南京邮电大学

2006年攻读硕士学位研究生入学考试数字信号处理试题参考答案

一、填空题（每空1分，共16分）

1、均方误差 2、$50Hz,100Hz$

3、$3\delta(n)+4\delta(n-1)+5\delta(n-2)+\delta(n-3)+2\delta(n-4)$

4、非因果；不稳定

5、主瓣尽可能的窄，以使设计出来的滤波器有较陡的过渡带；第一副瓣面积相对主瓣面积尽可能小，即能量尽可能集中在主瓣，外泄少（这样设计出来的滤波器才能肩峰和余振小）。

6、系统函数幅频特性为常数1的系统。7、$0\le|z|<\infty$；$|z|>0$

8、$H_p(z)$的频响必须要模仿$H_p(s)$的频响，也即s平面的虚轴$j\Omega$应该映射到Z平面的单位圆上；$H_p(s)$的因果稳定性，通过映射后仍应在得到的$H_p(z)$中保持，也即s平面的左半平面（$\mathrm{Re}\left[s\right]<0$）应该映射到Z平面单位圆内（$|z|<1$）。

9、直接II型比直接I型节省了一半的延时单元。

10、乘法；加法、乘法。

二、判断题（每题2分，共10分）

1、错，稳定，即为Z变换收敛域包含单位圆，与信号是否为趋于零的衰弱信号并无直接关系。

2、错，何为线性？线性系统即为满足线性叠加原理的系统，既满足齐次性又满足叠加性。而题式显然不满足齐次性$T\left[ax(n)\right]\neq aT\left[x(n)\right]$

，所以所对应的系统亦非线性系统。

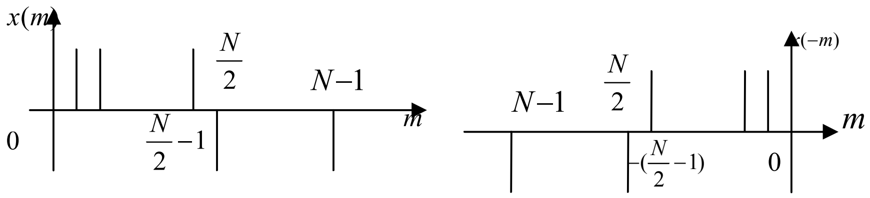
3、错，线性相位FIR系统都具有恒群时延，不一定具有恒相时延。

4、错，增加抽样频率只能提高数字频域的分辨率，若要提高模拟频域分辨率，只有增加给出$x(n)$的截取长度N。

5、对。

三、问答题（共14分）

1、（8分）解：首先画出$x(m)$、$x(-m)$示意图如下



又$y(n)=x(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)x(n-m)$，观察上图可轻易的得出答案，最大正值（$\frac{N}{2}$）的位置为$\frac{N}{2}-1$、$\frac{3N}{2}-2$处，最小值（$-N$）的位置为$N-1$处。

2、（6 分）解：（1）

$$\because x(n)=\sin(\frac{3\pi}{4}n-\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore \omega_0=\frac{3\pi}{4}$$

（2）

$$\because x(n)=\sin(\frac{3\pi}{4}n-\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore x(n+rN)=\sin\left[\frac{3\pi}{4}(n+rN)-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\sin\left[\frac{3\pi}{4}n+\frac{3\pi}{4}rN-\frac{\pi}{4}\right]$$

故当令$\frac{3\pi}{4}rN=m\cdot 2\pi$，$N=\frac{8m}{3r}$，取$r=1,m=3$，$N=8$，则该序列为周期序列，且最小正周期为 8。

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1、证明：

$$\because H_{Lp}(z)=\frac{1}{2}(1+z^{-1})$$

$\therefore$级联构成的数字低通滤波器的传递函数为$H(z)=\frac{1}{2^M}(1+z^{-1})^M$

$$\therefore H(e^{j\omega})=\frac{1}{2^M}(1+e^{-j\omega})^M=\cos^M\frac{\omega}{2}\cdot e^{-j\frac{\omega}{2}M}$$

$$\therefore |H(e^{j0})|=|\cos^M\frac{0}{2}\cdot e^{-j\frac{0}{2}M}|=1$$

又$3dB$截止频率ω_c有，$|H(e^{j\omega_c})|=\frac{\sqrt{2}}{2}|H(e^{j0})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即$|H(e^{j\omega_c})|=\cos^M\frac{\omega_c}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=2^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \cos\frac{\omega_c}{2}=2^{-\frac{1}{2M}},\omega_c=2\arccos(2^{-\frac{1}{2M}})$证毕。

