

# APPUNTI DI GEOMETRIA 2

FRIGERIO - SALPO - SZAMUELY

Ludovico Sergiacomi

a.a. 2025/2026

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi Proiettivi</b>	<b>3</b>
1.1	Trasformazioni proiettive . . . . .	3
1.2	Sottospazi proiettivi . . . . .	5
1.3	Riferimenti proiettivi . . . . .	7
1.4	Coordinate omogenee . . . . .	10
1.5	Prospettività . . . . .	12
1.6	Carte affini e punti all'infinito . . . . .	13

# 1 Spazi Proiettivi

**Def.** Sia  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , allora si chiama spazio proiettivo su  $V$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove  $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v = \lambda w$ .

*Osservazione.* La relazione  $\sim$  è di equivalenza e ci dice che  $v \sim w$  se giacciono sulla stessa retta. Perciò, insiemisticamente,  $\mathbb{P}(V) \cong \{\text{rette di } V\}$ :

$$[v] \leftrightarrow \text{span}(v).$$

**Def.** Se  $\dim V = n$ , la dimensione di  $\mathbb{P}(V)$  è  $n - 1$ .

## Esempi

1.  $V = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset \quad \dim \mathbb{P}(V) = 0 - 1 = -1$ .

*Osservazione.* Negli spazi proiettivi il vuoto è accettato.

2.  $\dim V = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{*\}$  consiste di una sola classe di equivalenza:  $V$  è già una retta. Infatti  $\dim \mathbb{P}(V) = 1 - 1 = 0$ .
3.  $V = \mathbb{K}^n \quad \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$  si indica con  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ .

4. Chi è  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ?  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  cioè l'insieme delle rette di  $\mathbb{R}^2$ .

L'insieme delle semirette (uscenti da  $O$ ) è chiaramente parametrizzato da  $S^1$ , cioè la circonferenza unitaria: a ogni semiretta  $s$  faccio corrispondere  $s \cap S^1$ , che è un punto.

Le rette sono parametrizzate da  $[0, \pi)$ , quindi  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  è in bigezione con  $[0, \pi)$ . Però si va a perdere l'idea che, avvicinandosi a  $\pi$ , ci stiamo avvicinando anche a 0. Quindi è meglio pensarlo come  $[0, \pi]$ , con 0 identificato a  $\pi$ : partiamo dalla semicirconferenza e avviciniamo sempre di più 0 e  $\pi$  finché non coincidono.

## 1.1 Trasformazioni proiettive

**Def.** Una trasformazione proiettiva è una funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(W) \text{ tale che} \\ \exists \varphi : V &\longrightarrow W \text{ lineare t.c.} \\ f([v]) &= [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \end{aligned}$$

*Osservazione.* Su  $\mathbb{P}(V)$  non sono definite operazioni, quindi abbiamo definito le *t.p.* come mappe indotte da funzioni lineari.

Ma ogni  $\varphi : V \rightarrow W$  induce una trasformazione proiettiva?

**Proposizione 1.** Una mappa lineare  $\varphi : V \rightarrow W$  induce una *t.p.*  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  se e solo se  $\varphi$  è iniettiva. In tal caso porremo  $f = [\varphi]$ .

*Dimostrazione.* Partiamo dalla freccia  $\Leftarrow$

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$$

ottenendo tutti elementi diversi. Inoltre  $v \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0 \Rightarrow [\varphi(v)]$  è ben definita. Noto che  $f$  è ben definita, cioè  $v \sim v' \Rightarrow f([v]) = f([v'])$ , il che segue dalla linearità di  $\varphi$

$$v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda \varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v').$$

Viceversa (freccia  $\Rightarrow$ ), se  $f$  è indotta da  $\varphi$ , necessariamente deve essere  $\varphi$  iniettiva, perché altrimenti, dato  $v \in \text{Ker} \varphi \setminus \{0\}$  (e dato che  $f$  non è iniettiva, c'è almeno un  $v \neq 0$  nel nucleo), si avrebbe  $f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$ , che è assurdo.  $\square$

**Corollario 1.1.** *Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.*

*Dimostrazione.* Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è indotta da  $\varphi : V \rightarrow W$ , sapendo che  $\varphi$  è iniettiva, abbiamo

$$f([v]) = f([v']) \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')] \Rightarrow \varphi(v) = \lambda \varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') \Rightarrow v = \lambda v' \quad \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow [v] = [v'].$$

□

**Proposizione 2.**

1.  $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è una trasformazione proiettiva.
2. Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  e  $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  sono trasformazioni proiettive, allora anche  $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  è una trasformazione proiettiva.

*Dimostrazione.*

1.  $\text{Id} : V \rightarrow V$  è lineare e induce  $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ .
2.  $f = [\varphi]$ ,  $g = [\psi]$ ,  $\psi \circ \varphi : V \rightarrow Z$  è iniettiva e induce  $g \circ f$ .

$$\forall v \quad g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))].$$

□

*Osservazione.* Inoltre, se  $f = [\varphi]$ ,  $g = [\psi]$ , vale  $g \circ f = [\psi \circ \varphi]$ .

**Proposizione 3.** *Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  una t.p., allora sono fatti equivalenti:*

1.  $f$  è surgettiva
2.  $f$  è iniettiva
3.  $f$  è invertibile e  $f^{-1}$  è a sua volta t.p.
4.  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$

*Dimostrazione.*

1.  $\Rightarrow$  2. È ovvia:  $f$  è iniettiva di base, per cui si aggiunge la surgettività.

