Modelo de Solow

- Uno de los primeros modelos de crecimiento económico.
- Bloque fundamental de muchos de los modelos macro modernos.
- A pesar de su simplesa, es un ejemplo perfecto de un modelo dinámico de equilibrio general.
- El equilibrio de este modelo esta caracterizado por una ecuación en diferencias para el capital.

El Modelo

Hogares:

- Oferta de trabajo inelástica: L_t^s
- Crecimiento de la población exógeno.
- Ofrecen K_t^s y L_t^s a las firmas a precios R_t y W_t.
- Dotación inicial de K_t^s dada: $K_0^s > 0$.
- Consumo sigue una regla simple:

$$C_t = (1-s)\left(W_t L_t^s + R_t K_t^s\right), \quad S_t = s\left(W_t L_t^s + R_t K_t^s\right)$$

Firmas

- Usan K_t y L_t para producir Y_t. ↪ Bien de consumo/inversion

- Lo hacen utilizando una tecnología Cobb-Douglas.

- Eligen K_t y L_t que maximiza sus beneficios:

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = Y_t - w_t L_t - R_t K_t \quad \text{s.t.} \quad Y_t = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

$\alpha \in (0,1)$

↳ Es Exógeno

$$\Rightarrow L_t^d = (1-\alpha) Y_t / w_t \;,\; K_t^d = \alpha Y_t / R_t$$

$$\text{RCE} \Rightarrow Y_t = W_t L_t + R_t K_t \Rightarrow \Pi_t = 0$$

Stock de Capital

- El stock de capital de los hogares se deprecia a través del tiempo a una tasa δ:

$$K_{t+1}^s = I_t + (1-\delta) K_t^s$$

Economía Cerrada:

$$\boxed{I_t = S_t}$$

Equilibrio Competitivo

- Eq. mercado de factores: $K_t^s = K_t^d = K_t \;,\; L_t^s = L_t^d = L_t$

- Eq. mercado de bienes: $Y_t = C_t + I_t$

Ecuaciones del Modelo

- $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$
- $I_t = S_t = sY_t$
- $Y_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}$
- $C_t = (1-s)Y_t$

Ecuación Fundamental del Modelo

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{t+1} = sK_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t}$$

Ecuación en diferencias no-lineal

En terminos per-cápita:

$L_{t+1}/L_t = 1+n_{t+1}$; $K_t/L_t = k_t$

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right) = sA_t^{1-\alpha}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{t+1} = \frac{sA_t^{1-\alpha}k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t}{1+n_{t+1}}}$$

$$\boxed{y_t = A_t^{1-\alpha}k_t^{\alpha}} \quad ; \quad \boxed{c_t = (1-s)y_t}$$

En unidades efectivas de trabajo:

$A_{t+1}/A_t = 1+g_{t+1}$; $K_t/(A_tL_t) = k_t$

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{sk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t}{1+g_{t+1}+n_{t+1}}}$$

$(1+n_t)(1+g_t) \approx 1+g_t+n_t$

$$\boxed{y_t = k_t^{\alpha}} \qquad \boxed{c_t = (1-s)y_t}$$

Estado-Estacionario / Senda de Crecimiento Balanceado

- Si $g_t = g$ y $n_t = n$ $\forall t$:

- $$K_{t+1} = \frac{sK_t^{\alpha} + (1-\delta)K_t}{1+n+g} \quad ; \quad C_t = (1-s)K_t^{\alpha}$$

