复 习

（一）课程概述

（二）随机变量基础

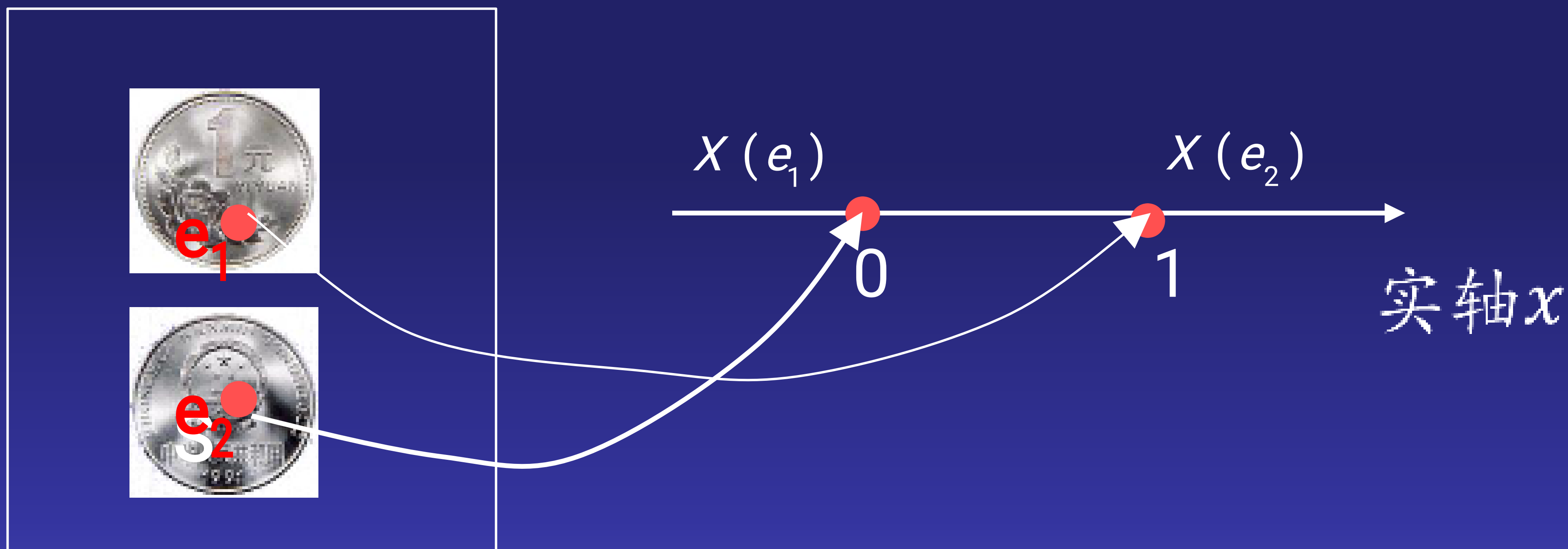
1. 概率的基本术语

厘清基本事件（不可再分）的内涵

2. 随机变量的定义

为什么引入随机变量X（从古典概率到现代概率论 ）

事 ⟶ 数，从样本空间到实数的函数


e1
e2
S
X(e1)
X(e2)
0
1
实轴x

3. 随机变量的分布

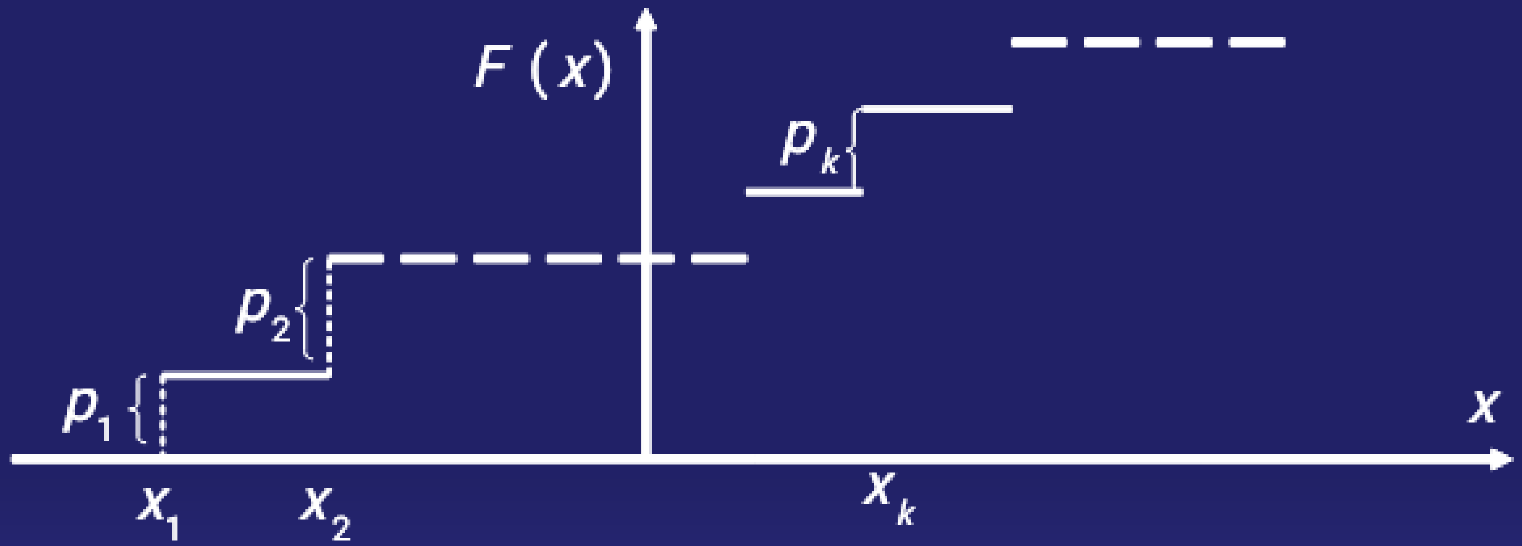
定义 $$F(x) = P(X \le x)$$

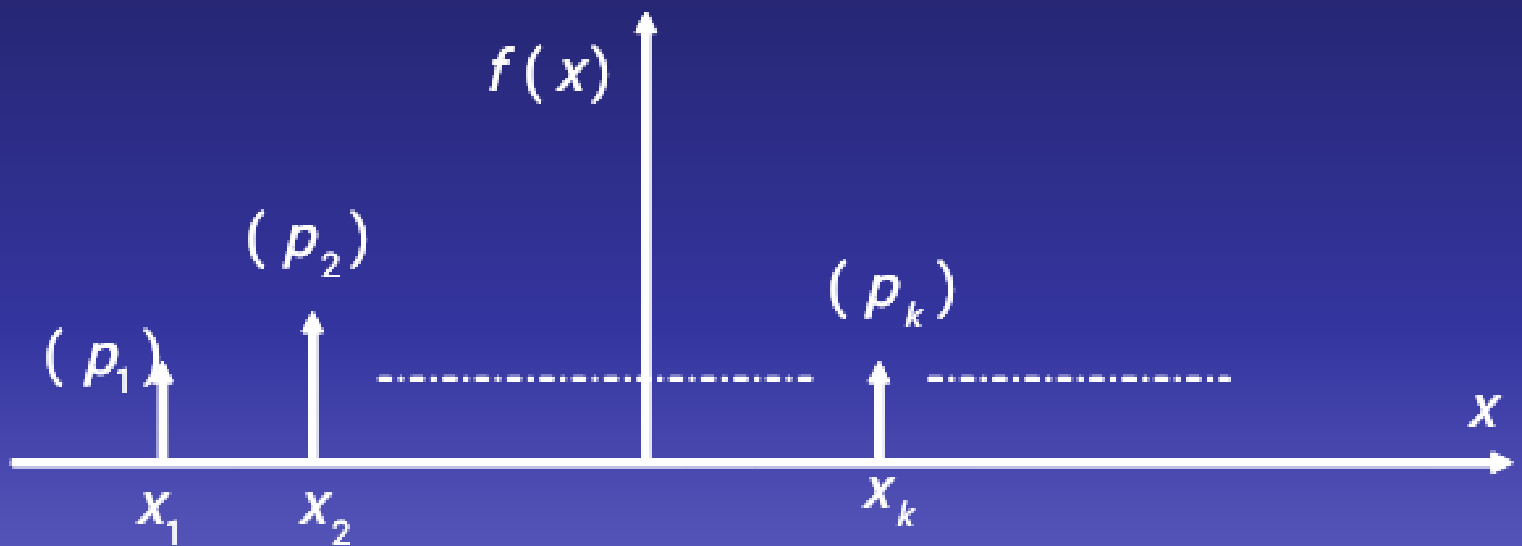
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