2、证明：设输入序列$x(n)$的功率谱密度函数为$S_x(e^{j\omega})$输出序列$y(n)$的功率谱密度函数为$S_y(e^{j\omega})$，则

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega n}, S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$$

又$H(e^{j\omega}) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega$，$(-\pi \le \omega \le \pi)$

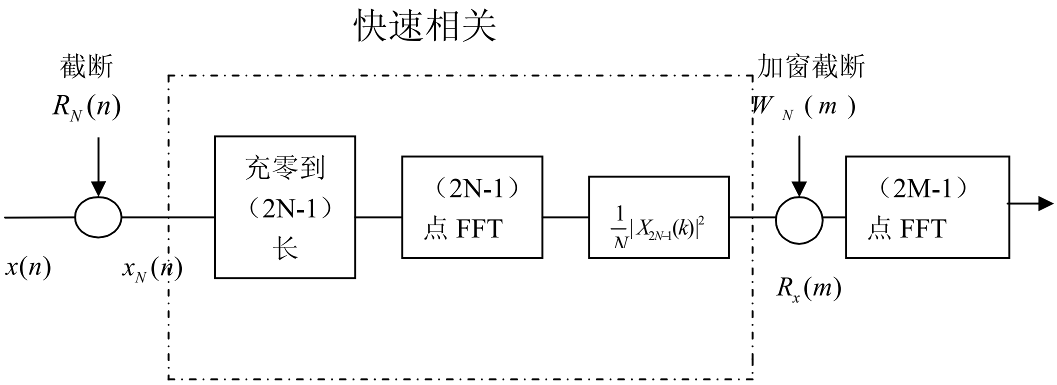
$\therefore |H(e^{j\omega})|^2 = 1$，即$S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega})$

又$R_x(m) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, R_y(m) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

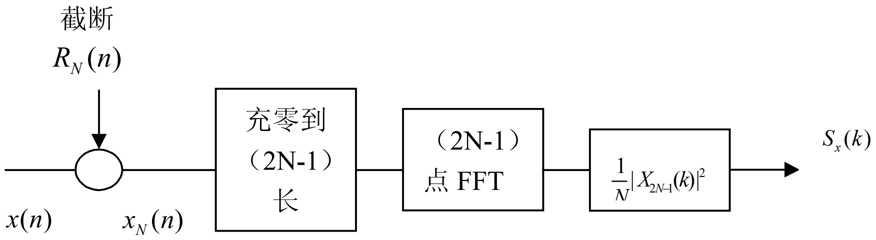
$\therefore R_y(m) = R_x(m)$证毕。

五、画图题（每题 6 分，共 18 分）

1、解：快速计算$\hat{R}_x(m)$的运算框图为：



（a）M<N 时的相关法



（b）M=N 时的相关法

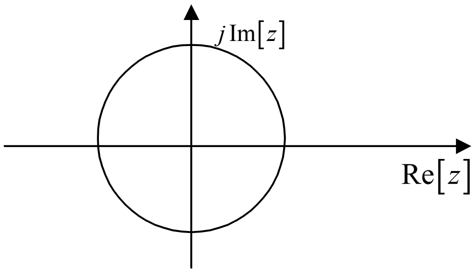
2、解：

$\because y(n) + 0.81y(n-2) = x(n) - x(n-1)$

$\therefore$对两边求 Z 变换则有，$Y(z) + 0.81z^{-2}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$

故$H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1-z^{-1}}{1+0.81z^{-1}} = \dfrac{z-1}{z+0.81}$

