1 Débits et lois de conservation

1.1 Loi de conservation en cylindrique

Soit un écoulement dont le champ de vitesse s'écrit en coordonées cylindriques sous la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e_r}$.

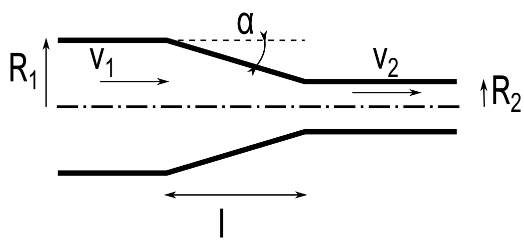
1. Donner l'expression du flux $\Phi(R)$ qui traverse un cylindre de rayon R.
2. En déduire une équation locale traduisant la conservation de la masse.
3. Donner l'expression de l'opérateur divergence pour cette géométrie

1.2 Loi de conservation en sphérique

C'est le petit frère de l'exercice précédent. Soit un écoulement dont le champ de vitesse s'écrit en coordonnées **sphériques** sous la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e_r}$. Mêmes questions que pour l'exercice 1.1.

1.3 Accélération d'un fluide dans une tuyère

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une tuyère (voir schéma) de telle sorte que la vitesse soit multipliée par 4 en sortie.



1. Calculer le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ nécessaire
2. En déduire l la longueur de la section intermédiaire. A.N: $R_1 = 50$ mm, $\alpha = 15$ °.

1.4 Calcul de débit

Soit un écoulement d'eau dans un tuyau cylindrique de rayon R et d'axe **z**. On admet que le champ de vitesse dans le référentiel du tuyau s'écrit en coordonnées cylindrique: $\vec{v} = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})\vec{u_z}$ avec $v_0 \geq 0$.

1. Représenter le profil sur une section;
2. Calculer le débit volumique d'eau à travers une section;
3. Définir et exprimer la vitesse moyenne débitante sur une section

BONUS Quel sens donner à la valeur du champ de vitesse en $r = R$?

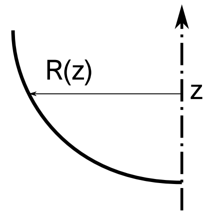
1.5 Courir sous la pluie

Il pleut. Un Homme, assimilé à un parallélépipède rectangle hxLxl se déplace à la vitesse (supposée constante) $\vec{v} = v\vec{u_x}$ pour parcourir une distance d. u_x est un vecteur unitaire horizontal dans le trièdre cartésien attaché au sol. On modélisera la pluie par un écoulement de champ de vitesse $\vec{U} = -U\vec{u_z}$.

1. Quelle masse d'eau est reçue pendant le trajet? Faut-il mieux courir ou marcher sous la pluie?
2. Il vente. Le champ de vitesse de la pluie a une composante supplémentaire $v_p\vec{u_x}$. Mêmes questions. Discuter selon la valeur de v_p.

1.6 Vidange d'un bol

Soit un bol dont le rayon varie avec la profondeur z selon: $R(z) = R_0 z^n$
On perce un trou de surface S au fond du bol.



1. Relier la variation du niveau d'eau $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ avec la vitesse de l'écoulement au niveau du trou.

2. On suppose $S \ll R_0^2$. Comparer $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ et la vitesse en sortie

3. On suppose que en sortie, la vitesse de l'écoulement est celle obtenue au moment de l'impact avec le sol lors d'une chute libre avec une vitesse initiale $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. En déduire une équation différentielle sur h. Donner le temps de vidange.

4. Quel exposant n choisir pour mesurer l'écoulement du temps avec ce bol?

1.7 West-Brown-Enquist model

A la fin des années 90, Geoffrey West et ses collaborateurs James Brown et Brian Enquist ont publié une série d'articles où ils décrivent différents aspects relatifs à la physiologie chez les organismes vivants. Notamment, ils proposent une loi d'échelle pour relier le métabolisme de base B à la masse de l'organisme M. $B \propto M^{3/4}$. Cet exposant peut être dérivé à partir d'un modèle simple pour décrire la structure du réseau sanguin chez les mammifères. On se propose d'étudier de manière simplifiée ce modèle.
Le réseau sanguin est constitué de vaisseaux circulaire et a une structure ramifiée. A chaque étage de ramification k, les vaisseaux ont une longueur l_k, un rayon r_k. La vitesse débitante est u_k et il y a N_k vaisseaux. On note Q_k le débit volumique dans un vaisseau de l'étage k. Les taux de ramification, facteur d'échelle pour le rayon et facteur d'échelle pour les longueurs sont constants $n = \frac{N_{k+1}}{N_k}$, $\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k}$, $\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k}$

1. Donner une relation entre Q_{k+1} et Q_k. En déduire l'expression de β en fonction de n. Relier Q_0 et Q_k.

2. Il y a N étages de ramification, après quoi les vaisseaux deviennent des capillaires, indicés par c. Donner le nombre de capillaires N_c.