理解F（x）：从负无穷大直到x，所有概率质量函数的求和，或者概率密度函数的积分

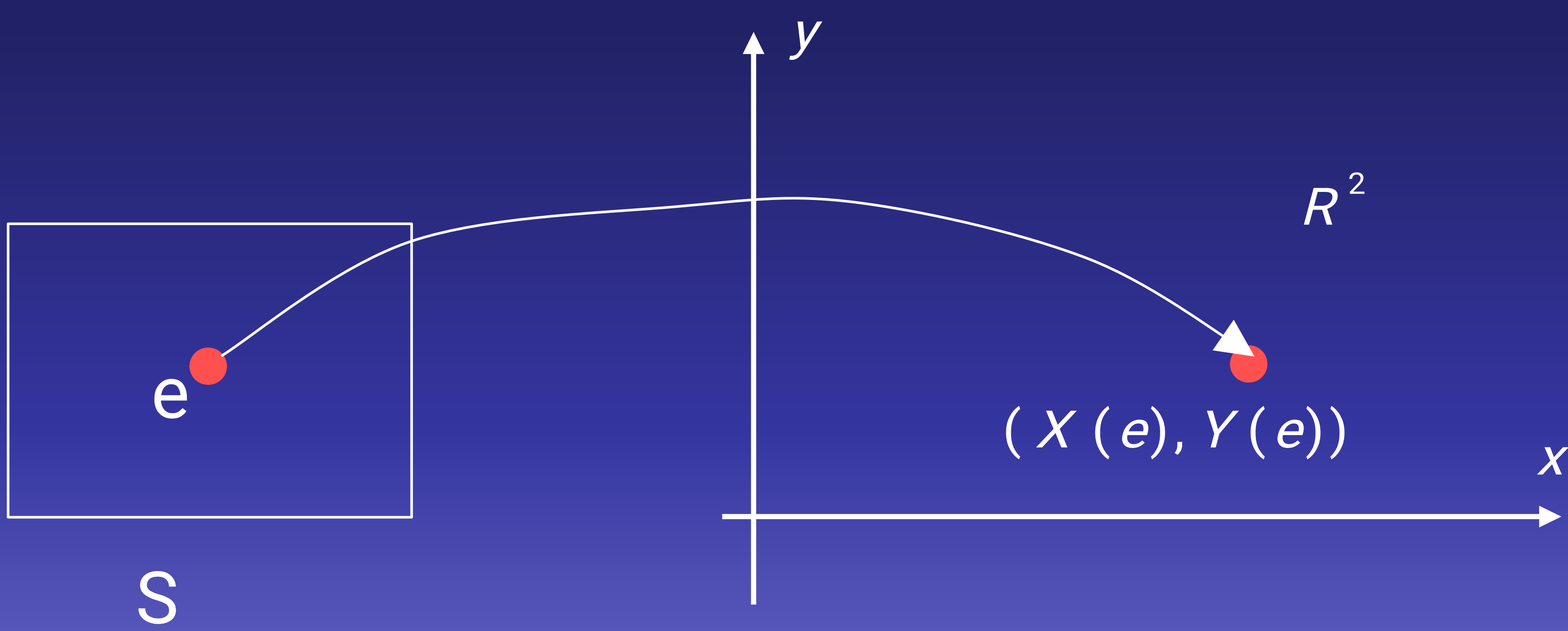

F (x)
p_k
p_2
p_1
x
x_1
x_2
x_k


f (x)
(p_2)
(p_k)
(p_1)
x
x_1
x_2
x_k

1.4 多维随机变量及其分布

(1) 二维随机变量定义

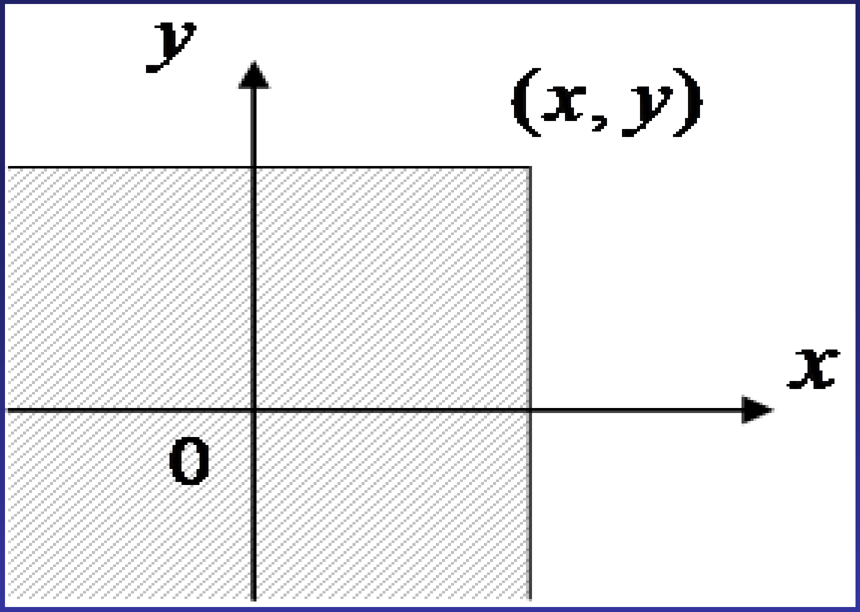
设随机试验E的样本空间S={e}, X=X(e)和Y=Y(e)是定义在样本空间S上的两个随机变量,由X和Y构成的矢量（X，Y）称为二维随机变量。



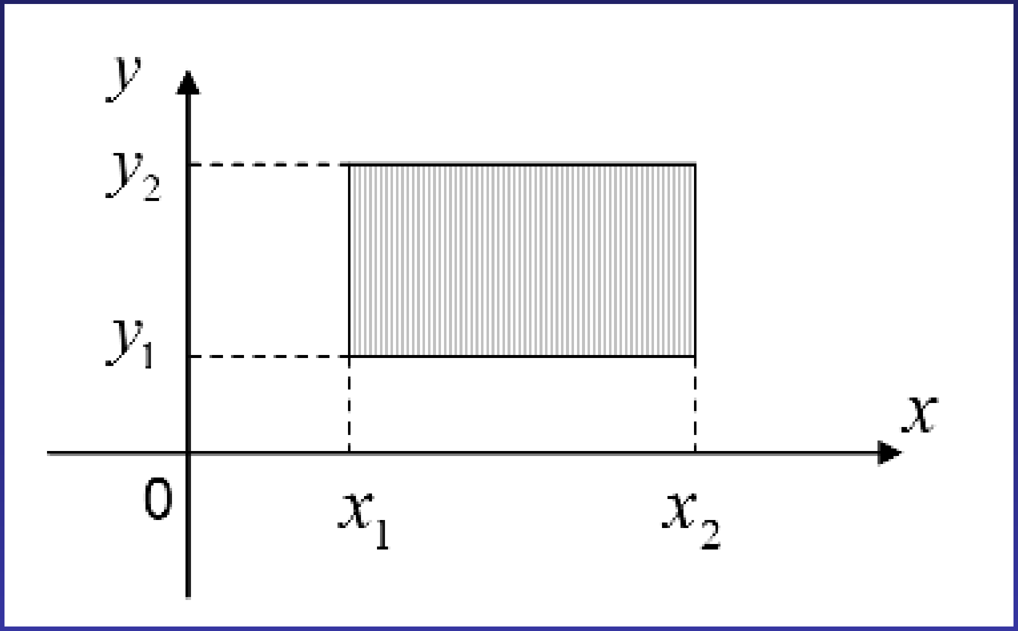
$$S=\{e\} \rightarrow (X(e), Y(e)) = (X, Y)$$

