复习

4.1非线性变换的直接分析法

能够计算一维概率密度（回忆以前随机变量函数的概率密度的计算方法）和均值（要求掌握），但对于自相关函数力不从心，主要是二维概率密度难以得到。

4.2 非线性系统分析的变换法 （理解）

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)H(\omega_1)H(\omega_2)d\omega_1 d\omega_2$$

复习

Price定理 （了解）

假定输入为零均值平稳正态随机过程，输出过程为

Y(t)=h[X(t)]，则输出的自相关函数满足下列关系：

$$\frac{d^{(k)}R_Y(\tau)}{dR_X^{(k)}(\tau)}=E[h^{(k)}(X_1)h^{(k)}(X_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h^{(k)}(x_1)h^{(k)}(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

4.3 非线性系统分析的级数展开法 （理解）

$$y=h(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.$$

复习

$$E[Y(t)] = a_0 + a_1 E[X(t)] + a_2 E[X^2(t)] + \dots$$

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t+\tau)Y(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)f_X(x_1, x_2, \tau)dx_1 dx_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k a_j E[X^k(t+\tau)X^j(t)]$$

5 窄带随机过程

5.1 希尔伯特变换

$$\hat{x}(t) = x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

假定有一个实函数x(t)，它的希尔伯特变换定义为

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

反变换为

$$H^{-1}[x(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

复习

$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

幅频特性为： $$|H(\omega)| = 1$$

相频特性为： $$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases}$$

复习

希尔伯特（Hilbert）变换的性质

（1） $$H[\hat{x}(t)] = -x(t)$$

（2） $$H[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$H[\sin(\omega_0 t + \varphi)] = -\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 > 0$$

记忆：相当于-pi/2

【扩展内容】:特征函数

特征函数是一个统计平均值，随机变量X的特征函数定义为：

$$\Phi_X(\omega)=E(e^{j\omega X})$$ （随机过程类似）

显然有 $\Phi_X(\omega)=E(e^{j\omega X})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)e^{j\omega x}dx$$

重要性质：设随机变量X，Y相互独立，Z=X+Y，则有

$$\Phi_Z(\omega)=\Phi_X(\omega)\,\Phi_Y(\omega)$$

特征函数的作用：

1. 求随机过程的概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega)e^{-j\omega x}d\omega$$

需要注意，特征函数与概率密度之间与傅里叶变换略有不同。

在随机过程的研究过程中，经常会利用已知的随机过程X1(t)、X2(t)的概率密度，求解它们某种特定组合的概率密度，利用上面的性质可以方便求解。

已知随机过程 $X_1(t), X_2(t)$ 为相互独立的高斯随机过程，数学期望为 0，方差为 1，求 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 的概率密度。

已知数学期望为 0，方差为 1 的高斯过程的概率密度为

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{6}$$

利用特征函数与概率密度之间类傅里叶变换的关系，可以很容易的求得 $X_1(t), X_2(t)$ 的特征函数

$$\Phi_{X_1}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x,t)e^{j\omega x}dx=e^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad \Phi_{X_2}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x,t)e^{j\omega x}dx=e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{7}$$

利用特征函数的性质（5）

$$\Phi_Y(\omega)=\Phi_{X_1}(\omega)\Phi_{X_2}(\omega)=e^{-\omega^2}$$

再次利用特征函数与概率密度之间类傅里叶变换的关系，可得 Y 的概率密度

$$f_Y(y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_Y(\omega)e^{-j\omega y}d\omega=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}} \tag{8}$$

由上面的求解过程可见，利用特征函数求解比起直接求两个随机过程之和的概率密度要简单的多。

2. 利用特征函数来求随机过程的各阶矩

$$\left.\frac{d^n\Phi_X(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}=j^n\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{j\omega x}f_X(x)dx\Big|_{\omega=0}=j^n\int_{-\infty}^{\infty}x^n f_X(x,t)=j^n E\left[X^n\right]$$