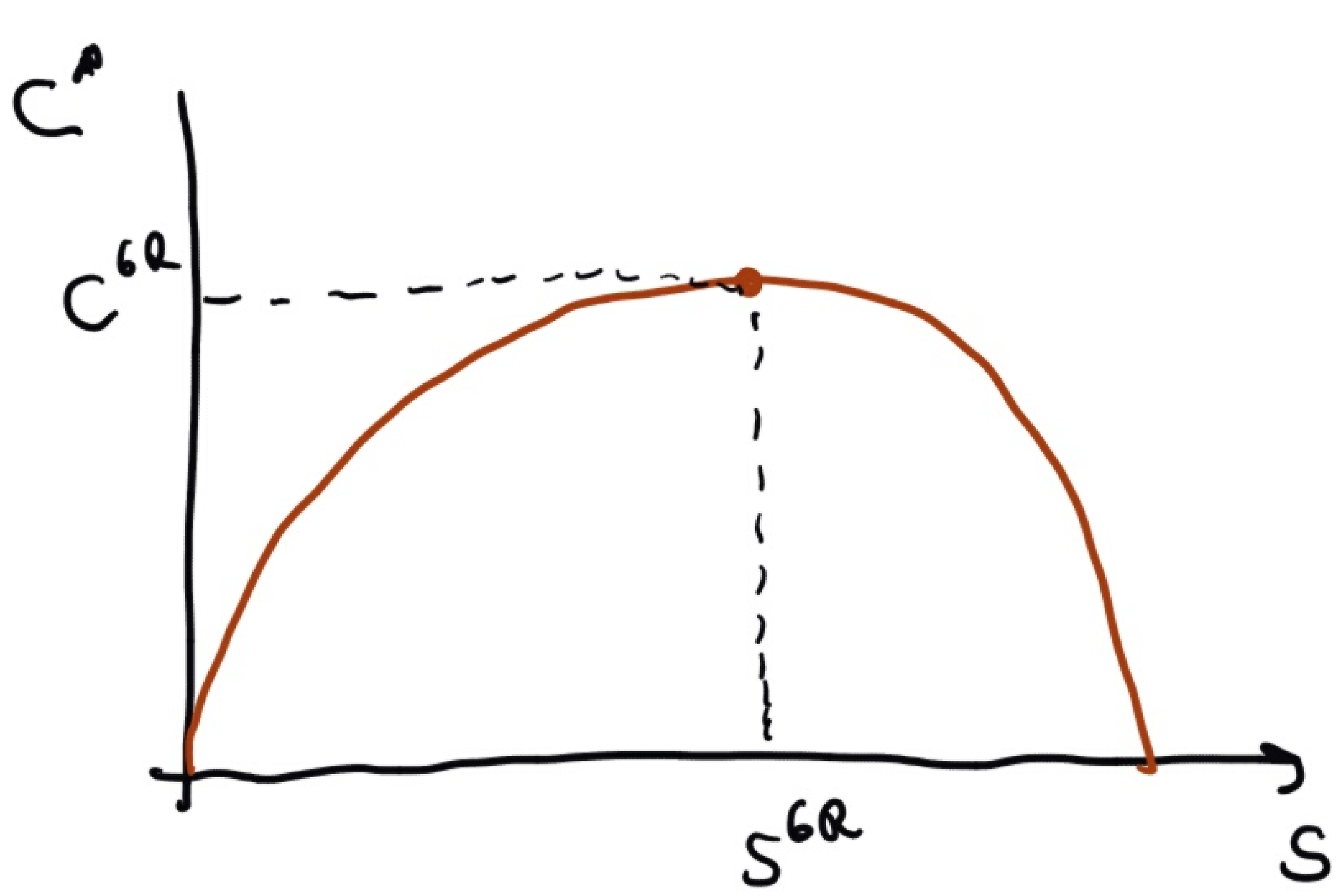
K_{t+1}/K_t

$$\Rightarrow \Delta K_{t+1} = \frac{sK_t^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n+g} \quad ; \quad \Delta C_{t+1} = (1-s)\Delta K_{t+1}^{\alpha}$$

