复习

2.1 随机过程的基本概念及定义

横看成岭侧成峰：从两个角度理解随机过程；

如何理解样本函数的确定性；

随机过程的分类

2.2 随机过程的统计描述

一维概率密度；

多维概率密度；

随机过程的数字特征；

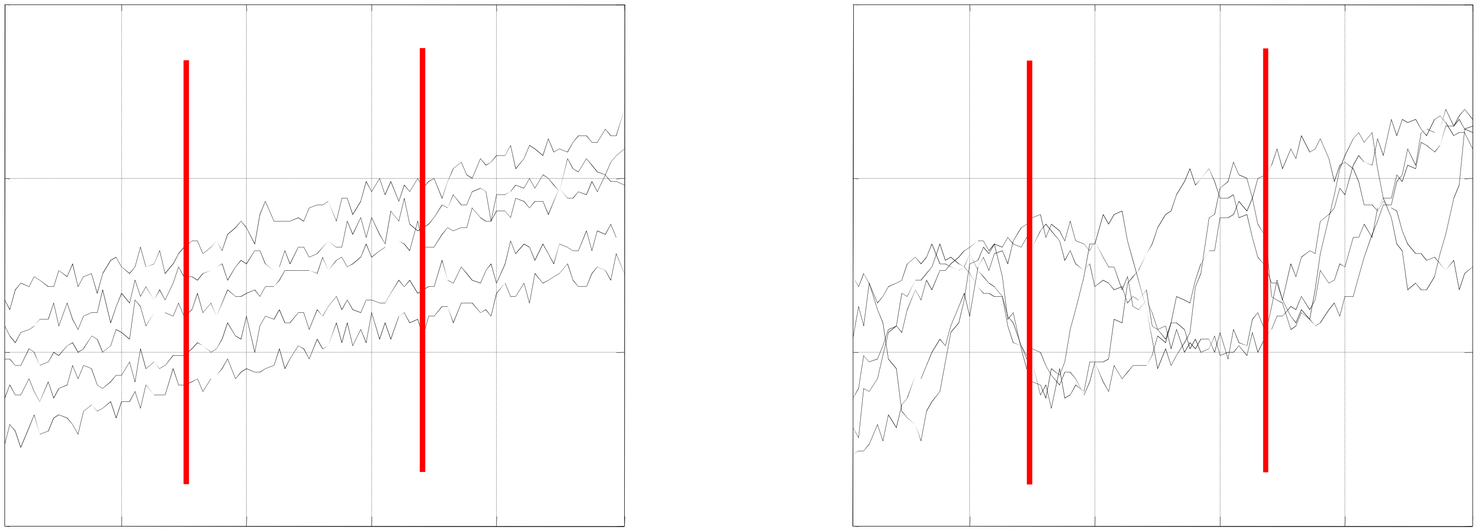
课后作业： 2.15、 2.16、 2.25

2.2随机过程的统计描述

- 自相关函数(Autocorrelation function)

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

自相关函数反映了随机过程在两个不同的时刻取值的依赖性



相似均值和方差的随机过程

2.2随机过程的统计描述

自相关函数可正可负，其绝对值越大，表示（线性）相关性越强。一般说来，时间相隔越远，相关性越弱，自相关函数的绝对值也越弱，当两个时刻重合时，其相关性应是最强的，所以$R_X(t,t)$最大。

2.2随机过程的统计描述

- （自）协方差函数

$$K_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$

如果 $K_X(t_1,t_2)=0$，则称 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的。如果 $\boldsymbol{R_X(t_1,t_2)}=0$，则称 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是相互正交的。如果 $f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,t_1)f_X(x_2,t_2)$，则称随机过程在 t_1 和 t_2 时刻的状态是相互独立的。

两个随机过程的相互关系

1. 互相关函数:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{XY}(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

2. 互协方差函数:

$$K_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

2.2随机过程的统计描述

两随机过程的相互关系：　回忆对比随机变量的情况

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')$$

$$=f_X(x_1,\cdots,x_n,t_1\cdots,t_n)f_Y(y_1,\cdots,y_m,t_1',\cdots,t_m')$$

X(t)与Y(t)独立；

若 $R_{XY}(t_1,t_2)=0$ ，则X(t)与Y(t)正交；

若 $K_{XY}(t_1,t_2)=0$ ，则X(t)与Y(t)不相关；

2.2随机过程的统计描述

离散随机过程数字特征

$$m_X(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)p_i(t)$$

$$\sigma_X^2(t)=\sum_{i=1}^{N}[x_i(t)-m_X(t)]^2 p_i(t)$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_i(t_1)x_j(t_2)p_{ij}(t_1,t_2)$$

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[x_i(t_1)-m_X(t_1)][x_j(t_2)-m_X(t_2)]p_{ij}(t_1,t_2)$$

和

2.2随机过程的统计描述

例题：2.8　随机相位信号的均值、方差和自相关函数

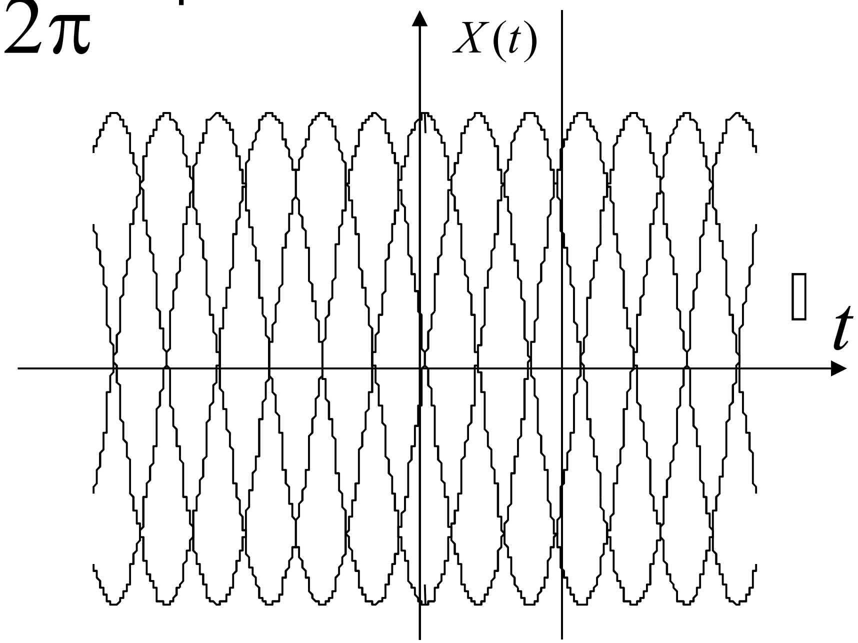
$$X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Phi)$$

$$E[X(t)]=E[A\cos(2\pi f_0 t+\Phi)]$$

$$=\int_0^{2\pi}A\cos(2\pi f_0 t+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi=0$$

随机相位信号任意时刻

取值的平均值为零



2.2随机过程的统计描述

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{A\cos(2\pi f_0 t_1+\Phi)A\cos(2\pi f_0 t_2+\Phi)\}$$

$$=\frac{1}{2}A^2E\{\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Phi]\}$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}A^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)$$

自相关函数也是同频率周期信号

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)=\frac{1}{2}A^2$$

随机相位信号的平均功率

2.2随机过程的统计描述

课堂练习 设随机振幅信号为

$$X(t)=V\sin\omega_0 t$$

其中 ω_0 为常数，**V**是标准正态随机变量。

求该随机信号的均值、方差、相关函数和协方差函数。

$$m_X(t)=E(X(t))=E(V\sin\omega_0 t)=\sin\omega_0 tE(V)=0$$

$$\sigma_X^2(t)=D(X(t))=\sin^2\omega_0 tD(V)=\sin^2\omega_0 t$$

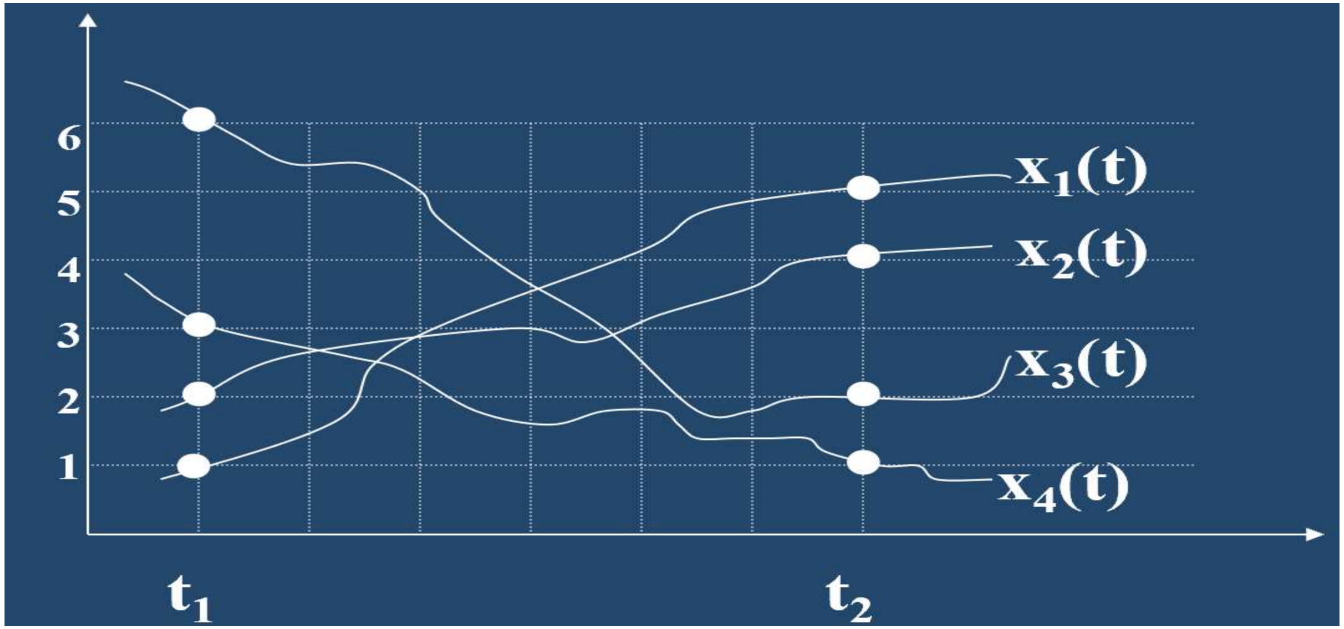
$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 E(V^2)=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2$$

$$K_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2$$

例2.9 离散随机过程自相关函数计算举例

设有一个随机过程$X(t)$，由四条样本函数组成，而且每条样本函数出现的概率相等，$X(t)$在t_1和t_2的取值如下表，求$R_X(t_1,t_2)$

t \ X(t)	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
t_1	1	2	6	3
t_2	5	4	2	1