习题

5. 1　5. 11

■5.1 希尔伯特(Hilbert)变换--------重点掌握

■5.2 信号的复信号表示-------重点掌握

■ 5.3 窄带随机过程统计特性-------重点掌握

- ■ 5.3.1 窄带随机信号的表示方法
- ■ 5.3.2 莱斯表示窄带随机过程统计特性

■5.4 窄带正态随机过程统计特性-------重点掌握

- ●5.4.1 窄带正态噪声包络与相位分布
- ●5.4.2 窄带正态噪声加正弦信号包络与相位分布 （结论）

5.1 希尔伯特变换

(3) 设$a(t)$为低频信号, 其傅立叶变换为$A(\omega)$, 且

$$A(\omega)=0 \qquad |\omega|>\Delta\omega/2$$

则当$\omega_0>\Delta\omega/2$时, 有

$$H[a(t)\cos\omega_0 t]=a(t)\sin\omega_0 t$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t]=-a(t)\cos\omega_0 t$$

证明: 令 $x(t)=a(t)\,cos\,\omega_0\,t$

则 $X(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)]$

$$\hat{X}(\omega)=-j\,sgn(\omega)\{\frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)]\}$$

$$=-\frac{j}{2}A(\omega-\omega_0)+\frac{j}{2}A(\omega+\omega_0)$$

求上式的傅立叶反变换, 得

$$\hat{x}(t)=-a(t)\,sin\,\omega_0\,t$$

5.1 希尔伯特变换

(4) 设$A(t)$与$\phi(t)$为低频信号，则

习题5.2

$$H[A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]=A(t)\sin[\omega_0 t+\phi(t)]$$

$$H[A(t)\sin[\omega_0 t+\phi(t)]=-A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]$$

【注】从2，3，4看出，Hilbert变换不影响低频的幅度和相位分量

(5) 设 $y(t)=v(t)\otimes x(t)$

则 $\hat{y}(t)=\hat{v}(t)\otimes x(t)=v(t)\otimes \hat{x}(t)$

根据卷积运算得结合律就可以证明该性质。

(6) 设平稳随机过程$X(t)$，自相关函数为$R_X(\tau)$，则

$$R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)$$

5.1 希尔伯特变换

(7)

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

$$\tau = t_1 - t_2$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$

(8)

X(t)与他的希尔伯特变换的互相关函数是奇函数，即

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau) \qquad R_{\hat{X}X}(-\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(0) = -R_{X\hat{X}}(0) = 0$$

上式也表明，$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻是正交的。

习题5.1

(9) 偶函数的希尔伯特变换是奇函数；

奇函数的希尔伯特变换是偶函数。

5.1 希尔伯特变换

问题

求下式的Hilbert变换。

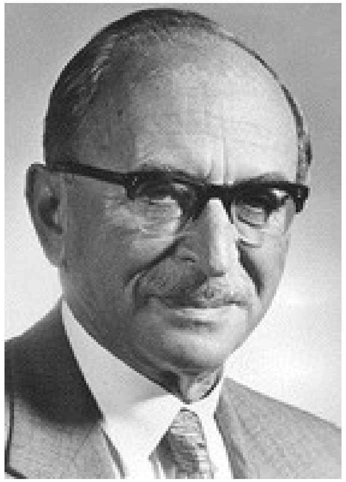
$$x(t)=\frac{1}{\pi t}$$

常见希尔伯特变换对

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$
$\delta(t)$	$1/(\pi t)$
$1/(\pi t)$	$-\delta(t)$
$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\dfrac{t}{1+t^2}$
$\sin c(t)$	$\dfrac{1-\cos(\pi t)}{\pi t}$

5.2 信号的复信号表示

5.2.1 确知信号的复数表示法



设x(t)为实确知信号，其复信号定义为：

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

也称为解析信号。

5.2 信号的复信号表示

假定$A(t)$和$\phi(t)$是低频分量

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

是窄带确知信号，其对应的解析信号为

$$\tilde{x}(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + jA(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$= \tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t}$$

