5.1 希尔伯特变换

(3) 设$a(t)$为低频信号, 其傅立叶变换为$A(\omega)$, 且

$$H[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t] = -a(t)\cos\omega_0 t$$

(4) 设$A(t)$与$\phi(t)$为低频信号，则

$$H[A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]] = A(t)\sin[\omega_0 t + \phi(t)]$$

$$H[A(t)\sin[\omega_0 t + \phi(t)]] = -A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

复习

(5) 设 $y(t) = v(t) \otimes x(t)$

则 $\hat{y}(t) = \hat{v}(t) \otimes x(t) = v(t) \otimes \hat{x}(t)$

(6) 设平稳随机过程$X(t)$，自相关函数为$R_X(\tau)$，则

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

(7) $R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$ $R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$

(8) X(t)与他的希尔伯特变换的互相关函数是奇函数，且有

$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻是正交的。

复习

（9）偶函数的希尔伯特变换是奇函数；

奇函数的希尔伯特变换是偶函数。

（10）单边性←---→解析性

5.2 信号的复信号表示

$x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]$ 是窄带确知信号，对应的解析信号

$$\tilde{x}(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]+jA(t)\sin[\omega_0 t+\varphi(t)]$$

$$=\tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t}$$

其中： $\tilde{A}(t)=A(t)e^{j\varphi(t)}$ 被称为复包络

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

复习

5.2.2 随机信号的复信号表示

1、定义

设X(t)为实随机过程，其复随机过程定义为：

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

$$\hat{X}(t) = H[X(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

实随机信号

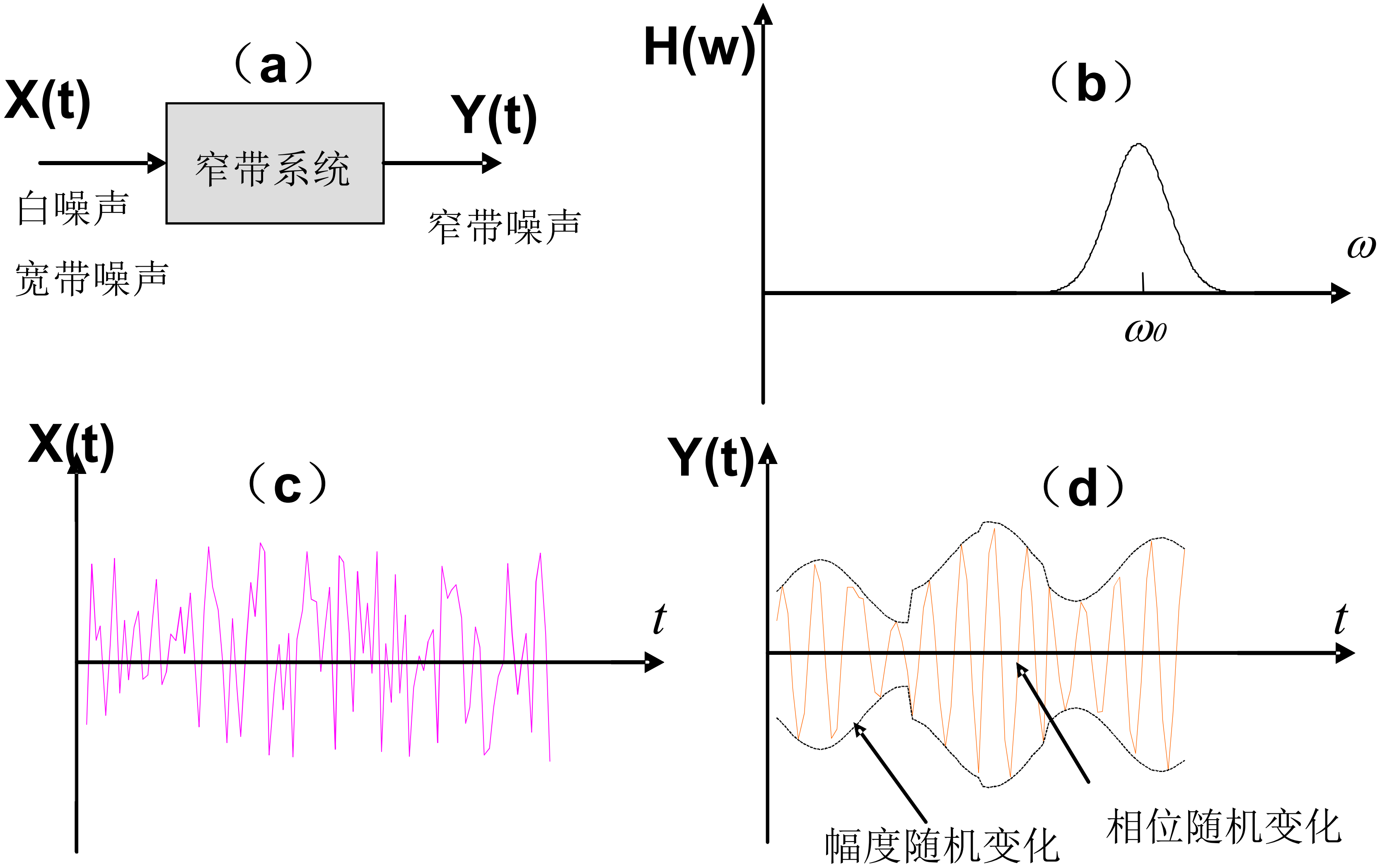
$$\boldsymbol{R}_{\tilde{X}}(\tau) = 2[\boldsymbol{R}_X(\tau) + \boldsymbol{j}\hat{\boldsymbol{R}}_X(\tau)]$$

$$\boldsymbol{G}_{\tilde{X}}(\omega) = 2[\boldsymbol{G}_X(\omega) + \mathrm{sgn}(\omega)\boldsymbol{G}_X(\omega)] = \begin{cases} 4\boldsymbol{G}_X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

