Appunti di Geometria 2

Frigerio - Salpo - Szamuely

Ludovico Sergiacomi

a.a. 2025/2026

Indice

1 Spazi Proiettivi

Def. Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora si chiama $\boxed{\text{spazio proiettivo}}$ su V

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $v = \lambda w$.

Osservazione. La relazione $\sim$ è di equivalenza e ci dice che $v \sim w$ se giacciono sulla stessa retta. Perciò, insiemisticamente, $\mathbb{P}(V) \cong \{\text{rette di } V\}$:

$$[v] \leftrightarrow \operatorname{span}(v).$$

Def. Se $\dim V = n$, la $\boxed{\text{dimensione}}$ di $\mathbb{P}(V)$ è $n-1$.

Esempi

1. $V = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset \qquad \dim\mathbb{P}(V) = 0 - 1 = -1.$

   Osservazione. Negli spazi proiettivi il vuoto è accettato.

2. $\dim V = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{*\}$ consiste di una sola classe di equivalenza: V è già una retta. Infatti $\dim\mathbb{P}(V) = 1 - 1 = 0$.

3. $V = \mathbb{K}^n \qquad \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ si indica con $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

4. Chi è $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$? $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ cioè l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$.
   L'insieme delle semirette (uscenti da O) è chiaramente parametrizzato da S^1, cioè la circonferenza unitaria: a ogni semiretta s faccio corrispondere $s \cap S^1$, che è un punto.
   Le rette sono parametrizzate da $[0, \pi)$, quindi $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è in bigezione con $[0, \pi)$. Però si va a perdere l'idea che, avvicinandosi a π, ci stiamo avvicinando anche a 0. Quindi è meglio pensarlo come $[0, \pi]$, con 0 identificato a π: partiamo dalla semicirconferenza e avviciniamo sempre di più 0 e π finché non coincidono.

1.1 Trasformazioni proiettive

Def. Una $\boxed{\text{trasformazione proiettiva}}$ è una funzione

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W) \text{ tale che} \\
&\exists\ \varphi : V \longrightarrow W \text{ lineare t.c.} \\
&f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

Osservazione. Su $\mathbb{P}(V)$ non sono definite operazioni, quindi abbiamo definito le *t.p.* come mappe indotte da funzioni lineari.

Ma ogni $\varphi : V \to W$ induce una trasformazione proiettiva?

Proposizione 1. *Una mappa lineare $\varphi : V \to W$ induce una t.p. $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ se e solo se φ è iniettiva. In tal caso porremo $f = [\varphi]$.*

Dimostrazione. Partiamo dalla freccia $\Leftarrow$

$$f([v]) = [\varphi(v)]\ \forall v \in V \setminus \{0\}$$

ottenendo tutti elementi diversi. Inoltre $v \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0 \Rightarrow [\varphi(v)]$ è ben definita. Noto che f è ben definita, cioè $v \sim v' \Rightarrow f([v]) = f([v'])$, il che segue dalla linearità di φ

$$v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda\varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v').$$

Viceversa (freccia $\Rightarrow$), se f è indotta da φ, necessariamente deve essere φ iniettiva, perché altrimenti, dato $v \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$ (e dato che f non è iniettiva, c'è almeno un $v \neq 0$ nel nucleo), si avrebbe $f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$, che è assurdo. $\square$

Corollario 1.1. *Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.*

Dimostrazione. Se $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è indotta da $\varphi : V \to W$, sapendo che φ è iniettiva, abbiamo

$$f([v]) = f([v']) \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')] \Rightarrow \varphi(v) = \lambda\varphi(v') \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') \Rightarrow v = \lambda v' \;\; \lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow [v] = [v'].$$

□

Proposizione 2.

1. $\mathrm{Id} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *è una trasformazione proiettiva.*
2. *Se* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *e* $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ *sono trasformazioni proiettive, allora anche* $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ *è una trasformazione proiettiva.*

Dimostrazione.

1. $\mathrm{Id} : V \to V$ è lineare e induce $\mathrm{Id} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.
2. $f = [\varphi],\ g = [\psi], \quad \psi \circ \varphi : V \to Z$ è iniettiva e induce $g \circ f$.

$$\forall v \; g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))].$$

□

Osservazione. Inoltre, se $f = [\varphi],\ g = [\psi]$, vale $g \circ f = [\psi \circ \varphi]$.

Proposizione 3. *Sia* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *una t.p., allora sono fatti equivalenti:*

1. f *è surgettiva*
2. f *è iniettiva*
3. f *è invertibile e* f^{-1} *è a sua volta t.p.*
4. $\dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W)$

Dimostrazione.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ È ovvia: f è iniettiva di base, per cui si aggiunge la surgettività.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Già sappiamo che $\varphi : V \to W$ è iniettiva, facciamo vedere che è anche surgettiva:

sia $w \in W,\ w \neq 0$ (se $w = 0,\ w = \varphi(0)$);

$$f \text{ bigettiva} \Rightarrow \exists v \in V \text{ t.c. } [w] = f([v]) = [\varphi(v)] \Rightarrow w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \varphi \text{ surgettiva.}$$

Sappiamo da *G1* che $\varphi^{-1} : W \to V$ è anch'essa lineare. Quindi, presa $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$, con $g = [\varphi^{-1}$, vale

$$f \circ g = [\varphi \circ \varphi^{-1}] = [\mathrm{Id}] = \mathrm{Id} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Osservazione. Ci è servito dimostrare che φ è invertibile, così da poter indurre $g = [\varphi^{-1}]$.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Se $\varphi : V \to W$ è lineare e invertibile, allora $\dim V = \dim W \Rightarrow \dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W)$.

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ indotta da $\varphi : V \to W$, sapendo che φ è iniettiva e che $\dim V = \dim W$, ottengo φ surgettiva, da cui anche f surgettiva. Infatti

$$\forall w \in W \; \exists v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = w \Rightarrow \forall [w] \in \mathbb{P}(W) \; \exists [v] \in \mathbb{P}(V) \text{ t.c. } f([v]) = [w] \text{ ovvero } [\varphi(v)] = [w] \Rightarrow \varphi(v) = w$$

e questo è garantito da φ surgettiva. □

Def. Se f soddisfa una delle condizioni della proposizione, f si dice $\boxed{\text{isomorfismo}}$.

Def. Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$ ogni *t.p.* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è un isomorfismo e si dice $\boxed{\text{proiettività}}$.
L'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è un gruppo, che si denota con $\mathbb{P}\mathcal{GL}(V)$ (per ragioni che saranno chiare più avanti).

Proposizione 4. *Sia* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V), \quad f = [\varphi]$*. Allora i punti fissi di* f *sono in bigezione con le rette di autovettori di* φ*.*

Dimostrazione.

$$\underbrace{f([v]) = [v]}_{[v] \text{ punto fisso di } f} \Leftrightarrow [\varphi(v)] = [v] \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(v) = \lambda(v),}_{v \text{ autovettore di } \varphi} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

□

Corollario 4.1.

1. *Se* $\mathbb{K}$ *è algebricamente chiuso e* $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$*, ogni proiettività* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *ha almeno un punto fisso.*

2. *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $\dim\mathbb{P}(V)$ *è pari, allora ogni proiettività* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione.

1. Ogni endomorfismo ha almeno un punto fisso (ovviamente se $\dim V > 0$).

2. $\dim\mathbb{P}(V)$ pari $\Rightarrow$ $\dim V$ dispari $\Rightarrow$ il polinomio caratteristico ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$. Quindi c'è un autovalore (con corrispondente autovettore) in $\mathbb{R}$.

