中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

复习

1. 方差：刻画离散程度

$$D(\theta)=Var(\theta)=E[(\theta-m_\theta)^2]=E(\theta^2)-m_\theta^2$$

2. 均方误差（MSE）与均方根误差（RMSE）：刻画估计量与被估计量（即真值）之间的偏差

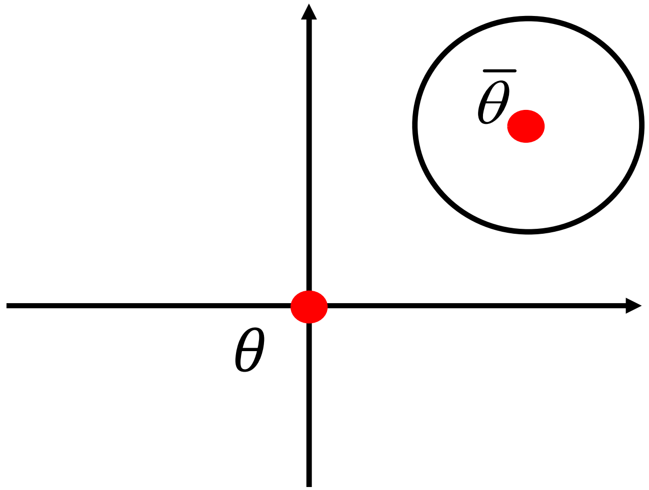
$$Mse(\hat{\theta})=E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$$

Classical: $$mse(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}(\theta-\hat{\theta})^2 f(\mathbf{z}\mid\theta)d\mathbf{z}$$

Bayesian: $$Bmse(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\theta-\hat{\theta})^2 f(\mathbf{z},\theta)d\mathbf{z}d\theta$$

复习

如果用作图的方式来表现方差与均方误差之间的区别：



对于无偏估计，

方差=均方差

【问题解答】如何理解P210的结论和例子7.8的关系？

例子7.8中说，噪声中恒定电平的ML估计是无偏的，且达到了CRLB下限，是有效估计，但是P210也有说它不如Map估计。

复习

1 性能指标

无偏性、有效性、一致性

（1）无偏性

若估计量的均值等于被估计量的均值，则

称此估计是无偏的，即 $E[\hat{\theta}(z)] = E[\theta]$

$$E[\hat{\theta}(z)] = \begin{cases} \theta & \theta\text{为确定性参量（非随机参量）} \\ E[\theta] & \theta\text{为随机参量} \end{cases}$$

复习

（2）有效性

若估计量的均方误差能达到最小方差，则此估计称为有效估计（ee）。

（3）一致性

即对于任意小数ε，若有：

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}(z_1, z_2, \cdots, z_N) - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

则估计量 $\hat{\theta}$ 为一致估计量。

复习

2、无偏估计量的性能边界

（1）非随机参量

假定满足正则条件 $$E\left\{\frac{\partial \ln f(\mathbf{z};\theta)}{\partial\theta}\right\}=0$$

$$Var(\hat{\theta})=E\{[\theta-\hat{\theta}]^2\}\geq I(\theta)^{-1}$$

克拉美–罗限

$$I(\theta)=E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(z;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}=-E\left\{\frac{\partial^2 \ln f(z;\theta)}{\partial\theta^2}\right\}$$

等号成立的条件： $$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z};\theta)}{\partial\theta}=k(\theta)(\hat{\theta}-\theta)$$

复习

几点说明：

（1） 定理成立的条件

正则条件保证了上述要求，即 $E\left\{\dfrac{\partial \ln f(\mathbf{z}|\theta)}{\partial\theta}\right\}=0$

（2） I(θ)称为Fisher信息，I越大，越有可能得到好的估计。

（3） 如果有效估计量存在，则该有效估计量一定是最大似然估计。

（4） 如果有效估计量不存在，则最大似然估计的方差不一定是最小的。

复习

2、无偏估计量的性能边界

（2）随机参量

任何无偏估计量的均方误差满足

$$Mse(\hat{\theta}) = E\{[\theta-\hat{\theta}]^2\} \geq J^{-1}$$

克拉美-罗限

$$J = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(z,\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f(z,\theta)}{\partial \theta^2}\right\}$$

