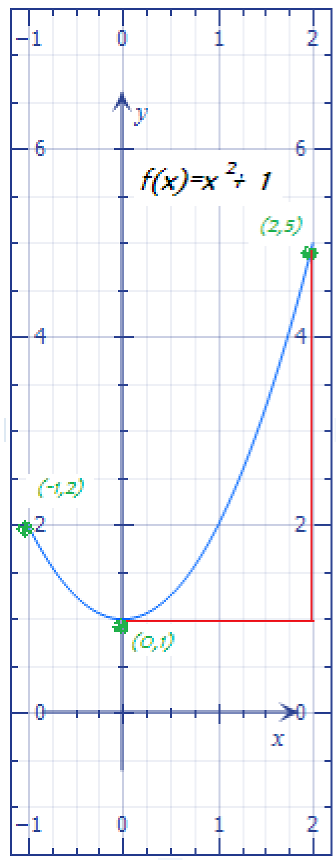
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Máximos y mínimos

Los máximos y mínimos son los mayores o menores valores que alcanza una función en un intervalo dado. También reciben el nombre de valores extremos de la función.



En la figura se observa que la función $f(x) = x^2 + 1$, está definida en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, entonces se puede afirmar que:

- $f(c)$ es el minimo de la función en el intervalo si $f(c) \leq f(x)$ para todo valor de x que se encuentre en el intervalo
- $f(c)$ es el máximo de la función en el intervalo si $f(c) \geq f(x)$ para todo valor de x que se encuentre en el intervalo

De los anteriores conceptos, se desprende el teorema del valor extremo que se refiere a que si f es continua en un intervalo cerrado, entonces la función alcanza su máximo y mínimo en el intervalo. En la gráfica de una función, un máximo se pude perder en el momento que el intervalo cambie. Es decir, si en lugar de que el intervalo sea cerrado es abierto.

Veamos la siguiente gráfica:

De la gráfica se pueden definir los conceptos de extremos relativos:

- Si existe un intervalo abierto en el que $f(c)$ tiene un máximo, entonces $f(c)$ se llama máximo relativo de la función.
- Si existe un intervalo abierto en el que $f(c)$ tiene un mínimo, entonces $f(c)$ se llama mínimo relativo de la función.
- Los extremos relativos solo se presentan en los puntos críticos.

En una función definida en cualquier número real c, se pueden reconocer puntos críticos de la función cuando $f(c) = 0$, o si la función no está definida en c. Expresado de otra manera se tiene que si la función tiene un extremo relativo en el punto x = c, entonces c será un número crítico de la función.

Ejemplo

Hallar los extremos de $f(x) = 2x^3 - x^2$ en el intervalo $[-1,2]$ (puntos terminales)

Se hallan primero los números críticos derivando la función:

$f'(x) = 6x^2 - 2x$ haciendo $f'(x) = 0$ se tiene que:

$6x^2 - 2x$ =0 factorizando: $2x(3x - 1) = 0$

Se hallan los valores de x igualando a cero cada uno de los factores

$$x = 0 \quad y \quad x = 1/3$$

Luego entonces los numero críticos son $x = 0 \quad y \quad x = 1/3$

Ahora evaluando la función en los puntos críticos $(0, 1/3)$ y en los terminales $[-1,2]$ se determina que:

$.f(x) = 2x^3 - x^2$

Para $x = 0$ $\quad .f(0) = 2(0)^3 - (0)^2 \Longrightarrow f(0) = 0$

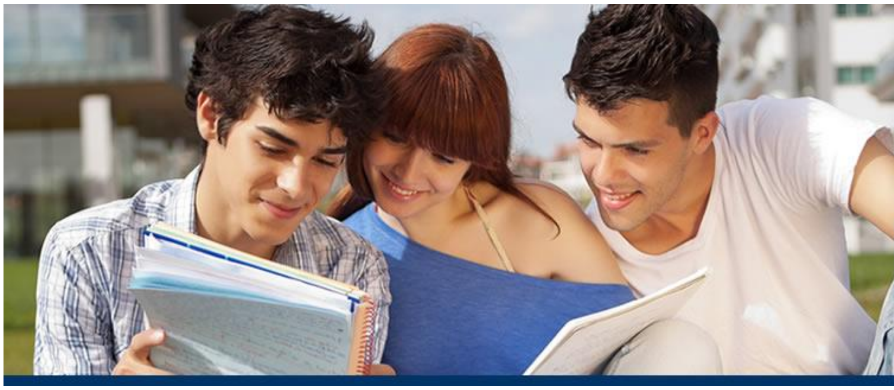
Para $x = \frac{1}{3}$ $\quad .f\left(\frac{1}{3}\right) = 2(\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2-3}{27} = -\frac{1}{27} = -0.037$