(2) 二维分布函数和概率密度

定义： $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$



二维分布函数图解



二维随机变量落在某一区域的概率

其他性质见教材

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

- 二维概率密度 $$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

主要性质：

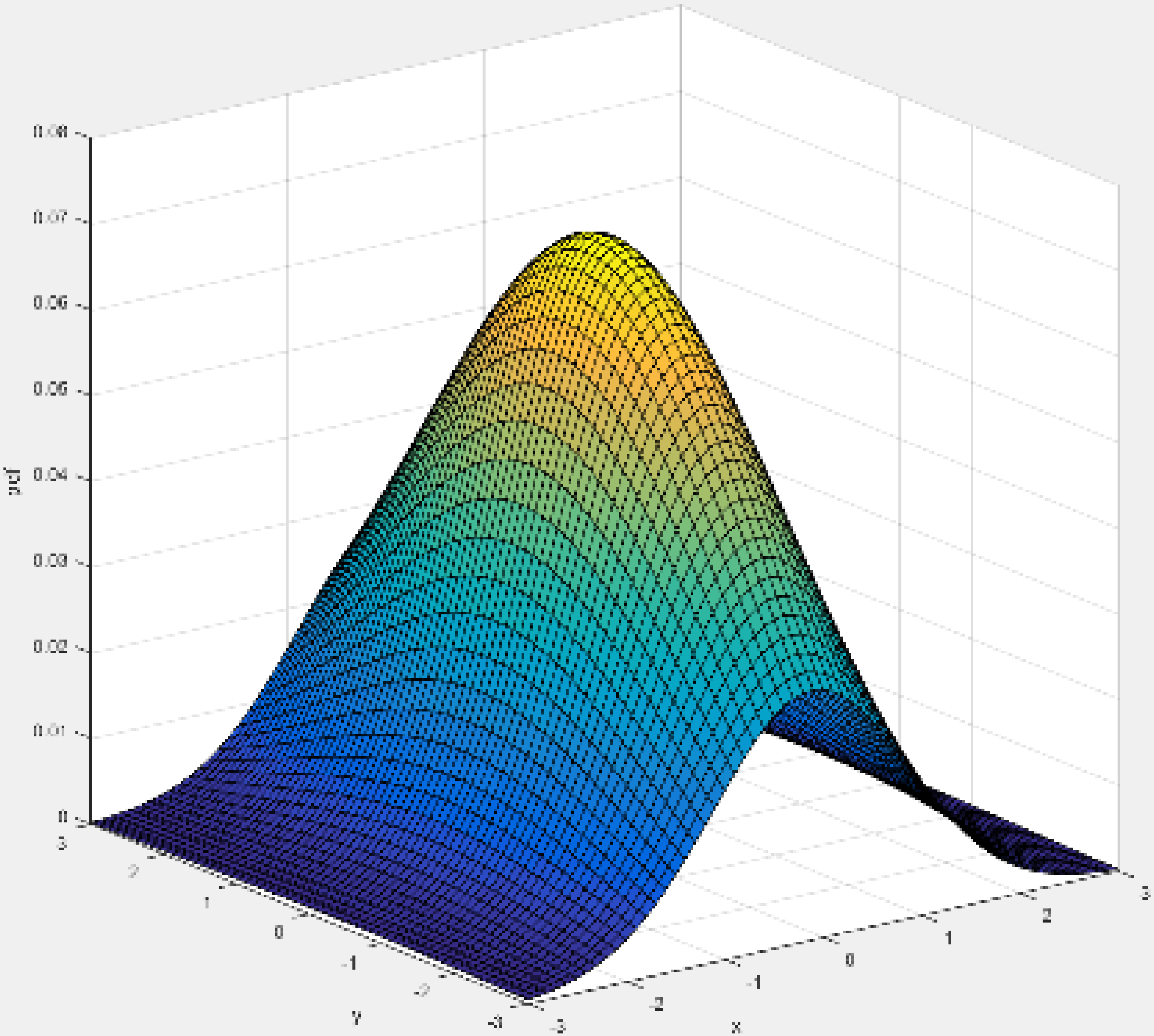
(1) $f(x, y) \geq 0$， $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \geq 0$

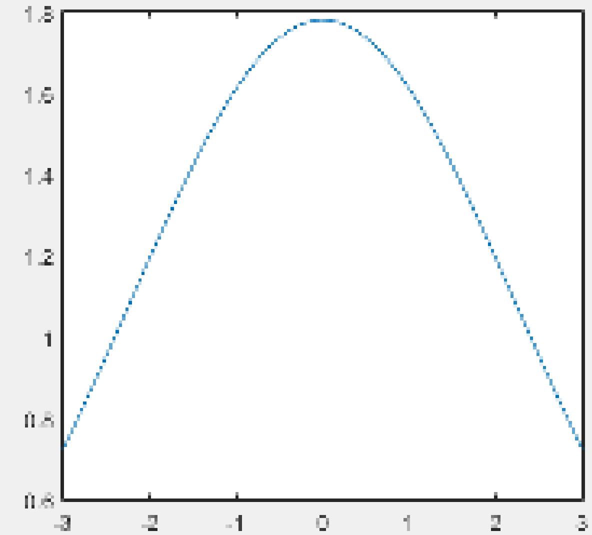
(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = 1$， $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

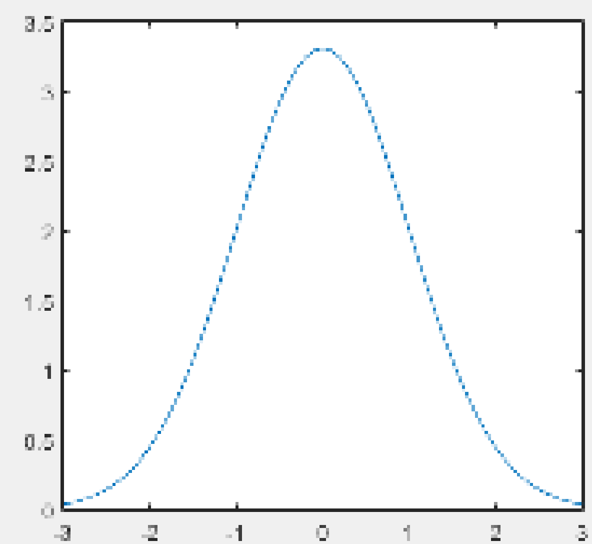
(3) $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dxdy$

(4) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$

由二维概率密度可以求出边缘概率密度


pdf
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
x
y
-3
-2
-1
0
1
2
3


0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
-3
-2
-1
0
1
2
3


0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
-3
-2
-1
0
1
2
3

(3) 条件分布:

设X为随机变量，A为随机事件，定义下式为随机变量X在事件A发生时的**条件分布函数**:

$$F(x \mid A) = P\{X \le x \mid A\} = \frac{P(X \le x, A)}{P(A)}$$

相应的**条件概率密度**为:

$$f(x \mid A) = \frac{dF(x \mid A)}{dx}$$

进一步的，设有二维随机变量（X，Y），令A={X=x}

条件分布函数 $F_{Y|X}(y \mid x) = P\{Y \le y \mid X = x\}$

条件概率密度 $f_{Y|X}(y / x) = \dfrac{\partial F_{Y|X}(y \mid x)}{\partial y}$

二维概率密度与条件概率密度之间（联想对比P(AB) ）

$$f(x, y) = f_{X|Y}(x \mid y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(y \mid x)\, f_X(x)$$

如果 $f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$，称随机变量$X$、$Y$独立

(4) 概率密度的全概率公式

概率的贝叶斯公式和全概率公式（回顾）

设S为随机试验E的样本空间$A_1,\cdots A_n$为S的一个划分, 即

$$A_i \cap A_k = \varnothing \quad i \neq k \quad \varnothing\text{为空集} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \qquad \text{全概率公式}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

贝叶斯公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$$ **全概率公式**

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f(x\mid A_i)P(A_i)$$ **概率密度的全概率公式**

$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid X=x)f(x)dx$$

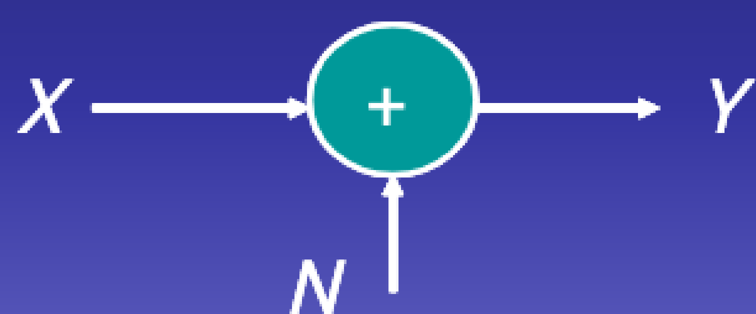
贝叶斯公式

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

$$f(x \mid A) = \frac{P(A \mid X = x)\, f(x)}{P(A)} = \frac{P(A \mid X = x)\, f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X = x)\, f(x)\, dx}$$

例题：具有离散输入和连续输出的通信信道

通信信道的输入X为+1伏或-1伏的电压，且取两值的概率相等，信道的输出是输入加信道噪声N，噪声N在(-2,2)伏之间均匀分布，求联合概率分布列$P\{X=+1, Y\le 0\}$



$$P\{X=+1, Y\le y\} = P\{Y\le y \mid X=+1\}\overbrace{P(X=+1)}^{1/2}$$

当输入 X=1时, 输出 Y 均匀分布于区间 $(-1, 3)$

所以

$$P\{Y\le y \mid X=1\} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{y+1}{4}$$

$$P\{X=+1, Y\le 0\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

第二讲内容

1.5 随机变量的数字特征

均值、方差、协方差/相关系数、矩

1.6 随机变量的函数（重点）

随机变量函数的概率密度

多个随机变量的函数

随机变量函数的数字特征

1.7 多维正态随机变量

1.8 复随机变量及其统计特性

作业：1.4

课后作业：1.6，1.9　1.10

学习目标

- 理解均值、方差的定义及物理意义；
- 理解协方差/相关系数的定义，理解不相关的概念；
- 区分不相关、独立的概念；
- 掌握随机变量函数统计特性的计算方法（重点）；
- 了解多维正态随机变量和复随机变量（后续应用）

1.5 随机变量的数字特征

1. 均值（Mean, Expectation)

均值的定义

离散型随机变量：$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}x_i P(X=x_i)$$

连续型随机变量：$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

算术平均： 所有可能取值等概率加权

统计平均值： 所有可能取值按概率加权

均值的性质

（1） $E(cX)=cE(X)$ ！E( ) 可以看做线性算子

（2） $E(X_1+X_2+\cdots X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots E(X_n)$

（3）如果 X 和 Y 统计独立，($f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$)