等号成立的条件：$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z},\theta)}{\partial \theta} = k\cdot(\hat{\theta}-\theta)$$ （式7.4.29）

注意，k不是$\mathbf{z}$或者θ的函数

复习

如果有某个无偏估计达到CRLB,那么该估计必定是最大后验概率估计.而最小均方估计的均方误差也是最小的,所以这时最小均方估计与最大后验概率估计等价。

习题：　8.2

7.5 线性最小均方估计

1、线性最小均方估计(linear minimum mean square error estimation) （要求：一般性掌握）

、前提：不知道 $f(\theta)$，知道 θ 的一、二阶矩特性

准则：使均方误差最小的线性估计

实现：

$$\hat{\theta}_{lms} = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i + b$$

选择适当的系数$\mathbf{a_i}$及$\mathbf{b}$，使估计均方误差最小。

$$Mse(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2] = E\left[\left(\theta - \sum_{i=1}^{N} a_i z_i - b\right)^2\right] = \min$$

【交互】属于哪一类方法？

7.5 线性最小均方估计

均方误差对系数求导，并令导数等于零，得

$$\frac{\partial Mse(\hat{\theta})}{\partial b} = -2E\left[\left(\theta - \sum_{i=1}^{N} a_i z_i - b\right)\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Mse(\hat{\theta})}{\partial a_j} = -2E\left[\left(\theta - \sum_{i=1}^{N} a_i z_i - b\right) z_j\right] = 0 \text{ ,} \qquad j=1,2,...N \qquad (4)$$

经整理后得：

$$\begin{cases} b = E[\theta] - \sum_{i=1}^{N} a_i E[z_i] \\ E\left[\left(\theta - \sum_{i=1}^{N} a_i z_i - b\right) z_j\right] = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

列方程求解

7.5 线性最小均方估计

$$E\left[\tilde{\theta} z_j\right] = E[(\theta - \hat{\theta}_{lms}) z_j] = 0$$

正交条件

正交条件是信号最佳线性滤波和估计算法的基础，在随机信号处理中占有十分重要的地位。

无偏+正交 $\Longleftrightarrow$ Lms估计

7.5 线性最小均方估计

性能分析：

☞线性最小均方估计为无偏估计，即有：

$$E\left[\hat{\theta}_{lms}\right]=E\left[\theta\right]$$

☞线性最小均方估计的均方误差等于误差与被估计量乘积的统计均值，即：

$$E\left[\tilde{\theta}^2\right]=E\left[\tilde{\theta}\theta\right]$$

其中： $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}_{lms}$

7.5 线性最小均方估计

例7.11、设观测模型为$z_i=s+v_i$，$i=1,2,..$，其中随机参量s以等概率取{-2,-1,0,1,2}诸值，噪声干扰v_i以等概率取{-1,0,1}诸值，且$E[sv_i]=0$，$E[v_i v_j]=\sigma_v^2\delta_{ij}$，试根据一次、二次、三次观测数据求参量s的线性最小均方估计。

【解】 根据给定的条件，可以求得

$$E(s)=(-2-1+0+1+2)/5=0$$

$$E(s^2)=[(-2)\times(-2)+(-1)\times(-1)+0\times0+1\times1+2\times2]/5=2$$

$$\sigma_s^2=E(s^2)=[(-2)\times(-2)+(-1)\times(-1)+0\times0+1\times1+2\times2]/5=2$$

