



6.1 马尔科夫链

转移矩阵:

$$\mathbf{P}(s, n) = \begin{bmatrix} p_{11}(s, n) & \cdots & p_{1N}(s, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(s, n) & \cdots & p_{NN}(s, n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(s, n) \mathbf{p}(s)$$

6.1.3 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程 (重点)

$$p_{ij}(s, n) = \sum_{k=1}^N p_{ik}(s, r) p_{kj}(r, n), \quad n > r > s$$



6.1.4 齐次马尔可夫链

如果马尔可夫链的转移概率只取决于 **$n-s$** ，而与 **n** 和 **s** 本身的值无关，则称为齐次马尔可夫链，简称**齐次链**。

令 $\mathbf{P}^T(1) \triangleq \pi$ ，利用切普曼方程，有 $\mathbf{P}^T(n) = \pi^n$

6.1.5 平稳链

如果齐次链中所有时刻的状态概率分布列相同，即：

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(1)$$

则此齐次链是**平稳**的。



$$\pi \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(1) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_{11}p_1 + \pi_{21}p_2 + \cdots + \pi_{N1}p_N = p_1 \\ \pi_{12}p_1 + \pi_{22}p_2 + \cdots + \pi_{N2}p_N = p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \pi_{1N}p_1 + \pi_{2N}p_2 + \cdots + \pi_{NN}p_N = p_N \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1 \end{array} \right.$$

6. 1. 6 马尔科夫链中状态分类 (了解基本概念)

☞ 到达

☞ 相通

☞ 状态空间的分解



6.1.7 遍历性

如果齐次马尔可夫链中，对于一切*i*与*j*，存在不依赖*i*的极限，则称该链具有遍历性。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j$$

定理 对有穷马尔可夫链，如存在正整数*s*，使

$$p_{ij}(s) > 0$$

式中*i, j* = 1, 2, ..., *N*，则该链具有遍历性。



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

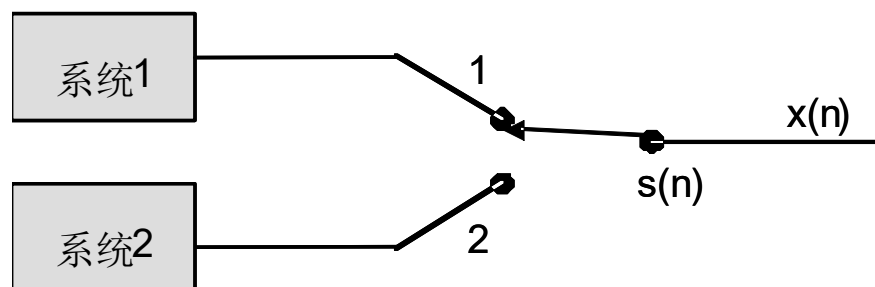
习题:

6.14, 7.3



6.2 隐马尔可夫模型

隐马尔可夫模型 (Hidden MM) ———— 掌握概念
与应用场景



产生隐马尔可夫链模型

$x(n)$ 代表直接观测到的随机序列， $s(n)$ 代表控制开关转接状态的马尔可夫链（不能直接观测到，Hidden），尽管 $x(n)$ 的输出序列与 $s(n)$ 有关，但 $s(n)$ 只起到控制转接开关的作用，因此产生 $x(n)$ 的模型称为**隐马尔可夫模型**。



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

6.2 隐马尔可夫模型

隐马尔可夫模型：探索看不到的世界的工具

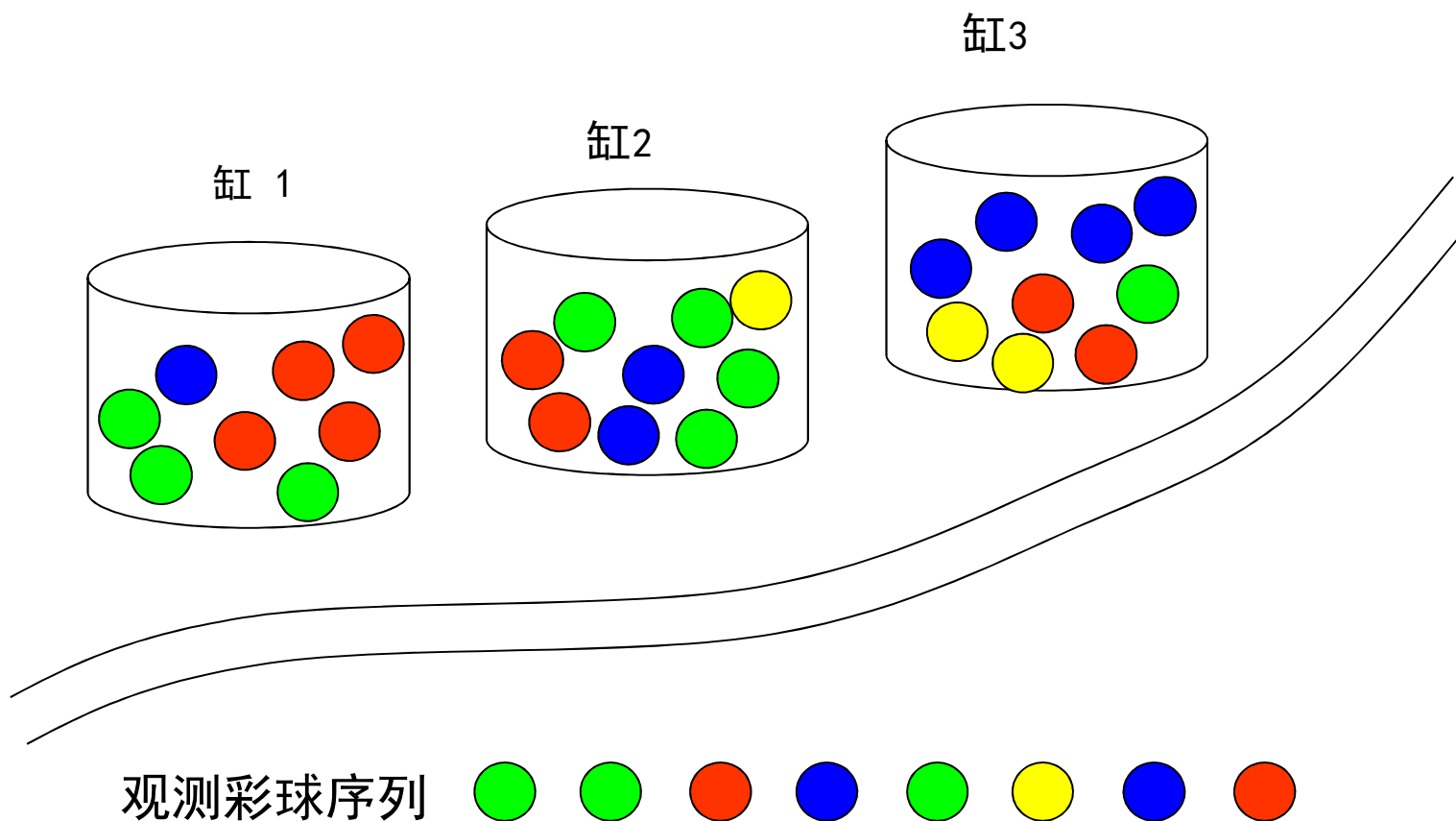
- 柏拉图的“洞穴寓言”
- 语音识别：Apple的siri，Google的voice search
- 生物信息学：基因序列分析