□

1.2 Sottospazi proiettivi

Def. $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ si dice $\boxed{\text{sottospazio proiettivo}}$ se $\exists W \subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. se, detta

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$$

la proiezione,

$$S = \pi(W \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(W).$$

Osservazione. Esiste una bigezione tra i *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ e i *ssv* di V.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & \pi^{-1}(S) \cup \{0\} \\ \mathbb{P}(W) & \xleftarrow{\beta} & W \end{array}$$

E si verifica che α e β sono inverse una dell'altra.

Def. Se S è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, W è *ssv* di V, con $S = \mathbb{P}(W)$, allora $\boxed{\dim S = \dim W - 1}$.

Fatti

1. $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ è *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, $i \in I$, allora si verifica facilmente che

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} W_i).$$

In particolare, l'intersezione di *ssp* è a sua volta un *ssp*. Infatti (pensando le classi di S_i come *span*) in un caso sto considerando gli *span* comuni a tutti i sottospazi proiettivi, nell'altro prendo i vettori comuni a tutti i sottospazi vettoriali e faccio lo span:

$$\{[v] \mid [v] \in S_i \ \forall i\} = \{[v] \mid v \in W_i \ \forall i\}$$

2. Come nel caso vettoriale, l'unione di *ssp* non è *ssp*. Allora, dati S_1 e S_2 vorrei definire una somma, in modo che $S_1 + S_2$ sia *ssp*.

3. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi tali che $S_1 \subseteq S_2$, allora $\dim S_1 \leq \dim S_2$ e in particolare $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$. Discende dall'analoga proprietà vettoriale.

Def. Sia $K \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme. Allora si dice $\boxed{\text{il } \textit{ssp} \text{ generato da } K}$ il più piccolo *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ che contiene K. Si scrive $L(K)$. È ben definito per il *fatto 1*, infatti

$$L(K) = \bigcap_{S \supseteq K} S$$

con S sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Def. Siano S_1, S_2 *ssp* di $\mathbb{P}(V)$, allora $\boxed{L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)}$.

Lemma 1. *$S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ allora*

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

dove ricordiamo che $W_1 + W_2$ è il più piccolo ssv che contiene W_1 e W_2.

Dimostrazione. Doppio contenimento

- $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_1 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$
$$W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

  Quindi $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e, per definizione di L, vale $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$.

- $L(S_1, S_2) \supseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

  Sia W il sottospazio t.c. $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W)$, allora

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$
$$S_2 \subseteq L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W) \Rightarrow \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow W_1 \subseteq W$$

  Quindi $W_1 + W_2 \subseteq W \Rightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2)$.

□

Teorema 1 (Grassmann)**.** *Siano S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, allora*

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Dimostrazione. Scriviamo $S_i = \mathbb{P}(W_i)$, allora per il *Lemma*, vale $\dim L(S_1, S_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1$. Quindi, sfruttando *Grassmann vettoriale*, si ha

$$\dim(W_1 + W_2) - 1 = \dim W_1 + \mathrm{W}_2 - \dim(W_1 \cap W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) =$$
$$= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

□

Corollario 1.1. $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \mathbb{P}(V) \geq 0$$

□

Osservazione. Due rette in un piano proiettivo si intersecano sempre. Le rette parallele si incontrano all'infinito.

Corollario 1.2. *Siano P, Q punti distinti di $\mathbb{P}(V)$, allora $L(P, Q)$ è una retta ed è l'unica retta che li contiene.*

Dimostrazione. $P \neq Q \Rightarrow \dim L(P, Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 0 + 0 - (-1) = 1$ cioè è una retta.
Sia ora r una retta che contiene P e Q; per definizione $L(P, Q) \subseteq r$ da cui, visto che hanno la stessa dimensione, coincidono. $\square$

Osservazione. In generale si vede che, se S è *ssp* e $P \notin S$, vale $\dim L(S, P) = \dim S + 1$ ed è l'unico *ssp* che contine sia S che P.

1.3 Riferimenti proiettivi

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, allora $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ si dicono $\boxed{\text{indipendenti}}$ se, presi $v_i \in V$ t.c. $P_i = [v_i]$ $\forall i$, si ha che i v_i sono linearmente indipendenti.

Osservazione. La definizione è ben posta: scegliendo altri rappresentanti dei P_i, tali che $[v_i'] = [v_i]$ allora $\exists \lambda_i \neq 0$ t.c. $v_i' = \lambda v_i \Rightarrow v_i$ indipendenti $\Leftrightarrow v_i'$ indipendenti.

Osservazione. $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono indipendenti *sse* $\dim L\big(\{P_1, \ldots, P_k\}\big) = k-1$. In particolare detta $n = \dim \mathbb{P}(V)$ (da cui si ha $\dim V = n+1$), allora $P_1, \ldots, P_k$ indipendenti $\Rightarrow k \leq n+1$. L'idea è quella di usare i vettori, sfruttando le loro proprietà, per poi riportarle nello spazio proiettivo.

Def. $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono in $\boxed{\text{posizione generale}}$ *sse* qualsiasi sottoinsieme di h punti, con $h \leq n+1$, è indipendente.

Osservazione. Cioè se $k \leq n+1$, allora i punti sono indipendenti. Se $k \geq n+2$, invece, equivale a dire che qualsiasi $(n+1)$-upla dei P_i è indipendente.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ $\quad P_1, \ldots, P_k$ in posizione generale se sono a due a due distinti: nello spazio proiettivo, su una retta, i punti sono indipendenti se sono diversi (perché corrispondono a classi di vettori indipendenti: i vettori di una retta in V vanno a finire nello stesso punto di $\mathbb{P}(V)$).
2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ $\quad$ sono indipendenti se sono a tre a tre non allineati (cioè il terzo vettore non giace sul piano generato dai primi due, nello spazio vettoriale).

Osservazione. In entrambi i casi, se il campo di base è infinito, per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, si trovano $P_1, \ldots, P_k$ in posizione generale.

Def. Un $\boxed{\text{riferimento proiettivo}}$ di $\mathbb{P}(V)$, detta n la dimensione dello spazio proiettivo, è una $(n+2)$-upla

$$\mathcal{R} = (P_0, \ldots, P_{n+1})$$

di punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale.

Osservazione. Usiamo le parentesi tonde, perché è importante l'ordine in cui considero i punti.

Esempi

1. $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ $\quad \mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ distinti.
2. $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ $\quad \mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ tre a tre non allineati.

Def. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora si dice $\boxed{\text{base normalizzata}}$ di V associata a $\mathcal{R}$ una base

$$(v_0, \ldots, v_{n+1}) \text{ t.c. } [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \ldots, n \quad \text{ e } \quad P_{n+1} = [v_0 + \ldots + v_n]$$

Osservazione. Con la seconda condizione sto limitando quanto si possano scalare i v_i: o li scalo tutti per lo stesso λ o niente. Lo vediamo meglio più avanti.

Terminologia.

- I punti $P_0, \ldots, P_n$ si chiamano **punti fondamentali**.
- P_{n+1} si chiama **punto unità**, perché scritto in coordinate (rispetto alla base normalizzata) è $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 2. *Sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Allora*

1. *Esiste una base normalizzata $(v_1, \ldots, v_n)$ di V rispetto a $\mathcal{R}$.*
2. *Se $(v'_1, \ldots, v'_n)$ è un'altra base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$, allora*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad t.c. \quad v'_i = \lambda v_i \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Dimostrazione.

1. Partiamo dal riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, \ldots, P_{n+1})$ e scegliamo $v_i \in V$ tali che $[v_i] = P_i \ \forall i = 0, \ldots, n$. Quindi $(v_0, \ldots, v_n)$ è una base di V, visto che i punti di R sono indipendenti (quindi per definizione di riferimento - posizione generale - indipendenza).

   Scegliamo anche $v_{n+1} \in V$ t.c. $[v_{n+1}] = P_{n+1}$. Scriviamo allora

$$v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K},\ v_i \in \text{ base}$$

   in modo unico.

