Aplicaciones de derivadas

1. Comprobar que la función $f(x) = x^4$ es creciente en todo el dominio de los reales positivos $\mathbb{R}^+$ y decreciente en los reales negativos $\mathbb{R}^-$

   Hallando la derivada de $f(x) = x^4$ entonces se tiene:

   $f'(x) = 4x^3$ se tiene que para todo x positivo que pertenezca a los reales positivos $\mathbb{R}^+$, la derivada es positiva, entonces es creciente, para todos los x que sean reales negativos $\mathbb{R}^-$, la derivada da negativa, por lo tanto es decreciente, en $x = 0$ la derivada es constante igual a cero

2. Determinar en que intervalos la funcion $f(x) = x^3 - 2x^2$ es creciente o decreciente

   $f'(x) = 3x^2 - 4x$ Factorizando se tiene $f'(x) = x(3x - 4)$y analizando el signo de f' se obtiene:

   La funcion es creciente en el intervalo $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$

Problemas de máximos y mínimos

De las aplicaciones más importantes del cálculo es la de máximos y mínimos en la solución de problemas, que en cursos anteriores se resolvían, por ejemplo, mediante ecuaciones simultáneas.

1. ¿Cuáles serán las máximas dimensiones de una caja abierta con base cuadrada, que se podrá construir con 12 metros cuadrados de material?

   Como la caja es cuadrada, su volumen será: $V = x^2h$

   Además, es abierta, entonces: A_t = área de la base + área de las 4 caras laterales.

   $$A_t = 12m^2 = x^2 + 4xh$$

   Ahora, como se trata de maximizar el volumen, entonces lo expresamos en función de una sola variable. Para realizar esto, se despeja h de la ecuación de área total en términos de x, con lo que se obtiene:

$$A_t = x^2 + 4xh = 12$$

$$h = \frac{12 - x^2}{4x}$$

Sustituyendo este valor en $V = x^2h$:

$$V = x^2\left(\frac{12 - x^2}{4x}\right) = x\left(\frac{12 - x^2}{4}\right) = \left(\frac{12x - x^3}{4}\right) = \frac{12x}{4} - \frac{x^3}{4} = 3x - \frac{x^3}{4}$$

Función variable.

El valor de la variable x, produce el máximo volumen y debe ser un valor no negativo. También se sabe que el área de la base es máxima igual a 12 es decir:

$$0 \leq x \leq \sqrt{12}$$

Para maximizar el volumen se hallan los números críticos:

$$\frac{dV}{dx} = 3 - \frac{2x}{4} = 0$$

$$2x = 12$$

$x = \frac{12}{2} = 6$ Número critico

Evaluando el volumen en el punto crítico del dominio, y en los puntos terminales del dominio, se observa:

$$V(0) = 0 \qquad V(6) = 12 \qquad y \qquad V(\sqrt{12}) = 0$$

De lo que se concluye que el volumen es maximo cuando x=6, es decir para una caja de dimensiones:

$$x = 6 \quad y \quad V = x^2h \implies h = \frac{V}{x^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Luego las dimensiones de la caja serán $6 \times 6 \times \frac{1}{3}$

Establezcamos un procedimiento general para el desarrollo de los problemas de máximos y mínimos:

Se asignan símbolos a todas las cantidades involucradas en el problema. Las enunciadas y las variables a determinar.

Se elabora una gráfica del problema en la medida que sea posible.

Escribimos una primera ecuación que involucre la magnitud que se ha de hacer máxima o mínima.

Reducimos la primera ecuación a otra que tenga una sola variable independiente. Este proceso se desarrolla mediante el uso de una segunda o tercera ecuación que relacionen las variables independientes de la primera ecuación.

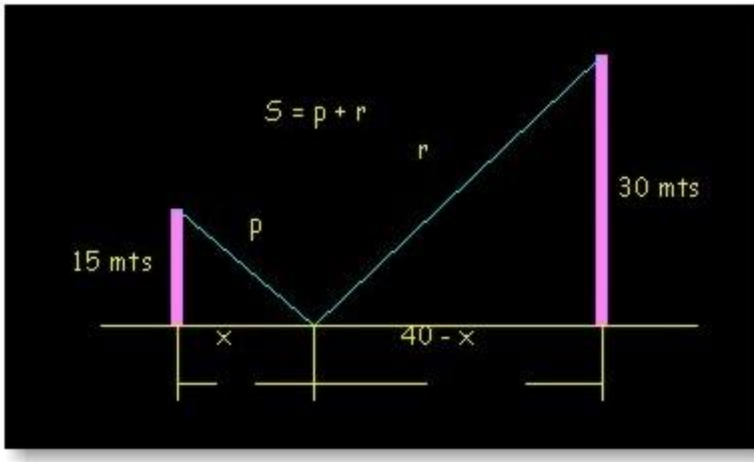
Se halla el valor máximo o mínimo comparando los valores de la función en sus extremos relativos con los valores en los puntos terminales del intervalo cerrado.