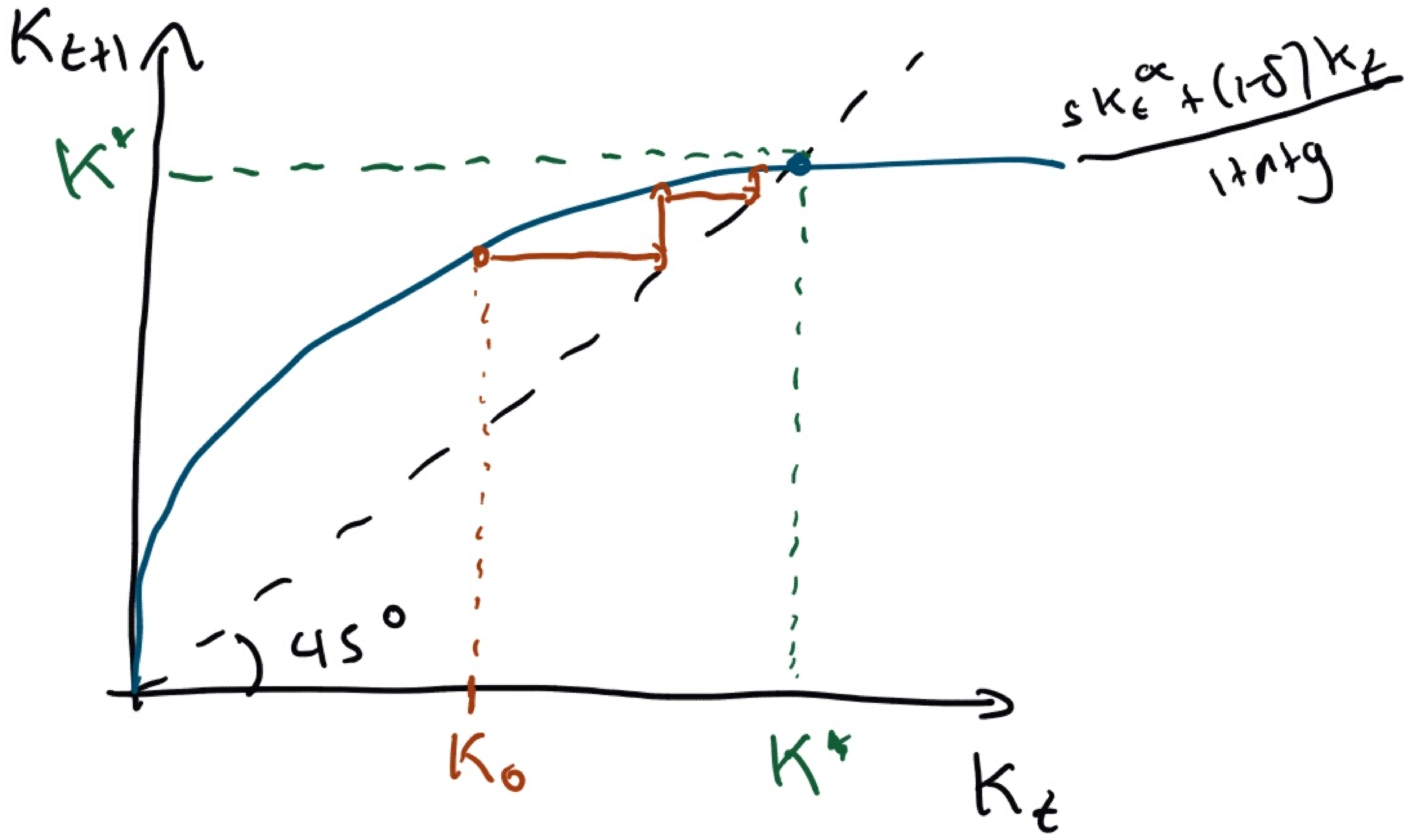
- $$\Delta K_{t+1} = 1 \Rightarrow K_t = K^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow C_t = C^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Noten que existe un s que maximiza consumo de SS.



