

APPUNTI DI GEOMETRIA 2

FRIGERIO - SALPO - SZAMUELY

Ludovico Sergiacomi

a.a. 2025/2026

Indice

1	Spazi Proiettivi	3
1.1	Trasformazioni proiettive	3
1.2	Sottospazi proiettivi	5
1.3	Riferimenti proiettivi	7
1.4	Coordinate omogenee	10
1.5	Prospettività	12
1.6	Carte affini e punti all'infinito	13

1 Spazi Proiettivi

Def. Sia V spazio vettoriale su \mathbb{K} , allora si chiama spazio proiettivo su V

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v = \lambda w$.

Osservazione. La relazione \sim è di equivalenza e ci dice che $v \sim w$ se giacciono sulla stessa retta. Perciò, insiemisticamente, $\mathbb{P}(V) \cong \{\text{rette di } V\}$:

$$[v] \leftrightarrow \text{span}(v).$$

Def. Se $\dim V = n$, la dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è $n - 1$.

Esempi

1. $V = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset \quad \dim \mathbb{P}(V) = 0 - 1 = -1$.

Osservazione. Negli spazi proiettivi il vuoto è accettato.

2. $\dim V = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{*\}$ consiste di una sola classe di equivalenza: V è già una retta. Infatti $\dim \mathbb{P}(V) = 1 - 1 = 0$.

3. $V = \mathbb{K}^n \quad \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ si indica con $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

4. Chi è $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$? $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ cioè l'insieme delle rette di \mathbb{R}^2 .

L'insieme delle semirette (uscenti da O) è chiaramente parametrizzato da S^1 , cioè la circonferenza unitaria: a ogni semiretta s faccio corrispondere $s \cap S^1$, che è un punto.

Le rette sono parametrizzate da $[0, \pi)$, quindi $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è in bigezione con $[0, \pi)$. Però si va a perdere l'idea che, avvicinandosi a π , ci stiamo avvicinando anche a 0. Quindi è meglio pensarlo come $[0, \pi]$, con 0 identificato a π : partiamo dalla semicirconferenza e avviciniamo sempre di più 0 e π finché non coincidono.

1.1 Trasformazioni proiettive

Def. Una trasformazione proiettiva è una funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(W) \text{ tale che} \\ \exists \varphi : V &\longrightarrow W \text{ lineare t.c.} \\ f([v]) &= [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Osservazione. Su $\mathbb{P}(V)$ non sono definite operazioni, quindi abbiamo definito le *t.p.* come mappe indotte da funzioni lineari.

Ma ogni $\varphi : V \rightarrow W$ induce una trasformazione proiettiva?

Proposizione 1. Una mappa lineare $\varphi : V \rightarrow W$ induce una *t.p.* $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ se e solo se φ è iniettiva. In tal caso porremo $f = [\varphi]$.

Dimostrazione. Partiamo dalla freccia \Leftarrow

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$$

ottenendo tutti elementi diversi. Inoltre $v \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0 \Rightarrow [\varphi(v)]$ è ben definita. Noto che f è ben definita, cioè $v \sim v' \Rightarrow f([v]) = f([v'])$, il che segue dalla linearità di φ

$$v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda \varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v').$$

Viceversa (freccia \Rightarrow), se f è indotta da φ , necessariamente deve essere φ iniettiva, perché altrimenti, dato $v \in \text{Ker } \varphi \setminus \{0\}$ (e dato che f non è iniettiva, c'è almeno un $v \neq 0$ nel nucleo), si avrebbe $f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$, che è assurdo. \square

Corollario 1.1. *Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.*

Dimostrazione. Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è indotta da $\varphi : V \rightarrow W$, sapendo che φ è iniettiva, abbiamo

$$f([v]) = f([v']) \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')] \Rightarrow \varphi(v) = \lambda \varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') \Rightarrow v = \lambda v' \quad \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow [v] = [v'].$$

□

Proposizione 2.

1. $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva.
2. Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ sono trasformazioni proiettive, allora anche $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ è una trasformazione proiettiva.

Dimostrazione.

1. $\text{Id} : V \rightarrow V$ è lineare e induce $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$.
2. $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$, $\psi \circ \varphi : V \rightarrow Z$ è iniettiva e induce $g \circ f$.

$$\forall v \quad g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))].$$

□

Osservazione. Inoltre, se $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$, vale $g \circ f = [\psi \circ \varphi]$.

Proposizione 3. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ una t.p., allora sono fatti equivalenti:*

1. f è surgettiva
2. f è iniettiva
3. f è invertibile e f^{-1} è a sua volta t.p.
4. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$

Dimostrazione.