   Adesso ci interessa che il punto unità sia effettivamente tale: se tutti gli a_i fossero uguali a 1, avremmo finito... però non è detto che sia così. Quindi consideriamo, $a_i v_i$, al posto dei semplici v_i, come rappresentanti dei P_i. Se però un qualche $a_j = 0$? Dimostriamo che non è possibile: se, per assurdo, si avesse $a_j = 0$, allora l'equazione di prima ci darebbe una relazione di indipendenza

$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_j \hat{v}_j + \ldots - v_{n+1} \quad a_i \neq 0,$$

   ma sappiamo che v_{n+1} è dipendente dagli altri $\rightarrow$ *assurdo.*

   Quindi possiamo fare quanto segue, con tranquillità: poniamo

$$v'_i = a_i v_i \ a_i \neq 0 \ \forall i \ \Rightarrow (v'_0, \ldots, v'_n) \text{ è base di } V \text{ e } [v'_i] = [a_i v_i] = [v_i] = P_i$$

   e inoltre, per costruzione,

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n] = [v'_0 + \ldots + v'_n].$$

2. Sia ora $(v''_1, \ldots, v''_n)$ un'altra base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$. Sappiamo che

$$[v''_i] = P_i = [v'_i]$$

   quindi, per come sono definite le classi,

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v''_i = \lambda_i v_i.$$

   Però potrebbero essere tutti λ_i diversi... Allora osserviamo che

$$P_{n+1} = [v'_0 + \ldots + v'_n] = [v''_0 + \ldots + v''_n] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^{n} v''_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} v'_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v'_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda v'_i$$

   e, poiché i v_i sono base di V, i coefficienti devono essere gli stessi (per l'unicità della scomposizione nello spazio vettoriale).

□

Osservazione. Quindi la base normalizzata è unica, a meno di riscalare tutti i vettori per uno stesso fattore.

Teorema 3. *Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive e $\varphi, \psi : V \to W$ applicazioni lineari tali che $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$. Sia $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora* TFAE*:*

1. *$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi = \lambda\psi$ come applicazioni lineari.*
2. *$f = g$.*
3. *$f(P) = g(P)\ \forall P \in \mathcal{R}$.*

Dimostrazione.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ $\varphi = \lambda\psi$ allora per qualsiasi P di $\mathbb{P}(V)$, scelto v t.c. $[v] = P$, vale

$$f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P).$$

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ È ovvia: $f = g \Rightarrow f_{|\mathcal{R}} = g_{|\mathcal{R}}$.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Sia $(v_0, \dots, v_n)$ una base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ allora vale

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \Rightarrow \varphi(v_i) = \lambda_i\psi(v_i) \text{ per qualche } \lambda_i \in \mathbb{K}^*;$$

inoltre

$$\begin{aligned}
&[\varphi(v_0 + \ldots + v_n)] = f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \ldots + v_n)] \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \varphi(v_0 + \ldots + v_n) = \lambda\psi(v_0 + \ldots + v_n) \\
&\Rightarrow \lambda_0\psi(v_0) + \ldots + \lambda_n\psi(v_n) = \lambda\psi(v_0) + \ldots + \lambda\psi(v_n).
\end{aligned}$$

Dato che ψ è iniettiva, i vari $\psi(v_i)$ sono indipendenti (lo "ereditano" dalle controimmagini) e quindi $\lambda_i = \lambda\ \forall i$. Quindi, dato che $\varphi = \lambda\psi$ per tutti i vettori della base, vale anche per la funzione in generale. □

Osservazione. Un po' l'analogo di quello che succede con le basi vettoriali. Inoltre non è detto che gli $\psi(v_i)$ siano base di W, per la dimostrazione mi basta l'indipendenza.

Corollario 3.1. *Sia $\mathbb{P}G\mathcal{L}(V)$ il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ allora vale*

$$\mathbb{P}G\mathcal{L}(V) \cong G\mathcal{L}(V)/N$$

dove $N \lhd G\mathcal{L}(V)$ è il sottogruppo delle matrici scalari: $N = \{\lambda \cdot \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa naturale

$$\begin{aligned} G\mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}G\mathcal{L}(V) \\ \varphi &\longmapsto [\varphi] \end{aligned}$$

- È omomorfismo: $[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\varphi]$.
- È surgettivo per definizione di trasformazione proiettiva.
- Il Ker è proprio N per il *Teorema* appena visto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_V &\longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} \\ \lambda\mathrm{Id}_V &\longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} \end{aligned}$$

□

Notazione. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ (e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), il gruppo delle proiettività $\mathbb{P}G\mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ si indica con $\mathbb{P}G\mathcal{L}_{n+1}(\mathbb{K})$ perché $n + 1$ indica la taglia delle matrici che rappresentano le trasformazioni.

Teorema 4 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive)**.** *Siano* $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ *spazi proiettivi, con* $\dim\mathbb{P}(V) = \dim\mathbb{P}(W) = n$ *e siano* $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ *due riferimenti proiettivi, rispettivamente di* $\mathbb{P}(V)$ *e* $\mathbb{P}(W)$*. Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *che manda (ordinatamente)* $\mathcal{R}$ *in* $\mathcal{R}'$*.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal *Teorema* precedente: se ci fossero due trasformazioni che mandano $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$, allora sarebbero uguali.
Dimostriamo ora l'esistenza. Fissiamo due basi normalizzate:

$$(v_0, \dots, v_n) \text{ di } V \qquad (w_0, \dots, w_n) \text{ di } W,$$

sappiamo da *G1* che $\exists!\ \varphi : V \to W$ t.c. $\varphi(v_i) = w_i\ \forall i = 0, \dots, n$. Prendiamo allora la trasformazione $f = [\varphi] : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ indotta da φ e verifichiamo che soddisfa le richieste.

Scriviamo i due riferimenti come

$$\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1}) \qquad \mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$$

e concludiamo

$$\begin{aligned} &f(P_i) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ &f(P_{n+1}) = [\varphi(v_1 + \ldots + v_n)] = [\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_n)] = [w_1 + \ldots + w_n] = Q_{n+1}. \end{aligned}$$

□

1.4 Coordinate omogenee

Caso "tautologico" Come l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale V di dimensione n e $\mathbb{K}^n$ induce un sistema di coordinate, così possiamo fare in $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Si dice che il punto $[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha $\boxed{\text{coordinate omogenee}}$ $[x_0, \dots, x_n]$ (anche scritto $[x_0 : \ldots : x_n]$), rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ - ovvero quello indotto dalla base standard di $\mathbb{K}^{n+1}$: i vari P_i con $0 \le i \le n$ hanno tutte coordinate nulle, tranne l'i-esima, che è 1; come si può immaginare, P_{n+1} ha tutte le coordinate uguali a 1.

Osservazione. Le coordinate omogenee non sono uniche, ma lo sono a meno di *riscalamento simultaneo.*

Osservazione. La scrittura $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ non ha senso.

Caso generale Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, con $\dim\mathbb{P}(V) = n$. Fissato un riferimento $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$, esso induce su $\mathbb{P}(V)$ le coordinate omogenee nel modo seguente:

Dal *Teorema fondamentale* sappiamo che $\exists!$ trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che manda il riferimneto $\mathcal{R}$ nel riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Def. Le $\boxed{\text{coordinate omogenee}}$ di P in $\mathbb{P}(V)$ sono la sua immagine tramite f, ovvero $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Equivalentemente, data $(v_0, \dots, v_n)$ base normalizzata rispetto a $\mathcal{R}$, dato $P \in \mathbb{P}(V)$, si sceglie un $v \in V$ t.c. $[v] = P$ e si scrive $v = a_0v_0 + \ldots + a_nv_n$ ($v \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$).

