thread** de Python pour permettre la réception et l'envoi simultané de messages.

Procédure de Handshake :

A chaque **connexion d'un client** sur le serveur, il doit renseigner **un pseudo** qui permettra aux autres utilisateurs de l'identifier, et **une clé publique**. Le serveur **stocke ces informations et les rend accessibles** aux autres utilisateurs.

Le serveur est donc bien un **canal public** puisque tous les utilisateurs peuvent accéder à tous les messages, même ceux qui ne leur sont pas adressés. D'où l'importance du cryptage.

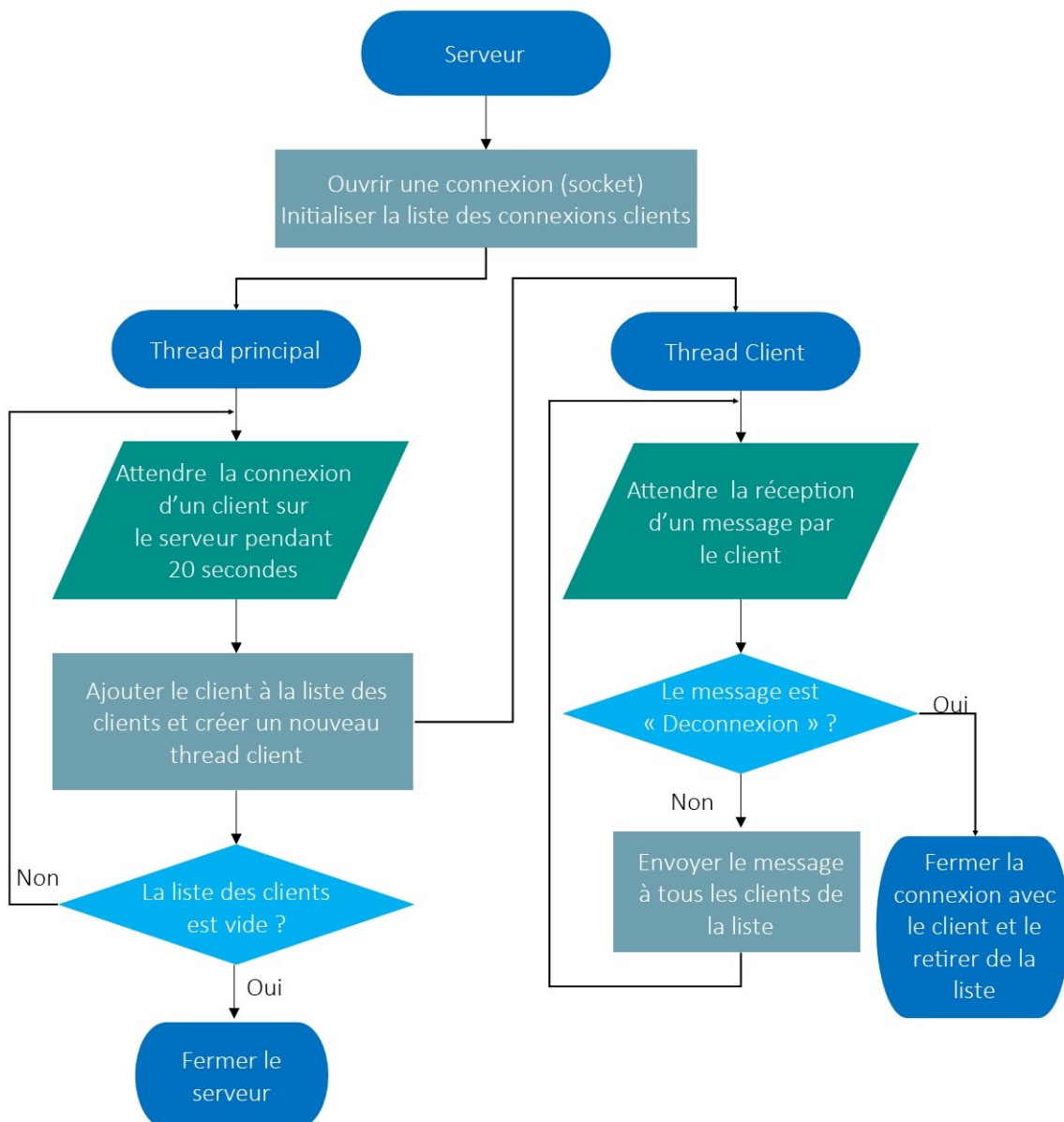


FIGURE 9 – Schéma de fonctionnement du serveur

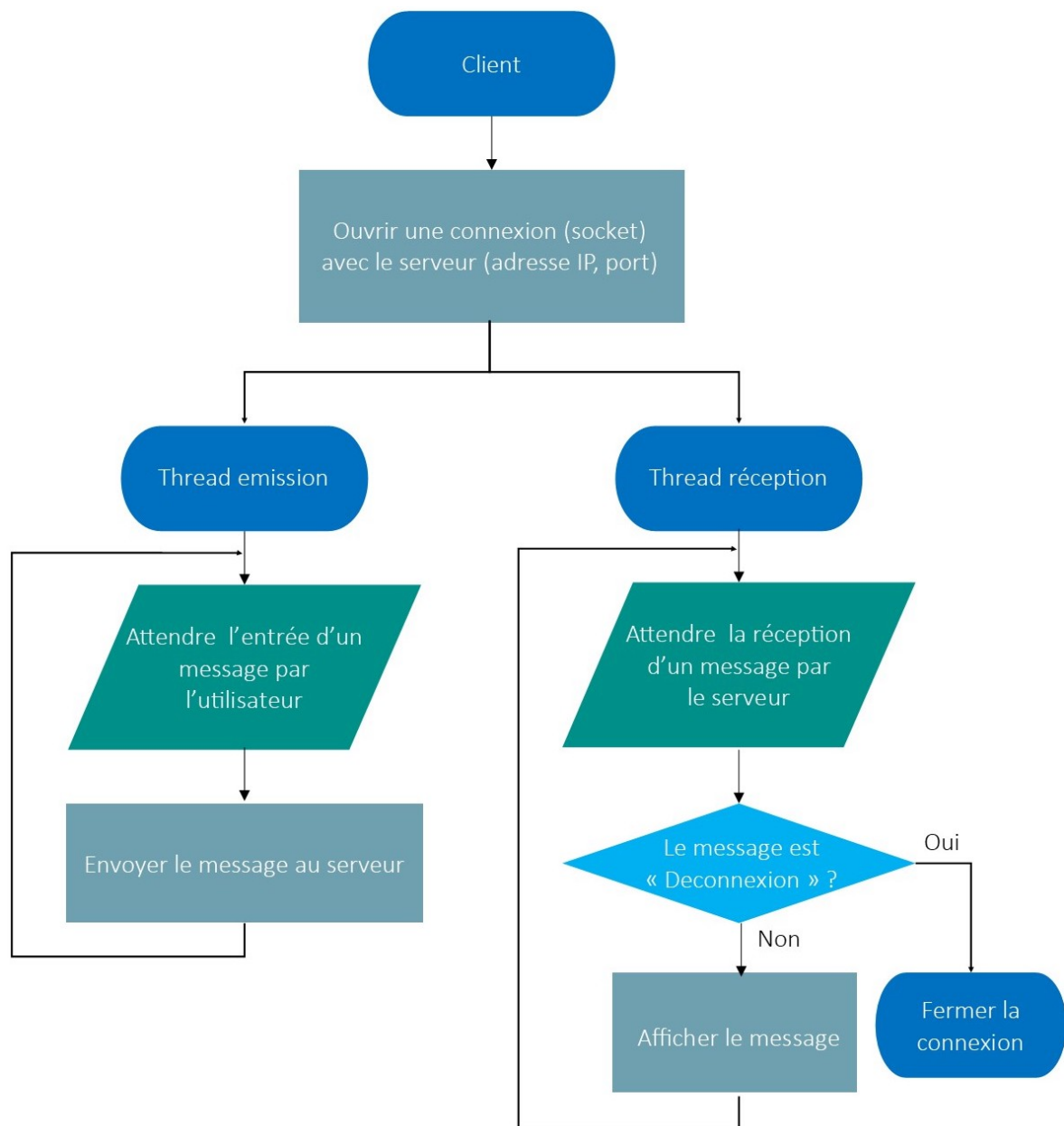


FIGURE 10 – Schéma de fonctionnement du client

3 Analyse de la messagerie sécurisée

3.1 Attaque du cryptosystème d'El Gamal

3.1.1 Algorithme de Shanks

Il s'agit d'un algorithme de **calcul du logarithme discret**.

"Pas de bébé, pas de géant.", Shanks

Soit G un groupe cyclique d'ordre N et g un générateur. Etant donné un élément x dans G , il s'agit de **trouver l'entier n tel que $x = g^n$** . On pose $K = \lceil \sqrt{N} \rceil$. L'idée est de parcourir les éléments de G de deux façons :

- lors du **premier parcours, à pas-de-bébé**, on établit la **liste des puissances successives du générateur** : $A = \{g^i \mid i = 0, 1, \dots, K-1\}$
- lors du **second parcours, à pas-de-géant**, on **saute de K en K** :
 $B = \{xg^{-Kj} \mid j = 0, 1, \dots, K-1\}$

Ces deux listes ont nécessairement un **élément commun** $g^i = xg^{-Kj}$, c'est-à-dire $x = g^{i+Kj} = g^n$ qui correspond à la division euclidienne de n par K .