$$E(v_i)=(-1+0+1)/3=0$$

7.5 线性最小均方估计

$$\sigma_v^2 = E(v_i^2) = [(-1)\times(-1) + 0\times 0 + 1\times 1]/3 = 2/3$$

$$E(z_i) = E(s) + E(v_i) = 0$$

$$E(sz_i) = E[s(s+v_i)] = E(s^2) = 2$$

$$E(z_i^2) = E[(s+v_i)^2] = E(s^2) + E(v_i^2) = 8/3$$

（1） 一次观测数据， 令 $\hat{s}_{lms} = a_1 z_1 + b$，

由前式(5)， $b = E(s) - a_1 E(z_1)$

$E[(s - a_1 z_1)z_1] = 0$ （正交条件）

b=0， $a_1 = \frac{E(sz_1)}{E(z_1^2)} = \frac{2}{8/3} = \frac{3}{4}$

所以， $\hat{s}_{lms} = \frac{3}{4} z_1$

7.5 线性最小均方估计

估计的均方误差为：$E[\tilde{s}^2]=E[\tilde{s}s]=E[(s-a_1z_1)s]=$

$E(s^2)-a_1E[sz_1]=2-\frac{3}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

（2）二次观测数据

$$\text{令}\ \hat{s}_{lms}=a_1z_1+a_2z_2+b$$

$$b=E(s)-a_1E(z_1)-a_2E(z_2)=0$$

由正交条件， $E[(s-a_1z_1-a_2z_2)z_1]=0$， $E[(s-a_1z_1-a_2z_2)z_2]=0$

代入各数值， $2-\frac{8}{3}a_1-2a_2=02-2a_1-\frac{8}{3}a_2=0$ ，解方程得$a_1=a_2=\frac{3}{7}$

所以，线性最小均方估计为： $\hat{s}_{lms} = \frac{3}{7}(z_1 + z_2)$

估计的均方误差为：

$$E(\tilde{s}^2) = E(\tilde{s}s) = E[(s - a_1 z_1 - a_2 z_2)s] = E(s^2) - a_1 E(sz_1) - a_2 E(sz_2)$$

$$= 2 - \frac{3}{7} \times 2 - \frac{3}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$$

（3） 三次观测数据

通过类似的计算步骤，可以求得： $\hat{s}_{lms} = \frac{3}{10}(z_1 + z_2 + z_3)$

估计的均方误差为： $E(\tilde{s}^2) = \frac{1}{5}$

从本例可以看出，观测数据越多，估计的均方误差越小。【完毕】

7.5 线性最小均方估计

更一般地，对于多参量的估计，用矢量表示估计将更为方便。设待估计量为$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n]^T$，观测矢量为$\boldsymbol{z}=[z_1,z_2,...,z_m]^T$，线性估计可表示为

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{Az}+\boldsymbol{b} \qquad (8)$$

其中b是n×1的矢量，A是n×m的矩阵，所有估计的均方误差和可表示为

$$Mse(\widehat{\boldsymbol{\theta}})=E\left[\sum_{i=1}^{N}(\theta_i-\hat{\theta}_i)^2\right]=E[(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}})^T(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}})] \qquad (9)$$

将(8)代入(9)，得

$$Mse(\widehat{\boldsymbol{\theta}})=E[(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{Az}-\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{Az}-\boldsymbol{b})] \qquad (10)$$

分别对A和b求导并令导数等于零，得

7.5 线性最小均方估计

$$\frac{\partial Mse(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{b}} = -2E[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$\frac{\partial Mse(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{A}} = -2E\{[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}]\boldsymbol{z}^T\} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

由(11)和(12)得，

$$\boldsymbol{b} = E[\boldsymbol{\theta}] - \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{z}] \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}^{-1} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{z}} = cov(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z}) = E\{[\boldsymbol{\theta} - E(\boldsymbol{\theta})][\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})]^T\}$ (15)