Allora le coordinate di $P \in \mathbb{P}(V)$ sono date da $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Il punto è che la *t.p.* del punto 1. è indotta dall'isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ v_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

Osservazione. Nel vettoriale, fissare una base di V equivale ad un isomorfismo lineare con $\mathbb{K}^{n+1}$.

Osservazione. Usando le *coordinate omogenee* si possono rappresentare le *t.p* e i *s.s.p.* tramite matrici ed equazioni.

Trasformazioni proiettive
$f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(W)$ è *t.p.* e $\mathcal{R},\mathcal{R}'$ sono i riferimenti in partenza e in arrivo, fissiamo B,B' basi normalizzate corrispondenti.

Se $\varphi:V\to W$ è un'applicazione lineare t.c. $[\varphi]=f$, M è la matrice associata, si dice che M rappresenta anche f, nel senso che

$$\begin{aligned}[f(P)]_{\mathcal{R}'} &= M[P]_{\mathcal{R}} \quad \text{scritto male}\\ &= [M([v]_B)]\end{aligned}$$

Proposizione 5. *La matrice che rappresenta f non è unica, ma lo è a meno di riscalamento.*

Osservazione. Se $n=\dim\mathbb{P}(V),\ m=\dim\mathbb{P}(W)$, la matrice ha taglia $(m+1)(n+1)$.

Sottospazi proiettivi
Ho due modi per descriverli: equazioni e immagine di una mappa (cioè come *span* di una base).

1. **Rappresentazione cartesiana**
   Se $S\subseteq\mathbb{P}(V)$ è sottospazio proiettivo, per definizione ho $S=\mathbb{P}(W)$, dove $W\subseteq V$ è sottospazio vettoriale. Chiamiamo $n=\dim\mathbb{P}(V)$ e $k=\dim\mathbb{P}(W)=S$.

   Fissato $\mathcal{R}$ di $\mathbb{P}(V)$ e B base normalizzata, W può essere descritto come luogo delle soluzioni di un sistema lineare, di $(n+1)-(k+1)=n-k$ equazioni lineari omogenee, nelle coordinate indotte da B.
   $$\{f_1=\ldots=f_{n-k}=0\}=W.$$
   Queste stesse equazioni descrivono $S\subseteq\mathbb{P}(V)$, infatti
   $$P\in S\Leftrightarrow f_1(P)=\ldots=f_{n-k}(P)=0.$$
   Osservazione. Le f sono polinomi lineari omogenei, in $n+1$ variabili $x_0,\ldots,x_n$, la scrittura $f_i(P)$ non ha senso: dipende dal rappresentante vettoriale di P; tuttavia la condizione $f(P)=0$ è ben definita.

   Esempio. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, scegliamo $f(x_0,x_1,x_2)=x_0+3x_1+x_2$
   $$\begin{aligned}&f([1,1,1]) \text{ non ha senso, infatti}\\ &f(1,1,1)=5\\ &f(-1,-1,-1)=-5\end{aligned}$$
   e invece dovrebbero essere uguali, visto che $[1,1,1]=[-1,-1,-1]$.

   La condizione $f([a_0,a_1,a_2])=0$ però va bene, perché
   $$f[\lambda a_0,\lambda a_1,\lambda a_2]=\lambda f(a_0,a_1,a_2).$$

2. **2. Rappresentazione parametrica**
   $S\subseteq\mathbb{P}(V)$ come immagine di trasformazioni proiettive in $\mathbb{P}(V)$ (immagine di *span* di vettori in V).

   Fissato $\mathcal{R}$ riferimento e B base normalizzante, $W\subseteq V$ sottospazio vettoriale t.c. $S=\mathbb{P}(W)$, si scrive W in termini di generatori:
   $$w_1,\ldots,w_k\to W=\{\sum_{i=1}^k a_iw_i\}$$
   e si guarda la sua immagine.

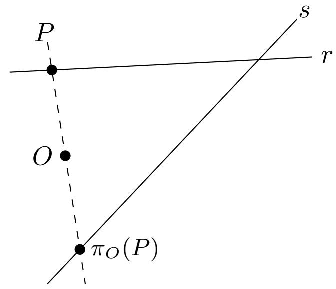
   Esempio. in $\mathbb{K}^3$ consideriamo il *ssv* $x_1-x_2+x_3=0$. Questo *ssv* si può anche descrivere come $\text{span}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e quindi il vettore generico sarà descritto da
   $$v=t_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\\t_1+t_2\\t_2\end{pmatrix}\quad (t_1,t_2)\in\mathbb{K}^2$$
   Il *ssp* corrispondente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (che è una retta proiettiva) è descritta di nuovo dall'equazione $x_1-x_2+x_3=0$ e si può rappresentare in forma parametrica
   $$\{\ [t_1,t_1+t_2,t_2]\mid(t_1,t_2)\in\mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}\ \}.$$

1.5 Prospettività

Def. Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo, $r, s \subseteq \mathbb{P}(V)$ due rette distinte e $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$ un punto esterno a entrambe.

Si definisce $\boxed{\text{prospettività}}$ di centro O la seguente funzione

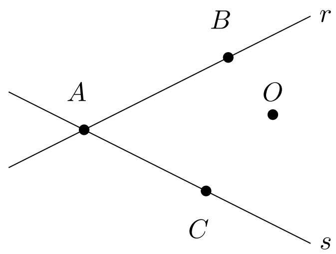
$$\begin{aligned} \pi_O : r &\longrightarrow s \\ P &\longmapsto L(O,P) \cap s. \end{aligned}$$



Proposizione 6. *π_0 è una trasformazione proieittiva (quindi un isomorfismo).*

Dimostrazione. Facciamo vedere che π_O è indotta da un'applicazione lineare $\varphi : V_r \to V_s$, dove $V_r, V_s \subseteq V$ sono i sottospazi vettoriali corrispondenti a r e s.

Fissiamo un riferimento proiettivo "comodo" di $\mathbb{P}(V)$ in questo modo:



Dove $A = r \cap s$, scelgo $B \in r$ arbitrario, $C \in s$, $C \neq A$, $C \notin L(B,O)$. Dunque ho $\mathcal{R} = (A, B, C, O)$. In coordinate omogenee, scrivo i miei punti come

$$A = [1,0,0], \quad B = [0,1,0], \quad C = [0,0,1], \quad O = [1,1,1]$$

.

Un'equazione della retta r è $x_2 = 0$ (basta notare che sia A che B la soddisfano).
Analogamente, per s prendo $x_1 = 0$.
Quindi

$$\begin{aligned} r &= \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}, \\ s &= \{[x_0, 0, x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}. \end{aligned}$$

Scriviamo π_O in queste coordinate: dato $P \in r$, $P = [a, b, 0]$ con a, b non entrambi nulli; calcoliamo l'equazione della retta $L(O,P)$ e intersechiamola con s, per determinare le coordinate di $\pi_O(P)$.

$$O = [1,1,1] \quad P = [a, b, 0]$$

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2] \in L(O,P) &\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2) \in \operatorname{span}\big((a,b,0),(1,1,1)\big) \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 b - x_1 a + x_2(a-b) = 0 \end{aligned}$$

Adesso mettiamo a sistema con s:

$$\begin{cases} x_0 b - x_1 a + x_2(a-b) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $x_0 b + x_2(a-b) = 0$ e prendiamo la soluzione proiettiva $x_0 = a-b,\ x_2 = -b$. Quindi $\pi_O(P) = [a-b, 0, -b]$.

Ciò significa che, nelle coordinate omogenee di r e s, π_O si scrive

$$[a,b] \longmapsto [a-b, -b]$$

(perché le coordinate di r e s prendono in input due valori e li inseriscono nella definizione).