每一条样本函数出现的概率相等

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

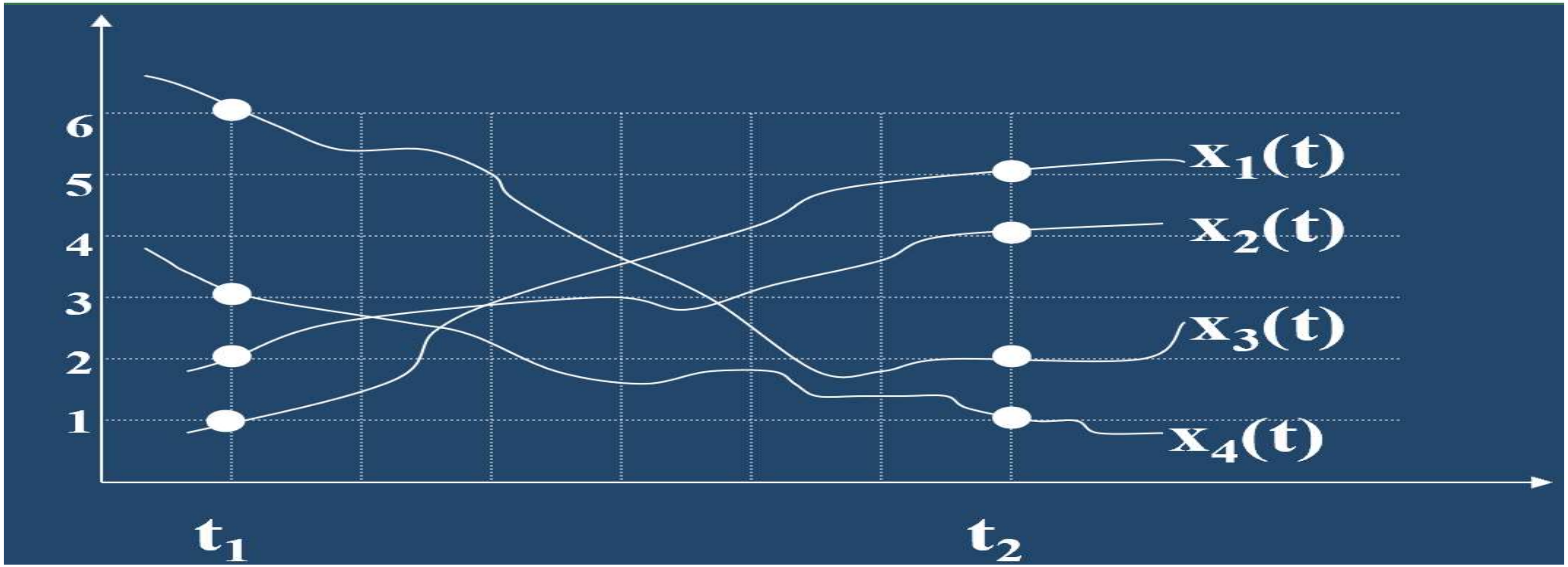
2.2随机过程的统计描述

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}x_i(t_1)x_j(t_2)p_{ij}(t_1,t_2)$$

$$\begin{aligned}p_{ij}(t_1,t_2)&=P\{X(t_1)=x_i(t_1),X(t_2)=x_j(t_2)\}\\&=P\{X(t_1)=x_i(t_1)\}P\{X(t_2)=x_j(t_2)\mid X(t_1)=x_i(t_1)\}\end{aligned}$$

1/4

关键是这个条件概率的计算



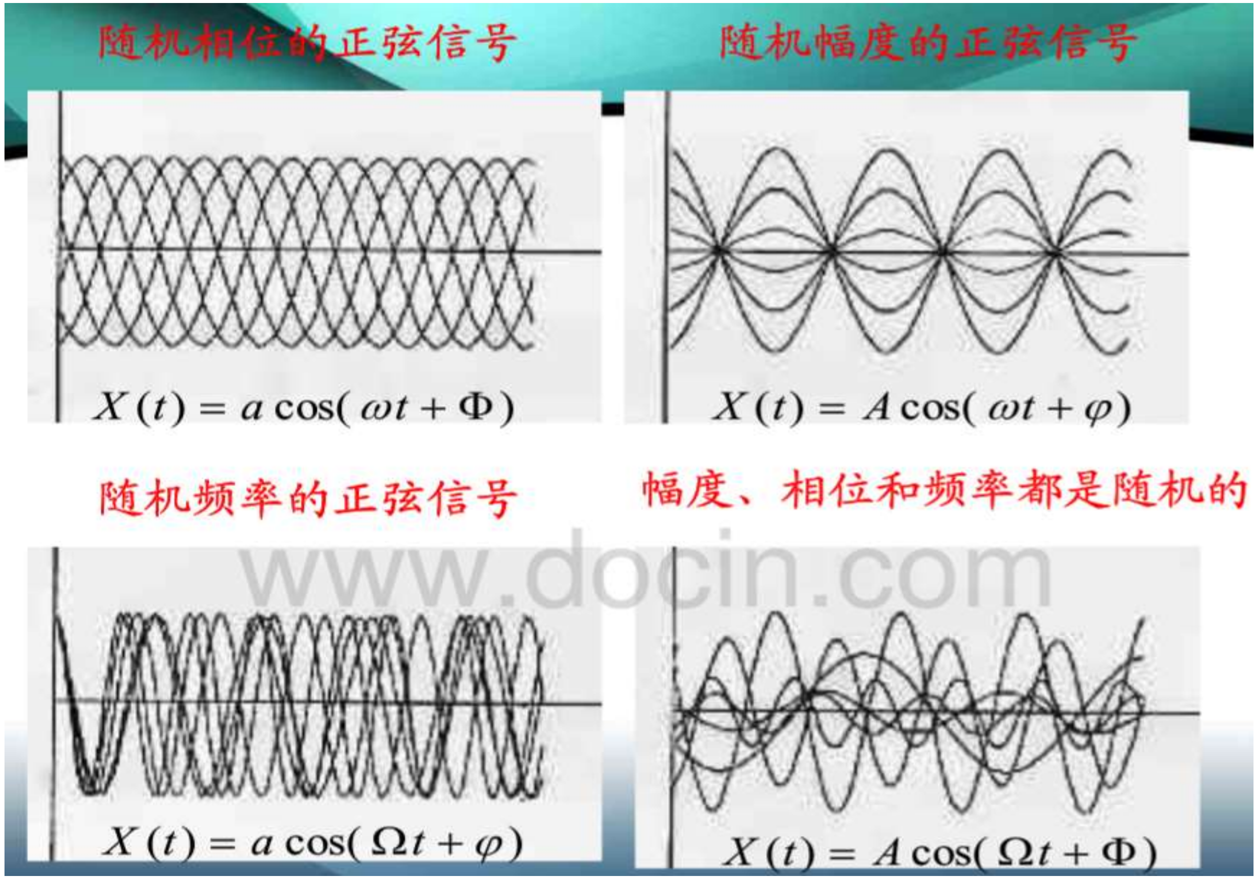
$$P\{X(t_2)=x_i(t_2)\,\big|\,X(t_1)=x_i(t_1)\}=1$$

$$p_{ij}(t_1,t_2)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \dfrac{1}{4} & i=j\end{cases}$$

$$R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i(t_1)x_i(t_2)p_{ii}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}(1\times5+2\times4+6\times2+3\times1)=7$$

2.3平稳随机过程

背景：在电子系统中，如果产生一个随机过程的主要物理条件在时间的进程中不改变，或者改变极小，可以忽略，则此信号可以认为是平稳的。平稳过程相对而言更好分析



2.3平稳随机过程

2.3.1 定义

(1)严格平稳随机过程(Strictly stationary Process)

定义：如果随机过程$X(t)$的任意维分布不随时间起点的不同而变化，即当时间平移 Δt 时，其任意的N维概率密度不变化，则称$X(t)$是严格平稳的随机过程或狭义平稳随机过程。

严平稳最基本的特征是时间起点的平移不影响它的统计特性，即X(t)与X(t+Δt)具有相同的统计特性。

$$f_X(x_1,\cdots,x_n,t_1+\Delta t,\cdots,t_n+\Delta t)=f_X(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n)$$

一维概率密度： $f_X(x,t) = f_X(x)$

二维概率密度： $f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,\tau)$

$$\tau = t_1 - t_2$$

2.3平稳随机过程

(2)广义平稳随机过程(Weakly stationary Process)

$$m_X(t) = m_X$$

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau), \tau = t_1 - t_2$$

$$\text{严格平稳} \underset{\text{不一定（高斯分布等价）}}{\overset{\text{一定}}{\rightleftarrows}} \text{广义平稳}$$

