《信号与系统》知识点讲座初稿

课程内容

研究对象

研究内容

研究方法

信号

- 连续时间信号
- 离散时间信号

信号描述
信号特性
信号运算

系统

- 连续时间系统
- 离散时间系统

系统描述
系统求解
特性分析

时域分析方法

频域分析方法
（傅里叶变换）

复频域分析方法
（拉普拉斯变换）
（Z变换）

教材及参考资料

- 《信号与系统》
  <美>奥本海姆等著，刘树棠译，西安交通大学出版社
- 《信号与系统分析》（第二版）
  吴京教授，国防科技大学出版社
- 《信号与系统》（第三版）
  郑君里等，高等教育出版社
- 微信公众号 :信号与系统和数字信号处理
  丹梅老师
- 《信号与线性系统分析》
  吴大正，高等教育出版社

学习方法

- 物理概念和数学方法相结合

（概念是基础，数学是工具）

- 相互关联，对比分析，理解记忆
- 构建自己的知识库（概念、定理、性质、变换对）
- 加强习题练习（加深对概念的理解）
- 可利用Matlab/Python等语言进行仿真

（三位一体方法：老师讲解、操作实践、程序设计）

- 总结归纳（“听课/复习/总结/做题/预习”循环）

第一章 引论

■ 信号的分类与分类

- □ 确定信号、随机信号
- □ 连续时间信号、离散时间信号
- □ 周期信号、非周期信号
- □ 功率信号、能量信号
- □ 因果信号、非因果信号
- □ 奇信号、偶信号

■ 系统的分类

- □ 连续/离散时间系统
- □ **因果/非因果系统**
- □ **线性/非线性系统**
- □ **时变/时不变系统**
- □ **稳定/不稳定系统**
- □ 有记忆/无记忆系统

1、系统线性/非线性、时变/时不变性的判定

时不变性的判定

第1类：代数方程或简单的积分方程

第2类：用微分/差分方程表示的系统

判断下列系统是否为时不变系统？并说明理由。

（1）y(t)=x(t-b)，b 为实常数

（2）$y(t)=x(at)$，a 为实常数，且 a≠0、a≠1。

（3）$y(t)=\int_{-\infty}^{3t}x(\tau)d\tau$

（4）$y(n)=(n-1)y(0)+(n-1)x(n)$，其中 y(0)表示系统的初始状态

（5）$y''(t)+2y'(t)+y^2(t)=x(t)$

（6）$y''(t)+\sin t\cdot y'(t)+y(t)=x(t)$

微分方程

1、系统线性/非线性、时变/时不变性的判定

线性/非线性的判定

判断下列系统是否为线性系统，并说明理由。

（1） $y(n)=(n-1)y(0)+(n-1)x(n)$

（2） $y''(t)+\sin t\cdot y'(t)+y(t)=2x(t)$

（3） $y''(t)+3y'(t)+y(t)=2\left[x(t)\right]^2$

（4） $y''(t)+y(t)\cdot y'(t)=x(t)$

第一种：按照线性系统的定义式判定

线性系统的三个条件：分解性、零输入线性、零状态线性

第二种：

以微分/差分方程描述的系统，若方程不是线性微分/差分方程，则为非线性系统。

1、系统线性/非线性、时变/时不变性的判定

【例1】（南开大学2004年考研试题）

一LTI因果系统，当激励$f_1(t)$=u(t)时,系统的全响应为 $y_1(t)=(3e^{-t}+4e^{-2t})u(t)$；当激励$f_2(t)$=2u(t)时,系统的全响应为 $y_2(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$,求在相同初始条件下,激励为f_3(t) = u(t-2)时的全响应y_3(t)

【解】：相同初始条件为 $y(0)$，已知

$$y(0),\ f_1(t)=u(t)\rightarrow y_1(t)=(3e^{-t}+4e^{-2t})u(t) \qquad (1)$$

$$y(0),\ f_2(t)=2u(t)\rightarrow y_2(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t) \qquad (2)$$

