Appunti di Geometria 2
Frigerio - Salpo - Szamuely

Ludovico Sergiacomi

a.a. 2025/2026

Indice

1 Spazi Proiettivi

Def. Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora si chiama $\boxed{\text{spazio proiettivo}}$ su V

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \smallsetminus \{0\}}{\sim}$$

dove $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $v = \lambda w$.

Osservazione. La relazione $\sim$ è di equivalenza e ci dice che $v \sim w$ se giacciono sulla stessa retta. Perciò, insiemisticamente, $\mathbb{P}(V) \cong \{\text{rette di } V\}$:

$$[v] \leftrightarrow \text{span}(v).$$

Def. Se $\dim V = n$, la $\boxed{\text{dimensione}}$ di $\mathbb{P}(V)$ è $n - 1$.

Esempi

1. $V = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset \qquad \dim\mathbb{P}(V) = 0 - 1 = -1$.

   Osservazione. Negli spazi proiettivi il vuoto è accettato.

2. $\dim V = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{*\}$ consiste di una sola classe di equivalenza: V è già una retta. Infatti $\dim\mathbb{P}(V) = 1 - 1 = 0$.

3. $V = \mathbb{K}^n \qquad \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ si indica con $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

4. Chi è $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$? $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ cioè l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$.
   L'insieme delle semirette (uscenti da O) è chiaramente parametrizzato da S^1, cioè la circonferenza unitaria: a ogni semiretta s faccio corrispondere $s \cap S^1$, che è un punto.
   Le rette sono parametrizzate da $[0, \pi)$, quindi $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è in bigezione con $[0, \pi)$. Però si va a perdere l'idea che, avvicinandosi a π, ci stiamo avvicinando anche a 0. Quindi è meglio pensarlo come $[0, \pi]$, con 0 identificato a π: partiamo dalla semicirconferenza e avviciniamo sempre di più 0 e π finché non coincidono.

1.1 Trasformazioni proiettive

Def. Una $\boxed{\text{trasformazione proiettiva}}$ è una funzione

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W) \text{ tale che} \\ &\exists\ \varphi : V \longrightarrow W \text{ lineare t.c.} \\ &f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \smallsetminus \{0\} \end{aligned}$$

Osservazione. Su $\mathbb{P}(V)$ non sono definite operazioni, quindi abbiamo definito le *t.p.* come mappe indotte da funzioni lineari.

Ma ogni $\varphi : V \to W$ induce una trasformazione proiettiva?

Proposizione 1. *Una mappa lineare $\varphi : V \to W$ induce una t.p. $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ se e solo se φ è iniettiva. In tal caso porremo $f = [\varphi]$.*

Dimostrazione. Partiamo dalla freccia $\Leftarrow$

$$f([v]) = [\varphi(v)]\ \forall v \in V \smallsetminus \{0\}$$

ottenendo tutti elementi diversi. Inoltre $v \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0 \Rightarrow [\varphi(v)]$ è ben definita. Noto che f è ben definita, cioè $v \sim v' \Rightarrow f([v]) = f([v'])$, il che segue dalla linearità di φ

$$v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda\varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v').$$

Viceversa (freccia $\Rightarrow$), se f è indotta da φ, necessariamente deve essere φ iniettiva, perché altrimenti, dato $v \in \text{Ker}\varphi \smallsetminus \{0\}$ (e dato che f non è iniettiva, c'è almeno un $v \neq 0$ nel nucleo), si avrebbe $f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$, che è assurdo. $\square$

Corollario 1.1. *Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.*

Dimostrazione. Se $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è indotta da $\varphi : V \to W$, sapendo che φ è iniettiva, abbiamo

$$f([v]) = f([v']) \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')] \Rightarrow \varphi(v) = \lambda\varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') \Rightarrow v = \lambda v' \ \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow [v] = [v'].$$

□

Proposizione 2.

1. $\mathrm{Id} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *è una trasformazione proiettiva.*
2. *Se* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *e* $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ *sono trasformazioni proiettive, allora anche* $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ *è una trasformazione proiettiva.*

Dimostrazione.

1. $\mathrm{Id} : V \to V$ è lineare e induce $\mathrm{Id} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.
2. $f = [\varphi],\ g = [\psi], \quad \psi \circ \varphi : V \to Z$ è iniettiva e induce $g \circ f$.

$$\forall v \ g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))].$$

□

Osservazione. Inoltre, se $f = [\varphi],\ g = [\psi]$, vale $g \circ f = [\psi \circ \varphi]$.

Proposizione 3. *Sia* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *una t.p., allora sono fatti equivalenti:*

1. f *è surgettiva*
2. f *è iniettiva*
3. f *è invertibile e* f^{-1} *è a sua volta t.p.*
4. $\dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W)$

Dimostrazione.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ È ovvia: f è iniettiva di base, per cui si aggiunge la surgettività.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Già sappiamo che $\varphi : V \to W$ è iniettiva, facciamo vedere che è anche surgettiva:

sia $w \in W,\ w \neq 0$ (se $w = 0,\ w = \varphi(0)$);

$$f \text{ bigettiva} \Rightarrow \exists v \in V \text{ t.c. } [w] = f([v]) = [\varphi(v)] \Rightarrow w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \varphi \text{ surgettiva.}$$

Sappiamo da *G1* che $\varphi^{-1} : W \to V$ è anch'essa lineare. Quindi, presa $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$, con $g = [\varphi^{-1}$, vale

$$f \circ g = [\varphi \circ \varphi^{-1}] = [\mathrm{Id}] = \mathrm{Id} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Osservazione. Ci è servito dimostrare che φ è invertibile, così da poter indurre $g = [\varphi^{-1}]$.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Se $\varphi : V \to W$ è lineare e invertibile, allora $\dim V = \dim W \Rightarrow \dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W)$.