1. \Rightarrow 2. È ovvia: f è iniettiva di base, per cui si aggiunge la surgettività.

2. \Rightarrow 3. Già sappiamo che $\varphi : V \rightarrow W$ è iniettiva, facciamo vedere che è anche surgettiva:

sia $w \in W$, $w \neq 0$ (se $w = 0$, $w = \varphi(0)$);

$$f \text{ bigettiva} \Rightarrow \exists v \in V \text{ t.c. } [w] = f([v]) = [\varphi(v)] \Rightarrow w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \varphi \text{ surgettiva.}$$

Sappiamo da *G1* che $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ è anch'essa lineare. Quindi, presa $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, con $g = [\varphi^{-1}]$, vale

$$f \circ g = [\varphi \circ \varphi^{-1}] = [\text{Id}] = \text{Id} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Osservazione. Ci è servito dimostrare che φ è invertibile, così da poter indurre $g = [\varphi^{-1}]$.

3. \Rightarrow 4. Se $\varphi : V \rightarrow W$ è lineare e invertibile, allora $\dim V = \dim W \Rightarrow \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

4. \Rightarrow 1. $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ indotta da $\varphi : V \rightarrow W$, sapendo che φ è iniettiva e che $\dim V = \dim W$, ottengo φ surgettiva, da cui anche f surgettiva. Infatti

$$\forall w \in W \exists v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = w \Rightarrow \forall [w] \in \mathbb{P}(W) \exists [v] \in \mathbb{P}(V) \text{ t.c. } f([v]) = [w] \text{ ovvero } [\varphi(v)] = [w] \Rightarrow \varphi(v) = w$$

e questo è garantito da φ surgettiva.

□

Def. Se f soddisfa una delle condizioni della proposizione, f si dice isomorfismo.

Def. Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$ ogni t.p. $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è un isomorfismo e si dice proiettività.

L'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è un gruppo, che si denota con $\mathbb{PGL}(V)$ (per ragioni che saranno chiare più avanti).

Proposizione 4. Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, $f = [\varphi]$. Allora i punti fissi di f sono in biezione con le rette di autovettori di φ .

Dimostrazione.

$$\underbrace{f([v]) = [v]}_{[v] \text{ punto fisso di } f} \Leftrightarrow [\varphi(v)] = [v] \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(v) = \lambda(v)}_{v \text{ autovettore di } \varphi}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

□

Corollario 4.1.

1. Se \mathbb{K} è algebricamente chiuso e $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$, ogni proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ ha almeno un punto fisso.
2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathbb{P}(V)$ è pari, allora ogni proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ ha almeno un punto fisso.

Dimostrazione.

1. Ogni endomorfismo ha almeno un punto fisso (ovviamente se $\dim V > 0$).
2. $\dim \mathbb{P}(V)$ pari $\Rightarrow \dim V$ dispari \Rightarrow il polinomio caratteristico ha almeno uno zero in \mathbb{R} . Quindi c'è un autovalore (con corrispondente autovettore) in \mathbb{R} .

□

1.2 Sottospazi proiettivi

Def. $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ si dice sottospazio proiettivo se $\exists W \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. se, detta

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

la proiezione,

$$S = \pi(W \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(W).$$

Osservazione. Esiste una biezione tra i *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ e i *ssv* di V .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & \pi^{-1}(S) \cup \{0\} \\ \mathbb{P}(W) & \xleftarrow{\beta} & W \end{array}$$

E si verifica che α e β sono inverse una dell'altra.

Def. Se S è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, W è *ssv* di V , con $S = \mathbb{P}(W)$, allora $\dim S = \dim W - 1$.

Fatti

1. $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, $i \in I$, allora si verifica facilmente che

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

In particolare, l'intersezione di *ssp* è a sua volta un *ssp*. Infatti (pensando le classi di S_i come *span*) in un caso sto considerando gli *span* comuni a tutti i sottospazi proiettivi, nell'altro prendo i vettori comuni a tutti i sottospazi vettoriali e faccio lo *span*:

$$\{[v] \mid [v] \in S_i \ \forall i\} = \{[v] \mid v \in W_i \ \forall i\}$$

2. Come nel caso vettoriale, l'unione di *ssp* non è *ssp*. Allora, dati S_1 e S_2 vorrei definire una somma, in modo che $S_1 + S_2$ sia *ssp*.

3. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi tali che $S_1 \subseteq S_2$, allora $\dim S_1 \leq \dim S_2$ e in particolare $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$. Discende dall'analogia proprietà vettoriale.

