Appunti di Analisi 2

Paolini - Luccardesi

Ludovico Sergiacomi

a.a. 2025/2026

Indice

1 Funzioni in $\mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{N \text{ volte}}$ è uno **spazio vettoriale**. I suoi elementi sono $x \in \mathbb{R}^N$ e si indicano con $x_i \in \mathbb{R}$ le componenti.

Abbiamo i sottoinsiemi $\Omega \subset \mathbb{R}^N \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \textit{espressione analitica}\}$.

Possiamo scrivere le funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ in questo modo

$$f(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^M = \big(f_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, f_M(x_1, \ldots, x_N)\big)$$

Def.

- $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad (n = 1) \qquad f$ si dice $\boxed{\text{scalare}}$
- $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \qquad f$ si dice $\boxed{\text{vettoriale}}$
- $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad f$ si dice $\boxed{\text{campo vettoriale}}$

Osservazione. Le varie f_i (componenti) sono funzioni **scalari**.

Esempio. $f(x, y, z, t) =$ Temperatura del punto di coordinate (x, y, z) all'istante t.

1.1 Norme e Distanze

Un concetto chiave è quello di **vicinanza** tra gli elementi di $\mathbb{R}^N$.

- In $\mathbb{R}$ abbiamo il modulo $|x - y|$
- In $\mathbb{R}^2$ abbiamo $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

In $\mathbb{R}^N$ possiamo estendere la norma come segue:

Def. $\forall x \in \mathbb{R}^N$ si chiama $\boxed{\text{norma euclidea}}$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Ricordiamo che la $\boxed{\text{norma}}$ in uno spazio vettoriale X è una funzione $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ che rispetta le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \ \forall x$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Possiamo verificare che la norma euclidea rispetti effettivamente le condizioni.

Def. Chiamiamo $\boxed{\text{palla di raggio } r}$ centrata in O

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| < r\}$$

E se definissi la norma in un'altra maniera? Che cosa posso dire?

Def. Due norme $\|\ \|_A$ e $\|\ \|_B$ sullo stesso spazio vettoriale, sono dette $\boxed{\text{equivalenti}}$ se

$$\exists c, \tilde{c} > 0 \text{ t.c. } \tilde{c}\|x\|_B \leq \|x\|_A \leq c\|x\|_B$$

Spoiler. In $\mathbb{R}^N$ sono tutte equivalenti. In generale no.

Notazione. $\|\ \|_A \sim \|\ \|_B$

Osservazione. Per costruire le norme fa comodo il **prodotto scalare**: $x \cdot y = \sum x_i y_i \longrightarrow \|x\| = \sqrt{xx}$. Dunque il prodotto scalare induce la norma, che a sua volta induce la distanza

Def. Dato X spazio vettoriale, una $\boxed{\text{distanza}}$ su X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Osservazione. Non è richiesta l'omogeneità per d, questo "implica" che non tutte le distanza sono indotte da norme.

Def. Dato X spazio vettorial e d una distanza, (X, d) si chiama $\boxed{\text{spazio metrico}}$.

1.2 Successioni in $\mathbb{R}^N$

Riprendiamo la definizione di **successione** da *AM1*:

Def. Una $\boxed{\text{successione}}$ in X è una funzione $\mathbb{N} \to X$, di cui indichiamo l'immagine con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Def. In uno spazio metrico (X, d) una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in X, si dice che $\boxed{\text{converge}}$ a $\overline{x} \in X$ se

$$\forall \varepsilon \ \exists \overline{n} \ \text{ t.c. } \ \forall n \geq \overline{n} \quad d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon \qquad \text{cioè } \lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{x}) = 0.$$

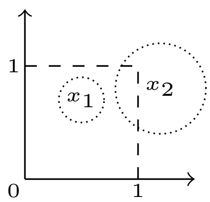
1.2.1 Parentesi di Topologia

Aperti

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme, allora

- $x_0 \in A$ si dice $\boxed{\text{interno}}$ ad A se $\exists r \in \mathbb{R}$ t.c. $B_r(x_0) \subset A$.
- $\text{Int}(A) = \mathring{A} = \{x \in A \mid x \text{ è interno ad } A\}$ si dice $\boxed{\text{parte interna}}$.
- A si dice $\boxed{\text{aperto}}$ se $A = \mathring{A}$.