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ indotta da $\varphi : V \to W$, sapendo che φ è iniettiva e che $\dim V = \dim W$, ottengo φ surgettiva, da cui anche f surgettiva. Infatti

$$\forall w \in W\ \exists v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = w \Rightarrow \forall [w] \in \mathbb{P}(W)\ \exists [v] \in \mathbb{P}(V) \text{ t.c. } f([v]) = [w] \text{ ovvero } [\varphi(v)] = [w] \Rightarrow \varphi(v) = w$$

e questo è garantito da φ surgettiva. □

Def. Se f soddisfa una delle condizioni della proposizione, f si dice $\boxed{\text{isomorfismo}}$.

Def. Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$ ogni *t.p.* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è un isomorfismo e si dice $\boxed{\text{proiettività}}$.
L'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è un gruppo, che si denota con $\mathbb{P}\mathcal{GL}(V)$ (per ragioni che saranno chiare più avanti).

Proposizione 4. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, $\quad f = [\varphi]$. Allora i punti fissi di f sono in bigezione con le rette di autovettori di φ.*

Dimostrazione.

$$\underbrace{f([v]) = [v]}_{[v] \text{ punto fisso di } f} \Leftrightarrow [\varphi(v)] = [v] \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(v) = \lambda(v),}_{v \text{ autovettore di } \varphi} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

□

Corollario 4.1.

1. *Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso e $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$, ogni proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ ha almeno un punto fisso.*
2. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim\mathbb{P}(V)$ è pari, allora ogni proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione.

1. Ogni endomorfismo ha almeno un punto fisso (ovviamente se $\dim V > 0$).
2. $\dim\mathbb{P}(V)$ pari $\Rightarrow \dim V$ dispari $\Rightarrow$ il polinomio caratteristico ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$. Quindi c'è un autovalore (con corrispondente autovettore) in $\mathbb{R}$.

□

1.2 Sottospazi proiettivi

Def. $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ si dice $\boxed{\text{sottospazio proiettivo}}$ se $\exists W \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. se, detta

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$$

la proiezione,

$$S = \pi(W \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(W).$$

Osservazione. Esiste una bigezione tra i *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ e i *ssv* di V.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & \pi^{-1}(S) \cup \{0\} \\ \mathbb{P}(W) & \xleftarrow{\beta} & W \end{array}$$

E si verifica che α e β sono inverse una dell'altra.

Def. Se S è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, W è *ssv* di V, con $S = \mathbb{P}(W)$, allora $\boxed{\dim S = \dim W - 1}$.

Fatti

1. $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, $i \in I$, allora si verifica facilmente che

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} W_i).$$

   In particolare, l'intersezione di *ssp* è a sua volta un *ssp*. Infatti (pensando le classi di S_i come *span*) in un caso sto considerando gli *span* comuni a tutti i sottospazi proiettivi, nell'altro prendo i vettori comuni a tutti i sottospazi vettoriali e faccio lo span:

$$\{[v] \mid [v] \in S_i \ \forall i\} = \{[v] \mid v \in W_i \ \forall i\}$$

2. Come nel caso vettoriale, l'unione di *ssp* non è *ssp*. Allora, dati S_1 e S_2 vorrei definire una somma, in modo che $S_1 + S_2$ sia *ssp*.

3. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi tali che $S_1 \subseteq S_2$, allora $\dim S_1 \leq \dim S_2$ e in particolare $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$. Discende dall'analoga proprietà vettoriale.

Def. Sia $K \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme. Allora si dice $\boxed{\text{il } \textit{ssp} \text{ generato da } K}$ il più piccolo *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ che contiene K. Si scrive $L(K)$. È ben definito per il *fatto 1*, infatti

$$L(K) = \bigcap_{S \supseteq K} S$$

con S sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Def. Siano S_1, S_2 *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, allora $\boxed{L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)}$.

Lemma 1. *$S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ allora*

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

dove ricordiamo che $W_1 + W_2$ è il più piccolo ssv che contiene W_1 e W_2.

Dimostrazione. Doppio contenimento

- $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_1 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$
$$W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

  Quindi $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e, per definizione di L, vale $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$.

- $L(S_1, S_2) \supseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

  Sia W il sottospazio t.c. $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W)$, allora

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$
$$S_2 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$

  Quindi $W_1 + W_2 \subseteq W \Rightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2)$.

□

Teorema 1 (Grassmann)**.** *Siano S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, allora*

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Dimostrazione. Scriviamo $S_i = \mathbb{P}(W_i)$, allora per il *Lemma*, vale $\dim L(S_1, S_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1$. Quindi, sfruttando *Grassmann vettoriale*, si ha

$$\dim(W_1+W_2)-1 = \dim W_1 + \mathrm{W}_2 - \dim(W_1 \cap W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) =$$
$$= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

□

Corollario 1.1. $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \mathbb{P}(V) \geq 0$$

□

Osservazione. Due rette in un piano proiettivo si intersecano sempre. Le rette parallele si incontrano all'infinito.

Corollario 1.2. *Siano P, Q punti distinti di $\mathbb{P}(V)$, allora $L(P,Q)$ è una retta ed è l'unica retta che li contiene.*

Dimostrazione. $P \neq Q \Rightarrow \dim L(P,Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 0 + 0 - (-1) = 1$ cioè è una retta.
Sia ora r una retta che contiene P e Q; per definizione $L(P,Q) \subseteq r$ da cui, visto che hanno la stessa dimensione, coincidono. □

Osservazione. In generale si vede che, se S è *ssp* e $P \notin S$, vale $\dim L(S,P) = \dim S + 1$ ed è l'unico *ssp* che contine sia S che P.

1.3 Riferimenti proiettivi

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, allora $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ si dicono $\boxed{\text{indipendenti}}$ se, presi $v_i \in V$ t.c. $P_i = [v_i]$ $\forall i$, si ha che i v_i sono linearmente indipendenti.

Osservazione. La definizione è ben posta: scegliendo altri rappresentanti dei P_i, tali che $[v_i'] = [v_i]$ allora $\exists \lambda_i \neq 0$ t.c. $v_i' = \lambda v_i \Rightarrow v_i$ indipendenti $\Leftrightarrow v_i'$ indipendenti.

