复习

5.3 窄带随机过程的统计特性

5.3.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示

$$Y(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

准正弦（Quasi Sinusoidal）形式

$$Y(t) = A_C(t)\cos\omega_0 t - A_S(t)\sin\omega_0 t$$

莱斯(Rice)形式
Or 正交分量形式

$$A_C(t) = A(t)\cos\Phi(t)$$

同相分量

$$A_S(t) = A(t)\sin\Phi(t)$$

正交分量

5.3.2 窄带随机过程的统计特性

1 窄带随机信号的相关函数

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau - R_b(\tau)\sin\omega_0\tau$$

如果$G_Y(\omega)$具有对称形式的功率谱，自相关函数变为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau$$

结论：Y(t)的自相关函数也是一个低频分量乘以载频。

2. 同相分量$\boldsymbol{A_C(t)}$和正交分量$\boldsymbol{A_S(t)}$的统计特性

- $A_C(t)$和$A_S(t)$各自平稳，且联合平稳。

复习

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) = R_Y(\tau)\, cos\, \omega_0\, \tau + \hat{R}_Y(\tau)\, sin\, \omega_0\, \tau$$

$$R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_Y(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$R_C(0) = R_S(0) = R_Y(0)$ （方差相等）

$R_{CS}(-\tau) = -R_{CS}(\tau)$ $\quad$ $R_{CS}(0) = 0$

进一步地，如果$Y(t)$具有对称形式的功率谱，$R_{cs}(\tau) = 0$

即$A_c(t)$和$A_s(t)$是相互正交的两个随机过程。这时，

$R_c(\tau) = R_a(\tau)$，所以有 $\quad R_Y(\tau) = R_c(\tau)\, cos\, \omega_0\, \tau$

复习

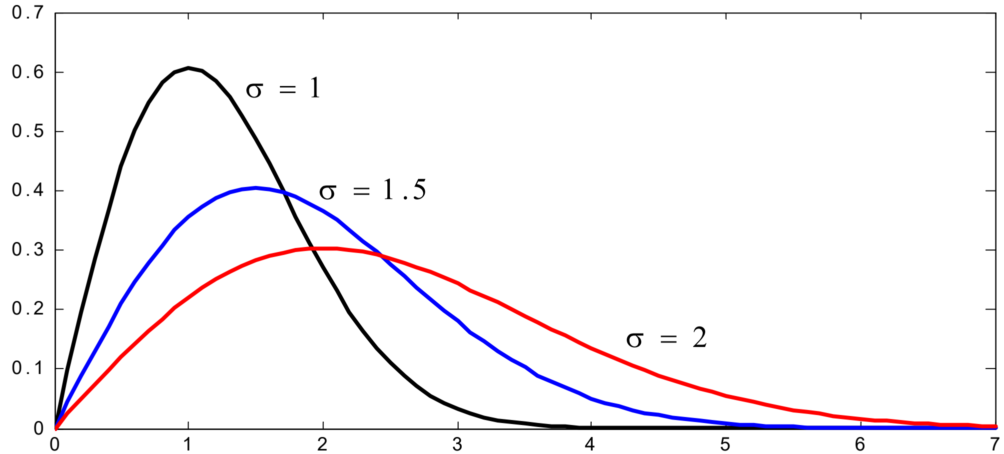
5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

5.4.1 窄带正态噪声的包络和相位的分布

1. 一维分布

瑞利分布

$$f_A(A_t)=\int_0^{2\pi} f_{A\varphi}(A_t,\phi_t)d\phi_t=\begin{cases}\frac{A_t}{\sigma^2}exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t\geq 0\\ 0, & A_t<0\end{cases}$$



复习

相位的一维概率密度为：

均匀分布

$$f_\varphi(\phi_t) = \int_0^\infty f_{A\varphi}(A_t,\phi_t)dA_t = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \phi_t \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

另外，不难看出有

$$f_{A\varphi}(A_t,\phi_t) = f_A(A_t)f_\varphi(\phi_t)$$

该式表明，在同一时刻t，随机变量$A(t)$和$\varphi(t)$是相互独立的。

但要注意$A(t)$与$\varphi(t)$并不是相互独立的两个随机过程。

习题:

6.1　　6.5

2. 二维分布（指包络的二维分布和相位的二维分布）（了解）

思路与前面类似

$$f_A(A_1,A_2)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_A(A_1,\varphi_1,A_2,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$=\begin{cases}\dfrac{A_1A_2}{D^{\frac{1}{2}}}I_0\left(\dfrac{A_1A_2a(\tau)}{D^{\frac{1}{2}}}\right)\exp\left[-\dfrac{\sigma^2\left(A_1^2+A_2^2\right)}{2D^{\frac{1}{2}}}\right], & A_1,A_2\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

包络的二维分布是二维瑞利分布

其中 $D=|K|$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

$I_0(x)$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数，定义为

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\varphi}d\varphi$$

$I_0(x)$ 可展开成级数，即 $I_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

当x<<1时 $$I_0(x)=1+\frac{x^2}{4}+....$$

当x>>1时 $$I_0(x)\approx e^x/\sqrt{2\pi x}$$

相位的二维分布

$$f_{\varphi}\left(\phi_1,\phi_2\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_{A\varphi}\left(A_1,\phi_1,A_2,\phi_2\right)dA_1dA_2$$

$$=\begin{cases}\dfrac{D^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2\sigma^4}\left[\dfrac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}+\beta\left(\pi-\cos^{-1}\beta\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right], & 0\le\phi_1,\quad \phi_2\le 2\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$$

5.4.2 窄带正态噪声加正弦信号的包络和相位的分布

（了解）

信号： $S(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$

噪声： $N(t)=N_c(t)\cos\omega_0 t-N_s(t)\sin\omega_0 t$

$$X(t)=S(t)+N(t)$$
$$=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t=A(t)\cos\left[\omega_0 t+\phi(t)\right]$$

$$\begin{cases}A_c(t)=a\cos\theta+N_c(t)\\ A_s(t)=a\sin\theta+N_s(t)\end{cases}$$

✓包络分析

$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{A_t^2+a^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right),A_t\geq 0$$

称为广义瑞利概率密度，也称为莱斯(Rice)概率密度。

其中 $I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\varphi)d\varphi$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

☞当信噪比很小时，即 $a/\sigma \ll 1$ 时

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 + \frac{a^2 A_t^2}{4\sigma^4}\right)$$

