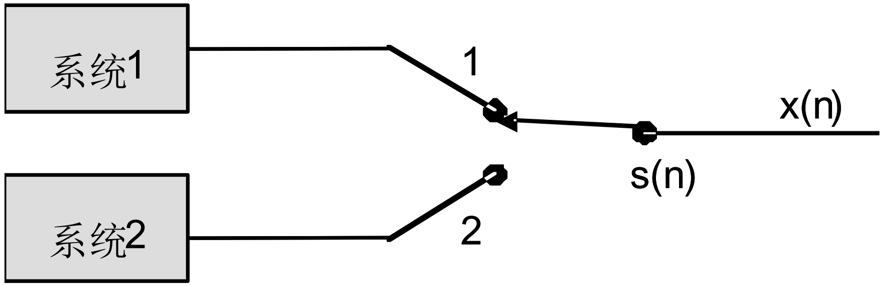
复习

6.2 隐马尔可夫模型



产生隐马尔可夫链模型

6.3 独立增量过程

1、独立增量过程(independence of increments)

设随机过程X(t)，t≥0满足

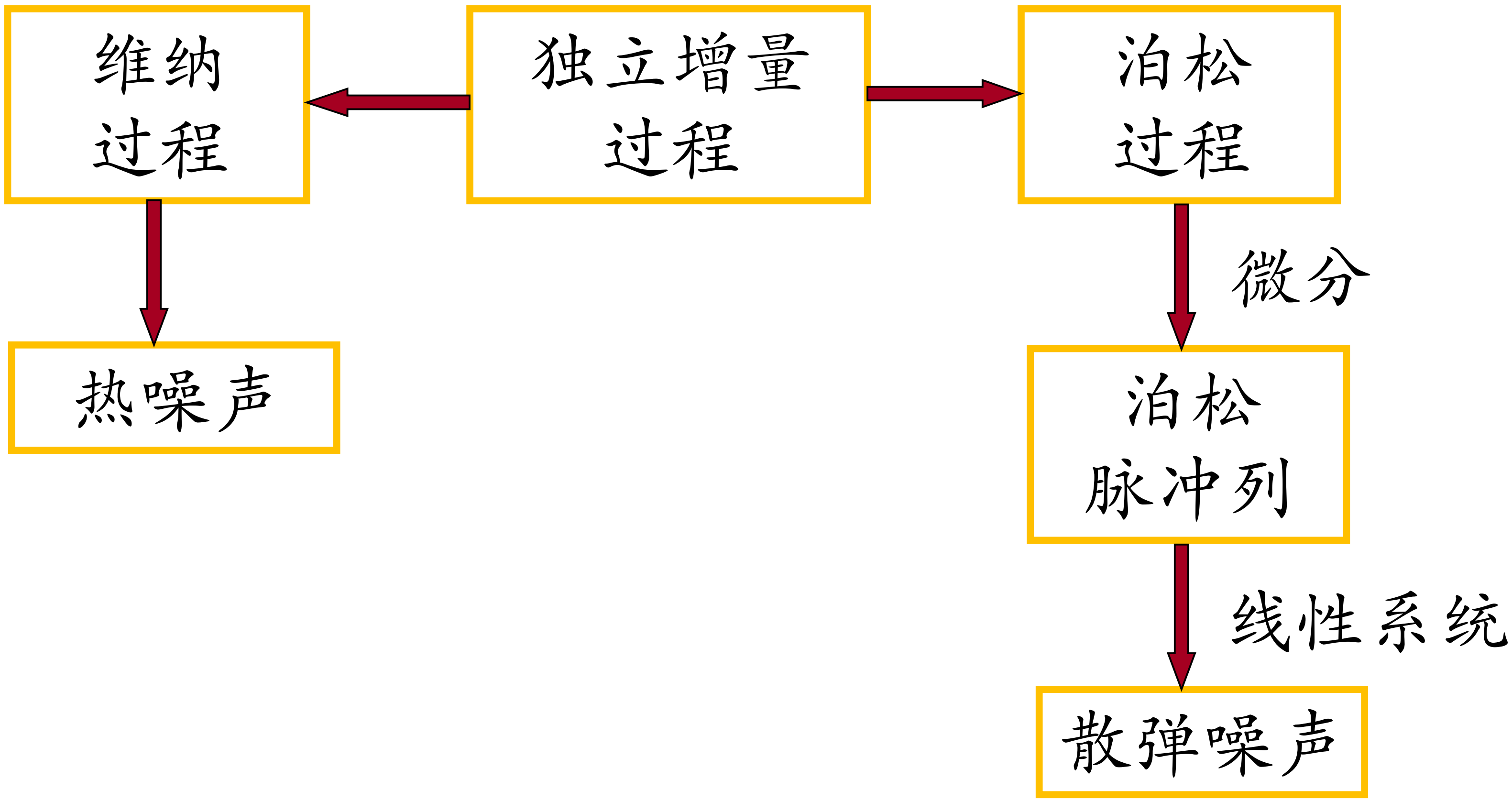
（1） $P[X(t_0)=0]=1$

（2）对任意的时刻 $0\le t_0<t_1<\cdots<t_n<b$

过程的增量 $X(t_1)-X(t_0)$ 、…、 $X(t_n)-X(t_{n-1})$

是相互独立的随机变量，则称X(t)为独立增量过程，又称可加过程。

复习



复习

2、泊松过程 （齐次的）

泊松过程{X(t), t≥0}在时间间隔$[t_0$，$t_0+t]$内k次出现事件A的概率为：

$$P\left\{X(t_0+t)-X(t_0)=k\right\} \triangleq P_k\left(t_0,t_0+t\right)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

泊松脉冲列

设有脉冲随机出现过程Z(t)，脉冲出现是相互独立的，即

$$Z(t)=\sum_i \delta(t-t_i) \quad \Longleftrightarrow \quad Z(t)=\frac{d}{dt}X(t)$$