La **complexité de l'algorithme est exponentielle** puisqu'il nécessite le stockage de \sqrt{N} éléments et en **moyenne $\frac{1}{2}\sqrt{N}$ calculs** avant de trouver l'élément commun à A et à B .

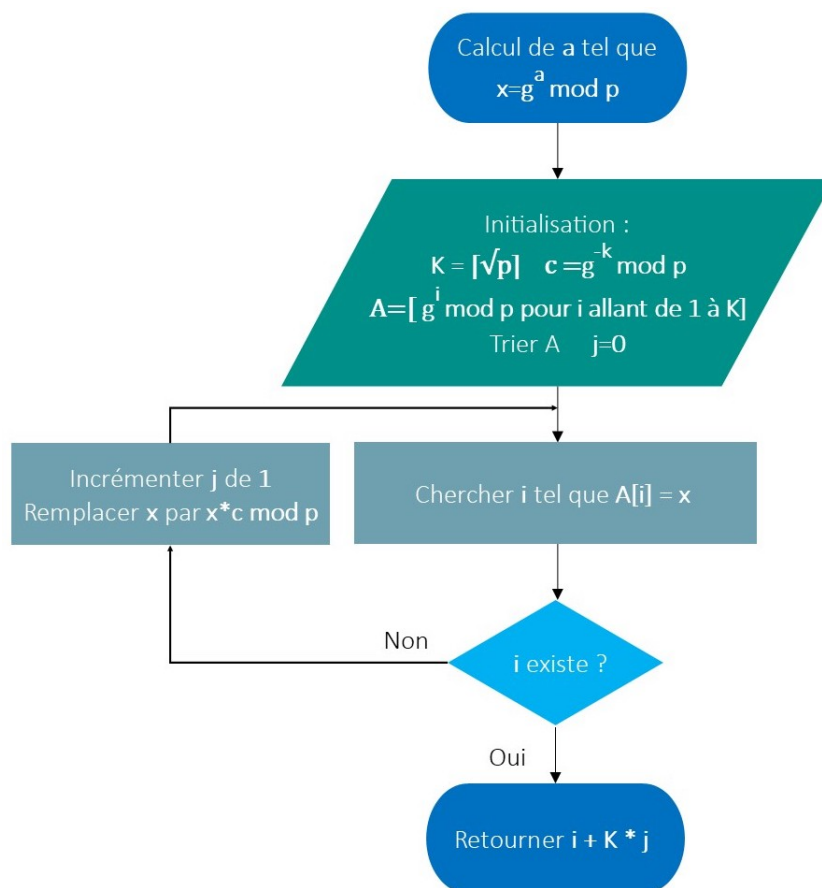


FIGURE 11 – Fonctionnement de l'algorithme de Shanks

3.1.2 Calcul de l'indice

Algorithme **le plus efficace** actuellement mais **difficile à implémenter** dont la **complexité est sous-exponentielle**.

3.2 Comparaison avec le chiffrement RSA

3.2.1 Fonctionnement du RSA

Le système RSA (1977) est un cryptosystème qui repose sur le **problème de factorisation des grands entiers**. C'est sans doute le plus populaire des systèmes à clés publiques.

La **clé privée** est constituée de **deux nombres premiers** p et q et d'un entier d premier avec $\phi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$.

La **clé publique** est constituée du produit n de p et q et d'un entier e inverse de d modulo $\phi(n)$. L'ensemble des messages est l'ensemble U_n des éléments inversibles modulo n .

L'**opération de chiffrement** est l'élévation à la puissance e modulo n . L'entier e étant l'exposant public.

L'**opération de déchiffrement** est l'élévation à la puissance d . L'entier d étant l'exposant privé. D'après le théorème d'Euler, la composition de ces deux opérations est l'identité.

Le principe de la **signature RSA** est d'inverser les rôles des exposants e et d par rapport à leur utilisation dans le schéma de chiffrement. L'exposant privé d sert à chiffrer le condensé h du message. Seul le détenteur de la clé privée peut le faire. La signature est le résultat de ce chiffrement : $\sigma = h^d$. La vérification consiste à tester $\sigma^e = h$.