指出：广义平稳与一、二阶矩有关，应用广泛，在实际中，通常只考虑广义平稳性。

2.3平稳随机过程

例　设随机过程X(t)=tX，X为标准正态分布的随机变量。试问X(t)是否平稳？

解：

$$E\{X(t)\} = E\{tX\} = tE\{X\} = 0$$

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = t_1t_2E\{X^2\} = t_1t_2$$

所以X(t)是非平稳的。

2.3平稳随机过程

例2.11 设随机过程$X(t) = A\cos\varpi_0 t + B\sin\varpi_0 t$，其中$\varpi_0$为已知常数，A，B为相互独立的随机变量，且分别以概率2/3、1/3取值-1和2。试讨论随机过程X(t)的平稳性。

课堂阅读

2.3平稳随机过程

例2.12

谐波过程

$$X(n)=\sum_{i=1}^{N} a_i \cos(\omega_i n+\Phi_i)$$

a_i和ω_i为常数

$\Phi_i \sim U(-\pi,\pi)$ 且相互独立

求均值、自相关函数，并判断平稳性

2.3平稳随机过程

解：

$$E[X(n)]=\sum_{i=1}^{N}a_iE[\cos(\omega_i n+\Phi_i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}a_i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_i n+\varphi_i)d\varphi_i=0$$

将X(n)改写为

$$X(n)=\sum_{i=1}^{N}(A_i\cos\omega_i n+B_i\sin\omega_i n)$$

$$A_i=a_i\cos\Phi_i \qquad B_i=a_i\sin\Phi_i$$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY 2.3平稳随机过程

$$R_X(n+m,n)=E[X(n+m)X(n)]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E\left\{\left[A_i\cos(n+m)\omega_i+B_i\sin(n+m)\omega_i\right]\left[A_j\cos n\omega_j+B_j\sin n\omega_j\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E\{[\underline{A_iA_j}\cos(n+m)\omega_i\cos n\omega_j+\underline{B_iB_j}\sin(n+m)\omega_i\sin n\omega_j+$$

$$\underline{A_iB_j}\cos(n+m)\omega_i\sin n\omega_j+\underline{B_iA_j}\sin(n+m)\omega_i\cos n\omega_j]\}$$

2.3平稳随机过程

$$E(A_i) = E(B_i) = 0$$

$$\begin{aligned} E(A_i A_j) &= E(a_i a_j \cos\Phi_i \cos\Phi_j) \\ &= a_i a_j E(\cos\Phi_i) E(\cos\Phi_j) = 0 \end{aligned}$$

$i \neq j$时

$$\begin{aligned} E(A_i^2) &= E(a_i^2 \cos^2\Phi_i) \\ &= \left(a_i^2/2\right) E\left(1+\cos 2\Phi_i\right) = a_i^2/2 \end{aligned}$$

$i = j$时

$$E(A_i A_j) = \begin{cases} a_i^2/2 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

2.3平稳随机过程

同理

$$E(B_iB_j)=\begin{cases} a_i^2/2 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases} \qquad E(A_iB_j)=0$$

$$R_X(n+m,n)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[(a_i^2/2)\cos(n+m)\omega_i\cos n\omega_i+(a_i^2/2)\sin(n+m)\omega_i\sin n\omega_i\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{2}\cos m\omega_i$$

可见，X(n)是平稳随机过程

2.3.2 平稳随机过程自相关函数性质

（1） $\boldsymbol{R_X}(-\tau)=\boldsymbol{R_X}(\tau)$

$$R_X(-\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(t+\tau)X(t)]=R_X(\tau)$$

（2） $\boldsymbol{R_X}(0)\geq\left|\boldsymbol{R_X}(\tau)\right|$

Cauchy-Schwarz inequality $\quad \left[E(XY)\right]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$

$$\left[R_X(\tau)\right]^2=\left[E(X(t+\tau)X(t))\right]^2\leq E(X^2(t+\tau))E(X^2(t))$$

$$=R_X^2(0)$$

2.3平稳随机过程

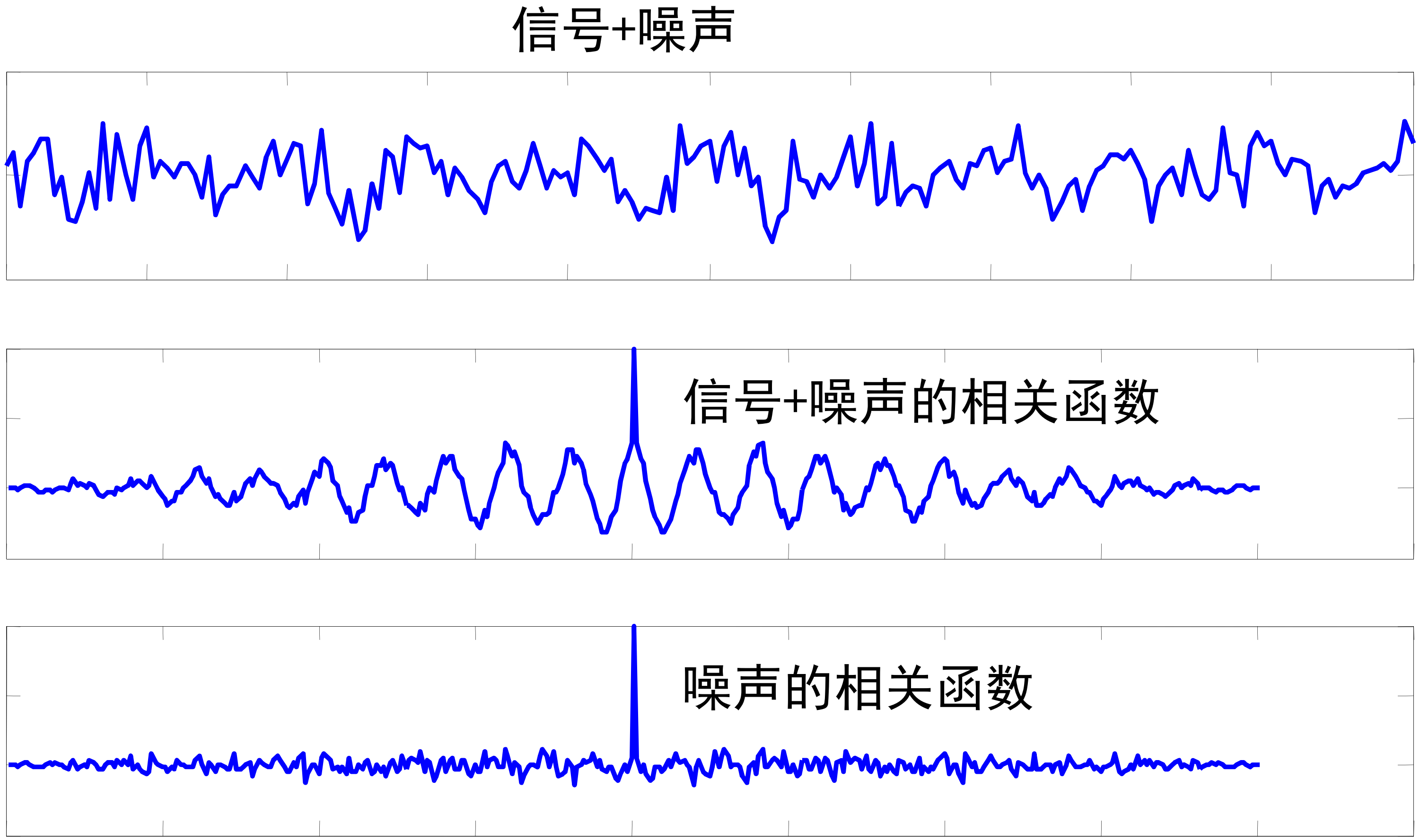
(3)　若随机过程不含周期分量，$\lim\limits_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = m_X^2$

(4)　若随机过程含有周期分量，则自相关函数中也含有周期性分量。前面的例子：随机相位信号

这一性质可用于检测周期性的信号

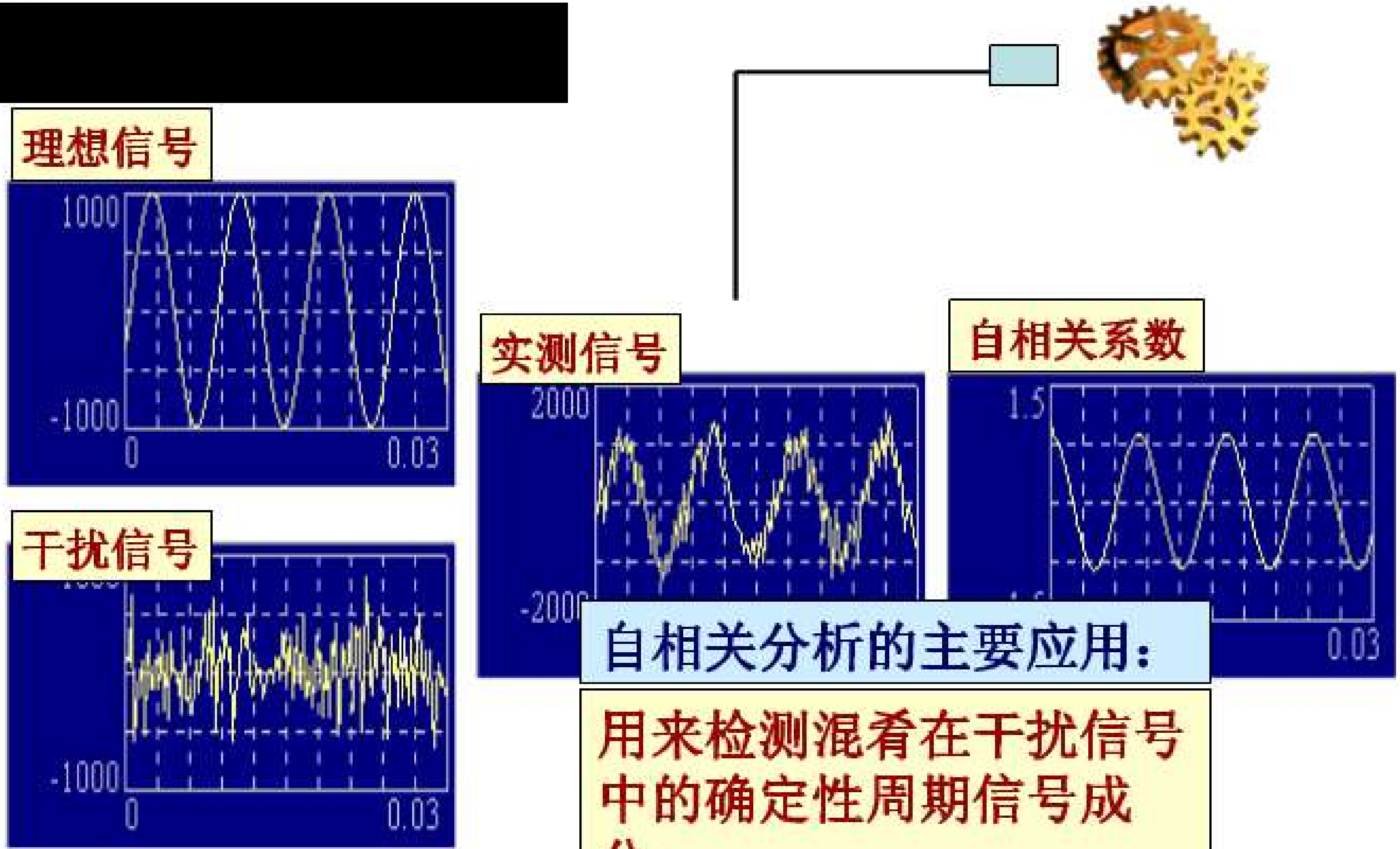
$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + N(t) \Rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau + R_N(\tau)$$