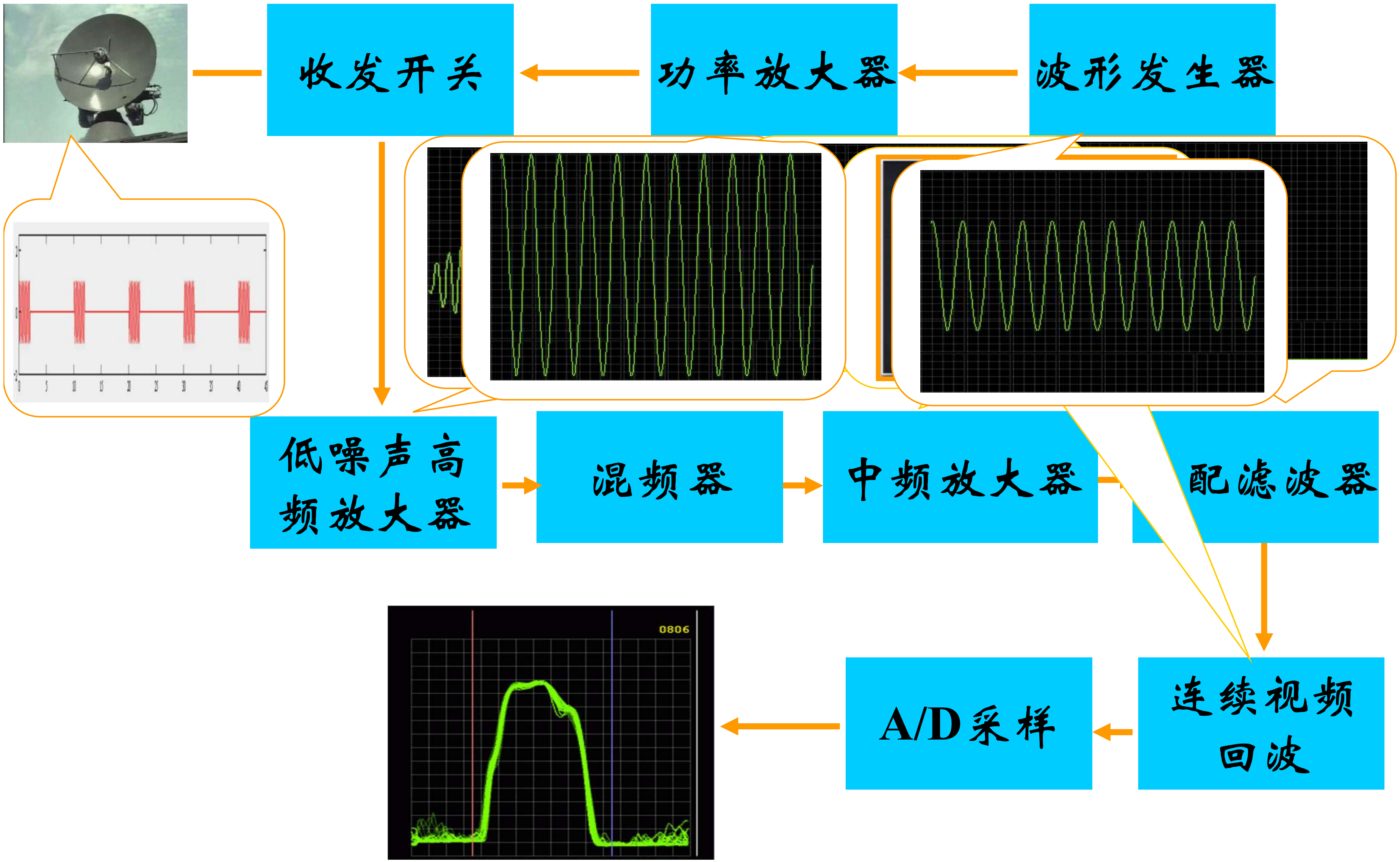
$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}} = Var(\boldsymbol{z}) = E\{[\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})]^T\} \tag{16}$$

线性最小均方估计为

只与一、二阶矩有关！

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{lms} = E[\boldsymbol{\theta}] + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}[\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})] \tag{17}$$

雷达系统：



第八章　检测理论

8.1 假设检验的基本概念（重点）

8.2 判决准则（重点）

8.3 检测性能及其蒙特卡罗仿真

8.4 复合假设检验

8.6 噪声中信号的检测

8.1假设检验的基本概念

假设： 对可能的判决结果的陈述；

雷达目标检测：H_1 ： “Target present”