3.2.2 Attaque du cryptosystème RSA : l'algorithme rho de Pollard

L'idée de l'algorithme Rho est la suivante : si on parvient à trouver deux entiers distincts x et x' inférieurs à n et tels que $x \equiv x' [p]$, alors $x - x'$ est multiple de p . Comme n est également multiple de p , le PGCD de $x - x'$ et n sera multiple de p , ce qui signifie qu'il sera égal à p ou n . Ainsi, on teste successivement des paires (x, x') d'entiers de $[0, n-1]$ jusqu'à trouver une paire telle que le PGCD de $x - x'$ et n est supérieur à 1 mais inférieur à n .

Complexité : $O(n^{\frac{1}{4}})$

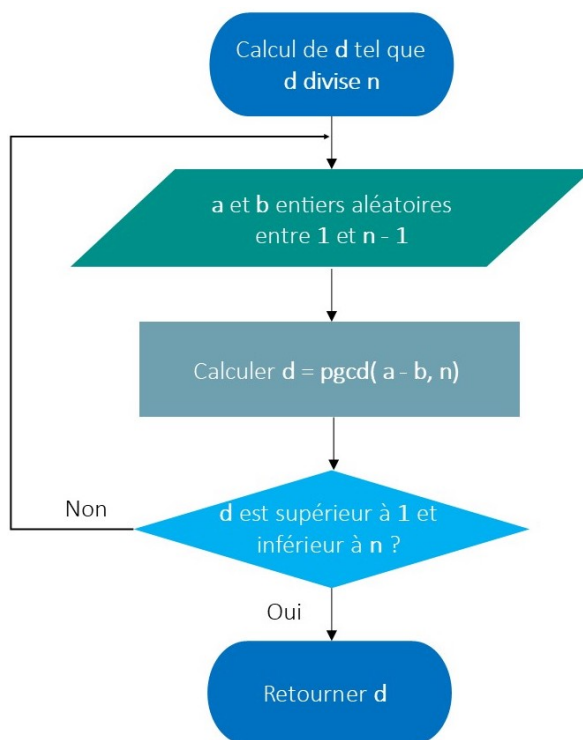


FIGURE 12 – Fonctionnement de l'algorithme rho de Pollard

3.2.3 Attaque du cryptosystème RSA : le crible algébrique

Algorithme **le plus efficace** actuellement mais **difficile à implémenter** dont la **complexité est sous-exponentielle**.

3.3 Attaque sur la signature d'El Gamal

L'aléa de signature k doit être autant confidentiel que la clé privée, car la connaissance de ce dernier (en plus des données publiques) permet de remonter jusqu'à la clé privée x . En effet si x est connu, et connaissant (r, s) (données publiques) alors il est aisé de trouver la solution x à : $x = (h - ks)r^{-1}$ dans $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}^*, \times)$ (si r et $p-1$ sont premiers entre eux).

Par ailleurs, il est crucial que **l'aléa de signature k soit différent** pour chaque message. Dans le cas contraire, on peut également **remonter à la clé privée x** .

En effet si le même k est utilisé pour deux messages différents m_1 et m_2 , de signature (r_1, s_1) et (r_2, s_2) , alors il est possible de remonter à k et donc à x . k est solution des deux équations suivantes dans $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}^*, \times)$:

- $m_1 = xr + ks_1$
- $m_2 = xr + ks_2$

Donc k est solution de : $k(s_1 - s_2) \equiv m_2 - m_1 \pmod{p-1}$, qui est facilement résoluble si $s_1 - s_2$ et $p-1$ sont premiers entre eux.

4 Programmes (Python 3)

```
1 from random import randint
2 from math import log
3
4 def puissmod(a,d,n):
5     """a**d mod n"""
6     #iteratif : beaucoup plus efficace (10^-5) 600 chiffres ->
    0.024571632396359178 s
7     dbin=bin(d)
8     L=[int(dbin[-i-1]) for i in range(len(dbin)-2)]
9     res=1
10    while L!=[]:
11        k=L.pop(0)
12        if k>0:
13            res=res*a%n
14            a=a**2%n
15    return res
16
17 def inversmod(a,p):
18     """a**(-1) mod p"""
19     #algorithme d'euclide etendu (solution de l'equation de Bezout)
20    r1,u1,v1,r2,u2,v2=a,1,0,p,0,1
21    while r2!=0:
22        q=r1//r2
23        r1,u1,v1,r2,u2,v2=r2,u2,v2,r1-q*r2,u1-q*u2,v1-q*v2
24    if r1!=1:
25        return 'pas inversible'
26    else:
27        if u1<1:
28            while u1<1:
29                u1+=p
30        if u1>p:
31            while u1>p:
32                u1-=p
33    return u1
34
35 #Fonctions de ElGamal
36 def chiffrement(p,g,cle_dest,message_clair,sign):
37     k1=randint(1,p-1)
38     cle_sess=puissmod(cle_dest,k1,p)
39     message_crypt=(message_clair*cle_sess)%p
40     entete=puissmod(g,k1,p)
41     if sign:
42         r,s=signature(p,g,k1,message_crypt)
43         return r,s,entete,message_crypt
44     else:
45         return entete,message_crypt
```

```

46
47 def dechiffrement(p,g,cle_priv,entete,message_crypt):
48     cle_sess=puissmod(entete,cle_priv,p)
49     message_clair=(message_crypt*inversmod(cle_sess,p))%p
50     return message_clair
51
52 def signature(p,g,k1,message_crypt):
53     k2=randint(1,p-1)
54     k2inv=inversmod(k2,p-1)
55     while type(k2inv)==str: #tant que le k aleatoire n'est pas
inversible mod p-1
56         k2=randint(1,p-1)
57         k2inv=inversmod(k2,p-1)
58     r=puissmod(g,k2,p)
59     h=message_crypt
60     s=((h-k1*r)*k2inv)%(p-1)
61     return r,s
62
63 def verification_signature(p,g,r,s,entete,message_crypt):
64     h=message_crypt
65     a=puissmod(g,h,p)
66     b=(puissmod(entete,r,p)*puissmod(r,s,p))%p
67     if a==b:
68         return True
69     else:
70         return False
71
72 def generation_cle(p,g):
73     """p premier,g generateur"""
74     cle_priv=randint(1,p-1)
75     cle_publ=puissmod(g,cle_priv,p)
76     return cle_priv,cle_publ