根据线性性，（2）-（1）得

$$y(0)=0,\ f_2(t)=u(t)\rightarrow y(t)=(2e^{-t}-7e^{-2t})u(t) \qquad (3)$$

（1）-（3）得

$$y(0),\ f(t)=0\rightarrow y(t)=(e^{-t}+11e^{-2t})u(t) \qquad (4)$$

由时不变性，根据（3）

$$y(0)=0,\ f_3(t)=u(t-2)\rightarrow y(t)=[2e^{-(t-2)}-7e^{-2(t-2)}]u(t-2) \qquad (5)$$

（5）+（4）即全响应

$$y_3(t)=(e^{-t}+11e^{-2t})u(t)+[2e^{-(t-2)}-7e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

1、系统线性/非线性、时变/时不变性的判定

总结：

线性系统：

- 可分解性；
- 零输入线性（看 $y(0)$）；
- 零状态线性 （看 $f(t)$）

时不变性：

- 时不变只看零状态响应
- 如果$f(.)$前出现变系数，或有展缩、翻转运算，则为时变系统；如果仅仅有延时，则为时不变系统。

因果系统：

先有因再有果

稳定系统（BIBO）：

对于任意一个有界输入，输出也有界。通常通过系统函数判断

第二章 信号的时域分析

- ■ 常用信号及其基本特性
  - □ 连续时间复指数信号
  - □ 连续时间阶跃信号
  - □ 连续时间冲激信号
  - □ 离散时间单位样值信号
  - □ 离散时间阶跃信号
  - □ 离散时间复指数信号
- ■ 信号的时域运算
  - □ 信号的加减与乘法运算
  - □ 信号的累加与差分运算
  - □ 信号的积分与微分运算
  - □ 信号的翻转、展缩与平移
  - □ 信号的卷积运算（连续、离散）

1、冲激函数的性质及卷积积分

■ 冲激信号的性质

□ 相乘特性

□ 取样特性

□ 展缩特性

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

■ 冲激偶信号的性质

□ 相乘特性

□ 取样特性

□ 展缩特性

$$f(t)\cdot\delta'(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

1、冲激函数的性质及卷积积分

(1) $\boxed{\delta(t)\text{是卷积的单位元}}$

(2) $\boxed{\delta(t\text{-}t_0)\text{ 是卷积的延迟器}}$

(3) $\boxed{\delta'(t)\text{ 是卷积的微分器}}$

(4) $\boxed{u(t)\text{ 是卷积的积分器}}$

例1 $u(t-1)*u(t-2)-u(t-1)*u(t-3)$

$$=(t-3)u(t-3)-(t-4)u(t-4)$$

例2 $[e^{\lambda_1 t}u(t)]*[e^{\lambda_2 t}u(t)] = \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]u(t)$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

1、冲激函数的性质及卷积积分

常用卷积性质表

若$x_1(t)*x_2(t)=f(t)$，则 $x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$	若$x_1(n)*x_2(n)=f(n)$，则 $x_1(n-n_1)*x_2(n-n_2)=f(n-n_1-n_2)$
$u(t)*u(t)=tu(t)$	$u(n)*u(n)=\underline{(n+1)u(n)}$
$e^{at}u(t)*u(t)=-\frac{1}{a}(1-e^{at})u(t)$	$\left[a^n u(n)\right]*u(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$
$\left[e^{at}u(t)\right]*\left[e^{at}u(t)\right]=te^{at}u(t)$	$\left[a^n u(n)\right]*\left[a^n u(n)\right]=\underline{\underline{(n+1)a^n u(n)}}$
$\left[e^{at}u(t)\right]*\left[e^{bt}u(t)\right]=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t),a\neq b$	$\left[a^n u(n)\right]*\left[b^n u(n)\right]=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$，$a\neq b$

卷积是基础；教材上其他附表也应熟练掌握！

2、卷积和的计算

3. 竖式法

"对位相乘求和"法，步骤：

① 右端对齐

② 逐点相乘

③ 累加求和（千万不要进位）

④ 起始相加

例：已知两序列如下，求其卷积和。

$$\boldsymbol{x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)}$$

$$h(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+3\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