Z(t)称为泊松脉冲列。

复习

散弹噪声

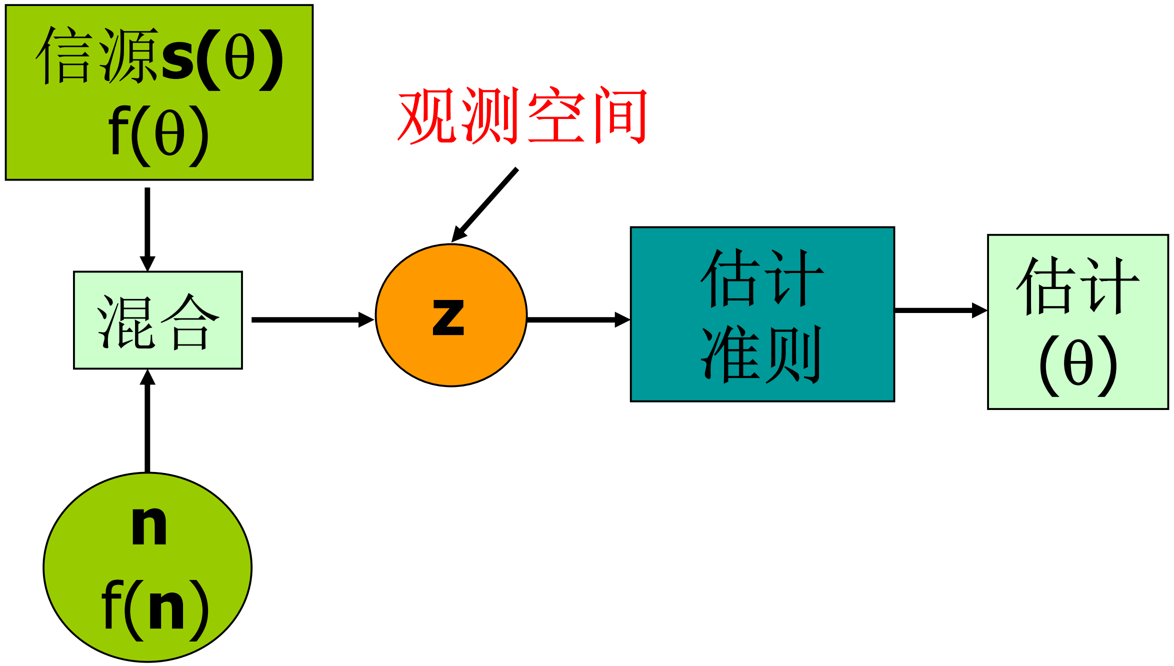
☞线性系统输入端为泊松脉冲序列Z(t)，则系统的输出为散弹噪声，即：

$$S(t)=\sum_i h(t-t_i)$$

3、维纳过程（热噪声）

第七章 估计理论

7.1 估计的基本概念



参量估计的统计推断模型

估计基本要素

- 参数空间
- 概率传递机制
- 观测空间
- 估计准则
- 估计空间

7.2 贝叶斯估计（掌握）

频率派与贝叶斯派之争：
比较ML 和 MAP

$$p(\theta \mid z) = \frac{p(z \mid \theta)p(\theta)}{p(z)}$$

$$\underbrace{p(\theta \mid z)}_{\text{posterior}} \propto \underbrace{p(z \mid \theta)}_{\text{likehood}}\underbrace{p(\theta)}_{\text{prior}}$$

- MLE（频率学派）认为参数 θ 是一个未知的常量，需要从数据中估计出来。MAP（贝叶斯学派）认为参数 θ 是一个随机变量，服从一个概率分布，应该充分利用先验概率。
- MLE的缺点是如果数据集太小会出现过拟合，或者严重偏差；MAP的缺点是使用不同的先验会得到不同的结果。

习题：

7.3　　7.4　　7.6

7.2 贝叶斯估计

1、贝叶斯估计

在估计某个量时，噪声的影响使估计产生误差，估计误差是要付出代价的，这种代价可以用代价函数来加以描述，记为$c(\theta,\hat{\theta}) = c(\theta-\hat{\theta}) = c(\tilde{\theta})$。贝叶斯估计准则就是在已知代价函数及先验概率基础上，使估计付出的平均代价最小。

设观测值为z，待估参量为θ

估计误差： $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}(z)$

$$\hat{\theta}(z) \Leftarrow \min_{\hat{\theta}} E[C(\tilde{\theta})]$$

7.2 贝叶斯估计

统计平均代价：

$$E[C(\tilde{\theta})] = E[C(\theta,\hat{\theta}(z))]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta,\hat{\theta}(z)) f(\theta,z)\, d\theta\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta,\hat{\theta}(z)) f(\theta \mid z)\, d\theta\right]}_{\text{条件平均代价}} f(z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}(\theta \mid z) f(z)\, dz$$

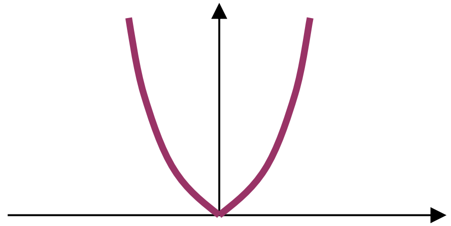
等价于使下式最小：

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta,\hat{\theta}(z)) f(\theta \mid z)\, d\theta = \text{最小}$$

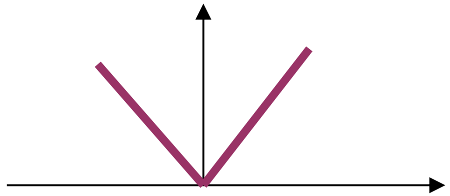
7.2 贝叶斯估计

2、典型代价函数及贝叶斯估计

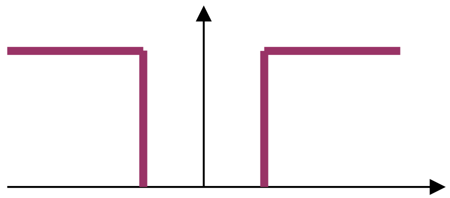
平方代价：$$C(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$$



绝对值代价：$$C(\theta,\hat{\theta})=|\theta-\hat{\theta}|$$



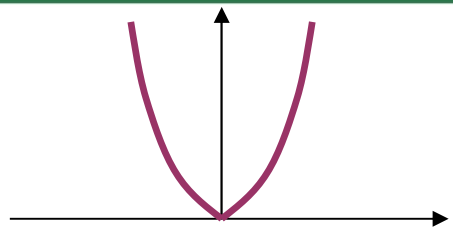
均匀代价：$$C(\theta,\ \hat{\theta})=\begin{cases}1, & |\theta-\hat{\theta}|\geq\dfrac{\Delta}{2}\\ 0, & |\theta-\hat{\theta}|<\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$



中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

7.2 贝叶斯估计

平方代价： $C(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$



☞ **最小均方估计(Minimal Square)**

$$\bar{C}(\theta\mid z)=\int_{-\infty}^{\infty}(\theta-\hat{\theta})^2 f(\theta\mid z)d\theta = \text{最小}$$