其中： $\tilde{A}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ 被称为复包络

5.2 信号的复信号表示

解析信号的频谱关系：

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega)$$

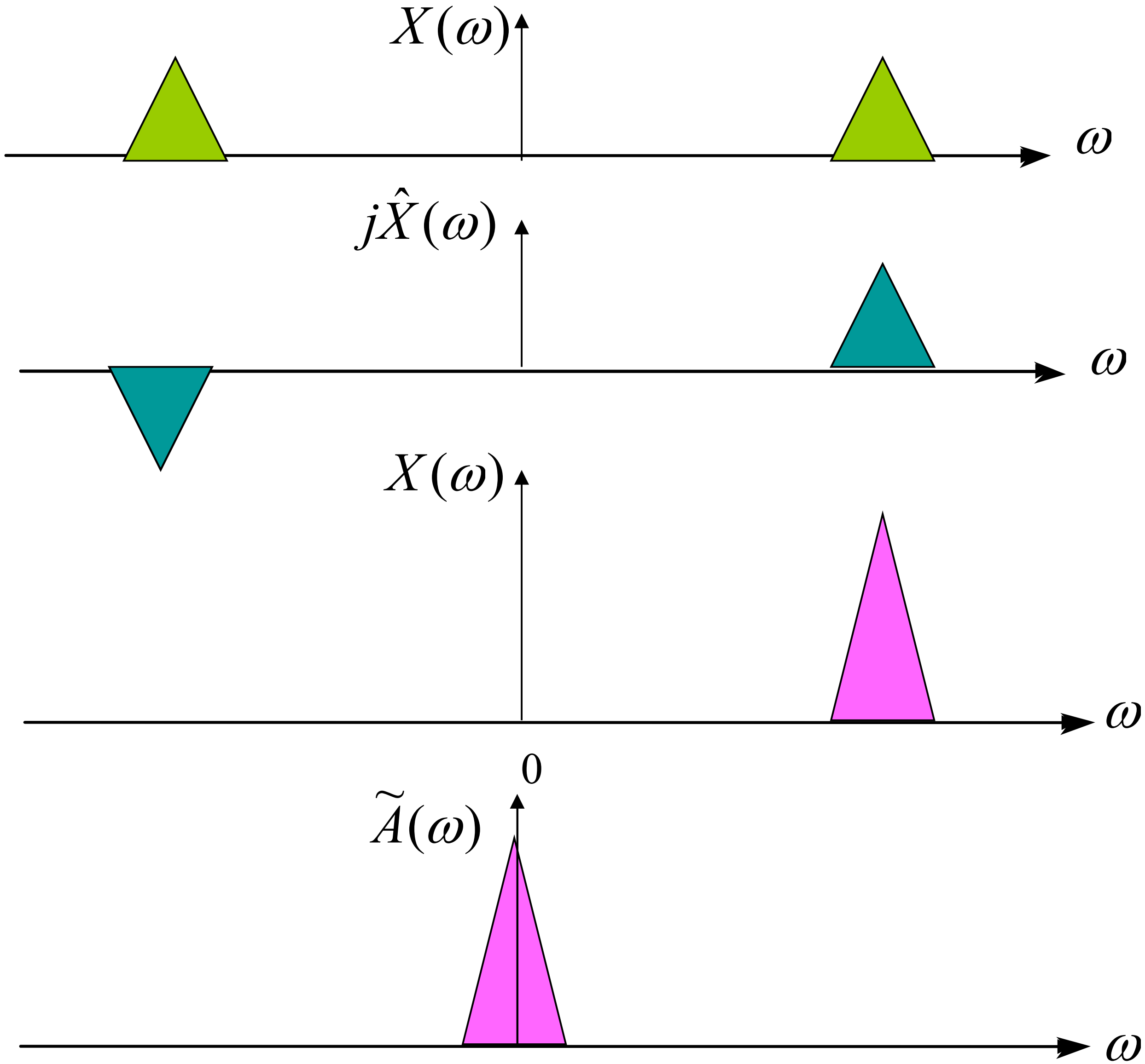
$$= X(\omega) + j[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)]$$

$$= \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

又有： $\tilde{X}(\omega) = \tilde{A}(\omega - \omega_0)$

解析信号的频谱为复包络频谱的平移。

5.2 信号的复信号表示


$X(\omega)$
ω
$j\hat{X}(\omega)$
ω
$X(\omega)$
ω
0
$\tilde{A}(\omega)$
ω

5.2.2 随机信号的复信号表示

1、定义

设X(t)为实随机过程，其复随机过程定义为：

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

$$\hat{X}(t) = H[X(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

实随机信号

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = E\{\tilde{X}(t+\tau)\tilde{X}^*(t)\}$$