Osservazione. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono indipendenti *sse* $\dim L\big(\{P_1, \dots, P_k\}\big) = k-1$. In particolare detta $n = \dim \mathbb{P}(V)$ (da cui si ha $\dim V = n+1$), allora $P_1, \dots, P_k$ indipendenti $\Rightarrow k \leq n+1$. L'idea è quella di usare i vettori, sfruttando le loro proprietà, per poi riportarle nello spazio proiettivo.

Def. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono in $\boxed{\text{posizione generale}}$ *sse* qualsiasi sottoinsieme di h punti, con $h \leq n+1$, è indipendente.

Osservazione. Cioè se $k \leq n+1$, allora i punti sono indipendenti. Se $k \geq n+2$, invece, equivale a dire che qualsiasi $(n+1)$-upla dei P_i è indipendente.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ $\quad P_1, \dots, P_k$ in posizione generale se sono a due a due distinti: nello spazio proiettivo, su una retta, i punti sono indipendenti se sono diversi (perché corrispondono a classi di vettori indipendenti: i vettori di una retta in V vanno a finire nello stesso punto di $\mathbb{P}(V)$).

2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ $\quad$ sono indipendenti se sono a tre a tre non allineati (cioè il terzo vettore non giace sul piano generato dai primi due, nello spazio vettoriale).

Osservazione. In entrambi i casi, se il campo di base è infinito, per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, si trovano $P_1, \dots, P_k$ in posizione generale.

Def. Un $\boxed{\text{riferimento proiettivo}}$ di $\mathbb{P}(V)$, detta n la dimensione dello spazio proiettivo, è una $(n+2)$-upla

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$$

di punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale.

Osservazione. Usiamo le parentesi tonde, perché è importante l'ordine in cui considero i punti.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ $\quad \mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ distinti.

2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ $\quad \mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ tre a tre non allineati.

Def. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora si dice $\boxed{\text{base normalizzata}}$ di V associata a $\mathcal{R}$ una base

$$(v_0, \dots, v_{n+1}) \text{ t.c. } [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \text{ e } \quad P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$$

Osservazione. Con la seconda condizione sto limitando quanto si possano scalare i v_i: o li scalo tutti per lo stesso λ o niente. Lo vediamo meglio più avanti.

Terminologia.

- I punti $P_0, \ldots, P_n$ si chiamano **punti fondamentali**.
- P_{n+1} si chiama **punto unità**, perché scritto in coordinate (rispetto alla base normalizzata) è $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 2. *Sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Allora*

1. *Esiste una base normalizzata $(v_1, \ldots, v_n)$ di V rispetto a $\mathcal{R}$.*
2. *Se $(v'_1, \ldots, v'_n)$ è un'altra base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$, allora*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad t.c. \quad v'_i = \lambda v_i \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Dimostrazione.

1. Partiamo dal riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, \ldots, P_{n+1})$ e scegliamo $v_i \in V$ tali che $[v_i] = P_i \ \forall i = 0, \ldots, n$. Quindi $(v_0, \ldots, v_n)$ è una base di V, visto che i punti di R sono indipendenti (quindi per definizione di riferimento - posizione generale - indipendenza).

   Scegliamo anche $v_{n+1} \in V$ t.c. $[v_{n+1}] = P_{n+1}$. Scriviamo allora

   $$v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K}, \ v_i \in \text{ base}$$

   in modo unico.

   Adesso ci interessa che il punto unità sia effettivamente tale: se tutti gli a_i fossero uguali a 1, avremmo finito... però non è detto che sia così. Quindi consideriamo, $a_i v_i$, al posto dei semplici v_i, come rappresentanti dei P_i. Se però un qualche $a_j = 0$? Dimostriamo che non è possibile: se, per assurdo, si avesse $a_j = 0$, allora l'equazione di prima ci darebbe una relazione di indipendenza

   $$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_j \hat{v}_j + \ldots - v_{n+1} \quad a_i \neq 0,$$

   ma sappiamo che v_{n+1} è dipendente dagli altri $\rightarrow$ *assurdo.*

   Quindi possiamo fare quanto segue, con tranquillità: poniamo

   $$v'_i = a_i v_i \ a_i \neq 0 \ \forall i \ \Rightarrow (v'_0, \ldots, v'_n) \text{ è base di } V \text{ e } [v'_i] = [a_i v_i] = [v_i] = P_i$$

   e inoltre, per costruzione,

   $$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n] = [v'_0 + \ldots + v'_n].$$

2. Sia ora $(v''_1, \ldots, v''_n)$ un'altra base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$. Sappiamo che

   $$[v''_i] = P_i = [v'_i]$$

   quindi, per come sono definite le classi,

   $$\exists \lambda_i \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v''_i = \lambda_i v_i.$$

   Però potrebbero essere tutti λ_i diversi... Allora osserviamo che

   $$P_{n+1} = [v'_0 + \ldots + v'_n] = [v''_0 + \ldots + v''_n] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^{n} v''_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} v'_i$$

   $$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v'_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda v'_i$$

   e, poiché i v_i sono base di V, i coefficienti devono essere gli stessi (per l'unicità della scomposizione nello spazio vettoriale).

$\square$

Osservazione. Quindi la base normalizzata è unica, a meno di riscalare tutti i vettori per uno stesso fattore.

