1 Transport de charges par conduction

1.1 Résistance de conducteurs ohmiques

1. Rappeler le modèle de Drude. Donner l'évolution de la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charge libre.

2. En régime stationnaire, déterminer la conductivité d'un métal en fonction de la densité d'électrons, leur masse et d'un autre paramètre.

On considère maintenant une couronne d'axe Oz conductrice de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 et d'épaisseur a. Un champ électrique radial est appliqué dans le conducteur, permettant de maintenir la face intérieur au potentiel V_1 et la face extérieure au potentiel V_2.

1. Déterminer la résistance R_0 du conducteur.

On applique maintenant un champ magnétique constant et uniforme dirigé selon l'axe du disque.

1. Déterminer l'expression de la nouvelle résistance R du conducteur. On pourra commencer par discuter comment le modèle de Drude est modifié en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$.

1.2 Modèle de Drude avec interactions

On considère ici une variante du modèle de Drude avec la prise en compte d'autres forces, dont les interactions entre particules. D'abord, quelques rappels sur le modèle "classique".

1. Énoncer la loi d'Ohm locale. Introduire les grandeurs présentes.

2. On considère un ensemble d'atomes se comportant comme un gaz parfait. Des électrons libres sont présents. Ils sont soumis à un champ $\vec{E}$ et subissent une force de frottement fluide $\vec{F} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$ où, τ est le temps entre deux collisions. Exprimer $\vec{v}(t)$. Tracer l'évolution de sa norme en fonction du temps.

3. En régime stationnaire, exprimer la conductivité électrique σ. Quels sont les conditions d'application de ce modèle? Ces limites?

Désormais, l'électron est soumis aux forces suivantes:

- Force de pression volumique $\vec{f_p} = -\vec{\nabla}P$
- Force de Lorenz $F_L = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Force de frottement fluide $\vec{F} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$

On donne $\vec{x} + \alpha\vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{c}$ implique $\vec{x} = \frac{\vec{c} + \alpha\vec{c} \wedge \vec{b} + (\vec{c}\dot{\vec{b}})\vec{b}}{\alpha^2 b^2}$.

1. Exprimer la force de pression volumique en fonction de la densité volumique d'électrons.

2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$.

3. Donner l'expression du vecteur densité de courant.

2 Transport de particules par diffusion

2.1 Réacteur nucléaire

Soit un réacteur nucléaire à une dimension. La densité volumique de neutrons est notée $n(x,t)$. *A chaque instant*, $\frac{n}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de volume et de temps. Pour un neutron absorbé, K sont produits ($K > 1$). Enfin, on suppose qu'ils diffusent dans le milieu selon la loi de Fick, dont le coefficient est noté D. Le réacteur est situé entre les abscisses $x = -a$ et $x = a$. On imposera $n(\pm a, t) =$.

1. Déterminer l'équation vérifiée par $n(x,t)$.

2. En régime permanent, déterminer le profil de concentration $n(x)$. On impose $n(0) = n_0$.

3. On se place en régime quelconque. On propose de chercher une solution de l'équation précédente sous la forme $n(x,t) = f(x)\exp(-t/T)$.
   Déterminer $f(x)$ et T. Discuter de la stabilité du réacteur suivant sa longueur $L = 2a$.

2.2 Solution autosimilaire de l'équation de diffusion

Soit un cylindre de section S_0, infiniment long. Le cylindre est rempli d'un fluide. A $t = 0$, N_0 particules sont introduites dans le fluide entre les abscisses $x = \pm\epsilon$. Leur répartition est homogène. On note D le coefficient de diffusion et $n(x,t)$ la densité particulaire.

1. Pour commencer, donner le profil $n(x, t = 0)$. Rappeler la loi de Fick. Quel problème rencontre t-on en appliquant naïvement la loi de Fick ici?

2. Donner l'équation de diffusion pour $n(x,t)$. Formuler les conditions aux limites appropriées au problème. Dans la suite, on admettra que la condition initiale est équivalente à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t = 0)\mathrm{d}x = \frac{N_0}{2}. \tag{1}$$

3. On définit la fonction $f(X,T) = p\,n(pX, qT)$. Ceci revient à faire deux changements de variables $x = pX$ et $t = qT$. Montrer que pour un certain choix de p et q, f est solution de l'équation de diffusion et satisfait les mêmes conditions aux limites et condition initiale que $n(x,t)$.

4. En déduire que $n(x,t)$ vérifie pour tout $q > 0$ la propriété dite *d'autosimilarité*:

$$n(x,t) = q^{1/2} n(q^{1/2}x, qt). \tag{2}$$

5. A t donné, on peut choisir le facteur q tel que $q = 1/t$. Avec l'équation précédente, montrer que l'on peut alors chercher $n(x,t)$ sous la forme : $n(x,t) = \frac{g(u)}{t^{1/2}}$ avec $u = \frac{x^2}{t}$.

6. Après calculs, on obtient que $g(u) = A\exp -\frac{u}{4D}$. Exprimer alors $n(x,t)$. Comment peut-on déterminer la constante A?