Def. Sia $K \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme. Allora si dice $\text{il ssp generato da } K$ il più piccolo ssp di $\mathbb{P}(V)$ che contiene K . Si scrive $L(K)$. È ben definito per il fatto 1, infatti

$$L(K) = \bigcap_{S \supseteq K} S$$

con S sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Def. Siano S_1, S_2 ssp di $\mathbb{P}(V)$, allora $L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)$.

Lemma 1. $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

dove ricordiamo che $W_1 + W_2$ è il più piccolo ssv che contiene W_1 e W_2 .

Dimostrazione. Doppio contenimento

- $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_1 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

$$W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Quindi $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e, per definizione di L , vale $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$.

- $L(S_1, S_2) \supseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

Sia W il sottospazio t.c. $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W)$, allora

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$

$$S_2 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_2 \subseteq W$$

Quindi $W_1 + W_2 \subseteq W \Rightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2)$.

□

Teorema 1 (Grassmann). Siano S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Dimostrazione. Scriviamo $S_i = \mathbb{P}(W_i)$, allora per il Lemma, vale $\dim L(S_1, S_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1$. Quindi, sfruttando Grassmann vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) - 1 &= \dim W_1 + W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) = \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

□

Corollario 1.1. $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0$$

□

Osservazione. Due rette in un piano proiettivo si intersecano sempre. Le rette parallele si incontrano all'infinito.

Corollario 1.2. Siano P, Q punti distinti di $\mathbb{P}(V)$, allora $L(P, Q)$ è una retta ed è l'unica retta che li contiene.

Dimostrazione. $P \neq Q \Rightarrow \dim L(P, Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 0 + 0 - (-1) = 1$ cioè è una retta.

Sia ora r una retta che contiene P e Q ; per definizione $L(P, Q) \subseteq r$ da cui, visto che hanno la stessa dimensione, coincidono. \square

Osservazione. In generale si vede che, se S è *ssp* e $P \notin S$, vale $\dim L(S, P) = \dim S + 1$ ed è l'unico *ssp* che contiene sia S che P .

1.3 Riferimenti proiettivi

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, allora $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ si dicono indipendenti se, presi $v_i \in V$ t.c. $P_i = [v_i] \forall i$, si ha che i v_i sono linearmente indipendenti.

Osservazione. La definizione è ben posta: scegliendo altri rappresentanti dei P_i , tali che $[v'_i] = [v_i]$ allora $\exists \lambda_i \neq 0$ t.c. $v'_i = \lambda v_i \Rightarrow v_i$ indipendenti $\Leftrightarrow v'_i$ indipendenti.

Osservazione. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono indipendenti sse $\dim L(\{P_1, \dots, P_k\}) = k - 1$. In particolare detta $n = \dim \mathbb{P}(V)$ (da cui si ha $\dim V = n + 1$), allora P_1, \dots, P_k indipendenti $\Rightarrow k \leq n + 1$. L'idea è quella di usare i vettori, sfruttando le loro proprietà, per poi riportarle nello spazio proiettivo.

Def. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale sse qualsiasi sottoinsieme di h punti, con $h \leq n + 1$, è indipendente.

Osservazione. Cioè se $k \leq n + 1$, allora i punti sono indipendenti. Se $k \geq n + 2$, invece, equivale a dire che qualsiasi $(n + 1)$ -upla dei P_i è indipendente.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ P_1, \dots, P_k in posizione generale se sono a due a due distinti: nello spazio proiettivo, su una retta, i punti sono indipendenti se sono diversi (perché corrispondono a classi di vettori indipendenti: i vettori di una retta in V vanno a finire nello stesso punto di $\mathbb{P}(V)$).
2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ sono indipendenti se sono a tre a tre non allineati (cioè il terzo vettore non giace sul piano generato dai primi due, nello spazio vettoriale).

Osservazione. In entrambi i casi, se il campo di base è infinito, per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, si trovano P_1, \dots, P_k in posizione generale.

Def. Un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, detta n la dimensione dello spazio proiettivo, è una $(n + 2)$ -upla

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$$

di punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale.

Osservazione. Usiamo le parentesi tonde, perché è importante l'ordine in cui considero i punti.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ distinti.
2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ tre a tre non allineati.

Def. Sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora si dice base normalizzata di V associata a \mathcal{R} una base

$$(v_0, \dots, v_{n+1}) \text{ t.c. } [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \text{e} \quad P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$$

Osservazione. Con la seconda condizione sto limitando quanto si possano scalare i v_i : o li scalo tutti per lo stesso λ o niente. Lo vediamo meglio più avanti.

Terminologia.