解：将以上离散时间信号写成序列。

$$\{x(n)\}=\{1,0,2,1\}_0 \qquad \{h(n)\}=\{1,2,0,3,1\}_{-1}$$

注意序列的完整性，零值不能漏。

2、卷积和的计算

$$\{x(n)\} = \{1,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 1\}_{0}$$

$$\{h(n)\} = \{1,\ \ 2,\ \ 0,\ \ 3,\ \ 1\}_{-1}$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & & & 1, & 0, & 2, & 1 \\
 & & & 3, & 0, & 6, & 3 & \\
 & & 0, & 0, & 0, & 0 & & \\
 & 2, & 0, & 4, & 2 & & & \\
1, & 0, & 2, & 1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

每一斜列元素相当一个$x(n)$样值经过$h(n)$后的输出

相加

$$\{y(n)\} = \{1,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 8,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 5,\ \ 1\}_{-1}$$

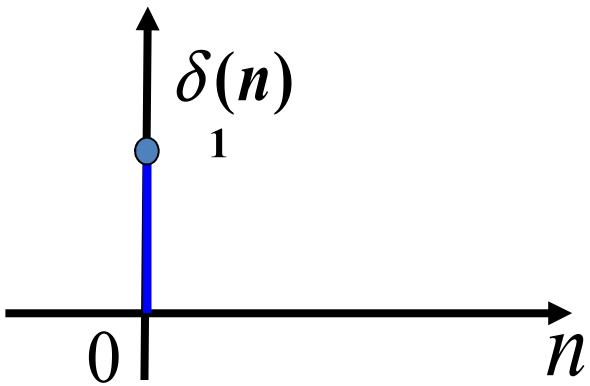
$$y(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + 8\delta(n-2)$$

$$+ 3\delta(n-3) + 6\delta(n-4) + 5\delta(n-5) + \delta(n-6)$$

Matlab卷积函数：conv（A，B）

2、卷积和的计算

$\delta(n)$ 的性质



□ 相乘特性

$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)$$

□ 取样特性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n)=x(0) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-k)=x(k)$$