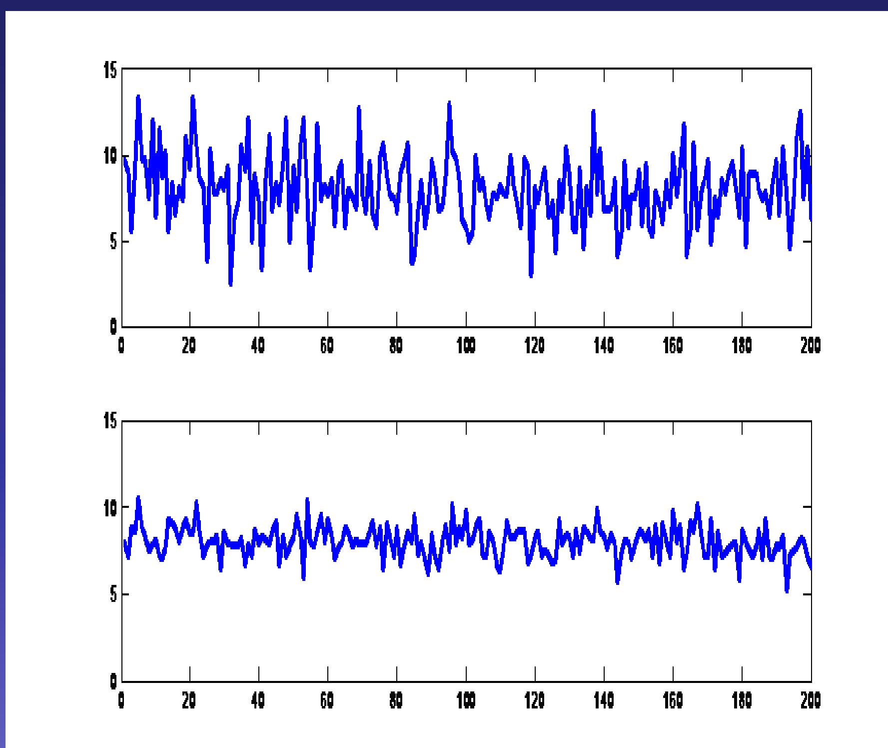
则 $E(XY)=E(X)E(Y)$ 反之不成立

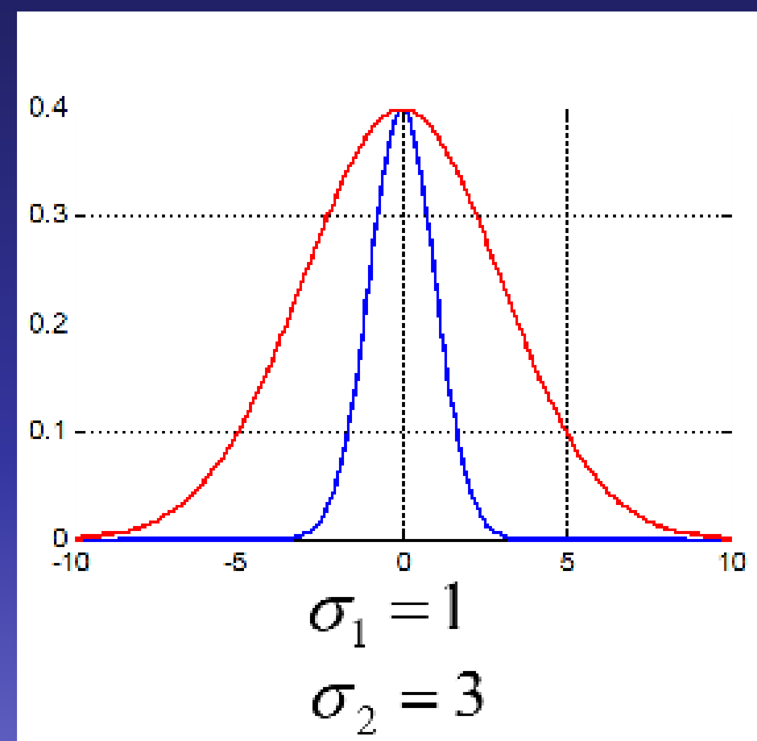
如果E(XY)=0，称 X 和 Y 相互正交。

2. 方差(Variance)

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \qquad D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

方差反映了随机变量X的取值偏离其均值的偏离程度或分散程度，D(X)越大，则X的取值越分散。





方差的性质

$$D(c) = 0$$

$$D(cX) = c^2 D(X)$$

如果$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立,

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)$$

注意：方差是非线性运算

$$D(cX)=c^2D(X)$$

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)\neq D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$$

3. 协方差和相关系数

(Covariance and Correlation Coefficient)

协方差: $$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

相关系数: $$r_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\qquad |r_{XY}|\le 1$$

(1) X 和 Y 相互独立，则 $r_{XY}=0$（独立则不相关）

(2) $|r_{XY}|=1$（X 和 Y 完全相关）的充要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

相关系数的解释:（不能仅仅靠字面意思理解相关）

当用一个随机变量的值预测另一个随机变量的值的时候,相关系数提供了线性预测好坏的度量。理解为（线性）相关系数。

$$Y = aX + b \qquad |r_{XY}| = 1$$

1 表示X 和Y高度的线性相关。

+1 意味着$a>0$，即正相关;

-1 意味着$a<0$，即负相关。

需要注意以下几个概念的区别

统计独立： $f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

不相关： $Cov(X, Y) = 0$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

正交： $E(XY) = 0$

例:

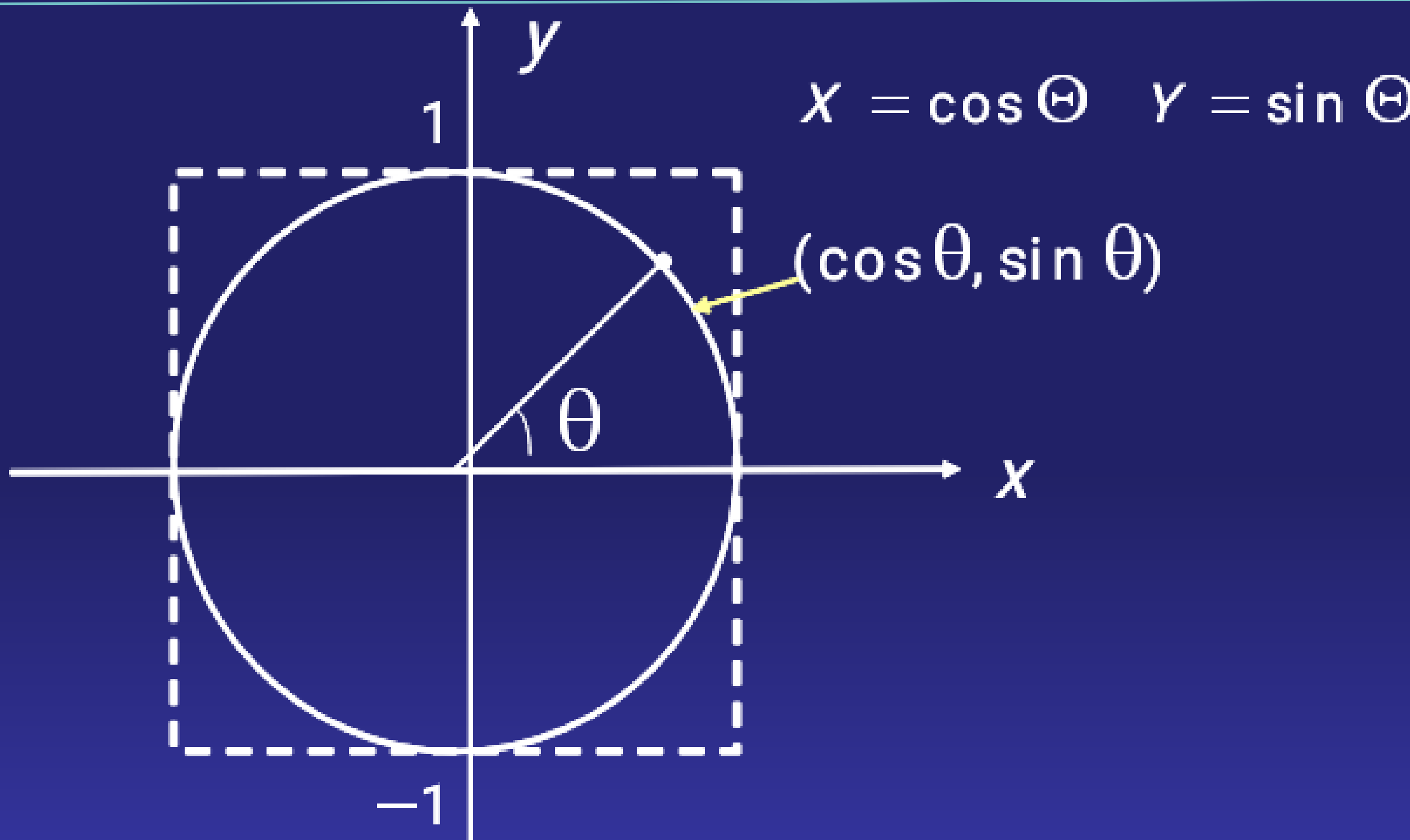
假定 Θ 为 $(0,2\pi)$ 均匀分布的随机变量。

令 $X=\cos\Theta$，$Y=\sin\Theta$，X、Y 统计独立吗？

解：$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$ $\qquad E(Y)=0$

$$E(XY)=E(\cos\Theta\sin\Theta)=\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

