中山大学本科生期末考试

考试科目：《数字信号处理》（A 卷）

学年学期：2019-2020 学年第 1 学期　　姓　　名：________________

学 院/系：电子与通信工程学院　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　班　　别：________________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------------以下为试题区域，共 7 道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答------------

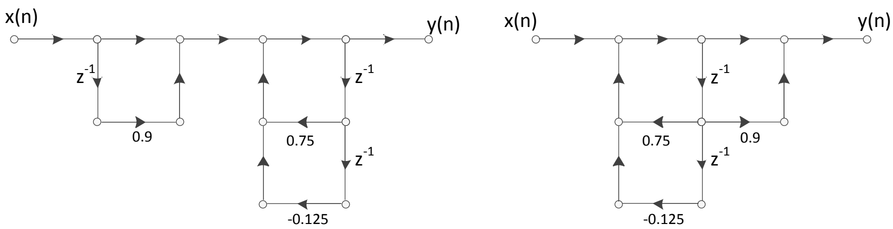
1.（15分）已知某系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}},|z|>0.5$ 。

（1）写出系统的差分方程；（3分）

答： $y(n)=x(n)+0.9x(n-1)+0.75y(n-1)-0.125y(n-2)$ ，系数错误扣1分。

（2）画出其直接I型、直接II型网络结构；（各2分）

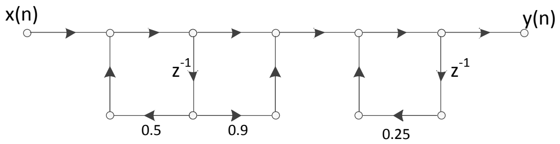
答：



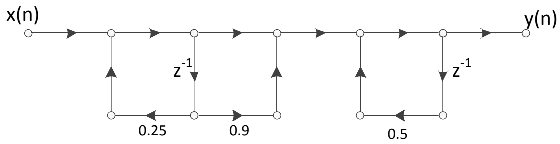
（3）写出串联型、并联型系统函数并画出网络结构；（4分）

答：串联型系统函数 $H(z)=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\times\dfrac{1}{1-0.25z^{-1}}=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}\times\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$　2分

$$=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\times\frac{1+0.9z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}\times\frac{1+0.9z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

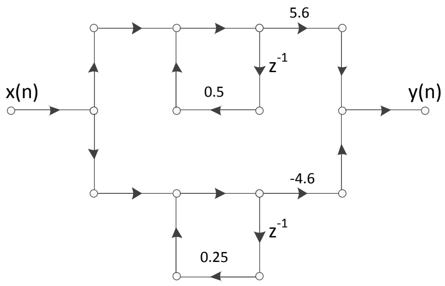
网络结构：

或



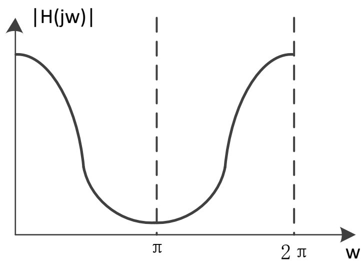
或者上述两者前后部分交换顺序。2分

并联型系统函数：$H(z)=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{5.6}{1-0.5z^{-1}}+\dfrac{-4.6}{1-0.25z^{-1}}$，2分

并联型网络结构：

2分

（4）简要画出其幅频特性（数字频率范围[0,2π]），并判断滤波器类型（提示：利用系统的零极点分布）。（4分）

答：画零极点图，可得幅频特性如图：

（2分）；为低通滤波器（2分）。

2.（15分）设有FIR滤波的冲击响应为$h(n)=\delta(n)+3\delta(n-1)+5\delta(n-2)+3\delta(n-3)+\delta(n-4)$。

（1）求该滤波器的系统函数H(z)（3分）；

答：$H(z)=1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4}$

（2）滤波器频率响应具有线性相位是指什么（2分）？简述其重要性（2分）。求上述滤波器频率响应的相位特性 $\theta(w)$（2分）；

答：线性相位指滤波器频率响应的相频特性满足线性相位，即$\dfrac{d\theta(w)}{dw}=-\tau$；线性相位能够保证信号中不同频率成分的群延时一致，从而保证信号不会出现失真，在图像传输处理与信号保真