Teorema 3. *Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive e $\varphi, \psi : V \to W$ applicazioni lineari tali che $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$. Sia $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora* TFAE*:*

1. *$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad$ t.c. $\quad \varphi = \lambda\psi$ come applicazioni lineari.*
2. *$f = g$.*
3. *$f(P) = g(P)\ \forall P \in \mathcal{R}$.*

Dimostrazione.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ $\varphi = \lambda\psi$ allora per qualsiasi P di $\mathbb{P}(V)$, scelto v t.c. $[v] = P$, vale

$$f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P).$$

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ È ovvia: $f = g \Rightarrow f_{|\mathcal{R}} = g_{|\mathcal{R}}$.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Sia $(v_0, \dots, v_n)$ una base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ allora vale

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \Rightarrow \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \text{ per qualche } \lambda_i \in \mathbb{K}^*;$$

inoltre

$$\begin{aligned}
&[\varphi(v_0 + \ldots + v_n)] = f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \ldots + v_n)] \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ \text{ t.c. } \ \varphi(v_0 + \ldots + v_n) = \lambda\psi(v_0 + \ldots + v_n) \\
&\Rightarrow \lambda_0\psi(v_0) + \ldots + \lambda_n\psi(v_n) = \lambda\psi(v_0) + \ldots + \lambda\psi(v_n).
\end{aligned}$$

Dato che ψ è iniettiva, i vari $\psi(v_i)$ sono indipendenti (lo "ereditano" dalle controimmagini) e quindi $\lambda_i = \lambda\ \forall i$. Quindi, dato che $\varphi = \lambda\psi$ per tutti i vettori della base, vale anche per la funzione in generale. □

Osservazione. Un po' l'analogo di quello che succede con le basi vettoriali. Inoltre non è detto che gli $\psi(v_i)$ siano base di W, per la dimostrazione mi basta l'indipendenza.

Corollario 3.1. *Sia $\mathbb{P}G\mathcal{L}(V)$ il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ allora vale*

$$\mathbb{P}G\mathcal{L}(V) \cong G\mathcal{L}(V)/N$$

dove $N \triangleleft G\mathcal{L}(V)$ è il sottogruppo delle matrici scalari: $N = \{\lambda \cdot \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa naturale

$$\begin{aligned} G\mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}G\mathcal{L}(V) \\ \varphi &\longmapsto [\varphi] \end{aligned}$$

- È omomorfismo: $[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\varphi]$.
- È surgettivo per definizione di trasformazione proiettiva.
- Il Ker è proprio N per il *Teorema* appena visto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_V &\longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} \\ \lambda\mathrm{Id}_V &\longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} \end{aligned}$$

□

Notazione. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ (e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), il gruppo delle proiettività $\mathbb{P}G\mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ si indica con $\mathbb{P}G\mathcal{L}_{n+1}(\mathbb{K})$ perché $n + 1$ indica la taglia delle matrici che rappresentano le trasformazioni.

Teorema 4 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive)**.** *Siano* $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ *spazi proiettivi, con* $\dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W) = n$ *e siano* $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ *due riferimenti proiettivi, rispettivamente di* $\mathbb{P}(V)$ *e* $\mathbb{P}(W)$*. Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *che manda (ordinatamente)* $\mathcal{R}$ *in* $\mathcal{R}'$*.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal *Teorema* precedente: se ci fossero due trasformazioni che mandano $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$, allora sarebbero uguali.
Dimostriamo ora l'esistenza. Fissiamo due basi normalizzate:

$$(v_0, \dots, v_n) \text{ di } V \qquad (w_0, \dots, w_n) \text{ di } W,$$

sappiamo da *G1* che $\exists!\ \varphi : V \to W$ t.c. $\varphi(v_i) = w_i\ \forall i = 0, \dots, n$. Prendiamo allora la trasformazione $f = [\varphi] : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ indotta da φ e verifichiamo che soddisfa le richieste.

Scriviamo i due riferimenti come

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1}) \qquad \mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$$

e concludiamo

$$\begin{aligned} &f(P_i) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ &f(P_{n+1}) = [\varphi(v_1 + \ldots + v_n)] = [\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_n)] = [w_1 + \ldots + w_n] = Q_{n+1}. \end{aligned}$$

□

1.4 Coordinate omogenee

Caso "tautologico" Come l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale V di dimensione n e $\mathbb{K}^n$ induce un sistema di coordinate, così possiamo fare in $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Si dice che il punto $[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha $\boxed{\text{coordinate omogenee}}$ $[x_0, \dots, x_n]$ (anche scritto $[x_0 : \ldots : x_n]$), rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ - ovvero quello indotto dalla base standard di $\mathbb{K}^{n+1}$: i vari P_i con $0 \leq i \leq n$ hanno tutte coordinate nulle, tranne l'i-esima, che è 1; come si può immaginare, P_{n+1} ha tutte le coordinate uguali a 1.

Osservazione. Le coordinate omogenee non sono uniche, ma lo sono a meno di *riscalamento simultaneo*.

Osservazione. La scrittura $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ non ha senso.

Caso generale Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, con $\dim\mathbb{P}(V) = n$. Fissato un riferimento $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$, esso induce su $\mathbb{P}(V)$ le coordinate omogenee nel modo seguente:
Dal *Teorema fondamentale* sappiamo che $\exists!$ trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che manda il riferimneto $\mathcal{R}$ nel riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Le $\boxed{\text{coordinate omogenee}}$ di P in $\mathbb{P}(V)$ sono la sua immagine tramite f, ovvero $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Equivalentemente, data $(v_0, \dots, v_n)$ base normalizzata rispetto a $\mathcal{R}$, dato $P \in \mathbb{P}(V)$, si sceglie un $v \in V$ t.c. $[v] = P$ e si scrive $v = a_0v_0 + \ldots + a_nv_n$ ($v \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$).

Allora le coordinate di $P \in \mathbb{P}(V)$ sono date da $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Il punto è che la *t.p.* del punto 1. è indotta dall'isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ v_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

Osservazione. Nel vettoriale, fissare una base di V equivale ad un isomorfismo lineare con $\mathbb{K}^{n+1}$.

Osservazione. Usando le *coordinate omogenee* si possono rappresentare le *t.p* e i *s.s.p.* tramite matrici ed equazioni.

Trasformazioni proiettive
$f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è *t.p.* e $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sono i riferimenti in partenza e in arrivo, fissiamo B, B' basi normalizzate corrispondenti.