（注意：复信号）

$$= E\{[X(t+\tau) + j\hat{X}(t+\tau)][X(t) - j\hat{X}(t)]\}$$

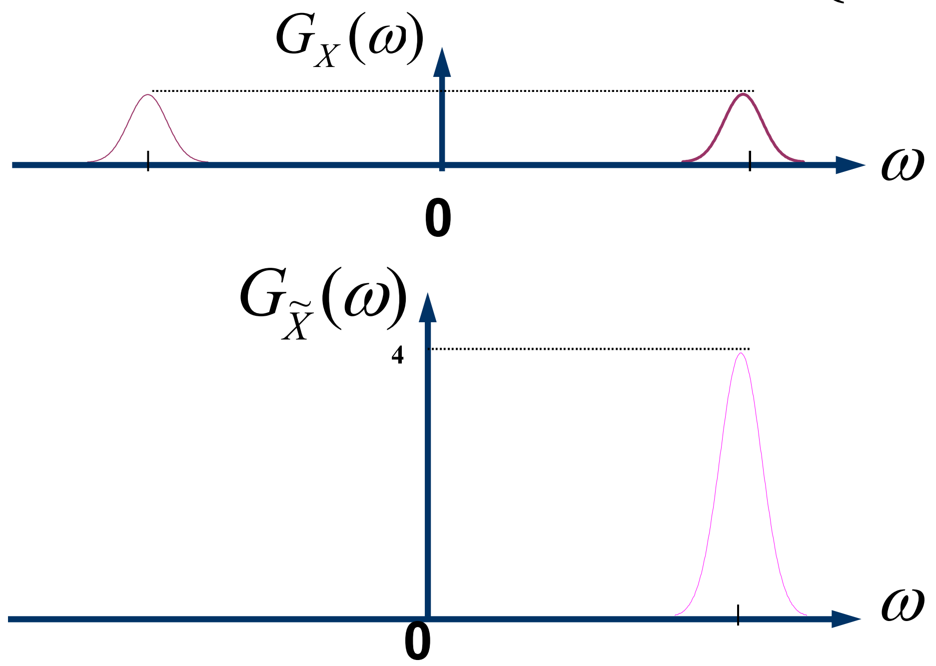
$$= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{\hat{X}X}(\tau) - R_{X\hat{X}}(\tau)]$$

$$= 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

5.2 信号的复信号表示

$$R_{\tilde{X}}(\tau)=2[R_X(\tau)+j\hat{R}_X(\tau)]$$

$$G_{\tilde{X}}(\omega)=2[G_X(\omega)+\mathrm{sgn}(\omega)G_X(\omega)]=\begin{cases}4G_X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$



5.2 信号的复信号表示

从前面可以看出，希尔伯特变换的性质：

(时域)解析性←→（频域）单边性

再证明：（时域）单边性←→（频域）解析性

【证明】设$f(t)$是因果信号，必然有

$$f(t)=f(t)u(t) \qquad (1)$$

设$f(t)$的频谱$F(j\omega)$的实部为$R(\omega)$，虚部为$X(\omega)$，即

$$F(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

上式（1）两边进行傅里叶变换，即有

5.2 信号的复信号表示

$$R(\omega)+j\,X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[R(\omega)+j\,X(\omega)]*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[R(\omega)+\frac{1}{\pi\omega}*X(\omega)\right]+j\frac{1}{2}\left[X(\omega)-\frac{1}{\pi\omega}*R(\omega)\right]$$