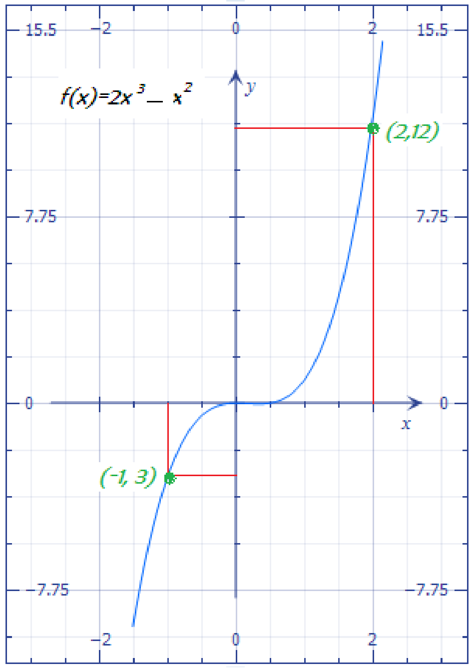
Para $x = -1$ $\quad .f(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^2 \Longrightarrow f(-1) = -2 - 3 = -3$ Mínimo.

Para $x = 2$ $\quad .f(2) = 2(2)^3 - (2)^2 \Longrightarrow f(2) = 16 - 4 = 12$ Máximo.

Resumiendo los valores obtenidos, se tiene:

Punto terminal	Numero critico	Numero critico	Punto terminal
$f(-1) = -3$ Mínimo	$f(0) = 0$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = -0.037$	$f(2) = 12$ Máximo





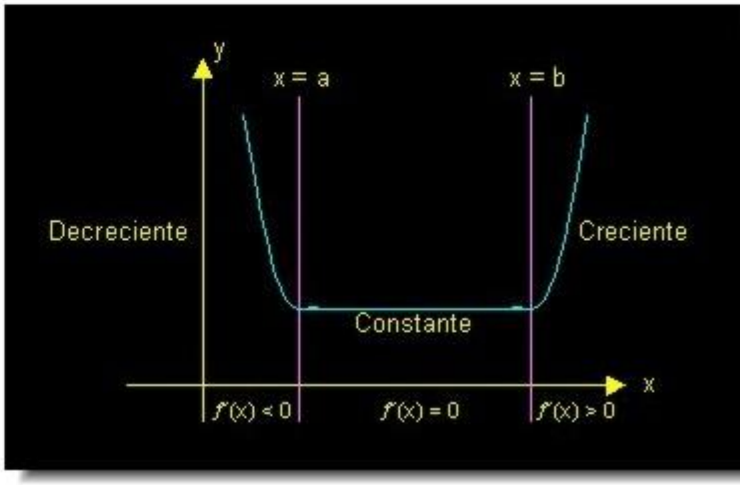
El procedimiento que se ha seguido para hallar los extremos en un intervalo cerrado se puede resumir en los siguientes pasos:

- Se deriva la función dada para hallar los números críticos.
- Se evalúa la función en cada número crítico que tenga en (a, b).
- Se evalúa la función en los puntos a y b.
- El menor de tales valores es el Mínimo; y el mayor es el Máximo.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Durante el estudio de la derivada se ha visto que se pueden hallar los puntos máximos y mínimos de una función. También es posible analizar cuando la función es creciente o decreciente.

Sea la figura:



Una función es creciente si para todo par de números x1 y x2 en el intervalo, se cumple que $x_1 < x_2$ y luego $f(x_1) < f(x_2)$ Similarmente, una función es decreciente si para todo par de números x_1 y x_2 en el intervalo, se cumple que $x_1 < x_2$ y luego $(x_1) > f(x_2)$.

Entonces, si la función es derivable en un intervalo (c, d) se tiene que:

Si $f'(x) > 0$, para todo x en el intervalo (c, d) ⟹la función es creciente en el intervalo (c, d).

Si $f'(x) < 0$, para todo x en el intervalo (c, d) ⟹la función es decreciente en el intervalo (c, d).

Si $f'(x) = 0$, para todo x en el intervalo (c, d) ⟹la función es constante en el intervalo (c, d).