Se $\varphi : V \to W$ è un'applicazione lineare t.c. $[\varphi] = f$, M è la matrice associata, si dice che M rappresenta anche f, nel senso che

$$\begin{aligned}[f(P)]_{\mathcal{R}'} &= M[P]_{\mathcal{R}} \quad \text{scritto male} \\ &= [M([v]_B)]\end{aligned}$$

Proposizione 5. *La matrice che rappresenta f non è unica, ma lo è a meno di riscalamento.*

Osservazione. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, $m = \dim \mathbb{P}(W)$, la matrice ha taglia $(m+1)(n+1)$.

Sottospazi proiettivi
Ho due modi per descriverli: equazioni e immagine di una mappa (cioè come *span* di una base).

1. **Rappresentazione cartesiana**
   Se $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è sottospazio proiettivo, per definizione ho $S = \mathbb{P}(W)$, dove $W \subseteq V$ è sottospazio vettoriale. Chiamiamo $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $k = \dim \mathbb{P}(W) = S$.

   Fissato $\mathcal{R}$ di $\mathbb{P}(V)$ e B base normalizzata, W può essere descritto come luogo delle soluzioni di un sistema lineare, di $(n+1) - (k+1) = n - k$ equazioni lineari omogenee, nelle coordinate indotte da B.

   $$\{f_1 = \ldots = f_{n-k} = 0\} = W.$$

   Queste stesse equazioni descrivono $S \subseteq \mathbb{P}(V)$, infatti

   $$P \in S \Leftrightarrow f_1(P) = \ldots = f_{n-k}(P) = 0.$$

   Osservazione. Le f sono polinomi lineari omogenei, in $n+1$ variabili $x_0, \ldots, x_n$, la scrittura $f_i(P)$ non ha senso: dipende dal rappresentante vettoriale di P; tuttavia la condizione $f(P) = 0$ è ben definita.

   Esempio. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, scegliamo $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 + 3x_1 + x_2$

   $$\begin{aligned}&f([1,1,1]) \text{ non ha senso, infatti} \\ &f(1,1,1) = 5 \\ &f(-1,-1,-1) = -5\end{aligned}$$

   e invece dovrebbero essere uguali, visto che $[1,1,1] = [-1,-1,-1]$.

   La condizione $f([a_0, a_1, a_2]) = 0$ però va bene, perché

   $$f[\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2] = \lambda f(a_0, a_1, a_2).$$

2. **2. Rappresentazione parametrica**
   $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ come immagine di trasformazioni proiettive in $\mathbb{P}(V)$ (immagine di *span* di vettori in V).

   Fissato $\mathcal{R}$ riferimento e B base normalizzante, $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. $S = \mathbb{P}(W)$, si scrive W in termini di generatori:

   $$w_1, \ldots, w_k \to W = \{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \}$$

   e si guarda la sua immagine.

   Esempio. in $\mathbb{K}^3$ consideriamo il *ssv* $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Questo *ssv* si può anche descrivere come $\text{span}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e quindi il vettore generico sarà descritto da

   $$v = t_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1\\t_1+t_2\\t_2\end{pmatrix} \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2$$

   Il *ssp* corrispondente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (che è una retta proiettiva) è descritta di nuovo dall'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e si può rappresentare in forma parametrica

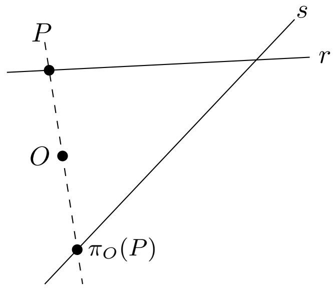
   $$\{\ [t_1, t_1 + t_2, t_2] \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}\ \}.$$

1.5 Prospettività

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo, $r, s \subseteq \mathbb{P}(V)$ due rette distinte e $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$ un punto esterno a entrambe.

Si definisce $\boxed{\text{prospettività}}$ di centro O la seguente funzione

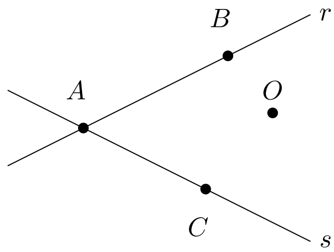
$$\begin{aligned} \pi_O : r &\longrightarrow s \\ P &\longmapsto L(O, P) \cap s. \end{aligned}$$



Proposizione 6. *π_0 è una trasformazione proieittiva (quindi un isomorfismo).*

Dimostrazione. Facciamo vedere che π_O è indotta da un'applicazione lineare $\varphi : V_r \to V_s$, dove $V_r, V_s \subseteq V$ sono i sottospazi vettoriali corrispondenti a r e s.

Fissiamo un riferimento proiettivo "comodo" di $\mathbb{P}(V)$ in questo modo:



Dove $A = r \cap s$, scelgo $B \in r$ arbitrario, $C \in s,\ C \neq A,\ C \notin L(B, O)$. Dunque ho $\mathcal{R} = (A, B, C, O)$. In coordinate omogenee, scrivo i miei punti come

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1], \quad O = [1, 1, 1]$$

.

Un'equazione della retta r è $x_2 = 0$ (basta notare che sia A che B la soddisfano).
Analogamente, per s prendo $x_1 = 0$.
Quindi

$$\begin{aligned} r &= \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}, \\ s &= \{[x_0, 0, x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}. \end{aligned}$$

Scriviamo π_O in queste coordinate: dato $P \in r,\ P = [a, b, 0]$ con a, b non entrambi nulli; calcoliamo l'equazione della retta $L(O, P)$ e intersechiamola con s, per determinare le coordinate di $\pi_O(P)$.

$$O = [1, 1, 1] \quad P = [a, b, 0]$$

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2] \in L(O, P) &\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2) \in \operatorname{span}\big((a, b, 0), (1, 1, 1)\big) \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0 \end{aligned}$$

Adesso mettiamo a sistema con s:

$$\begin{cases} x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $x_0 b + x_2(a-b) = 0$ e prendiamo la soluzione proiettiva $x_0 = a-b,\ x_2 = -b$. Quindi $\pi_O(P) = [a-b, 0, -b]$.