趋近瑞利分布；

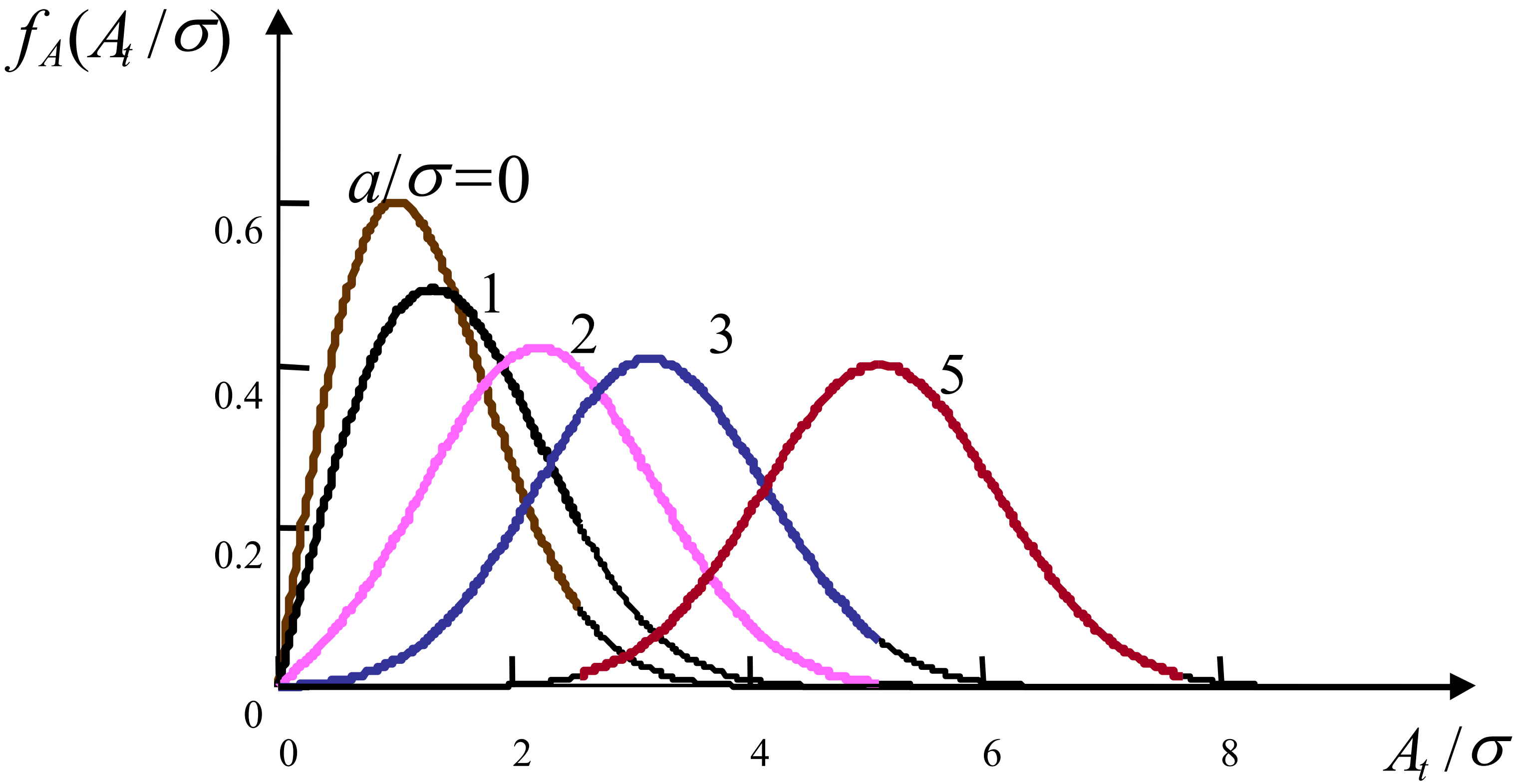
对比瑞利分布：

$$f_A(A_t) = \begin{cases} \dfrac{A_t}{\sigma^2} exp\left(-\dfrac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t \geq 0 \\ 0, & A_t < 0 \end{cases}$$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

☞当信噪比很大时，趋近正态分布。

$$f_A(A_t)=\frac{(A_t/a)^{1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(A_t-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

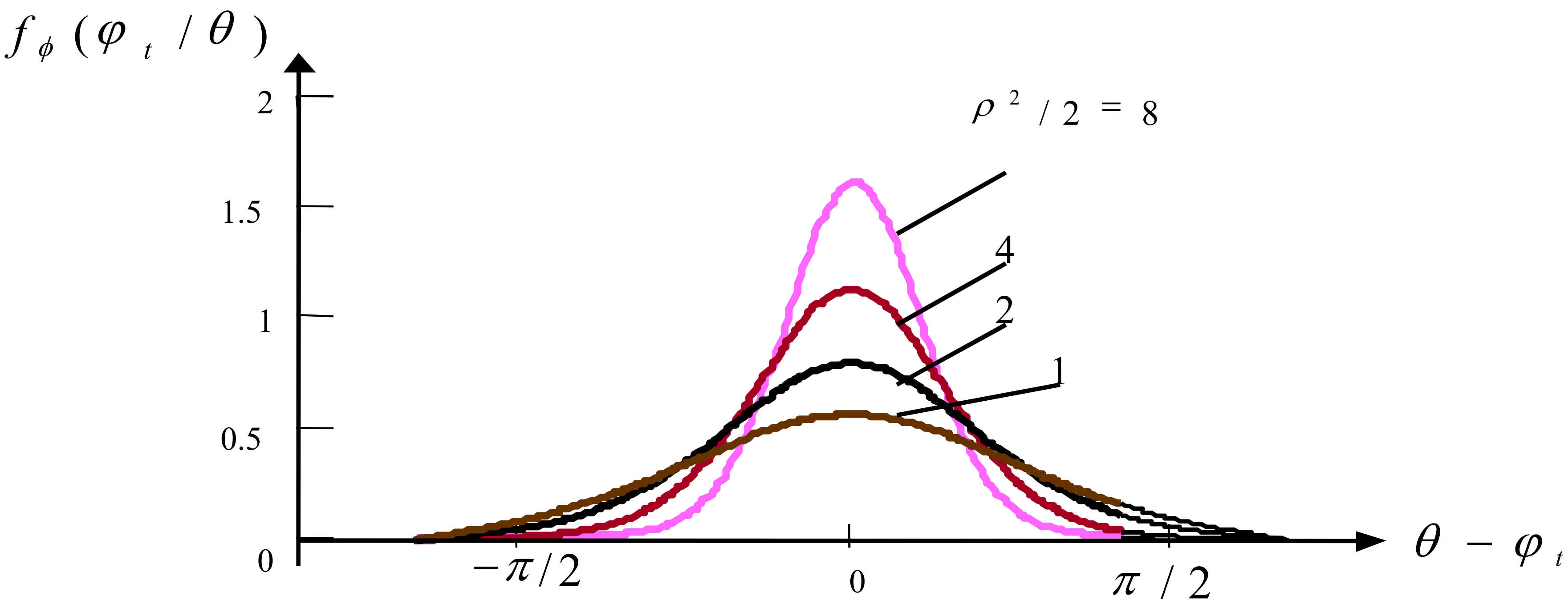


包络分布密度曲线

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

✓相位分析

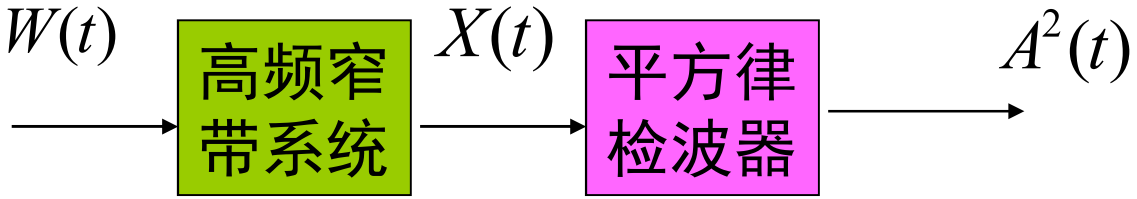
- ☞当信噪比很小时，相位趋近**均匀**分布
- ☞当信噪比很大时，相位趋近**正态**分布



信号加噪声的相位分布密度

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

5.4.3 窄带正态过程包络平方的分布



已知窄带正态噪声包络的幅度分布为：

$$f_A(A_t)=\int_0^{2\pi} f_{A\phi}(A_t,\varphi_t)\,d\varphi_t=\begin{cases}\dfrac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t\ge 0\\ 0, & A_t<0\end{cases}$$

✓ 窄带正态噪声包络平方的分布 $U(t)=A^2(t)$ $\qquad A_t=\sqrt{u}$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

$$f_U(u_t) = f_A(A_t)\,|J| \qquad J = \frac{dA_t}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f_U(u) = |J|\,\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{A_t=\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{\sqrt{u}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \qquad u \ge 0$$

结论：窄带正态噪声的包络平方服从指数分布。

当σ^2=1时，$f_U(u)=\frac{1}{2}e^{u/2}$，此时E[U(t)]=2，方差为D[U(t)]=4.

✓正弦信号加窄带正态噪声包络平方的分布

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cos\left[\omega_0\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})\right]$$

$$U(t)=A^2(t)$$

已知

$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2+a^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right),A_t\geq 0$$

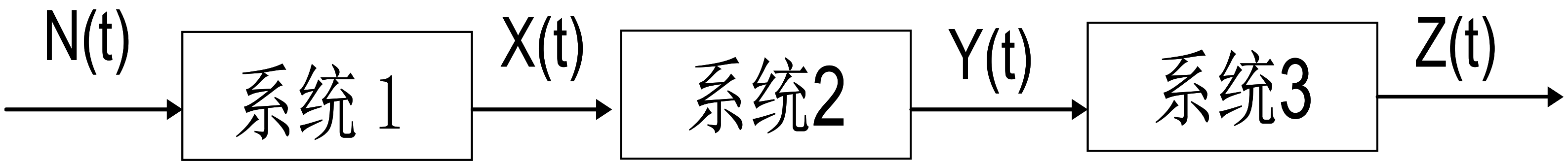
可得：

$$f_U(t)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(u+a^2)\right]I_0\left(\frac{au^{1/2}}{\sigma^2}\right),u\geq 0$$

课堂练习

如图系统1为窄带对称系统，中心频率为 ω_0 ，其输出过程的自相关函数的包络为 $e^{-\tau^2}$ ，系统2的传输函数为 $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$ ，系统3为理想微分线性系统。输入为功率谱为$N_0/2$的白高斯噪声。求系统稳态时

（1）X(t)和Y(t)的自相关函数；（2）Z(t)的自相关函数、均值和方差；（3）Z(t)的一维分布？



5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

（1） $R_X(\tau) = e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$

$R_Y(\tau) = R_X\ (\tau) = e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$

（2） $R_z(\tau) = -\dfrac{d^2R_Y(\tau)}{d\tau^2} = (2-4\ \tau^2+\omega_0^2)\ e^{-\tau^2}$