对 $\hat{\theta}$ 求导数，并使其等于零：

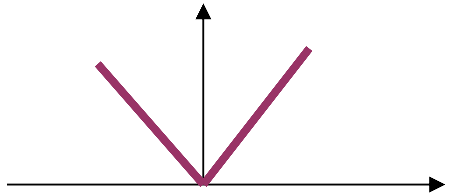
$$\frac{d\bar{C}(\theta\mid z)}{d\hat{\theta}}=-2\int_{-\infty}^{\infty}\theta f(\theta\mid z)d\theta+2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}f(\theta\mid z)d\theta$$

得： $\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{\infty}\theta f(\theta\mid z)d\theta$

即 $\hat{\theta}=E[\theta\mid z]$ ，也称为条件均值估计。

7.2 贝叶斯估计

绝对值代价：$C(\theta,\hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$



☞条件中位数估计(Median)

$$\bar{C}(\theta \mid z) = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| f(\theta \mid z) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta \mid z) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) f(\theta \mid z) d\theta$$

对$\hat{\theta}$求导数，并使其等于零，得：

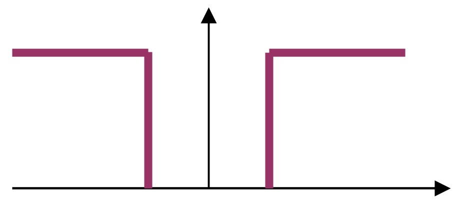
$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} f(\theta \mid z) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} f(\theta \mid z) d\theta$$

可见，估计为条件概率密度$f(\theta \mid z)$ 的中位数。

7.2 贝叶斯估计

均匀代价：

$$C(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta - \hat{\theta}| \geq \dfrac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta - \hat{\theta}| < \dfrac{\Delta}{2} \end{cases}$$



☞最大后验概率估计(maximal posterior probability)

$$\overline{C}(\theta \mid z) = 1 - \int_{\hat{\theta}_{map} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}_{map} + \frac{\Delta}{2}} f(\theta \mid z) d\theta$$

应当选择 $\hat{\theta}$ ，使它处在后验概率 $f(\theta \mid z)$ 的最大处。

最大后验概率方程：

$$\left.\frac{\partial f(\theta \mid z)}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0 \text{ 或 } \left.\frac{\partial \ln f(\theta \mid z)}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0$$

7.2 贝叶斯估计

由关系式：
$$f(\theta\,|\,z)=\frac{f(z\,|\,\theta)f(\theta)}{f(z)}$$

两边取对数并对θ求导，得最大后验概率方程的另一形式：

$$\left[\frac{\partial \ln f(z\,|\,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial \ln f(\theta)}{\partial\theta}\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}}=0$$

7.2 贝叶斯估计

例7.2 设观测为 $z = A + v$，其中被估计量A在$[-A_0,A_0]$上均匀分布，测量噪声$v \sim N(0,\sigma_v^2)$，求A的最大后验概率估计和最小均方估计。

解： 最大后验概率估计

$$f(A\,|\,z)=\frac{f(z\,|\,A)f(A)}{f(z)}$$

$$f(z\,|\,A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\exp\left\{-\frac{(z-A)^2}{2\sigma_v^2}\right\}$$

$$f(A)=\begin{cases}\dfrac{1}{2A_0} & -A_0\le A\le A_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.2 贝叶斯估计

当 $-A_0 \le z \le A_0$，f(A|z)的最大值出现在A=z处，所以，$\hat{A}_{map} = z$，当 $z > A_0$ 时，f(A|z)的最大值出现在A=A_0处，$\hat{A}_{map} = A_0$，当 $z < -A_0$ 时，f(θ|z)的最大值出现在A=$-A_0$处，$\hat{A}_{map} = -A_0$，即

$$\hat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0 & z < -A_0 \\ z & -A_0 \le z \le A_0 \\ A_0 & z > A_0 \end{cases}$$

再看最小均方估计：

7.2 贝叶斯估计

$$\hat{A}_{ms} = E(A \mid z) = \int_{-\infty}^{\infty} A f(A \mid z) dA = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{f(z \mid A) f(A)}{f(z)} dA$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A f(z \mid A) f(A) dA}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z \mid A) f(A) dA} = \frac{\int_{-A_0}^{A_0} \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp[-\frac{(z-A)^2}{2\sigma_v^2}] \cdot \frac{1}{2A_0} dA}{\int_{-A_0}^{A_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp[-\frac{(z-A)^2}{2\sigma_v^2}] \cdot \frac{1}{2A_0} dA}$$

$$= \frac{\int_{z-A_0}^{z+A_0} (z-u) \cdot \exp[-\frac{u^2}{2\sigma_v^2}] du}{\int_{z-A_0}^{z+A_0} \exp[-\frac{u^2}{2\sigma_v^2}] du}$$

7.2 贝叶斯估计

$$\left(= z - \frac{2\sigma_v^2 \int_{(x-a)/\sqrt{2}}^{(x+a)/\sqrt{2}} u \exp[-u^2] du}{\sigma_v \int_{x-a}^{x+a} \exp[-\frac{u^2}{2}] du} \right)$$

$$= z - \frac{2\sigma_v^2 \int_{(x-a)/\sqrt{2}}^{(x+a)/\sqrt{2}} s \exp[-s^2] ds}{\sigma_v \int_{x-a}^{x+a} \exp[-\frac{t^2}{2}] dt}$$