Ciò significa che, nelle coordinate omogenee di r e s, π_O si scrive

$$[a,b] \longmapsto [a-b, -b]$$

(perché le coordinate di r e s prendono in input due valori e li inseriscono nella definizione).

Osserviamo che l'applicazione lineare associata a π_O è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

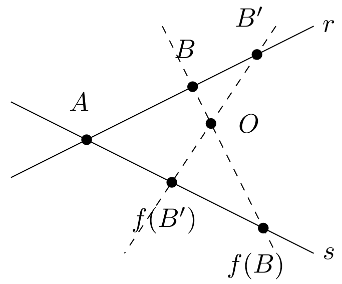
che è invertibile. Quindi è π_O è associata a un isomorfismo, ovvero è a sua volta un isomorfismo. □

Osservazione. Notiamo in particolare che $\pi_O(A) = A$, ovvero A rimane fisso.

Teorema 5. *Se r e s sono due rette distinte in un piano $\mathbb{P}(V)$ e $f : r \to s$ è una trasformazione proiettiva, allora*

$$f \textit{ proiettività} \iff f(A) = A, \quad A = (r \cap s).$$

Dimostrazione. La freccia $\Rightarrow$ la abbiamo appena vista.
Occupiamoci quindi di $\Leftarrow$. Cerchiamo di capire chi sia il centro O della proiettività.
Preso $B \neq A \in r$, il punto O deve stare per forza sulla retta $L(B, f(B))$.
Scegliendo un secondo punto $B' \in r \setminus \{A, B\}$, O dovrà stare anche su $L(B', f(B'))$ e, visto che le due rette sono distinte, l'intersezione (che è sicuramente non vuota: siamo nello spazio proiettivo) sarà per forza il centro che sto cercando.
Segue che $f = \pi_O$, applicando l'unicità garantita dal *Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive*, perché le due trasformazioni coincidono sul riferimento (A, B, B') di r. □



Osservazione. π_O è la restrizione a r di una funzione $\pi_O : \mathbb{P}(V) \setminus \{O\} \to s$, la proiezione da O a s, che prende un punto P, disegna la retta passante per P e O e la interseca con s.

Questa è quella che si chiama una trasformazione proiettiva **degenere**, perché la trasformazione lineare che la induce ha un kernel non banale. *Vd.* quaderno per una costruzione di π_0 analoga a quella della dimostrazione, ma con il dominio esteso.

1.6 Carte affini e punti all'infinito

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, per ogni $i = 0, \dots, n$ c'è un **iperpiano coordinato**, di equazione

$$H_i = \{x_i = 0\}.$$

Denotiamo con U_i il suo complementare:

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Considerato come spazio proiettivo, $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

Def. Definisco l' $\boxed{i\text{-esima carta affine}}$

$$\begin{aligned} j_i : \mathbb{K}^n &\longrightarrow U_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto [y_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{posto } i\text{-esimo}}}{1}, \dots, y_n] \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} j_i^{-1} : U_i &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

che è ben definita, perché se cambio rappresentante in $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{K}^*$, allora

$$\left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\widehat{\lambda x_i}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Proposizione 7. *j_i e j_i^{-1} sono una l'inversa dell'altra.*

Dimostrazione. □

$$\begin{aligned} &j_i^{-1} \circ j_i(y_1, \dots, y_n) = \\ &= j_i^{-1}\big([y_1, \dots, 1, \dots, y_n]\big) = \\ &= \left(\frac{y_1}{1}, \dots, \frac{\hat{1}}{1}, \dots, \frac{y_n}{1}\right) = \\ &= (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &j_i \circ j_i^{-1}\big([x_0, \dots, x_n]\big) = \\ &= j_i\left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right) = \\ &= \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = \\ &\underset{\substack{\downarrow \\ \text{moltiplico per } x_i}}{=} [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ può essere pensato come "ampliamento" di $\mathbb{K}^n$, in cui si aggiunge un $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ "all'infinito".

Esempio.

1. $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\text{punto}\}$

D'ora in avanti, a meno che non sia specificato altrimenti, useremo la *carta* j_0 per identificare $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^n$.

L'iperpiano H_0 viene chiamato $\boxed{\text{iperpiano all'infinito}}$ e i suoi punti $\boxed{\text{punti all'infinito}}$ (o **punti impropri**).

Proposizione 8.

1. *Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottospazio proiettivo, non contenuto in H_0, allora*

$$j_0^{-1}(S \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$$

   è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, chiamato la $\boxed{\textit{parte affine}}$ di S. La sua dimensione affine coincide con la dimensione proiettiva di S.

2. *Se $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine non vuoto, allora c'è un unico sottospazio proiettivo $\overline{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (non contenuto in H_0) la cui **parte affine** sia Z. $\overline{Z}$ si chiama $\boxed{\textit{chiusura proiettiva}}$ di Z; la sua dimensione proiettiva è uguale alla dimensione affine di Z.*

Questo dà una bigezione (tramite j_0) tra sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non contenuti in H_0 e sottospazi affini di $\mathbb{K}^n \cong U_0$.

Dimostrazione.

1. Sia $k = \dim S$. Scriviamo S come luogo delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango $(n+1) - (k+1) = n - k$ (questo perché riporto S e $\mathbb{P}(V)$ ai corrispettivi spazi vettoriali)

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \ldots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   Notiamo che $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ sta in $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ *sse* $j_0(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n] \in U_0 \cap S$, cioè sostituendo nel sistema (1), vale

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n = -a_{1,0} \\ \quad\vdots \\ a_{n-k,1}y_1 + \ldots + a_{n-k,n}y_n = -a_{n-k,0} \end{cases} \tag{2}$$

Quindi $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$: ho scritto un sistema lineare non omogeneo (per questo è affine, altrimenti sarebbe stato vettoriale), in n variabili.