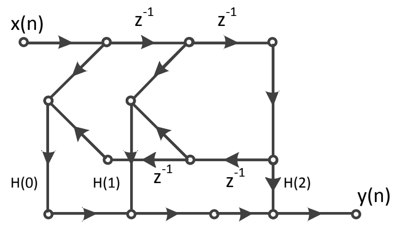
处理中非常重要；$\theta(w)=-\dfrac{N-1}{2}w=-2w$。

（3）该滤波器是一个什么类型（低通，带通、带阻、高通）的滤波器？（提示：利用滤波器幅度特性$H_g(w)=h(\tau)+\sum\limits_{n=0}^{M-1}2h(n)\cos[w(n-\tau)],\tau=(N-1)/2$进行粗略估算）（3分）；

答：$H_g(0)=13;H_g(\pi/2)=3,H_g(\pi)=1$，应该是一个低通滤波器。

（4）试画出该滤波器节约乘法器的高效网络结构（3分）。

答：高效结构为



3．（13分）设计一个巴特沃斯模拟高通滤波器，要求其通带边界频率为10Hz，阻带边界频率为100Hz，通带最大衰减1dB，阻带最小衰减20dB。

（1）求出对应的低通滤波器阶数N，和归一化3dB截止频率λ_c；（4分）

答：$\lambda_{sp}=\dfrac{\lambda_s}{\lambda_p}=10,k_{sp}=\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=19.5538$，$N=\dfrac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=1.2912;so\ N=2$，

$\lambda_c=\Omega_p(10^{0.1a_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}=1.4019;\quad or\quad \lambda_c=\lambda_s(10^{0.1a_s}-1)^{-\frac{1}{2N}}=3.1702$

（2）写出关于通带截止频率归一化的低通系统函数Q(p) ；（4分）

答：$Q(p)=G(p')\Big|_{p'=p/\lambda_c}=\dfrac{{\lambda_c}^2}{p^2+1.4142p\times\lambda_c+{\lambda_c}^2}$

（3）计算高通滤波器系统函数$H_{HP}(s)$。（提示：低通到高通的的映射关系$p=\dfrac{\lambda_p\Omega_{ph}}{s}$ ，频率映射关系$\lambda=-\dfrac{\lambda_p\Omega_{ph}}{\Omega}$。二阶和三阶巴特沃斯3dB频率归一化低通滤波器的系统函数为

$G_2(p)=\dfrac{1}{p^2+1.4142p+1},G_3(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$）（5分）

答：
$$H_{HP}(s)=Q(p)\Big|_{p=\frac{\lambda_p\Omega_{ph}}{s}}=\frac{\lambda_c^{\,2}}{\left(\frac{\Omega_{ph}}{s}\right)^2+1.4142\times\lambda_c\left(\frac{\Omega_{ph}}{s}\right)+\lambda_c^{\,2}}=\frac{1}{\left(\frac{\Omega_{ph}}{\lambda_c s}\right)^2+1.4142\times\left(\frac{\Omega_{ph}}{\lambda_c s}\right)+1}$$
$$=\frac{s^2}{3.9281e4+280.2877s+s^2}$$

4.（14分）如图1所示为一RC低通滤波器，$R=1000\Omega;C=1\mu F$。我们知道，其模拟系统函数 $H_a(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha},\alpha=\frac{1}{RC}$。请完成以下各小题。

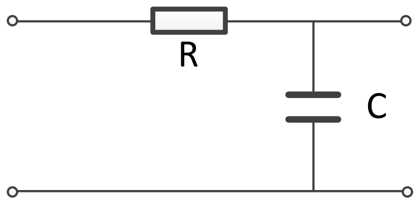


图1 RC低通滤波器示意图

（1）将其转化为数字滤波器，设采样率为1000Hz（T=0.001s），请分别采用脉冲响应不变法和双线性不变法获得其对应的数字滤波器的系统函数$H_1(z)$和$H_2(z)$；(10分)