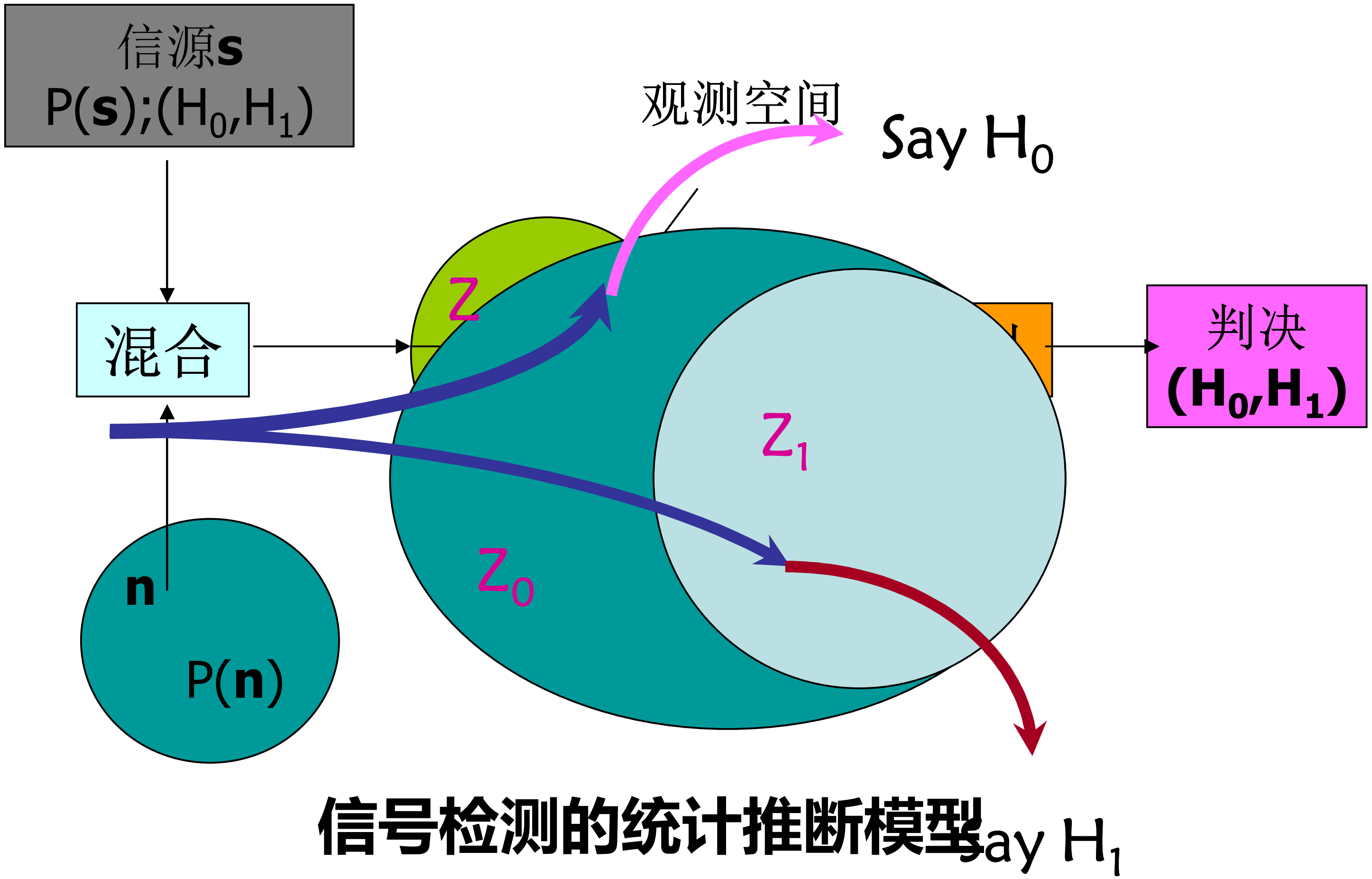
H_0 ： “Target not present”