2.  $\Rightarrow$  3. Già sappiamo che  $\varphi : V \rightarrow W$  è iniettiva, facciamo vedere che è anche surgettiva:

sia  $w \in W$ ,  $w \neq 0$  (se  $w = 0$ ,  $w = \varphi(0)$ );

$$f \text{ bigettiva} \Rightarrow \exists v \in V \text{ t.c. } [w] = f([v]) = [\varphi(v)] \Rightarrow w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \varphi \text{ surgettiva.}$$

Sappiamo da *G1* che  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$  è anch'essa lineare. Quindi, presa  $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , con  $g = [\varphi^{-1}]$ , vale

$$f \circ g = [\varphi \circ \varphi^{-1}] = [\text{Id}] = \text{Id} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

*Osservazione.* Ci è servito dimostrare che  $\varphi$  è invertibile, così da poter indurre  $g = [\varphi^{-1}]$ .

3.  $\Rightarrow$  4. Se  $\varphi : V \rightarrow W$  è lineare e invertibile, allora  $\dim V = \dim W \Rightarrow \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ .

4.  $\Rightarrow$  1.  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  indotta da  $\varphi : V \rightarrow W$ , sapendo che  $\varphi$  è iniettiva e che  $\dim V = \dim W$ , ottengo  $\varphi$  surgettiva, da cui anche  $f$  surgettiva. Infatti

$$\forall w \in W \exists v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = w \Rightarrow \forall [w] \in \mathbb{P}(W) \exists [v] \in \mathbb{P}(V) \text{ t.c. } f([v]) = [w] \text{ ovvero } [\varphi(v)] = [w] \Rightarrow \varphi(v) = w$$

e questo è garantito da  $\varphi$  surgettiva.

□

**Def.** Se  $f$  soddisfa una delle condizioni della proposizione,  $f$  si dice isomorfismo.

**Def.** Se  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$  ogni t.p.  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è un isomorfismo e si dice proiettività.

L'insieme delle proiettività di  $\mathbb{P}(V)$  è un gruppo, che si denota con  $\mathbb{PGL}(V)$  (per ragioni che saranno chiare più avanti).

**Proposizione 4.** Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ ,  $f = [\varphi]$ . Allora i punti fissi di  $f$  sono in bigezione con le rette di autovettori di  $\varphi$ .

*Dimostrazione.*

$$\underbrace{f([v]) = [v]}_{[v] \text{ punto fisso di } f} \Leftrightarrow [\varphi(v)] = [v] \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(v) = \lambda(v)}_{v \text{ autovettore di } \varphi}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

□

**Corollario 4.1.**

1. Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso e  $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$ , ogni proiettività  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  ha almeno un punto fisso.
2. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\dim \mathbb{P}(V)$  è pari, allora ogni proiettività  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  ha almeno un punto fisso.

*Dimostrazione.*

1. Ogni endomorfismo ha almeno un punto fisso (ovviamente se  $\dim V > 0$ ).
2.  $\dim \mathbb{P}(V)$  pari  $\Rightarrow \dim V$  dispari  $\Rightarrow$  il polinomio caratteristico ha almeno uno zero in  $\mathbb{R}$ . Quindi c'è un autovalore (con corrispondente autovettore) in  $\mathbb{R}$ .

□

## 1.2 Sottospazi proiettivi

**Def.**  $S \subseteq \mathbb{P}(V)$  si dice sottospazio proiettivo se  $\exists W \subseteq V$  sottospazio vettoriale t.c. se, detta

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

la proiezione,

$$S = \pi(W \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(W).$$

*Osservazione.* Esiste una bigezione tra i *ssp* di  $\mathbb{P}(V)$  e i *ssv* di  $V$ .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & \pi^{-1}(S) \cup \{0\} \\ \mathbb{P}(W) & \xleftarrow{\beta} & W \end{array}$$

E si verifica che  $\alpha$  e  $\beta$  sono inverse una dell'altra.

**Def.** Se  $S$  è *ssp* di  $\mathbb{P}(V)$ ,  $W$  è *ssv* di  $V$ , con  $S = \mathbb{P}(W)$ , allora  $\dim S = \dim W - 1$ .

**Fatti**

1.  $S_i = \mathbb{P}(W_i)$  è *ssp* di  $\mathbb{P}(V)$ ,  $i \in I$ , allora si verifica facilmente che

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

In particolare, l'intersezione di *ssp* è a sua volta un *ssp*. Infatti (pensando le classi di  $S_i$  come *span*) in un caso sto considerando gli *span* comuni a tutti i sottospazi proiettivi, nell'altro prendo i vettori comuni a tutti i sottospazi vettoriali e faccio lo span:

$$\{[v] \mid [v] \in S_i \ \forall i\} = \{[v] \mid v \in W_i \ \forall i\}$$

2. Come nel caso vettoriale, l'unione di *ssp* non è *ssp*. Allora, dati  $S_1$  e  $S_2$  vorrei definire una somma, in modo che  $S_1 + S_2$  sia *ssp*.