答：因为$H_a(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha},\alpha=\frac{1}{RC}=1000$，可得极点为$s_i=-\alpha$，采用脉冲响应不变法，可得一阶数字系统函数为$H(z)=\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}$，（5分）；

采用双线性不变法，可得
$$H_2(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{\alpha_1(1+z^{-1})}{1+\alpha_2 z^{-1}}$$
$$\alpha_1=\frac{\alpha T}{\alpha T+2}=\frac{1}{3},\quad \alpha_2=\frac{\alpha T-2}{\alpha T+2}=-\frac{1}{3}$$
（5分）

（2）请计算模拟滤波器和两个数字滤波器500Hz处的归一化（以频率等于0时的增益为1）增益。将模拟滤波器增益与两个数字滤波器增益进行对比，指出差异并分析原因。(4分)

答：滤波器增益计算如下。根据题干，有$H_a(j\Omega)=\frac{\alpha}{j\Omega+\alpha}\Rightarrow|H_a(j\Omega)|=\frac{\alpha}{\sqrt{\Omega^2+\alpha^2}}$，当f=500Hz，

$|H_a(j\Omega)|=\frac{\alpha}{\sqrt{\Omega^2+\alpha^2}}=\frac{1000}{\sqrt{(2\pi\bullet 500)^2+1000^2}}=0.3033$，模拟滤波器的增益为0.3033；

脉冲响应不变化得到的频率响应函数在500Hz（w=π）的归一化增益为0.4621。计算如下。

$$H(z)=\frac{\alpha}{1-e^{-aT}z^{-1}}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{\alpha}{1-e^{-aT}e^{-j\omega}}\Big|_{\omega=\pi}=\frac{1000}{1-e^{-1}(-1)}=\frac{1000}{1+e^{-1}}\Rightarrow$$

$$\left|H(j\omega)\right|_{归一化}\Big|_{\omega=\pi}=\frac{1000}{1+e^{-1}}\Big/\left|H(j\omega)\right|_{\max}=\frac{1000}{1+e^{-1}}\Big/\frac{1000}{1-e^{-1}}=\frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}=0.4621$$

双线性变换法的增益为0，因为

$$H_2(z)=\frac{1/3(1+z^{-1})}{1-z^{-1}/3}=\frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}=\frac{z+1}{3z-1}\Rightarrow H_2(j\omega)=\frac{e^{j\omega}+1}{3e^{j\omega}-1}$$

$$\omega=\Omega T=2\pi500\cdot1/1000=\pi,so,H_2(j\omega)=\frac{-1+1}{3(-1)-1}=0$$

。

脉冲响应不变法存在频谱混叠，因此在高频部分的增益更高（衰减小）。双线性变换法采用非线性变换，在数字频率π处，也就是模拟频率500Hz处的增益为0，不存在频谱混叠，但是不能完全匹配模拟滤波器频率特性，存在失真。

5.（14分）对模拟信号以采样率10KHz进行采样后，希望**采用窗函数法**设计数字高通滤波器对其进行处理。其中，要求阻带截止频率1KHz，阻带衰减40dB；通带截止频率3KHz。试采用窗函数法设计FIR高通滤波器。

(1)若采用矩形窗，能否达到设计指标？简要说明原因；（3分）

答：采用矩形窗截断的话，会存在吉布斯效应，导致滤波器的通带和阻带存在振荡，其最大振荡幅度约8.95%，换算为衰减约为21dB，即矩形窗设计的滤波器，阻带衰减最多达到-21dB，不能满足设计要求。

(2)给出滤波器长度N，选择并给出窗函数形式w(n)；（4分）

答：过渡带 $\omega_b=\omega_p-\omega_s=\dfrac{3000-1000}{10000}\times2\pi=0.4\pi$ 衰减要求-40dB，可以选用汉宁窗，过渡带