6.2 隐马尔可夫模型

HMM实例





HMM概念

- HMM是一个**双重**随机过程，有两个组成部分：
 - 马尔可夫链：描述状态的转移，用转移概率描述。
 - 一般随机过程：描述状态与观察序列间的关系，用观察值概率描述。
- HMM的状态是不确定或不可见的，只有通过观测序列的随机过程才能表现出来
- 观察到的事件与状态并不是一一对应，而是通过一组概率分布相联系



HMM的基本要素

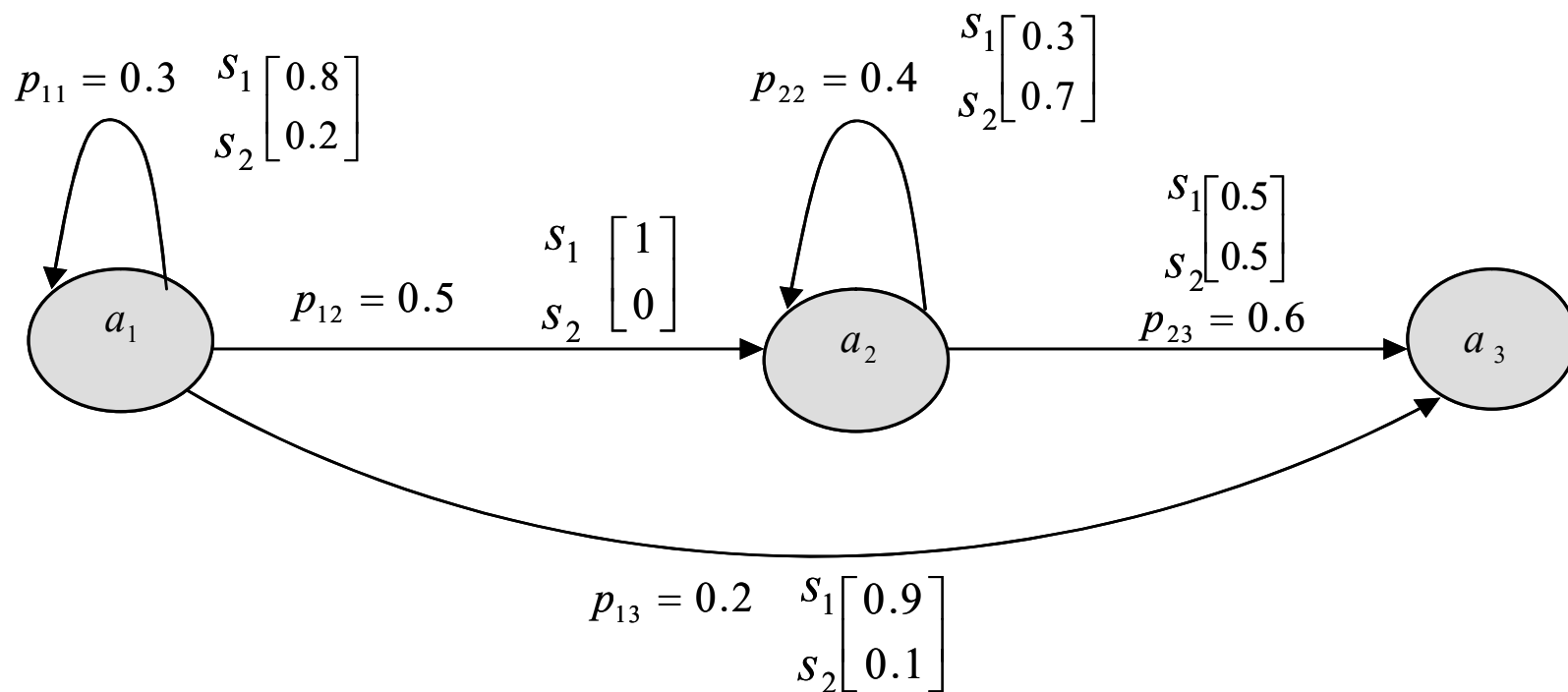
- 用**模型五元组** $\lambda = (N, M, \pi, A, B)$ 来描述HMM，或简写为 (π, A, B)

参数	含义	实例
N	状态数目	缸的数目
M	每个状态可能的观察值数目	彩球颜色数目
A	与时间无关的状态转移概率矩阵	在选定某个缸的情况下，选择另一个缸的概率
B	给定状态下，观察值概率分布	每个缸中的颜色分布
π	初始状态空间的概率分布	初始时选择某口缸的概率



6.2 隐马尔可夫模型

例6.8 设一个离散随机序列有三个状态 $\{a_1, a_2, a_3\}$ ，三个状态在发生状态转移时输出两个符号 $\{s_1, s_2\}$ ，假定从 a_1 出发到 a_3 截止，输出的符号序列为 $s_1 s_1 s_2$ ，试求输出 $s_1 s_1 s_2$ 的概率。





6.2 隐马尔可夫模型

解：从 a_1 出发到 a_3 ，并且输出 $s_1s_1s_2$ ，可能的路径有三条：

(1) $a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$; (2) $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$; (3) $a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_3$ 。对应的概率为：

$$a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \quad 0.3 \times 0.8 \times 0.5 \times 1 \times 0.6 \times 0.5 = 0.036$$

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \quad 0.5 \times 1 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.6 \times 0.5 = 0.018$$

$$a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_3 \quad 0.3 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.1 = 0.01152$$

例子6.9 有限状态有记忆信道的HMM模型

(自学阅读)



6.3 独立增量过程

(要求：了解)

相关知识：器件噪声

- 高频段：散弹噪声、热噪声 $G(f) = 4kTR$

(shot noise)

(thermal noise)

泊松过程

维纳过程

- 低频段：闪烁噪声 (粉红噪声)

$$G(f) = \frac{KI_D^2 R^2}{f}$$

电阻

$$G(f) = \frac{2qf_L I_B^\gamma}{f^a}$$

晶体管



1、独立增量过程 (independence of increments)

设随机过程 $X(t)$, $t \geq 0$ 满足

$$(1) P[X(t_0) = 0] = 1$$

$$(2) \text{对任意的时刻 } 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < b$$

过程的增量 $X(t_1) - X(t_0)$ 、 \cdots 、 $X(t_n) - X(t_{n-1})$

是相互独立的随机变量, 则称 $X(t)$ 为**独立增量过程**, 又称**可加过程**。

思考: 独立增量过程的马尔可夫性



相关概念：独立随机过程

过程的任一时刻的状态和任何其它时刻状态之间互不影响，即满足：

$$f_X(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i, t_i)$$

则称 $X(t)$ 为独立随机过程。

若取值时刻**离散**，则 $X(t)$ 为独立随机序列；

若取值时刻**连续**，则 $X(t)$ 为独立连续时间随机过程。



6.3 独立增量过程

2、泊松过程

计数过程 (counting process) :

某一时段内出现随机点数目



- (1)到达某超级市场的顾客数 $N(t)$; --接待一位顾客
- (2)某电话交换台的呼唤数 $N(t)$; --到达一次呼唤
- (3)某车间发生故障的机器数 $N(t)$; --修理一台机器
- (4)某通讯系统出现的误码数 $N(t)$; --发现一个误码





6.3 独立增量过程

泊松过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在时间间隔 $[t_0, t_0+t]$ 内 k 次出现事件 A

的概率为：

$$P\{X(t_0 + t) - X(t_0) = k\} \triangleq P_k(t_0, t_0 + t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$



泊松过程 $X(t)$ 应满足以下条件：

- (1) 过程 $X(t)$ 是一独立增量过程；
- (2) 过程 $X(t)$ 是平稳增量过程；
- (3) 对于足够小的 Δt ，从 t 到 $t + \Delta t$ 间出现1个事件的概率为

$$P_1(t, t + \Delta t) = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$$

- (4) 对于足够小的 Δt ， $\sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t + \Delta t) = O(\Delta t)$ ，表明，在 t 到 $t + \Delta t$ 内出现2个及2个以上事件的概率与出现1个事件的概率相比可以忽略不计。



