La definición más común hace referencia a que la derivada es el límite del cociente entre el incremento de una función y el de la variable cuando este último tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejercicios usando la definición de la derivada

Derivar con la definición de límite en $y = 3x^2 - 2$

http://www.youtube.com/watch?v=GW5WPLS0rbo (5:57')

Calcular, mediante la definición, la derivada de las funciones en los puntos que se indican. Hallar la ecuación de la recta tangente en dicho punto y graficar.

$f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = 5$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+4(1+h)-5-(1^2+4\cdot 1-5)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}(h+6) = 6$$

Calcular derivada de $f(x) = x^2 - x + 1$ en $x = -1, x = 0$ y $x = 1$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+4(1+h)-5-(1^2+4\cdot 1-5)}{h} =$$

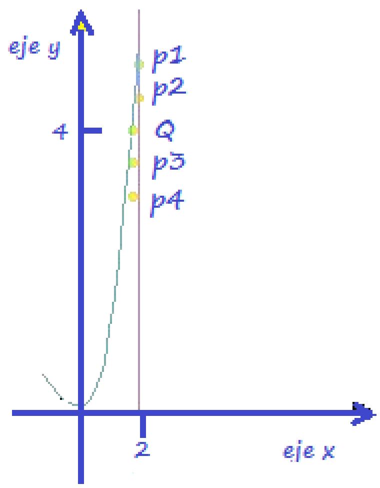
$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x-h+1-x^2+x-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}(2x+h-1) = 2x-1$$

Interpretación geométrica de la derivada

La interpretación geométrica de la derivada está relacionada directamente con la pendiente de una recta tangente a una curva que generalmente es de la forma $y = x^2$. Para deducir de una forma gráfica el concepto de derivada calculemos la pendiente de la recta tangente a la curva, $y = x^2$ en el punto $Q\ (2,4)$ como se puede observar en la gráfica:



Ahora se calculan pendientes de rectas que se aproximen a la recta tangente en el punto $Q\ (2,4)$, para esto se toman puntos P, en la curva $y = x^2$, que estén cerca del punto Q, y se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos Q y P, que se muestra en el siguiente cuadro:

Coordenadas del punto P	$3 = [2.1, (2.1)^2]$	$P_4 = [2.01, (2.01)^2]$	$2 = [2.9, (2.9)^2]$	$P_1 = [2.99, (2.99)^2]$
Pendiente de la recta que pasa por los puntos Q y P	$\frac{(2.1)^2 - 2^2}{2.1 - 2} = 4.1$	$\frac{(2.01)^2 - 2^2}{2.01 - 2} = 4.0$	$\frac{(2.9)^2 - 2^2}{2.9 - 2} = 4.9$	$\frac{(2.99)^2 - 2^2}{2.99 - 2} = 4.99$

De acuerdo a los datos obtenidos se observa que la pendiente de la recta tangente a la curva $y\ =\ x^2$, en el punto $Q(2,4)$ posiblemente está entre $4.99\ y\ 4.01$.

Para hallar, el valor exacto de la pendiente se toma el punto P con abscisa muy cerca de 2:

$$P[2 + \Delta x, (2 + \Delta x)^2], \qquad donde \quad \Delta x \neq 0$$

Δx, generalmente representa una cantidad muy pequeña y puede ser positiva o negativa, de esta forma, $2 + \Delta x$ estará muy próxima a 2. Al calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos Q y P:

$$pendiente = \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{(2+\Delta x) - 2} = \frac{4 + 4\Delta\Delta + (\Delta\Delta x^2 - 4)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

Cuando Δx se aproxime a cero o dicho de otra forma, cuando el punto P se aproxime al punto Q, entonces la pendiente de la recta que pasa por estos puntos, que es igual a que $4\ + \Delta x$ se aproxime a 4.