Funciones de Política



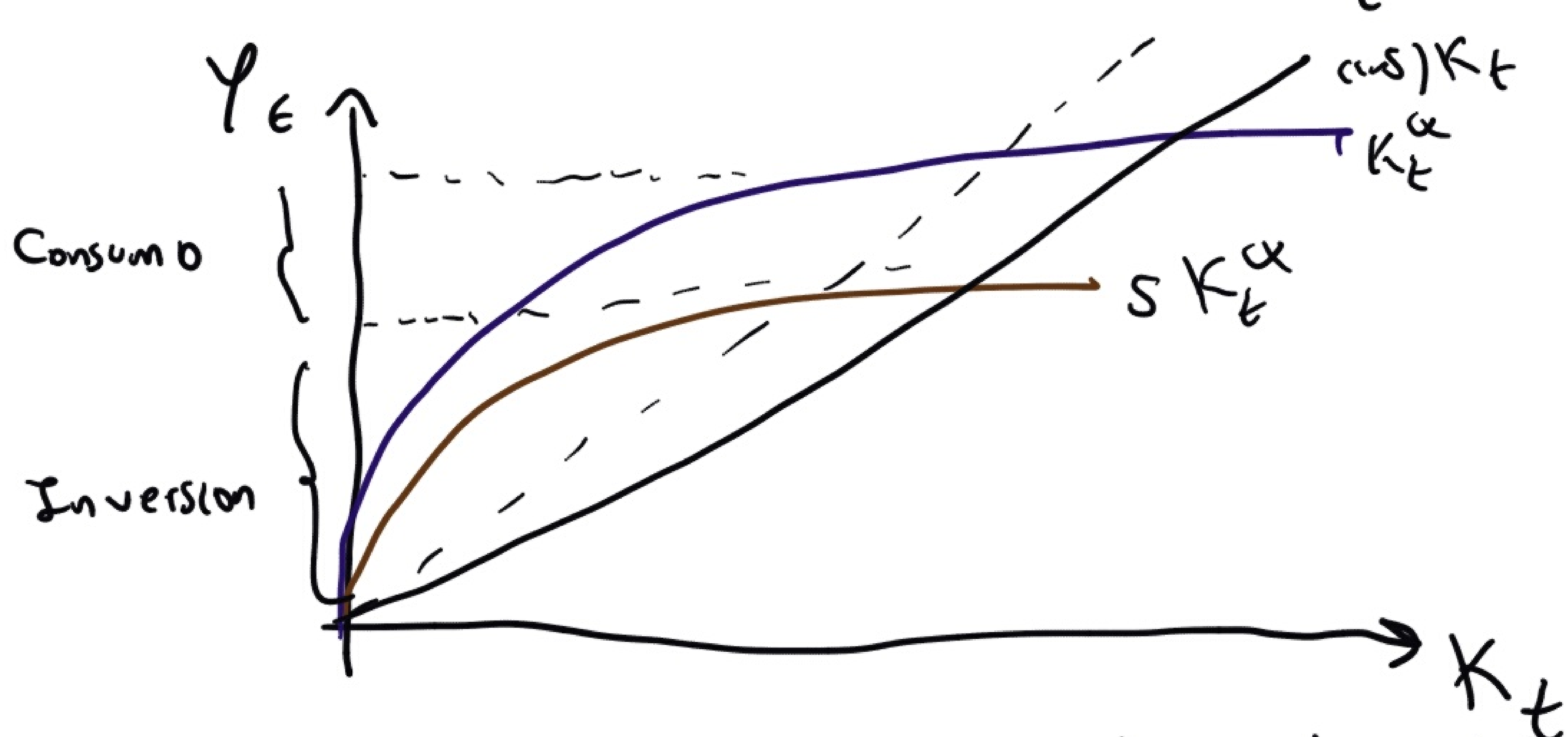