假设检验： 对几种可能的假设作出判决；

- H_1 和 H_0 是互不相容的，这是最简单的二元假设问题，对两种假设进行判决称为二元假设检验问题；

- 更一般的问题是有M个假设，称为M元假设问题，对M个假设进行判决称为M元假设检验问题。

8.1假设检验的基本概念



信号检测的统计推断模型

假设检验的实质是对观测空间进行划分。

8.1假设检验的基本概念

借助假设检验进行统计判决，步骤如下：

■作出合理的假设；

■选择进行判决时所遵循的判决准则；

■获取观测样本；

■作出具体判决。

8.2 判决准则

1、最大后验概率准则

在观测到数据**z**的情况下，可以计算出后验概率$P(H_1|z)$和$P(H_0|z)$，对二个后验概率进行比较，判定后验概率大所对应的那个假设成立，则判决公式为：

$$\frac{P(H_1|z)}{P(H_0|z)} \geq 1 \quad \text{判决}H_1\text{成立}$$

$$\frac{P(H_1|z)}{P(H_0|z)} < 1 \quad \text{判决}H_0\text{成立}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(H_1|z)}{P(H_0|z)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

8.2 判决准则

利用贝叶斯公式: $$P(H_i \mid z) = \frac{P(H_i) f(z \mid H_i)}{f(z)}$$

$$\frac{P(H_1 \mid z)}{P(H_0 \mid z)} = \frac{f(z \mid H_1) P(H_1)}{f(z \mid H_0) P(H_0)}$$

似然比

门限

$$\frac{P(H_1 \mid z)}{P(H_0 \mid z)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda(z) \overset{\Delta}{=} \frac{f(z \mid H_1)}{f(z \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \eta_0$$

假设检验问题转化为似然比与门限进行比较的问题，称为似然比检验

8.2 判决准则

对于二元假设检验，有四种可能结果

H_0为真，判H_0成立　——正确判决

H_1为真，判H_1成立　——正确检测

H_0为真，判H_1成立　——虚警（第一类错误）

H_1为真，判H_0成立　——漏警（第二类错误）

发现概率或检测概率：$P_D = P(D_1 | H_1) = \int_{Z_1} f(z | H_1) dz$

虚警概率(常用α表示)：$P_F = P(D_1 | H_0) = \int_{Z_1} f(z | H_0) dz = \alpha$

漏警概率(常用β表示)：$P_M = P(D_0 | H_1) = \int_{Z_0} f(z | H_1) dz = \beta$

8.2 判决准则

例**8.1**：二元假设：

H_1：$z=1+v$　　　　H_0：$z=v$

其中**v**是均值为零、方差为**1**的正态随机变量；假定$P(H_0)=P(H_1)$

给出最大后验概率判决式，并确定判决性能。

【解】 最大后验概率准则的判决表达式是似然比检验的形式，因此首先计算似然比，

$$f(z|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),\qquad f(z|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2}\right)$$

$$\Lambda(z)=\frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)}=exp\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

8.2 判决准则

所以判决表达式为：

$$exp\left(z-\frac{1}{2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

对上式两边取对数为：

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}$$

在本例中，观测空间Z=(−∞, ∞)，H_0的判决域为Z_0=(−∞, 1/2)，H_1的判决域为Z_1=(1/2, ∞)，判决的虚警概率为：

$$P_F=P(D_1|H_0)=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(z|H_0)dz=Q(1/2)$$

漏警概率：$P_M=P(D_0|H_1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(z|H_1)dz=Q(1/2)$

检测概率： $P_D=P(D_1|H_1)=1-P_M=1-Q(1/2)$

8.2 判决准则

对于多次测量，只需把测量z改写成矢量形式z就可以了：

$$\Lambda(\mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta_0 \quad (3)$$

其中，
$$\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z}|H_1)}{f(\mathbf{z}|H_0)} = \frac{f(z_1,z_2,\ldots,z_N|H_1)}{f(z_1,z_2,\ldots,z_N|H_0)}$$