2. Dos torres de 15 y 30 metros de altura respectivamente, están separadas una distancia de 40 metros entre sí. Se quiere unir las dos torres por medio de un cable con la particularidad de que esté fijado al piso entre las puntas de las torres.

   ¿En qué punto del piso se debe fijar el cable para utilizar la mínima cantidad de cable posible?

   A. Designemos S como la longitud del cable.

B. Elaboremos la gráfica del problema:



C. Escribimos una primera ecuación que involucre la magnitud que se ha de hacer mínima.
S= $p + rs$

D. Despejamos el valor de p y de r en función de una sola variable x: Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene

$$x^2 + 15^2 = p^2 \Longrightarrow x^2 + 225 = p^2$$

$$p = \sqrt{x^2 + 225}$$

$$(40 - x)^2 + 30^2 = r^2$$

$$1600 - 80x + x^2 + 900 = r^2$$

$$r = \sqrt{x^2 - 80x + 2500}$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación:

$$S = p + r = \sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{x^2 - 80x + 2500}$$

Con $0 \leq x \leq 40$

Derivando S respeto a x:

$$S = (x^2 + 225)^{1/2} + (x^2 - 80x + 2500)^{1/2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + 225)^{-1/2}(2x) + \frac{1}{2}(x^2 - 80x + 2500)^{-1/2}(2x - 80)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 225}} + \frac{2(x - 40)}{2\sqrt{x^2 - 80x + 2500}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 225}} + \frac{x - 40}{\sqrt{x^2 - 80x + 2500}}$$

Haciendo $\frac{dS}{dx} = 0$ y resolviendo:

$$x^2(x^2 - 80x + 2500) = (40 - x)^2(x^2 + 225)$$

Simplificando:

$$3x^2 + 80x - 1600 = 0$$

Utilizando la formula general de segundo grado:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-80 \pm \sqrt{(80)^2 - 4(3)(-1600)}}{2(3)} = \frac{-80 \pm \sqrt{6400 + 19200}}{6}$$
$$= \frac{-80 \pm 160}{6}$$

$x_1 = 13.3 \qquad x_2 = -40$

Descartamos el valor de $x_2 = -40$ por no estar en el intervalo $[0, 40]$

$S(0) = 65, \quad S(40) = 72{,}72 \quad y \quad S(13.33) = 60.2$ Mínimo

Se concluye entonces que el cable debe fijarse a 13,33 metros de la torre de 15 metros.

RAZONES RELACIONADAS

Las razones relacionadas son las variaciones que se producen en dos o más variables en la unidad de tiempo. Son aplicables a los problemas básicos vistos en física, como son los de caída libre, movimiento rectilíneo, etc. También los estudiados en el área de geometría como que tienen que ver con las figuras geométricas y sus medidas de longitud, capacidad o volumen.

Ejemplo

1. Un objeto se deja caer sobre una piscina con el agua en reposo, al caer produce ondas circulares. El radio (r) de la onda exterior crece al ritmo constante de 2 m por segundo. Cuando el radio es de 6 m.

   ¿Con qué período está creciendo el área total de la zona donde se están creando las ondas?

   El radio y el área son términos que se relacionan con el área del círculo, que viene dada por la formula:

   $$A = \pi r^2$$

   Recordemos que la razón que relaciona al radio r , con el tiempo viene dada por la expresión

   $$\frac{dr}{dt}$$

   Entonces se tiene que:

   Crecimiento de la onda inicial

   $$A = \pi r^2$$

   $$\frac{dr}{dt} = 2$$

   Cuando el radio es igual a 4m

   Ecuación del área

$$A = \pi r^2$$

Calculemos la derivada del area en funcion del tiempo

$$\frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\pi r^2}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Entonces cuando el radio es igual a 6m, se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(6)(1) = 12\pi \frac{m}{s}$$

El desarrollo del ejemplo anterior se puede resumir en los siguientes pasos:

Se asignan símbolos a las variables dadas y a las variables por determinar.

Escribir la ecuación que involucra todas las variables, es decir, las dadas y las por determinar.

Utilizando la regla de la cadena se derivan implícitamente los dos miembros de la ecuación respecto del tiempo t.

En la ecuación resultante, se sustituyen todos los valores de las variables conocidas con sus razones de cambio.