比较得到: $R(\omega)=\frac{1}{\pi\omega}*X(\omega)=H[X(\omega)]$

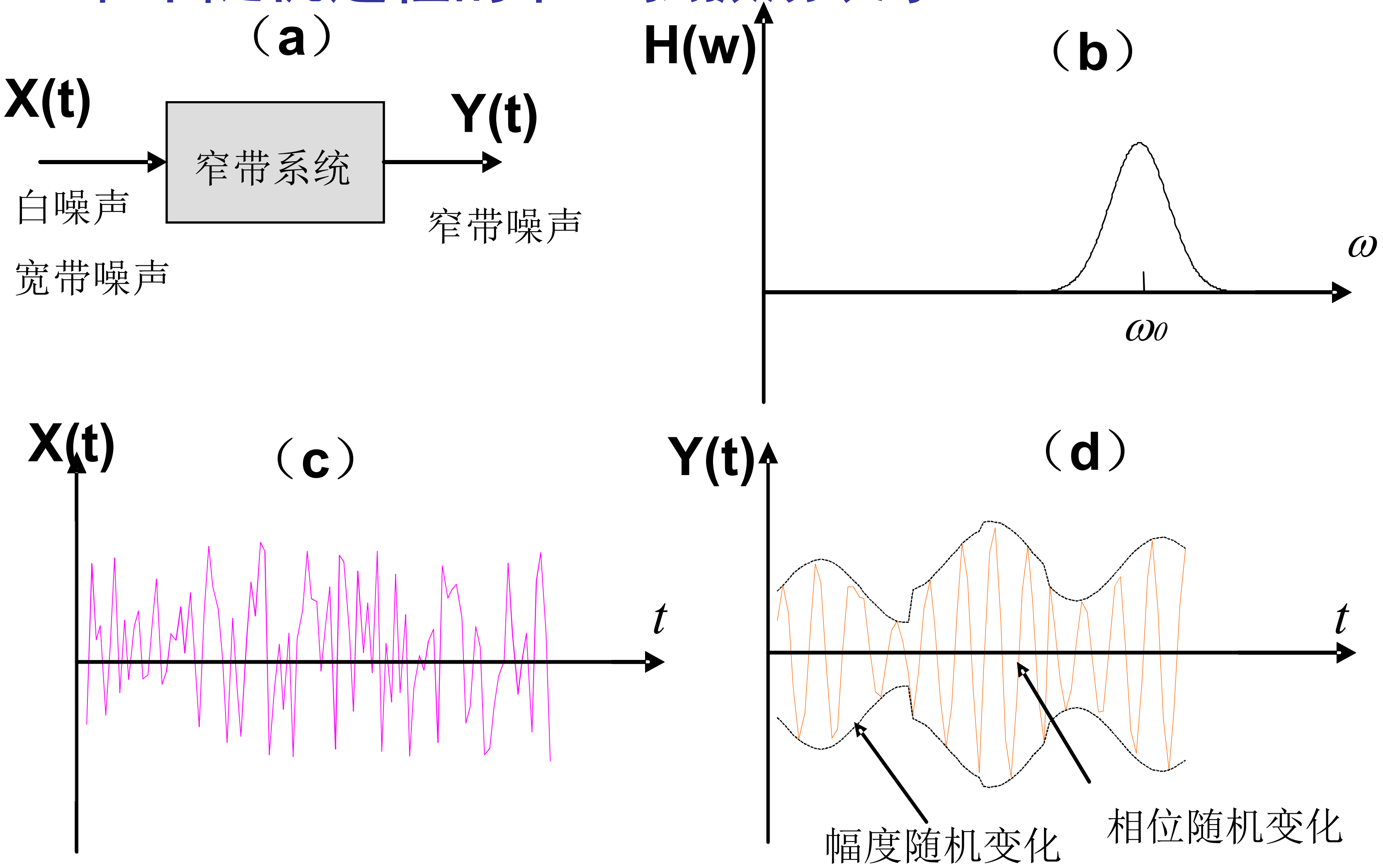
$$X(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*R(\omega)=-H[R(\omega)]$$

即有$F(j\omega)$= $R(\omega)-j\,H[R(\omega)]$，这是解析函数。

【证毕】

5.3 窄带随机过程的统计特性

5.3.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示



白噪声或宽带噪声通过窄带系统

5.3 窄带随机过程的统计特性

$$Y(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)]$$

任何一个实平稳窄带随机过程X(t)都可以表示为上式，其中ω_0为窄带滤波器的中心频率（载频），$A(t)$和$\Phi(t)$是低频变化的随机过程。上式也称为窄带随机过程的准正弦振荡形式。