- I punti P_0, \dots, P_n si chiamano **punti fondamentali**.
- P_{n+1} si chiama **punto unità**, perché scritto in coordinate (rispetto alla base normalizzata) è $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 2. Sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Allora

1. Esiste una base normalizzata (v_1, \dots, v_n) di V rispetto a \mathcal{R} .
2. Se (v'_1, \dots, v'_n) è un'altra base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} , allora

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v'_i = \lambda v_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Dimostrazione.

1. Partiamo dal riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ e scegliamo $v_i \in V$ tali che $[v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n$. Quindi (v_0, \dots, v_n) è una base di V , visto che i punti di \mathcal{R} sono indipendenti (quindi per definizione di riferimento - posizione generale - indipendenza).

Scegliamo anche $v_{n+1} \in V$ t.c. $[v_{n+1}] = P_{n+1}$. Scriviamo allora

$$v_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad v_i \in \text{base}$$

in modo unico.

Adesso ci interessa che il punto unità sia effettivamente tale: se tutti gli a_i fossero uguali a 1, avremmo finito... però non è detto che sia così. Quindi consideriamo, $a_i v_i$, al posto dei semplici v_i , come rappresentanti dei P_i . Se però un qualche $a_j = 0$? Dimostriamo che non è possibile: se, per assurdo, si avesse $a_j = 0$, allora l'equazione di prima ci darebbe una relazione di indipendenza

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_j \hat{v}_j + \dots - v_{n+1} \quad a_i \neq 0,$$

ma sappiamo che v_{n+1} è dipendente dagli altri \rightarrow assurdo.

Quindi possiamo fare quanto segue, con tranquillità: poniamo

$$v'_i = a_i v_i \quad a_i \neq 0 \quad \forall i \Rightarrow (v'_0, \dots, v'_n) \text{ è base di } V \text{ e } [v'_i] = [a_i v_i] = [v_i] = P_i$$

e inoltre, per costruzione,

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [a_0 v_0 + \dots + a_n v_n] = [v'_0 + \dots + v'_n].$$

2. Sia ora (v''_1, \dots, v''_n) un'altra base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} . Sappiamo che

$$[v''_i] = P_i = [v'_i]$$

quindi, per come sono definite le classi,

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v''_i = \lambda_i v'_i.$$

Però potrebbero essere tutti λ_i diversi... Allora osserviamo che

$$P_{n+1} = [v'_0 + \dots + v'_n] = [v''_0 + \dots + v''_n] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^n v''_i = \lambda \sum_{i=0}^n v'_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n \lambda_i v'_i = \sum_{i=0}^n \lambda v'_i$$

e, poiché i v_i sono base di V , i coefficienti devono essere gli stessi (per l'unicità della scomposizione nello spazio vettoriale).

□

Osservazione. Quindi la base normalizzata è unica, a meno di riscalare tutti i vettori per uno stesso fattore.

Teorema 3. Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive e $\varphi, \psi : V \rightarrow W$ applicazioni lineari tali che $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$. Sia \mathcal{R} riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora TFAE:

1. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \varphi = \lambda\psi \text{ come applicazioni lineari.}$
2. $f = g.$
3. $f(P) = g(P) \forall P \in \mathcal{R}.$

Dimostrazione.

1. \Rightarrow 2. $\varphi = \lambda\psi$ allora per qualsiasi P di $\mathbb{P}(V)$, scelto v t.c. $[v] = P$, vale

$$f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P).$$

2. \Rightarrow 3. È ovvia: $f = g \Rightarrow f|_{\mathcal{R}} = g|_{\mathcal{R}}.$

3. \Rightarrow 1. Sia (v_0, \dots, v_n) una base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ allora vale

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \Rightarrow \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \text{ per qualche } \lambda_i \in \mathbb{K}^*;$$

inoltre

$$\begin{aligned} [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] &= f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \dots + v_n)] \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \lambda \psi(v_0 + \dots + v_n) \\ &\Rightarrow \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \lambda \psi(v_0) + \dots + \lambda \psi(v_n). \end{aligned}$$

Dato che ψ è iniettiva, i vari $\psi(v_i)$ sono indipendenti (lo “ereditano” dalle controimmagini) e quindi $\lambda_i = \lambda \forall i$. Quindi, dato che $\varphi = \lambda\psi$ per tutti i vettori della base, vale anche per la funzione in generale. \square

Osservazione. Un po’ l’analogo di quello che succede con le basi vettoriali. Inoltre non è detto che gli $\psi(v_i)$ siano base di W , per la dimostrazione mi basta l’indipendenza.