```

4.1 Génération des nombres premiers : déterministe et probabiliste (Miller-Rabin)

```
1  import random as rd
2  from time import perf_counter
3  import math
4
5  ## Generation d'un nombre premier de maniere deterministe
6
7  def est_premier(n):
8      if n == 2 or n == 3: return True
9      if n < 2 or n%2 == 0: return False
10     if n < 9: return True
11     if n%3 == 0: return False
12     r = int(n**0.5)
13     f = 5
14     while f <= r:
15         if n%f == 0: return False
16         if n%(f+2) == 0: return False
17         f +=6
18     return True
19
20 def premier(n): # Plus applicable au dela de 20 chiffres
21     while n>10:
22         if est_premier(n):
23             return n
24         n-=1
25
26 def premier_Pollard(n):
27     eps=10**(-100)
28     while n>10:
29         if (n-1)/2-int((n-1)/2)<eps:
30             if est_premier(int((n-1)/2)):
31                 if est_premier(n):
32                     return n
33         n-=1
34
35 ## Generation d'un nombre premier basee sur le test de primalite de
36     Miller-Rabin
37
38 def MillerRabin_generation(b): #longueur en base 10 du nombre
39     premier (proba pas premier 10**-300)
40     i=0
41     while True:
42         i+=1
43         n=rd.choice([1,3,5,7,9]) #candidat premier
44         for k in range(1,b-1) :
45             n+=rd.randint(0,9)*10**k
```

```

44         n+=rd.randint(1,9)*10**b
45         if MillerRabin_test(n,500):
46             return i,n
47
48 def MillerRabin_temoin(a,n):
49     #Calcul de s et d tels que n-1=2**s*d
50     d=(n-1)//2
51     s=1
52     while d%2==0:
53         d=d//2
54         s+=1
55     #Premier test
56     x=puissmod(a,d,n)
57     if x==1 or x==n-1 :
58         return False
59     #Boucle principale
60     while s>1:
61         x=x**2%n
62         if x==n-1:
63             return False
64         s-=1
65     return True
66
67 def MillerRabin_test(n,k): #primalite de n a tester et k nombre de
    boucles
68     for t in range(k):
69         a=rd.randint(2,n-2)
70         if MillerRabin_temoin(a,n):
71             return False
72     return True
73
74 ## Fabriquer un generateur g et un grand nombre premier p associe
75
76 def generateur_ElGamal(n):
77     while True:
78         q=MillerRabin_generation(n)[1]
79         for k in range(2,500):
80             p=k*q+1
81             if MillerRabin_test(p,100):
82                 while True:
83                     g=rd.randint(2,p) #Candidat generateur
84                     i=1
85                     grandordre=True
86                     while grandordre:
87                         if puissmod2(g,i,p)==1:
88                             grandordre=False
89                         elif i<k:
90                             i+=1

```

```
91             else:
92                 return p,g
93
94 def generateur_RSA(n):
95     while True:
96         q=MillerRabin_generation(n)[1]
97         for k in range(1,500):
98             p=k*q+1
99             if MillerRabin_test(p,100):
100                 return p
```

4.2 Client-serveur

4.2.1 Serveur

```
1  # Threads
2
3  from threading import Thread
4
5  class ThreadServeurClient(Thread):
6
7      def __init__(self, connexion_principale, connexion_client,
8          L_connexions):
9          Thread.__init__(self)
10         self.connexion_principale=connexion_principale
11         self.connexion_client=connexion_client
12         self.L_connexions=L_connexions
13         self.pseudo=''
14
15     def run(self):
16         self.connexion_client.send('Entrez votre pseudo : '.encode
17         ())
18         self.pseudo=self.connexion_client.recv(1024).decode()
19         print( 'Client ' +str(self.connexion_client.getsockname())+'
20         alias '+self.pseudo)
21         Continue=True
22         while Continue :
23             message_recu=self.connexion_client.recv(1024).decode()
24             if message_recu=='Deconnexion':
25                 Continue=False
26                 self.L_connexions.remove(self.connexion_client)
27             else:
28                 for client in self.L_connexions:
29                     if client != self.connexion_client:
30                         client.send((self.pseudo+' : '+message_recu
31                         ).encode())
32                 self.connexion_client.send(b"Deconnexion")
33                 print("Deconnecte avec le client {}".format(self.pseudo))
34                 self.connexion_client.close()
35
36 # Serveur
37
38 import sys
39 import socket
40
41 hote='' # vide car le serveur accepte toutes les connexions
42 port = 12800
43
44 connexion_principale = socket.socket(socket.AF_INET, socket.
```



```

        SOCK_STREAM)
41 connexion_principale.bind((hote, port))
42 connexion_principale.listen(5)
43 connexion_principale.settimeout(20)
44 print("Le serveur ecoute a present sur le port {}".format(port))
45
46 L_connexions=[]
47 try:
48     connexion_client, infos_connexion = connexion_principale.accept
49     ()
50 except socket.timeout:
51     print("Il n'y a pas de clients : Deconnection")
52     connexion_principale.close()
53     sys.exit()
54 print("Connecte avec le client {}".format(infos_connexion))
55 L_connexions.append(connexion_client)
56 ThreadServeurClient(connexion_principale, connexion_client,
57     L_connexions).start()
58
59 while L_connexions != []:
60     try:
61         connexion_client, infos_connexion = connexion_principale.
62         accept()
63     except socket.timeout :
64         continue
65     print("Connecte avec le client {}".format(infos_connexion))
66     L_connexions.append(connexion_client)
67     ThreadServeurClient(connexion_principale, connexion_client,
68         L_connexions).start()
69
70 print("Il n'y a plus de clients : Deconnection")
71 connexion_principale.close()
72
73 sys.exit()

```

4.2.2 Client

```

1  # Threads
2  from threading import Thread
3
4  class ThreadClientReception(Thread):
5
6      def __init__(self, connexion_serveur):
7          Thread.__init__(self)
8          self.connexion_serveur=connexion_serveur
9
10     def run(self):

```

```

11         Continue=True
12         while Continue:
13             message_recu=self.connexion_serveur.recv(1024).decode()
14             print(message_recu)
15             if message_recu=='Deconnexion':
16                 Continue=False
17             self.connexion_serveur.send(b'Deconnexion')
18
19 class ThreadClientEmission(Thread):
20
21     def __init__(self,connexion_serveur):
22         Thread.__init__(self)
23         self.connexion_serveur=connexion_serveur
24
25     def run(self):
26
27         while True:
28             message=input()
29             try:
30                 self.connexion_serveur.send(message.encode())
31             except:
32                 break
33
34 # Client
35
36 import sys
37 import socket
38
39 hote = "localhost" #Remplacer par l'adresse IP
40 port = 12800
41
42 connexion_serveur = socket.socket(socket.AF_INET, socket.
    SOCK_STREAM)
43 connexion_serveur.connect((hote, port))
44 print("Connexion etablie avec le serveur sur le port {}".format(
    port))
45
46 thread_reception=ThreadClientReception(connexion_serveur)
47 thread_emission=ThreadClientEmission(connexion_serveur)
48
49 Continue=True
50 thread_reception.start()
51 thread_emission.start()
52
53 thread_reception.join()
54 sys.exit()