3. Se  $S_1, S_2$  sono sottospazi proiettivi tali che  $S_1 \subseteq S_2$ , allora  $\dim S_1 \leq \dim S_2$  e in particolare  $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ . Discende dall'analogia proprietà vettoriale.

**Def.** Sia  $K \subseteq \mathbb{P}(V)$  un sottoinsieme. Allora si dice  $\text{il ssp generato da } K$  il più piccolo ssp di  $\mathbb{P}(V)$  che contiene  $K$ . Si scrive  $L(K)$ . È ben definito per il fatto 1, infatti

$$L(K) = \bigcap_{S \supseteq K} S$$

con  $S$  sottospazio di  $\mathbb{P}(V)$ .

**Def.** Siano  $S_1, S_2$  ssp di  $\mathbb{P}(V)$ , allora  $L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)$ .

**Lemma 1.**  $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ ,  $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$  allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

dove ricordiamo che  $W_1 + W_2$  è il più piccolo ssv che contiene  $W_1$  e  $W_2$ .

*Dimostrazione.* Doppio contenimento

- $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_1 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

$$W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Quindi  $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$  e, per definizione di  $L$ , vale  $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ .

- $L(S_1, S_2) \supseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

Sia  $W$  il sottospazio t.c.  $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W)$ , allora

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$

$$S_2 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_2 \subseteq W$$

Quindi  $W_1 + W_2 \subseteq W \Rightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2)$ .

□

**Teorema 1** (Grassmann). Siano  $S_1, S_2$  sottospazi di  $\mathbb{P}(V)$ , allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

*Dimostrazione.* Scriviamo  $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ , allora per il Lemma, vale  $\dim L(S_1, S_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1$ . Quindi, sfruttando Grassmann vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) - 1 &= \dim W_1 + W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) = \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

□

**Corollario 1.1.**  $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0$$

□

*Osservazione.* Due rette in un piano proiettivo si intersecano sempre. Le rette parallele si incontrano all'infinito.

**Corollario 1.2.** Siano  $P, Q$  punti distinti di  $\mathbb{P}(V)$ , allora  $L(P, Q)$  è una retta ed è l'unica retta che li contiene.

*Dimostrazione.*  $P \neq Q \Rightarrow \dim L(P, Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 0 + 0 - (-1) = 1$  cioè è una retta.

Sia ora  $r$  una retta che contiene  $P$  e  $Q$ ; per definizione  $L(P, Q) \subseteq r$  da cui, visto che hanno la stessa dimensione, coincidono.  $\square$

*Osservazione.* In generale si vede che, se  $S$  è *ssp* e  $P \notin S$ , vale  $\dim L(S, P) = \dim S + 1$  ed è l'unico *ssp* che contiene sia  $S$  che  $P$ .

### 1.3 Riferimenti proiettivi

**Def.** Sia  $\mathbb{P}(V)$  spazio proiettivo, allora  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$  si dicono indipendenti se, presi  $v_i \in V$  t.c.  $P_i = [v_i] \forall i$ , si ha che i  $v_i$  sono linearmente indipendenti.

*Osservazione.* La definizione è ben posta: scegliendo altri rappresentanti dei  $P_i$ , tali che  $[v'_i] = [v_i]$  allora  $\exists \lambda_i \neq 0$  t.c.  $v'_i = \lambda v_i \Rightarrow v_i$  indipendenti  $\Leftrightarrow v'_i$  indipendenti.

*Osservazione.*  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$  sono indipendenti sse  $\dim L(\{P_1, \dots, P_k\}) = k - 1$ . In particolare detta  $n = \dim \mathbb{P}(V)$  (da cui si ha  $\dim V = n + 1$ ), allora  $P_1, \dots, P_k$  indipendenti  $\Rightarrow k \leq n + 1$ . L'idea è quella di usare i vettori, sfruttando le loro proprietà, per poi riportarle nello spazio proiettivo.

**Def.**  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$  sono in posizione generale sse qualsiasi sottoinsieme di  $h$  punti, con  $h \leq n + 1$ , è indipendente.

*Osservazione.* Cioè se  $k \leq n + 1$ , allora i punti sono indipendenti. Se  $k \geq n + 2$ , invece, equivale a dire che qualsiasi  $(n + 1)$ -upla dei  $P_i$  è indipendente.

#### Esempi

1.  $\dim \mathbb{P}(V) = 1$   $P_1, \dots, P_k$  in posizione generale se sono a due a due distinti: nello spazio proiettivo, su una retta, i punti sono indipendenti se sono diversi (perché corrispondono a classi di vettori indipendenti: i vettori di una retta in  $V$  vanno a finire nello stesso punto di  $\mathbb{P}(V)$ ).
2.  $\dim \mathbb{P}(V) = 2$  sono indipendenti se sono a tre a tre non allineati (cioè il terzo vettore non giace sul piano generato dai primi due, nello spazio vettoriale).

*Osservazione.* In entrambi i casi, se il campo di base è infinito, per qualsiasi  $k \in \mathbb{N}$ , si trovano  $P_1, \dots, P_k$  in posizione generale.

**Def.** Un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ , detta  $n$  la dimensione dello spazio proiettivo, è una  $(n + 2)$ -upla

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$$

di punti di  $\mathbb{P}(V)$  in posizione generale.

*Osservazione.* Usiamo le parentesi tonde, perché è importante l'ordine in cui considero i punti.