Resumiendo, se tiene que la recta tangente a la curva $y\ =\ x^2$ en el punto $Q(2,4)$ es igual a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{(2+\Delta x) - 2} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

El procedimiento anterior se puede resumir en el siguiente enunciado:

Si $y\ =\ f(x)$, es una curva y $Q[a, f(a)]$ es un punto sobre esta curva, entonces la pendiente de la recta tangente a la curva $y\ =\ f(x)$ en el punto $[a, f(a)]$ es igual a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Siempre y cuando el límite existe

Este límite se simboliza $f'(a)$

Y se llama derivada de f en $x\ =\ a.$

Ejemplos

Hallar con la formula anterior la derivada de $f(x) = 3x^2 + 2x$
http://www.youtube.com/watch?v=Ylni2dpl87k (5:56')

1. Hallar $\frac{dx}{dy}$ para la función $y = x$

Para su cálculo se halla:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ donde $f(x) = x$

Entonces se tiene $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

2. Calcular $\frac{dx}{dy}$ para la función $f(x) = 5x + 2$

Se desarrollan los siguientes pasos

Se forma el cociente de diferencias $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{[5(a+\Delta x)+2]-(5x+2)}{\Delta x} = \frac{5a+5\Delta\Delta+2-5x-2}{\Delta x} = \frac{5\Delta\Delta}{\Delta x} = 5$$

Se calcula el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$

3. Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Se tiene que $f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{(x+\Delta x)} - \sqrt{x}$

Racionalizando

$$= \left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}\right) = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}} = \frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

Entonces se tiene que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función se puede representar también como $\frac{dx}{dy}$ y se lee derivada de la función y con respecto a la variable x.

Otras formas de expresar la derivada son: D_y, $f'(x)$, y' que se usaran en este curso indistintamente.

Reglas de derivación

Derivada de una constante: $y = k \Longrightarrow y' = 0$

Derivar $y = 5$ http://www.youtube.com/watch?v=3yRtTT5ukcw (1:46')

Ejemplos

1. $f(x) = 7$ la derivada es $f'(x) = 0$
2. $f(x) = -4$ la derivada es $f'(x) = 0$
3. $f(x) = e$ la derivada es $f'(x) = 0$
4. $f(x) = \pi$ la derivada es $f'(x) = 0$
5. $f(x) = \frac{-\sqrt[5]{3}}{\sqrt{7}}$ la derivada es $f'(x) = 0$

Derivada de potencias: $y = x^n \Longrightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

Los ejercicios desde el 1 hasta el 4 se resuelven en el video
http://www.youtube.com/watch?v=A-xrIDIHVlI (8:11')

$f(x) = x$ la derivada es $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$

1. Derivar la función de $y = 12x^3$
2. Derivar la función de $y = \frac{12}{x^3}$
3. $f(x) = x^6$ la derivada es $f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$
4. $f(x) = x^3$ la derivada es $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

5. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ la derivada es $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$
6. $f(x) = x^{-7}$ la derivada es $f'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{8} = \frac{-7}{x^8}$
7. $f'(x) = x^{\frac{-4}{7}} f(x) = x^{\frac{-4}{7}}$ la derivada es $f'(x) = \frac{-4}{7}x^{\frac{-4}{7}-1} = \frac{-4}{7}x^{\frac{-11}{7}} = \frac{-4}{7x\sqrt[7]{x^4}}$

Derivada de la suma (resta): $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

Derivar $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2$ http://www.youtube.com/watch?v=NtUY8bEmbiY (3:25')

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$ la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ la derivada es $f'(x) = 15x^2 + 6x + 6$
3. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6x + 8$ la derivada es $f'(x) = -6x^2 + 6x - 6$
4. $f(x) = x^{-3} + x^2 + x^{-1} + 7$ la derivada es $f'(x) = -3x^{-4} + 2x - x^{-2}$
5. $f(x) = x^{1/2} + 4x^{2/3} + 7x + 3$ la derivada es $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{8}{3}x^{-1/3} + 7$
6. $f(x) = 4x^{-5} + 6x^{3/2} + 3x^{-5/2} + 3$ la derivada es

   $$f'^{(x)} = -20x^{-6} + 9x^{1/2} - \frac{15}{2}x^{-7/2}$$

7. $f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x - 3$ la derivada es $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$
8. $f(x) = \frac{8}{3}x^4 + \frac{5}{3}x^{2/3} + 5x^{-2/5} - 13$ la derivada es

   $$f'^{(x)} = \frac{32}{3}x^3 + \frac{10}{9}x^{-1/3} - 2x^{-7/5}$$

Derivada del producto: $y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'g + fg'$
Los ejercicios 1 y 2 se pueden verificar en el video
http://www.youtube.com/watch?v=-3DEqHUWs8c (4:00')