2.3平稳随机过程



2.3平稳随机过程

应用：自相关测转速

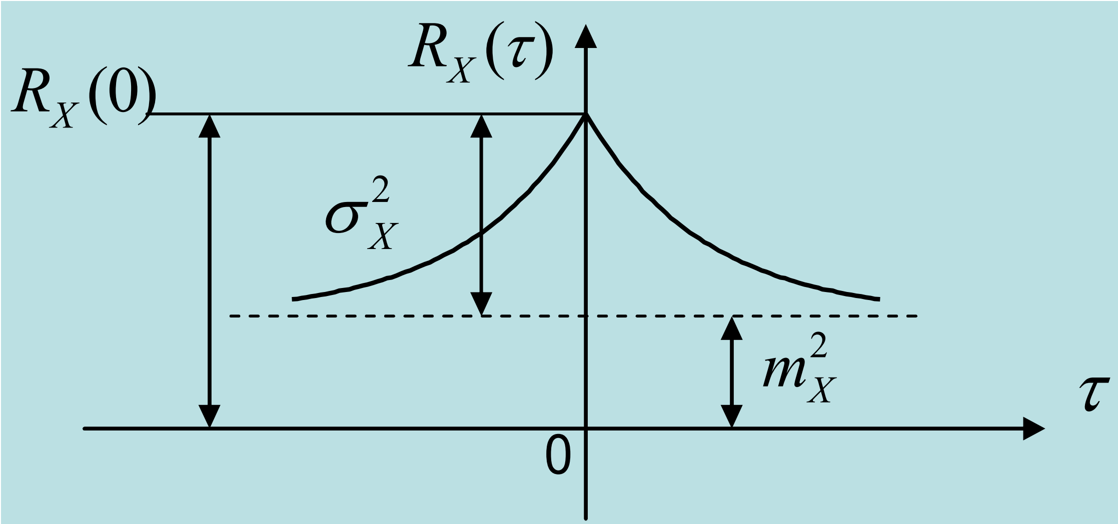


自相关分析的主要应用：

用来检测混看在干扰信号中的确定性周期信号成分。

2.3平稳随机过程

（5） $R_X(0)=\sigma_X^2+m_X^2$



相关函数示意图（不含周期分量）

2.3平稳随机过程

（6）相关函数具有非负定性，即对任意的n个复数

有 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j^* R_X(t_i - t_j) \geq 0$$

利用如下关系可证明

$$E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X(t_i)\right|^2\right\} \geq 0$$

例3、已知平稳随机过程**X(t)**的自相关函数为

$$R_X(\tau)=49+\frac{9}{1+5\tau^2}$$

求**X(t)**的均值和方差。

Which of following is correct?

A $m_X=7,\sigma_X^2=9$

B $m_X=7,\sigma_X^2=3$

C $m_X=\pm 7,\sigma_X^2=9$

D $m_X=\pm 7,\sigma_X^2=49+9=58$

2.3平稳随机过程

例4、已知平稳随机过程**X(t)**的自相关函数为

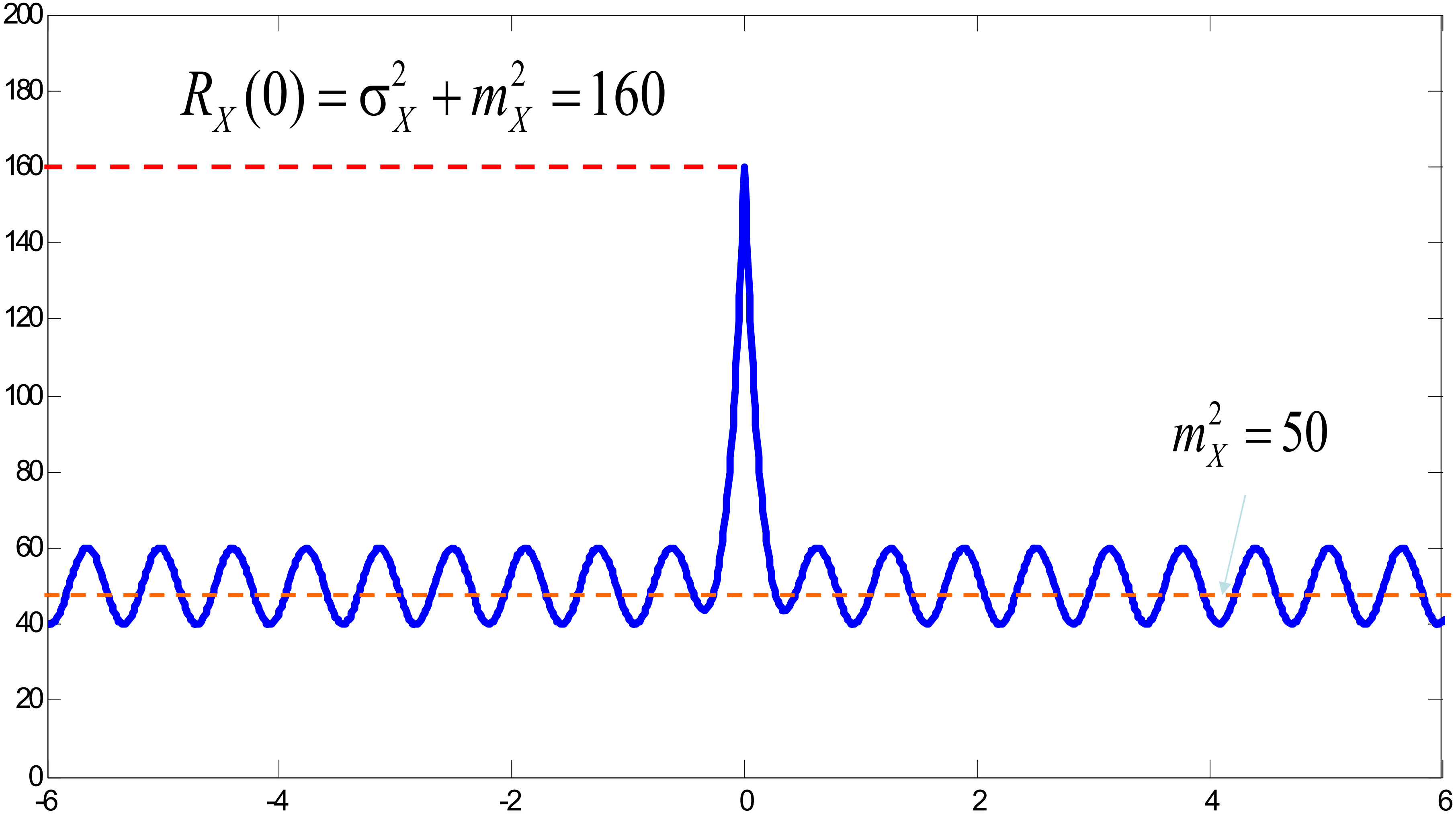
$$R_X(\tau) = 100e^{-10|\tau|} + 10\cos 10\tau + 50$$

求**X(t)**的均值、均方值和方差。

$$m_X^2 = 50 \qquad E[X^2(t)] = R_X(0) = 160$$

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - m_X^2 = 110$$

2.3平稳随机过程



$R_X(0)=\sigma_X^2+m_X^2=160$
$m_X^2=50$
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-6
-4
-2
0
2
4
6