#### Esempi

1.  $\dim \mathbb{P}(V) = 1$   $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$  distinti.
2.  $\dim \mathbb{P}(V) = 2$   $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  tre a tre non allineati.

**Def.** Sia  $\mathcal{R}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ , allora si dice base normalizzata di  $V$  associata a  $\mathcal{R}$  una base

$$(v_0, \dots, v_{n+1}) \text{ t.c. } [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \text{e} \quad P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$$

*Osservazione.* Con la seconda condizione sto limitando quanto si possano scalare i  $v_i$ : o li scalo tutti per lo stesso  $\lambda$  o niente. Lo vediamo meglio più avanti.

*Terminologia.*

- I punti  $P_0, \dots, P_n$  si chiamano **punti fondamentali**.
- $P_{n+1}$  si chiama **punto unità**, perché scritto in coordinate (rispetto alla base normalizzata) è  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Teorema 2.** Sia  $\mathcal{R}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ . Allora

1. Esiste una base normalizzata  $(v_1, \dots, v_n)$  di  $V$  rispetto a  $\mathcal{R}$ .
2. Se  $(v'_1, \dots, v'_n)$  è un'altra base normalizzata di  $V$  rispetto a  $\mathcal{R}$ , allora

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v'_i = \lambda v_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

*Dimostrazione.*

1. Partiamo dal riferimento proiettivo  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  e scegliamo  $v_i \in V$  tali che  $[v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n$ . Quindi  $(v_0, \dots, v_n)$  è una base di  $V$ , visto che i punti di  $\mathcal{R}$  sono indipendenti (quindi per definizione di riferimento - posizione generale - indipendenza).

Scegliamo anche  $v_{n+1} \in V$  t.c.  $[v_{n+1}] = P_{n+1}$ . Scriviamo allora

$$v_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad v_i \in \text{base}$$

in modo unico.

Adesso ci interessa che il punto unità sia effettivamente tale: se tutti gli  $a_i$  fossero uguali a 1, avremmo finito... però non è detto che sia così. Quindi consideriamo,  $a_i v_i$ , al posto dei semplici  $v_i$ , come rappresentanti dei  $P_i$ . Se però un qualche  $a_j = 0$ ? Dimostriamo che non è possibile: se, per assurdo, si avesse  $a_j = 0$ , allora l'equazione di prima ci darebbe una relazione di indipendenza

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_j \hat{v}_j + \dots - v_{n+1} \quad a_i \neq 0,$$

ma sappiamo che  $v_{n+1}$  è dipendente dagli altri  $\rightarrow$  assurdo.

Quindi possiamo fare quanto segue, con tranquillità: poniamo

$$v'_i = a_i v_i \quad a_i \neq 0 \quad \forall i \Rightarrow (v'_0, \dots, v'_n) \text{ è base di } V \text{ e } [v'_i] = [a_i v_i] = [v_i] = P_i$$

e inoltre, per costruzione,

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [a_0 v_0 + \dots + a_n v_n] = [v'_0 + \dots + v'_n].$$

2. Sia ora  $(v''_1, \dots, v''_n)$  un'altra base normalizzata di  $V$  rispetto a  $\mathcal{R}$ . Sappiamo che

$$[v''_i] = P_i = [v'_i]$$

quindi, per come sono definite le classi,

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v''_i = \lambda_i v'_i.$$

Però potrebbero essere tutti  $\lambda_i$  diversi... Allora osserviamo che

$$P_{n+1} = [v'_0 + \dots + v'_n] = [v''_0 + \dots + v''_n] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^n v''_i = \lambda \sum_{i=0}^n v'_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i = \sum_{i=0}^n \lambda v'_i$$

e, poiché i  $v_i$  sono base di  $V$ , i coefficienti devono essere gli stessi (per l'unicità della scomposizione nello spazio vettoriale).

□



*Osservazione.* Quindi la base normalizzata è unica, a meno di riscalare tutti i vettori per uno stesso fattore.

**Teorema 3.** Siano  $f, g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  trasformazioni proiettive e  $\varphi, \psi : V \rightarrow W$  applicazioni lineari tali che  $f = [\varphi]$  e  $g = [\psi]$ . Sia  $\mathcal{R}$  riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ , allora TFAE:

1.  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$  t.c.  $\varphi = \lambda\psi$  come applicazioni lineari.
2.  $f = g$ .
3.  $f(P) = g(P) \forall P \in \mathcal{R}$ .

*Dimostrazione.*

1.  $\Rightarrow$  2.  $\varphi = \lambda\psi$  allora per qualsiasi  $P$  di  $\mathbb{P}(V)$ , scelto  $v$  t.c.  $[v] = P$ , vale

$$f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P).$$

2.  $\Rightarrow$  3. È ovvia:  $f = g \Rightarrow f|_{\mathcal{R}} = g|_{\mathcal{R}}$ .

