Derivar implícitamente es considerar uno de los términos (y) de una igualdad como función del otro término (x), para que después de tener la ecuación resultante se despeje el valor de dy / dx.

Para realizar dicho procedimiento se recomienda utilizar los siguientes pasos:

- Derivar los dos lados de la ecuación respecto a x
- Aislar los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo de la ecuación y los demás en el lado derecho
- Factorizar $\frac{dy}{dx}$
- Despejar $\frac{dy}{dx}$ dividiendo cada uno de los lados de la ecuación por el factor de la izquierda que no contiene $\frac{dy}{dx}$

Ejemplo

Calcular $\frac{dy}{dx}$ si $y^4 + y^3 - 6y - x^3 = 3$

Siguiendo los pasos $(1-4)$ se tiene:

Se derivan los dos términos de la ecuación respecto de x:

$$\frac{d}{dx}y^4 + \frac{d}{dx}y^3 - \frac{d}{dx}6y - \frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}3$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Factorizando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 + 3y^2 - 6) = 3x^2$$

Dividiendo los dos términos por $(4y^3 + 3y^2 - 6)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{4y^3+3y^2-6}$$

PROPIEDAD GENERAL DE LAS POTENCIAS

Ampliemos un poco el concepto de la derivada de una potencia que está enunciada por las fórmulas:

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ y $\frac{d}{dx}(x) = 1$

Ahora veámosla como un caso particular de la regla de la cadena y para caso se tiene que si $y = [u(x)]^n$, donde se cumpla que u sea una función derivable de x y n es un número racional, se tiene que:

.$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$

Que de una forma más abreviada:

.$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$

Ejemplo

Hallar la derivada de $f(x) = (4x - 3x^3)^4$

Para aplicar la formuna general $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u$

Se hace $u = 4x - 3x^3$ y queda entonces que f(x)= $(4x - 3x^3)^4 = u^4$

Desarrollando

.$f'(x) = 4(4x - 3x^2)^3\frac{d}{dx}(4x - 3x^3)$

.$= 4(4x - 3x^2)^3(x - 3x^2) = (4x - 12x^2)$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Una derivada de orden superior es aquella derivada que resulta de formar una nueva función a partir de una primera derivada, es decir, si se tiene una función f que es derivable, se puede formar una nueva función que se denota por $f´$y se lee primera derivada de f, y así sucesivamente se pueden ir formando derivadas a partir de la anterior y se nombran segunda, tercera derivada de f, etc.

Ejemplos

1. Hallar la tercera derivada de $y = x^3 + x^6$

   Primera derivada $\quad y' = 3x^2 + 6x^5$

   Segunda derivada $\quad y'' = 6x + 30x^4$

   Tercera derivada $\quad y''' = 6 + 120x^3$

Derivada de funciones con exponente fraccionario $\mathrm{f(x) = x^3(1-x^3)^{2/3}}$

Observa que lo primero que está planteado es un producto, luego:

$$\mathrm{f'^{(x)} = x^3 \frac{d}{dx}(1-x^3)^{2/3} + (1-x^3)^{2/3}\frac{d}{dx}x^3}$$

Aplicando la derivada de una potencia

$.= x^3\left[\frac{2}{3}(1-x^3)^{-1/3}(-3x^2)\right] + (1-x^3)^{2/3}(3x^2)$

$.= x^3\left[-(2x^2)(1-x^3)^{-1/3}\right] + (3x^2)(1-x^3)^{2/3}$

$.= -2x^5(1-x^3)^{-1/3} + (3x^2)(1-x^3)^{2/3}$

Factorizando

$.= x^2(1-x^3)^{-1/3}[-2x^3 + 3(1-x^3)]$

$.= x^2(1-x^3)^{-1/3}[-2x^3 + 3 - 3x^3)]$

Simplificando:

$.= \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}(3-5x^3) = \frac{x^2(3-5x^3)}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

2. Derivar

$$.f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}$$

$$.f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}} = (x)(x^2+4)^{-1/3}$$

Desarrollando el producto:

$$.= x\frac{d}{dx}(x^2+4)^{-1/3} + (x^2+4)^{-1/3}\frac{d}{dx}x$$

$$.= -\frac{x}{3}(x^2+4)^{-4/3}(2x) + (x^2+4)^{-1/3}$$

$$.= -\frac{2x}{3}(x^2+4)^{-4/3} + (x^2+4)^{-1/3}$$

Factorizando

$$.= (x^2+4)^{-4/3}\left[(x^2+4) - \frac{2x^2}{3}\right] = \frac{(x^2+4)-\frac{2x^2}{3}}{(x^2+4)^{4/3}} = \frac{\frac{3x^2+12-2x^2}{3}}{(x^2+4)^{4/3}} = \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}}$$