Corollario 3.1. Sia $\mathbb{PGL}(V)$ il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ allora vale

$$\mathbb{PGL}(V) \cong GL(V)/N$$

dove $N \triangleleft GL(V)$ è il sottogruppo delle matrici scalari: $N = \{\lambda \cdot \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$

Dimostrazione. Consideriamo la mappa naturale

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow \mathbb{PGL}(V) \\ \varphi &\longmapsto [\varphi] \end{aligned}$$

- È omomorfismo: $[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\psi].$
- È surgettivo per definizione di trasformazione proiettiva.
- Il Ker è proprio N per il Teorema appena visto:

$$\begin{aligned} \text{Id}_V &\longmapsto \text{Id}_{\mathbb{P}(V)} \\ \lambda \text{Id}_V &\longmapsto \text{Id}_{\mathbb{P}(V)} \end{aligned}$$

\square

Notazione. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ (e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), il gruppo delle proiettività $\mathbb{PGL}(\mathbb{K}^{n+1})$ si indica con $\mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ perché $n+1$ indica la taglia delle matrici che rappresentano le trasformazioni.

Teorema 4 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive). *Siano $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi, con $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$ e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti proiettivi, rispettivamente di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$. Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ che manda (ordinatamente) \mathcal{R} in \mathcal{R}' .*

Dimostrazione. L'unicità segue dal Teorema precedente: se ci fossero due trasformazioni che mandano \mathcal{R} in \mathcal{R}' , allora sarebbero uguali.

Dimostriamo ora l'esistenza. Fissiamo due basi normalizzate:

$$(v_0, \dots, v_n) \text{ di } V \quad (w_0, \dots, w_n) \text{ di } W,$$

sappiamo da G1 che $\exists! \varphi : V \rightarrow W$ t.c. $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i = 0, \dots, n$. Prendiamo allora la trasformazione $f = [\varphi] : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ indotta da φ e verifichiamo che soddisfa le richieste.

Scriviamo i due riferimenti come

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1}) \quad \mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$$

e concludiamo

$$\begin{aligned} f(P_i) &= [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ f(P_{n+1}) &= [\varphi(v_1 + \dots + v_n)] = [\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_n)] = [w_1 + \dots + w_n] = Q_{n+1}. \end{aligned}$$

□

1.4 Coordinate omogenee

Caso “tautologico” Come l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale V di dimensione n e \mathbb{K}^n induce un sistema di coordinate, così possiamo fare in $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Si dice che il punto $[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ (anche scritto $[x_0 : \dots : x_n]$), rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ - ovvero quello indotto dalla base standard di \mathbb{K}^{n+1} : i vari P_i con $0 \leq i \leq n$ hanno tutte coordinate nulle, tranne l' i -esima, che è 1; come si può immaginare, P_{n+1} ha tutte le coordinate uguali a 1.

Osservazione. Le coordinate omogenee non sono uniche, ma lo sono a meno di *riscaldamento simultaneo*.

Osservazione. La scrittura $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ non ha senso.

Caso generale Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Fissato un riferimento $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$, esso induce su $\mathbb{P}(V)$ le coordinate omogenee nel modo seguente:

Dal Teorema fondamentale sappiamo che $\exists!$ trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che manda il riferimento \mathcal{R} nel riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Le coordinate omogenee di P in $\mathbb{P}(V)$ sono la sua immagine tramite f , ovvero $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Equivalentemente, data (v_0, \dots, v_n) base normalizzata rispetto a \mathcal{R} , dato $P \in \mathbb{P}(V)$, si sceglie un $v \in V$ t.c. $[v] = P$ e si scrive $v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$ ($v \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$).

Allora le coordinate di $P \in \mathbb{P}(V)$ sono date da $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Il punto è che la t.p. del punto 1. è indotta dall'isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ v_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

Osservazione. Nel vettoriale, fissare una base di V equivale ad un isomorfismo lineare con \mathbb{K}^{n+1} .

Osservazione. Usando le *coordinate omogenee* si possono rappresentare le t.p. e i s.s.p. tramite matrici ed equazioni.

Trasformazioni proiettive

$f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è t.p. e $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sono i riferimenti in partenza e in arrivo, fissiamo B, B' basi normalizzate corrispondenti.

Se $\varphi : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare t.c. $[\varphi] = f$, M è la matrice associata, si dice che M rappresenta anche f , nel senso che

$$\begin{aligned} [f(P)]_{\mathcal{R}'} &= M[P]_{\mathcal{R}} \quad \text{scritto male} \\ &= [M([v]_B)] \end{aligned}$$

Proposizione 5. *La matrice che rappresenta f non è unica, ma lo è a meno di riscalamento.*

Osservazione. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, $m = \dim \mathbb{P}(W)$, la matrice ha taglia $(m+1)(n+1)$.