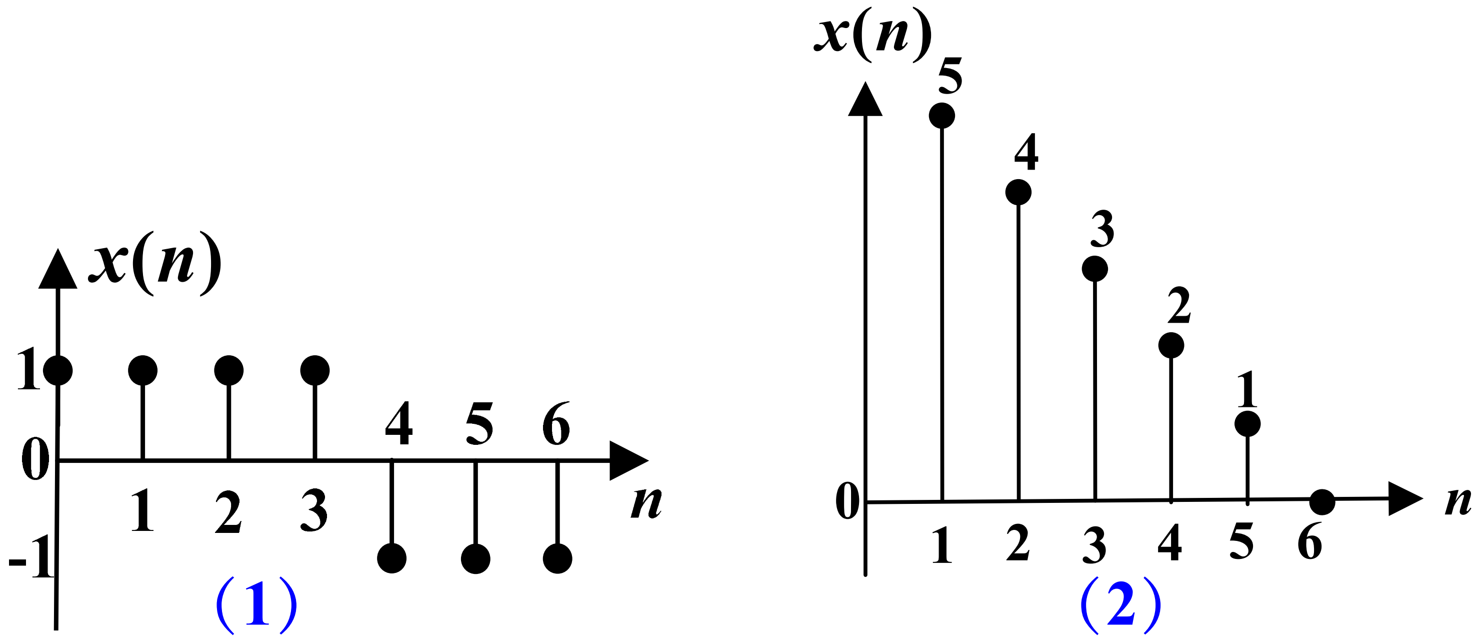
思考

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)=? \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n-8)\delta(n)=? \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)=?$$

$$=1 \qquad =-8 \qquad =1$$

2、卷积和的计算

【例1】（北师大2005考研题）写出图示序列的表达式.



【解】：（1）
$$x(n)=[u(n)-u(n-4)]-[u(n-4)-u(n-7)]$$
$$=u(n)-2u(n-4)+u(n-7)$$

（2）
$$x(n)=(6-n)[u(n-1)-u(n-6)]$$

2、卷积和的计算

例：（国防科技大学2006考研题）：试求下列序列的卷积和

$$x_1(n) = 2^n u(n-1), x_2(n) = 3^n u(n+1)$$

解：（1）方法一：按定义（略）

（2）方法二：按性质

$$x_1(t) * x_2(t) = [2^n u(n-1)] * [3^n u(n+1)]$$

$$= [2 \cdot 2^{n-1} u(n-1)] * [3^{-1} \cdot 3^{n+1} u(n+1)]$$

$$= \frac{2}{3}[2^n u(n)] * [3^n u(n)] \quad \Leftarrow \quad x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$$

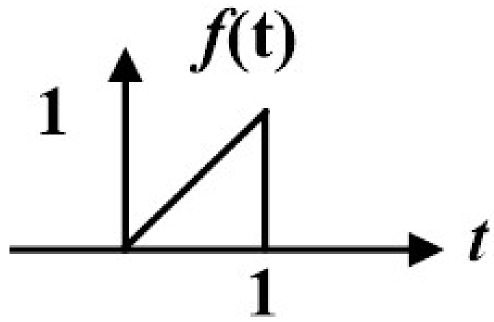
$$= \frac{2}{3}\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) u(n) \quad \Leftarrow \quad [r_1^n u(n)] * [r_2^n u(n)] = [(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) / (r_1 - r_2)] u(n), \quad r_1 \neq r_2$$

3、信号的积分与微分运算

【例2.2.1】：求 $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ 一阶微分后的信号？

【解】：由图可知，$t<0$ 和 $t>1$ 时，$f(t)$ 恒等于零，在这些区域导数为0，在0<t<1区间上，$f(t)$ 的导数为1。

$$g(t)=\begin{cases} 1, & t\in(0,1) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