Esempio. $A = \{(0, 0)\} \qquad A \neq \emptyset$ ma $\mathring{A} = \emptyset$, perché $r > 0$ (e non $r \geq 0$).
Esempio. Definiamo $Q = [0, 1) \times [0, 1)$, cioè:



Nel disegno x_1 è interno e x_2 non lo è. $\mathring{Q} = (0, 1) \times (0, 1) \neq Q \Rightarrow Q$ non è aperto. I punti interni hanno sempre quel dischetto che ricerchiamo, ma se prendo – ad esempio – (0, 0.5) ha sempre un po' di punti che finiscono fuori.

Proposizione 1. *La palla aperta $B_r(x_0)$ è aperta. Wow! - no invece è interessante...*

Dimostrazione. Preso $x \in B_r(x_0)$, x soddisfa $d(x, x_0) < r$, quindi c'è un po' di spazio tra $d(x, x_0)$ e r, all'interno del quale possiamo prendere s t.c. $d(x, x_0) + s < r$.

Claim: $B_s(x) \subset B_r(x_0)$ è la palla che stiamo cercando. Infatti, preso $z \in B_s(x)$, esso è caratterizzato da $d(z,x) < s$. Cosa sappiamo invece su $d(z,x_0)$? Che vale la disuguaglianza triangolare:

$$d(z,x_0) \leq d(z,x) + d(x,x_0) < s + d(x,x_0) < r.$$

Abbiamo concluso: la *palla* di raggio s e centro x è contenuta nella *palla aperta* di partenza e questo vale per qualsiasi punto in $B_r(x)$. Dunque tutti i punti sono interni. Dunque l'insieme è aperto. □

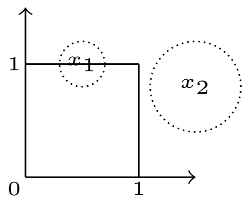
Osservazione. Funziona sempre perché non posso prendere i punti sul bordo.

Chiusi

Def. Sia (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme, allora

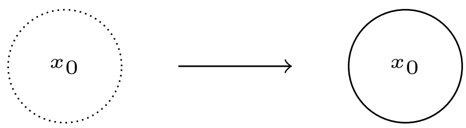
- $x_0 \in X$ si dice $\boxed{\text{punto di chiusura}}$ di A se $\forall r > 0$ $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$.
- $\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ è punto di chiusura di } A\}$ si dice $\boxed{\text{chiusura}}$ di A.
- A si dice $\boxed{\text{chiuso}}$ se $A = \overline{A}$

Esempio. Riprendendo l'esempio di prima, con Q, abbiamo $\overline{Q} = [0,1] \times [0,1] \neq Q$.



In particolare, x_1 appartiene alla chiusura, x_2 no.

E se volessimo chiudere la *palla aperta*?



Allora scriviamo $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\}$: abbiamo aggiunto l'uguale.

Una caratterizzazione che si può dare di un insieme C chiuso.

Proposizione 2. *Un sottoinsieme $C \subset X$ è chiuso* sse *il suo complementare $X \setminus C$ è aperto.*

Dimostrazione. Un insieme è chiuso *sse* è uguale alla sua chiusura, ovvero

$$C = \{x \in X \mid \forall r > 0 \ B_r(x) \cap C \neq \emptyset\}.$$

Per quanto riguarda il complementare, possiamo dire

$$\begin{aligned} X \setminus C &= \{x \in X \mid \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap C = \emptyset\} \\ &= \{x \in X \mid \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset X \setminus C\} \end{aligned}$$

cioè $X \setminus C$ è aperto. □

Nota Per convenzione, $\emptyset$ e X sono *sia aperti che chiusi.*

Caratterizzazione sequenziale di chiusura

Proposizione 3. *Dato (X, d) spazio metrico e $A \subset X$, allora*

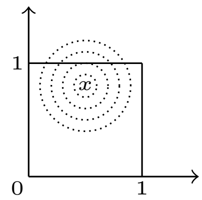
$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \quad t.c. \quad x_n \to x.$$