Sottospazi proiettivi

Ho due modi per descriverli: equazioni e immagine di una mappa (cioè come *span* di una base).

1. Rappresentazione cartesiana

Se $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è sottospazio proiettivo, per definizione ho $S = \mathbb{P}(W)$, dove $W \subseteq V$ è sottospazio vettoriale. Chiamiamo $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $k = \dim \mathbb{P}(W) = S$.

Fissato \mathcal{R} di $\mathbb{P}(V)$ e B base normalizzata, W può essere descritto come luogo delle soluzioni di un sistema lineare, di $(n+1) - (k+1) = n-k$ equazioni lineari omogenee, nelle coordinate indotte da B .

$$\{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\} = W.$$

Queste stesse equazioni descrivono $S \subseteq \mathbb{P}(V)$, infatti

$$P \in S \Leftrightarrow f_1(P) = \dots = f_{n-k}(P) = 0.$$

Osservazione. Le f sono polinomi lineari omogenei, in $n+1$ variabili x_0, \dots, x_n , la scrittura $f_i(P)$ non ha senso: dipende dal rappresentante vettoriale di P ; tuttavia la condizione $f(P) = 0$ è ben definita.

Esempio. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, scegliamo $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 + 3x_1 + x_2$

$$f([1, 1, 1]) \text{ non ha senso, infatti}$$

$$f(1, 1, 1) = 5$$

$$f(-1, -1, -1) = -5$$

e invece dovrebbero essere uguali, visto che $[1, 1, 1] = [-1, -1, -1]$.

La condizione $f([a_0, a_1, a_2]) = 0$ però va bene, perché

$$f[\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2] = \lambda f(a_0, a_1, a_2).$$

2. Rappresentazione parametrica

$S \subseteq \mathbb{P}(V)$ come immagine di trasformazioni proiettive in $\mathbb{P}(V)$ (immagine di *span* di vettori in V).

Fissato \mathcal{R} riferimento e B base normalizzante, $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. $S = \mathbb{P}(W)$, si scrive W in termini di generatori:

$$w_1, \dots, w_k \rightarrow W = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i w_i \right\}$$

e si guarda la sua immagine.

Esempio. in \mathbb{K}^3 consideriamo il *ssv* $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Questo *ssv* si può anche descrivere come $\text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ e quindi il vettore generico sarà descritto da

$$v = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 + t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2$$

Il *ssp* corrispondente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (che è una retta proiettiva) è descritta di nuovo dall'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e si può rappresentare in forma parametrica

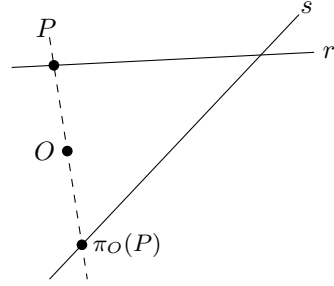
$$\{ [t_1, t_1 + t_2, t_2] \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\} \}.$$

1.5 Prospettività

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo, $r, s \subseteq \mathbb{P}(V)$ due rette distinte e $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$ un punto esterno a entrambe.

Si definisce prospettività di centro O la seguente funzione

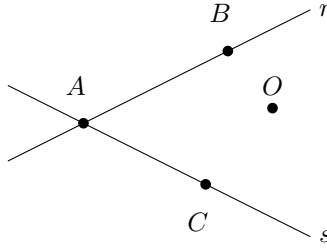
$$\begin{aligned}\pi_O : r &\longrightarrow s \\ P &\longmapsto L(O, P) \cap s.\end{aligned}$$



Proposizione 6. π_O è una trasformazione proiettiva (quindi un isomorfismo).

Dimostrazione. Facciamo vedere che π_O è indotta da un'applicazione lineare $\varphi : V_r \rightarrow V_s$, dove $V_r, V_s \subseteq V$ sono i sottospazi vettoriali corrispondenti a r e s .

Fissiamo un riferimento proiettivo “comodo” di $\mathbb{P}(V)$ in questo modo:



Dove $A = r \cap s$, scelgo $B \in r$ arbitrario, $C \in s$, $C \neq A$, $C \notin L(B, O)$. Dunque ho $\mathcal{R} = (A, B, C, O)$. In coordinate omogenee, scrivo i miei punti come

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1], \quad O = [1, 1, 1]$$

Un'equazione della retta r è $x_2 = 0$ (basta notare che sia A che B la soddisfano).