作业：5.13

5.3.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示



白噪声或宽带噪声通过窄带系统

5.3 窄带随机过程的统计特性

$$Y(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)]$$

任一实平稳窄带随机过程X(t)都可以表示为上式，其中ω_0为窄带滤波器中心频率（载频），$A(t)$和$\Phi(t)$是低频变化的随机过程。上式也称为窄带随机过程的准正弦振荡形式。展开有：

$$X(t)=A_C(t)\cos\omega_0 t-A_S(t)\sin\omega_0 t$$

莱斯(Rice)表示式

ω_0 同前，$A_C(t),A_S(t)$是另外两个低频随机过程。

$$A_C(t)=A(t)\cos\Phi(t)$$

同相分量

$$A_S(t)=A(t)\sin\Phi(t)$$

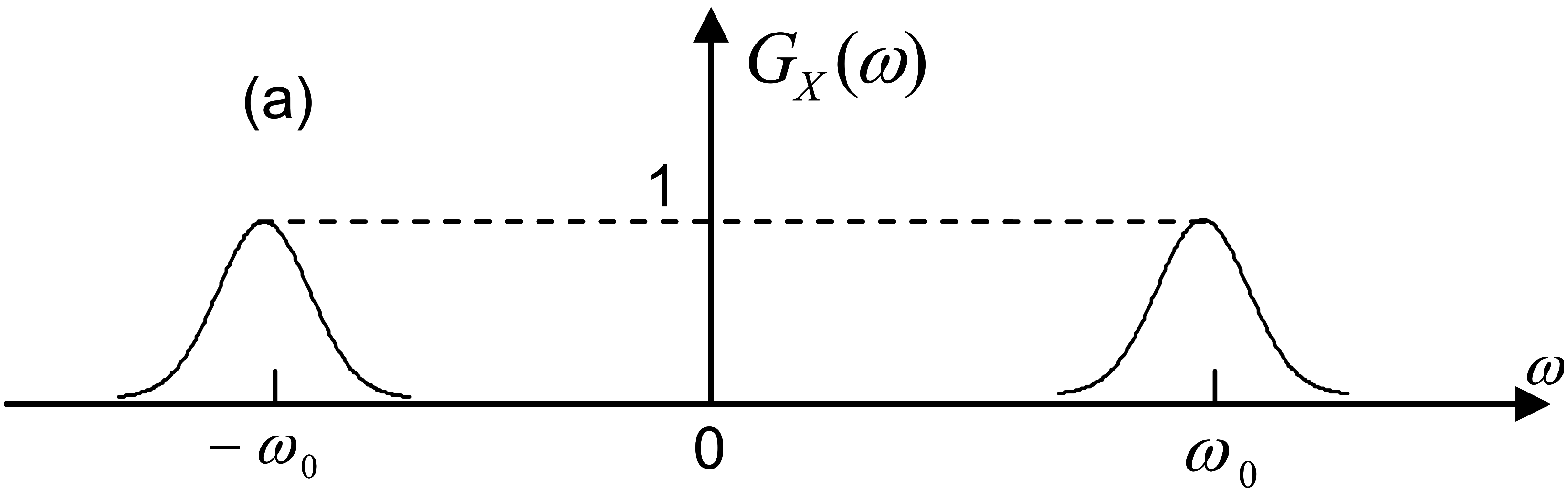
正交分量

$$A(t)=\sqrt{A_C^{\,2}(t)+A_S^{\,2}(t)}$$

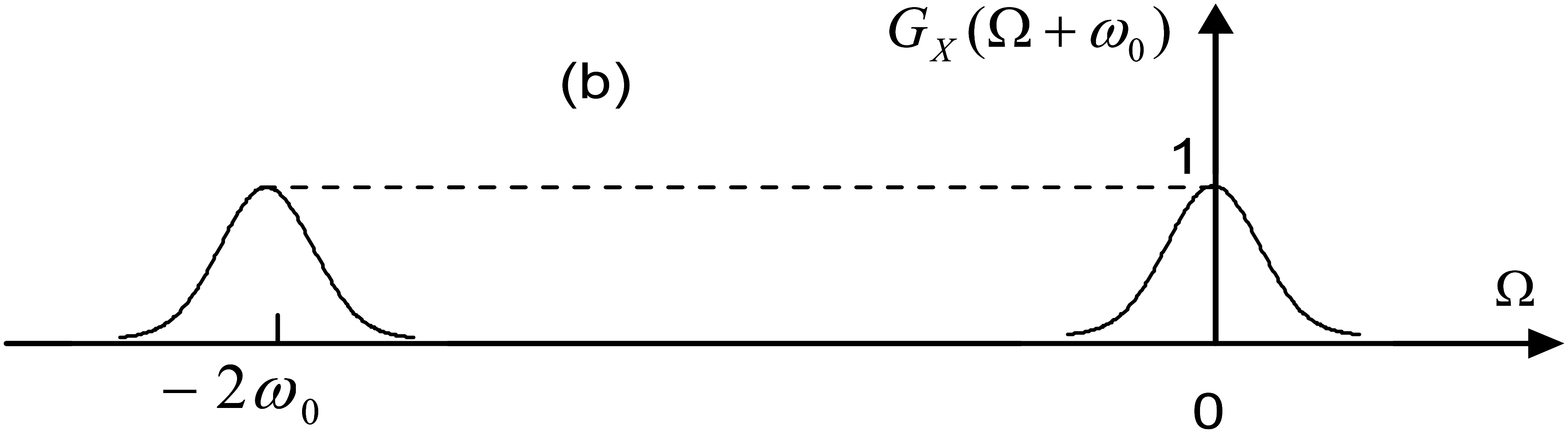
$$\Phi(t)=tg^{-1}\frac{A_S(t)}{A_C(t)}$$