2.3平稳随机过程

2.3.3 相关系数及相关时间

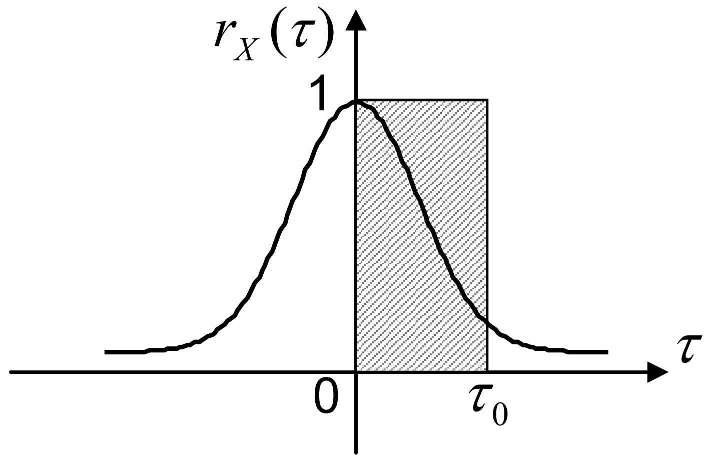
也称为归一化协方差函数或标准协方差函数。

相关系数：
$$r_X(\tau)=\frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}$$

$$|r_X(\tau)|\le 1$$

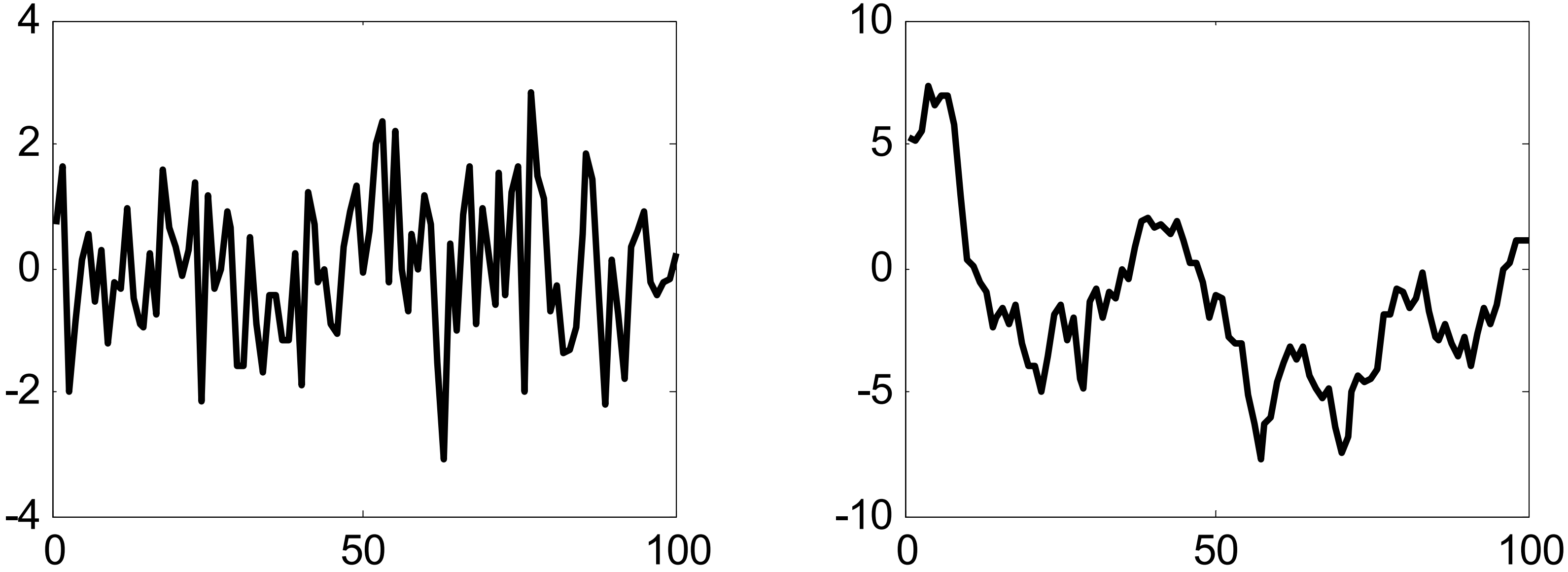
相关时间：
$$\tau_0=\int_0^{\infty} r_X(\tau)d\tau$$

$$|r_X(\tau_0)|\le 0.05$$



相关时间示意图

2.3平稳随机过程



$\tau_0 = 1$ $\tau_0 = 100$

两个不同相关时间随机过程的样本函数

2.3.4 其他平稳的概念

(1) k阶严平稳(kth-order sss)

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)=f_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1+c,t_2+c,\cdots,t_N+c)$$

只对N≤k 成立

k=2 称为二阶严平稳，如果对N=k成立，那么对N<k也成立.

(2) 渐近严平稳

当c→∞时，X(t+c)的任意n维分布与c无关，即

$\lim\limits_{c\to\infty} f_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1+c,t_2+c,\cdots,t_N+c)$ 存在，且与c无关.

2.3平稳随机过程

(3)循环平稳 (Cyclostationary)

如果X(t)的分布函数满足如下关系:

$$F_X(x_1,\cdots,x_N,t_1+MT,\cdots,t_N+MT)=F_X(x_1,\cdots,x_N,t_1\cdots,t_N)$$

其中M为整数,T为常数,则称X(t)为严格循环平稳

(或严格周期平稳)

2.3平稳随机过程

如果随机过程X(t)的均值和自相关函数满足下列关系

$$m_X(t+MT)=m_X(t)$$

$$R_X(t+MT+\tau,t+MT)=R_X(t+\tau,t)$$

称X(t)为广义循环平稳.

2.3平稳随机过程

定理1: 设X(t)是严格循环平稳的，而随机变量Θ在区间(0, T)上均匀分布，且X(t)与Θ统计独立，定义新的过程

$$\bar{X}(t) = X(t - \Theta)$$

则X(t)是严格平稳随机过程.

2.3平稳随机过程

定理2: 设X(t)是广义循环平稳的,而随机变量Θ在区间(0,T)上均匀分布,且X(t)与Θ统计独立,定义新的过程

$$\bar{X}(t) = X(t-\Theta)$$

则X(t)是广义平稳随机过程,且 $E[\bar{X}(t)] = \frac{1}{T}\int_0^T m_X(t)dt$

$$R_{\bar{X}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t+\tau,t)dt$$

对于平稳随机过程，它的均值、方差都是常数，相关函数只与
$\tau = t_1 - t_2$

2.3.5 随机过程的各态历经性

背景： 对于平稳随机过程，它的均值、方差都是常数，相关函数只与时间差有关，这些数字特征都是集合平均的概念，也就是说，如果我们要得到这些数字特征的准确值，需要观测到所有样本函数，这在实际中是很难做到的。如果只通过随机过程的一个样本函数，就可以解决随机过程数字特征的估计问题，那是很有实际意义的。各态历经的随机过程就具有这一特征。

2.3平稳随机过程

定义： 对于平稳随机过程X(t)，若有

$$\overline{m_X} \overset{P}{=} m_X$$ 均值遍历性

$$\overline{R_X(\tau)} \overset{P}{=} R_X(\tau)$$ 相关函数遍历性

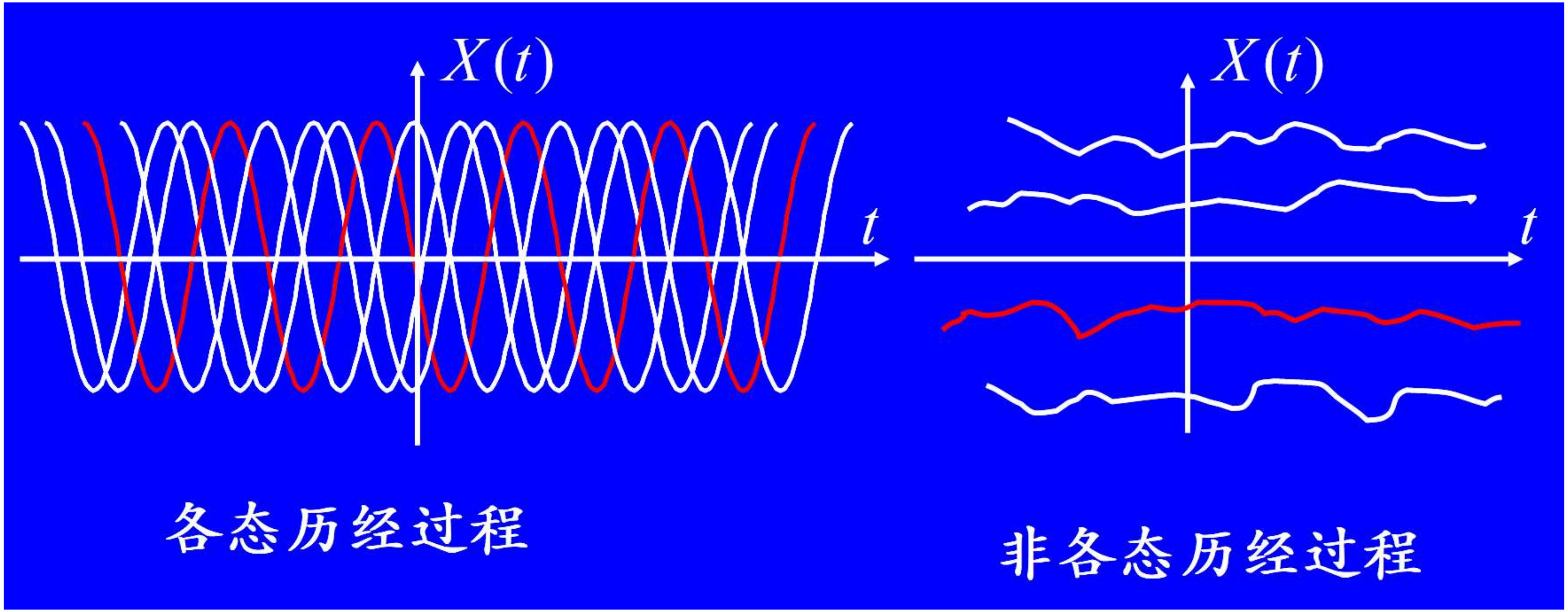
则X(t)为各态历经（遍历）过程。

其中

$$\overline{m_X} = \underset{T\to\infty}{l \cdot i \cdot m} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

$$\overline{R_X(\tau)} = \underset{T\to\infty}{l \cdot i \cdot m} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X(t)dt$$

