Modelo de Solow

Ángelo Gutiérrez

Banco de Guatemala

2025

Introducción

- Modelo sencillo diseñado originalmente para el estudio de la dinámica de procesos de crecimiento y desarrollo económico
- Desarrollado por Robert Solow y Trevor Swan en 1956
- A pesar de su simpleza, es el ejemplo perfecto de un modelo dinámico de equilibrio general
- Muchas de las técnicas que utilizaremos para modelos más complicados se pueden ilustrar de forma sencilla para este modelo

El Modelo de Solow-Swan

Robert Solow, Premio Nobel de Economía 1987

“Everything reminds Milton [Friedman] of the money supply. Well, everything reminds me of sex, but I keep it it out of my papers”

Descripción del Modelo

- Hogares dueños de los factores productivos de la economía: Capital y trabajo
- Consumen una proporción fija de su ingreso, dado por la remuneración que reciben de trabajo y renta de capital
- Firmas que operan en competencia perfecta para producir el único bien de esta economía
- Estas firmas alquilan factores productivos a los hogares y resuelven un problema estático de maximización de beneficios
- El capital evoluciona de acuerdo a una ecuación de inventarios perpetuos

Hogares

- Oferta de trabajo inelástica: L_t^S
- Crecimiento de la poblacion exogeno: $L_{t+1}^S = (1+n)\, L_t^S$
- Ofrecen K_t^S y L_t^S a las firmas a precios R_t y W_t
- Dotacion inicial de K_t^S dado: $K_0^S > 0$
- Funcion de consumo keynesiana:

$$C_t = (1-s)\left(R_t K_t^S + W_t L_t^S\right)$$

Firmas

- Oferta de trabajo inelástica: L_t^S
- Crecimiento de la poblacion exogeno: $L_{t+1}^S = (1+n)\, L_t^S$
- Ofrecen K_t^S y L_t^S a las firmas a precios R_t y W_t
- Dotacion inicial de K_t^S dado: $K_0^S > 0$
- Funcion de consumo keynesiana:

$$C_t = (1-s)\left(R_t K_t^S + W_t L_t^S\right)$$

El Stock de Capital

- Los hogares son los dueños del capital, el cual se deprecia a una tasa δ.
- Así, este evoluciona acorde a:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)\, K_t$$

- Esta ecuación de movimiento de capital será el eje central del modelo.

Las Firmas

- Se asume la existencia de una firma representativa que opera en competencia perfecta.
- El problema de estas firmas es el de maximizar sus beneficios seleccionando insumos a demandar:

$$\max_{\{K_t,\, N_t\}} \Pi_t = F\left(K_t,\, N_t;\, A_t\right) - R_t K_t - W_t N_t$$

- R_t y W_t denotan el precio de renta del capital y el trabajo, respectivamente, y $F()$ denota la tecnología de producción agregada de esta economía, la cual se asume es continua y doblemente diferenciable en sus dos primeros argumentos, y A_t es el nivel de productividad, el cual se asume que se determina de forma exógena.
- También se asume que $F()$ es homogénea de grado uno y que cumple las condiciones de Inada.

Las Firmas

- De la solución del anterior problema de optimización se tienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$
\begin{aligned}
R_t =& F_K\left(K_t,\ N_t;\ A_t\right) \\
W_t =& F_N\left(K_t,\ N_t;\ A_t\right)
\end{aligned}
$$

- Las propiedades impuestas sobre la función de producción garantizan:

$$F\left(K_t,\ N_t;\ A_t\right) = F_K\left(K_t,\ N_t;\ A_t\right) K_t + F_N\left(K_t,\ N_t;\ A_t\right) N_t$$

La Identidad Macroeconómica

- Reemplazando la definición de los beneficios de las firmas en la restricción presupuestal de los hogares, se tiene:

$$Y_t = C_t + S_t$$

- Como esta economía es cerrada y no hay instrumentos de deuda, todo el ahorro se destina a inversión en capital:

$$S_t = I_t$$

Resumen

- Hogares:

$$C_t = (1 - s)\, Y_t \tag{1}$$
$$Y_t = C_t + I_t \tag{2}$$
$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)\, K_t \tag{3}$$

- Firmas:

$$Y_t = F\,(K_t,\ N_t;\ A_t) \tag{4}$$
$$R_t = F_K\,(K_t,\ N_t;\ A_t) \tag{5}$$
$$W_t = F_N\,(K_t,\ N_t;\ A_t) \tag{6}$$

El Equilibrio en el Modelo de Solow

Definición

Dadas una sucesión de $\{N_t,\ A_t\}_{t=0}^{\infty}$, y un valor inicial de stock de capital K_0, la senda de equilibrio de esta economía esta dada por una sucesión de valores para el capital, el consumo, la inversión, los salarios y los precios $\{K_t,\ C_t,\ I_t,\ W_t,\ R_t\}_{t=0}^{\infty}$, tales que se satisfacen las ecuaciones (1) a (6) para todo $t = 1, 2, \ldots$.

- Note que el equilibrio se define como una senda completa de asignaciones y precios y no simplemente como un objeto estático.
- Es decir, el equilibrio caracteriza el comportamiento de toda la economía para todo momento del tiempo.

Caso particular: Función Cobb-Douglas

- Suponga la siguiente especificación para la tecnología de producción

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

- Con lo que las demandas de factores de las firmas pueden escribirse como:

$$K_t = \frac{\alpha Y_t}{R_t}$$
$$N_t = \frac{\alpha Y_t}{W_t}$$

Modelo per Cápita

- Supongamos que la población N_t evoluciona acorde a $N_{t+1} = (1+n)\, N_t$, para un N_0 dado.
- Podemos escribir las ecuaciones que caracterizan el equilibrio de las cantidades del modelo en términos per-cápita como:

$$
\begin{aligned}
c_t &= (1-s)\, y_t \\
y_t &= c_t + i_t \\
k_{t+1} &= \frac{i_t + (1-\delta)\, k_t}{1+n} \\
y_t &= A_t k_t^{\alpha}
\end{aligned}
$$

- Reemplazando en la ecuación de movimiento del capital, el modelo se reduce a la siguiente ecuación en diferencias no-lineal:

$$
k_{t+1} = \frac{sA_t k_t^{\alpha} + (1-\delta)\, k_t}{1+n}
$$

Estado Estacionario

- Dado $A_t = \bar{A}$, es posible demostrar que el modelo converge asintóticamente a un punto estacionario donde $x_t = x_{t+1} = \bar{x}$ para $x_t \in \{k_t,\ c_t,\ y_t,\ i_t,\ R_t,\ W_t\}$.
- El nivel de capital de estado estacionario del modelo de Solow está dado por:

$$\bar{k} = \left(\frac{s\bar{A}}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$