3.  $\Rightarrow$  1. Sia  $(v_0, \dots, v_n)$  una base normalizzata di  $V$  rispetto a  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  allora vale

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \Rightarrow \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \text{ per qualche } \lambda_i \in \mathbb{K}^*;$$

inoltre

$$\begin{aligned} [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] &= f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \dots + v_n)] \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \lambda \psi(v_0 + \dots + v_n) \\ &\Rightarrow \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \lambda \psi(v_0) + \dots + \lambda \psi(v_n). \end{aligned}$$

Dato che  $\psi$  è iniettiva, i vari  $\psi(v_i)$  sono indipendenti (lo “ereditano” dalle controimmagini) e quindi  $\lambda_i = \lambda \forall i$ . Quindi, dato che  $\varphi = \lambda\psi$  per tutti i vettori della base, vale anche per la funzione in generale.  $\square$

*Osservazione.* Un po’ l’analogo di quello che succede con le basi vettoriali. Inoltre non è detto che gli  $\psi(v_i)$  siano base di  $W$ , per la dimostrazione mi basta l’indipendenza.

**Corollario 3.1.** Sia  $\mathbb{P}GL(V)$  il gruppo delle proiettività di  $\mathbb{P}(V)$  allora vale

$$\mathbb{P}GL(V) \cong GL(V)/N$$

dove  $N \triangleleft GL(V)$  è il sottogruppo delle matrici scalari:  $N = \{\lambda \cdot \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa naturale

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{P}GL(V) \\ \varphi &\longmapsto [\varphi] \end{aligned}$$

- È omomorfismo:  $[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\psi]$ .
- È surgettivo per definizione di trasformazione proiettiva.
- Il Ker è proprio  $N$  per il Teorema appena visto:

$$\begin{aligned} \text{Id}_V &\longmapsto \text{Id}_{\mathbb{P}(V)} \\ \lambda \text{Id}_V &\longmapsto \text{Id}_{\mathbb{P}(V)} \end{aligned}$$

$\square$

*Notazione.* Se  $V = \mathbb{K}^{n+1}$  (e quindi  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ), il gruppo delle proiettività  $\mathbb{P}GL(\mathbb{K}^{n+1})$  si indica con  $\mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$  perché  $n+1$  indica la taglia delle matrici che rappresentano le trasformazioni.

**Teorema 4** (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive). *Siano  $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$  spazi proiettivi, con  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$  e siano  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  due riferimenti proiettivi, rispettivamente di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$ . Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  che manda (ordinatamente)  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{R}'$ .*

*Dimostrazione.* L'unicità segue dal Teorema precedente: se ci fossero due trasformazioni che mandano  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{R}'$ , allora sarebbero uguali.

Dimostriamo ora l'esistenza. Fissiamo due basi normalizzate:

$$(v_0, \dots, v_n) \text{ di } V \quad (w_0, \dots, w_n) \text{ di } W,$$

sappiamo da G1 che  $\exists! \varphi : V \rightarrow W$  t.c.  $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i = 0, \dots, n$ . Prendiamo allora la trasformazione  $f = [\varphi] : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  indotta da  $\varphi$  e verifichiamo che soddisfa le richieste.

Scriviamo i due riferimenti come

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1}) \quad \mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$$

e concludiamo

$$\begin{aligned} f(P_i) &= [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ f(P_{n+1}) &= [\varphi(v_1 + \dots + v_n)] = [\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_n)] = [w_1 + \dots + w_n] = Q_{n+1}. \end{aligned}$$

□

## 1.4 Coordinate omogenee

**Caso “tautologico”** Come l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  e  $\mathbb{K}^n$  induce un sistema di coordinate, così possiamo fare in  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

**Def.** Si dice che il punto  $[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ha coordinate omogenee  $[x_0, \dots, x_n]$  (anche scritto  $[x_0 : \dots : x_n]$ ), rispetto al riferimento proiettivo standard di  $\mathbb{P}(\mathbb{K})$  - ovvero quello indotto dalla base standard di  $\mathbb{K}^{n+1}$ : i vari  $P_i$  con  $0 \leq i \leq n$  hanno tutte coordinate nulle, tranne l' $i$ -esima, che è 1; come si può immaginare,  $P_{n+1}$  ha tutte le coordinate uguali a 1.

*Osservazione.* Le coordinate omogenee non sono uniche, ma lo sono a meno di *riscaldamento simultaneo*.

*Osservazione.* La scrittura  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  non ha senso.

**Caso generale** Sia  $\mathbb{P}(V)$  spazio proiettivo, con  $\dim \mathbb{P}(V) = n$ . Fissato un riferimento  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ , esso induce su  $\mathbb{P}(V)$  le coordinate omogenee nel modo seguente:

Dal Teorema fondamentale sappiamo che  $\exists!$  trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  che manda il riferimento  $\mathcal{R}$  nel riferimento proiettivo standard di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

**Def.** Le coordinate omogenee di  $P$  in  $\mathbb{P}(V)$  sono la sua immagine tramite  $f$ , ovvero  $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

Equivalentemente, data  $(v_0, \dots, v_n)$  base normalizzata rispetto a  $\mathcal{R}$ , dato  $P \in \mathbb{P}(V)$ , si sceglie un  $v \in V$  t.c.  $[v] = P$  e si scrive  $v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$  ( $v \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$ ).

Allora le coordinate di  $P \in \mathbb{P}(V)$  sono date da  $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Il punto è che la t.p. del punto 1. è indotta dall'isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ v_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

*Osservazione.* Nel vettoriale, fissare una base di  $V$  equivale ad un isomorfismo lineare con  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

*Osservazione.* Usando le *coordinate omogenee* si possono rappresentare le t.p. e i s.s.p. tramite matrici ed equazioni.