$\cos\omega_0\tau - 4\ \omega_0\tau e^{-\tau^2}\sin\omega_0\tau$

$R_z(0) = 2 + \omega_0^2 \qquad R_z(\infty) = 0 = m_Z^2$

$\sigma_Z^2 = 2 + \omega_0^2$

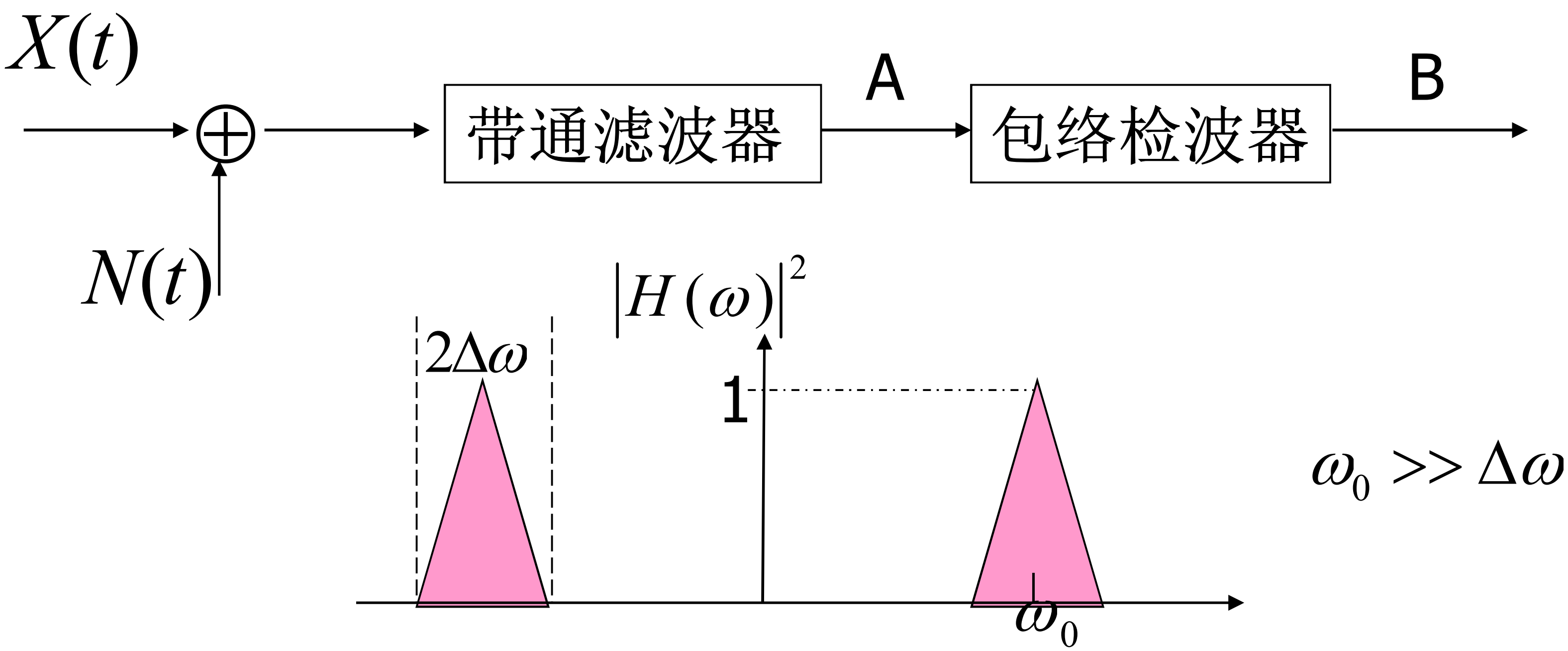
5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

例 已知随机相位正弦波$X(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$

其中θ为[0，2π] 内均匀分布的随机变量，白噪声N(t)的功率谱密度为$N_0/2$，噪声与随机相位信号不相关，滤波器特性如下图，

求：1）A点波形的功率谱及自相关函数；

2）B点波形一维概率密度。



5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

解：设 A 点波形为 Y(t)，则 Y(t)=X(t)+N_C(t)，其中 Nc(t)为白噪声通过滤波器的输出。X(t) 与 Nc(t) 相互独立。有

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)+R_{N_C}(\tau),\quad G_Y(\omega)=G_X(\omega)+G_{N_C}(\omega)$$

又有：$$R_X(\tau)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau,\quad G_X(\omega)=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$G_{N_C}(\omega)=|H(\omega)|^2 G_N(\omega)=|H(\omega)|^2\frac{N_0}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2}\left[1-\dfrac{1}{\Delta\omega}\Big||\omega|-\omega_0\Big|\right], & |\omega\pm\omega_0|\le\Delta\omega\\ 0, & other\end{cases}$$

可得输出相关函数：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{N_0\Delta\omega}{\pi}\left(\frac{\sin\Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2}\right)^2\right]\cos\omega_0\tau$$

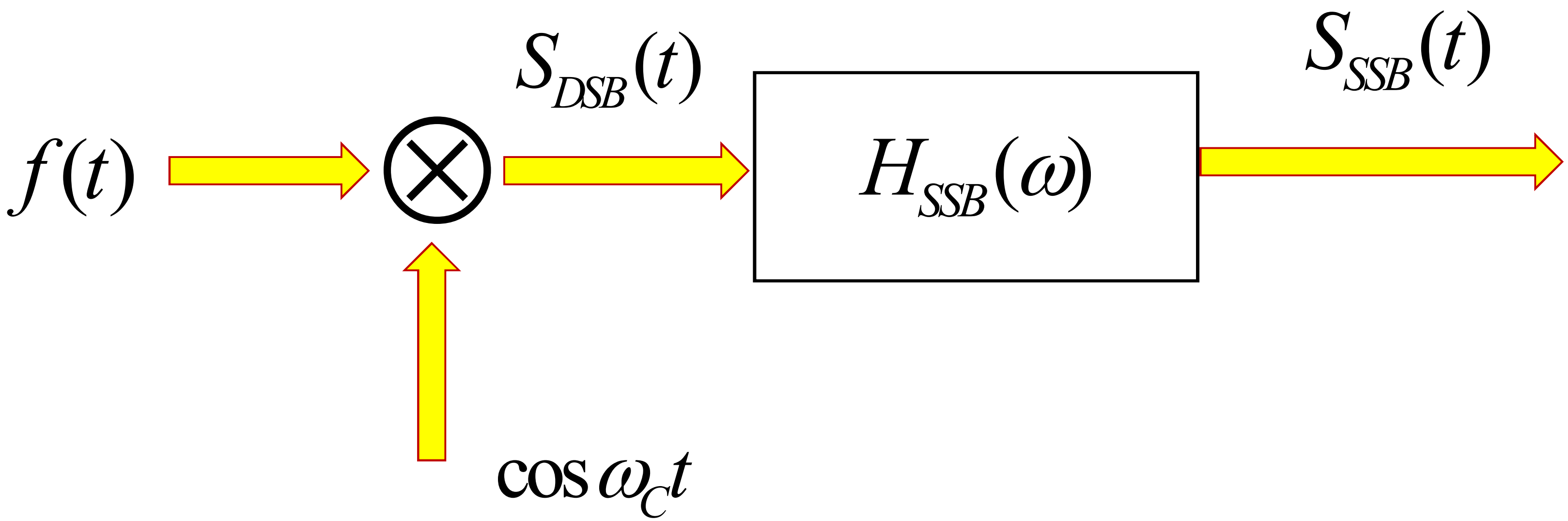
（2）设 B 点波形为 Z(t)，其为 Y(t)的包络，一维分布为广义瑞利分布。

据题意，有 a=1，Nc(t)平均功率为 $\sigma^2=\Delta f\cdot N_0=\frac{\Delta\omega N_0}{2\pi}$

因此 $f_Z(z)=\frac{z}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{z^2+1}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{z}{\sigma^2}\right),z\geq 0$

5.5信号处理实例

1. 希尔伯特变换的应用---单边带调制



单边带信号滤波法生成图

5.5信号处理实例

单边带调制--相移法

$$S_{SSB}(t) = S_{DSB}(t) * h_{SSB}(t)$$

$$H_{USB}(\omega) = 1 - R(\omega) \qquad R(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_C \\ 0 & other \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$h_{USB}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - R(\omega)]e^{j\omega t}d\omega = \delta(t) - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_C t}{t}$$

5.5信号处理实例

$$S_{USB}(t)=S_{DSB}(t)*h_{USB}(t)=\left[f(t)\cos\omega_C t\right]*\left[\delta(t)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_C t}{t}\right]$$

$$=f(t)\cos\omega_C t-\left[f(t)\cos\omega_C t\right]*\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_C t}{t}$$