6.3 独立增量过程

速率或强度

☞ 均值 $E[X(t)] = \underline{\lambda t}$

☞ 均方值与方差

$$E[X^2(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

$$D[X(t)] = \lambda t$$

☞ 相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_2 > t_1 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_1 > t_2 \end{cases}$$



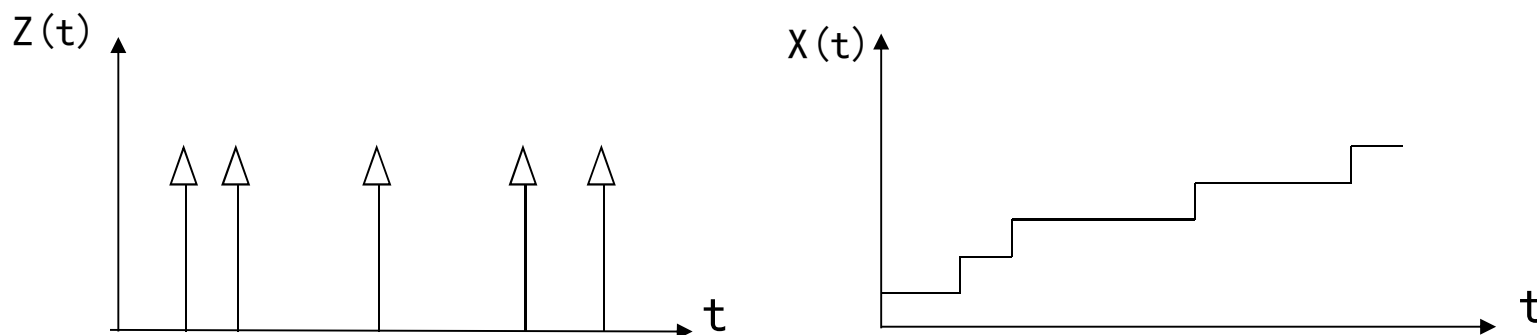
6.3 独立增量过程

泊松脉冲列

设有脉冲随机出现过程 $Z(t)$ ，脉冲出现是相互独立的，即

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i) \quad \longleftrightarrow \quad Z(t) = \frac{d}{dt} X(t)$$

$Z(t)$ 称为泊松脉冲列。



泊松脉冲列及泊松过程



6.3 独立增量过程

泊松脉冲序列统计特性：

均值：
$$E[Z(t)] = \lambda$$

相关函数：
$$R_Z(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2)$$

功率谱密度：
$$G_Z(\omega) = 2\pi\lambda^2 \delta(\omega) + \lambda$$

泊松脉冲列为平稳随机序列



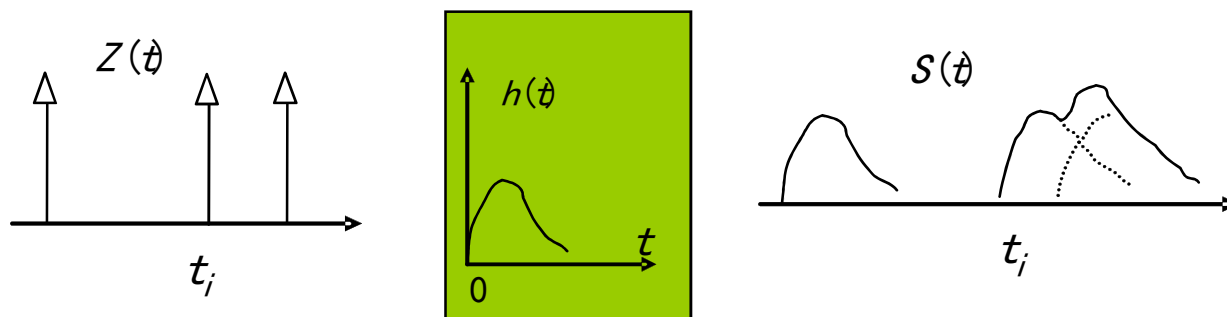
6.3 独立增量过程

散弹噪声

☞ 线性系统输入端为泊松脉冲序列 $Z(t)$ ，则系统的输出为**散弹噪声**，即：

$$S(t) = \sum_i h(t - t_i)$$

$h(t)$ 为线性系统的冲击响应，为确定的函数。



形成散弹噪声的关系图

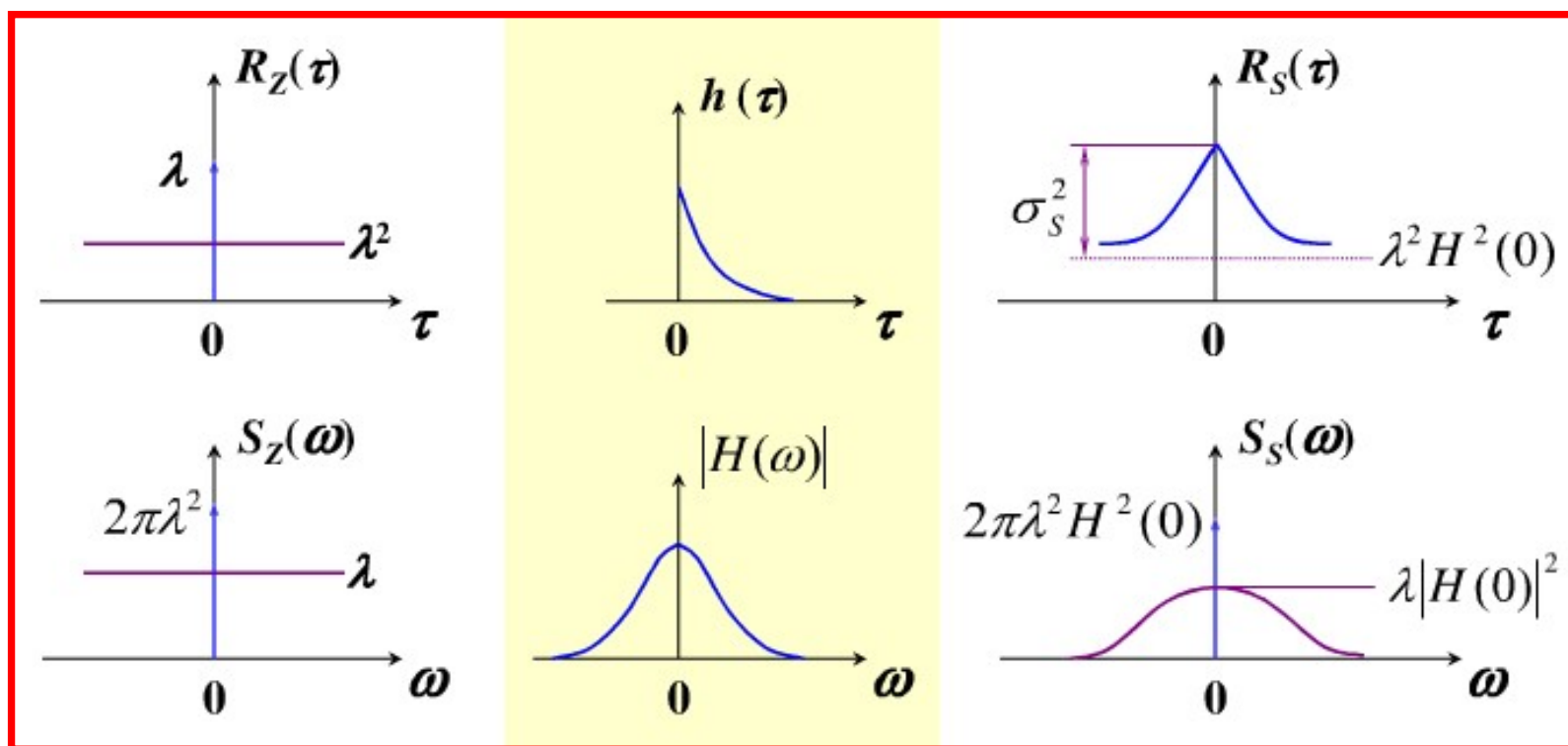


6.3 独立增量过程

$$G_s(\omega) = 2\pi\lambda^2 |H(0)|^2 \delta(\omega) + \lambda |H(\omega)|^2$$

平稳随机过程

$$R_s(\tau) = \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta) h(\beta) d\beta$$