Analogamente, per s prendo $x_1 = 0$.

Quindi

$$\begin{aligned}r &= \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}, \\ s &= \{[x_0, 0, x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}.\end{aligned}$$

Scriviamo π_O in queste coordinate: dato $P \in r$, $P = [a, b, 0]$ con a, b non entrambi nulli; calcoliamo l'equazione della retta $L(O, P)$ e intersechiamola con s , per determinare le coordinate di $\pi_O(P)$.

$$O = [1, 1, 1] \quad P = [a, b, 0]$$

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2] \in L(O, P) &\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2) \in \text{span}((a, b, 0), (1, 1, 1)) \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0\end{aligned}$$

Adesso mettiamo a sistema con s :

$$\begin{cases} x_0 b - x_1 a + x_2(a - b) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $x_0b + x_2(a - b) = 0$ e prendiamo la soluzione proiettiva $x_0 = a - b$, $x_2 = -b$. Quindi $\pi_O(P) = [a - b, 0, -b]$.

Ciò significa che, nelle coordinate omogenee di r e s , π_O si scrive

$$[a, b] \mapsto [a - b, -b]$$

(perché le coordinate di r e s prendono in input due valori e li inseriscono nella definizione).

Osserviamo che l'applicazione lineare associata a π_O è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è invertibile. Quindi π_O è associata a un isomorfismo, ovvero è a sua volta un isomorfismo. \square

Osservazione. Notiamo in particolare che $\pi_O(A) = A$, ovvero A rimane fisso.

Teorema 5. Se r e s sono due rette distinte in un piano $\mathbb{P}(V)$ e $f : r \rightarrow s$ è una trasformazione proiettiva, allora

$$f \text{ proiettività} \iff f(A) = A, \quad A = (r \cap s).$$

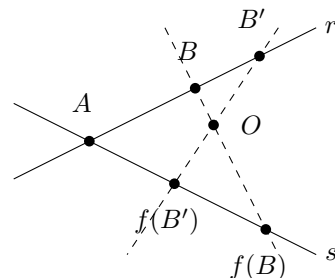
Dimostrazione. La freccia \Rightarrow la abbiamo appena vista.

Occupiamoci quindi di \Leftarrow . Cerchiamo di capire chi sia il centro O della proiettività.

Preso $B \neq A \in r$, il punto O deve stare per forza sulla retta $L(B, f(B))$.

Scegliendo un secondo punto $B' \in r \setminus \{A, B\}$, O dovrà stare anche su $L(B', f(B'))$ e, visto che le due rette sono distinte, l'intersezione (che è sicuramente non vuota: siamo nello spazio proiettivo) sarà per forza il centro che sto cercando.

Segue che $f = \pi_O$, applicando l'unicità garantita dal *Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive*, perché le due trasformazioni coincidono sul riferimento (A, B, B') di r . \square



Osservazione. π_O è la restrizione a r di una funzione $\pi_O : \mathbb{P}(V) \setminus \{O\} \rightarrow s$, la proiezione da O a s , che prende un punto P , disegna la retta passante per P e O e la interseca con s .

Questa è quella che si chiama una trasformazione proiettiva **degenera**, perché la trasformazione lineare che la induce ha un kernel non banale. Vd. quaderno per una costruzione di π_0 analoga a quella della dimostrazione, ma con il dominio esteso.

1.6 Carte affini e punti all'infinito

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, per ogni $i = 0, \dots, n$ c'è un **iperpiano coordinato**, di equazione

$$H_i = \{x_i = 0\}.$$

Denotiamo con U_i il suo complementare:

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Considerato come spazio proiettivo, $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

Def. Definisco l'i-esima carta affine

$$j_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow U_i$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1, \dots, \underset{\text{posto } i\text{-esimo}}{\downarrow} 1, \dots, y_n]$$

e inoltre

$$j_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

che è ben definita, perché se cambio rappresentante in $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, allora

$$\left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda \hat{x}_i}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Proposizione 7. j_i e j_i^{-1} sono una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione.

□

$$\begin{aligned}
 j_i^{-1} \circ j_i(y_1, \dots, y_n) &= \\
 &= j_i^{-1}([y_1, \dots, 1, \dots, y_n]) = \\
 &= \left(\frac{y_1}{1}, \dots, \frac{1}{1}, \dots, \frac{y_n}{1} \right) = \\
 &= (y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 j_i \circ j_i^{-1}([x_0, \dots, x_n]) &= \\
 &= j_i \left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \right) = \\
 &= \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] = \\
 &= [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n] \\
 &\quad \downarrow \text{moltiplico per } x_i
 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ può essere pensato come “ampliamento” di \mathbb{K}^n , in cui si aggiunge un $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ “all’infinito”.