```

4.3 Opérations élémentaires

```
1  def puissmod(a,d,n):
2      """a**d mod n"""
3      #iteratif : beaucoup plus efficace (10^-5) 600 chiffres ->
0.025 s
4      dbin=bin(d)
5      L=[int(dbin[-i-1]) for i in range(len(dbin)-2)]
6      res=1
7      while L!=[]:
8          k=L.pop(0)
9          if k>0:
10             res=res*a%n
11             a=a**2%n
12      return res
13
14 def inversmod(a,p):
15     """a**(-1) mod p"""
16     #algorithme d'Euclide étendu (solution de l'équation de Bezout)
17     r1,u1,v1,r2,u2,v2=a,1,0,p,0,1
18
19     while r2!=0:
20         q=r1//r2
21         r1,u1,v1,r2,u2,v2=r2,u2,v2,r1-q*r2,u1-q*u2,v1-q*v2
22     if r1!=1:
23         return "pas inversible"
24     else:
25         if u1<1:
26             while u1<1:
27                 u1+=p
28         if u1>p:
29             while u1>p:
30                 u1-=p
31     return u1
```

4.4 Data Encryption Standard (DES)

```
1  # ***** ENCODAGE DES CARACTERES *****
2
3  #Codage du message: 1 caractere = 8 bits
4  def encodage(m):
5      """Message en STRING retourne en binaire 8 bits (table AISCII)
6      """
7      if type(m) != str :
8          raise TypeError
9      M = list(m) # on split tout en caracteres individuels
10     Mord = [ord(M[i]) for i in range(len(M))]
11     Mbin = [bin(Mord[i]) for i in range(len(M))]
12     # traitement du Mbin pour enlever le '0b' du debut et taille
13     constante
14     Mfin=[]
15     for binaire in Mbin:
16         binaire=binaire[2:]
17         n=len(binaire)
18         if n>8:
19             return 'Erreur len(binaire)'
20         for i in range(8-n): # complete avec des zeros
21             Mfin.append(0)
22         for i in binaire:
23             Mfin.append(int(i))
24     return Mfin
25
26 def decodage(M):
27     n=len(M)//8
28     Mfin=[str(i) for i in M]
29     Mbin=[]
30     for i in range(n):
31         binaire=Mfin[i*8]
32         for j in range(1,8):
33             binaire+=Mfin[i*8+j]
34         Mbin.append(binaire)
35     Mord=[int(binaire,2) for binaire in Mbin]
36     Mchr=[chr(i) for i in Mord]
37     m=Mchr[0]
38     for i in range(1,len(Mchr)):
39         m+=Mchr[i]
40     return m
41
42 # ***** GENERATION DES CLES *****
43
44 def permutationCP1(K):
45     """Effectue la permutation initiale de la cle de 64 bits,
```

```

    retourne les listes G0 et D0"""
45     if len(K) != 64 : return "Erreur len(K)"
46     else:
47         K1 = []
48         CP1=[57,49,41,33,25,17, 9, 1,58,50,42,34,26,18,
49             10, 2,59,51,43,35,27,19,11, 3,60,52,44,36,
50             63,55,47,39,31,23,15, 7,62,54,46,38,30,22,
51             14, 6,61,53,45,37,29,21,13, 5,28,20,12, 4]
52         for i in CP1:
53             K1.append(K[i-1])
54         return K1[:28], K1[28:]
55
56 def decalageGauche(L, n):
57     """ Decale les elements de la liste L de n places vers la
    GAUCHE"""
58     Ldec = []
59     for i in range(len(L)-n):
60         Ldec.append(L[i+n])
61     for i in range(n):
62         Ldec.append(L[i])
63     return Ldec
64
65 def regroupe(G,D):
66     return G+D
67
68 def permutationCP2(K):
69     """Effectue la permutation CP2 du bloc de 56 bits en un bloc de
    48 bits qui est la cle Ki"""
70     if len(K) != 56 : return "Erreur len(K)"
71     else:
72         Ki = []
73         CP2=[14,17,11,24, 1, 5, 3,28,15, 6,21,10,
74             23,19,12, 4,26, 8,16, 7,27,20,13, 2,
75             41,52,31,37,47,55,30,40,51,45,33,48,
76             44,49,39,56,34,53,46,42,50,36,29,32]
77         for i in CP2:
78             Ki.append(K[i-1])
79         return Ki
80
81 def genKey(K):
82     """ Retourne les 16 cles Ki a partir de la cle de 64 bits"""
83     decalage = [1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1] #
    Nombre de decalage a gauche pour les 16 iterations (de 0 a 15)
84     cles = []
85     #verification cle est de 64 bits:
86     if checkBINn(K, 64) == False: return "Erreur sur la cle
    initiale K"
87     # permutation initiale CP1:

```

```

88     G, D = permutationCP1(K)
89     if checkBINn(G, 28) == False: return "Erreur sur la cle
initiale G"
90     if checkBINn(D, 28) == False: return "Erreur sur la cle
initiale D"
91     for i in range(16):
92         Gi = decalageGauche(G, decalage[i])
93         Di = decalageGauche(D, decalage[i])
94         Ki = permutationCP2(regroupe(Gi, Di))
95         if checkBINn(Ki, 48) == False: return "Erreur sur la cle Ki
"
96         cles.append(Ki)
97         G = Gi
98         D = Di
99     return cles
100
101 def checkBINn(L, n):
102     """ verifie que la liste L est une liste contenant n elements
binaire (0 ou 1)"""
103     binaire = [0,1]
104     if len(L)==n:
105         for i in range(len(L)):
106             if L[i] not in binaire:
107                 return False
108         return True
109     else:
110         return False
111
112 def gen(n):
113     return([(i+1)*10 for i in range(n)])
114
115
116 # ***** PERMUTATIONS *****
117
118 def permutation_initiale(L):
119     """Permute les elements de L selon l'ordre de permutation
defini par PI"""
120     PI=[58,50,42,34,26,18,10, 2,
121         60,52,44,36,28,20,12, 4,
122         62,54,46,38,30,22,14, 6,
123         64,56,48,40,32,24,16, 8,
124         57,49,41,33,25,17, 9, 1,
125         59,51,43,35,27,19,11, 3,
126         61,53,45,37,29,21,13, 5,
127         63,55,47,39,31,23,15, 7] #Liste de permutation initiale
128     Q=[L[i-1] for i in PI]
129     return Q
130