$$s = \frac{u}{\sqrt{2}\sigma_v}$$

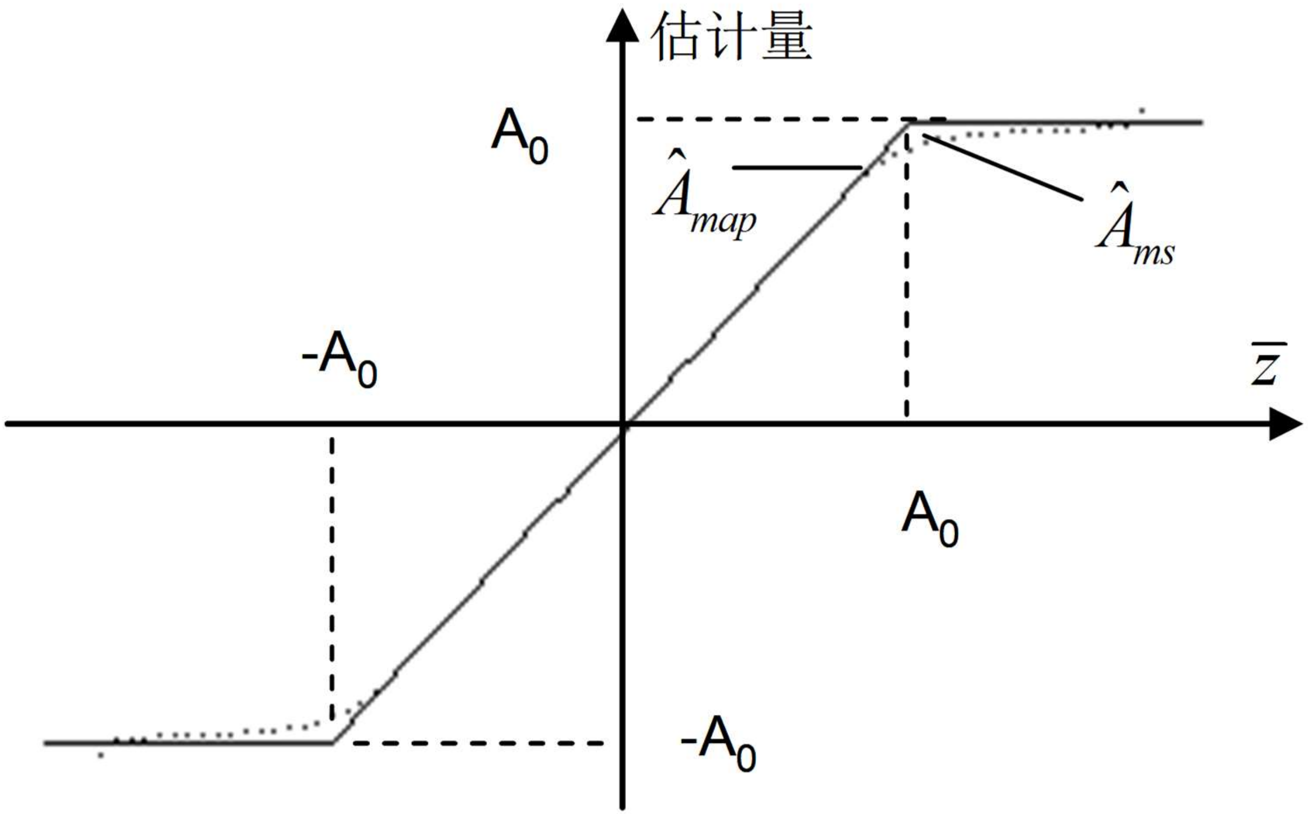
$$t = \frac{u}{\sigma_v}$$

$$= z - \frac{\sigma_v \left\{ \exp[-(x-a)^2/2] - \exp[-(x+a)^2/2] \right\}}{\sqrt{2\pi}[Q(x-a) - Q(x+a)]}$$

7.2 贝叶斯估计

Q(.)为标准正态概率密度函数的概率右尾函数，

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-u^2/2)du$$



7.2 贝叶斯估计

例7.3 高斯白噪声中的直流电平估计-高斯先验分布。设有N次独立观测 $z_i=A+v_i$，$i=1,2,\cdots.N$，其中 $v\sim N(0,\sigma^2)$，$A\sim N(\mu_A,\sigma_A^2)$，求A的估计。 【阅读P204】

解 先求后验概率密度:

$$f(A|\mathbf{z})=\frac{f(\mathbf{z}|A)f(A)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{z}|A)f(A)dA}$$

$$=\dots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{A|z}^2}}exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{A|z}^2}(A-\mu_{A|z})^2\right] \qquad (23)$$

7.2 贝叶斯估计

由(23)可以看出，后验概率密度是高斯的。由于最小均方估计为被估计量的条件均值，所以

$$\hat{A}_{ms}=\mu_{A|z}=\left(\frac{N}{\sigma^2}\bar{z}+\frac{\mu_A}{\sigma_A^2}\right)\sigma_{A|z}^2=\frac{\frac{N}{\sigma^2}\bar{z}+\frac{\mu_A}{\sigma_A^2}}{\frac{N}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_A^2}} \qquad (24)$$

令$k=\frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2+\sigma^2/N}$，则

体会

$$\hat{A}_{ms}=k\bar{z}+(1-k)\mu_A \qquad (25)$$

另外，由于最大后验概率估计是使后验概率最大对应的A值，因此，由（23)式可得 $\hat{A}_{map}=\mu_{A|z}=\hat{A}_{ms}$ (26)

即最大后验概率估计与最小均方估计相等。

1、最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimate)

由最大后验概率估计

$$\left[\frac{\partial \ln f(z\mid\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial \ln f(\theta)}{\partial\theta}\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}}=0$$

若先验概率密度函数 $f(\theta)$ 未知，则由左边第一项求解参量θ，即最大似然估计，用 $\hat{\theta}_{mL}$ 表示。最大似然方程为：

$$\frac{\partial \ln f(z\mid\theta)}{\partial\theta}\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{mL}}=0$$

7.3 最大似然估计

例7.4 高斯白噪声中的直流电平估计-未知参数。设有N次独立观测$z_i=A+v_i$，$i=1,2,\ldots,N$，其中$v_i\sim N(0,\sigma^2)$，A为未知参数，σ^2已知，求A的最大似然估计。

【解】 $$f(\mathbf{z}\,|\,A)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2\right]$$

$$\ln f(\mathbf{z};A)=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2$$

$$\frac{\partial\ln f(\mathbf{z};A)}{\partial A}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)=\frac{N}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i-A\right)$$

$$\hat{A}_{ml}=\overline{z}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i$$

7.3 最大似然估计

例7.6 高斯白噪声中的直流电平估计-未知参数与未知方差。

设有N次独立观测$z_i=A+v_i$，$i=1,2,\ldots,N$，其中$v\sim N(0,\sigma^2)$，σ^2、A均为未知参数，求A和σ^2的最大似然估计。

【解】 令 $\theta=[A\ \sigma^2]^T$

$$f(\mathbf{z}\,|\,\boldsymbol{\theta})=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2\right]$$

$$\ln f(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2$$

7.3 最大似然估计

令

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{N}{\sigma^2}\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - A\right) \\ -\dfrac{N}{2\sigma^4}\left[\sigma^2 - \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2\right] \end{bmatrix} = 0$$

得到：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{ml} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \bar{z})^2 \end{bmatrix}$$