Osserviamo che l'applicazione lineare associata a π_O è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

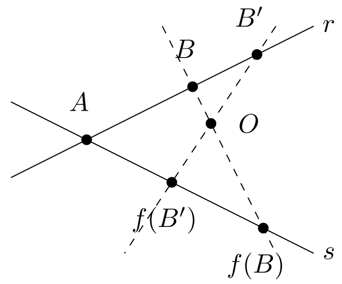
che è invertibile. Quindi è π_O è associata a un isomorfismo, ovvero è a sua volta un isomorfismo. □

Osservazione. Notiamo in particolare che $\pi_O(A) = A$, ovvero A rimane fisso.

Teorema 5. *Se r e s sono due rette distinte in un piano $\mathbb{P}(V)$ e $f : r \to s$ è una trasformazione proiettiva, allora*

$$f \text{ proiettività} \iff f(A) = A, \quad A = (r \cap s).$$

Dimostrazione. La freccia $\Rightarrow$ la abbiamo appena vista.
Occupiamoci quindi di $\Leftarrow$. Cerchiamo di capire chi sia il centro O della proiettività.
Preso $B \neq A \in r$, il punto O deve stare per forza sulla retta $L(B, f(B))$.
Scegliendo un secondo punto $B' \in r \setminus \{A, B\}$, O dovrà stare anche su $L(B', f(B'))$ e, visto che le due rette sono distinte, l'intersezione (che è sicuramente non vuota: siamo nello spazio proiettivo) sarà per forza il centro che sto cercando.
Segue che $f = \pi_O$, applicando l'unicità garantita dal *Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive*, perché le due trasformazioni coincidono sul riferimento (A, B, B') di r. □



Osservazione. π_O è la restrizione a r di una funzione $\pi_O : \mathbb{P}(V) \setminus \{O\} \to s$, la proiezione da O a s, che prende un punto P, disegna la retta passante per P e O e la interseca con s.

Questa è quella che si chiama una trasformazione proiettiva **degenere**, perché la trasformazione lineare che la induce ha un kernel non banale. *Vd.* quaderno per una costruzione di π_0 analoga a quella della dimostrazione, ma con il dominio esteso.

1.6 Carte affini e punti all'infinito

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, per ogni $i = 0, \dots, n$ c'è un **iperpiano coordinato**, di equazione

$$H_i = \{x_i = 0\}.$$

Denotiamo con U_i il suo complementare:

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Considerato come spazio proiettivo, $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

Def. Definisco l' $\boxed{i\text{-esima carta affine}}$

$$\begin{aligned} j_i : \mathbb{K}^n &\longrightarrow U_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto [y_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{posto } i\text{-esimo}}}{1}, \dots, y_n] \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} j_i^{-1} : U_i &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

che è ben definita, perché se cambio rappresentante in $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{K}^*$, allora

$$\left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\widehat{\lambda x_i}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Proposizione 7. *j_i e j_i^{-1} sono una l'inversa dell'altra.*

Dimostrazione. $\square$

$$
\begin{aligned}
& j_i^{-1} \circ j_i(y_1, \ldots, y_n) = \\
& = j_i^{-1}\big([y_1, \ldots, 1, \ldots, y_n]\big) = \\
& = \left(\frac{y_1}{1}, \ldots, \frac{\hat{1}}{1}, \ldots, \frac{y_n}{1}\right) = \\
& = (y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& j_i \circ j_i^{-1}\big([x_0, \ldots, x_n]\big) = \\
& = j_i\left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right) = \\
& = \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right] = \\
& \underset{\substack{\downarrow \\ \text{moltiplico per } x_i}}{=} [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n]
\end{aligned}
$$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ può essere pensato come "ampliamento" di $\mathbb{K}^n$, in cui si aggiunge un $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ "all'infinito".

Esempio.

1. $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\text{punto}\}$

D'ora in avanti, a meno che non sia specificato altrimenti, useremo la *carta* j_0 per identificare $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^n$.

L'iperpiano H_0 viene chiamato $\boxed{\text{iperpiano all'infinito}}$ e i suoi punti $\boxed{\text{punti all'infinito}}$ (o **punti impropri**).

Proposizione 8.

1. *Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottospazio proiettivo, non contenuto in H_0, allora*
$$j_0^{-1}(S \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$$
è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, chiamato la $\boxed{\textit{parte affine}}$ di S. La sua dimensione affine coincide con la dimensione proiettiva di S.

2. *Se $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine non vuoto, allora c'è un unico sottospazio proiettivo $\overline{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (non contenuto in H_0) la cui **parte affine** sia Z. $\overline{Z}$ si chiama $\boxed{\textit{chiusura proiettiva}}$ di Z; la sua dimensione proiettiva è uguale alla dimensione affine di Z.*

Questo dà una bigezione (tramite j_0) tra sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non contenuti in H_0 e sottospazi affini di $\mathbb{K}^n \cong U_0$.

Dimostrazione.

1. Sia $k = \dim S$. Scriviamo S come luogo delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango $(n+1) - (k+1) = n - k$ (questo perché riporto S e $\mathbb{P}(V)$ ai corrispettivi spazi vettoriali)
$$
\begin{cases}
a_{1,0}x_0 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\
\quad\vdots \\
a_{n-k,0}x_0 + \ldots + a_{n-k,n}x_n = 0
\end{cases}
\tag{1}
$$
Notiamo che $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ sta in $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ *sse* $j_0(y_1, \ldots, y_n) = [1, y_1, \ldots, y_n] \in U_0 \cap S$, cioè sostituendo nel sistema (1), vale
$$
\begin{cases}
a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n = -a_{1,0} \\
\quad\vdots \\
a_{n-k,1}y_1 + \ldots + a_{n-k,n}y_n = -a_{n-k,0}
\end{cases}
\tag{2}
$$

Quindi $j_0^{-1}(U_0 \cap S)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$: ho scritto un sistema lineare non omogeneo (per questo è affine, altrimenti sarebbe stato vettoriale), in n variabili.

Notiamo ora che la matrice dei coefficienti di (1) ha rango $n-k$ (per ipotesi) e lo stesso è vero per la matrice completa del sistema (2) (ho semplicemente spostato la prima colonna alla fine, cambiando segno).

Inoltre, visto che (2) ha per ipotesi almeno una soluzione (poiché $S \not\subseteq H_0$, c'è almeno un elemento di S in U_0 e quindi l'intersezione non è vuota), per *Rouché-Capelli* il rango della matrice dei coefficienti (cioè la matrice senza la colonna dei termini noti) del sistema (2) è pure $n-k$.

Questo implica che la dimensione del sottospazio affine descritto da (2) è proprio k.

2. Rovesciamo il procedimento visto nel punto precedente.

   Partiamo da un $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ non vuoto, sottospazio affine di dimensione k; esso sarà definito da un sistema lineare non omogeneo
   $$Ay = b$$
   con A matrice $(n-k) \times n$ di rango $n-k$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

   Consideriamo adesso il sottospazio proiettivo $\overline{Z} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definito dal sistema lineare omogeneo
   $$\big(-b \mid A\big)x = 0$$
   con la matrice $(n-k) \times (n+1)$ e $x = (x_0, \dots, x_n)$. In pratica stiamo facendo $j_0(Z) : (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots y_n]$. Di nuovo, per *Rouché-Capelli*, la matrice ha rango $n-k$: la seconda equazione diventa
   $$-b \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$
   soddisfatta perché $(y_1, \dots, y_n) \in Z$. Quindi la dimensione proiettiva di $\overline{Z}$ è k. Inoltre, proprio per come lo abbiamo costruito, la parte affine di $\overline{Z}$ è Z, infatti
   $$j_0^{-1}(\overline{Z} \cap U_0) \underset{\substack{\downarrow \\ x_0 \neq 0}}{=} j_0^{-1}(\overline{Z}) = j_0^{-1}(j_0(Z)) = Z.$$

   Verifichiamo l'unicità: sia $\overline{Z}' \neq \overline{Z}$ un altro sottospazio proiettivo la cui parte affine sia Z.