5.3.2 窄带随机过程的统计特性

1 窄带随机信号的相关函数



$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}G_Y(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$



令$\omega=\Omega+\omega_0$, 则

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty}G_Y(\Omega+\omega_0)\cos[\,(\Omega+\omega_0)\tau]d\Omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty}G_Y(\Omega+\omega_0)[\cos\Omega\,\tau\cos\omega_0\,\tau-\sin\Omega\,\tau\sin\omega_0\,\tau]d\Omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty}G_Y(\Omega+\omega_0)\cos\Omega\,\tau d\Omega\cos\omega_0\,\tau$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty}G_Y(\Omega+\omega_0)\sin\Omega\,\tau d\Omega\sin\omega_0\,\tau$$

5.3 窄带随机过程的统计特性

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau - R_b(\tau)\sin\omega_0\tau$$

其中 $$R_a(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega+\omega_0)\cos\Omega\tau d\Omega$$

$$R_b(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega+\omega_0)\sin\Omega\tau d\Omega$$

$R_a(\tau)$和$R_b(\tau)$都是低频慢变化的。如果$G_Y(\omega)$具有对称形式的功率谱（频带内的功率谱关于中心频率对称），则$R_b(\tau)=0$，$R_a(\tau)$是偶函数，自相关函数变为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau$$

结论：Y(t)的自相关函数也是一个低频分量乘以载频。

2. 同相分量$A_C(t)$和正交分量$A_S(t)$的统计特性

前面的定义：

$A_C(t)=A(t)\cos\Phi(t)$ 同相分量 $A_S(t)=A(t)\sin\Phi(t)$ 正交分量

- $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 都是实随机过程。

由 $$Y(t)=A_c(t)\,cos\,\omega_0\,t-A_s(t)\,sin\,\omega_0\,t$$

可得 $$A_c(t)=Y(t)\,cos\,\omega_0\,t+\hat{Y}(t)\,sin\,\omega_0\,t$$

$$A_s(t)=-Y(t)\,sin\,\omega_0\,t+\hat{Y}(t)\,cos\,\omega_0\,t$$

可见$A_c(t)$和$A_s(t)$可以看作为$Y(t)$和$\hat{Y}(t)$经过线性变换后的结果

5.3 窄带随机过程的统计特性

考察$A_C(t)$和$A_S(t)$ 各自的自相关函数和互相关函数：

▶ $A_C(t)$和 $A_S(t)$各自平稳，且联合平稳。

$$R_C(\tau)=R_S(\tau)=R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$$

【证明】$R_c(t,t-\tau)=E\{A_c(t)A_c(t-\tau)\}$

$$=E\{[Y(t)\cos\omega_0 t+\hat{Y}(t)\sin\omega_0 t][Y(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)+\hat{Y}(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}$$

$$=R_Y(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+R_{\hat{Y}Y}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)$$

$$+R_{Y\hat{Y}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_{\hat{Y}}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)$$

由于$R_Y(\tau)=R_{\hat{Y}}(\tau)$，$R_{Y\hat{Y}}(\tau)=-\hat{R}_Y(\tau)=-R_{\hat{Y}Y}(\tau)$，

所以，

5.3 窄带随机过程的统计特性

$$R_c(t, t-\tau)$$

$$= R_Y(\tau)[\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]$$

$$+\hat{R}_Y(\tau)[\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - \cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]$$

即 $$R_c(\tau) = R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$$

同理可证， $$R_s(\tau) = R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$$

（证略） $$R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_Y(\tau)\cos\omega_0\tau \qquad (*)$$

推论：

$$\boxed{R_C(0) = R_S(0) = R_Y(0)}$$ （零均值的话，方差相等）

$$\boxed{R_{CS}(-\tau) = -R_{CS}(\tau)}$$

$$\boxed{R_{CS}(0) = 0}$$

$A_c(t)$和$A_s(t)$在同一时刻正交

5.3 窄带随机过程的统计特性

进一步地，如果$Y(t)$具有对称形式的功率谱，前面已有

$$R_Y(\tau)=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

则 $$\hat{R}_Y(\tau)=R_a(\tau)\sin\omega_0\tau$$

将上面两式代入上页(*)式，得： $$R_{cs}(\tau)=0$$

即$A_c(t)$和$A_s(t)$是相互正交的两个随机过程。这时，

$$\begin{aligned}R_c(\tau)&=R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau\\&=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega_0\tau+R_a(\tau)\sin\omega_0\tau\sin\omega_0\tau\\&=R_a(\tau)\end{aligned}$$