7.3 最大似然估计

估计问题的案例：时延估计（time delay estimation）

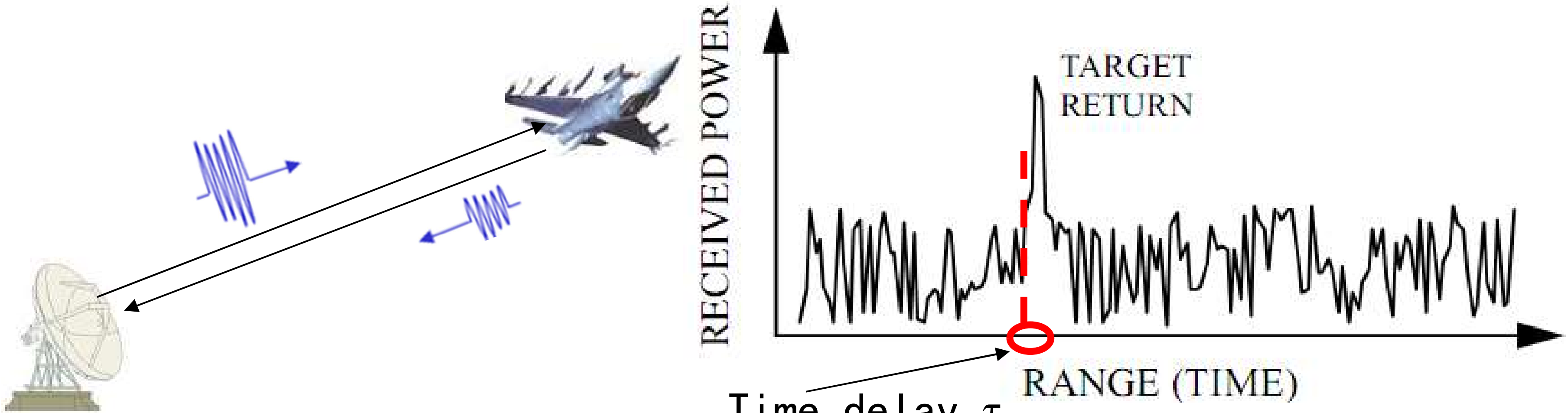
通过案例

- 阐述估计的基本概念
- 分析求解估计问题的基本步骤
- 如何评估估计量的性能

7.8 信号处理实例

Problem:

How to determine the distance of target and sensor?



Time delay τ_0.

$$R = \frac{\tau_0 c}{2}$$

Also Be termed TOA (Time of Arrival)

Range estimation is equivalent to time delay estimation (TDE).

7.8 信号处理实例

问题的统计描述（Problem of formulation ）

The noise corrupted signals received by the radar over some time interval can be modeled as

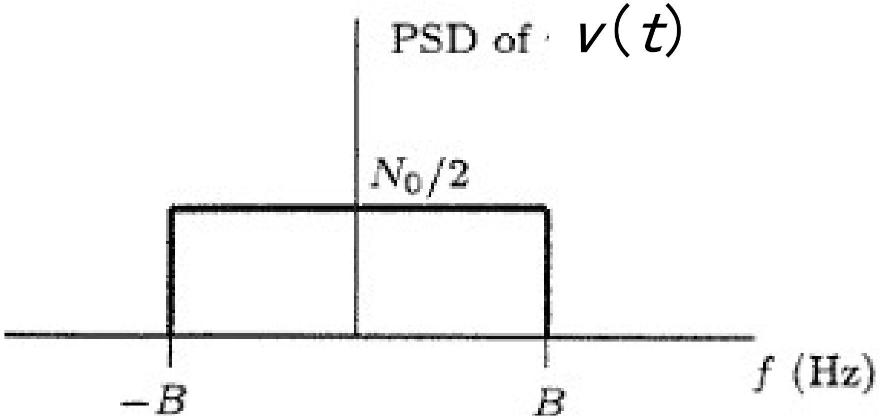
$$z(t) = as(t - \tau_0) + v(t) \qquad 0 \le t \le T$$

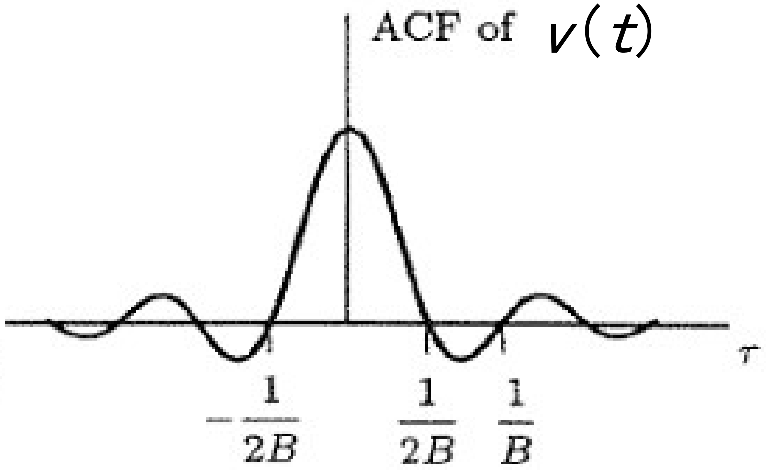
- How to develop an estimator to determine τ_0?
- How to evaluate the performance of the estimator?
- If a is unknown, how to estimate τ_0?

7.8 信号处理实例

步骤 1：将连续的观测离散化

假定噪声是零均值高斯过程，功率谱密度和相关函数分别为





$$R_v(\tau)=\int_{-B}^{B}G_v(f)df=N_0B\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

7.8 信号处理实例

$$R_v(\tau)=N_0B\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

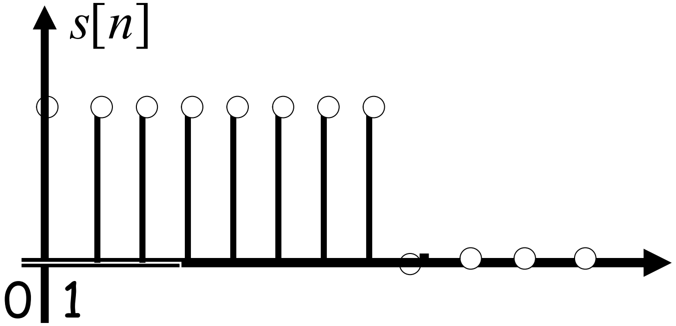
如果对z(t)以 Δ=1/(2B) 进行抽样

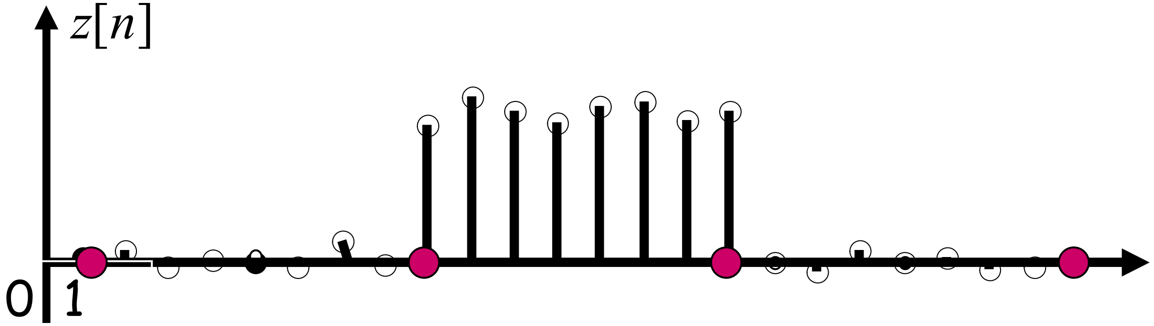
$$z(n\Delta)=s(n\Delta-\tau_0)+v(n\Delta) \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