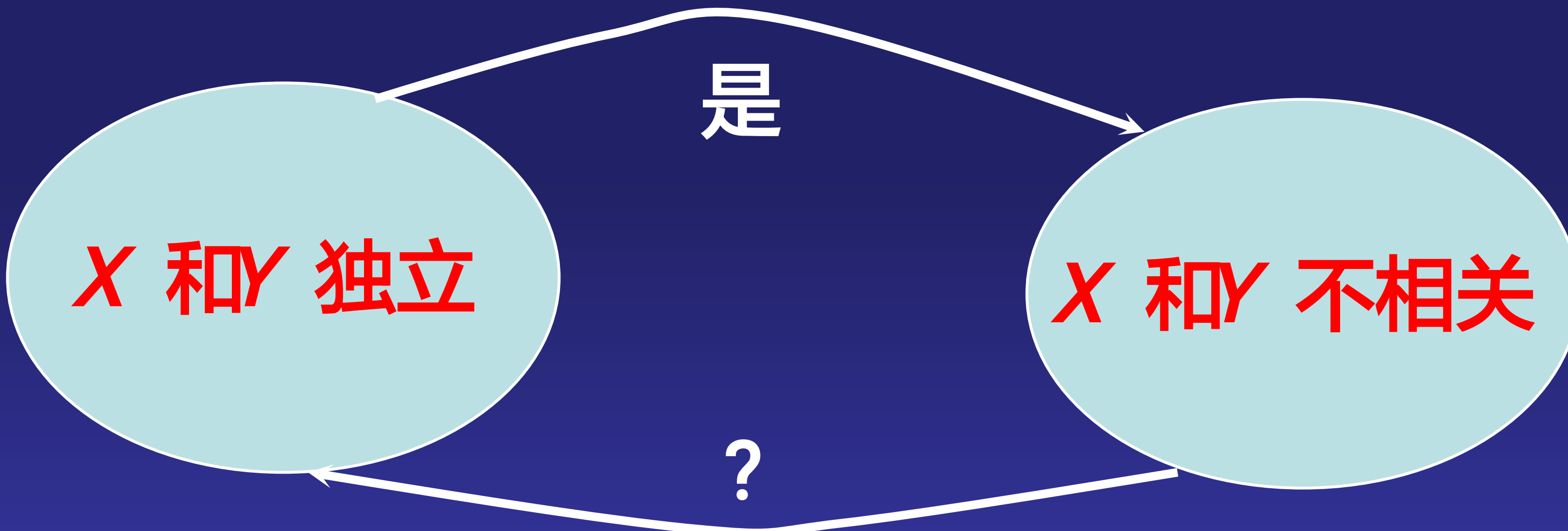
所以，X 和 Y 是不相关的，但二者并非统计独立（下面可以证明这一点）。



如果X与Y统计独立，则(X,Y)的值应落在正方体内，但实际上(X,Y)的值只能落在圆上，说明统计独立的假定是错误的。

统计独立意味着零协方差（不相关），

但不相关并不意味着统计独立，只有特殊情况



4. 协方差矩阵（Covariance Matrix）

多维随机变量通常用协方差矩阵来描述随机变量之间的相关性。设有n维随机变量

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$k_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

协方差矩阵是对称（共轭对称）的；

如果变量之间是不相关的，则K是一个对角阵。

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

5、矩(Moment)

- K阶原点矩：　$E[X^k]$
- K阶中心矩：　$E[(X-m_X)^k]$
- K＋L阶混合矩：　$E[X^k Y^l]$
- K＋L阶中心混合矩：　$E[(X-m_X)^k (Y-m_Y)^l]$

6. 某些重要随机变量的数字特征

(0,1)分布

泊松分布

均匀分布

……

数字特征的具体计算过程请参见教材

数字特征小结

- 均值　反映随机变量取值的统计平均值
- 方差　随机变量取值偏离均值的偏离程度
- 相关系数，X与Y线性程度的度量

　　注意：线性不相关并不意味他们没有关系;

　　注意不相关与独立的差别。

- 协方差矩阵

　　如果每个随机变量不相关，则协方差矩阵为对角阵

- 常见随机变量的数字特征

1.6 随机变量函数（即，随机变量的函数）

背景：工程中的信号处理问题

输入信号 → 信号处理系统 → 输出信号

常用系统：检波器

平方律检波器 $$Y(t) = X^2(t)$$

全波检波器 $$Z(t) = \left|X(t)\right|$$

半波检波器 $$W(t) = \left[X(t) + \left|X(t)\right|\right]/2 = \begin{cases} X(t), & X(t) \ge 0 \\ 0, & X(t) < 0 \end{cases}$$

工程中的信号处理问题

这些系统可以描述为 $Y = g(X)$

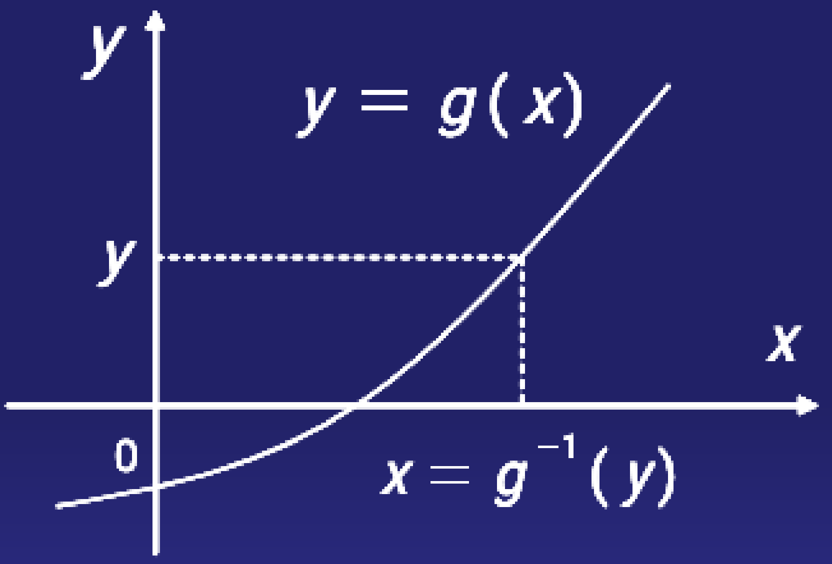
随机变量函数g( )，不能简称为随机函数，因为函数是确定的，输入输出是随机变量。

核心问题：如何根据输入X的统计特性来计算输出Y的统计特性？

1. 随机变量函数概率密度的确定

$$Y = g(X)$$

假定g( )为单调增函数

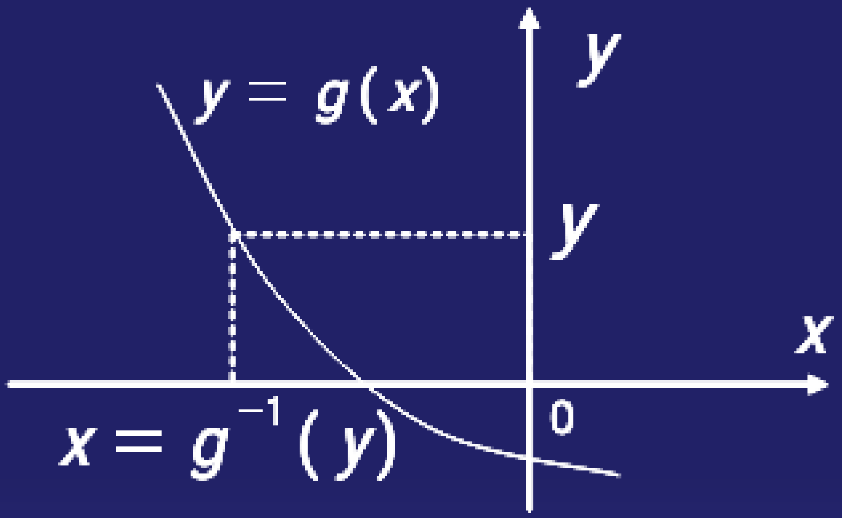


$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$$

关键!

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X(x)\frac{dx}{dy}\Big|_{x=g^{-1}(y)}$$

假定g( )为单调减函数



$$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$

$$= P\{X \ge g^{-1}(y)\}$$

$$= 1 - P\{X \le g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$= -f_X(x)\frac{dx}{dy} = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

一般情况，对于单调函数

$$Y = g(X)$$

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|J\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

$$J = \frac{dx}{dy}$$ 称为雅可(Jacco)比

例： 假定$Y=aX+b$（仿射变换），X的概率密度为 $f_X(x)$

求Y的概率密度.