坎贝勒 (Campbell) 定理

散弹噪声的均值和方差分别为：

$$E[S(t)] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

$$\sigma_s^2 = R_s(0) - E^2[S(t)] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

因为有： $E[Z(t)] = \lambda$

$$R_s(\tau) = \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta) h(\beta) d\beta$$

阅读例6.11

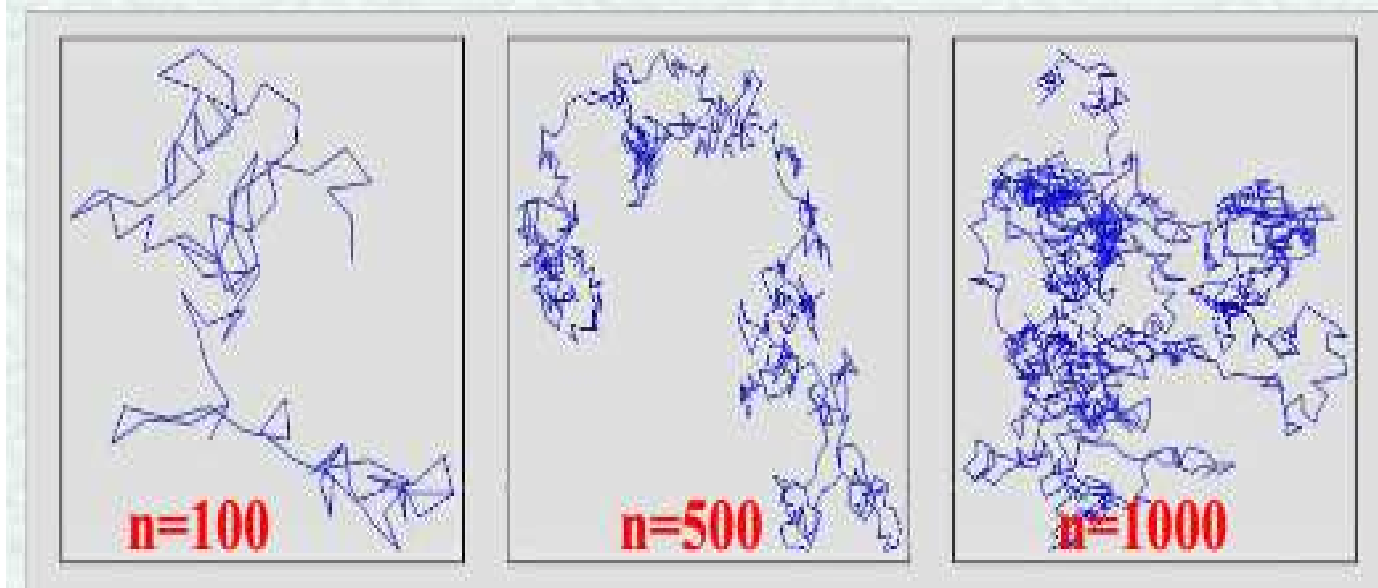


6.3 独立增量过程

3、维纳过程（热噪声）



布朗运动计算机模拟结果



维纳过程是**布朗运动**的数学模型，电子元件在恒温下的**热噪声**也可归结为维纳过程。



6.3 独立增量过程

定义：

一正态过程的起始值和均值皆为零，即：

$$X(0) = E[X(t)] = 0$$

且相关函数为：

$$R_X(t_1, t_2) = \begin{cases} at_2, & t_1 \geq t_2 \\ at_1, & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

则该过程为维纳过程。



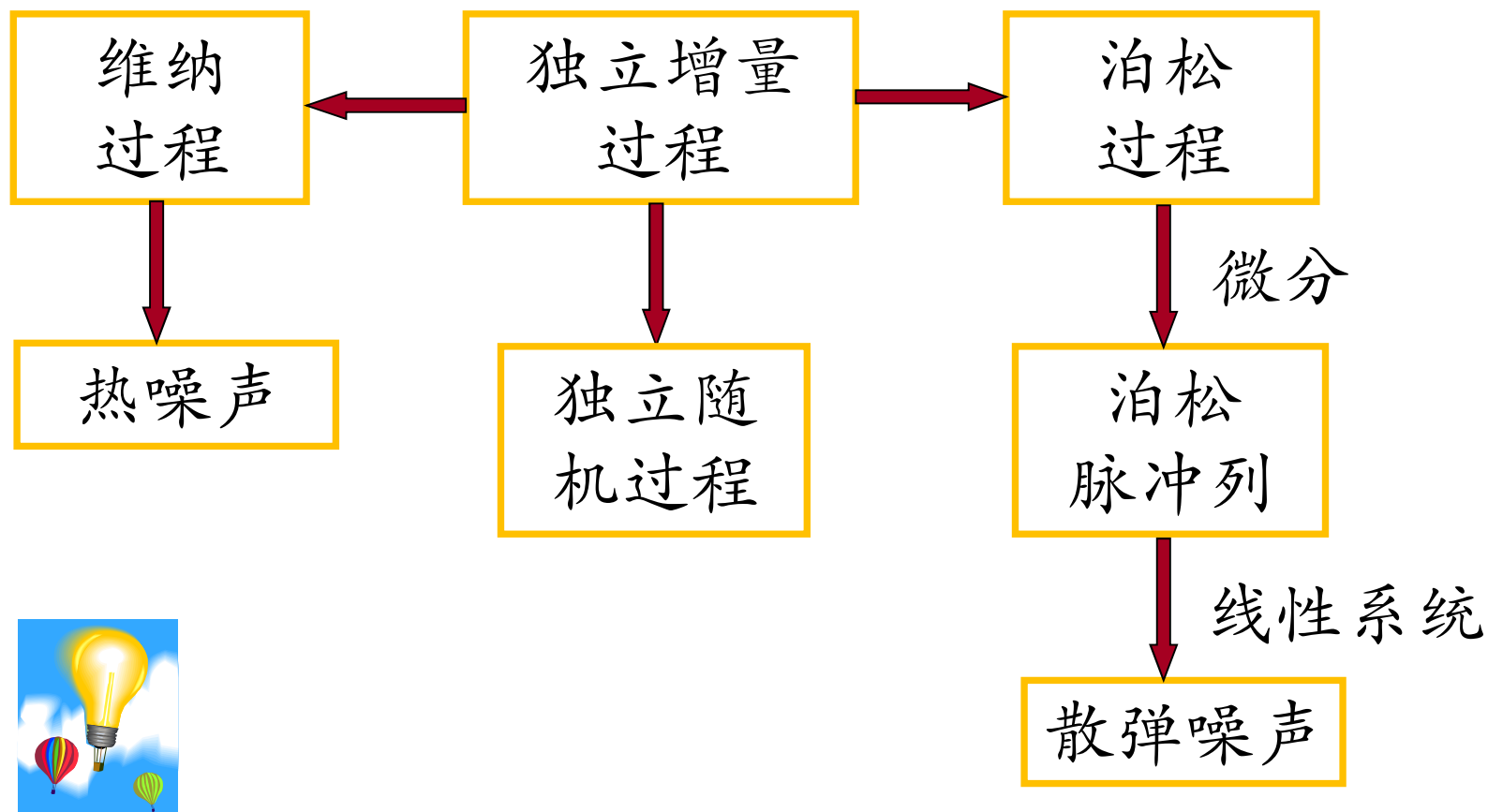
6.3 独立增量过程

性质:

- **马尔可夫性**: 它是一个Markov过程。
- **独立增量性**: 该过程在任一时间区间上变化的概率分布独立于其在任一的其他时间区间上变化的概率。
- **正态增量性**: 它在任何有限时间上的变化服从正态分布, 其方差随时间区间的长度呈线性增加。



6.3 独立增量过程



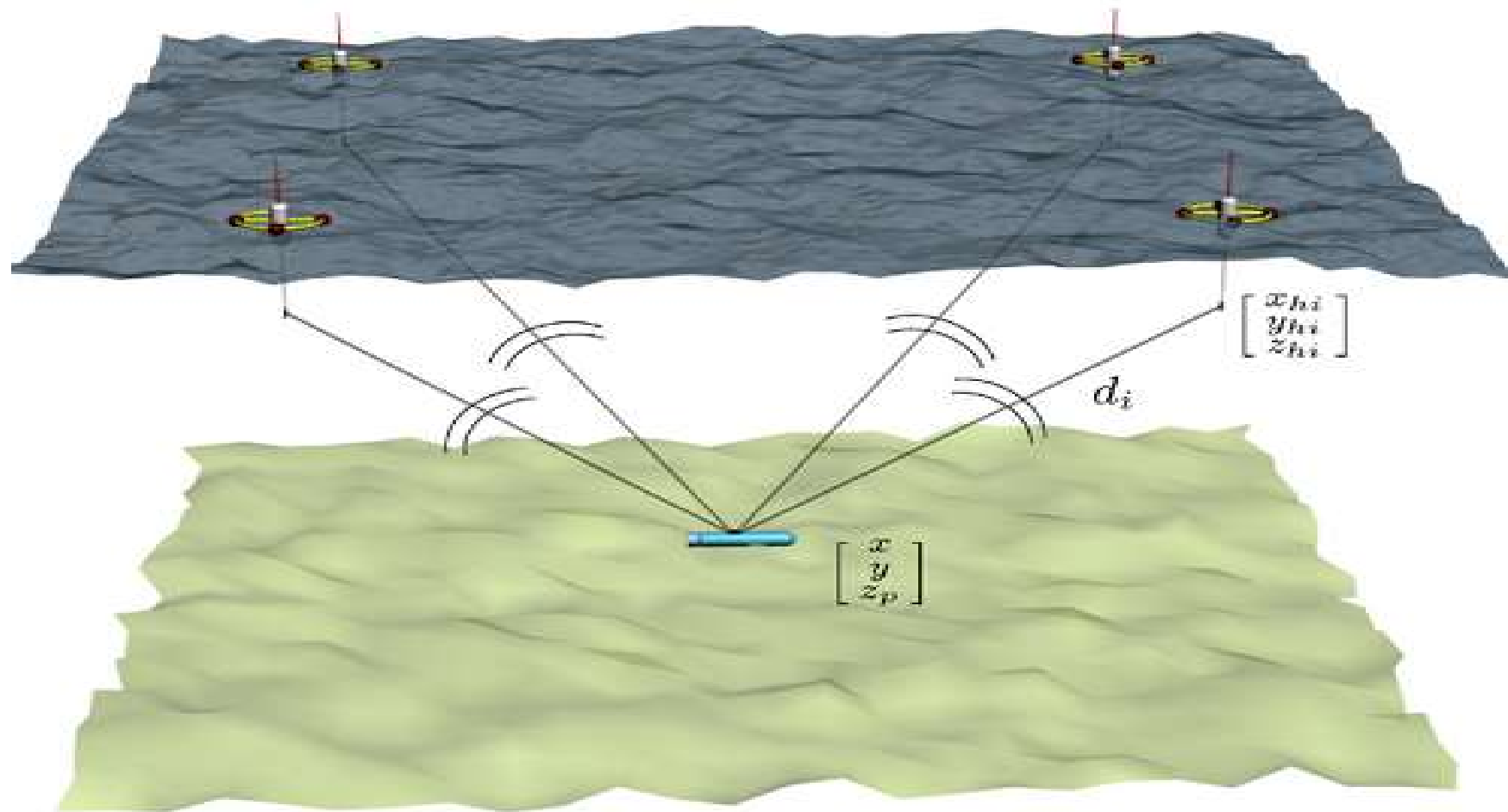


中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

第七章 估计理论

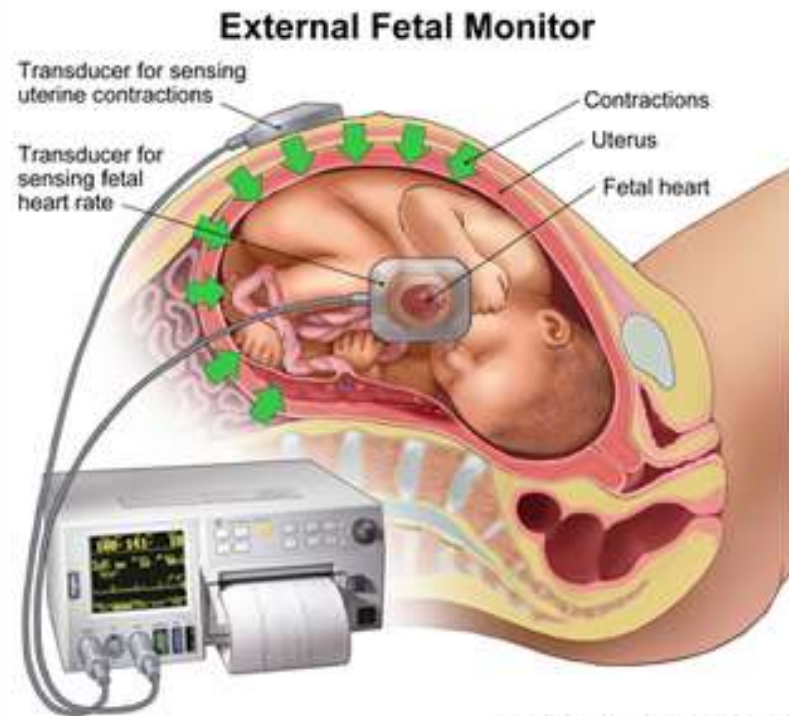
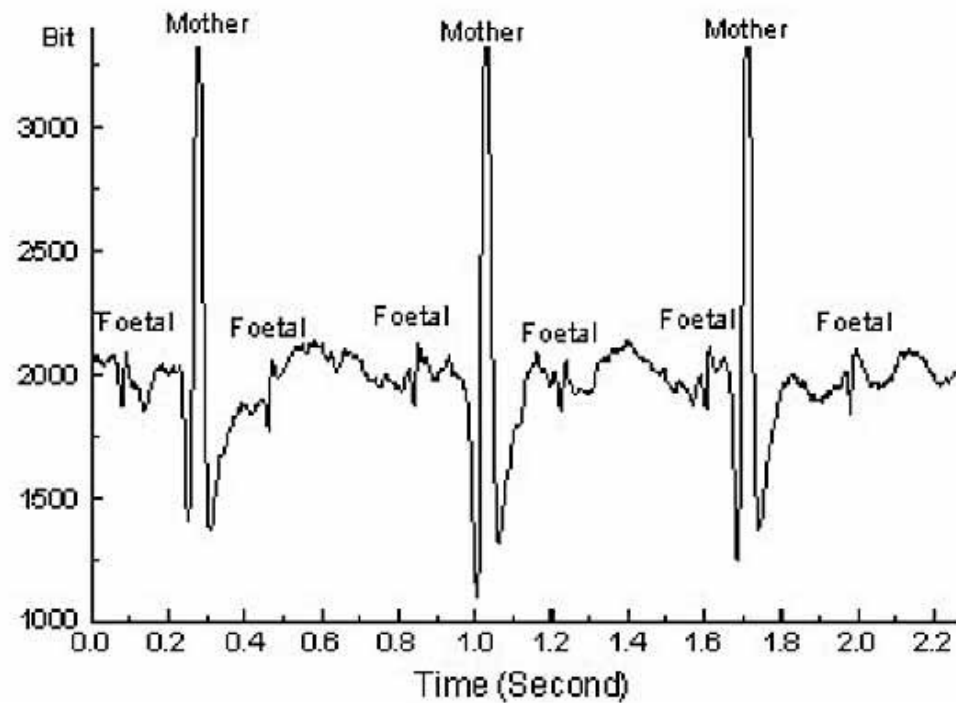