Morale*: la chiusura è fatta di tutti punti che sono limiti di successioni convergenti di elementi di A.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in A \Rightarrow \forall r > 0\ \exists x_r \in B_r(x) \cap A$ che dunque ha le proprietà: $x_r \in A$ e $d(x_r, x) < r$. Allora mi basta scegliere r della forma $r = [$ *successione convergente decrescente con* $n \in \mathbb{N}$ $]$ – ad esempio $\frac{1}{n}$. Allora vale

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} d(x_r, x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e quindi, per il *Teorema dei Carabinieri*, si ha che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.



Restringo sempre di più le *palle*, stringendole intorno a x e scegliendo come x_r dei punti appartenenti anche ad A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se ho $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \quad x \in X, \quad x_n \to x$, allora è vero che $\forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$? L'idea è la seguente: il fatto che la successione converga a x vuol dire che, presa una qualsiasi distanza ε da x, trovo alcuni elementi della successione a distanza minore di ε. Quindi mi basta usare come distanza il raggio di $B_r(x)$ e trovo elementi di A arbitrariamente vicini a x, ovvero x è un punto di chiusura.

$$x_n \to x \text{ rispetto a } d \ \Rightarrow \exists \overline{n} \text{ t.c. } \forall n > \overline{n} \quad d(x_n, x) < \varepsilon = r.$$

Per ipotesi $x_n \in A$, quindi ne ho infiniti! □

Def. (X, d) spazio metrico e $A \subset X$, allora si chiama $\boxed{\text{frontiera}}$ (o *bordo*) di A

$$\partial A = \{x \in X \mid \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset, \quad B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

cioè le varie *palle* di x intersecano sia l'interno che l'esterno: sono punti che appartengono sia alla chiusura di A che alla chiusura del suo complementare A^C.

Osservazione.

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \mathring{A} \ \dot{\cup} \ \partial A \\ &= A \ \cup \ \partial A \end{aligned}$$

Esempio. La frontiera di una *palla* è $\quad \partial B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$.

Esercizio/proposizione

- $\bigcap$ finita di aperti è aperta;
- $\bigcup$ arbitraria di aperti è aperta;

e, passando ai complementari,

- $\bigcap$ arbitraria di chiusi è chiusa;
- $\bigcup$ finita di chiusi è chiusa.

Osservazione. In uno spazio metrico (X, d) le relazioni insiemistiche tra la *palla aperta*

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\},$$

la *palla chiusa*

$$C_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\},$$

e la sfera

$$S_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$$

non sono quelle intuitive che applichiamo in $\mathbb{R}^N$, cioè

$$\overline{B_r}(x_0) = C_r(x_0), \quad \partial B_r(x_0) = S_r(x_0).$$

In generale valgono soltanto le inclusioni:

$$\overline{B_r}(x_0) \subset C_r(x_0), \quad \partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0).$$

Dimostrazione. La prima si dimostra osservando che: la chiusura è il più piccolo insieme chiuso che contenga la *palla aperta*; la *palla chiusa* contiene la *palla aperta*.

La seconda invece, deriva dal fatto che la chiusura $\overline{B_r}(x_0)$ è l'unione disgiunta tra la parte interna $B_r(x_0)$ e la frontiera, quindi $\partial B_r(x_0) = \overline{B_r}(x_0) \setminus B_r(x_0)$ e, per l'inclusione precedente, si ottiene $\partial B_r(x_0) \subset C_r(x_0) \setminus B_r(x_0) = S_r(x_0)$. □

Esempio. Siamo in $\mathbb{R}^N$ e consideriamo la distanza come segue:

$$d_{discr} = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} .$$

Allora, per un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$ vale

$$\overline{B_1}(x_0) = \{x_0\} \subsetneq \mathbb{R}^N = C_1(x_0) \tag{1}$$

$$\partial B_1(x_0) = \overline{B_1}(x_0) \setminus B_1(x_0) = \emptyset \subsetneq \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\} = S_1(x_0) \tag{2}$$