解:

$$x=(y-b)/a \qquad J=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a}$$

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|J\right|_{x=g^{-1}(y)}=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}$$

如果X 是一个高斯随机变量，

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{|a|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}\exp\left\{-\frac{(y-ma-b)^2}{2(a\sigma)^2}\right\}$$

$$Y \sim N(ma+b, a^2\sigma^2)$$

高斯随机变量的线性变换仍然是高斯的，但参数不同。

对于非单调函数，

$$x_1 = h_1(y), \cdots, x_n = h_n(y)$$

则

$$f_Y(y) = f_X(x_1)\left|J_1\right| + \cdots + f_X(x_n)\left|J_n\right|$$

$$x_k = h_k(y)$$

$$J_k = dx_k / dy$$

例：平方律器件

$$Y = bX^2 \qquad b > 0$$

解：
$$x_1 = \sqrt{y/b} \qquad x_2 = -\sqrt{y/b}$$

$$J_1 = \frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{by}} \qquad J_2 = \frac{dx_2}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{by}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{by}}\left[f_X(\sqrt{y/b}) + f_X(-\sqrt{y/b})\right] \qquad y > 0$$

如果$X \sim N(0, \sigma^2)$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{by}}\left[f_X(\sqrt{y/b}) + f_X(-\sqrt{y/b}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{by}} f_X(\sqrt{y/b})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 by}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y/b})^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 by}} \exp\left(-\frac{y}{2b\sigma^2} \right) \qquad y > 0$$

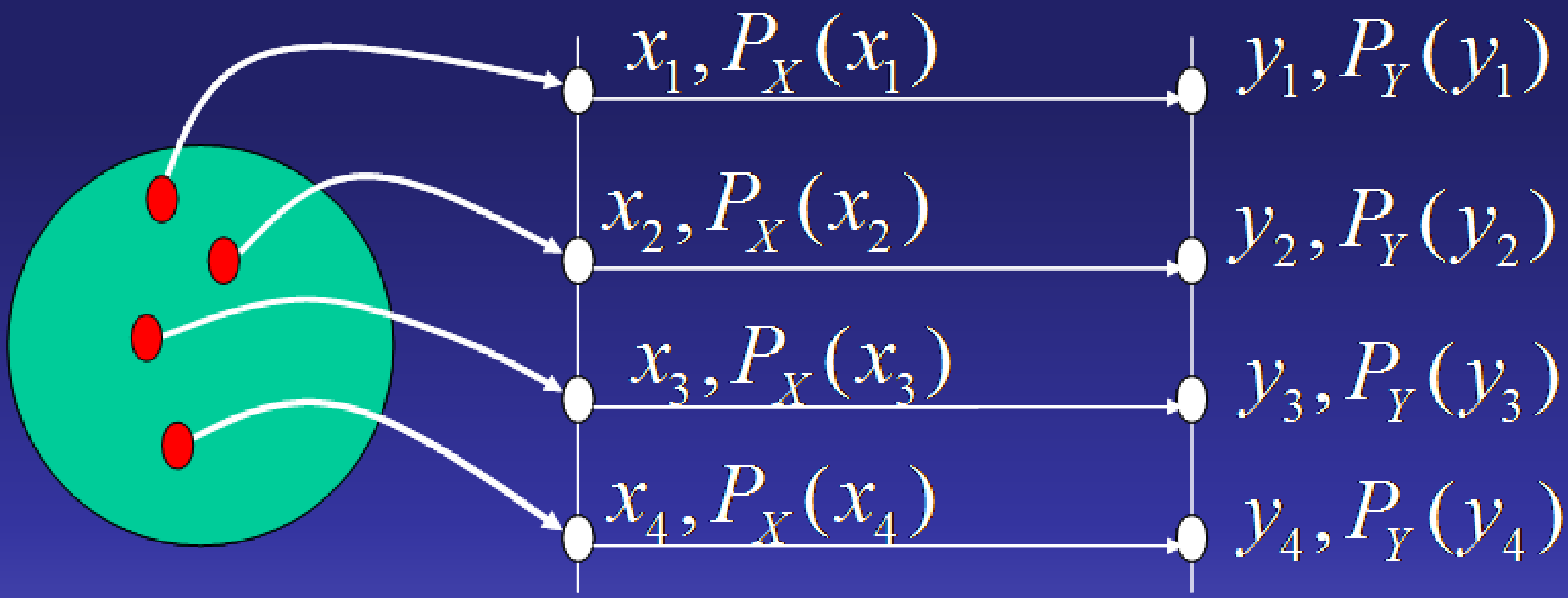
2.离散随机变量的变换

$$Y = g(X)$$

如何确定离散随机变量经变换后的概率质量函数?

一对一变换（函数g（ ）是确定性的）：

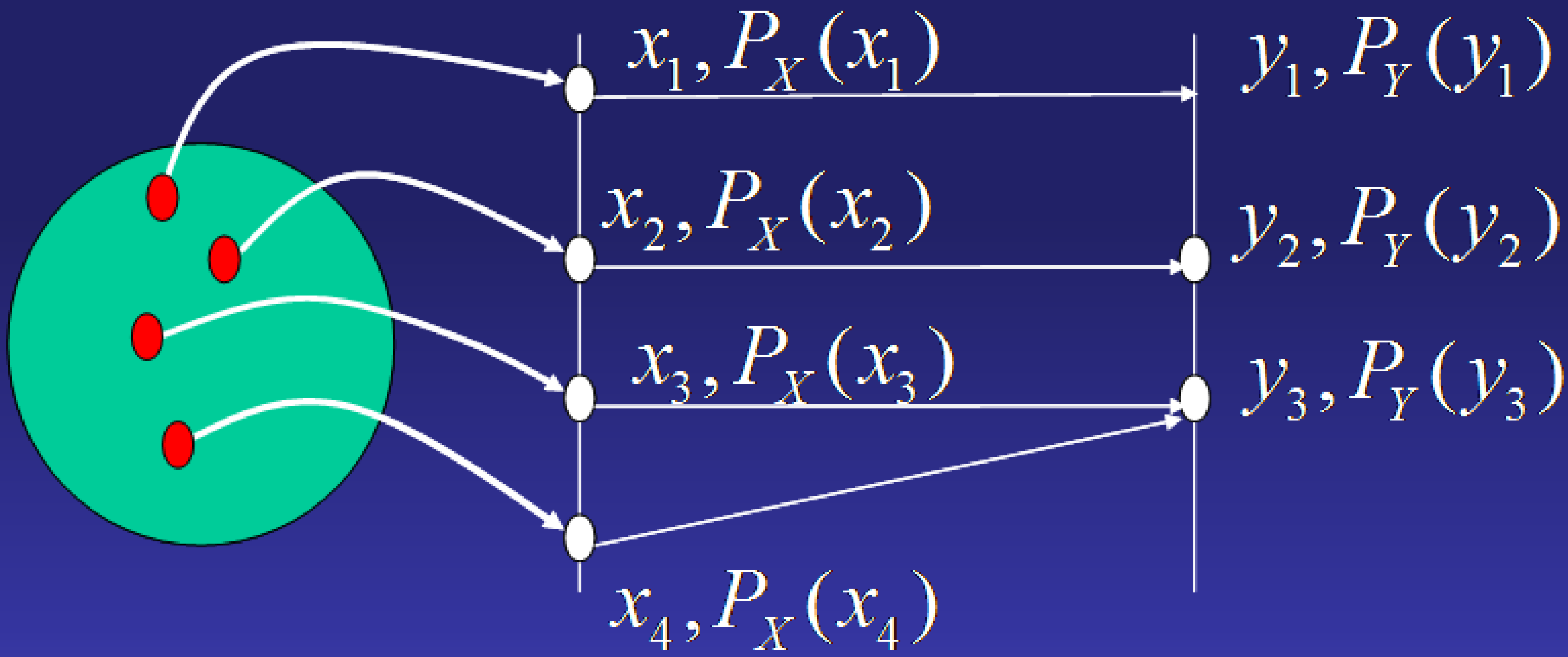
$$y_i = g(x_i)$$



$$P_Y(y_i) = P_X(x_i) = P_X(g^{-1}(y_i))$$

多对一变换：

$$y_i = g(x_i)$$



$$P_Y(y_i) = P_X(x_i) = P_X(g^{-1}(y_i)) \qquad i = 1, 2$$

$$P_Y(y_3) = P_X(x_3) + P_X(x_4) = P_X(g_1^{-1}(y_3)) + P_X(g_2^{-1}(y_3))$$

讨论：考虑一对一的变换

$$S_X = \{0 \quad 1\} \rightarrow S_Y = \{-1 \quad 1\}$$

$1-p$ $\quad$ p

下列四项哪些项是正确的?

A $P_Y(-1) = (-1)(1-p) + (1)p \qquad P_Y(1) = (-1)p + (1)(1-p)$

B $P_Y(-1) = p \qquad P_Y(1) = 1-p$

C $P_Y(-1) = 1-p \qquad P_Y(1) = p$

D $P_Y(-1) = (1)(1-p) + (-1)p \qquad P_Y(1) = (1)p + (-1)(1-p)$

讨论：考虑一对一的变换

$$S_X = \{\underset{1-p}{0} \quad \underset{p}{1}\} \to S_Y = \{-1 \quad 1\}$$

下列四项哪些项是正确的?