   Osserviamo che $\overline{Z} \cap \overline{Z}'$ è un sottospazio di entrambi, di dimensione $< k$ (altrimenti coinciderebbero).

   Calcoliamone la parte affine:
   $$j_0^{-1}\big(U_0 \cap (\overline{Z} \cap \overline{Z}')\big) = j_0^{-1}(U_0 \cap \overline{Z}) \cap j_0^{-1}(U_0 \cap \overline{Z}') = Z\overline{Z} = Z$$
   la cui dimensione è k; questo, tuttavia, contraddice il fatto che la parte affine di $\overline{Z} \cap \overline{Z}'$ dovesse avere dimensione uguale alla sua chiusura proiettiva (grazie al punto 1.), che ha dimensione $< k$.

$\square$

Le equazioni della chiusura proiettiva di un *ssa* si ottengono da quelle del *ssa* "omogeneizzato", cioè rese omogenee tramite moltiplicazione di termini noti (oppure dal fatto che è il procedimento inverso rispetto alla sostituzione $y_i = \frac{x_i}{x_0}$).

Esempio. Rette in $\mathbb{K}^2$ Data la retta affine $ay_1 + by_2 = c$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, i punti all'infinito si ottengono intersecando la sua chiusura proiettiva con la retta all'infinito.
Effettuiamo la sostituzione, per ottenere il proiettivizzato:
$$a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} = c$$
$$ax_1 + bx_2 = cx_0,$$
la cui intersezione con $x = 0$ (cioè l'iperpiano improprio H_0) è data da
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = cx_0 \end{cases}.$$
Il punto all'infinito della retta affine, allora, è $[0, -b, a]$. Di conseguenza, date dure rette affini, esse si intersecheranno all'infinito *sse* hanno gli stessi coefficienti, ovvero sono parallele.

Per convincerci che $\mathbb{P}(V)$ estende lo spazio affine, ci mancano da considerare i morfismi.

Teorema 6. *Identifichiamo U_0 con $\mathbb{K}^n$ tramite la carta $j_0 : \mathbb{K}^n \to U_0$.*
Sia $G = \{f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(U_0) = U_0\}$, ovvero le trasformazioni proiettive che preservano U_0.
Allora

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \\ f &\longmapsto f_{|U_0} = j_0^{-1} f j_0. \end{aligned}$$

è un ben definito isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Presa una $f \in G$, $f = [\varphi] : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$, notiamo che, poiché f è bigettiva (proprietà delle proiettività), $f(U_0) = U_0 \Leftrightarrow f(H_0) = H_0 \Leftrightarrow \varphi$ preserva l'iperpiano vettoriale $x_0 = 0$.
Se $e_0, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$, questo è equivalente a dire $\varphi(e_i) \in \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n) \quad \forall i \geq 1$.
Cioè: e_0 va dove gli pare, gli altri rimangono fra di loro.
Dunque $f \in G \Leftrightarrow \mathcal{M}_B(\varphi)$ è della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \qquad a \in \mathbb{K},\ b \text{ vettore colonna},\ A \text{ matrice } n \times n.$$

Poiché f deve essere invertibile, vale $a \neq 0$ e $\det A \neq 0$. Dunque, a meno di moltiplicazione per a^{-1},

$$\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \qquad \text{(con nuovi } b \text{ e } A\text{).}$$

Come agisce f su $\mathbb{K}^n = U_0$? Dato $v \in \mathbb{K}^n$ vediamo cosa succede:

$$v \in \mathbb{K}^n \xrightarrow{j_0} v \in U_0 \xrightarrow{f} v' \in U_0 \xrightarrow{j_0^{-1}} v' \in \mathbb{K}^n.$$

Che, calcolato, sarebbe

$$j_0^{-1}\left(f([1, v_1, \dots, v_n])\right) = j_0^{-1}\left([\varphi(1 \mid v)]\right) = j_0^{-1}\left(\left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}\right]\right) = j_0^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ b + Av \end{pmatrix}\right]\right) = Av + b.$$

(divido per la prima coord. e poi la butto)

Quindi $\psi(f)(v) = Av + b$ è davvero un'affinità. Inoltre, poiché se $f, g \in G$, allora $(f \circ g)_{|U_0} = f_{|U_0} \circ g_{|U_0}$, ψ è omomorfismo.
È chiaramente surgettivo: $f(v) = Av + b$ è ottenuta come $\psi(\varphi)$, con $\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$.
È iniettivo, poiché se $(v \mapsto Av + b) = \mathrm{Id}$, allora $Av + b = v\ \forall v$ e quindi $A = I$, $b = 0$, da cui $\varphi = \mathrm{Id} \Rightarrow f = \mathrm{Id}$. □

1.7 Dualità

Def. $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$ si chiama $\boxed{\text{proiettivo duale}}$ di $\mathbb{P}(V)$ ed è l'insieme dei funzionali $f \in V^* \setminus \{0\}$.

Fatto C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}(V^*)$ e gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Partiamo da $[f] \mapsto \mathbb{P}(\ker f)$ e facciamo vedere che funziona.

- $\dim(\ker f) = \dim V - \underset{= \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{K}}{\underset{\downarrow}{1}}$, per cui $\mathbb{P}(\ker f)$ è effettivamente un iperpiano;
- $\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $f = \lambda g$, quindi sono nella stessa classe (cioè $[f] = [g]$) e la corrispondenza risulta ben definita, perché vanno a finire nello stesso iperpiano;
- ogni iperpiano di V è nucleo di qualche funzionale (nello specifico una retta di funzionali, che nel proiettivo rientrano nella medesima classe), per cui la corrispondenza è biunivoca.

  Come si può descrivere l'inversa?

$$\{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \longrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

Dato qualsiasi sottospazio $W \subseteq V$, il suo annullatore è l'insieme $\mathrm{Ann}(W) = \{f \in V^* \mid f_{|W} = 0\}$ è un *ssv* di dimensione $\dim V - \dim W$.
In particolare, dato W iperpiano, il suo annullatore è una retta di V^*, che identifica perciò un punto in $\mathbb{P}(V^*)$ e tale punto è esattamente l'elemento di $\mathbb{P}(V^*)$ che corrisponde all'iperpiano $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ (tramite la corrispondenza di cui si parlava prima).

Questa dualità si estende a sottospazi di qualsiasi codimensione: $\forall k = 0, \dots, n = \dim \mathbb{P}(V)$ poniamo

$$\begin{aligned} \delta_k : \{\textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V) \text{ di } \dim = k\} &\longleftrightarrow \{\ \textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*) \text{ di } \dim = n-k-1\} \\ \mathbb{P}(W) &\longleftrightarrow\ \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W)) \end{aligned}$$

Teorema 7. *δ_k è una bigezione per ogni k.*

Dimostrazione. Chiamiamo $\delta : \{\ \textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V)\ \} \to \{\ \textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*)\ \} = \bigcup_k \delta_k$ l'unica funzione che estende tutti i δ_k.
Tramite l'isomorfismo canonico $V \cong V^{**}$ si ha $\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(W)\right) = W$ (sono gli α_w tali che $\alpha_w(f) = f(w) = 0$, corrispondenti ai $w \in W$); per cui, se identifichiamo $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}(V)^{**}$, tramite $V = V^{**}$,

$$\delta \circ \delta : \{\textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V)\} \longrightarrow \{\textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^*)\} \longrightarrow \{\textit{ssp} \text{ di } \mathbb{P}(V^{**}) = \mathbb{P}(V)\} = \mathrm{Id}.$$

□

Teorema 8. *Siano S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, allora*

1. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \delta(S_1) \supseteq \delta(S_2)$;
2. $\delta\left(L(S_1, S_2)\right) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$;
3. $\delta(S_1 \cap S_2) = L\left(\delta(S_1), \delta(S_2)\right)$.