### Trasformazioni proiettive

$f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è t.p. e  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  sono i riferimenti in partenza e in arrivo, fissiamo  $B, B'$  basi normalizzate corrispondenti.

Se  $\varphi : V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare t.c.  $[\varphi] = f$ ,  $M$  è la matrice associata, si dice che  $M$  rappresenta anche  $f$ , nel senso che

$$\begin{aligned} [f(P)]_{\mathcal{R}'} &= M[P]_{\mathcal{R}} \quad \text{scritto male} \\ &= [M([v]_B)] \end{aligned}$$

**Proposizione 5.** *La matrice che rappresenta  $f$  non è unica, ma lo è a meno di riscalamento.*

*Osservazione.* Se  $n = \dim \mathbb{P}(V)$ ,  $m = \dim \mathbb{P}(W)$ , la matrice ha taglia  $(m+1)(n+1)$ .

### Sottospazi proiettivi

Ho due modi per descriverli: equazioni e immagine di una mappa (cioè come *span* di una base).

#### 1. Rappresentazione cartesiana

Se  $S \subseteq \mathbb{P}(V)$  è sottospazio proiettivo, per definizione ho  $S = \mathbb{P}(W)$ , dove  $W \subseteq V$  è sottospazio vettoriale. Chiamiamo  $n = \dim \mathbb{P}(V)$  e  $k = \dim \mathbb{P}(W) = S$ .

Fissato  $\mathcal{R}$  di  $\mathbb{P}(V)$  e  $B$  base normalizzata,  $W$  può essere descritto come luogo delle soluzioni di un sistema lineare, di  $(n+1) - (k+1) = n-k$  equazioni lineari omogenee, nelle coordinate indotte da  $B$ .

$$\{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\} = W.$$

Queste stesse equazioni descrivono  $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ , infatti

$$P \in S \Leftrightarrow f_1(P) = \dots = f_{n-k}(P) = 0.$$

*Osservazione.* Le  $f$  sono polinomi lineari omogenei, in  $n+1$  variabili  $x_0, \dots, x_n$ , la scrittura  $f_i(P)$  non ha senso: dipende dal rappresentante vettoriale di  $P$ ; tuttavia la condizione  $f(P) = 0$  è ben definita.

*Esempio.* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , scegliamo  $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 + 3x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} f([1, 1, 1]) &\text{ non ha senso, infatti} \\ f(1, 1, 1) &= 5 \\ f(-1, -1, -1) &= -5 \end{aligned}$$

e invece dovrebbero essere uguali, visto che  $[1, 1, 1] = [-1, -1, -1]$ .

La condizione  $f([a_0, a_1, a_2]) = 0$  però va bene, perché

$$f[\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2] = \lambda f(a_0, a_1, a_2).$$

#### 2. Rappresentazione parametrica

$S \subseteq \mathbb{P}(V)$  come immagine di trasformazioni proiettive in  $\mathbb{P}(V)$  (immagine di *span* di vettori in  $V$ ).

Fissato  $\mathcal{R}$  riferimento e  $B$  base normalizzante,  $W \subseteq V$  sottospazio vettoriale t.c.  $S = \mathbb{P}(W)$ , si scrive  $W$  in termini di generatori:

$$w_1, \dots, w_k \rightarrow W = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i w_i \right\}$$

e si guarda la sua immagine.

*Esempio.* in  $\mathbb{K}^3$  consideriamo il *ssv*  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Questo *ssv* si può anche descrivere come  $\text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  e quindi il vettore generico sarà descritto da

$$v = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 + t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2$$

Il *ssp* corrispondente in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  (che è una retta proiettiva) è descritta di nuovo dall'equazione  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$  e si può rappresentare in forma parametrica

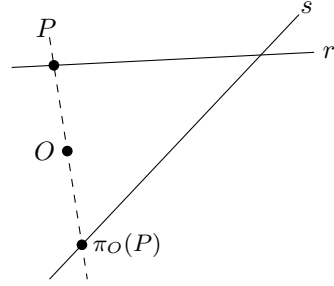
$$\{ [t_1, t_1 + t_2, t_2] \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\} \}.$$

## 1.5 Prospettività

**Def.** Sia  $\mathbb{P}(V)$  un piano proiettivo,  $r, s \subseteq \mathbb{P}(V)$  due rette distinte e  $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$  un punto esterno a entrambe.

Si definisce prospettività di centro  $O$  la seguente funzione

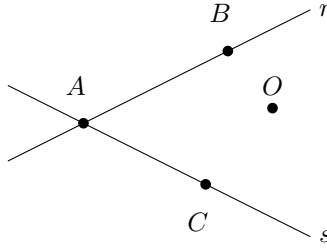
$$\begin{aligned}\pi_O : r &\longrightarrow s \\ P &\longmapsto L(O, P) \cap s.\end{aligned}$$



**Proposizione 6.**  $\pi_O$  è una trasformazione proiettiva (quindi un isomorfismo).

*Dimostrazione.* Facciamo vedere che  $\pi_O$  è indotta da un'applicazione lineare  $\varphi : V_r \rightarrow V_s$ , dove  $V_r, V_s \subseteq V$  sono i sottospazi vettoriali corrispondenti a  $r$  e  $s$ .