```

```

131 def scindement2(L):
132     """Retourne le scindement de L en 2 listes G0 et D0 de de 32
    bits"""
133     return L[0:32], L[32:64]
134
135 def permutation_inverse(L):
136     """Permute les elements de L selon l'ordre de permutation
    defini par PII = permutation initiale inverse"""
137     PII=[40,8,48,16,56,24,64,32,
138         39,7,47,15,55,23,63,31,
139         38,6,46,14,54,22,62,30,
140         37,5,45,13,53,21,61,29,
141         36,4,44,12,52,20,60,28,
142         35,3,43,11,51,19,59,27,
143         34,2,42,10,50,18,58,26,
144         33,1,41, 9,49,17,57,25]
145     Q=[L[i-1] for i in PII]
146     return Q
147
148 # ***** RONDE *****
149
150 def expansion(D):
151     """Etend les 32 bits du bloc D0 en 48 bits dans Q"""
152     E=[32, 1, 2, 3, 4, 5,
153        4, 5, 6, 7, 8, 9,
154        8, 9,10,11,12,13,
155        12,13,14,15,16,17,
156        16,17,18,19,20,21,
157        20,21,22,23,24,25,
158        24,25,26,27,28,29,
159        28,29,30,31,32, 1]
160     Q = [D[i-1] for i in E]
161     return Q
162
163 def XOR(b1,b2):
164     """OU exclusif entre 2 bits b1 et b2"""
165     if b1==1:
166         if b2==1:
167             return 0
168         else:
169             return 1
170     elif b2==1:
171         return 1
172     else:
173         return 0
174
175 def XORL(Dprime,K):
176     """Ou exclusif entre Dprime et cle K (48 bits)"""

```

```

177     D0 = []
178     for i in range(len(Dprime)):
179         D0.append(XOR(Dprime[i], K[i]))
180     return D0
181
182 def scindement8(D0):
183     """Scinde le bloc de 48 en 8 blocs de 6"""
184     return [D0[0:6], D0[6:12], D0[12:18], D0[18:24], D0[24:30], D0
[30:36], D0[36:42], D0[42:48]]
185
186 def selection1(D01):
187     """Selection pour D01"""
188     S1=[[14, 4,13, 1, 2,15,11, 8, 3,10, 6,12, 5, 9, 0, 7],
189         [ 0,15, 7, 4,14, 2,13, 1,10, 6,12,11, 9, 5, 3, 8],
190         [ 4, 1,14, 8,13, 6, 2,11,15,12, 9, 7, 3,10, 5, 0],
191         [15,12, 8, 2, 4, 9, 1, 7, 5,11, 3,14,10, 0, 6,13]]
192     ligne = int(str(D01[0]*10 + D01[5]), 2)
193     colonne = int(str(D01[1]*1000 + D01[2]*100 + D01[3]*10 + D01
[4]), 2)
194     return S1[ligne][colonne]
195
196 def selection2(D02):
197     """Selection pour D02"""
198     S2=[[15, 1, 8,14, 6,11, 3, 4, 9, 7, 2,13,12, 0, 5,10],
199         [ 3,13, 4, 7,15, 2, 8,14,12, 0, 1,10, 6, 9,11, 5],
200         [ 0,14, 7,11,10, 4, 3, 1, 5, 8,12, 6, 9, 3, 2,15],
201         [13, 8,10, 1, 3,15, 4, 2,11, 6, 7,12, 0, 5,14, 9]]
202     ligne = int(str(D02[0]*10 + D02[5]), 2)
203     colonne = int(str(D02[1]*1000 + D02[2]*100 + D02[3]*10 + D02
[4]), 2)
204     return S2[ligne][colonne]
205
206 def selection3(D03):
207     """Selection pour D03"""
208     S3=[[10, 0, 9,14, 6, 3,15, 5, 1,13,12, 7,11, 4, 2, 8],
209         [13, 7, 0, 9, 3, 4, 6,10, 2, 8, 5,14,12,11,15, 1],
210         [13, 6, 4, 9, 8,15, 3, 0,11, 1, 2,12, 5,10,14, 7],
211         [ 1,10,13, 0, 6, 9, 8, 7, 4,15,14, 3,11, 5, 2,12]]
212     ligne = int(str(D03[0]*10 + D03[5]), 2)
213     colonne = int(str(D03[1]*1000 + D03[2]*100 + D03[3]*10 + D03
[4]), 2)
214     return S3[ligne][colonne]
215
216 def selection4(D04):
217     """Selection pour D04"""
218     S4=[[ 7,13,14, 3, 0, 6, 9,10, 1, 2, 8, 5,11,12, 4,15],
219         [13, 8,11, 5, 6,15, 0, 3, 4, 7, 2,12, 1,10,14, 9],
220         [10, 6, 9, 0,12,11, 7,13,15, 1, 3,14, 5, 2, 8, 4],

```



```

221         [ 3,15, 0, 6,10, 1,13, 8, 9, 4, 5,11,12, 7, 2,14]]
222     ligne = int(str(D04[0]*10 + D04[5]), 2)
223     colonne = int(str(D04[1]*1000 + D04[2]*100 + D04[3]*10 + D04
224     [4]), 2)
225     return S4[ligne][colonne]
226
227 def selection5(D05):
228     """Selection pour D05"""
229     S5=[[ 2,12, 4, 1, 7,10,11, 6, 8, 5, 3,15,13, 0,14, 9],
230         [14,11, 2,12, 4, 7,13, 1, 5, 0,15,10, 3, 9, 8, 6],
231         [ 4, 2, 1,11,10,13, 7, 8,15, 9,12, 5, 6, 3, 0,14],
232         [11, 8,12, 7, 1,14, 2,13, 6,15, 0, 9,10, 4, 5, 3]]
233     ligne = int(str(D05[0]*10 + D05[5]), 2)
234     colonne = int(str(D05[1]*1000 + D05[2]*100 + D05[3]*10 + D05
235     [4]), 2)
236     return S5[ligne][colonne]
237
238 def selection6(D06):
239     """Selection pour D06"""
240     S6=[[12, 1,10,15, 9, 2, 6, 8, 0,13, 3, 4,14, 7, 5,11],
241         [10,15, 4, 2, 7,12, 9, 5, 6, 1,13,14, 0,11, 3, 8],
242         [ 9,14,15, 5, 2, 8,12, 3, 7, 0, 4,10, 1,13,11, 6],
243         [ 4, 3, 2,12, 9, 5,15,10,11,14, 1, 7, 6, 0, 8,13]]
244     ligne = int(str(D06[0]*10 + D06[5]), 2)
245     colonne = int(str(D06[1]*1000 + D06[2]*100 + D06[3]*10 + D06
246     [4]), 2)
247     return S6[ligne][colonne]
248
249 def selection7(D07):
250     """Selection pour D07"""
251     S7=[[ 4, 1, 2,14,15, 0, 8,13, 3,12, 9, 7, 5,10, 6, 1],
252         [13, 0,11, 7, 4, 9, 1,10,14, 3, 5,12, 2,15, 8, 6],
253         [ 1, 4,11,13,12, 3, 7,14,10,15, 6, 8, 0, 5, 9, 2],
254         [ 6,11,13, 8, 1, 4,10, 7, 9, 5, 0,15,14, 2, 3,12]]
255     ligne = int(str(D07[0]*10 + D07[5]), 2)
256     colonne = int(str(D07[1]*1000 + D07[2]*100 + D07[3]*10 + D07
257     [4]), 2)
258     return S7[ligne][colonne]
259
260 def selection8(D08):
261     """Selection pour D08"""
262     S8=[[13, 2, 8, 4, 6,15,11, 1,10, 9, 3,14, 5, 0,12, 7],
263         [ 1, 5,13, 8,10, 3, 7, 4,12, 5, 6,11, 0,14, 9, 2],
264         [ 7,11, 4, 1, 9,12,14, 2, 0, 6,10,13,15, 3, 5, 8],
265         [ 2, 1,14, 7, 4,10, 8,13,15,12, 9, 0, 3, 5, 6,11]]
266     ligne = int(str(D08[0]*10 + D08[5]), 2)
267     colonne = int(str(D08[1]*1000 + D08[2]*100 + D08[3]*10 + D08
268     [4]), 2)