所以有 $$R_Y(\tau)=R_c(\tau)\cos\omega_0\tau$$

5.3 窄带随机过程的统计特性

关于相关函数奇偶性的小结：

1. 自相关函数总是偶函数，即$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$；

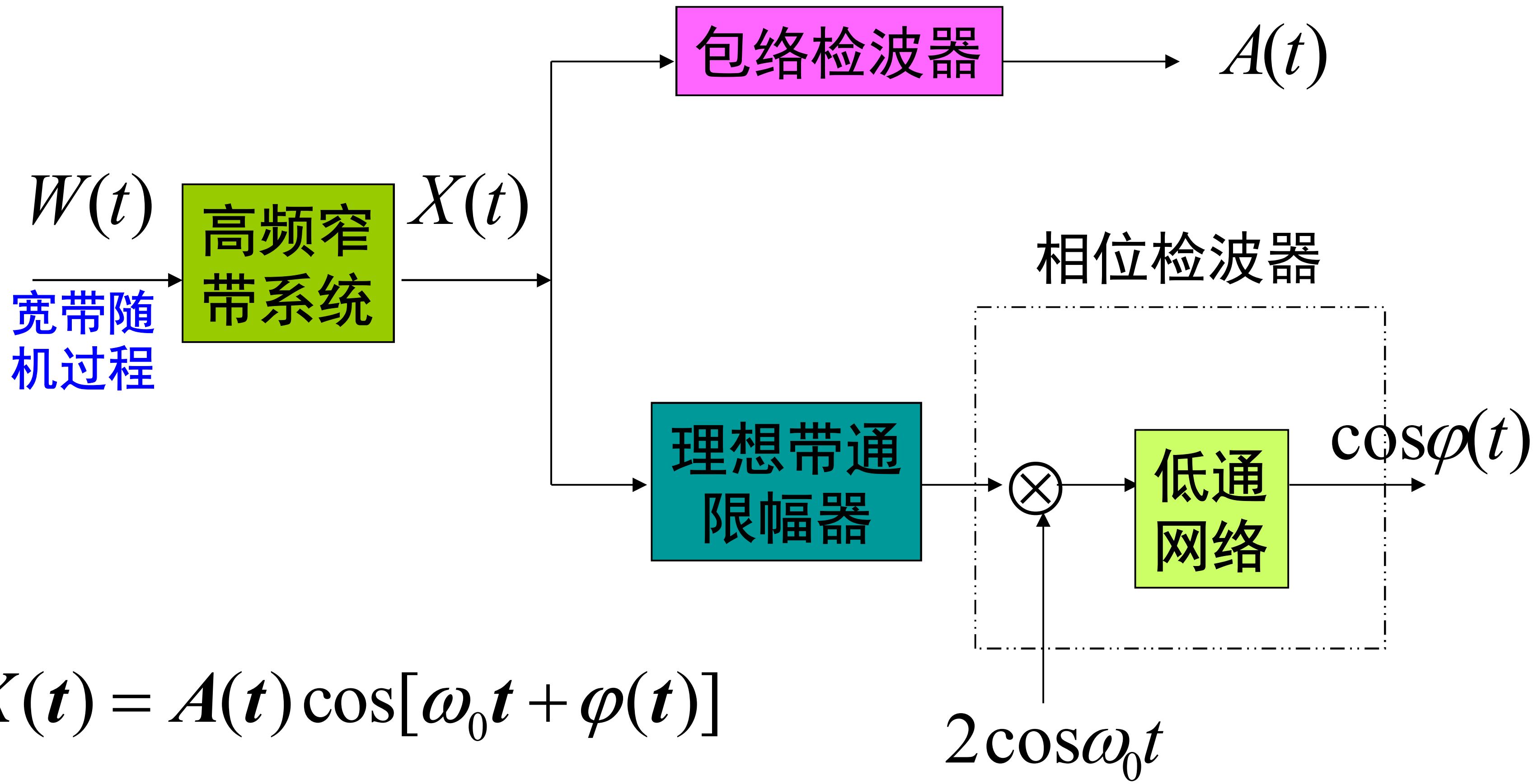
2. 互相关函数，一般有$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$，是奇函数的情况有：

（1） 设Y(t)=$\frac{dX(t)}{dt}$，有$R_{X\dot{X}}(-\tau)=-R_{X\dot{X}}(\tau)$

（2） $R_{X\hat{X}}(-\tau)=R_{X\hat{X}}(-\tau)$, $R_{\hat{X}X}(-\tau)=R_{\hat{X}X}(-\tau)$,

（3） $R_{CS}(-\tau)=-R_{CS}(\tau)$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布



$$X(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

5.4.1 窄带正态噪声的包络和相位的分布

1. 一维分布

推导思路：首先确定 $A_C(t)$ 、 $A_S(t)$ 的联合分布，后利用雅可比变换求得包络$A(t)$与相位$\phi(t)$的联合分布，最后，利用边缘分布求包络与相位的一维分布。

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

已知窄带过程的一般表达式为：

$$Y(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$$

设$Y(t)$的相关函数为$R_Y(\tau)$，方差为$R_Y(0) = \sigma^2$，而由前可知，$A_c(t)$和$A_s(t)$都可看作是$Y(t)$经过线性变换的结果。因此，如果$Y(t)$为正态过程，则$A_c(t)$和$A_s(t)$也为正态过程，并且也具有零均值和方差σ^2（前面）。$Y(t)$的包络和相位分别为

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(t) = tg^{-1}\left[\frac{A_s(t)}{A_c(t)}\right]$$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