Dimostrazione.

1. Segue da $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \mathrm{Ann}(W_1) \supseteq \mathrm{Ann}(W_2)$;
2. segue da $\mathrm{Ann}(W_1 + W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) \cap \mathrm{Ann}(W_2)$;
3. segue da $\mathrm{Ann}(W_1 \cap W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) + \mathrm{Ann}(W_2)$.

□

Teorema 9 (Principio di dualità)**.** *Sia P un enunciato che riguarda sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, relazioni e operazioni tra di essi (contenimenti, intersezioni, somme, ecc.).*
Sia P^* l'enunciato duale di P, ottenuto da P tramite le sostituzioni seguenti.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longmapsto \mathbb{P}(V)^* \\ \subseteq &\longmapsto \supseteq \\ \cdot \cap \cdot &\longmapsto L(\cdot, \cdot) \\ L(\cdot, \cdot) &\longmapsto \cdot \cap \cdot \\ \dim k &\longmapsto \dim(n-k) \end{aligned}$$

Allora P è vero se e solo se P^* è vero.

Dimostrazione. Se P è vero, applico δ e ottengo un altro enunciato vero, che è proprio P^*. Viceversa, se P^* è vero, applico $\delta^{-1} = \delta$ e ottengo P vero. □

1.7.1 Sistemi lineari di iperpiani

Ricordiamo che vale la bigezione

$$\{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \longleftrightarrow \{\text{punti di } \mathbb{P}(V^*)\}.$$

E la sua duale, dove applichiamo $V^{**} \cong V$:

$$\{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V^*)\} \longleftrightarrow \{\text{punti di } \mathbb{P}(V)\}.$$

Un sistema lineare di iperpiani di dimensione k è un insieme di iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ che corrisponde a un *ssp* di $\mathbb{P}(V)^*$ di dimensione k.

I sistemi lin. di dimensione 1 si dicono $\boxed{\text{fasci}}$. Le rette di questi insiemi passano sempre per almeno un punto (nel caso delle rette parallele, si incontrano all'infinito).

Tramite dualità sappiamo che ogni sottospazio $\mathcal{L}$, k-dimensionale, di $\mathbb{P}(V)^*$ è $\mathcal{L} = \delta(S)$, con S *ssp* di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione $n-k-1$, che si chiama $\boxed{\text{centro di } \mathcal{L}}$.
Infatti $\delta(S)$ è sottospazio di $\mathbb{P}(V)^*$. Ci chiediamo quando un punto $P \in \mathbb{P}(V)^*$ stia in $\delta(S)$. Poiché la dualità inverte i contenimenti e $\delta \circ \delta = \mathrm{Id}$, vale

$$P \subseteq \delta(S) \;\Leftrightarrow\; \underset{\substack{\downarrow \\ \text{iperp. corrisp. a } P \in \mathbb{P}(V)^*}}{\delta(\{P\})} \supseteq \delta(\delta(S)) = S.$$

Quindi $\delta(S)$ è l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ che contengono S.

1.7.2 Proiettività duale

Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ induce una bigezione

$$f_{ip} : \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}.$$

Se $f = [\varphi : V \to V]$, a sua volta φ induce la mappa **trasposta**

$$\begin{aligned} \varphi^* = {}^t\varphi \;:\; V^* &\to V^* \\ \alpha &\mapsto (\alpha \circ \varphi). \end{aligned}$$

Allora $f^* : \mathbb{P}(V)^* \to \mathbb{P}(V)^*$ è la nostra mappa sugli iperpiani? Non proprio. Vale il seguente

Teorema 10. $f^* = f_{ip}^{-1}$

Dimostrazione. Sia $H = \mathbb{P}(W)$ un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$, sia $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ t.c. $\ker \alpha = W$. Perciò, tramite l'indentificazione tra $\mathbb{P}(V)^*$ e gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$, abbiamo che

$$f^*(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{prendo il p. associato}}}{H}) = f^*([\alpha]) = [\alpha \circ \varphi] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ritorno in } \mathbb{P}(V)}}{=} \mathbb{P}(\ker(\alpha \circ \varphi)) = \mathbb{P}\left(\varphi^{-1}(\ker \alpha)\right) = \mathbb{P}\left(\varphi^{-1}(W)\right) = f_{ip}^{-1}(H).$$

Infatti il punto è che il nucleo di $\alpha \circ \varphi$ è proprio $\varphi^{-1}(\ker \alpha)$. □

[...]

1.8 Birapporto

[Grande importanza storica!] Partiamo dal caso affine, che si chiama **rapporto semplice**. Sia A retta affine [*sv* di dimensione 1, senza origine]. Siano P_1, P_2 punti distinti, essi formano un riferimento affine, che dà coordinate.
Un tale riferimento corrisponde a un isomorfismo affine

$$\begin{aligned} \psi : A &\to \mathbb{K} \\ P_1 &\mapsto 0 \\ P_2 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Dato $P_3 \in A$, si dice $\boxed{\text{rapporto semplice}}$ di (P_1, P_2, P_3) il numero

$$[P_1, P_2, P_3] = \psi(P_3) \in \mathbb{K}.$$

In altre parole, è la coordinata affine di P_3 nel riferimento (P_1, P_2).
La $f : A \to \mathbb{K}$ tale che $f(P_3) = [P_1, P_2, P_3]$ è bigezione (viene dall'isomorfismo ψ).

Proposizione 9. *Se $\alpha : A \to B$ è un isomorfismo tra rette affini, allora il rapporto semplice è α-invariante, ovvero:*

$$[\alpha(P_1), \alpha(P_2), \alpha(P_3)] = [P_1, P_2, P_3] \qquad \forall P_1, P_2, P_3 \in A \quad P_1 \neq P_2.$$

Dimostrazione. Sia $\psi : B \to \mathbb{K}$ l'unica affinità t.c. $\psi(\alpha(P_1)) = 0$ e $\psi(\alpha(P_2)) = 1$, allora $\psi \circ \alpha : A \to B \to \mathbb{K}$ è l'unica affinità che manda P_1 in 0 e P_2 in 1.

$$\begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ \downarrow \ \nearrow \\ B \end{array}$$

Per definizione

$$[P_1, P_2, P_3] = (\psi \circ \alpha)(P_3)$$
$$[\alpha(P_1), \alpha(P_2), \alpha(P_3)] = \psi(\alpha(P_3))$$

e i due membri di destra sono effettivamente uguali. □

Teorema 11. *Presi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K}$, $z_1 \neq z_2$ (per cui ho un riferimento), allora*

$$[z_1, z_2, z_3] = \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{eccolo il rapporto!}}}{\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}.$$

Osservazione. Se pensiamo z_1 come 0 e z_2 come 1, quel rapporto è effettivamente la coordinata di z_3 - in generale stiamo "scalando" per usare $z_2 - z_1$ come unità.

Dimostrazione. La nostra idea consiste di due passi:

1. verificare l'uguglianza per una scelta specifica di z_1, z_2, z_3 (prenderemo il riferimento standard);
2. mostrare che le quantità che confronto sono invarianti per affinità.

In questo modo, nel caso di un riferimento generico, basterà utilizzare un'affinità per ricondurci al caso comodo che abbiamo già dimostrato.

1. Prendiamo $z_1 = 0,\ z_2 = 1$ (z_3 fa come gli pare). Effettivamente funziona:

   $$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3 - 0}{1 - 0} = z_3,$$

   che è proprio la coordinata di z_3 nel riferimento $(0, 1)$. Quindi abbiamo $[0, 1, z_3]$.