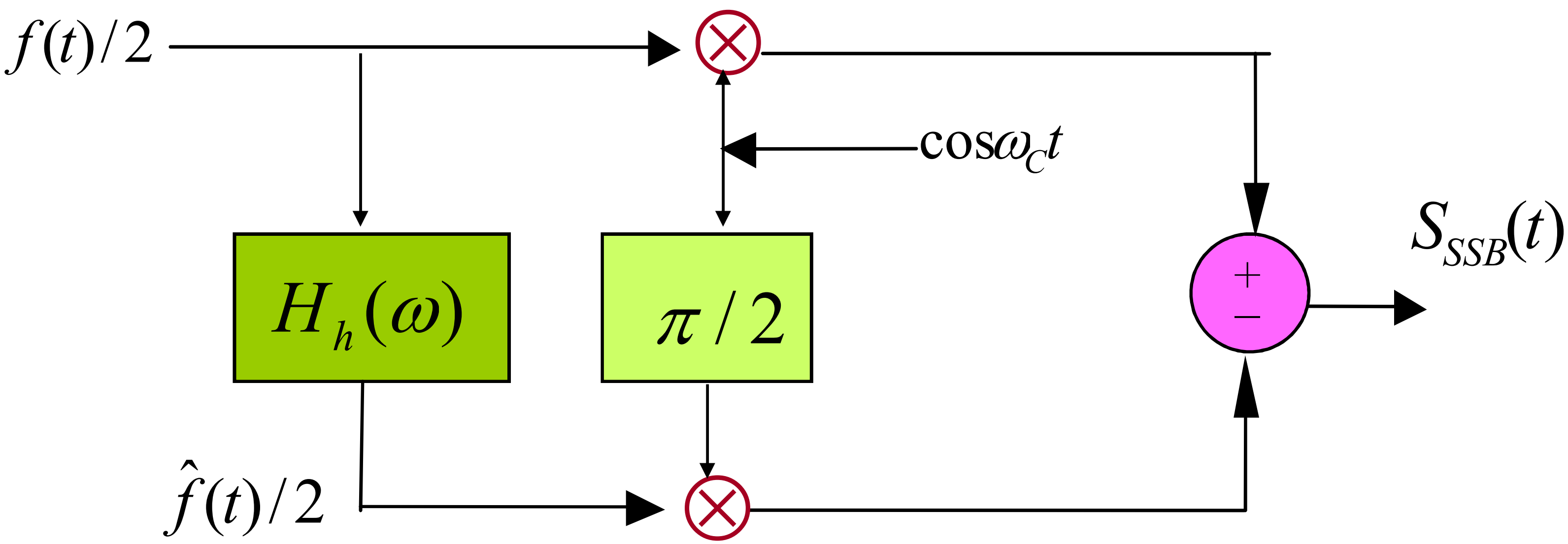
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\cos\omega_C\tau\sin(\omega_C t-\omega_C\tau)}{t-\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\omega_C t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\cos\omega_C\tau\cos\omega_C\tau}{t-\tau}d\tau$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos\omega_C t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\cos\omega_C\tau\sin\omega_C\tau}{t-\tau}d\tau$$

5.5信号处理实例

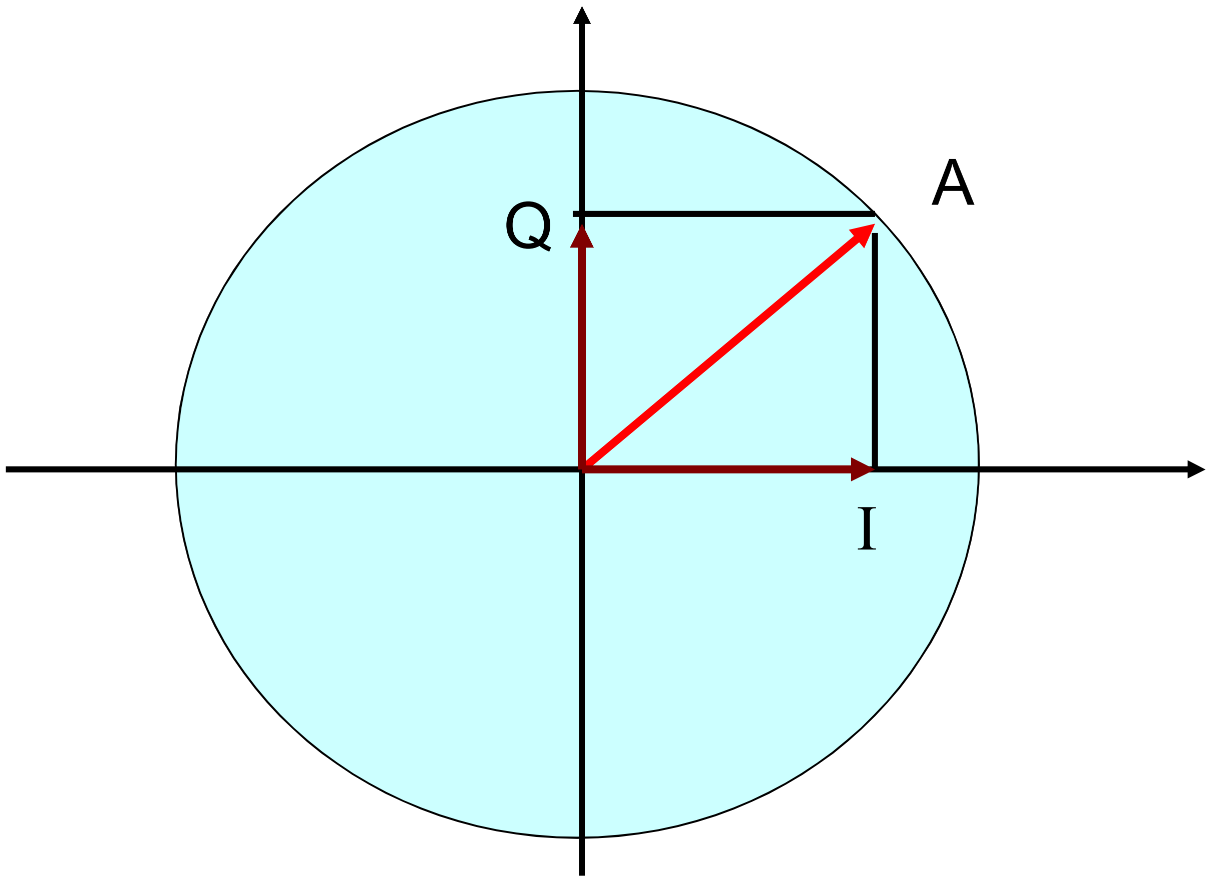
$$S_{USB}(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos\omega_C t - \frac{1}{2}\hat{f}(t)\sin\omega_C t$$