由于$A_c(t)$和$A_s(t)$在同一时刻是互不相关的，因二者是正态过程，故也是互相独立的。设A_{ct}和A_{st}分别表示$A_c(t)$和$A_s(t)$在t时刻的取值（随机变量），则其联合概率密度为

$$f_{A_cA_s}(A_{ct},A_{st}) = f_{A_c}(A_{ct})f_{A_S}(A_{st}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}exp\left[-\frac{A_{ct}^2+A_{st}^2}{2\sigma^2}\right]$$

因为有：
$$A_c(t) = A(t)\cos\varphi(t)$$
$$A_s(t) = A(t)\sin\varphi(t)$$

设A_t和ϕ_t分别为包络$A(t)$和相位$\varphi(t)$在t时刻的取值，则$A(t)$和$\varphi(t)$的联合概率密度为

$$f_{A\varphi}(A_t,\phi_t) = |J|f_{A_cA_s}(A_{ct},A_{st})$$

其中，雅可比行列式J为

$$J=\left|\frac{\partial(A_{ct},A_{st})}{\partial(A_t,\phi_t)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial A_{ct}}{\partial A_t} & \frac{\partial A_{ct}}{\partial \phi_t}\\ \frac{\partial A_{st}}{\partial A_t} & \frac{\partial A_{st}}{\partial \phi_t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi_t & -A_t\sin\phi_t\\ \sin\phi_t & A_t\cos\phi_t\end{vmatrix}=A_t$$

代入上式，得

$$f_{A\varphi}(A_t,\phi_t)=A_t f_{A_cA_s}(A_t\cos\phi_t,A_t\sin\phi_t)=$$

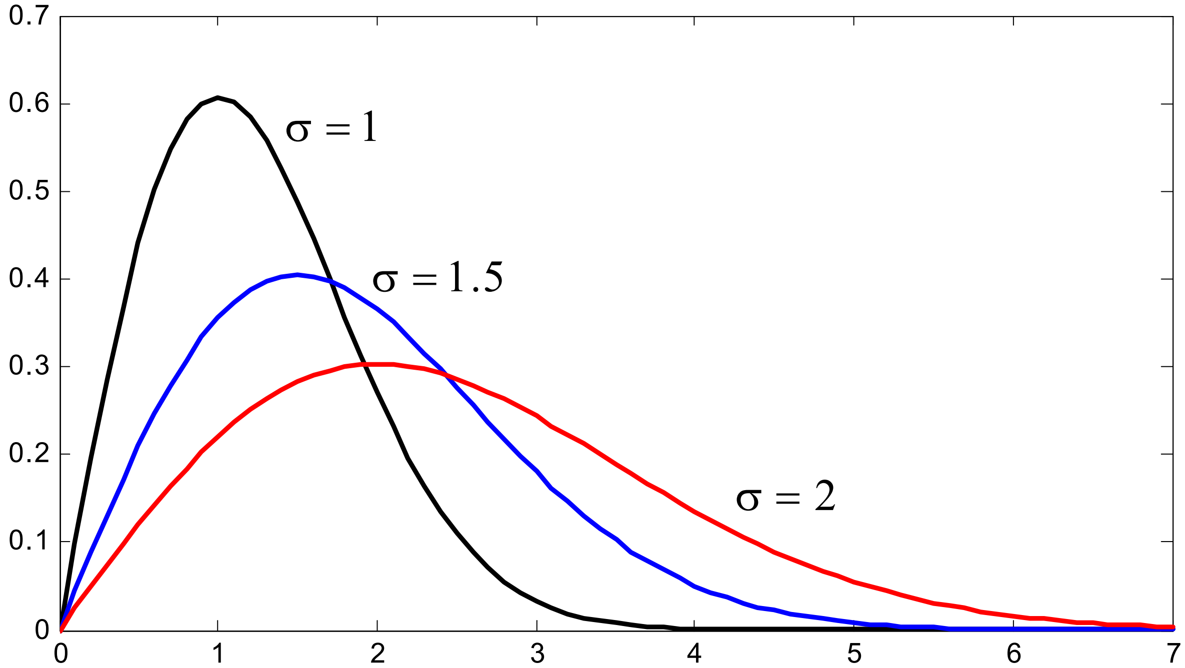
$$\begin{cases}\frac{A_t}{2\pi\sigma^2}exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t\geq 0,-\pi\leq\phi_t\leq\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

由此得出包络的一维概率密度为：

瑞利分布

$$f_A(A_t) = \int_0^{2\pi} f_{A\varphi}(A_t, \phi_t) d\phi_t = \begin{cases} \frac{A_t}{\sigma^2} exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t \geq 0 \\ 0, & A_t < 0 \end{cases}$$



5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

相位的一维概率密度为：

均匀分布

$$f_{\varphi}(\phi_t) = \int_0^{\infty} f_{A\varphi}(A_t, \phi_t) dA_t = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \phi_t \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

另外，不难看出有

$$f_{A\varphi}(A_t, \phi_t) = f_A(A_t) f_{\varphi}(\phi_t)$$

该式表明，在同一时刻t，随机变量$A(t)$和$\varphi(t)$是相互独立的。

但要注意$A(t)$与$\varphi(t)$并不是相互独立的两个随机过程。

2. 二维分布（指包络的二维分布和相位的二维分布）

（了解）

$$f_A(A_1, A_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_A(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A_1 A_2}{D^{\frac{1}{2}}} I_0\left(\dfrac{A_1 A_2 a(\tau)}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \exp\left[-\dfrac{\sigma^2\left(A_1^2 + A_2^2\right)}{2D^{\frac{1}{2}}}\right], & A_1, A_2 \geq 0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