2. Abbiamo già visto che il rapporto semplice è invariante per affinità. Ci manca da dimostrare che anche la frazione lo è.
   Data $\psi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ affinità, $\psi(z) = Az + b$ con $A \neq 0$, calcoliamo

   $$\frac{\psi(z_3) - \psi(z_1)}{\psi(z_2) - \psi(z_2)} = \frac{Az_3 + b - Az_1 - b}{Az_2 + b - Az_1 - b} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

   il che conclude.

□

Def. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ e i primi tre punti distinti (quidi $\mathcal{R} = (P_1, P_2, P_3)$ è riferimento proiettivo). Chiamiamo $[\lambda_4, \mu_4]$ le coordinate omogenee di P_4 rispetto a $\mathcal{R}$.
Si dice $\boxed{\text{birapporto}}$ di P_1, P_2, P_3, P_4 la quantità

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\mu_4}{\lambda_4} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\},$$

dove poniamo $\mu_4/0 = \infty$. È ben definito: riscalando le coordinate per uno stesso valore, i fattori si cancellano nella frazione.

Osservazione. $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ t.c. $f(P_4) = \beta(P_1, P_2, P_3)$ è una bigezione: segue da $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, indotto da (P_1, P_2, P_3) e dalla funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ [\lambda, \mu] &\mapsto \frac{\mu}{\lambda} \end{aligned}$$

che sarebbe j_0^{-1} esteso in modo naturale al punto all'infinito.

Teorema 12. *Siano* $(\underbrace{P_1, P_2, P_3}_{distinti}, P_4) \in \mathbb{P}(V)$ *e* $(\underbrace{Q_1, Q_2, Q_3}_{distinti}, Q_4) \in \mathbb{P}(W)$, *con* $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = 1$. *Allora*

$$\exists \ t.p. \ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W), \quad f(P_i) = Q_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

In pratica segue che β è invariante per trasformazioni proiettive.

Dimostrazione. Visto che $\mathcal{R}_V = (P_1, P_2, P_3)$, $\mathcal{R}_W = (Q_1, Q_2, Q_3)$, sappiamo che esiste unica la trasformazione f che manda un riferimento nell'altro.
Inoltre, nelle coordinate omogenee, f è l'identità; per convincercene osserviamo che l'unica f che chiude il diagramma è Id.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(W) \\ \cong \updownarrow & & \updownarrow \cong \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \xrightarrow[?]{} & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \end{array}$$

Segue che

$$f(P_4) = Q_4 \;\Leftrightarrow\; P_4, Q_4 \text{ hanno stesse coord. omog. nei rif. } \underset{\text{per def. di } \beta}{\underset{\downarrow}{\Leftrightarrow}} \beta(P_i) = \beta(Q_i).$$

□

Teorema 13. *Siano* $(\underbrace{P_1, P_2, P_3}_{distinti}, P_4) \in \mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = 1$; *fissate coordinate omogenee* $P_i = [\lambda_i, \mu_i]$, *allora*

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

Osservazione. Al più uno dei determinanti si annulla: P_1, P_2, P_3 sono distinti, quindi quelli con 2,3 e 1,3 non si annullano: i punti risulterebbero uno multiplo dell'altro; quelli a rischio sono con il 4 - però se si annulla uno dei due, l'altro è salvo.

Osservazione. La formula non dipende dai rappresentanti vettoriali λ_i, μ_i scelti.

Come per il rapporto semplice, verifichiamo

1. *vale per uno specifico $\mathcal{R}$;*

2. sono invarianti per proiettività.

Dimostrazione.

1. Scegliamo il riferimento standard $P_1 = [1,0],\ P_2 = [0,1],\ P_3 = [1,1]$ e controlliamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_4 \\ 0 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \lambda_4 \\ 1 & \mu_4 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_4 \cdot (-1)}{1 \cdot (\lambda_4)} = \frac{\mu_4}{\lambda_4}.$$

2. Sappiamo già che β è invariante, verifichiamo che lo sia anche quel quoziente.
   Una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ è descritta da una matrice A 2×2 e le coordinate delle immagini di P_i sono $A \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \end{pmatrix}$. L'invarianza segue da

$$\frac{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \right|}{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \right|}{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{pmatrix} \right|} =$$

$$= \frac{(\det A)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{(\det A)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}.$$

   Abbiamo riottenuto il rapporto di partenza, quindi è rimasto invariato per trasformazione proiettiva.

□

Osservazione. Se nessuno dei P_i è un punto all'infinito, tutti i $\lambda_i \neq 0$ e, di conseguenza, $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \in \mathbb{K}$ è la coordinataa affine di P_i nella carta U_0.
Inoltre, calcolando i determinanti mostrati nel teorema, si ottiene la seguente formula:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)},$$

che può essere scritta come

$$\frac{\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1}}{\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}} = \frac{[P_1, P_3, P_4]}{[P_2, P_3, P_4]},$$

che mostra il motivo del nome "birapporto".

Quaterne non ordinate Abbiamo visto che β è invariante per quaterne ordinate di punti di $\mathbb{P}(V)$, di cui i primi tre distinti.
Cosa succede sulle quaterne non ordinate (con tutti e quattro distinti)?
Chiediamo: date due quaterne non ordinate $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ con i punti distinti, quando esiste una trasformazione f tale che $f\{P_i\} = \{Q_i\}$? *[Che succede a β se permuto i punti?]*

Esempio.

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{\beta(P_2, P_1, P_3, P_4)}$$

agisce come matrice di permutazione: $[1,0] \to [0,1]$ da cui $\mu/\lambda \to \lambda/\mu$.

Si può verificare che, al variare di $\sigma \in S_4$, detto $\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$, allora $\beta(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)})$ varia nell'insieme

$$S(\beta) = \left\{ \beta,\ \frac{1}{\beta},\ 1 - \beta,\ \frac{1}{1 - \beta},\ \frac{\beta}{\beta - 1},\ \frac{\beta - 1}{\beta} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Si controlla prima che β è invariante per le trasposizioni $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$, da cui posso supporre che il primo punto sia P_1 e verifico per gli altri.

Teorema 14. *Supponiamo* $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$ *e definiamo*

$$\begin{aligned} j : \mathbb{K} \setminus \{0,1\} &\to \mathbb{K} \\ \beta &\mapsto \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2} \end{aligned}$$

(che va bene, perché il birapporto di quattro punti distinti non è mai 0 né 1). Allora

$$\beta' \in S(\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad j(\beta) = j(\beta').$$

Dimostrazione.
[$\Rightarrow$] C'è solo da calcolare; per velocizzare si può prima verificare che $j(\beta) = j(1/\beta) = j(1-\beta)$.
[$\Leftarrow$] Fissato β, chiamiamo $q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x-1)^2$ e per costruzione $j(\beta) = j(\beta') \Leftrightarrow q(\beta') = 0$. Dall'altra implicazione sappiamo che gli elementi di $S(\beta)$ annullano $q(x)$. Se gli elementi di $S(\beta)$ sono tutti distinti (ovvero sono sei), sono esattamente le radici di $q(x)$. Può però succedere che $S(\beta)$ abbia meno di sei elementi distinti. Allora (con qualche conto) si verifica che questo succede nei seguenti casi:

1. $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$ e allora $j(\beta) = \frac{27}{4}$ e il polinomio diventa $q(x) = (x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2$ che ha $S(\beta)$ come radici.

2. $\beta = -\eta, -\eta^2$, dove $\eta = e^{2\pi i/3}$ e allora $q(x) = (x+\eta)^3(x+\eta^2)^3$, che ha tutte e sole radici di $S(\beta)$.

–

$\square$