$6.2\pi/N<0.4\pi\Rightarrow N>6.2/0.4=15.5,\text{取}N=17$， $\omega_{hn}(n)=0.5\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi n}{8}\right)\right]R_{17}(n)$

(3)计算符合该设计的理想高通的冲击响应$h_d(n)$；（4分）

$$\omega_c=\omega_p/2+\omega_s/2=0.4\pi;H_d(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega\tau},\omega_c\le|\omega|\le\pi\\0,else\end{cases}$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi}\exp\left[j\omega(n-\tau)\right]d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c}\exp\left[j\omega(n-\tau)\right]d\omega$$

$$=\delta(n-8)-\frac{\sin[0.4\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}\quad\tau=\frac{17-1}{2}$$

(4)给出滤波器的时域表达式h(n)。（3分）

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\left[\delta(n-8)-\frac{\sin[0.4\pi(n-8)]}{\pi(n-8)}\right]\times 0.5\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)\right]R_{17}(n)$$

给出窗函数特性如下表：

窗函数类型	过渡带	阻带最小衰减/dB	表达式
三角窗	$6.1\pi/N$	-25	
汉宁窗	$6.2\pi/N$	-44	$\omega_{hn}(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$
汉明窗	$6.6\pi/N$	-53	$\omega_{hn}(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$

6.（14分）语音信号采集、传输与播放时，需要用到抽取与内插技术。设希望保留**有用语音信号**的**最高有效频率**为4KHz（假设模拟音频信号频率范围高于22KHz），A/D采集前的抗混叠模拟滤波器的幅频特性如图2（a）所示。

（1）请问应该至少采用多高的采样率才能保证采样后频谱混叠不破坏4KHz以内的有用信号；（4分）

答：采样后，要求不破坏4KHz的有用信号，必须保证采样率至少为16KHz。

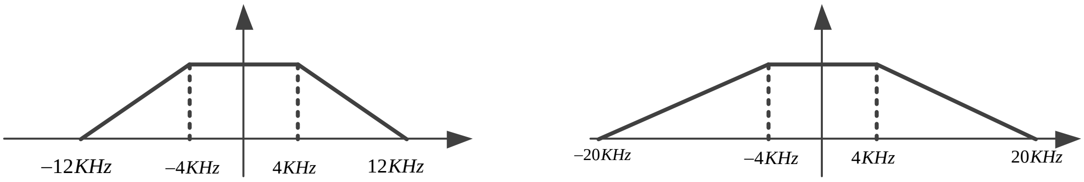
（2）为了尽量降低传输压力，请确认整数倍抽取因子D，并给出抽取预滤波器的幅频响应 $H_D(\omega)$ （假设具有理想滤波特性）；（5分）

答：最低采样率要求为8KHz，因此可以2抽1，D=2。则滤波器的要求为 $H_D(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|\le\pi/2\\ 0, else\end{cases}$

（3）信号以采样率8KHz传输到终端时，进行语音信号播放，需要将数字信号采用D/A恢复为模拟信号。设D/A后跟的模拟低通滤波器的幅频特性如图2（b）所示。请设计D/A前内插器的内插因子I以及数字低通滤波的幅频响应 $H_I(\omega)$（假设具有理想滤波特性），以保证无失真的恢复有用信号。（5分）

答：如果滤波器幅频特性为图2(b)，则要求不混叠，数字采样率必须至少为4KHz+20KHz=24KHz，因此必须进行3倍升采样，零值插值后的滤波器频率响应为

$$H_I(\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le\pi/3\\0,else\end{cases}$$ 。