虚警概率为：

$$P_F = \int_{Z_1} f(\mathbf{z}|H_0)d\mathbf{z} = \int_{Z_1} f(z_1,z_2,\ldots,z_N|H_0)dz_1dz_2\cdots dz_N$$

漏警概率为：

$$P_M = \int_{Z_0} f(\mathbf{z}|H_1)d\mathbf{z} = \int_{Z_0} f(z_1,z_2,\ldots,z_N|H_1)dz_1dz_2\cdots dz_N$$

8.2 判决准则

2、贝叶斯准则

已知信号的先验概率和代价因子，使统计平均代价最小。

统计平均代价:

$$C=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}C_{ij}P(D_i,H_j)=\min$$

代价因子$\mathbf{C_{ij}}$表示$\mathbf{H_j}$为真，判决为$\mathbf{H_i}$所付出的代价。

简单推导，有

$$C=C_{10}P(H_0)+C_{11}P(H_1)$$
$$+\int_{Z_0}\left[P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(z\,|\,H_1)-P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(z\,|\,H_0)\right]dz$$

8.2 判决准则

如果

$$P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(z\,|\,H_1) < P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(z\,|\,H_0)$$

判H0成立，否则判H1成立。

判决表达式为：

假设检验问题转化似然比检验

似然比

$$\frac{f(z\,|\,H_1)}{f(z\,|\,H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

门限

8.2 判决准则

3、最小总错误概率准则

在已知信号的先验概率 $P(H_1)$ 和 $P(H_0)$ 的条件下，使总错误概率最小：

$$P_e = P(D_1, H_0) + P(D_0, H_1) = P_F P(H_0) + P_M P(H_1) = \min$$

常应用在数字通信中。相当于贝叶斯准则中

C_{00}＝C_{11}=0, C_{01}=C_{10}=1。

最大后验概率判决式

判决规则为：$\Lambda(z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta_0 = \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$

假设检验问题转化似然比检验

8.2 判决准则

例8.2 高斯白噪声中直流电平的检测问题。设有两种假设

H_0:　　$z_i=v_i$,　　　　$i=1,2,....,N$

H_1:　　$z_i=A+v_i$,　　　　$i=1,2,....,N$

其中$\{v_i\}$是服从均值为零、方差为σ^2的高斯白噪声序列，假定参数A是已知的，且A>0，求贝叶斯准则（或最小总错误概率准则）的判决表达式，并确定判决性能。

【解】 两种假设下的似然函数为: $f(\mathbf{z}|H_0)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)$

$$f(\mathbf{z}|H_1)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

8.2 判决准则

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]}{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)} = exp\left[\frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - \frac{1}{2}A\right)\right]$$

对数似然比为: $ln\,\Lambda\,(\mathbf{z}) = \frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - \frac{1}{2}A\right)$

判决表达式为： $\frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - \frac{1}{2}A\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\,\eta_0$

令$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$，将上式整理后得: $\bar{z} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{NA} ln\,\eta_0 + \frac{1}{2}A = \gamma$

8.2 判决准则

检验统计量$\bar{z}$为样本均值，为了确定判决的性能，首先需要确定检验统计量的分布，在H_0为真时，$\bar{z}|H_0=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i$，那么，

$$f_{\bar{z}}(\bar{z}|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma^2/N}\right)$$

在H_1为真时，$\bar{z}|H_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A+v_i)=A+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i$

$$f_{\bar{z}}(\bar{z}|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{(\bar{z}-A)^2}{2\sigma^2/N}\right)$$

检测概率$P_D=P(\bar{z}>\gamma|H_1)=\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{(\bar{z}-A)^2}{2\sigma^2/N}\right)d\bar{z}$

$$=Q\left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma}\right)$$

8.2 判决准则

当采用最小错误概率准则且P(H_1)=P(H_0)时，η_0=1，判决表达式为

$$\bar{z} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}A = \gamma$$

$$P_F = Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right), \quad P_D = Q\left(-\frac{\sqrt{N}A)}{2\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right)$$

总的错误概率为: $$P_e = P(H_0)P_F + P(H_1)P_M = Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right)$$