Derivar $f(x) = (5x^4 - 3x)$ y $g(x) = (2x^3 - 4)$

Derivar $f(x) = (3x^5 - 1)$ y $g(x) = (4x^2 - 6x)^3$

1. Hallar la derivada de $f(x) = (3x^2 + 3)(2x^2 + 1)$

   $f'(x) = 6x(2x^2 + 1) + (3x^2 + 3)4x = 12x^3 + 6x + 12x^3 + 12x = 24x^3 + 18x$
   $= 6x(4x^2 + 3)$

2. Hallar la derivada de $f(x) = (-x^2 + 4x + 5)(4x^4 - 3)$

   $f'(x) = (-2x + 4)(4x^4 - 3)(-x^2 + 4x + 5)16x^3$

   $= -8x^5 + 6x + 16x^4 - 12 - 16x^5 + 64x^4 + 80x^3 = -24x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 6x - 12$

   $= -2(12x^5 - 40x^4 - 40x^3 - 3x + 6)$

3. Hallar la derivada de $f(x) = (x + 5x^2 + 6x^3)(4x^2 - 5)$

   $f'(x) = 120x^4 + 80x^3 - 78x^2 - 50x - 5$

Derivada del cociente: $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Derivar $y = \frac{2-3x}{4-5x}$ http://www.youtube.com/watch?v=oalB19VBvXk (7:22')

1. Hallar la derivada de $f(x) = \frac{2x^3+5}{4x^2+7}$

   $f'(x) = \frac{6x^2(4x^2+7)-(2x^3+5)8x}{(4x^2+7)^2} = \frac{24x^4+42x^2-16x^4-40x}{(4x^2+7)^2} = \frac{8x^4+42x^2-40x}{(4x^2+7)^2}$

   $$\frac{2x(4x^3 + 21x - 20}{(4x^2 + 7)^2}$$

2. Hallar la derivada de $f(x) = \frac{4x^3-5x^2}{3x^2-4}$

$$f'^{(x)} = \frac{(12x^2-10x)(3x^2-4)-(4x^3-5x^2)6x}{(3x^2-4)^2} = \frac{36x^4-48x^2-30x^3+40x-24x^4+30x^3}{(3x^2-4)^2} = \frac{12x^4-48x^2+40x}{(3x^2-4)^2}$$

$$\frac{4x(3x^3-12x+10)}{(3x^2-4)^2}$$

Derivada de una raíz $\quad y = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

$$y' = \frac{m}{n}x^{((m/n)-1)}$$

Los videos 1 y 2 se pueden verificar en http://www.youtube.com/watch?v=nBiVLxtzM5w (3:07')

Derivar $y = \sqrt[3]{x^5}$

Derivar $y = \sqrt[4]{(3x^2-x)^2}$

Derivar $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1. Derivar $f(x) = \sqrt[5]{x}$
   $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$
   $f'^{(x)} = \frac{1}{5}x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
   $f(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$
   $f'^{(x)} = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5x^{1/5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

Inversa: $\quad y = \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Revisar el documento para recordar función inversa
http://www.youtube.com/watch?v=eqqkBKP0mEo (24:30')

1. $f(x) = \frac{1}{x^3}$
   $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$
   $f(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

2. $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

   $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$

   $f'^{(x)} = -\frac{3}{2}x^{-(3/2)\,-1} = -\frac{3}{2}x^{-(5/2)} = -\frac{3}{2x^{5/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

Derivada de Logaritmos: $y = \log x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = log_a x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{log\ a}$

$y = log_a f(x) \Longrightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{log\ a} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{log\ a}$

Los ejercicios del 1 al 3 se pueden verificar en http://www.youtube.com/watch?v=6GBLkGLkRJY (5:30')

Hallar la derivada de $y = logx^3$

Hallar la derivada de $y = ln2x^3$

Hallar la derivada de $y = log_3 x^4$

1. Hallar la derivada de $f(x) = 5ln(x)$

   $f'(x) = \frac{5}{x}$

2. Hallar la derivada de $f(x) = \frac{3}{5}ln(x)$

   $f'(x) = \frac{3}{5x}$

3. Hallar la derivada de $f(x) = ln(2x)$

   $f'(x) = \frac{2}{2\text{x}} = \frac{1}{\text{x}}$

4. Hallar la derivada de $f(x) = ln\left(\frac{3x}{4}\right)$

$f'(x) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3x}{4}} = \frac{1}{x}$