相互独立的噪声序列

$$z[n]=s(n\Delta-\tau_0)+v[n] \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

7.8 信号处理实例





$$z[n]=\begin{cases} v[n] & 0\le n\le n_0-1 \\ s[n-n_0]+v[n] & n_0\le n\le n_0+M-1 \\ v[n] & n_0+M\le n\le N-1 \end{cases}$$

The problem is changed to estimate n_0

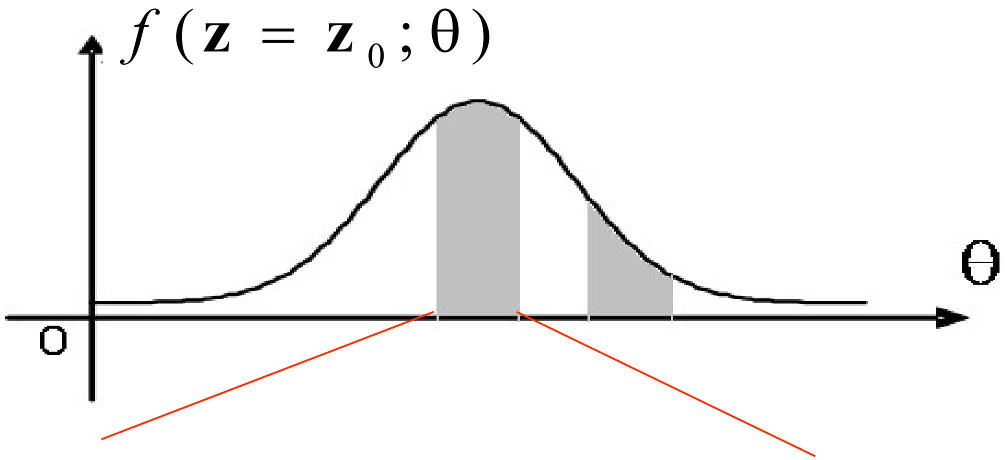
7.8 信号处理实例

步骤2：选择一种参数估计的方法

最大似然估计（Maximum Likelihood Estimate)是一种简单的估计。

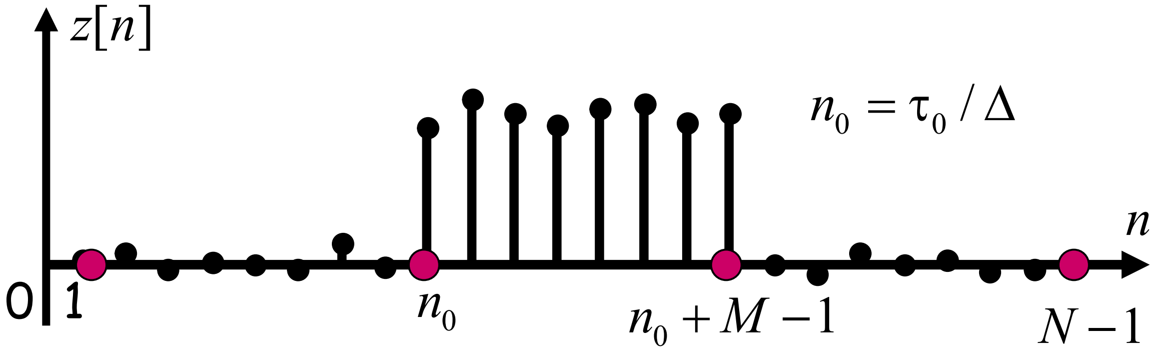
定义：
$$f(\mathbf{z};\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ml}} = \max$$

或
$$\ln f(\mathbf{z};\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ml}} = \max$$



Probability of θ lied in the interval is maximum

7.8 信号处理实例



$$f(\mathbf{z}; n_0) = \prod_{n=0}^{N-1} f\left(z[n], n_0\right)$$

$$= \prod_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} z^2[n]\right]$$

$$\cdot \prod_{n=n_0}^{n_0+M-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(z[n] - s[n-n_0]\right)^2\right]$$

$$\cdot \prod_{n=n_0+M}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} z^2[n]\right]$$

7.8 信号处理实例

$$f(\mathbf{z};n_0)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}z^2[n]\right]$$

$$\cdot\prod_{n=n_0}^{n_0+M-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2z[n]s[n-n_0]+s^2[n-n_0]\right)\right]$$

Equivalently

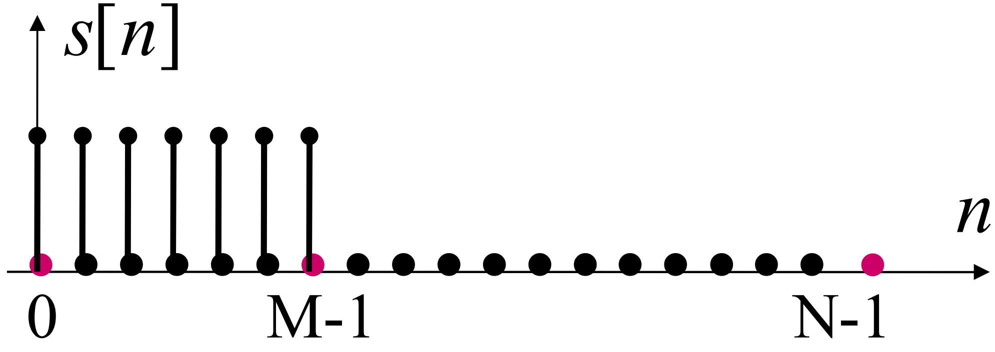
$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1}\left(-2z[n]s[n-n_0]+s^2[n-n_0]\right)\right] \quad \text{Maximizing}$$