包络的二维分布是二维瑞利分布

其中 $I_0(x)$ 第一类零阶修正贝塞尔函数，定义为

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\varphi}d\varphi$$

$I_0(x)$ 可展开成级数

$$I_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

当x<<1时 $$I_0(x)=1+\frac{x^2}{4}+....$$

当x>>1时 $$I_0(x)\approx e^x/\sqrt{2\pi x}$$

相位的二维分布

$$f_{\varphi}\left(\phi_1,\phi_2\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_{A\varphi}\left(A_1,\phi_1,A_2,\phi_2\right)dA_1dA_2$$

$$=\begin{cases}\dfrac{D^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2\sigma^4}\left[\dfrac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}+\beta\left(\pi-\cos^{-1}\beta\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right], & 0\le\phi_1,\ \ \phi_2\le 2\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5.4.2 窄带正态噪声加正弦信号的包络和相位的分布

（了解）

信号： $S(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta)$

噪声： $N(t) = N_c(t)\cos\omega_0 t - N_s(t)\sin\omega_0 t$

$$X(t) = S(t) + N(t)$$

$$= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t = A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

$$\begin{cases} A_c(t) = a\cos\theta + N_c(t) \\ A_s(t) = a\sin\theta + N_s(t) \end{cases}$$

✓包络分析

$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{A_t^2+a^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right),A_t\geq 0$$

称为广义瑞利概率密度，也称为莱斯(Rice)概率密度。

其中 $I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\varphi)d\varphi$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数，当x<<1时： $I_0(x)\approx 1+\frac{x^2}{4}$

当x>>1时 $I_0(x)\approx e^x/\sqrt{2\pi x}$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

☞当信噪比很小时，即 $a/\sigma<<1$ 时

$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2+a^2}{2\sigma^2}\right)\left(1+\frac{a^2A_t^2}{4\sigma^4}\right)$$

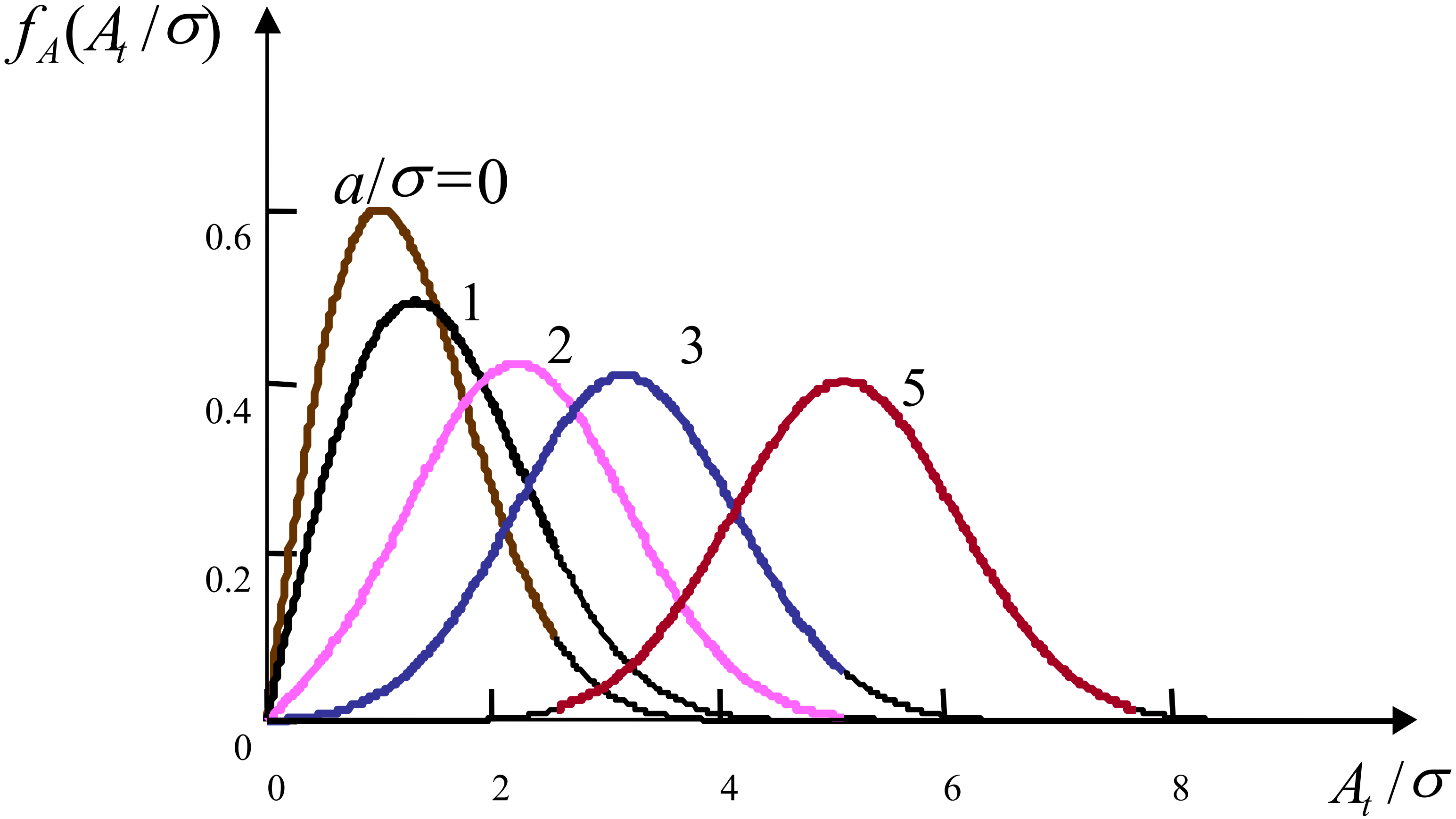
趋近瑞利分布；

☞当信噪比很大时

$$f_A(A_t)=\frac{(A_t/a)^{1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(A_t-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