5. Hallar la derivada de $f(x) = ln(x^2)$

   $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$

   $f'(x) = \frac{2}{x}$

6. Hallar la derivada de $f(x) = ln(x^{-5})$

   Verificar que es lo mismo $f(x) = ln(x^{-5}) = -5ln(x)$

$$f'(x) = \frac{-5x^{-6}}{x^{-5}} = \frac{-5x^5}{x^6} = -\frac{5}{x}$$

REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena se enuncia si se tiene una función $y = f(u)$ derivable de u, y $u = g(x)$, es decir, derivable de x, entonces se puede afirmar que $y = f[g(x)]$ siendo función derivable de x, con:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ que es lo mismo que $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'^{[g(x)]}g'(x)$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ con $y = (x^3 + 2)^4$

$y = (x^3 + 2)^4$ como $u = x^3 + 2 \Rightarrow y = u^4$

Aplicando la regla de la cadena

$\frac{dy}{dx} = 4(x^3 + 2)^3(3x^2) = 12x^2(x^3 + 2)^3$

Donde $\frac{dy}{du} = 4(x^3 + 2)^3$ y $\frac{du}{dx} = (3x^2)$

Ejemplo

$y = cos^2 x + \cos(x^2)$ https://www.youtube.com/watch?v=eAlRGsCR_nY (2:30')

$f(x) = (1 + 4x - 2x^2)^5$ https://www.youtube.com/watch?v=kCjg7TxVk9M (3:10')

Funciones trigonométricas:

$$y = \ sen\ x \Longrightarrow y' = \cos x$$
$$y = \ cos\ x \Longrightarrow y' = -\text{sen}\, x$$
$$y = \ tan\ x \Longrightarrow y' = \sec^2 x$$

Los siguientes ejemplos se encuentran en: https://www.youtube.com/watch?v=cP1Ss34Mkz8 (17:48')

1. Derivar $f(x) = sen\ x \cdot cosx$
2. $y = tan\ (5x^2)$
3. $g(x) = \frac{\cot x}{x}$
4. $y = \sec(8x^3 + 1)$
5. $h(x) = \csc(\pi x)$

Tabla de derivadas

	FUNCIÓN	DERIVADA		FUNCIÓN	DERIVADA
1	$y = k$	$y' = 0$	19	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
2	$y = x$	$y' = 1$	20	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	21	$y = \sqrt[3]{u}$	$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
4	$y = e^x$	$y' = e^x$	22	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x L(a)$	23	$y = u^v$	$y' = u^v Log\,(u)v' + vu^{v-1}u'$
6	$y = L(x)$	$y' = \frac{1}{x}$	24	$y = L\left(\frac{u}{v}\right)$	$y' = \frac{u'v - uv'}{uv}$
7	$y = log_b(x)$	$y' = \frac{1}{xL(b)}$	25	$y = ue^v$	$y' = (u' + uv')e^v$
8	$y = sen(x)$	$y' = cos(x)$	26	$y = f^{-1}(x)$	$y' = \frac{1}{f'(x)}$
9	$y = cos(x)$	$y' = -sen(x)$	27	$y = Arc\,sen(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$y = tan(x)$	$y' = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$	28	$y = Arc\,cos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y = cot(x)$	$y' = -\left(1 + cot^2(x)\right) = \frac{-1}{sen^2(x)}$	29	$y = Arc\,tan(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
12	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	30	$y = Arc\,cot(x)$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
13	$y = (g(x))^n$	$y' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$	31	$y = sh(x)$	$y' = ch(x)$

14	$y = e^{g(x)}$	$y' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$	32	$y = ch(x)$	$y' = sh(x)$
15	$y = L(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} g'(x)$	33	$y = th(x)$	$y' = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$
16	$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$	34	$y = Arg\ sh(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
17	$y = u + v$	$y' = u' + v'$	35	y = Arg ch(x)	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
18	$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$	36	y = Arg th(x)	$y' = \frac{1}{1-x^2}$