单边带调制相移法结构图

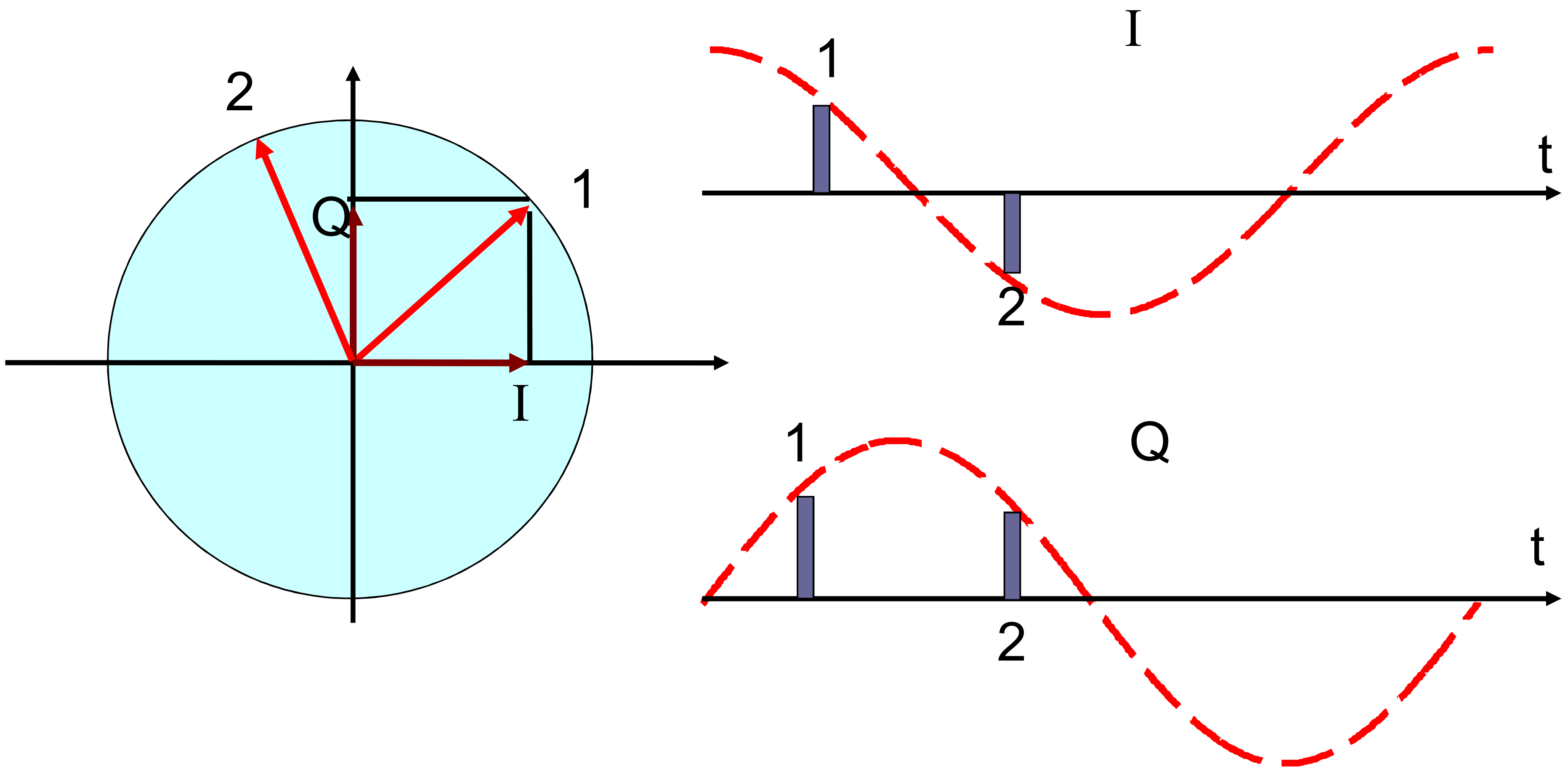
5.5信号处理实例

1、同相、正交分量应用—多普勒偏移方向辨别



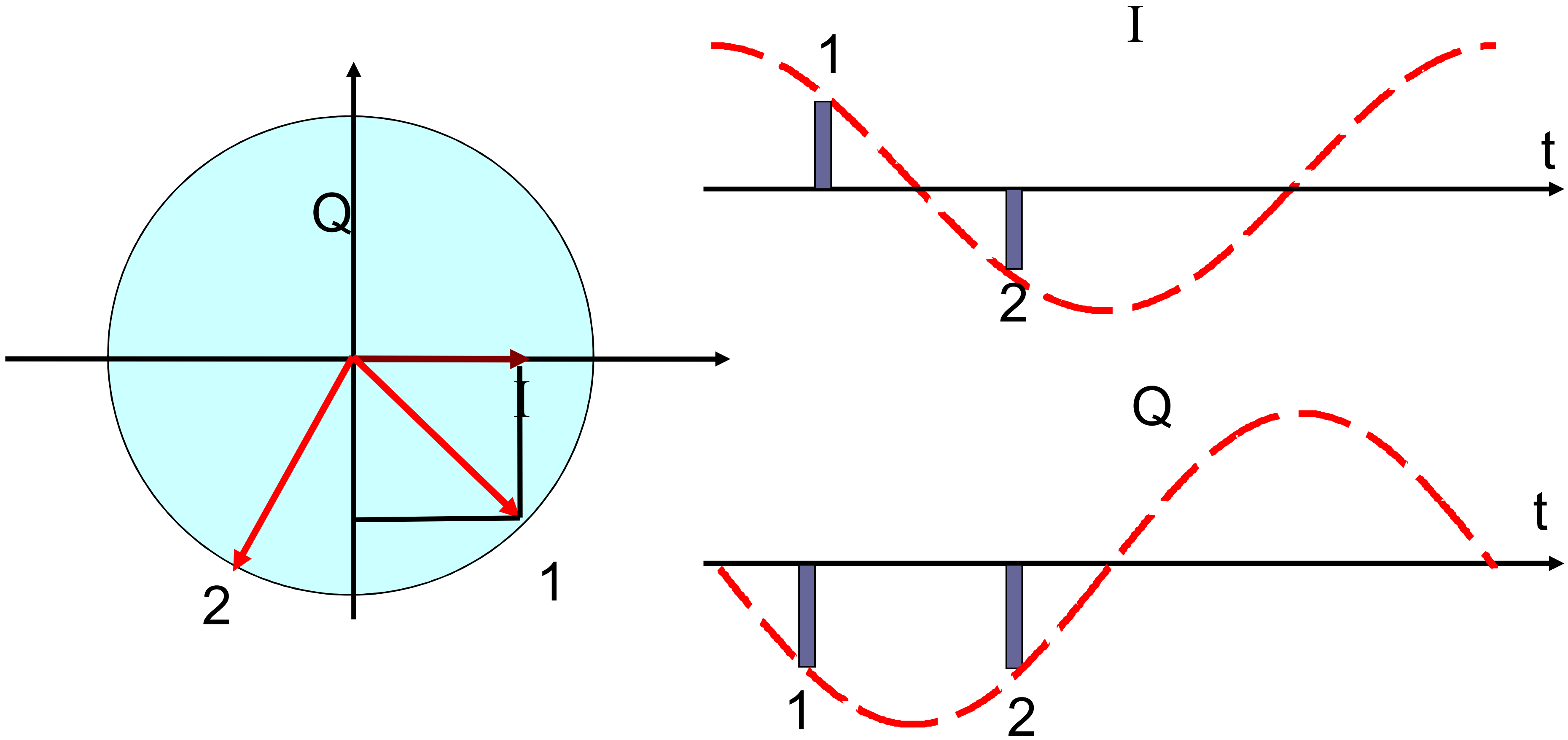
I分量和Q分量的瞬时值

5.5信号处理实例



多普勒偏移为正，Q滞后I 90°

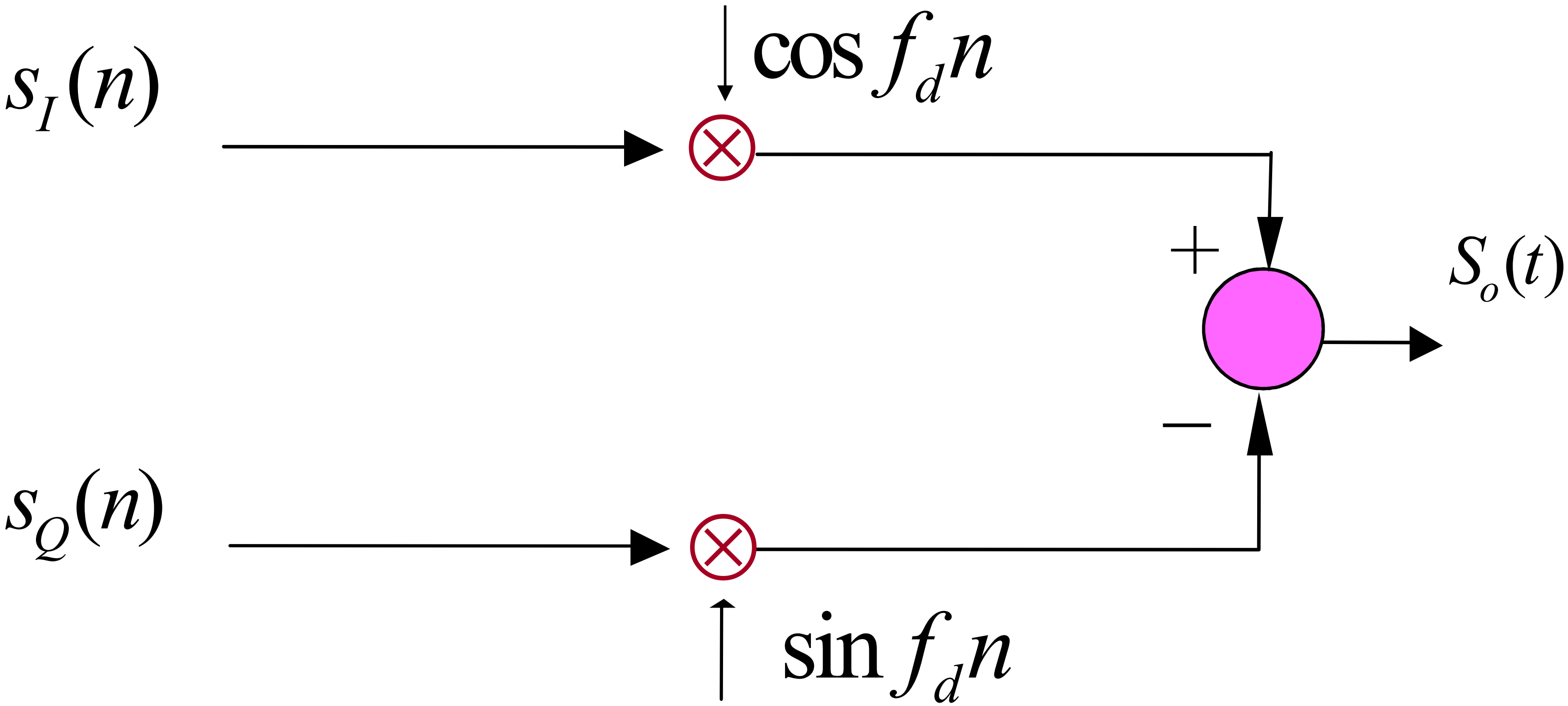
5.5信号处理实例



多普勒偏移为负，Q超前I 90°

5.5信号处理实例

除了显示多普勒频率，我们还可以控制产生（调制）多普勒频率



第六章 马尔可夫过程与泊松过程

6.1 马尔可夫链（要求：重点掌握）

6.2 隐马尔可夫模型（要求：了解概念）

6.3 马尔可夫过程（要求：）

6.4 独立增量过程（要求：掌握性质关系）

泊松过程

维纳过程

6.1 马尔可夫（Markov）链

- 马尔可夫链的定义
- 马尔可夫链的转移概率及矩阵
- 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程
- 齐次马尔可夫链
- 平稳链
- 马尔可夫链中状态分类
- 遍历性

6.1 马尔科夫链

马尔可夫过程分类：

1. 马尔可夫链

   时间离散，状态离散；

2. 离散马尔可夫过程

   时间连续，状态离散；

3. 马尔可夫序列

   时间离散，状态连续；

4. 连续马尔可夫过程

   时间连续，状态连续。

马尔可夫，A. A.