Infatti ogni $B_1(x)$ include il solo punto x: stiamo chiedendo che la distanza sia minore di 1, quindi non può che essere 0; ma l'unico punto che dista 0 da x è il punto stesso.
Per la seconda, osserviamo che $B_1(x_0) = \{x_0\} = \overline{B_1}(x_0)$ e che la sfera di raggio 1 include tutti i punti con distanza $= 1$, ovvero $x \neq x_0$ e quindi è proprio $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$.

2 Limiti di funzioni tra spazi metrici

Consideriamo una funzione $f : X \to Y$ con (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici (ad esempio $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$). Vogliamo definire la scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Osserviamo che sono presenti due limiti: il primo è dato dalla convergenza delle $x \to x_0$; il secondo dalla convergenza delle $f(x) \to y_0$.

Def. Siano (X, d_X) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora un punto generico $x_0 \in X$ si dice $\boxed{\text{punto di accumulazione}}$ di A se

$$\forall r > 0 \qquad \big(B_r(x_0) \cap A\big) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Esempi in $\mathbb{R}^2$

1. I *punti di accumulazione* del disco aperto $B_r\big((0,0)\big)$ e del disco chiuso sono cotituiti dal disco chiuso.

2. Un insieme che includa un solo punto non ha punti di accumulazione.

3. I *punti di accumulazione* del piano perforato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sono tutti i punti di $\mathbb{R}$: anche x_0 è punto di accumulazione perché, per quanto piccolo possa essere il raggio, comunque il disco interseca il resto del piano.

Def. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : A \to Y$ una funzione, $A \subseteq X$ sottoinsieme, $x_0 \in X$ punto di accumulazione. Un punto $y_0 \in Y$ si dice $\boxed{\text{limite}}$ di f per x che tende a x_0, e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad \text{t.c.} \qquad x \in A,\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Osservazione. Per dare un senso alla definizione, non è necessario che $f(x_0)$ esista (ovvero $x_0 \in A$. Anche perché la richiesta $d_X(x, x_0) > 0$ lo esclude direttamente.

Si può dare una definizione equivalente di limite, come dimostra il seguente

Teorema 1 (Caratterizzazione sequenziale di limite)**.** *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ punto di accumulazione di A. Allora sono equivalenti:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

2. se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ *e* $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ *allora* $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} y_0$.

Dimostrazione.

[1. $\Rightarrow$ 2.] Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ una successione convergente ad x_0. Vogliamo dimostrare che,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ \ \text{t.c.} \ \ \forall n \geq \overline{n} \quad d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon.$$

Sia $\delta(\varepsilon) > 0$ un numero reale associato a ε secondo le condizioni dell'ipotesi (1), ovvero $0 < d_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$. L'ipotesi (2) ci dice che

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ \ \text{t.c.} \ \forall n \geq \overline{n} \qquad 0 < d_X(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$$

(la distanza non può mai essere nulla, perché $x_n \neq x_0$). Quindi possiamo inserire x_n soddisfa le condizioni e possiamo scrivere $0 < d_X(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$, come volevasi dimostrare.

[2. $\Rightarrow$ 1.] Devo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un δ, come nella definizione di *limite* scritta sopra. Supponiamo per assurdo che (1) non valga; allora

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \text{t.c.} \ \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \ \ \text{t.c.} \ \ 0 < d_X(x_\delta, x_0) < \delta, \ \text{ma} \ d_Y(f(x_\delta), y_0) \geq \varepsilon.$$

Scegliamo una successione di $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{R}$ e chiamiamo x_n i corrispondenti x_δ. Allora, applicando l'ipotesi (2), otteniamo che

$$d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}, \ \ \text{cioè} \ \ x_n \to x_0, \ \ \text{però} \ \ d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon,$$

che contraddice $f(x_n) \to y_0$. $\square$