2.3平稳随机过程



各态历经过程与非各态历经过程示意图

2.3平稳随机过程

各态历经性的解释：

$$\overline{m_X} = \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt \quad \text{对比} m_X(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)p_i(t)$$

对于一般过程，不同样本函数得到不同的时间平均，但各态历经过程不同样本函数得到相同的时间平均。

对于遍历过程，由一条样本函数可确定过程的均值

$$\overline{R_X(\tau)} = \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t+\tau)X(t)dt \quad \text{也有类似的结论}$$

2.3平稳随机过程

遍历性判断：

均值遍历性：
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=0$$

相关函数遍历性：
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_\Phi(\tau)-R_X^2(\tau)]d\tau=0$$

其中，$\Phi(t)=X(t+\tau)X(t)$

零均值平稳正态随机信号：
$$\int_0^{\infty}\left|R_X(\tau)\right|d\tau<\infty$$

2.3平稳随机过程

例2. 13 判断 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$

是否具有遍历性，其中Φ均匀分布于(0，2π)。

解. $$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t+\phi)dt = 0 = m_X$$

$$\overline{x(t)x(t+T)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\omega\tau+\phi)dt$$

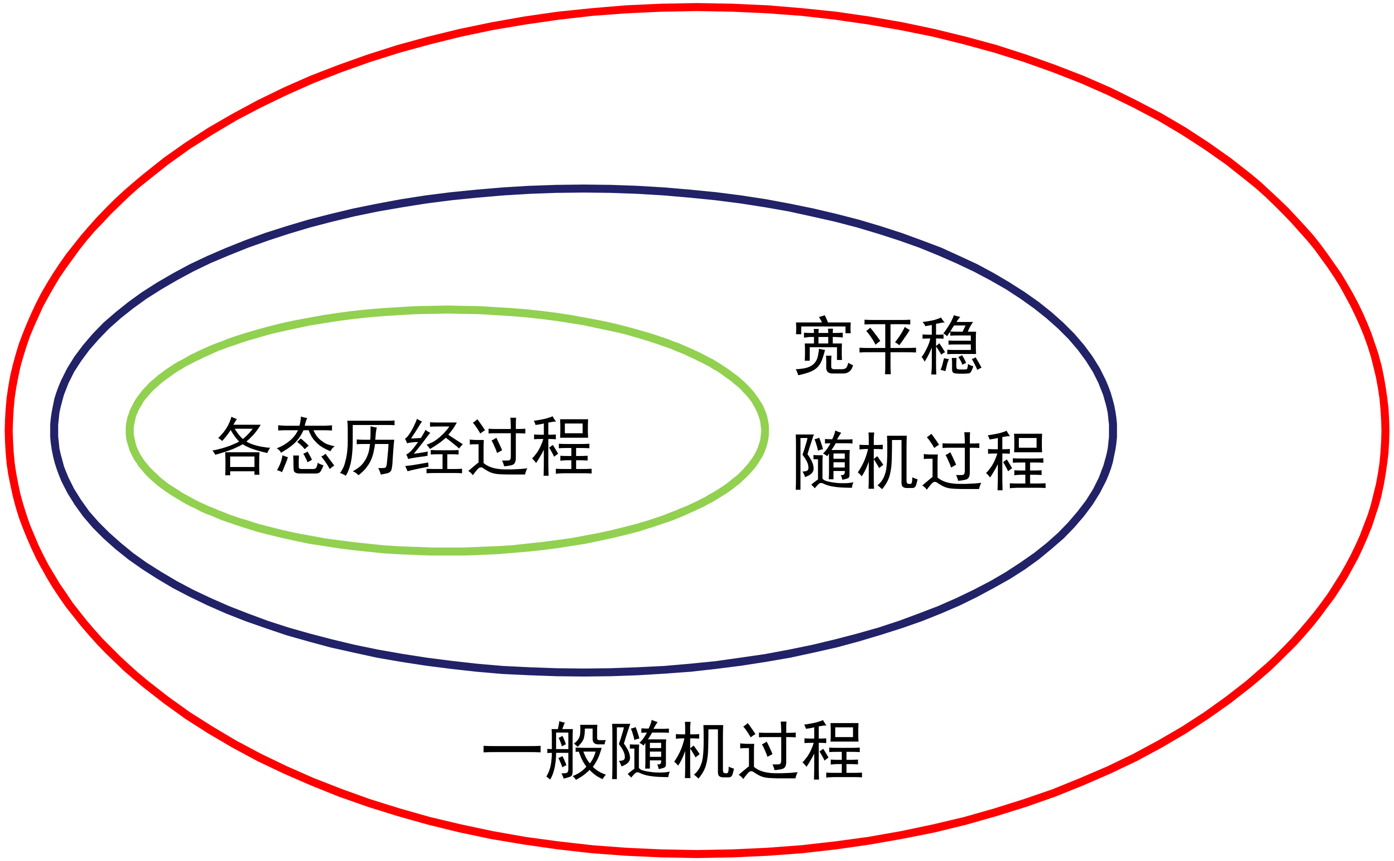
$$= a^2\cos(\omega_0\tau)/2$$

$$= R_X(\tau)$$

2.3平稳随机过程

启示： 一般说来，不同的样本函数，时间平均的结果不同，体现为一个是随机变量，但对于各态历经的随机过程而言，时间平均趋于一个常数，这就表明，各态历经随机过程的各个样本函数的时间平均可以认为是相同的，因此随机过程的均值可以用它的任意的一条样本函数的时间均值来代替。同样，相关函数亦可以用任意的一条样本函数的时间相关函数来代替，也就是说，各态历经随机过程一个样本函数经历了随机过程所有可能的状态。这一性质，在实际应用中是很有用的，因为我们可以通过对一条样本函数的观测，就可以估计出随机过程均值、方差和相关函数。

2.3平稳随机过程



2.3平稳随机过程

均值和自相关函数估计：

连续随机过程：

$$\hat{m}_X = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

$$\hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)\,dt$$

随机序列：

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \qquad \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)-\hat{m}_X\right]^2$$

$$\hat{R}_X(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m)$$

2.4随机过程的联合分布和互相关函数

背景：考察两个或者多个信号之间的关系，比如目标信号与噪声信号

n+m维联合概率密度：

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')$$

平稳相依：如果**X(t)**与**Y(t)**的联合统计特性不随时间起点的平移而变化，则称**X(t)**与**Y(t)**是严 格联合平稳的。即

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')$$

$$=f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1+c\cdots,t_n+c,t_1'+c,\cdots,t_m'+c)$$

互相关函数及其性质

互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{XY}(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

互协方差函数：

$$K_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

2.4随机过程的联合分布和互相关函数

若对于任意 t_1,t_2，

$R_{XY}(t_1,t_2)=0$，则**X(t)**与**Y(t)**正交；

$K_{XY}(t_1,t_2)=0$，则**X(t)**与**Y(t)**不相关；

X(t)与**Y(t)**广义联合平稳的定义

$$m_X(t)=m_X \qquad m_Y(t)=m_Y$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(\tau),\tau=t_1-t_2$$

2.4随机过程的联合分布和互相关函数

性质：

- $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$ $\quad$ $K_{XY}(-\tau)=K_{YX}(\tau)$

- $2R_{XY}(\tau)\le R_X(0)+R_Y(0)$ $\quad$ 施瓦茨不等式

- $\left|R_{XY}(\tau)\right|^2\le R_X(0)R_Y(0)$

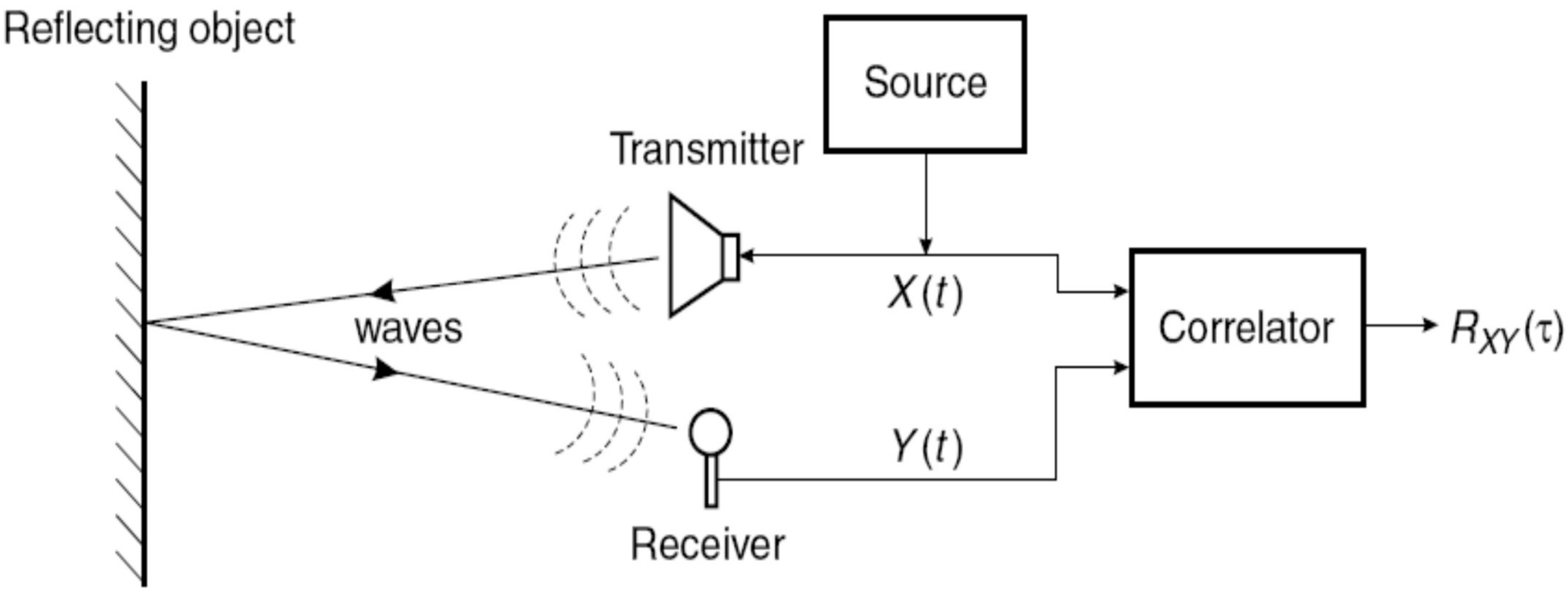
- $\left|K_{XY}(\tau)\right|^2\le \sigma_X^2\sigma_Y^2$