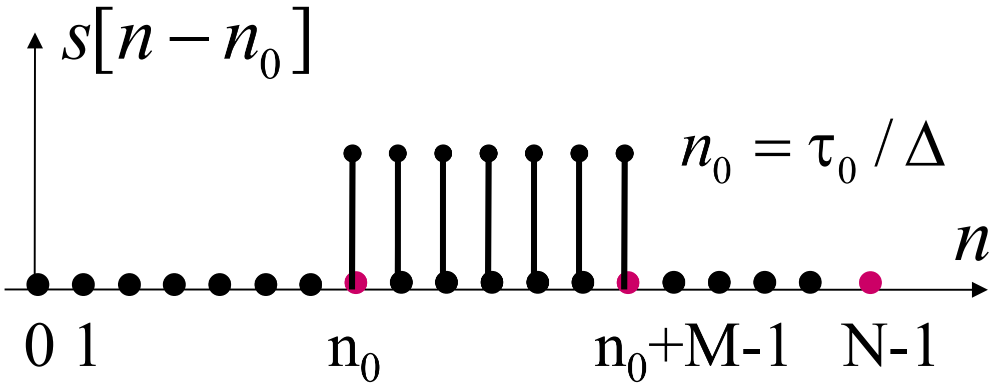
即

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1}\left(-2z[n]s[n-n_0]+s^2[n-n_0]\right) \quad \text{Minimizing}$$

7.8 信号处理实例

由于 $$\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} s^2[n-n_0] = \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n]$$





7.8 信号处理实例

因此， n_0 的MLE 可由使下式最大来求得

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} z[n]s[n-n_0]$$

即

$$\hat{n}_0 = \arg\max_{n_0'} \left\{ \sum_{n=n'_0}^{n'_0+M-1} z[n]s[n-n'_0] \right\}$$

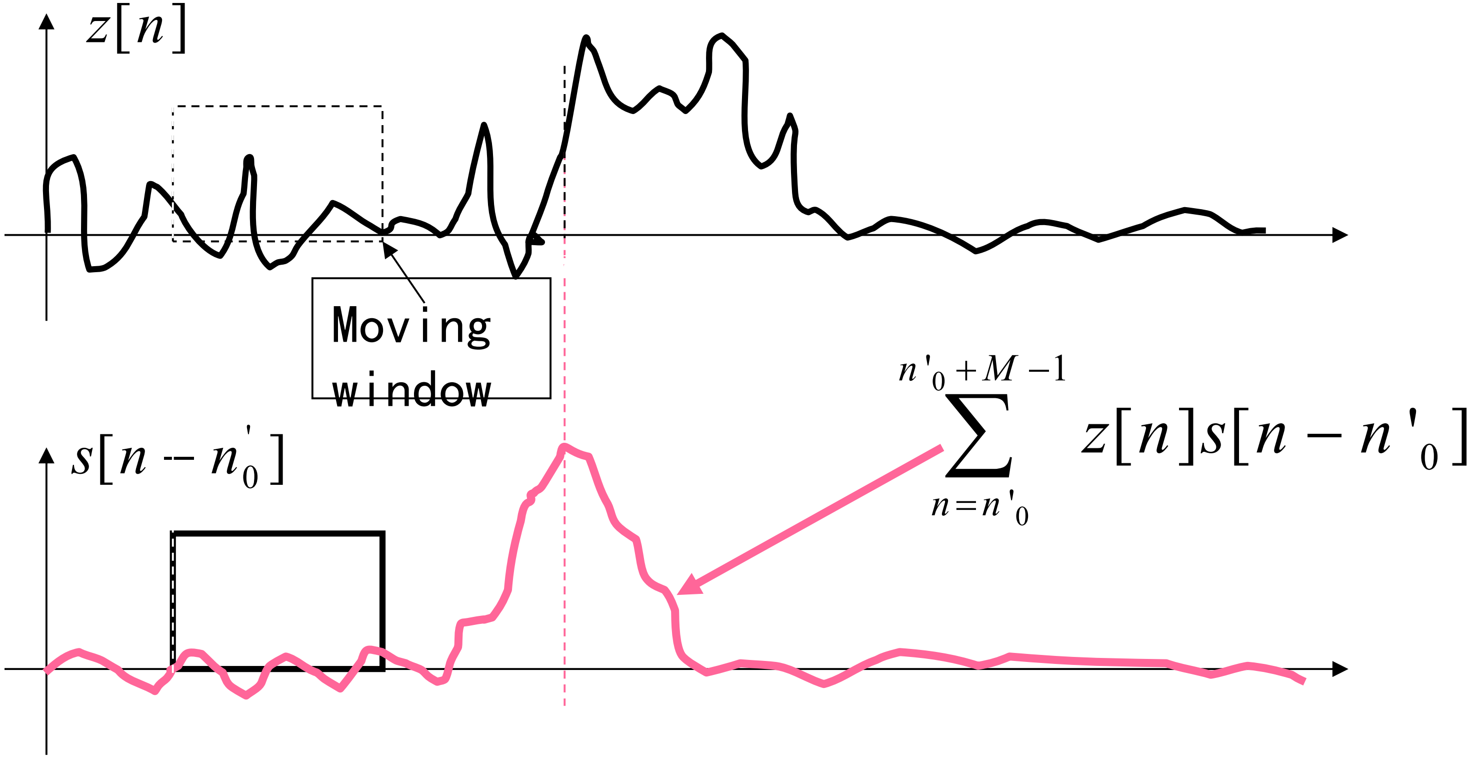
由于 $R=c\tau_0/2=cn_0\Delta/2$，所以距离的最大似然估计为