Fissiamo un riferimento proiettivo “comodo” di  $\mathbb{P}(V)$  in questo modo:



Dove  $A = r \cap s$ , scelgo  $B \in r$  arbitrario,  $C \in s$ ,  $C \neq A$ ,  $C \notin L(B, O)$ . Dunque ho  $\mathcal{R} = (A, B, C, O)$ . In coordinate omogenee, scrivo i miei punti come

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1], \quad O = [1, 1, 1]$$

Un'equazione della retta  $r$  è  $x_2 = 0$  (basta notare che sia  $A$  che  $B$  la soddisfano).

Analogamente, per  $s$  prendo  $x_1 = 0$ .

Quindi

$$\begin{aligned}r &= \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}, \\ s &= \{[x_0, 0, x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}.\end{aligned}$$

Scriviamo  $\pi_O$  in queste coordinate: dato  $P \in r$ ,  $P = [a, b, 0]$  con  $a, b$  non entrambi nulli; calcoliamo l'equazione della retta  $L(O, P)$  e intersechiamola con  $s$ , per determinare le coordinate di  $\pi_O(P)$ .

$$O = [1, 1, 1] \quad P = [a, b, 0]$$

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2] \in L(O, P) &\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2) \in \text{span}((a, b, 0), (1, 1, 1)) \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0\end{aligned}$$

Adesso mettiamo a sistema con  $s$ :

$$\begin{cases} x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo  $x_0b + x_2(a - b) = 0$  e prendiamo la soluzione proiettiva  $x_0 = a - b$ ,  $x_2 = -b$ . Quindi  $\pi_O(P) = [a - b, 0, -b]$ .

Ciò significa che, nelle coordinate omogenee di  $r$  e  $s$ ,  $\pi_O$  si scrive

$$[a, b] \mapsto [a - b, -b]$$

(perché le coordinate di  $r$  e  $s$  prendono in input due valori e li inseriscono nella definizione).

Osserviamo che l'applicazione lineare associata a  $\pi_O$  è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è invertibile. Quindi  $\pi_O$  è associata a un isomorfismo, ovvero è a sua volta un isomorfismo.  $\square$

*Osservazione.* Notiamo in particolare che  $\pi_O(A) = A$ , ovvero  $A$  rimane fisso.

**Teorema 5.** Se  $r$  e  $s$  sono due rette distinte in un piano  $\mathbb{P}(V)$  e  $f : r \rightarrow s$  è una trasformazione proiettiva, allora

$$f \text{ proiettività} \iff f(A) = A, \quad A = (r \cap s).$$

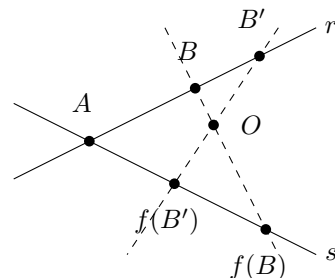
*Dimostrazione.* La freccia  $\Rightarrow$  la abbiamo appena vista.

Occupiamoci quindi di  $\Leftarrow$ . Cerchiamo di capire chi sia il centro  $O$  della proiettività.

Preso  $B \neq A \in r$ , il punto  $O$  deve stare per forza sulla retta  $L(B, f(B))$ .

Scegliendo un secondo punto  $B' \in r \setminus \{A, B\}$ ,  $O$  dovrà stare anche su  $L(B', f(B'))$  e, visto che le due rette sono distinte, l'intersezione (che è sicuramente non vuota: siamo nello spazio proiettivo) sarà per forza il centro che sto cercando.

Segue che  $f = \pi_O$ , applicando l'unicità garantita dal *Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive*, perché le due trasformazioni coincidono sul riferimento  $(A, B, B')$  di  $r$ .  $\square$



*Osservazione.*  $\pi_O$  è la restrizione a  $r$  di una funzione  $\pi_O : \mathbb{P}(V) \setminus \{O\} \rightarrow s$ , la proiezione da  $O$  a  $s$ , che prende un punto  $P$ , disegna la retta passante per  $P$  e  $O$  e la interseca con  $s$ .

Questa è quella che si chiama una trasformazione proiettiva **degenera**, perché la trasformazione lineare che la induce ha un kernel non banale. Vd. quaderno per una costruzione di  $\pi_0$  analoga a quella della dimostrazione, ma con il dominio esteso.

## 1.6 Carte affini e punti all'infinito

In  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , per ogni  $i = 0, \dots, n$  c'è un **iperpiano coordinato**, di equazione

$$H_i = \{x_i = 0\}.$$

Denotiamo con  $U_i$  il suo complementare:

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Considerato come spazio proiettivo,  $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ .

**Def.** Definisco l'i-esima carta affine

$$j_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow U_i$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1, \dots, \underset{\text{posto } i\text{-esimo}}{1}, \dots, y_n]$$

e inoltre

$$j_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

che è ben definita, perché se cambio rappresentante in  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , allora

$$\left( \frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda \hat{x}_i}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

**Proposizione 7.**  $j_i$  e  $j_i^{-1}$  sono una l'inversa dell'altra.

*Dimostrazione.*

□

$$\begin{aligned}
 j_i^{-1} \circ j_i(y_1, \dots, y_n) &= \\
 &= j_i^{-1}([y_1, \dots, 1, \dots, y_n]) = \\
 &= \left( \frac{y_1}{1}, \dots, \frac{1}{1}, \dots, \frac{y_n}{1} \right) = \\
 &= (y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 j_i \circ j_i^{-1}([x_0, \dots, x_n]) &= \\
 &= j_i \left( \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \right) = \\
 &= \left[ \frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] = \\
 &= [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n] \\
 &\quad \downarrow \text{moltiplico per } x_i
 \end{aligned}$$

Quindi  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$  può essere pensato come “ampliamento” di  $\mathbb{K}^n$ , in cui si aggiunge un  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$  “all’infinito”.