所以零极点分别为$z=1, z=-0.81$，故有零极点分布图如下：



3、解：由于滤波器的差分方程为

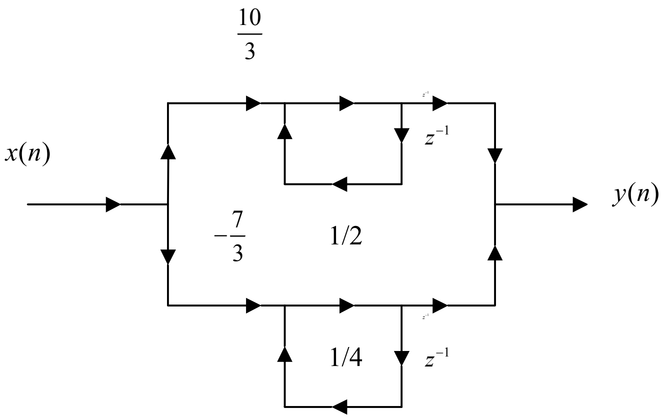
$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

同时对两边取 Z 变换，则

$$Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)+\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

故该滤波器的并联型实现结构如下：



六、设计题（共 22 分）

1、（10 分）解：（1）

$\because H_a(s)H_a(-s)$在s平面上的极点为

$s_1=-\sqrt{2}+j\sqrt{2}, s_2=-\sqrt{2}-j\sqrt{2}, s_3=\sqrt{2}-j\sqrt{2}, s_4=\sqrt{2}+j\sqrt{2}$

又$H_a(s)H_a(-s)$在左半平面的极点即为$H_a(s)$的极点，故

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^N}{(s+\sqrt{2}-j\sqrt{2})(s+\sqrt{2}+j\sqrt{2})}=\frac{2^2}{s^2+2\sqrt{2}s+4}=\frac{4}{s^2+2\sqrt{2}s+4}$$

（2）、因为

$$H_a(s)=\frac{4}{s^2+2\sqrt{2}s+4}=\frac{4}{(s+\sqrt{2}-j\sqrt{2})(s+\sqrt{2}+j\sqrt{2})}=\frac{-j\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}-j\sqrt{2}}+\frac{j\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}+j\sqrt{2}}$$

所以极点为$s_{p1}=-\sqrt{2}+j\sqrt{2},s_{p2}=-\sqrt{2}-j\sqrt{2};A_1=-j\sqrt{2},A_2=j\sqrt{2}$

$$\therefore H(z)=\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{1-e^{s_{pk}T}z^{-1}}=\frac{-j\sqrt{2}}{1-e^{(-\sqrt{2}+j\sqrt{2})T}z^{-1}}+\frac{j\sqrt{2}}{1-e^{(-\sqrt{2}-j\sqrt{2})T}z^{-1}}$$

2、（12 分）解：

（1）、首先由分析知，所设计的系统只能属于第一类线性相位系统，即$h(n)=h(N-1-n)$，N为奇数。

写出系统的频响为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega=\frac{1}{j2\pi(n-\alpha)}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega(n-\alpha)}dj(n-\alpha)\omega\\&=\frac{1}{j2\pi(n-\alpha)}e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{1}{\pi(n-\alpha)}\cdot\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_c(n-\alpha)}-e^{j\omega_c(n-\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{\pi(n-\alpha)}\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]=\frac{\omega_c}{\pi}\sin c\left[\omega_c(n-\alpha)\right]\end{aligned}$$

$\therefore h(n)=h_d(n)\cdot W_N(n)$又$\omega_c=\Omega_cT=2\pi f_c/f_s=\dfrac{\pi}{3}$

故$h(n)=\dfrac{1}{3}\sin c\left[\dfrac{\pi}{3}(n-\alpha)\right]\cdot W_{13}(n)$（具体值仅为计算问题在此省略）

（2）、$\alpha=\dfrac{N-1}{2}=6$，$\Delta\omega=\dfrac{4\pi}{N}=\dfrac{4\pi}{13}$

（3）、矩形长度改为 17，滤波器的最小阻带衰耗不会发生改变。

七、简单计算（每题 10 分，共 30 分）

1、解：由题知

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}}=1-z^{-1}$$

$\therefore$ 当$Y(z)=1+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}, X(z)=\dfrac{Y(z)}{H(z)}=\dfrac{1+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}}{1-z^{-1}}$