- $r_{XY}(\tau)=\dfrac{K_{XY}(\tau)}{\sqrt{K_X(0)K_Y(0)}}=\dfrac{R_{XY}(\tau)-m_Xm_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$

互相关函数应用：

- 确定时间延迟：定位应用
- 测定系统响应：第三章线性系统
- 检测微弱信号：随机信号处理

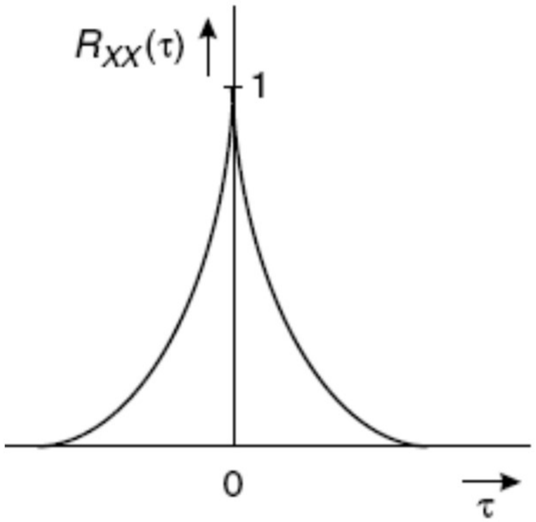
例2.15　相关测距

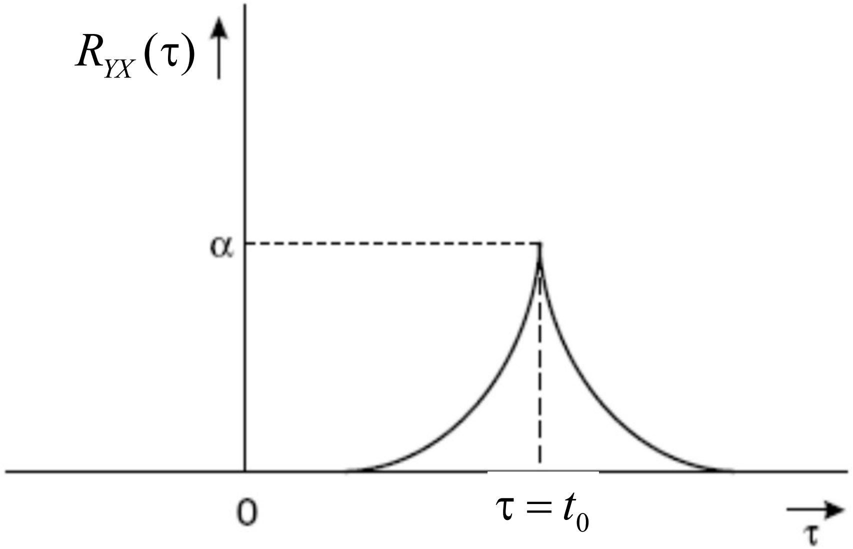

Reflecting object
Source
Transmitter
X(t)
Correlator
$R_{XY}(\tau)$
waves
Y(t)
Receiver

2.4随机过程的联合分布和互相关函数

$$Y(t) = X(t - t_0) \qquad t_0 = \frac{2R}{c}$$

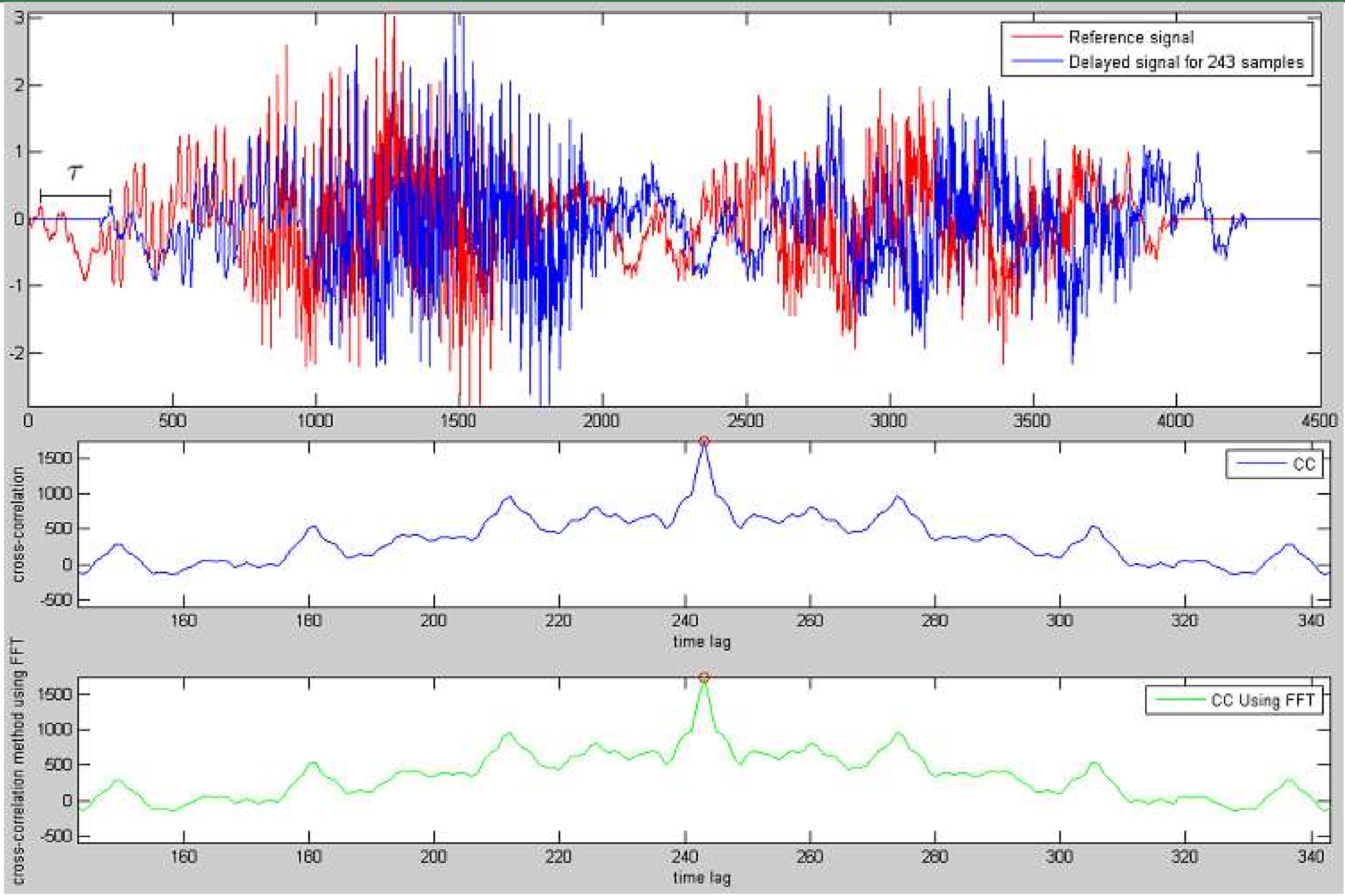
$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E[Y(t+\tau)X(t)] \\ &= E[X(t+\tau-t_0)X(t)] \\ &= R_X(\tau - t_0) \end{aligned}$$





中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

2.4随机过程的联合分布和互相关函数



2.5随机过程的功率谱密度

复习《信号与系统》

对于确定性信号：

频谱： $$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$$ 条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}|s(t)|dt<\infty$

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

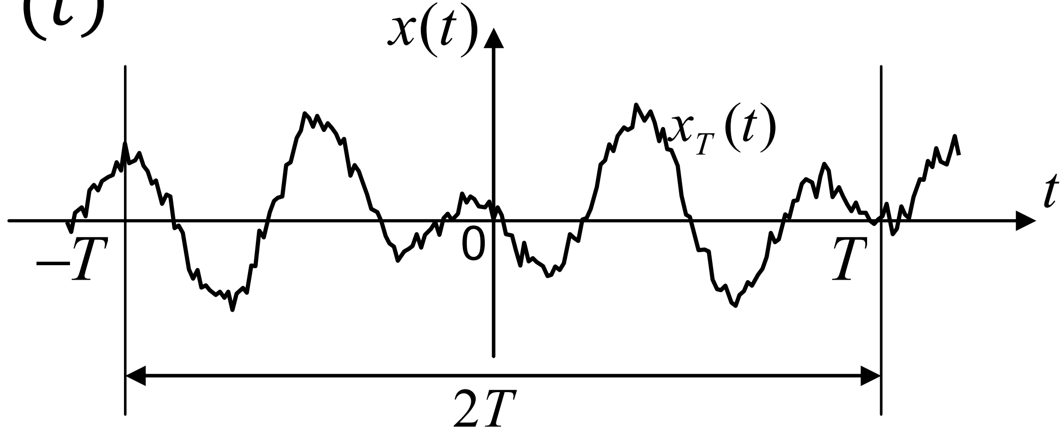
对于随机信号：由于不满足绝对可积条件，因此其频谱密度不存在。但在实际中，随机过程的各个样本函数，其平均功率总是有限的。可以引入功率谱的概念。