Notiamo ora che la matrice dei coefficienti di (1) ha rango $n-k$ (per ipotesi) e lo stesso è vero per la matrice completa del sistema (2) (ho semplicemente spostato la prima colonna alla fine, cambiando segno).

Inoltre, visto che (2) ha per ipotesi almeno una soluzione (poiché $S \not\subseteq H_0$, c'è almeno un elemento di S in U_0 e quindi l'intersezione non è vuota), per *Rouché-Capelli* il rango della matrice dei coefficienti (cioè la matrice senza la colonna dei termini noti) del sistema (2) è pure $n-k$.

Questo implica che la dimensione del sottospazio affine descritto da (2) è proprio k.

2. Rovesciamo il procedimento visto nel punto precedente.

   Partiamo da un $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ non vuoto, sottospazio affine di dimensione k; esso sarà definito da un sistema lineare non omogeneo
$$Ay = b$$
   con A matrice $(n-k) \times n$ di rango $n-k$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

   Consideriamo adesso il sottospazio proiettivo $\overline{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definito dal sistema lineare omogeneo
$$\big(-b \mid A \big) x = 0$$
   con la matrice $(n-k) \times (n+1)$ e $x = (x_0, \dots, x_n)$. In pratica stiamo facendo $j_0(Z) : (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots y_n]$. Di nuovo, per *Rouché-Capelli*, la matrice ha rango $n-k$: la seconda equazione diventa
$$-b \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$
   soddisfatta perché $(y_1, \dots, y_n) \in Z$. Quindi la dimensione proiettiva di $\overline{Z}$ è k. Inoltre, proprio per come lo abbiamo costruito, la parte affine di $\overline{Z}$ è Z, infatti
$$j_0^{-1}(\overline{Z} \cap U_0) \underset{\substack{\downarrow \\ x_0 \neq 0}}{=} j_0^{-1}(\overline{Z}) = j_0^{-1}(j_0(Z)) = Z.$$

   Verifichiamo l'unicità: sia $\overline{Z}' \neq \overline{Z}$ un altro sottospazio proiettivo la cui parte affine sia Z.

   Osserviamo che $\overline{Z} \cap \overline{Z}'$ è un sottospazio di entrambi, di dimensione $< k$ (altrimenti coinciderebbero).

   Calcoliamone la parte affine:
$$j_0^{-1}\big(U_0 \cap (\overline{Z} \cap \overline{Z}')\big) = j_0^{-1}(U_0 \cap \overline{Z}) \cap j_0^{-1}(U_0 \cap \overline{Z}') = Z\overline{Z} = Z$$
   la cui dimensione è k; questo, tuttavia, contraddice il fatto che la parte affine di $\overline{Z} \cap \overline{Z}'$ dovesse avere dimensione uguale alla sua chiusura proiettiva (grazie al punto 1.), che ha dimensione $< k$.

□

Le equazioni della chiusura proiettiva di un *ssa* si ottengono da quelle del *ssa* "omogeneizzato", cioè rese omogenee tramite moltiplicazione di termini noti (oppure dal fatto che è il procedimento inverso rispetto alla sostituzione $y_i = \frac{x_i}{x_0}$).

Esempio. Rette in $\mathbb{K}^2$ Data la retta affine $ay_1 + by_2 = c$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, i punti all'infinito si ottengono intersecando la sua chiusura proiettiva con la retta all'infinito.
Effettuiamo la sostituzione, per ottenere il proiettivizzato:
$$a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} = c$$
$$ax_1 + bx_2 = cx_0,$$
la cui intersezione con $x = 0$ (cioè l'iperpiano improprio H_0) è data da
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = cx_0 \end{cases}.$$
Il punto all'infinito della retta affine, allora, è $[0, -b, a]$. Di conseguenza, date dure rette affini, esse si intersecheranno all'infinito *sse* hanno gli stessi coefficienti, ovvero sono parallele.

Per convincerci che $\mathbb{P}(V)$ estende lo spazio affine, ci mancano da considerare i morfismi.

Teorema 6. *Identifichiamo U_0 con $\mathbb{K}^n$ tramite la carta $j_0 : \mathbb{K}^n \to U_0$.*
Sia $G = \{f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(U_0) = U_0\}$, ovvero le trasformazioni proiettive che preservano U_0.
Allora

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \\ f &\longmapsto f_{|U_0} = j_0^{-1} f j_0. \end{aligned}$$

è un ben definito isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Presa una $f \in G$, $f = [\varphi] : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$, notiamo che, poiché f è bigettiva (proprietà delle proiettività), $f(U_0) = U_0 \Leftrightarrow f(H_0) = H_0 \Leftrightarrow \varphi$ preserva l'iperpiano vettoriale $x_0 = 0$.
Se $e_0, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$, questo è equivalente a dire $\varphi(e_i) \in \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n) \quad \forall i \geq 1$.
Cioè: e_0 va dove gli pare, gli altri rimangono fra di loro.
Dunque $f \in G \Leftrightarrow \mathcal{M}_B(\varphi)$ è della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \qquad a \in \mathbb{K},\ b \text{ vettore colonna},\ A \text{ matrice } n \times n.$$

Poiché f deve essere invertibile, vale $a \neq 0$ e $\det A \neq 0$. Dunque, a meno di moltiplicazione per a^{-1},

$$\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \qquad \text{(con nuovi } b \text{ e } A\text{)}.$$

Come agisce f su $\mathbb{K}^n = U_0$? Dato $v \in \mathbb{K}^n$ vediamo cosa succede:

$$v \in \mathbb{K}^n \xrightarrow{j_0} v \in U_0 \xrightarrow{f} v' \in U_0 \xrightarrow{j_0^{-1}} v' \in \mathbb{K}^n.$$