（a）A/D 前模拟低通滤波器特性　　　　（b）D/A 后模拟低通滤波器特性

图 2 语音系统模拟低通滤波器特性

7.（15分）设A/D位数为b+1位，A/D量化阶为 $q=2^{-b}$ 。

(1)简要求解舍入法量化误差的功率表达式；（2分）

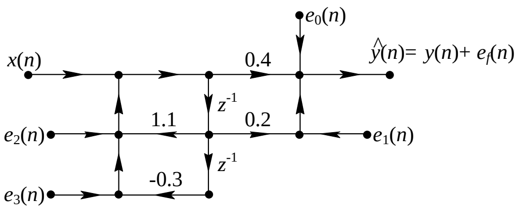
答：量化误差功率表达式为 $\delta_e{}^2=\int_{-q/2}^{q/2}x^2\frac{1}{q}dx=q^2/12$

(2)如果A/D位数为10，输入信号控制在A/D最大动态范围的1/3，假定输入信号无噪声，则A/D量化后输出信号信噪比为多少dB？（3分）

答：$\frac{S}{N}=10\lg\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}dB=10\lg\frac{1/9}{q^2/12}=10\lg\frac{12}{9}\frac{1}{2^{-2b}}=6.02b+1.25=55.43dB$

(3)系统函数为 $H(z)=\dfrac{0.3+0.2z^{-1}}{1-1.1z^{-1}+0.3z^{-2}},|z|>0.6$，设网络采用定点补码制，尾数处理采用舍入法。请在**仅考虑**乘法运算量化误差的情况下，针对**直接型、并联型**，分别画出网络结构且标注噪声源，并进一步计算**两种网络结构**的输出噪声功率。（10分）

(1)直接型



$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{0.3+0.2z^{-1}}{(1-0.6z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\bullet\frac{0.3+0.2z}{(1-0.6z)(1-0.5z)}\frac{dz}{z}$$

$$=\mathrm{Re}\,s[H(z)H(z^{-1})z^{-1},0.6]+\mathrm{Re}\,s[H(z)H(z^{-1})z^{-1},0.5]$$

$$=\frac{0.3+0.2z^{-1}}{(1-0.6z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\bullet\frac{0.3+0.2z}{(1-0.6z)(1-0.5z)}\bullet\frac{1}{z}(z-0.6)\Big|_{z=0.6}$$

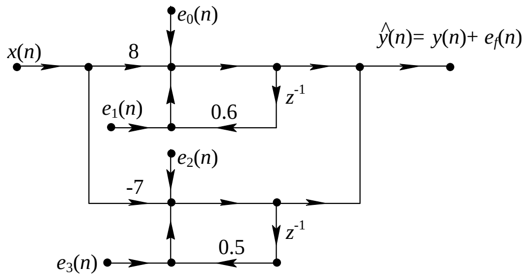
$$+\frac{0.3+0.2z^{-1}}{(1-0.6z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\bullet\frac{0.3+0.2z}{(1-0.6z)(1-0.5z)}\bullet\frac{1}{z}(z-0.5)\Big|_{z=0.5}$$

$$=\frac{0.3+0.2z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})}\bullet\frac{0.3+0.2z}{(1-0.6z)(1-0.5z)}\Big|_{z=0.6}+\frac{0.3+0.2z^{-1}}{(1-0.6z^{-1})}\bullet\frac{0.3+0.2z}{(1-0.6z)(1-0.5z)}\Big|_{z=0.5}$$

$$=57/16-8/3=3.5625-2.6667=0.8958$$

$$\sigma_f^2=\frac{1}{6}q^2+\frac{1}{6}q^2\bullet 0.8958=0.316q^2$$

并联型：



$$e_f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*h_1(n)+[e_0(n)+e_1(n)]*h_2(n)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{1-0.6z^{-1}}=ZT[h_1(n)],h_1(n)=0.6^n u(n)$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}=ZT[h_2(n)],h_2(n)=0.5^n u(n)$$

$$\sigma_f^2=\frac{1}{12}q^2\bullet 2\bullet\sum_{n=0}^{\infty}h_1^2(n)+\frac{1}{12}q^2\bullet 2\bullet\sum_{n=0}^{\infty}h_2^2(n)$$

$$=\frac{1}{6}q^2\bullet\frac{1}{1-0.6^2}+\frac{1}{6}q^2\frac{1}{1-0.5^2}$$

$$=0.4826q^2$$