趋近正态分布。

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布



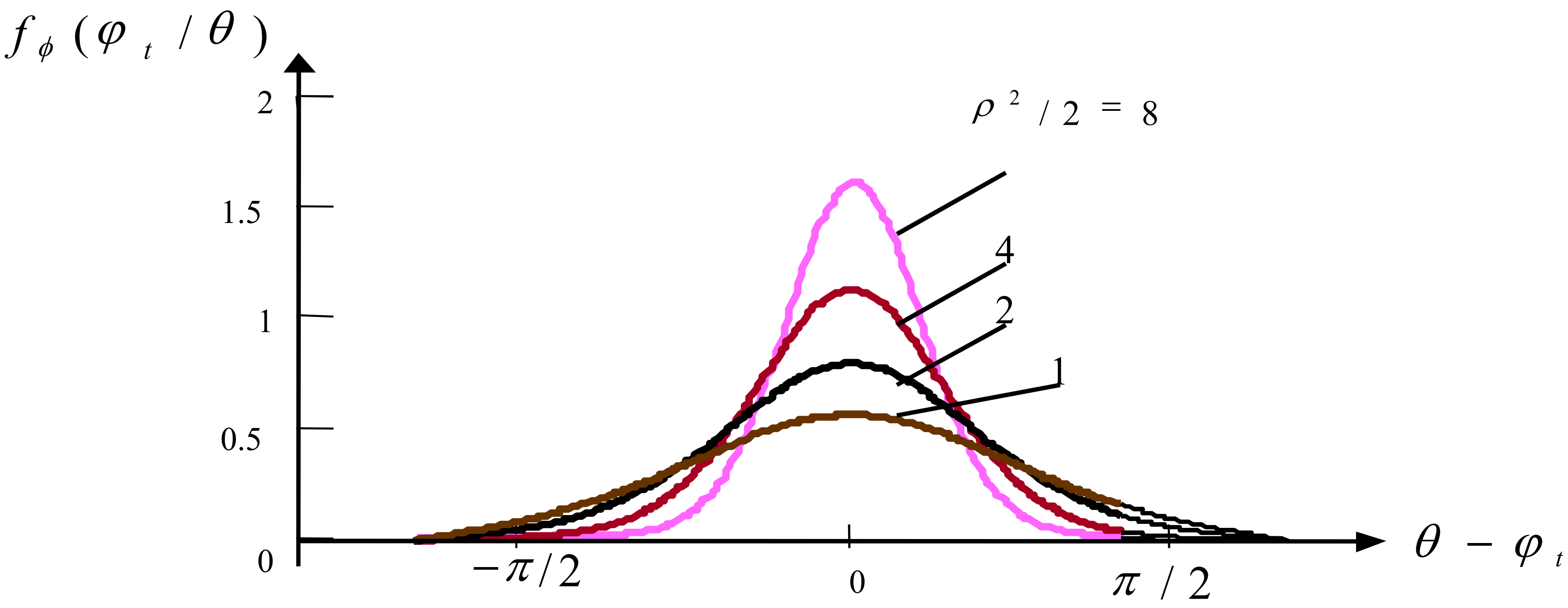
包络分布密度曲线

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

✓相位分析

☞当信噪比很小时，相位趋近均匀分布

☞当信噪比很大时，相位趋近正态分布



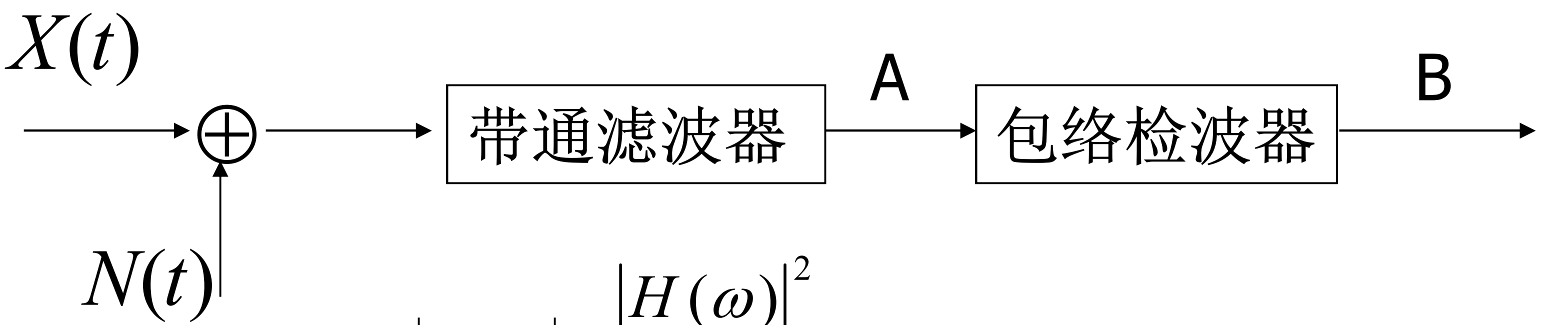
信号加噪声的相位分布密度

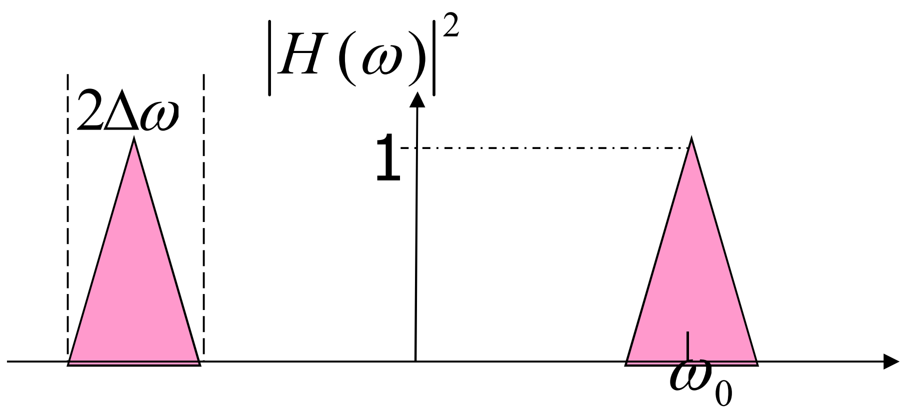
例 已知随机相位正弦波$X(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$

其中θ为[0，2π] 内均匀分布的随机变量，白噪声N(t)的功率谱密度为$N_0/2$，噪声与随机相位信号不相关，滤波器特性如下图，

求：1）A点波形的功率谱及自相关函数；

2）B点波形一维概率密度。





$\omega_0 >> \Delta\omega$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

解：设 A 点波形为 Y(t)，则 Y(t)=X(t)+N_C(t)，其中 Nc(t)为白噪声通过滤波器的输出。X(t) 与 Nc(t) 相互独立。有

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)+R_{N_C}(\tau),\quad G_Y(\omega)=G_X(\omega)+G_{N_C}(\omega)$$

又有：$R_X(\tau)=\dfrac{1}{2}\cos\omega_0\tau,\quad G_X(\omega)=\dfrac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$$G_{N_C}(\omega)=|H(\omega)|^2 G_N(\omega)=|H(\omega)|^2\frac{N_0}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2}\left[1-\dfrac{1}{\Delta\omega}\big||\omega|-\omega_0\big|\right], & |\omega\pm\omega_0|\le\Delta\omega\\ 0, & other\end{cases}$$

可得输出相关函数：

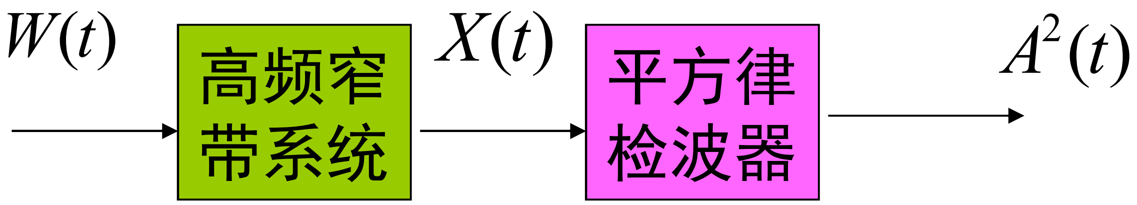
$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{N_0\Delta\omega}{\pi}\left(\frac{\sin\Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2}\right)^2\right]\cos\omega_0\tau$$

（2）设 B 点波形为 Z(t)，其为 Y(t)的包络，一维分布为广义瑞利分布。