A $P_Y(-1) = (-1)(1-p) + (1)p \qquad P_Y(1) = (-1)p + (1)(1-p)$

B $P_Y(-1) = p \qquad P_Y(1) = 1-p$

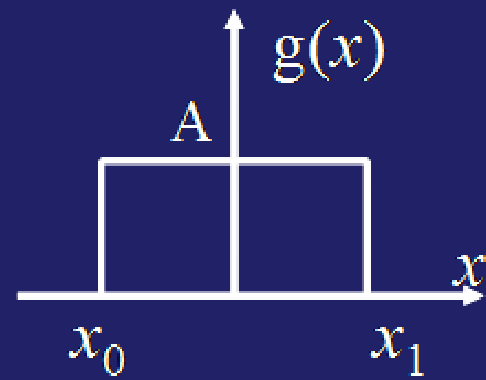
C $P_Y(-1) = 1-p \qquad P_Y(1) = p$

D $P_Y(-1) = (1)(1-p) + (-1)p \qquad P_Y(1) = (1)p + (-1)(1-p)$

3. 连续到离散的变换

X是连续r.v. 在（-∞， ∞）

例： $Y = g(X)$



$$Y=\begin{cases} A & x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = P(Y=0)\delta(y) + P(Y=A)\delta(y-A)$$

$$= (1 - P(x_0 < X \le x_1))\delta(y) + P(x_0 < X \le x_1)\delta(y-A)$$

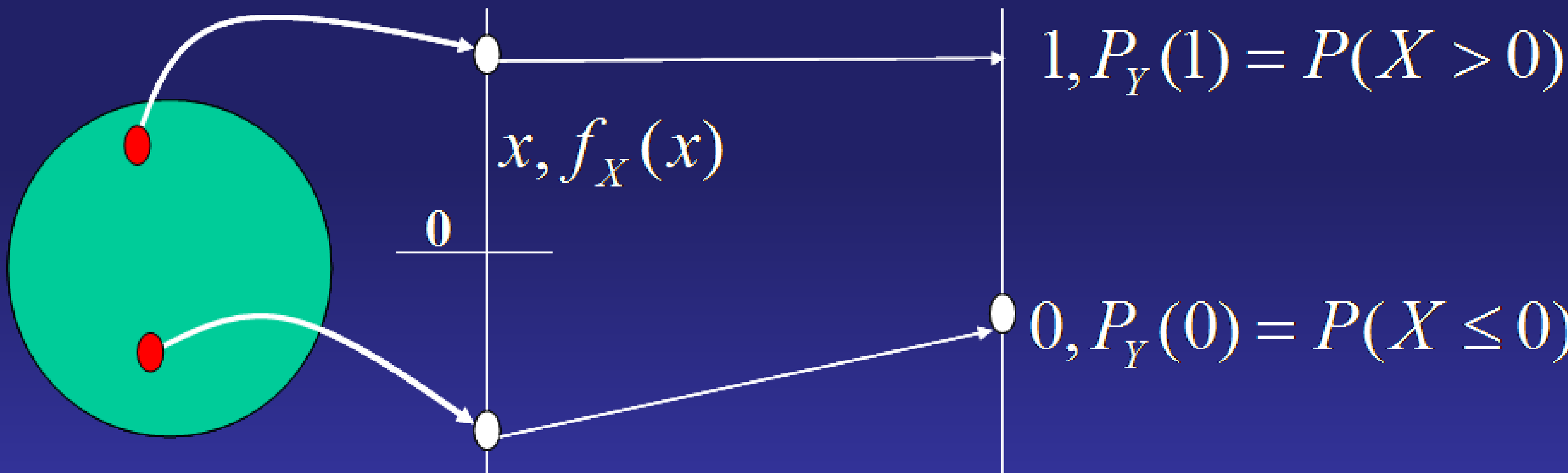
$$= [1 - F_X(x_1) + F_X(x_0)]\delta(y) + [F_X(x_1) - F_X(x_0)]\delta(y-A)$$

$$F_Y(y)$$

$$= [1 - F_X(x_1) + F_X(x_0)]U(y) + [F_X(x_1) - F_X(x_0)]U(y-A)$$

例: 量化

$$y_i = g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = P(X \le 0)\delta(y) + P(X > 0)\delta(y-1)$$

$$= F_X(0)\delta(y) + (1 - F_X(0))\delta(y-1)$$

一般说来, 如果$y=g(x)$在区间$(x_0, x_1]$上为一常数A,

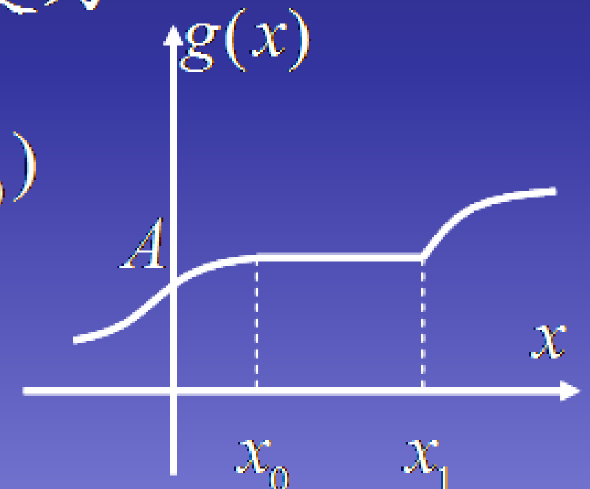
$$Y=g(X)=A \qquad x_0<x\le x_1$$

则$f_Y(y)$在y=A处有一δ函数, δ函数的强度为

$$P(x_0<X\le x_1)=F_X(x_1)-F_X(x_0)$$

$F_Y(y)$在$y=A$处不连续, 跳变点跳变高度为

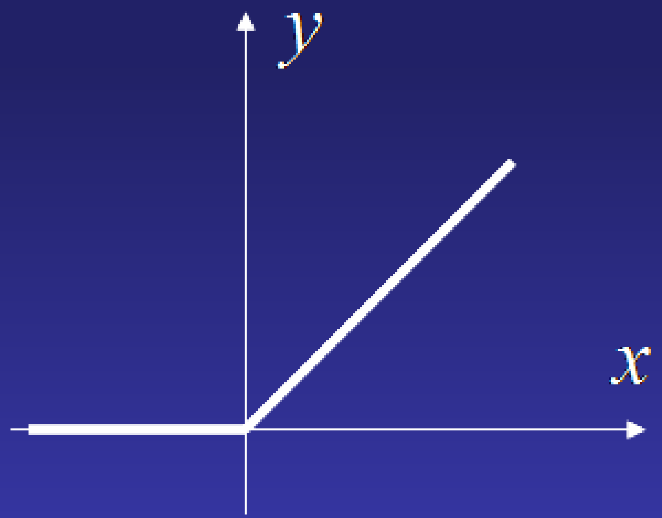
$$P(x_0<X\le x_1)=F_X(x_1)-F_X(x_0)$$



课堂练习

假定高斯随机变量通过一个半波线性检波,

$$y = g(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

Y的概率密度为?

4. 多个随机变量的变换

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2)$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2)$$

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\left|J\right|$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Jacco 比行列式

$$Y_1 = g_1(X_1, \cdots X_n)$$

$$\vdots$$

$$Y_n = g_2(X_1, \cdots, X_n)$$

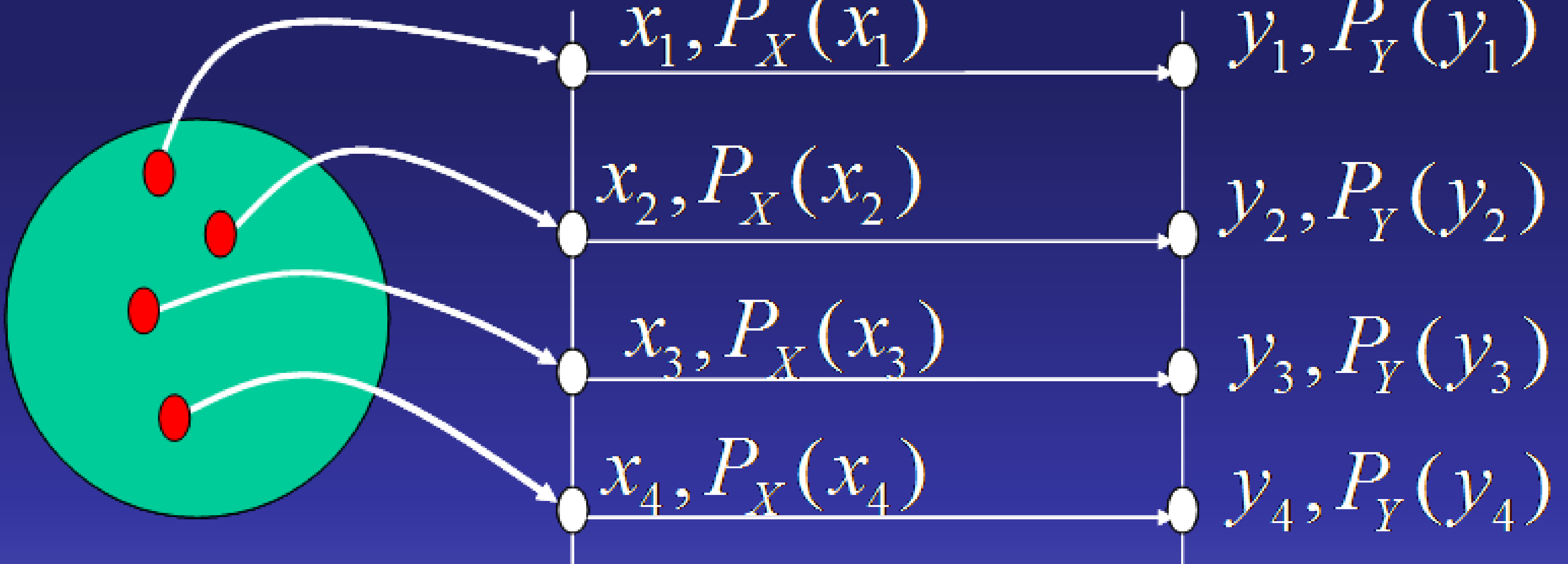
$$f_{Y_1 \cdots Y_n}(y_1, \cdots, y_n) = f_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n)\left|J\right|$$

$$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

5. 随机变量函数的数学期望计算

$$E(Y)=E[g(X)]$$

对离散型随机变量. $y_i=g(x_i)$



$$E\{g(X)\}=E[Y]=\sum_i y_i P_Y(y_i)=\sum_i y_i P_X(x_i)=\sum_i g(x_i)P_X(x_i)$$

进一步，有如下重要公式

均值：

离散型 $$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) P_X(x_i)$$

连续型 $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

方差：

$$D(Y) = E\{[g(X) - E(g(X))]^2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - m_Y]^2 f_X(x) dx$$