*Esempio.*

1.  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2.  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\text{punto}\}$

D’ora in avanti, a meno che non sia specificato altrimenti, useremo la *carta*  $j_0$  per identificare  $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K}^n$ .

L’iperpiano  $H_0$  viene chiamato iperpiano all’infinito e i suoi punti punti all’infinito (o **punti impropri**).

**Proposizione 8.**

1. Sia  $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  un sottospazio proiettivo, non contenuto in  $H_0$ , allora

$$j_0^{-1}(S \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$$

è un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$ , chiamato la parte affine di  $S$ . La sua dimensione affine coincide con la dimensione proiettiva di  $S$ .

2. Se  $Z \subseteq \mathbb{K}^n$  è un sottospazio affine non vuoto, allora c’è un unico sottospazio proiettivo  $\bar{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  (non contenuto in  $H_0$ ) la cui **parte affine** sia  $Z$ .  $\bar{Z}$  si chiama chiusura proiettiva di  $Z$ ; la sua dimensione proiettiva è uguale alla dimensione affine di  $Z$ .

Questo dà una bigezione (tramite  $j_0$ ) tra sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  non contenuti in  $H_0$  e sottospazi affini di  $\mathbb{K}^n \cong U_0$ .

*Dimostrazione.*

1. Sia  $k = \dim S$ . Scriviamo  $S$  come luogo delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango  $(n+1) - (k+1) = n-k$  (questo perché riporto  $S$  e  $\mathbb{P}(V)$  ai corrispondenti spazi vettoriali)

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Notiamo che  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  sta in  $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$  sse  $j_0(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n] \in U_0 \cap S$ , cioè sostituendo nel sistema (1), vale

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = -a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}y_1 + \dots + a_{n-k,n}y_n = -a_{n-k,0} \end{cases} \quad (2)$$

Quindi  $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$ : ho scritto un sistema lineare non omogeneo (per questo è affine, altrimenti sarebbe stato vettoriale), in  $n$  variabili.

Notiamo ora che la matrice dei coefficienti di (1) ha rango  $n - k$  (per ipotesi) e lo stesso è vero per la matrice completa del sistema (2) (ho semplicemente spostato la prima colonna alla fine, cambiando segno).

Inoltre, visto che (2) ha per ipotesi almeno una soluzione (poiché  $S \not\subseteq H_0$ , c'è almeno un elemento di  $S$  in  $U_0$  e quindi l'intersezione non è vuota), per *Rouché-Capelli* il rango della matrice dei coefficienti (cioè la matrice senza la colonna dei termini noti) del sistema (2) è pure  $n - k$ .

Questo implica che la dimensione del sottospazio affine descritto da (2) è proprio  $k$ .

2. Rovesciamo il procedimento visto nel punto precedente.

Partiamo da un  $Z \subseteq \mathbb{K}^n$  non vuoto, sottospazio affine di dimensione  $k$ ; esso sarà definito da un sistema lineare non omogeneo

$$Ay = b$$

con  $A$  matrice  $(n - k) \times n$  di rango  $n - k$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

Consideriamo adesso il sottospazio proiettivo  $\bar{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  definito dal sistema lineare omogeneo

$$(-b \mid A)x = 0$$

con la matrice  $(n - k) \times (n + 1)$  e  $x = (x_0, \dots, x_n)$ . In pratica stiamo facendo  $j_0(Z) : (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$ . Di nuovo, per *Rouché-Capelli*, la matrice ha rango  $n - k$ : la seconda equazione diventa

$$-b \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

soddisfatta perché  $(y_1, \dots, y_n) \in Z$ . Quindi la dimensione proiettiva di  $\bar{Z}$  è  $k$ . Inoltre, proprio per come lo abbiamo costruito, la parte affine di  $\bar{Z}$  è  $Z$ , infatti

$$j_0^{-1}(\bar{Z} \cap U_0) \underset{x_0 \neq 0}{=} j_0^{-1}(\bar{Z}) = j_0^{-1}(j_0(Z)) = Z.$$

Verifichiamo l'unicità: sia  $\bar{Z}' \neq \bar{Z}$  un altro sottospazio proiettivo la cui parte affine sia  $Z$ .

Osserviamo che  $\bar{Z} \cap \bar{Z}'$  è un sottospazio di entrambi, di dimensione  $< k$  (altrimenti coinciderebbero).

Calcoliamone la parte affine:

$$j_0^{-1}(U_0 \cap (\bar{Z} \cap \bar{Z}')) = j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}) \cap j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}') = Z \cap Z = Z$$

la cui dimensione è  $k$ ; questo, tuttavia, contraddice il fatto che la parte affine di  $\bar{Z} \cap \bar{Z}'$  dovesse avere dimensione uguale alla sua chiusura proiettiva (grazie al punto 1.), che ha dimensione  $< k$ .

□