声纳系统：确定目标的位置。





生物医学: 胎儿心率监测





声纳系统----利用声波信号确定船只的位置

图象处理----使用红外检测是否有飞机出现

图象分析----根据照相机的图象估计目标的位置和方向，用机器人抓目标时是必须的

生物医学----估计胎儿的心率

控制----估计汽艇的位置，以便采用正确的导航行为，如Loran系统

地震学----检测地下是否有油田，并根据油层和岩层的密度，根据声反射来估计油田的地下距离。



本章学习目标

- 理解估计的基本概念、准则、及性能评估方法
- 理解各种估计方法的应用条件及其相互关系
- 应用基本的估计方法解决工程中的实际问题
- 应用蒙特卡洛仿真方法评估估计器的性能
- 培养协作学习能力
- 培养技术交流能力



7.1 估计的基本概念

7.2 贝叶斯估计： 已知代价函数及先验概率，使估计付出的平均代价最小

7.3 最大似然估计： 使似然函数最大

7.4 估计量的性能

7.5 线性最小均方估计： 已知估计量的一、二阶矩,使均方误差最小的
线性估计

7.6 最小二乘估计： 观测与估计偏差的平方和最小

7.7 波形估计

7.8 信号处理实例



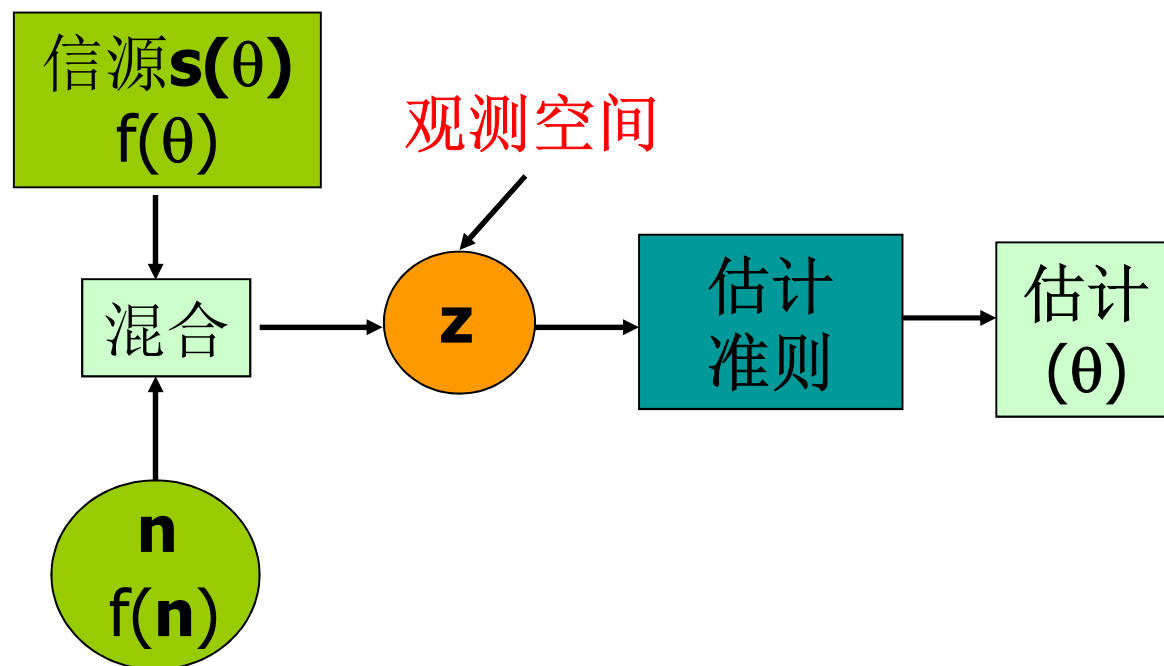
7.1 估计的基本概念

估计问题通常是以下三种情况：

- 根据观测样本直接对观测样本的各类统计特性作出估计；
- 根据观测样本，对观测样本中的信号中的未知的待定参量作出估计，称为信号的参量估计问题，又分为点估计和区间估计；
- 根据观测样本对随时间变化的信号作出波形估计，又称为过程估计。