$$\hat{R} = (c\Delta/2)\hat{n}_0$$

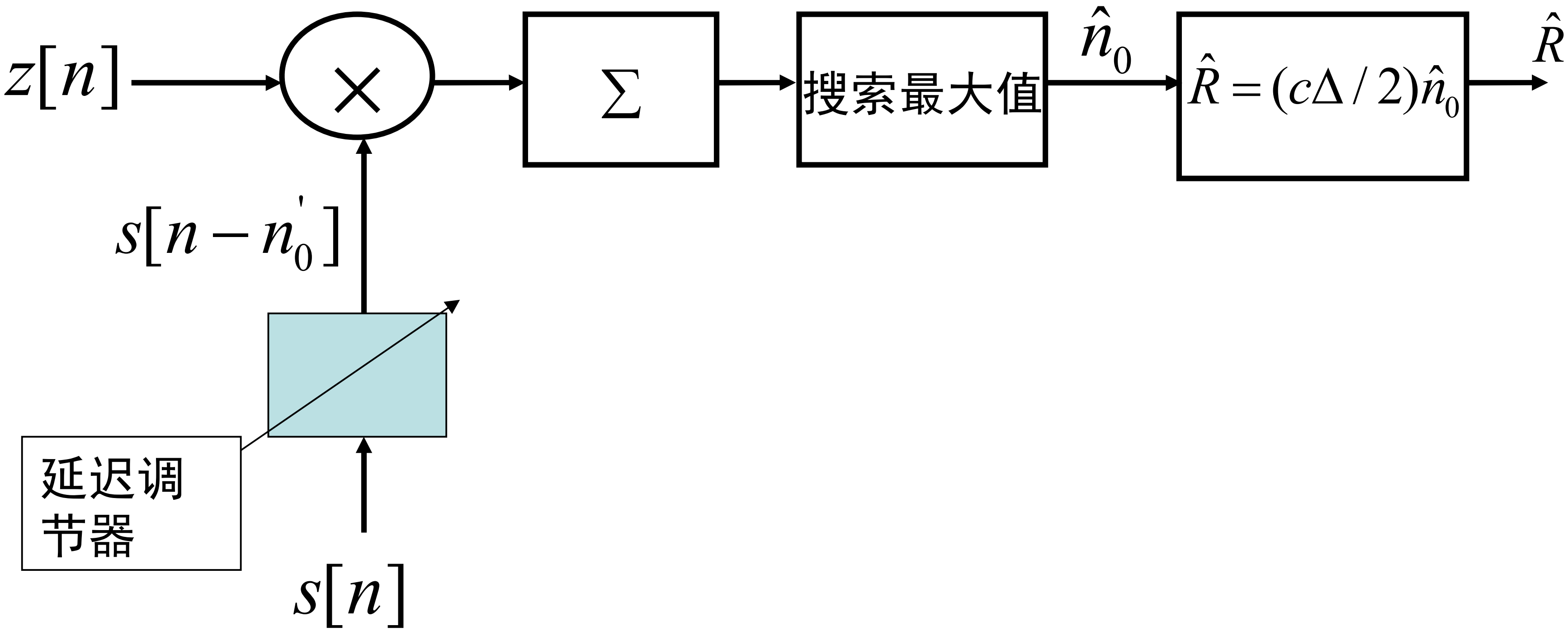
7.8 信号处理实例

第三步：估计器的实现

$$\hat{n}_0 = \arg\max_{n_0'} \left\{ \sum_{n=n'_0}^{n'_0+M-1} z[n]s[n-n'_0] \right\}$$

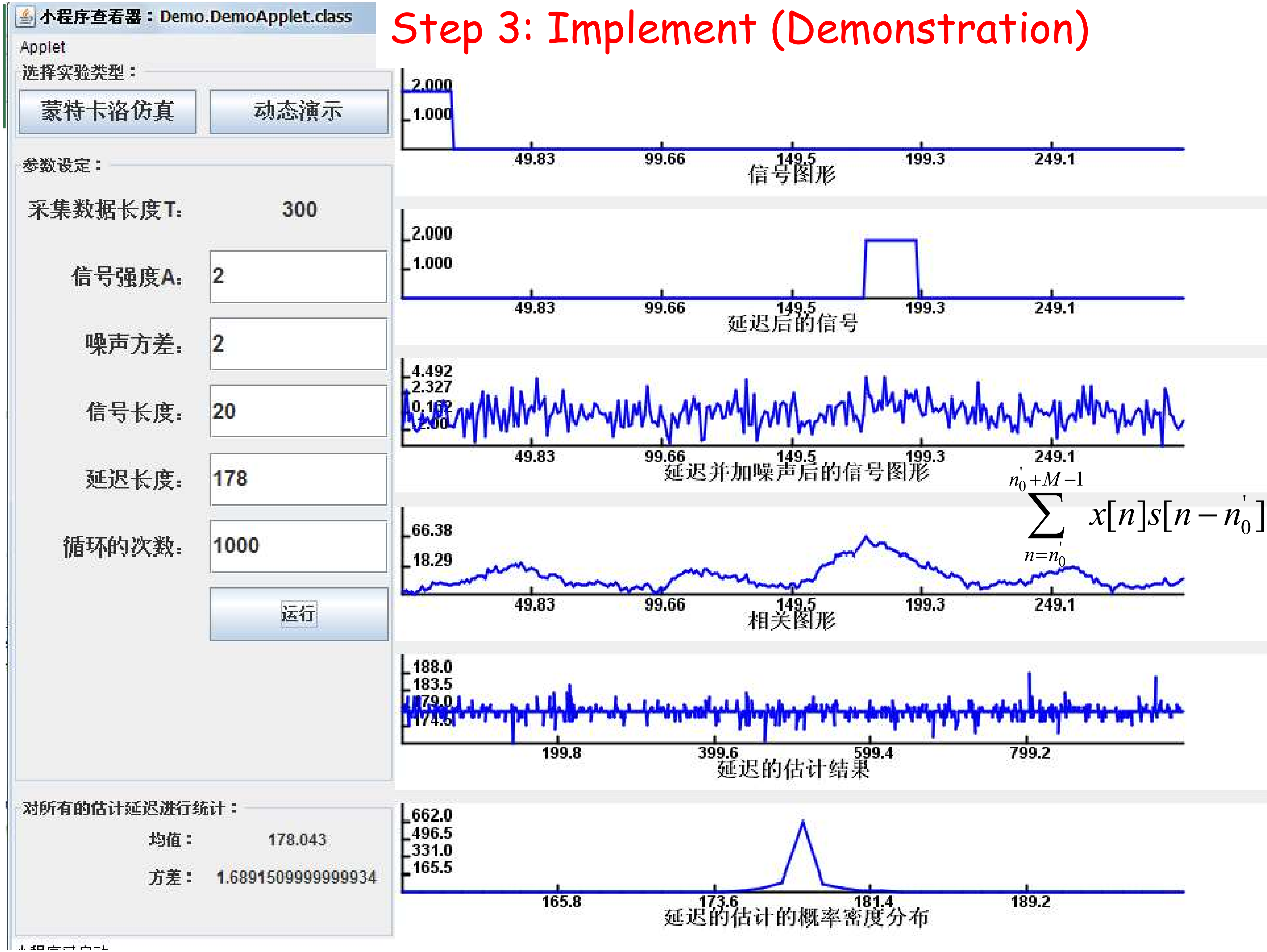


7.8 信号处理实例



距离估计器的实现框图

Step 3: Implement (Demonstration)



$$\sum_{n=n_0'}^{n_0'+M-1} x[n]s[n-n_0']$$