Che, calcolato, sarebbe

$$j_0^{-1}\left(f([1, v_1, \dots, v_n])\right) = j_0^{-1}\left([\varphi(1 \mid v)]\right) = j_0^{-1}\left(\left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}\right]\right) = j_0^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ b + Av \end{pmatrix}\right]\right) = Av + b.$$

(divido per la prima coord. e poi la butto)

Quindi $\psi(f)(v) = Av + b$ è davvero un'affinità. Inoltre, poiché se $f, g \in G$, allora $(f \circ g)_{|U_0} = f_{|U_0} \circ g_{|U_0}$, ψ è omomorfismo.
È chiaramente surgettivo: $f(v) = Av + b$ è ottenuta come $\psi(\varphi)$, con $\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$.
È iniettivo, poiché se $(v \mapsto Av + b) = \mathrm{Id}$, allora $Av + b = v\ \forall v$ e quindi $A = I$, $b = 0$, da cui $\varphi = \mathrm{Id} \Rightarrow f = \mathrm{Id}$. □

1.7 Dualità

Def. $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$ si chiama $\boxed{\text{proiettivo duale}}$ di $\mathbb{P}(V)$ ed è l'insieme dei funzionali $f \in V^* \setminus \{0\}$.

Fatto C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}(V^*)$ e gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Partiamo da $[f] \mapsto \mathbb{P}(\ker f)$ e facciamo vedere che funziona.

- $\dim(\ker f) = \dim V - \underset{= \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{K}}{\underset{\downarrow}{1}}$, per cui $\mathbb{P}(\ker f)$ è effettivamente un iperpiano;
- $\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $f = \lambda g$, quindi sono nella stessa classe (cioè $[f] = [g]$) e la corrispondenza risulta ben definita, perché vanno a finire nello stesso iperpiano;
- ogni iperpiano di V è nucleo di qualche funzionale (nello specifico una retta di funzionali, che nel proiettivo rientrano nella medesima classe), per cui la corrispondenza è biunivoca.

  Come si può descrivere l'inversa?

$$\{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \longrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

Dato qualsiasi sottospazio $W \subseteq V$, il suo annullatore è l'insieme $\mathrm{Ann}(W) = \{f \in V^* \mid f_{|W} = 0\}$ è un *ssv* di dimensione $\dim V - \dim W$.
In particolare, dato W iperpiano, il suo annullatore è una retta di V^*, che identifica perciò un punto in $\mathbb{P}(V^*)$ e tale punto è esattamente l'elemento di $\mathbb{P}(V^*)$ che corrisponde all'iperpiano $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ (tramite la corrispondenza di cui si parlava prima).

Questa dualità si estende a sottospazi di qualsiasi codimensione: $\forall k = 0, \dots, n = \dim \mathbb{P}(V)$ poniamo

$$\begin{aligned} \delta_k : \{\mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V) \text{ di dim} = k\} &\longleftrightarrow \{\ \mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*) \text{ di dim} = n-k-1\} \\ \mathbb{P}(W) &\longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W)) \end{aligned}$$

Teorema 7. *δ_k è una bigezione per ogni k.*

Dimostrazione. Chiamiamo $\delta : \{\ \mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V)\ \} \to \{\ \mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*)\ \} = \bigcup_k \delta_k$ l'unica funzione che estende tutti i δ_k.
Tramite l'isomorfismo canonico $V \cong V^{**}$ si ha $\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(W)\right) = W$ (sono gli α_w tali che $\alpha_w(f) = f(w) = 0$, corrispondenti ai $w \in W$); per cui, se identifichiamo $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}(V)^{**}$, tramite $V = V^{**}$,

$$\delta \circ \delta : \{\mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V)\} \longrightarrow \{\mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*)\} \longrightarrow \{\mathit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^{**}) = \mathbb{P}(V)\} = \mathrm{Id}.$$

□

Teorema 8. *Siano S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, allora*

1. *$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \delta(S_1) \supseteq \delta(S_2)$;*
2. *$\delta\left(L(S_1, S_2)\right) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$;*
3. *$\delta(S_1 \cap S_2) = L\left(\delta(S_1), \delta(S_2)\right)$.*

Dimostrazione.

1. Segue da $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \mathrm{Ann}(W_1) \supseteq \mathrm{Ann}(W_2)$;
2. segue da $\mathrm{Ann}(W_1 + W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) \cap \mathrm{Ann}(W_2)$;
3. segue da $\mathrm{Ann}(W_1 \cap W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) + \mathrm{Ann}(W_2)$.

□

Teorema 9 (Principio di dualità)**.** *Sia P un enunciato che riguarda sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, relazioni e operazioni tra di essi (contenimenti, intersezioni, somme, ecc.).*
Sia P^* l'enunciato duale di P, ottenuto da P tramite le sostituzioni seguenti.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longmapsto \mathbb{P}(V)^* \\ \subseteq &\longmapsto \supseteq \\ \cdot \cap \cdot &\longmapsto L(\cdot, \cdot) \\ L(\cdot, \cdot) &\longmapsto \cdot \cap \cdot \\ \dim k &\longmapsto \dim(n-k) \end{aligned}$$

Allora P è vero se e solo se P^* è vero.

Dimostrazione. Se P è vero, applico δ e ottengo un altro enunciato vero, che è proprio P^*. Viceversa, se P^* è vero, applico $\delta^{-1} = \delta$ e ottengo P vero. □

1.7.1 Sistemi lineari di iperpiani

Un sistema lineare di iperpiani di dimensione k è un insieme di iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ che corrisponde a un *ssp* di $\mathbb{P}(V)^*$ di dimensione k.

I sistemi lin. di dimensione 1 si dicono $\boxed{\text{fasci}}$. Le rette di questi insiemi passano sempre per almeno un punto (nel caso delle rette parallele, si incontrano all'infinito).

Tramite dualità sappiamo che ogni sottospazio $\mathcal{L}$, k-dimensionale, di $\mathbb{P}(V)^*$ è $\mathcal{L} = \delta(S)$, con S *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione $n-k-1$.