$\therefore X(z)=1+z^{-1}+z^{-1}(1+z^{-1})=1+2z^{-1}+z^{-2}$

故输入$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$。

2、解：

$\because$ 若$x(n)=nu(n)$,则$X(z)=\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

又由 Z 变换的性质可知若$x(n)\leftrightarrow X(z)$,则$a^n x(n)\leftrightarrow X(a^{-1}z)$

$\therefore$ 当$X(z)=\dfrac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2}, |z|>0.5, x(n)=Z^{-1}\left[X(z)\right]=(0.5)^n nu(n)$

3、解：由 Z 变换的性质义出发

$\because x_1(n)=(-1)^n x(n), x_2(n)=\dfrac{1}{2}\left[x(n)+x_1(n)\right], y(n)=x(2n)$

$\therefore X_1(z)=X(-z), X_2(z)=\dfrac{1}{2}\left[X(z)+X_1(z)\right], Y(z)=X_2(z^{\frac{1}{2}})$

$\therefore Y(z)=\dfrac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}})+X_1(z^{\frac{1}{2}})\right]=\dfrac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})\right]$

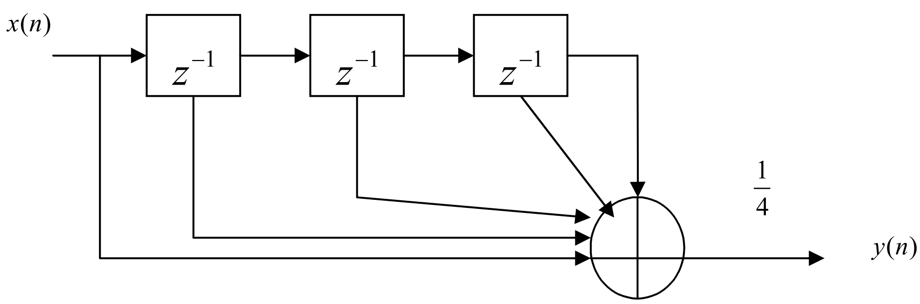
所以$Y(z)$与$X(z)$的关系为$Y(z)=\dfrac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})\right]$

八、综合题（共 24 分）

1、（14 分）解：由分析知

（1）、差分方程为：$\therefore y(n)=\dfrac{1}{4}\left[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)\right]$

系统的结构图如下：



（2）$\because y(n)=\dfrac{1}{4}\left[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)\right]$

$\therefore h(n)=\frac{1}{4}\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)\right]$

$\therefore H(z)=\frac{1}{4}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})$

即，求的系统函数$H(z)=\frac{1}{4}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})$。

（3）、$\because H(z)=\frac{1}{4}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})$

$\therefore H(e^{j\omega})=\frac{1}{4}(1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega})=\frac{1}{4}(1+e^{-j\omega})(1+e^{-j2\omega})=\cos\frac{\omega}{2}\cos\omega e^{-j\frac{3}{2}\omega}$

$\therefore H(\omega)=\cos\frac{\omega}{2}\cos\omega,\text{即}H(0)=1,H(\pi)=0$

所以为一低通滤波器。

（4）、由于单位脉冲响应为输入为$\delta(n)$时的，零状态响应，

又$\because y(n)=\frac{1}{4}\left[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)\right]$

$\therefore h(n)=\frac{1}{4}\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)\right]$

2、（10 分）解：由图可知：

（1）、$h_a(n)=h_1(n)+h_2(n);h_b(n)=h_1(n)\times h_3(n)$

又$h_1(n)=u(n),h_2(n)=\delta(n),h_3(n)=u(n)+\delta(n)$

$\therefore h_a(n)=u(n)+\delta(n);h_b(n)=u(n)\cdot u(n)+u(n)\cdot\delta(n)=u(n)+u(0)$

（2）由常用序列的定义知

$h_b(n)=u(n)+u(0)=u(n)+\delta(n)$

$\therefore h_b(n)=h_a(n)$ 即两系统是等价的。