7.1 估计的基本概念



参量估计的统计推断模型

估计基本要素

- 参数空间
- 概率传递机制
- 观测空间
- 估计准则
- 估计空间



估计问题基本要素

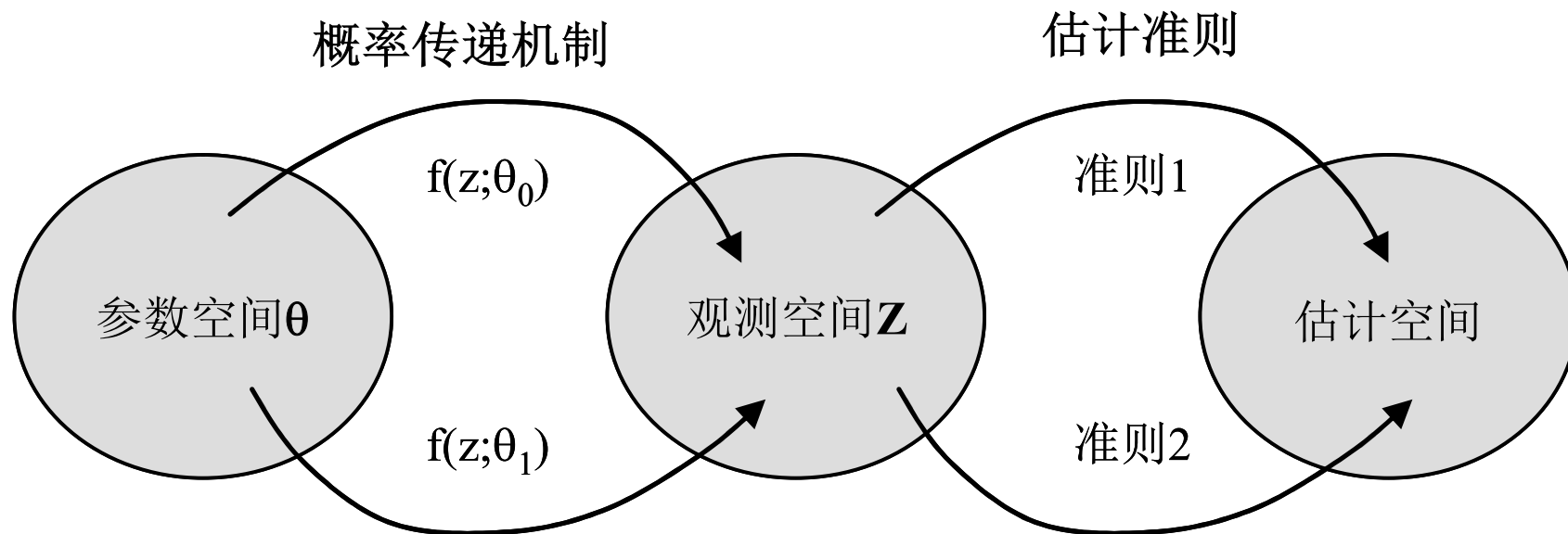


图7.2 参数估计问题的统计模型



7.1 估计的基本概念

信号处理的基本问题：

从含有噪声的观测信号（数据）中提取有用信息。

观测=信号+观测设备的噪声+杂波+干扰

$$z(t) = s(t, a, f_0, \varphi, \tau_0) + n(t) + c(t) + I(t)$$

a, f_0, φ, τ_0 未知常数，采用非贝叶斯估计
随机参量，采用贝叶斯估计

} 参数估计

信号形式未知→波形估计



7.1 估计的基本概念

从数学的观点看，估计就是根据一组观测数据 $z(0), z(1), \dots, z(N-1)$ 最佳地求取未知参数。

$$\hat{\theta} = g(z(0), z(1), \dots, z(N-1))$$

最佳需要采用一些准则。



7.2 贝叶斯估计 (掌握)



频率学派与贝叶斯学派之争

频率学派和贝叶斯学派对世界的认知有本质不同：

- 频率学派认为世界是确定的，有一个本体，这个本体的真值是不变的，我们的目标就是要找到这个真值或真值所在的范围；
- 贝叶斯学派认为世界是不确定的，人们对世界先有一个预判，而后通过观测数据对这个预判做调整，我们的目标是要找到最优的描述这个世界的概率分布。



7.2 贝叶斯估计

在对事物建模时，用 θ 表示模型的参数，**解决问题的本质就是求 θ** 。

(1) 频率学派：存在唯一真值 θ 。抛一枚硬币100次，有20次正面朝上，要估计抛硬币正面朝上的bias $P(\text{head}) = \theta$ 。在频率学派来看， $\theta = 20/100 = 0.2$ ，很直观。当数据量趋于无穷时，这种方法能给出精准的估计，然而缺乏数据时则可能产生严重的偏差。

(2) 贝叶斯学派： θ 是一个随机变量，符合一定的概率分布。在贝叶斯学派里有两大输入和一大输出，输入是先验 (prior) 和似然 (likelihood)，输出是后验 (posterior)。



7.2 贝叶斯估计

贝叶斯估计的基础是贝叶斯公式：
$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta) \times P(\theta)}{P(X)}$$

对一枚均匀硬币抛5次得到5次正面，如果先验认为大概率这个硬币是均匀的（抛n次硬币，出现x次正面的后验概率分布为Beta分布），那么 $P(\theta|X)$ 是一个distribution，最大值会介于0.5-1之间，而不是武断认为 $\theta = 1$ 。这里有两点值得注意的地方：

- 随着数据量的增加，参数分布会越来越向数据靠拢，先验的影响力会越来越小；
- 如果先验是uniform distribution，则贝叶斯方法等价于频率方法。



1、贝叶斯估计

在已知代价函数及先验概率基础上，使估计付出的平均代价最小。

设观测值为 z ，待估参量为 θ 。

估计误差： $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}(z)$

设代价函数： $C(\tilde{\theta})$

贝叶斯估计准则： $\hat{\theta}(z) \leftarrow \min_{\hat{\theta}} E[C(\tilde{\theta})]$



7.2 贝叶斯估计

统计平均代价：

$$\begin{aligned} E[C(\tilde{\theta})] &= E[C(\theta, \hat{\theta}(z))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta, z) d\theta dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta | z) d\theta \right] f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}(\theta | z) f(z) dz \end{aligned}$$

条件平均代价

等价于使下式最小：

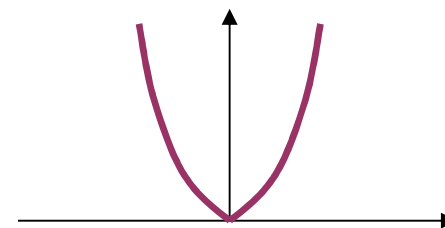
$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta | z) d\theta = \text{最小}$$



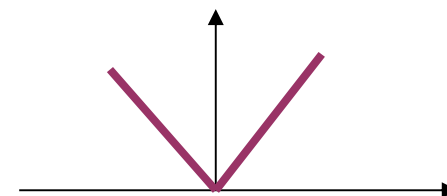
7.2 贝叶斯估计

2、典型代价函数及贝叶斯估计

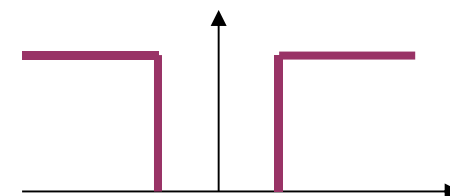
平方代价: $C(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$



绝对值代价: $C(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$



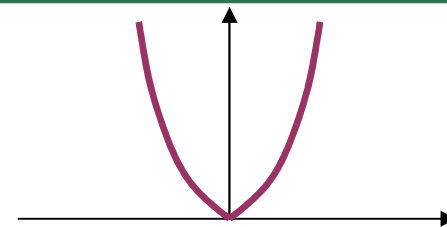
均匀代价: $C(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta - \hat{\theta}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta - \hat{\theta}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}$





7.2 贝叶斯估计

平方代价: $C(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$



👉 最小均方估计(Minimal Square)

$$\bar{C}(\theta | z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 f(\theta | z) d\theta = \text{最小}$$

对 $\hat{\theta}$ 求导数, 并使其等于零:

$$\frac{d\bar{C}(\theta | z)}{d\hat{\theta}} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | z) d\theta + 2\hat{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta | z) d\theta$$

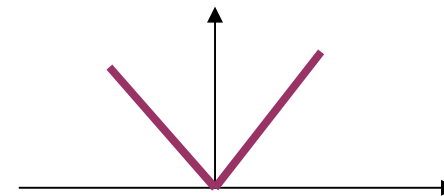
得: $\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | z) d\theta$

即 $\hat{\theta} = E[\theta | z]$, 也称为条件均值估计。



7.2 贝叶斯估计

绝对值代价: $C(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$



👉 条件中位数估计 (Median)

$$\begin{aligned}\bar{C}(\theta | z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| f(\theta | z) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta | z) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) f(\theta | z) d\theta\end{aligned}$$

对 $\hat{\theta}$ 求导数, 并使其等于零, 得:

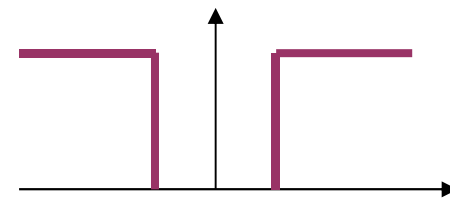
$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} f(\theta | z) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} f(\theta | z) d\theta$$

可见, 估计为条件概率密度 $f(\theta | z)$ 的中位数。



7.2 贝叶斯估计

均匀代价:
$$C(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta - \hat{\theta}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta - \hat{\theta}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$



