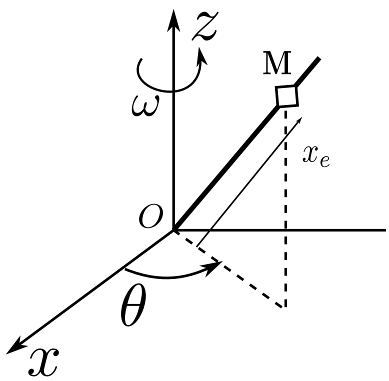
1 Mécanique du point matériel

1.1 Tige en rotation

On considère une tige rigide, soudée au point O sur un support mis en rotation à la vitesse angulaire ω. Sur la tige, on place une perle, assimilée au point matériel M qui glisse sans frotter sur la tige. On note $\mathcal{R} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique. La position de la perle sur la tige est repérée par $x_e = ||\vec{O}M||$.



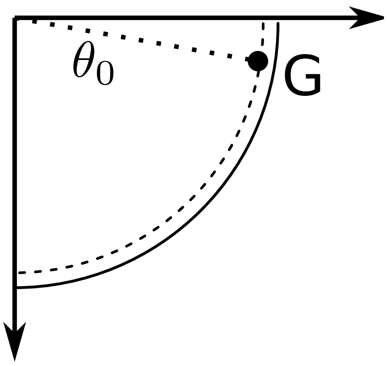
1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, préciser les positions x_e d'équilibre de la perle sur la tige.
2. Donner R_1, R_2, R_3, les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur la perle dans la base cylindrique $\mathcal{R}$.
3. Mêmes questions mais en utilisant maintenant un théorème énergétique.

2 Théorème du moment cinétique

2.1 Toboggan

2.2 Tige en rotation

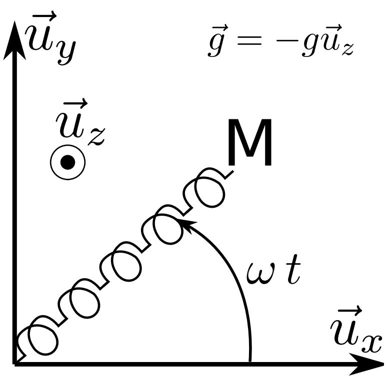
Un enfant se laisse glisser sur un toboggan sans vitesse initiale. Le toboggan, représenté sur la figure ci-contre est un quart de cercle de rayo $R = 2.7$ m. L'enfant est modélisé par son centre de gravité G qui se situe 20 cm au-dessus de la surface du toboggan. L'angle initial fait par G avec l'horizontal est $\theta_0 = 15$.



1. Représenter les forces qui s'appliquent sur G.
2. A l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer le mouvement du point G.
3. En déduire l'expression de la vitesse en fonction de θ.
4. Quelle est la vitesse maximale atteinte?
   Réponse: 6 m.s^{-1}.

2.3 Mouvement tournant d'une masse accrochée à un ressort

Soit un point matériel M, de masse m, accroché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Le ressort est fixé au point O, origine du repère cartésien $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le ressort est libre de tourner autour de l'axe vertical et on place l'ensemble sur une table à coussin d'air, de sorte que la masse se déplace sans frottements dessus.



1. Faire un bilan des forces sur la masse M et montrer qu'il y a conservation du moment cinétique de M par rapport à O.
2. A $t = 0$, on lâche M depuis l'axe des abscisses sans vitesse initiale: $\vec{O}M(t = 0)1.2l_0\vec{u}_x$ et $v_0 = 0$. Calculer le moment cinétique de M par rapport à O. En déduire la nature de la trajectoire.

3. En utilisant une relation fondamentale de la dynamique, donner l'évolution de $OM(t)$ et préciser ses borners.

4. La masse est maintenant lâchée avec une vitesse intiale. $\vec{O}M(t=0) = l_1\vec{u}_x$ et $\vec{v}_0 = \omega l_1 \vec{u}_y$ Quel est le moment cinétique du mobile?

5. Montrer que l'énergie mécanique est conservée.

6. Donner l'expression de l'énergie mécanique et la mettre sous la forme
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$
Exprimer E_{peff} en fonction de r et des conditions initiales.

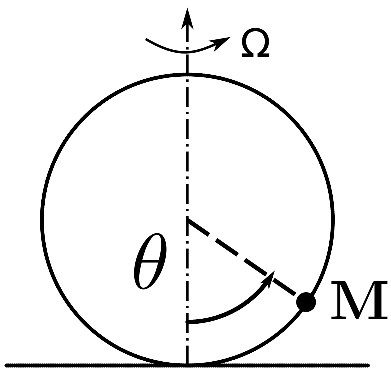
7. Tracer E_{peff} et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du point O.

3 Théorèmes énergétiques

3.1 Perle sur un anneau en rotation

Soit un anneau en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. On place une perle sur l'anneau qui glisse sans frottemenets. La position est repérée par le point **M**, sa masse est m. θ est langle entre l'axe de rotation et le vecteur $\vec{O}M$ (O est le centre de l'anneau). On note R le rayon de l'anneau.

On souhaite étudier les positions d'équilibre de la perle sur l'anneau en fonction de la vitesse de rotation de ce dernier.



1. Pour obtenir l'équation du mouvement de la perle sur l'anneau, quelle est la méthode la plus adaptée? (2nde loi de Newton, Théorème du moment cinétique, etc...)

2. Déterminer l'équation du mouvement de la perle sur l'anneau (équation différentielle sur l'angle θ).

3. Déterminer les positions d'équilibres $\theta_{eq}(\Omega)$.

4. Étudier leur stabilité.

5. 🌶 Donner la période des oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

4 Forces centrales

4.1 Stabilité d'un champ de force en $\frac{1}{r}$

On considère un point matériel **M** de masse m plongé dans un champ de force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. $\vec{e}_r$ est le vecteur radial dans la base polaire.

1. Quelle relation relie le rayon r_0 et la vitesse v_0 dans le cas d'une trajectoire circulaire?

2. A $t = 0$, on fait subir à l'objet, alors en trajectoire circulaire, une perturbation :
$$r_0 \longrightarrow r_0 + \epsilon, \text{ avec } \epsilon \ll 1.$$
Donner l'évolution de $r(t)$ au voisinage de r_0. Donner un critère sur le champ de force pour que l'évolution soit bornée.

3. On suppose que $F(r) = -\frac{A}{r^n}$ où $A > 0$. Donner un critère sur n pour que les trajectoires soient stables. Que dire du cas Newtonien?

5 Pot-pourri: ordres de grandeur, problèmes ouverts, etc

5.1 Marche

Retrouver l'ordre de grandeur de la fréquence de la marche d'un Homme.