$$X(t)=A_C(t)\cos\omega_0 t-A_S(t)\sin\omega_0 t$$

莱斯(Rice)表示式

ω_0 同前，$A_C(t), A_S(t)$ 是另外两个低频随机过程。

$A_C(t)=A(t)\cos\Phi(t)$ 同相分量

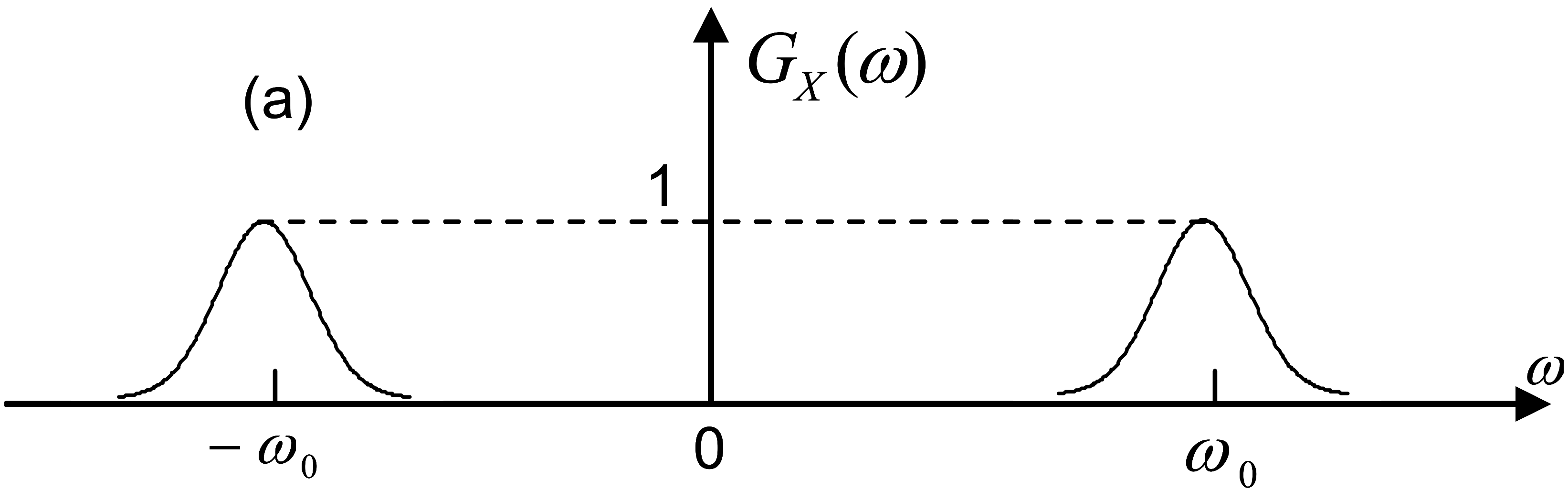
$A_S(t)=A(t)\sin\Phi(t)$ 正交分量

$$A(t)=\sqrt{A_C^{\,2}(t)+A_S^{\,2}(t)}$$

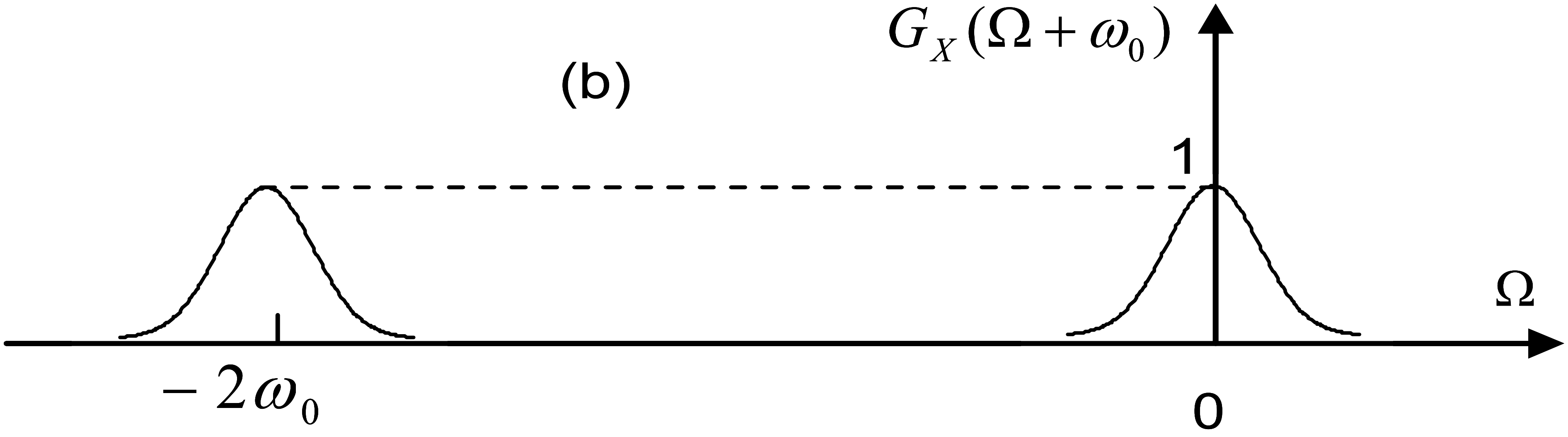
$$\Phi(t)=tg^{-1}\frac{A_S(t)}{A_C(t)}$$