马尔可夫（1856－1922）

王梓坤院士

马尔可夫性：

一个随机过程如果给定了当前时刻t的值X_t，如果Xs（s>t）的值不受过去的值Xu（u<t）的影响，而仅与过程在t时刻的状态有关，此特性称为随机过程的马尔可夫性或无后效性。

在给定当前知识或信息的情况下，过去（即当前以前的历史状态）对于预测将来（即当前以后的未来状态）是无关的。

6.1 马尔科夫链

6.1.1 马尔科夫链的定义

•定义： 状态和时间参量都是离散的随机过程，若过程 $X(t)$ 在时刻t_{m+k}变成任一状态的概率，只与过程在t_m时刻的状态有关，而与过程在tm时刻以前的状态无关，则该过程称马尔可夫链。

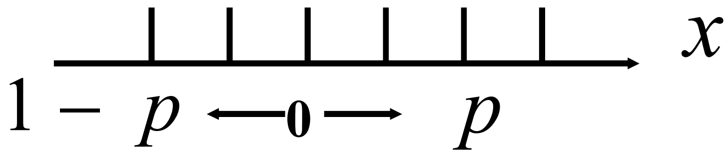
$$P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}|X_m=a_{i_m},X_{m-1}=a_{i_{m-1}},\cdots,X_1=a_{i_1}\}=P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}|X_m=a_{i_m}\}$$

$$a_{i_m},a_{i_{m-1}},\ldots..a_{i_1}\in\{a_i|i=1,2,3,\ldots N\}$$

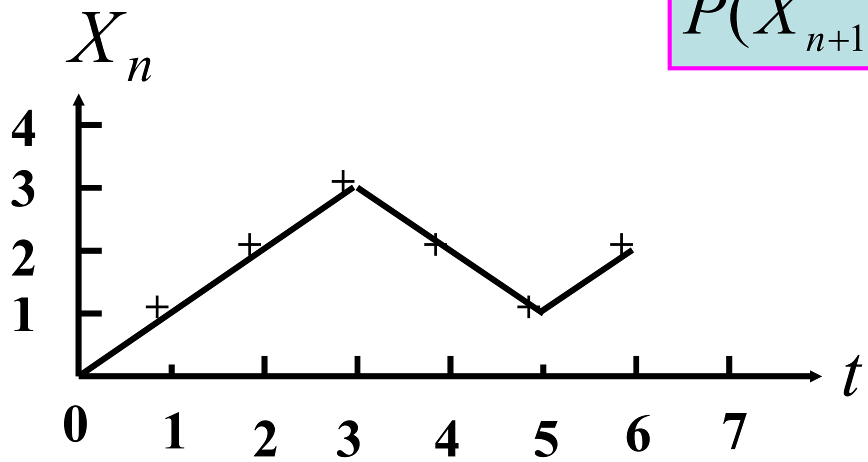
6.1 马尔科夫链

◆ 典型马尔可夫链

➢ 一维随机游动



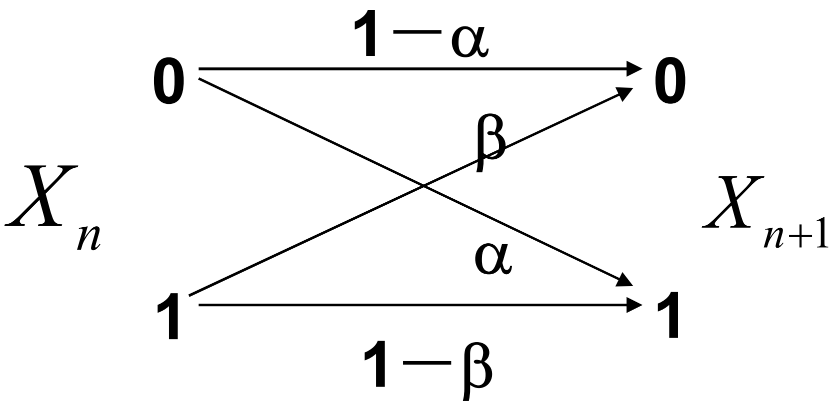
$$P(X_{n+1}=k+1\mid X_n=k)=p$$
$$P(X_{n+1}=k-1\mid X_n=k)=q$$



6.1 马尔科夫链

◆ 典型马尔可夫链

- 二元通信信道



$$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0)=\alpha$$
$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=1)=\beta$$

- 家族姓氏的生存过程
- 球类比赛
- 多发导弹攻击同一目标

6.1 马尔科夫链

6.1.2 马尔可夫链的一般特性

状态概率： $$p_j(n) = P\{X_n = a_j\}$$

概率分布列： $$\mathbf{p}(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) & p_2(n) & \cdots & p_N(n) \end{bmatrix}^T$$

状态转移概率： $$p_{ij}(s,n) = P\{X_n = a_j | X_s = a_i\}$$

转移矩阵：

$$\mathbf{P}(s,n) = \begin{bmatrix} p_{11}(s,n) & \cdots & p_{1N}(s,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(s,n) & \cdots & p_{NN}(s,n) \end{bmatrix}$$

6.1 马尔科夫链

性质：(1) $$\sum_{j=1}^{N} p_j(n) = 1$$

(2) $$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(s,n) = \sum_{j=1}^{N} P\{X_n = a_j | X_s = a_i\} = 1$$

(3) $$p_j(n) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}(s,n) p_i(s)$$

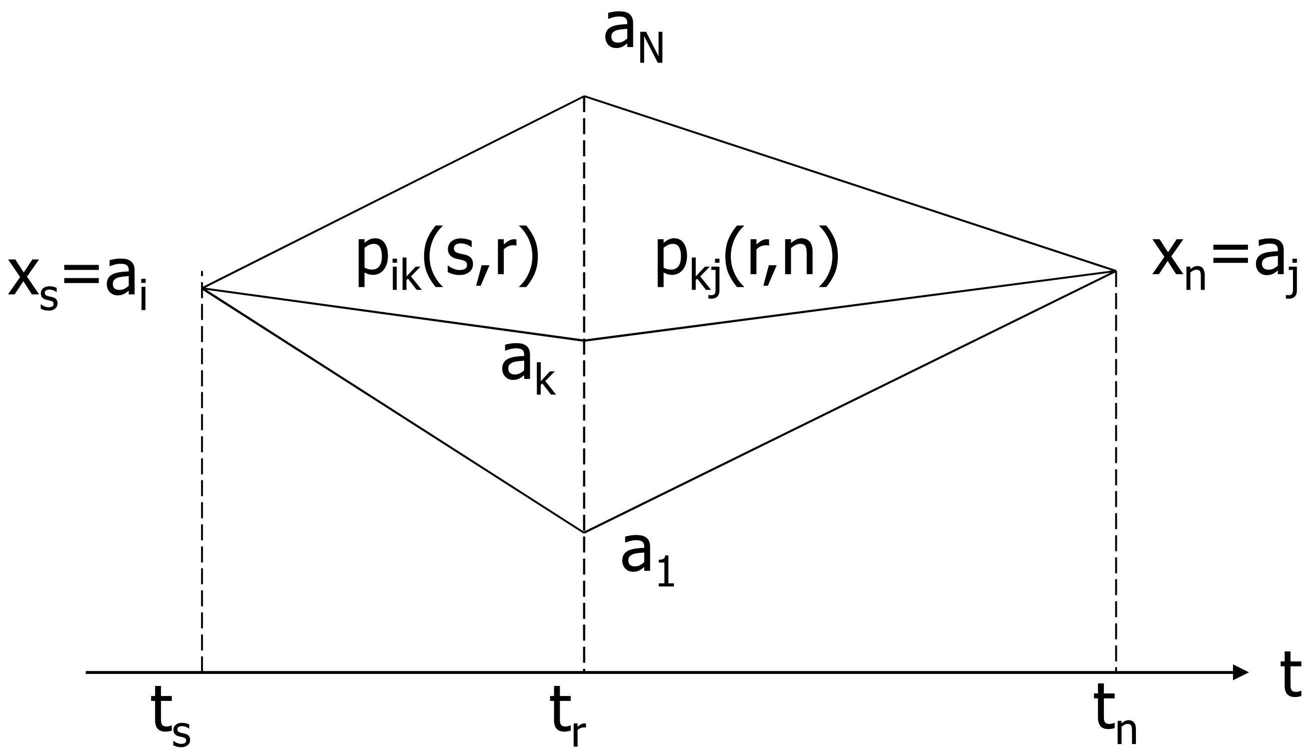
(4) $$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(s,n)\mathbf{p}(s)$$

