**Från labb 3:**

**6.4** Vi vill ha goda approximationer till integralvärdena $I_1$ och $I_\infty$ där

$$I_1 = \int_0^1 \frac{30}{1 + x^4 + \sqrt{1 + x^3}}\, dx \quad \text{och} \quad I_\infty = \int_0^\infty \frac{30}{1 + x^4 + \sqrt{1 + x^3}}\, dx.$$

a) Beräkna $I_1$ med trapetsregeln med en extrapolation. Välj steget så att minst två siffrors noggrannhet erhålls.

b) Ange en algoritm för beräkning av $I_\infty$ med sikte på fem korrekta decimaler.

**Kombinationsproblem:**

```
UPPGIFT 1:

Använd Matlabs fzero för att bestämma roten till x=cos(x).


UPPGIFT 2:

Givet tabellen nedan:

+---+------------+
| x | 2  4  7  9 |
+---+------------+
| y | 6  3  2  5 |
+---+------------+


a) Skriv ett Matlab-program som interpolerar alla punkterna med ett
   enda polynom och sedan beräknar polynomets värde i x=8.

b) Skriv ett Matlab-program som MKV-anpassar ett andragradspolynom
   till alla punkterna och sedan beräknar polynomets värde i x=8.

c) Vi antar nu att tabellens y-värde för x=7 har fått ett litet skrivfel.
   Det ligger ganska nära det angivna tabellvärdet men är inte korrekt.
   Skriv ett Matlab-program som beräknar det y-värde för x=7 som
   krävs för att det MKV-anpassade andragradspolynomet ska ge värdet
   y=3 i x=8.

Tips: Använd gärna Matlabs polyfit, polyval och fzero!
```

**Tentaexempel**

**1. (2p)** Givet en funktion $f(x)$ och en steglängd $h$ gäller att

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^6). \tag{1}$$

Derivatan till $f$ uppskattas som $f'(x) \approx \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$. Denna uppskattning har noggrannhetsordning $p$, där (1p)

| | | |
|---|---|---|
| ☐ $p = 1$ | ☐ $p = 3$ | ☐ $p = 5$ |
| ☐ $p = 2$ | ☐ $p = 4$ | ☐ $p = 6$ |

Detta innebär att (1p)

- ☐ Antalet korrekta decimaler ökar med en faktor $2p$ när $h$ halveras.
- ☐ Felet med steglängd $h/2$ är en faktor $2p$ mindre än felet med steglängd $h$.
- ☐ Antalet korrekta decimaler ökar med en faktor $p$ när $h$ halveras.
- ☐ Felet med steglängd $h/2$ är en faktor $p^2$ mindre än felet med steglängd $h$.
- ☐ Antalet korrekta decimaler fördubblas när $h$ minskar med en faktor $p$.
- ☐ Felet med steglängd $h/2$ är en faktor $2^p$ mindre än felet med steglängd $h$.

**9. (2p)** Tre steg har tagits med en iterativ metod för ekvationslösning. Approximationen i dessa tre steg har ett fel som ges av vektorn

```
e = [0.9824    0.2456    0.0614]
```

Vad har metoden för konvergensordning? (1p)

| | | |
|---|---|---|
| ☐ 0 | ☐ 3 | ☐ 6 |
| ☐ 1 | ☐ 4 | ☐ 7 |
| ☐ 2 | ☐ 5 | ☐ Metoden konvergerar inte. |

En bra gissning av felet i nästa steg ges av (1p)

| | | |
|---|---|---|
| ☐ 0.0005 | ☐ 0.0038 | ☐ 0.0154 |
| ☐ 0.0307 | ☐ 0.0603 | ☐ 0.1595 |
| ☐ 0.2216 | ☐ 0.3070 | ☐ 0.4431 |

**2. (13p)** Till en tabell med 20 mätpunkter $(x_i, y_i)$ vill man anpassa en funktion på formen

$$y = e^{ax}(b\cos(\omega x) + cx^2) + d$$

a) (4p) Antag att $a = 1$ och $\omega = \pi$. Skriv ett Matlabprogram som med minstakvadratmetoden beräknar värden på parametrarna $b$, $c$ och $d$. (De 20 mätpunkterna har värden men står inte med här i tentatexten. Markera bara var i programmet de 20 mätpunkterna ska läggas in).

b) (2p) Kan parametrarna $b$, $c$ och $d$ beräknas om man sätter $a = 0$ och $\omega = 0$? (Glöm inte motiveringen!).

c) (7p) Skriv ett Matlabprogram som med minstakvadratmetoden beräknar värden på alla parametrarna, dvs $a$, $b$, $c$, $d$ och $\omega$. (Markera bara var i programmet de 20 mätpunkterna ska läggas in).

**1. (12p)** Givet integralen

$$I(k) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi x}{x^2 + k^2} dx, \quad k > 0, \tag{1}$$

a) (3p) Beräkna en approximation till $I(0.5)$ med hjälp av trapetsregeln och 4 lika stora delintervall.

b) (4p) Formulera en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som givet ett värde på $k$ beräknar en approximation till $I(k)$ med hjälp av trapetsregeln och $N$ lika stora delintervall, där $N$ är ett godtyckligt positivt heltal.

c) (5p) Vi vill nu bestämma $k$ så att

$$I(k) = k. \tag{2}$$

Formulera en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som givet en startgissning för $k$ löser ekvationen (2). Din lösning ska använda sig av algoritmen som du formulerade i (b)-uppgiften och $N$ skall enkelt kunna ändras.

*För full poäng på uppgift 1 får du inte använda färdiga, inbyggda Matlab-funktioner för ekvationslösning eller integration.*

**4. (2p)** Följande MATLAB-kod är given:

```
a = 1
b = 2
while abs(b-a)>0.0001
    c = b - (b-a)*(sqrt(b^2+1)-2)/(sqrt(b^2+1)-sqrt(a^2+1))
    a = b
    b = c
end
```

Vilken numerisk metod är detta en implementering av?

- ☐ ~~Trapetsmetoden~~
- ☐ ~~Simpsons metod~~
- ☐ ~~Newtons metod~~
- ☐ Sekantmetoden
- ☐ ~~Minstakvadratmetoden~~
- ☐ ~~Polynominterpolation~~
- ☐ ~~Rombergs metod~~
- ☐ Intervallhalveringsmetoden