2.5.1 连续时间随机过程的功率谱

对于某一个样本函数 $x_i(t)$

截取函数：

$$x_{Ti}(t)=\begin{cases} x(t) & |t|<T \\ 0 & |t|\geq T \end{cases}$$



随机过程的样本函数及其截尾函数

$$X_{Ti}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_{Ti}(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{+T}x_i(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$P_i = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{Ti}^2(t)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_{Ti}^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X_{Ti}(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_{Ti}(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$G_{Xi}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_{Ti}(\omega)\right|^2$$

随机变量

$$P_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{Xi}(\omega)d\omega$$

2.5随机过程的功率谱密度

对上式两边都求统计平均，左边

$$E(P_i) = P\text{为平均功率}$$

右边求统计平均为：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\{G_{Xi}(\omega)\}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_{Ti}(\omega)|^2\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_{T}(\omega)|^2\right\}d\omega$$

故而，$E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_{T}(\omega)|^2\right\} \triangleq G_X(\omega)$可以看做是功率谱密度

可以看作为单位频带内消耗在单位电阻上的平均功率。

2.5随机过程的功率谱密度

平稳随机过程：维纳—辛钦定理（！重要）

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

傅里叶 $\Updownarrow$ 变换对

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

物理谱定义：

$$F_X(\omega)=\begin{cases}2G_X(\omega) & \omega\geq 0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$

2.5随机过程的功率谱密度

- 平稳随机过程：

$$G_X(\omega) = E[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2] \geq 0$$

$$\boldsymbol{G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{R_X}(\tau)\cos\omega\tau d\tau - j\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{R_X}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{R_X}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

实平稳随机过程的功率谱是实的、非负的偶函数。

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega)\, 1 \quad d\omega = P$$

2.5随机过程的功率谱密度

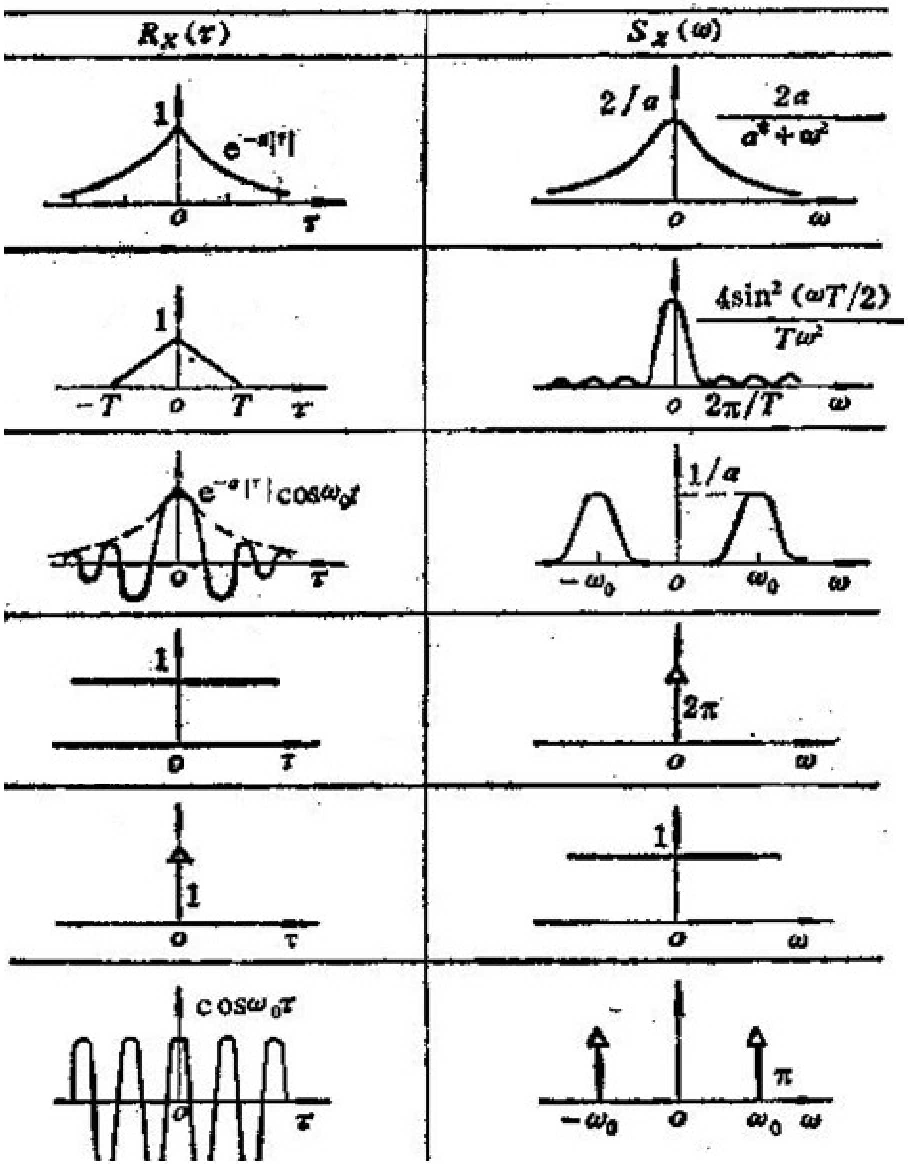
平稳随机过程：

对于实的平稳随机过程，功率谱为实的、非负偶函数；

相关性越弱，功率谱越宽平；

相关性越强，功率谱越陡窄。

几种常见的$R_x(\tau)$与$S_x(\omega)$对照表



2.5随机过程的功率谱密度

表2.4 典型随机过程的相关函数和功率谱

$R_X(\tau)$	$G_X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(\tau)$	1
$e^{-\alpha\|\tau\|}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha\|\tau\|}\cos\omega_0\tau$	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\dfrac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}$
$\Delta(\tau/T)$	$\dfrac{T}{2}\cdot\dfrac{\sin^2(\omega T/4)}{(\omega T/4)^2}$
$\dfrac{\Omega}{\pi}\mathrm{sinc}(\Omega\tau)$	$\mathrm{rect}(\omega/2\Omega)$
$\dfrac{\Omega}{2\pi}\mathrm{sinc}^2(\Omega\tau/2)$	$\Delta(\omega/2\Omega)$
$e^{-\tau^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

2.5随机过程的功率谱密度

例2. 17 随机相位信号

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$G_X(\omega) = \frac{1}{2}\pi A^2[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

2.5随机过程的功率谱密度

例2. 18 已知谱密度为$G_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$ 求相关函数。

解、　由因式分解

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\frac{2\times 9/48}{\omega^2+1}+\frac{6\times 5/48}{\omega^2+9}$$

$$e^{-\alpha|\tau|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

课堂练习：2.29，2.30

$$R_X(\tau)=\frac{1}{48}(9e^{-|\tau|}+5e^{-3|\tau|})$$

2.5.2 随机序列的功率谱

对于平稳随机序列X(n)，其功率谱密度

$$G_X(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_X(m)e^{-jm\omega}$$

傅里叶 $\Updownarrow$ 变换对

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}G_X(\omega)e^{jm\omega}d\omega$$

$$R_X(0)=E[X^2(n)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}G_X(\omega)d\omega$$

（IV）如果功率谱具有有理谱的形式

$$G_X(\omega)=c_0^2\frac{\omega^{2m}+a_{2(m-1)}\omega^{2(m-1)}+\cdots+a_2\omega^2+a_0}{\omega^{2n}+b_{2(n-1)}\omega^{2(n-1)}+\cdots+b_2\omega^2+b_0}$$

$n>m$;

$G_X(s)$零、极点共轭成对

2.5随机过程的功率谱密度

Z变换形式：

$$G_X(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_X(m)z^{-m} \qquad z=e^{j\omega}$$

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_D G_X(z)z^{m-1}dz$$

性质： 实平稳随机序列的功率谱是实的、非负的偶函数。

$$R_X(m)=R_X(-m)\Rightarrow G_X(\omega)=G_X(-\omega)$$

$$G_X(z)=G_X(z^{-1})$$

如随机序列的功率谱为有理函数： $\boldsymbol{G_X(\omega)=G_X(\cos\omega)}$

2.5.3 互功率谱

$$G_{XY}(\omega) = E\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}X_T(\omega)Y_T^*(\omega)\}$$

其中：$X_T(\omega) = \int_{-T}^{+T} x_T(t)e^{-j\omega t}dt$

$$Y_T(\omega) = \int_{-T}^{+T} y_T(t)e^{-j\omega t}dt$$

若X(t)及Y(t)联合平稳，有

$$R_{XY}(\tau) \leftrightarrow G_{XY}(\omega) \quad \begin{cases} G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ R_{XY}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\tau \end{cases}$$

2.5随机过程的功率谱密度

性质：

- $G_{XY}(\omega)=G_{YX}(-\omega)=G_{YX}^{*}(\omega)$

- $\mathrm{Re}[G_{XY}(\omega)]$ 与 $\mathrm{Re}[G_{YX}(\omega)]$ 是ω的偶函数；

  $\mathrm{Im}[G_{XY}(\omega)]$ 与 $\mathrm{Im}[G_{YX}(\omega)]$ 是ω的奇函数；

- 若X(t)与Y(t)正交，则 $G_{XY}(\omega)=G_{YX}^{*}(\omega)=0$

  若不相关，则 $G_{XY}(\omega)=G_{YX}^{*}(\omega)=2\pi m_X m_Y \delta(\omega)$

- $\left|\boldsymbol{G}_{XY}(\omega)\right|^2 \le \boldsymbol{G}_X(\omega)\boldsymbol{G}_Y(\omega)$

2.5随机过程的功率谱密度

例、已知随机过程X(t)、Y(t)联合平稳，其互相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}9e^{-3\tau} & \tau\ge 0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

求互谱密度。

$$G_{XY}(\omega)=\frac{9}{3+j\omega}$$