如果 $Y = g(X_1, X_2)$

均值:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 x_2$$

方差:

$$D(Y) = E\left\{\left[g(X_1, X_2) - E(g(X_1, X_2))\right]^2\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [g(x_1, x_2) - m_Y]^2 f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 x_2$$

例：随机相位信号的均值和方差

$$X = a\cos(\omega t_0 + \Theta) \qquad \Theta \sim U(0, 2\pi)$$

解：

$$E(X) = E[a\cos(\omega t_0 + \Theta)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t_0 + \varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi = 0$$

$$E(X^2) = E[a^2\cos^2(\omega t_0 + \Theta)]$$

$$= \frac{1}{2}a^2 E[1 + \cos(2\omega t_0 + 2\Theta)]$$

$$= a^2 / 2$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = a^2 / 2$$

1.7 多维正态随机变量

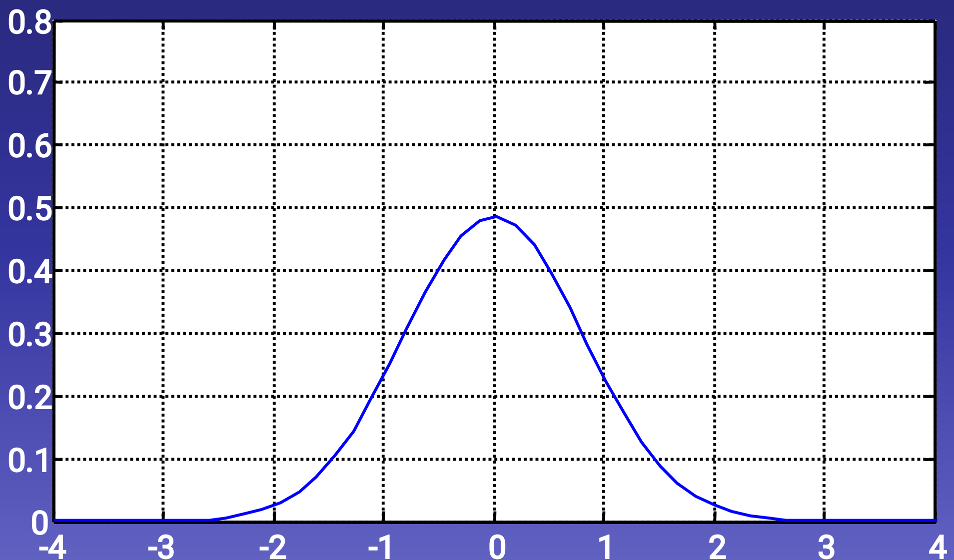
三、正态随机变量

(1)一维正态随机变量

概率密度： $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

概率积分函数

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$$



N(0,1)正态分布概率密度

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m_X}{\sigma}\right)$$

性质:

1、正态随机变量X落入[m_x-3σ, m_x+3σ]区间的概率为99.7%

2、n阶中心矩

$$E[(X-m_x)^n]=\begin{cases}1\cdot 3\cdots(n-1)\sigma_x^n & ;n\text{为偶数}\\ 0 & ;n\text{为奇数}\end{cases}$$

3、对于零均值正态随机变量X_1, X_2, X_3, X_4

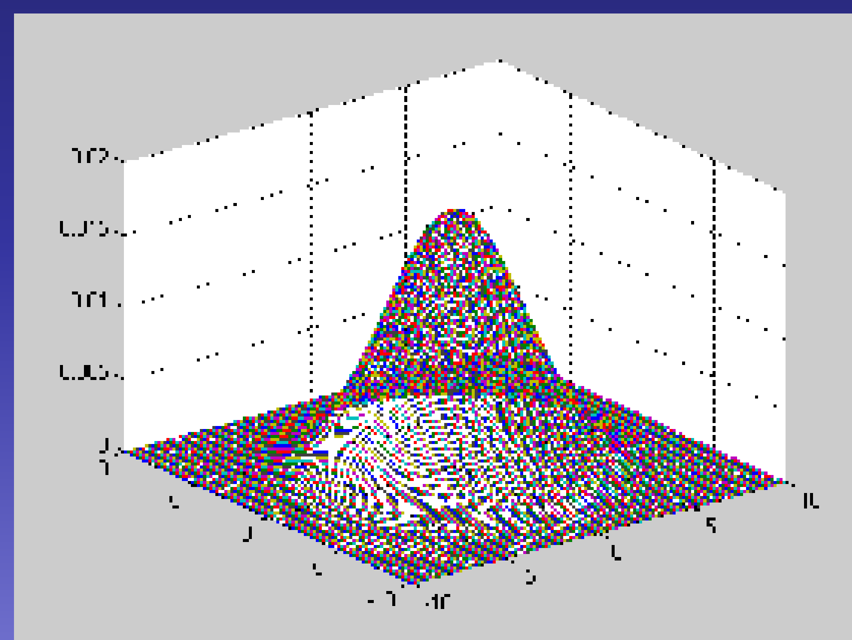
$$E[X_1X_2X_3X_4]=\cdots$$

(2)二维正态随机变量

概率密度：

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-r^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\bullet\left[\frac{(x_1-m_{X_1})^2}{\sigma_{X_1}^2}-\frac{2r(x_1-m_{X_1})(x_2-m_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X2}}+\frac{(x_2-m_{X_2})^2}{\sigma_{X_2}^2}\right]\}$$

其中r为相关系数。



性质：

- X_1,X_2的边缘概率密度也是正态的

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_1}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - m_{X_1})^2}{2\sigma_{X_1}^2}\right\}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_2}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - m_{X_2})^2}{2\sigma_{X_2}^2}\right\}$$

- 若X_1,X_2的不相关，则r=0，两随机变量相互独立

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

(3)矩阵表示方法

协方差矩阵：

$$K=\begin{bmatrix} E\{[X_1-m_{X_1}]^2\} & E\{(X_1-m_{X_1})(X_2-m_{X_2})\} \\ E\{(X_2-m_{X_2})(X_1-m_{X_1})\} & E\{[X_2-m_{X_2}]^2\} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} \\ r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$|K|=\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2-(\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}r)^2=(1-r^2)\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \begin{bmatrix} \sigma_{x_2}^2 & -r\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} \\ -r\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \sigma_{x_1}^2 \end{bmatrix}$$

令： $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \end{bmatrix}$

综上，概率密度矩阵表示形式为：

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{K}|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\}$$

问题

- 若各随机变量为正态分布且互不相关，

多维正态随机变量概率密度如何?

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\left|\mathbf{K}\right|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\}$$

四、复随机变量

设有两个实随机变量X和Y，复随机变量 $\tilde{Z}$ 定义为

$$\tilde{Z} = X + jY$$

1. 数学期望

$$m_{\tilde{Z}} = E(\tilde{Z}) = E(X) + jE(Y) = m_X + jm_Y$$

2. 方差

$$D(\tilde{Z}) = E\left[(\tilde{Z} - m_{\tilde{Z}})(\tilde{Z}^* - m_{\tilde{Z}}^*)\right] = E\left(\left|\tilde{Z} - m_{\tilde{Z}}\right|^2\right)$$

3. 协方差

设有两个复随机变量

$$\tilde{Z}_1 = X_1 + jY_1 \qquad \tilde{Z}_2 = X_2 + jY_2$$

其协方差定义为

$$Cov(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = E\left[(\tilde{Z}_1 - m_{\tilde{Z}_1})(\tilde{Z}_2 - m_{\tilde{Z}_2})^*\right]$$

性质：

若 $Cov(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = 0$ 则称 $\tilde{z}_1$ 和 $\tilde{z}_2$ 不相关。

若 $E(\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^*) = 0$ 则称 $\tilde{z}_1$ 和 $\tilde{z}_2$ 正交。

若 $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$

则称 $\tilde{z}_1$ 和 $\tilde{z}_2$ 独立。