```

```

264         return S8[ligne][colonne]
265
266     def quatre(chaine):
267         """ transforme un nombre (en str) en liste contenant chaque
chiffre en int ET normalise en liste de 4 elements avec des 0
devants """
268         L = []
269         for i in chaine:
270             L.append(int(i))
271         n = len(L)
272         if n > 4:
273             return 'Erreur longueur liste'
274         else:
275             for i in range(4-n):
276                 L.insert(0, int(0))
277         return L
278
279     def somme(D01, D02, D03, D04, D05, D06, D07, D08):
280         """Rassemble les valeurs obtenues, cree la table de 32 bits"""
281         Valeurs = [selection1(D01), selection2(D02), selection3(D03),
selection4(D04), selection5(D05), selection6(D06), selection7(
D07), selection8(D08)]
282         ValeursBIN = [bin(Valeurs[i])[2:] for i in range(8)]
283         ValeursBINlist = []
284         for i in range(8):
285             ValeursBINlist.append(quatre(ValeursBIN[i]))
286         table32 = []
287         for i in range(8):
288             table32 = table32 + ValeursBINlist[i]
289         return table32
290
291     def selection(D0):
292         """Etape de selection d'une liste D0 de 48 bits en une liste de
32 bits"""
293         #verification
294         if checkBINn(D0, 48) == False : return "Erreur L0"
295         #scindement :
296         D0i = scindement8(D0)
297         return somme(D0i[0], D0i[1], D0i[2], D0i[3], D0i[4], D0i[5],
D0i[6], D0i[7])
298
299     def permutation32(L):
300         P = [16, 7,20,21,29,12,28,17,
301             1,15,23,26, 5,18,31,10,
302             2, 8,24,14,32,27, 3, 9,
303             19,13,30, 6,22,11, 4,25,]
304         Q = [L[i-1] for i in P]
305         return Q

```

```

306
307
308 # ***** ENCODAGE CLE *****
309
310 def intbin(K):
311     """ Retourne l'entier positif K en binaire dans une liste L"""
312     if type(K) != int: return "Erreur type K"
313     if K < 0: return "Erreur 'K est negatif'"
314     kbinstr = list(bin(K))
315     kbinstr = kbinstr[2:]
316     # kbin = [int(kbinstr[i]) for i in range(len(kbinstr))]
317     kbin = [int(i) for i in kbinstr]
318     return kbin
319
320 def binint(L):
321     """ Retourne la liste binaire L en entier positif """
322     if checkBINn(L, len(L)) == False : return "Erreur liste L"
323     N = ''
324     for i in range(len(L)):
325         N+=str(L[i])
326     return int(N,2)
327
328 def min64(L):
329     """ Verifie et normalise avec des 0 devants la liste L tel que
330     contienne au moins 64 bits """
331     if len(L)>63 :
332         return L
333     else:
334         n = len(L)
335         Q = L[:]
336         Q.reverse()
337         for i in range(64-n):
338             Q.append(int(0))
339         Q.reverse()
340         return Q
341
342 # ***** FONCTIONS DE DECOUPAGE *****
343
344 espace = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] #(ord 32) Caractere [espace] en
345     binaire 8 bits AISCI
346
347 def decoupe64(l):
348     """ decoupe une chaine binaire en bloc de 64 bits et completant
349     les vides par des 'espaces' """
350     B = [] #Liste BLOCs, resultat
351     L = l[:] #copie L
352     n = len(L)

```

```

351     r = n % 64 # reste de la division euclidienne de n par 64
352     nesp = (64-r)//8 #nombre de caractere 'espace' a ajouter pour
complater L
353     if r != 0 : #si len(L) n'est pas un multiple de 64, on complate
L avec des 'espaces'
354         for i in range(nesp): #on ajoute le caractere 'espace' nesp
fois
355             L+=espace
356     q = len(L) // 64 # quotient : [nombre elements de L]/64 =
nombre de sous liste a creer
357     for i in range(q):
358         SB =[] #Sous bloc (temp)
359         for j in range(64):
360             SB.append(L.pop(0)) #on pop et on ajoute en meme temps
361         B.append(SB)
362     return B
363
364 def assembler(B):
365     """regroupe liste contenant des sous-listes (bloc de 64) en une
liste"""
366     L = [] #resultat
367     for i in range(len(B)):
368         L+=B[i]
369     return L
370
371
372 # ***** FONCTION DE VERIFICATION *****
373
374 def checkBINn(L, n):
375     """ verifie que la liste L est une liste contenant n elements
binaire (0 ou 1)"""
376     binaire = [0,1]
377     if len(L)==n:
378         for i in range(len(L)):
379             if L[i] not in binaire:
380                 return False
381         return True
382     else:
383         return False
384
385
386 # ***** MAIN *****
387
388 def DESc(M, K):
389     """ Crypte le message M (binaire de 64 bits) avec la cle K (
binaire de 64 bits) par la methode du DES"""
390     #Verification
391     if checkBINn(M, 64) == False: return 'Erreur M'

```

```

392     if checkBINn(K, 64) == False: return 'Erreur K'
393     #Calcul des cles
394     key = genKey(K)
395     MPI = permutation_initiale(M)
396     #scindement
397     G,D = scindement2(MPI)
398     #initialisation de la ronde
399     Gi = G
400     Di = D
401     #ronde
402     for i in range(16):
403         Dexpand= expansion(Di)
404         Xi = XORL(Dexpand, key[i])
405         Si = selection(Xi)
406         Ti = permutation32(Si)
407         Gi, Di = Di, XORL(Gi, Ti)
408     #regroupement INVERSE
409     R = Di + Gi
410     #permutation inverse
411     return permutation_inverse(R)
412
413
414 def DESd(M, K):
415     """ Decrypte le message M (binaire de 64 bits) avec la cle K (
416         binaire de 64 bits) par la methode du DES"""
417     #Verification
418     if checkBINn(M, 64) == False: return 'Erreur M'
419     if checkBINn(K, 64) == False: return 'Erreur K'
420     #Calcul des cles
421     key = genKey(K)
422     key.reverse()
423     MPI = permutation_initiale(M)
424     #scindement
425     G,D = scindement2(MPI)
426     #initialisation de la ronde
427     Gi = G
428     Di = D
429     #ronde
430     for i in range(16):
431         Dexpand= expansion(Di)
432         Xi = XORL(Dexpand, key[i])
433         Si = selection(Xi)
434         Ti = permutation32(Si)
435         Gi, Di = Di, XORL(Gi, Ti)
436     #regroupement INVERSE
437     R = Di + Gi
438     #permutation inverse
439     return permutation_inverse(R)