3. On suppose tout les vaisseaux remplis de sang. Donner le volume V_b de liquide dans le système en fonction de β, γ, n, V_c. Où V_c est le volume de sang dans un vaisseau à l'étage c.

2 Hydrostatique

2.1 Ballon sonde

Soit un ballon sonde (de météorologue par exemple) dans l'atmosphère. La masse du ballon est notée M et celle de l'ensemble des instruments transportés m. On suppose que le ballon a une forme sphérique, de rayon R. On consière que le gradient de température dans l'atmosphère est constant, c'est-à-dire que la température dépend de l'altitude selon: $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$. On fait l'hypothèse que l'atmosphère est un gaz parfait de masse molaire M_a.

1. Montrer que la pression atmosphérique P est donnée par la loi $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^{\beta}$. Exprimer β en fonction des données du problème et de deux constantes physiques.

2. En déduire l'expression de la masse volumique ρ de l'atmosphère en fonction de l'altitude z.

Le ballon est gonflé à la pression P_H avec de l'hélium (de masse molaire M_H.

1. Donner la norme de la poussée d'Archimère en fonction de z.
2. Donner la masse maximale $m_{\mathrm{max,h}}$ d'instruments pouvant être embarqués pour atteindre l'altitude h.
3. Donner la masse maximale $m_{\mathrm{max,0}}$ permettant le décollage.
4. A.N: Calculer ces deux masses.

2.2 Détermination de la masse volumique d'un liquide

Voici une méthode pour mesurer la masse volumique ρ d'un fluide. Soit un tube en U, où est suspendue dans une extrémité une masse M à un ressort. L'autre extrémité est laissée ouverte, de telle sorte que la pression est équilibrée avec la pression atmosphérique p_{atm}. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide l_0. La masse oscille sans frottement dans le tube.

1. Donner l'état du ressort à l'équilibre en l'absence de fluide dans le tube.
2. On ajoute maintenant le fluide. On note O le point qui correspond à la masse du ressort. Déterminer la pression p au point O à l'équilibre.
3. En déduire la masse volumique du fluide.

2.3 Iceberg

Un iceberg de masse volumique $\rho = 920\,\mathrm{kg/m^3}$ flotte sur l'océan (de masse volumiuqe $\rho_w = 1020\,\mathrm{kg/m^3}$. Quelle fraction de son volume est sous l'eau?
Réponse: 90%

3 Loi de Bernoulli, bilans

3.1 Reconversion

Après vos études d'ingénieurs, vous choisissez de refermer cette parenthèse scientifique et de vous reconvertir dans les métiers du soin. Infirmier-ière fraîchement sorti-e de l'école, vous voici face à votre première piqûre seul-e. Et la mécanique des fluides vous rattrape. Vous avez entre vos mains une seringue de rayon $R = 1$ cm et une aiguille de diamètre intérieur $r = 1$ mm., L'aiguille comme la seringue a une longueur de 8 cm. Dans la seringue, le liquide à injecter est de densité 1 et a une viscosité de $\eta = 3.10^{-3}$ Pa.s. Vous injectez finalement 1 mL de solution en 10 s. La pression du sang dans l'artère est de 0.16 bar. Quelle force devez-vous appliquer sur le piston de la seringue pour faire l'injection?

3.2 En vacances

Un vacancier souhaite boire avec une paille un jus de fruits. La paille est de rayon r, de longeur l et est posée verticalement dans le verre. Le contenant est de rayon R et est rempli à la hauteur h_0 de liquide. Le vacancier place sa bouche a une hauteur z du sol. Quelle est la dépression ΔP que doit appliquer le vacancier pour faire remonter le jus jusqu'à sa bouche?

4 Autres

4.1 Euler ou Lagrange?

Quelle description adopter dans les cas suivants?

1. Une feuille qui se déplace à la surface d'un ruisseau;
2. La dynamique d'une tâche de colorant;
3. Le traffic routier à un péage;
4. Bilan sur un système ouvert (Surface fermée S appelée surface de contrôle);
5. Bilan sur un système fermé;

4.2 Le frisbee 🌶🌶🌶

On lâche un frisbee d'une hauteur h très petite (devant la taille caractéristique du frisbee, son diamètre). Déterminer la dynamique de chute de l'objet.
Indice: h est vraiment tout petit, introduire un paramètre $\epsilon = \frac{h}{\bullet} \ll 1$

4.3 Quelques Reynolds

Estimer le nombre de Reynolds pour:

- Un avion airbus
- Une bactérie
- Une balle de tennis lors d'un service de Roger Federer
- Un pingouin dans l'eau
- Un colibri