(5) 状态转移图

6.1 马尔科夫链

6.1.3 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程 （重点）

$$p_{ij}(s,n)=\sum_{k=1}^{N}p_{ik}(s,r)p_{kj}(r,n),\quad n>r>s$$



6.1 马尔科夫链

【证明】 根据转移概率的定义，有

$$p_{ij}(s,n) = P\{x_n = a_j | x_s = a_i\} = \frac{P\{x_n = a_j, x_s = a_i\}}{P\{x_s = a_i\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{P\{x_n = a_j, x_r = a_k, x_s = a_i\}}{P\{x_r = a_k, x_s = a_i\}} \cdot \frac{P\{x_r = a_k, x_s = a_i\}}{P\{x_s = a_i\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} P\{x_n = a_j | x_r = a_k, x_s = a_i\} \cdot P\{x_r = a_k | x_s = a_i\}$$

根据马尔可夫链及其转移概率的定义，式中

$$P\{x_n = a_j | x_r = a_k, x_s = a_i\} = P\{x_n = a_j | x_r = a_k\} = p_{kj}(r,n)$$

而$P\{x_r = a_k x_s = a_i\} = p_{ik}(s,r)$ 【得证】

6.1 马尔科夫链

【物理含义】

可借图6. 1加以说明。如果已知由$x_s = a_i$转移到$x_r = a_k$的概率为$P_{ik}(s,r)$，由$x_r = a_k$转移到$x_n = a_j$的概率为$P_{kj}(r,n)$，则由$x_s = a_i$转移到$x_r = a_k$，再由$x_r = a_k$转移到$x_n = a_j$的概率为

$$P\{x_n = a_j, x_r = a_k | x_s = a_i\} = p_{ik}(s,r)p_{kj}(r,n)$$

于是由$x_s = a_i$转移到$x_n = a_j$的概率为上式当$k = 1,2,\cdots,N$时的总和，即考虑到x_r所有可能值的情况。

6.1.4 齐次马尔可夫链

如果马尔可夫链的转移概率只取决于**n-s**，而与**n**和**s**本身的值无关，则称为齐次马尔可夫链，简称齐次链。

$$p_{ij}(s,n) = p_{ij}(n-s)$$

一步转移概率： $$p_{ij} = p_{ij}(1)$$

n-s步转移矩阵：

$$P(n-s) = \begin{bmatrix} p_{11}(n-s) & \cdots & p_{1N}(n-s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(n-s) & \cdots & p_{NN}(n-s) \end{bmatrix}$$

6.1 马尔科夫链

令 $\mathbf{P}^T(1) \triangleq \pi$，利用切普曼方程，有 $\boxed{\mathbf{P}^T(n) = \pi^n}$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(s,n)\mathbf{p}(s)$$

（注意大小写）

$$\boxed{\mathbf{p}(n+k) = \mathbf{P}^T(n)\mathbf{p}(k) = \pi^n\mathbf{p}(k)}$$

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{P}^T(n)\mathbf{p}(1) = \pi^n\mathbf{p}(1)$$

- 对于齐次马尔可夫链，状态概率由初始概率和一步转移概率决定。即利用初始分布和一步转移概率矩阵就能完整地描述齐次马尔可夫链的统计特性。

例1 分析用于表征通信系统的错误产生机制的马尔可夫模型，假定其级数为2，求二步转移概率矩阵 。

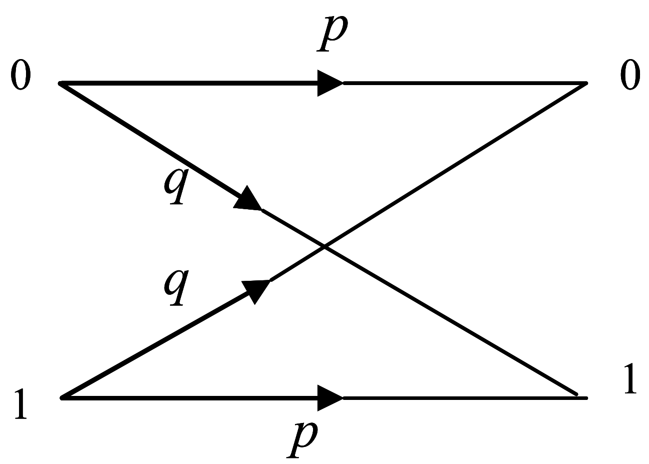


图6.2 二进制对称信道

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(2)=\mathbf{P}^2(1)=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{bmatrix}$$

6.1.5 平稳链

如果齐次链中所有时刻的状态概率分布列相同，即：

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(1)$$

则此齐次链是平稳的。

若齐次链中序列X_1和X_2的概率分布列相同，则此链平稳。

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1)$$

$$\mathbf{p}(3) = \boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(2) = \boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1)$$

6.1 马尔科夫链

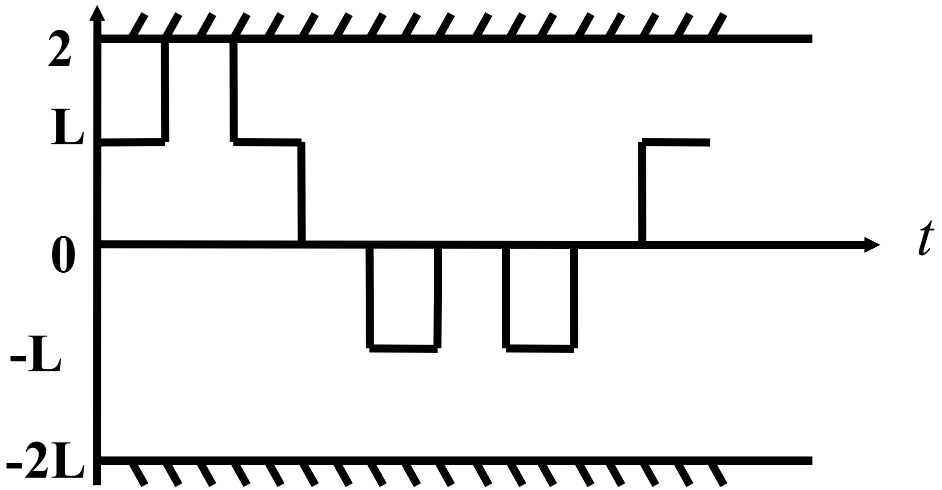
平稳链概率分布列求解 $\mathbf{p}(1)=\left[p_1,p_2,\cdots,p_N\right]^T$

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(1)=\mathbf{p}(1) \Rightarrow \begin{cases} \pi_{11}p_1+\pi_{21}p_2+\cdots+\pi_{N1}p_N=p_1 \\ \pi_{12}p_1+\pi_{22}p_2+\cdots+\pi_{N2}p_N=p_2 \\ \cdots\cdots \\ \pi_{1N}p_1+\pi_{2N}p_2+\cdots+\pi_{NN}p_N=p_N \\ p_1+p_2+\cdots+p_N=1 \end{cases}$$

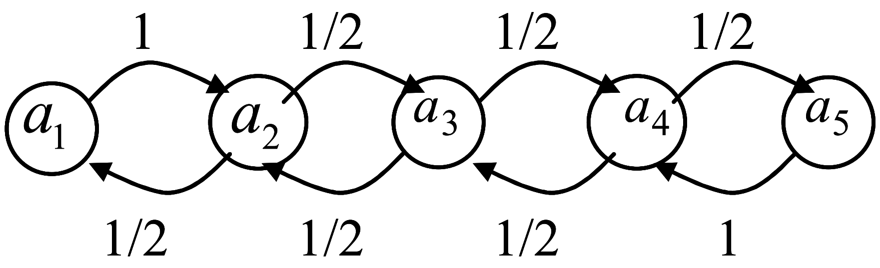
（掌握）

6.1 马尔科夫链

例2：具有反射壁的随机游动。设有一质点在线段上游动，终端设有反射壁。质点只能停留在 $a_1=-2l, a_2=-l, a_3=0, a_4=l, a_5=2l$ 上，游动的概率法则如下：如果游动前质点在 a_2, a_3, a_4 位置，则以**1/2**概率向前或向后移动一单位**L**，在 a_1 位置，则以概率**1**游动到 a_2，在 a_5 位置，则以概率**1**游动到 a_4，画出状态转移图，并求概率分布列。