5.3.2 窄带随机过程的统计特性

1 窄带随机信号的相关函数



$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}G_Y(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$



令$\omega = \Omega + \omega_0$, 则

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0)\, cos[\,(\Omega + \omega_0)\tau]d\Omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0)[cos\,\Omega\,\tau\, cos\,\omega_0\,\tau - sin\,\Omega\,\tau\, sin\,\omega_0\,\tau]d\Omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0)\, cos\,\Omega\,\tau d\Omega\, cos\,\omega_0\,\tau$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0)\, sin\,\Omega\,\tau d\Omega\, sin\,\omega_0\,\tau$$

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau - R_b(\tau)\sin\omega_0\tau$$

其中 $$R_a(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega+\omega_0)\cos\Omega\tau d\Omega$$

$$R_b(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega+\omega_0)\sin\Omega\tau d\Omega$$

$R_a(\tau)$和$R_b(\tau)$都是低频慢变化的。如果$G_Y(\omega)$具有对称形式的功率谱(频带内的功率谱关于中心频率对称)，则$R_b(\tau)=0$，$R_a(\tau)$是偶函数，自相关函数变为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau)\cos\omega_0\tau$$

结论：Y(t)的自相关函数也是一个低频分量乘以载频。

2. 同相分量$A_C(t)$和正交分量$A_S(t)$的统计特性

前面的定义：

$A_C(t) = A(t)\cos\Phi(t)$ 同相分量 $A_S(t) = A(t)\sin\Phi(t)$ 正交分量

▶ $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 都是实随机过程。

由 $Y(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$

可得

$$A_c(t) = Y(t)\cos\omega_0 t + \hat{Y}(t)\sin\omega_0 t$$

$$A_s(t) = -Y(t)\sin\omega_0 t + \hat{Y}(t)\cos\omega_0 t$$

可见$A_c(t)$和$A_s(t)$可以看作为$Y(t)$和$\hat{Y}(t)$经过线性变换后的结果

5.3 窄带随机过程的统计特性

考察 $A_C(t)$和$A_S(t)$各自的自相关函数和互相关函数：

- $A_C(t)$和$A_S(t)$各自平稳，且联合平稳。

$$R_C(\tau)=R_S(\tau)=R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$R_{cs}(\tau)=R_Y(\tau)\sin\omega_0\tau-\hat{R}_Y(\tau)\cos\omega_0\tau \qquad (*)$$

推论：

$$\boxed{R_C(0)=R_S(0)=R_Y(0)}$$

$$\boxed{R_{CS}(-\tau)=-R_{CS}(\tau)}$$

$$\boxed{R_{CS}(0)=0}$$

$A_c(t)$和$A_s(t)$在同一时刻正交

5.3 窄带随机过程的统计特性

进一步地，如果$Y(t)$具有对称形式的功率谱，则

$$R_Y(\tau)=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau,\qquad \hat{R}_Y(\tau)=R_a(\tau)\sin\omega_0\tau$$

将上面两式代入上页(*)式，得： $R_{cs}(\tau)=0$

即$A_c(t)$和$A_s(t)$是相互正交的两个随机过程。这时，

$$R_c(\tau)=R_Y(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega_0\tau+R_a(\tau)\sin\omega_0\tau\sin\omega_0\tau$$

$$=R_a(\tau)$$

所以有 $R_Y(\tau)=R_c(\tau)\cos\omega_0\tau$

5.3 窄带随机过程的统计特性

小结：

1. 自相关函数总是偶函数，即$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$；

2. 互相关函数，一般有$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$，是奇函数的情况有：

（1） 设Y(t)=$\frac{dX(t)}{dt}$，有$R_{X\dot{X}}(-\tau)=-R_{X\dot{X}}(\tau)$

（2） $R_{X\hat{X}}(-\tau)=R_{X\hat{X}}(-\tau)$，$R_{\hat{X}X}(-\tau)=R_{\hat{X}X}(-\tau)$，

（3） $R_{CS}(-\tau)=-R_{CS}(\tau)$