Esempio.

1. $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\text{punto}\}$

D’ora in avanti, a meno che non sia specificato altrimenti, useremo la *carta* j_0 per identificare $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con \mathbb{K}^n .

L’iperpiano H_0 viene chiamato iperpiano all’infinito e i suoi punti punti all’infinito (o **punti impropri**).

Proposizione 8.

1. Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottospazio proiettivo, non contenuto in H_0 , allora

$$j_0^{-1}(S \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$$

è un sottospazio affine di \mathbb{K}^n , chiamato la parte affine di S . La sua dimensione affine coincide con la dimensione proiettiva di S .

2. Se $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine non vuoto, allora c’è un unico sottospazio proiettivo $\bar{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (non contenuto in H_0) la cui **parte affine** sia Z . \bar{Z} si chiama chiusura proiettiva di Z ; la sua dimensione proiettiva è uguale alla dimensione affine di Z .

Questo dà una bigezione (tramite j_0) tra sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non contenuti in H_0 e sottospazi affini di $\mathbb{K}^n \cong U_0$.

Dimostrazione.

1. Sia $k = \dim S$. Scriviamo S come luogo delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango $(n+1) - (k+1) = n-k$ (questo perché riporto S e $\mathbb{P}(V)$ ai corrispondenti spazi vettoriali)

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Notiamo che $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ sta in $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ sse $j_0(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n] \in U_0 \cap S$, cioè sostituendo nel sistema (1), vale

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = -a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}y_1 + \dots + a_{n-k,n}y_n = -a_{n-k,0} \end{cases} \quad (2)$$

Quindi $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ è un sottospazio affine di \mathbb{K}^n : ho scritto un sistema lineare non omogeneo (per questo è affine, altrimenti sarebbe stato vettoriale), in n variabili.

Notiamo ora che la matrice dei coefficienti di (1) ha rango $n - k$ (per ipotesi) e lo stesso è vero per la matrice completa del sistema (2) (ho semplicemente spostato la prima colonna alla fine, cambiando segno).

Inoltre, visto che (2) ha per ipotesi almeno una soluzione (poiché $S \not\subseteq H_0$, c'è almeno un elemento di S in U_0 e quindi l'intersezione non è vuota), per *Rouché-Capelli* il rango della matrice dei coefficienti (cioè la matrice senza la colonna dei termini noti) del sistema (2) è pure $n - k$.

Questo implica che la dimensione del sottospazio affine descritto da (2) è proprio k .

2. Rovesciamo il procedimento visto nel punto precedente.

Partiamo da un $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ non vuoto, sottospazio affine di dimensione k ; esso sarà definito da un sistema lineare non omogeneo

$$Ay = b$$

con A matrice $(n - k) \times n$ di rango $n - k$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Consideriamo adesso il sottospazio proiettivo $\bar{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definito dal sistema lineare omogeneo

$$(-b \mid A)x = 0$$

con la matrice $(n - k) \times (n + 1)$ e $x = (x_0, \dots, x_n)$. In pratica stiamo facendo $j_0(Z) : (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$. Di nuovo, per *Rouché-Capelli*, la matrice ha rango $n - k$: la seconda equazione diventa

$$-b \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

soddisfatta perché $(y_1, \dots, y_n) \in Z$. Quindi la dimensione proiettiva di \bar{Z} è k . Inoltre, proprio per come lo abbiamo costruito, la parte affine di \bar{Z} è Z , infatti

$$j_0^{-1}(\bar{Z} \cap U_0) \underset{x_0 \neq 0}{=} j_0^{-1}(\bar{Z}) = j_0^{-1}(j_0(Z)) = Z.$$

Verifichiamo l'unicità: sia $\bar{Z}' \neq \bar{Z}$ un altro sottospazio proiettivo la cui parte affine sia Z .

Osserviamo che $\bar{Z} \cap \bar{Z}'$ è un sottospazio di entrambi, di dimensione $< k$ (altrimenti coinciderebbero).

Calcoliamone la parte affine:

$$j_0^{-1}(U_0 \cap (\bar{Z} \cap \bar{Z}')) = j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}) \cap j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}') = Z \cap Z = Z$$

la cui dimensione è k ; questo, tuttavia, contraddice il fatto che la parte affine di $\bar{Z} \cap \bar{Z}'$ dovesse avere dimensione uguale alla sua chiusura proiettiva (grazie al punto 1.), che ha dimensione $< k$.

□