6.1 马尔科夫链



由 X_n 构成的过程为一齐次链，其一步转移矩阵为

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1 马尔科夫链

$$\begin{cases} \frac{p_2}{2} = p_1 \\ p_1 + \frac{p_3}{2} = p_2 \\ \frac{p_2}{2} + \frac{p_4}{2} = p_3 \\ \frac{p_3}{2} + p_5 = p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

解得的结果为：

$$p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$$

$$p_1 = p_5 = \frac{1}{8}$$

6. 1. 6 马尔科夫链中状态分类

☞到达

如果对于状态a_i与a_j(简写为i与j)，总存在某个n(n≥1)，使得$p_{ij}(n)>0$，即：由状态i出发，经n步转移以正的概率到达状态j，则称自状态i可达状态j，记为$i \to j$。

若状态i不能到达状态j，记为$i \nrightarrow j$。即对所有的n(n≥1)，总有$p_{ij}(n)=0$。

无限制的随机游动，每个状态都是可到达的，带吸收壁的随机游动，吸收壁状态不能到达任何其它状态。

6.1 马尔科夫链

☞**相通**

设两状态**i**与**j**，由状态**i**可达状态**j**，从状态**j**也可达状态**i**，则称状态**i**与**j**相通，记为$i \leftrightarrow j$。

无限制的随机游动，所有状态都是相通的，带吸收壁的随机游动，除吸收壁外，其余状态都是相通的。

☞**性质：**

●到达具有传递性。即：若$i \to r$，$r \to j$，则$i \to j$。

●相通具有传递性。即：若$i \leftrightarrow r$，$r \leftrightarrow j$，则$i \leftrightarrow j$。

6.1 马尔科夫链

☞状态空间的分解

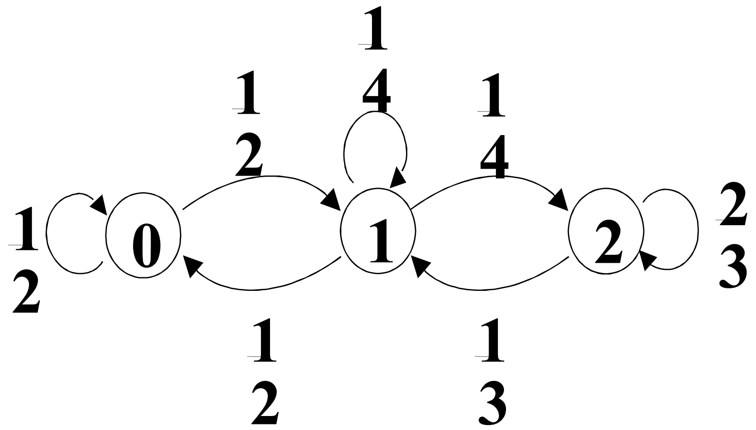
设$C \in I$，若从子集C内任一状态i不能到达C外的任一状态，则称C为闭集。

- 闭集的充分必要条件是，$i \in C$， j在C外，恒有$p_{ij}(n)=0$， $n \geq 1$
- 若单个状态i构成一个闭集，则称此闭集为吸收态。
- 除了整个状态空间外，没有别的闭集的马氏链称为不可约的；此时，所有状态相通。

6.1 马尔科夫链

例： 设有三个状态(0, 1, 2)的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P(1)=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$



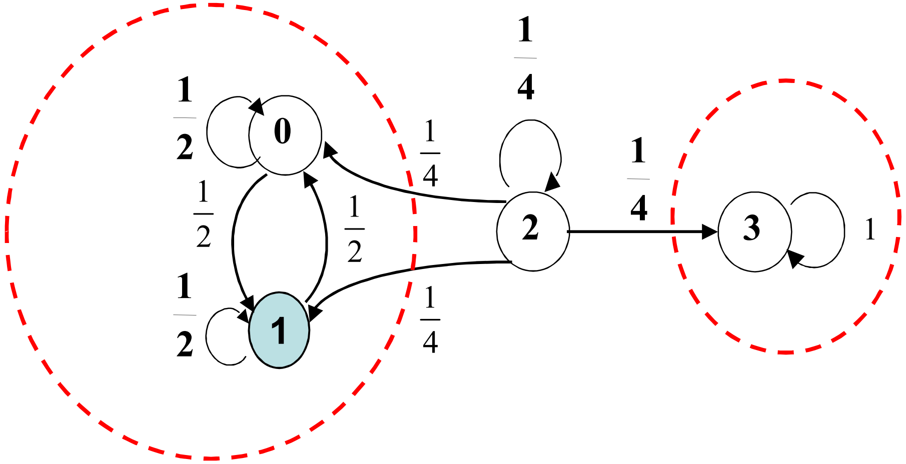
⓪→①→②　　②→①→⓪　　⓪↔②

三个状态均相通，所以是不可约的。

6.1 马尔科夫链

例：设有四个状态的马尔可夫链(0, 1, 2, 3)，一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



状态3为闭集，它是一个吸状态。

0，1两个状态与其它状态也不相通，0，1两个状态也是一个闭集。

6.1 马尔科夫链

6.1.7 遍历性

如果齐次马尔可夫链中，对于一切i与j，存在不依赖i的极限，则称该链具有遍历性。即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j$$

含义：当转移步数足够长时，不论n步之前是处于哪种状态，n步后转移到状态j的概率接近p_j。

定理　对有穷马尔可夫链，如存在正整数s，使

$$p_{ij}(s) > 0$$

式中$i, j = 1,2,\cdots,N$，则该链具有遍历性。

6.1 马尔科夫链

例3：设马尔可夫链的一步转移矩阵为，分析其遍历性。

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(2)=\begin{bmatrix} q^2+pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq+p^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(n)=\mathbf{P}^n(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

应用：预测股票价格走势

- 问题提出：

连续观察双汇股票自2005年2月21日至4月7日的价格如下（资料来源自中原证券），试预测2005年4月7日后的第二个交易日该股票的价格走势。

6.1 马尔科夫链

应用：预测股票价格走势

日期	2-21	2-22	2-23	2-24	2-25	2-26	3-01	3-02	3-03
价格	13.76	14.44	14.3	14.02	13.86	13.78	13.64	13.50	13.65
日期	3-04	3-07	3-08	3-09	3-10	3-11	3-12	3-15	3-16
价格	13.74	13.73	14.12	13.98	14.01	14.30	15.03	14.83	14.56
日期	3-17	3-18	3-21	3-22	3-23	3-24	3-25	3-28	3-30
价格	14.57	14.63	14.69	14.49	13.87	13.63	13.59	13.84	13.72
日期	3-31	4-01	4-04	4-05	4-06	4-07			
价格	13.85	14.18	14.53	14.45	15.19	14.88			

6.1 马尔科夫链

- Step1：建模

用 y_n 表示双汇股票第n天的价格，记 $x_n=y_n-y_{n-1}$，以-1，0，1分别表示 $x_n<-0.1$、$-0.1<x_n<0.1$、$x_n>0.1$ 这三种状态。由表中连续观察该股票33天，得如下数据：1、-1、-1、-1、0、-1、-1、1、0、0、1、-1、0、1、1、-1、-1、-1、0、0、0、-1、-1、-1、1、1、-1、1、1、1、0、1、-1。

- Step2：求解

又因为在32个数据中，-1有13个，0有8个，1有11个且以-1结尾。又-1→-1有6次；-1→0有3次；-1→1有3 次，0→-1有2次，0→0有3次；0→1有3次，1→-1有5次，1→0有2次，1→1有4次

$$P=\begin{bmatrix} \frac{6}{12} & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{11} & \frac{2}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

- Step2：求解

$$P_{ij}^{(2)}=\sum_{k=-1}^{1}P_{ik}P_{kj}\text{，得}$$

$$P_{-1,-1}^{(2)}=\sum_{k=-1}^{1}P_{-1,k}P_{k,-1}=\frac{6}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{3}{12}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}=0.4261;$$

$$P_{-1,0}^{(2)}=\sum_{k=-1}^{1}P_{-1,k}P_{k,0}=\frac{6}{12}\times\frac{3}{12}+\frac{3}{12}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}=0.2642;$$

$$P_{-1,1}^{(2)}=\sum_{k=-1}^{1}P_{-1,k}P_{k,1}=\frac{6}{12}\times\frac{3}{12}+\frac{3}{12}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{12}\times\frac{4}{11}=0.3096.$$

0.4261>0.3096>0.2624，预测4月7日后的第二个交易日该股票的价格会下跌。这个预测结果与实际情况完全吻合。

6.1 马尔科夫链

天气预报的例子