据题意，有 a=1，Nc(t)平均功率为 $\sigma^2=\Delta f\cdot N_0=\dfrac{\Delta\omega N_0}{2\pi}$

因此 $f_Z(z)=\dfrac{z}{\sigma^2}\exp\left[-\dfrac{z^2+1}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\dfrac{z}{\sigma^2}\right),z\geq 0$

5.4.3 窄带正态过程包络平方的分布



$$f_A(A_t) = \int_0^{2\pi} f_{A\phi}(A_t, \varphi_t)\, d\varphi_t = \begin{cases} \dfrac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{A_t^2}{2\sigma^2}\right), & A_t \geq 0 \\ 0, & A_t < 0 \end{cases}$$

✓ 窄带正态噪声包络平方的分布 $U(t) = A^2(t)$ $\qquad A_t = \sqrt{u}$

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

$$f_U(u_t) = f_A(A_t)\,|J| \qquad J = \frac{dA_t}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f_U(u) = |J|\,\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{A_t=\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{\sqrt{u}}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \qquad u \ge 0$$

结论：窄带正态噪声的包络平方服从指数分布。

当σ^2=1时，$f_U(u)$=$\frac{1}{2}e^{u/2}$, 此时E[U(t)]=2，方差为D[U(t)]=4.

5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

✓正弦信号加窄带正态噪声包络平方的分布

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cos\left[\omega_0\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})\right]$$

$$U(t)=A^2(t)$$

已知
$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_t^2+a^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right),A_t\geq 0$$

可得：
$$f_U(t)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(u+a^2)\right]I_0\left(\frac{au^{1/2}}{\sigma^2}\right),u\geq 0$$