```

```

439
440 # -----
441
442 def aide():
443     print("-----")
444     print("***** FONCTIONEMENT *****")
445     print("-----")
446     print()
447     print("FONCTION CRYPTAGE DES(m, K)")
448     print("-----")
449     print("--> permet de crypter un message m avec K")
450     print("1. m est un message en clair - str")
451     print("2. K est la cle de cryptage - entier naturel")
452     print()
453     print()
454     print("FONCTION DECRYPTAGE DES_(M, K)")
455     print("-----")
456     print("--> permet de decrypter un message M cryte avec K")
457     print("1. M est un message crypte avec K - liste de contenant
des 0 et 1")
458     print("2. K est la cle de decryptage - entier naturel")
459     print()
460     print("-----")
461     print("***** FIN *****")
462     print("-----")
463
464 # -----
465
466 def DES(m, K):
467     """ Crypte le message m (str) avec la cle K (entier), retourne
liste binaire correspondant a m crypter en AISCII """
468     #Verification:
469     if type(m) != str: return "Erreur type m"
470     if type(K) != int: return "Erreur type K"
471     Kentiere = intbin(K)
472     Kentiere = min64(Kentiere) #pour avoir une cle binaire de
taille 64 bits minimum
473     Kentiere.reverse()
474     key = Kentiere[:64]
475     M = decoupe64(encodage(m))
476     n = len(M) # nombre de blocs de 64 bits
477     Mc = [] # M crypte
478     for i in range(n):
479         Mc.append(DESc(M[i], key))
480     return assembler(Mc)
481
482 def DES_(M, K):
483     """ Crypte le message m (str) avec la cle K (entier), retourne

```

```

liste binaire correspondant a m crypter en AISCI "
484 #Verification:
485 if checkBINn(M, len(M)) == False : return "Erreur M"
486 if type(K) != int: return "Erreur type K"
487 Kentiere = intbin(K)
488 Kentiere = min64(Kentiere) #pour avoir une cle binaire de
taille 64 bits minimum
489 Kentiere.reverse()
490 key = Kentiere[:64]
491 print("Cle =", K,"-->", "key =",key )
492 print()
493 Mc = decoupe64(M)
494 Mclair = [] # M decrypte
495 for i in range(n):
496     Mclair.append(DESd(Mc[i], key))
497 return decodage(assembler(Mclair))
498
499 print("Entrer 'aide()' pour le fonctionnement")

```

4.5 Attaques El Gamal : algorithme de Shanks et calcul de l'indice

```
1  from math import exp, sqrt, log
2
3  #Logarithme discret naif
4
5  def lognaif(p,g,x):
6      for i in range(p):
7          if puissmod(g,i,p)==x:
8              return i
9
10 #Pas de bebe,pas de geant (SHANKS)
11
12 def shanks(p,g,x): #retourne n tel que x=g**n mod p
13     K=int(sqrt(p))+1
14     c=inversmod(puissmod(g,K,p),p)
15     A=[(puissmod(g,i,p),i) for i in range(1,K)]
16     A.sort(key=lambda x:x[0])
17     b=x
18     for j in range(K):
19         if b<int(p/2): #On parcours A dans l'ordre croissant
20             i=0
21             while i<K-2 and b>A[i][0]:
22                 i+=1
23             if A[i][0]==b:
24                 return A[i][1]+K*j
25             else:
26                 b=(b*c)%p
27         else: #On parcours A dans l'ordre decroissant
28             i=K-2
29             while i>0 and b<A[i][0]:
30                 i-=1
31             if A[i][0]==b:
32                 return A[i][1]+K*j
33             else:
34                 b=(b*c)%p
35
36 #Calcul de l'indice (Complexe)
37
38 def Modele_CalculIndice(i,j,pas):
39     for x in range(i,j,pas):
40         print(x,exp(sqrt(2*log(10**x))*sqrt(log(log(10**x))))),sep='
;')
```

4.6 RSA

```
1  # Donnees :
2  # Privees : p, q, d premier avec (p-1)*(q-1)=phi(p*q)
3  # Publiques : n=p*q, e tel que e*d=1 mod phi(n)
4
5  def pgcd(a,b): #algorithme d'Euclide
6      while a%b!=0:
7          a,b=b,a%b
8      return b
9
10 def generateur(n):
11     while True:
12         q=MillerRabin_generation(n)
13         for k in range(1,500):
14             p=k*q+1
15             if MillerRabin_test(p,100):
16                 return p
17
18 def RSA_generation(n):
19     p=generateur(n)
20     q=generateur(n) #pas B friable
21     phi=(p-1)*(q-1)
22     e=3
23     while pgcd(e,phi)!=1:
24         e+=2
25     d=inversmod(e,phi)
26     n=p*q
27     return n,e,d
28
29 def RSA_chiffrement(m,e,n):
30     c=puissmod(m,e,n)
31     return c
32
33 def RSA_dechiffrement(c,d,n):
34     m=puissmod(c,d,n)
35     return m
36
37 def RSA_signature(h,d,n):
38     s=puissmod(h,d,n)
39     return s
40
41 def RSA_verification(s,h,e,n):
42     if puissmod(s,e,n)==h:
43         return True
44     else:
45         return False
```

4.7 Attaques RSA : Crible algébrique et algorithme rho de Pollard

```
1  from math import exp, sqrt, log
2  from fractions import gcd
3
4  # Attaque p-1 de Pollard
5
6  def Pollard_p_1(n, B):
7      a=2
8      for i in range(2,B+1):
9          a=puissmod(a,i,n)
10         d=gcd(a-1, n)
11         if d>1 and d<n:
12             return d
13         return None
14
15 def Pollard_rho(n, x1=1, f=lambda x: x**2+1):
16     x=x1
17     y=f(x)%n
18     p=gcd(y-x,n)
19     while p==1:
20         x=f(x)%n
21         y=f(f(y))%n
22         p=gcd(y-x,n)
23     if p==n:
24         return None
25     return p
26
27 #Crible algebrique : Complexe
28
29 def Modele_CribleAlgebrique(i,j,pas):
30     for x in range(i,j,pas):
31         print(x, exp(((64/9)*log(10**x))**(1/3)*(log(log(10**x)))
32                ** (2/3)), sep=';')
```