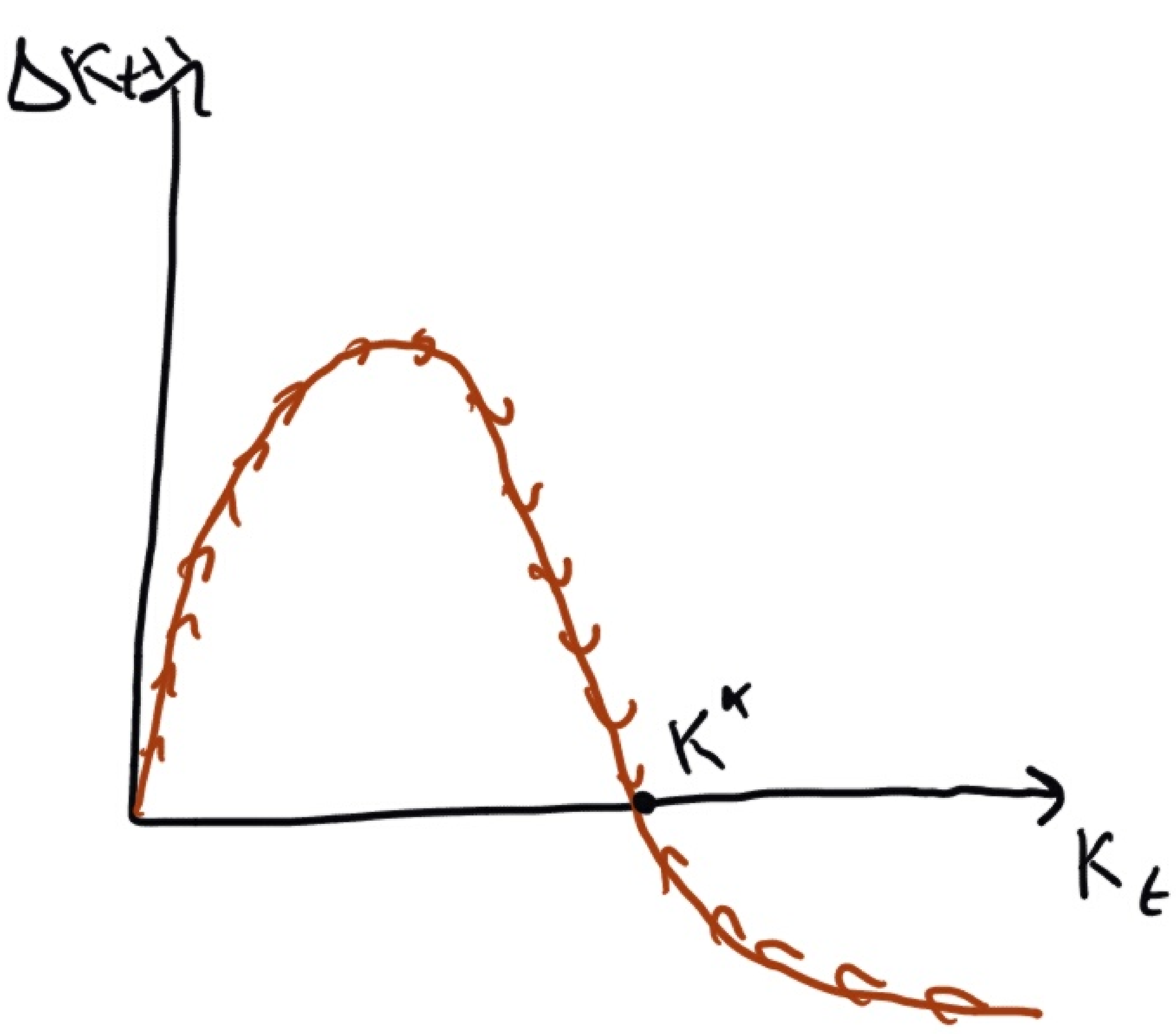


Diagrama de Fase



Trayectoria del Capital