👉 最大后验概率估计 (maximal posterior probability)

$$\bar{C}(\theta | z) = 1 - \int_{\hat{\theta}_{map} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}_{map} + \frac{\Delta}{2}} f(\theta | z) d\theta$$

应当选择 $\hat{\theta}$, 使它处在后验概率 $f(\theta | z)$ 的最大处。

最大后验概率方程:

$$\left. \frac{\partial f(\theta | z)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0 \text{ 或 } \left. \frac{\partial \ln f(\theta | z)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0$$



7.2 贝叶斯估计

由关系式:
$$f(\theta | z) = \frac{f(z | \theta) f(\theta)}{f(z)}$$

两边取对数并对 θ 求导, 得最大后验概率方程的另一形式:

$$\left[\frac{\partial \ln f(z | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln f(\theta)}{\partial \theta} \right] \bigg|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0$$



7.2 贝叶斯估计

例7.2 设观测为 $z = A + v$ ，其中被估计量 A 在 $[-A_0, A_0]$ 上均匀分布，测量噪声 $v \sim N(0, \sigma_v^2)$ ，求 A 的最大后验概率估计和最小均方估计。

解： 最大后验概率估计

$$f(A | z) = \frac{f(z | A)f(A)}{f(z)}$$

$$f(z | A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left\{-\frac{(z - A)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \quad f(A) = \begin{cases} \frac{1}{2A_0} & -A_0 \leq A \leq A_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



7.2 贝叶斯估计

当 $-A_0 \leq z \leq A_0$ ， $f(A|z)$ 的最大值出现在 $A=z$ 处，所以，
 $\hat{A}_{map} = z$ ，当 $z > A_0$ 时， $f(A|z)$ 的最大值出现在 $A=A_0$ 处，
 $\hat{A}_{map} = A_0$ ，当 $z < -A_0$ 时， $f(\theta|z)$ 的最大值出现在 $A=-A_0$ 处，
 $\hat{A}_{map} = -A_0$ ，即

$$\hat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0 & z < -A_0 \\ z & -A_0 \leq z \leq A_0 \\ A_0 & z > A_0 \end{cases}$$

再看最小均方估计：



7.2 贝叶斯估计

$$\begin{aligned}\hat{A}_{ms} &= E(A | z) = \int_{-\infty}^{\infty} A f(A | z) dA = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{f(z | A) f(A)}{f(z)} dA \\&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A f(z | A) f(A) dA}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z | A) f(A) dA} = \frac{\int_{-A_0}^{A_0} \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{(z-A)^2}{2\sigma_v^2}\right] \cdot \frac{1}{2A_0} dA}{\int_{-A_0}^{A_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{(z-A)^2}{2\sigma_v^2}\right] \cdot \frac{1}{2A_0} dA} \\&= \frac{\int_{z-A_0}^{z+A_0} (z-u) \cdot \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du}{\int_{z-A_0}^{z+A_0} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du}\end{aligned}$$



7.2 贝叶斯估计

$$\left(= Z - \frac{2\sigma_v^2 \int_{(x-a)/\sqrt{2}}^{(x+a)/\sqrt{2}} u \exp[-u^2] du}{\sigma_v \int_{x-a}^{x+a} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du} \right)$$

$$= Z - \frac{2\sigma_v^2 \int_{(x-a)/\sqrt{2}}^{(x+a)/\sqrt{2}} s \exp[-s^2] ds}{\sigma_v \int_{x-a}^{x+a} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt}$$

$$s = \frac{u}{\sqrt{2}\sigma_v}$$

$$t = \frac{u}{\sigma_v}$$

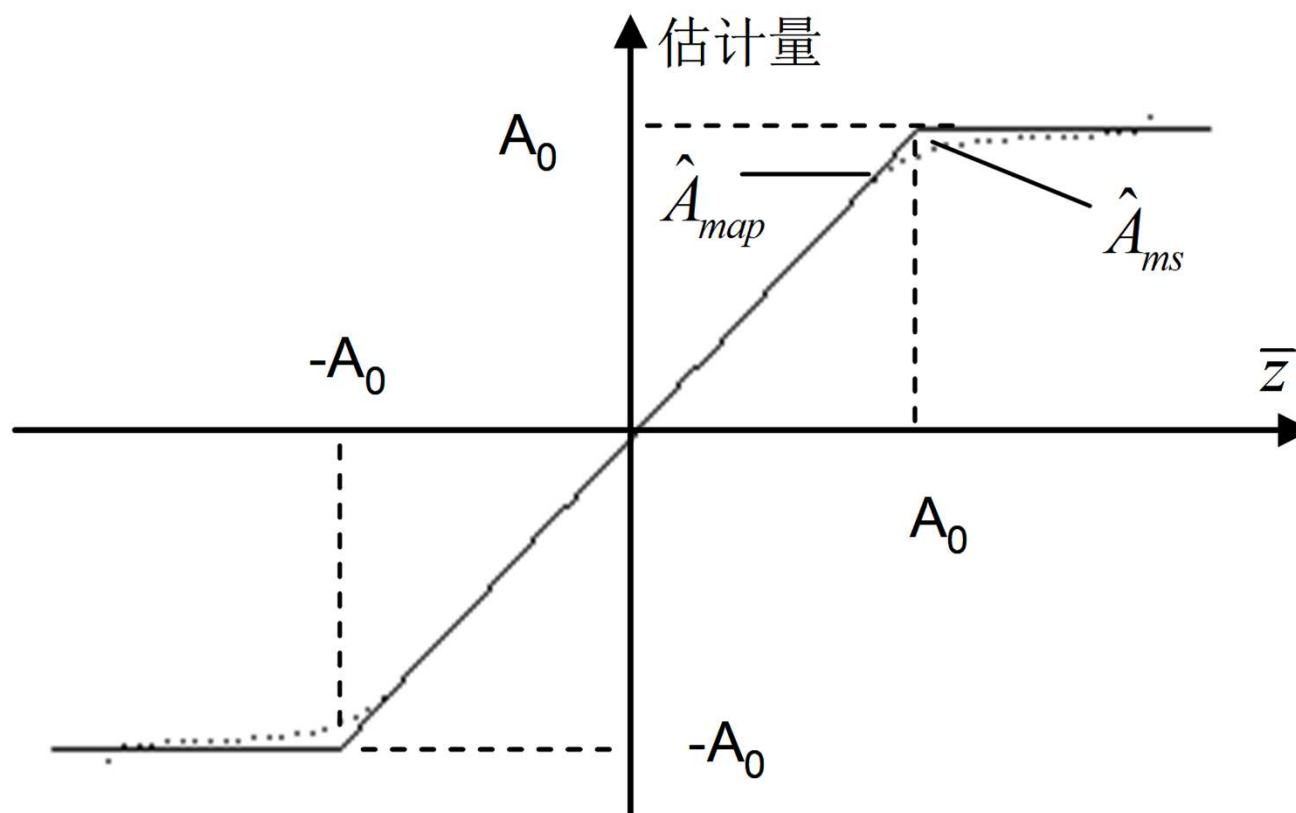
$$= Z - \frac{\sigma_v \left\{ \exp[-(x-a)^2 / 2] - \exp[-(x+a)^2 / 2] \right\}}{\sqrt{2\pi} [Q(x-a) - Q(x+a)]}$$



7.2 贝叶斯估计

$Q(\cdot)$ 为标准正态概率密度函数的概率右尾函数,

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2 / 2) du$$





7.2 贝叶斯估计

例7.3 高斯白噪声中的直流电平估计-高斯先验分布。设有N次独立观测 $z_i = A + v_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ，其中 $v \sim N(0, \sigma^2)$ ， $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ ，求A的估计。

【阅读P204】