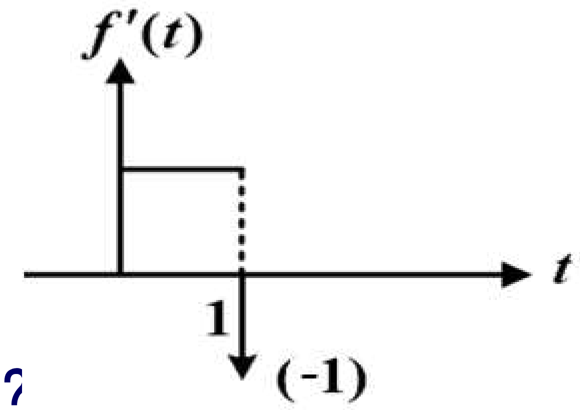


冲激强度： $f(1^+)-f(1^-)=0-1=-1$

$$\therefore f'(t)=g(t)+[-\delta(t-1)]$$

$$=g(t)-\delta(t-1)$$

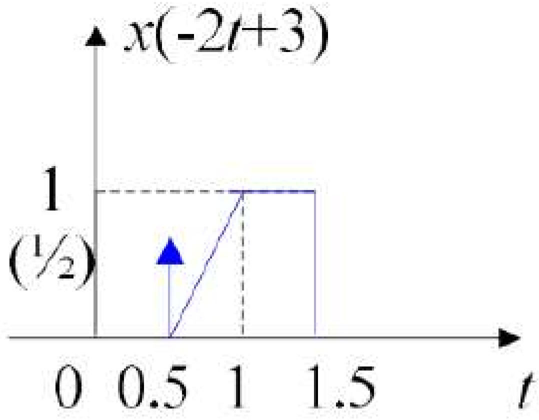
或 $$=u(t)-u(t-1)-\delta(t-1)$$



【思考】：直接写 $f(t)$ 的表达式再求导？

4、信号的展缩、翻转、平移

例2：已知 $x(3-2t)$的波形图如下所示，画出$x(t)$ 的波形图。



【解】

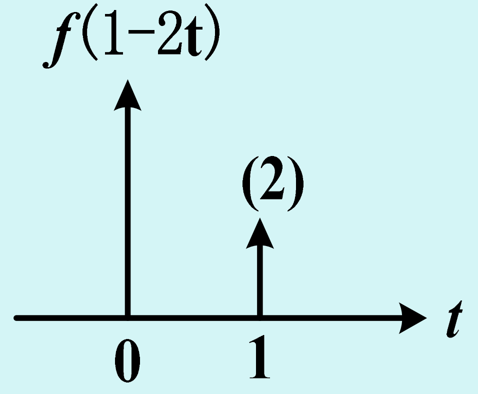
$$x(3-2t)=x_1(3-2t)+\frac{1}{2}\delta(t-0.5)$$

令 3-2t=u，则 $t=-\frac{1}{2}u+\frac{3}{2}$，

$$x(u)=x_1(u)+\frac{1}{2}\delta(-\frac{1}{2}u+1)=x_1(u)+\delta(u-2)$$

4、信号的展缩、翻转、平移

【例3】已知 $f(1\text{-}2t)=2\delta(t\text{-}1)$ 求 $f(t)$



【解】：

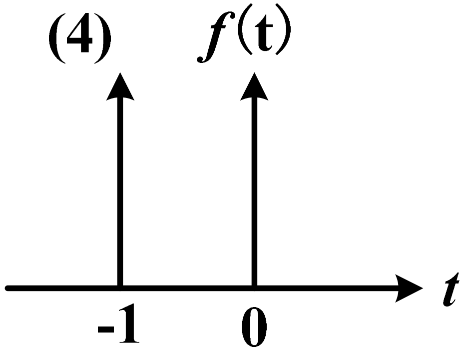
$$1-2t=t' \quad \rightarrow \quad t=\frac{1-t'}{2}$$

$$f(t')=2\delta\left(\frac{1-t'}{2}-1\right)=2\delta\left(-\frac{t'}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

即 $$f(t)=2\delta(-\frac{t}{2}-\frac{1}{2})$$

$$=2\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\delta(t+1)=4\delta(t+1)$$



信号的时域分析总结

- 信号的分类
  - 确定性信号/随机信号
  - 连续时间信号/离散时间信号
  - 周期信号/非周期信号
  - 功率信号/能量信号
- 常用信号及其基本特性
  - 复指数信号（连续/离散）
  - 冲击信号和单位样值信号
  - 单位阶跃信号（连续/离散）
- 信号的时域运算
  - 信号和、信号乘积
  - 信号微积分运算
  - 信号求和与差分
  - 信号展缩/翻转/平移
  - 信号分解
- 卷积积分和卷积和
  - 卷积积分/卷积和定义
  - 卷积积分/卷积和的性质
  - 卷积积分/卷积和的求解

第三章 系统的时域分析

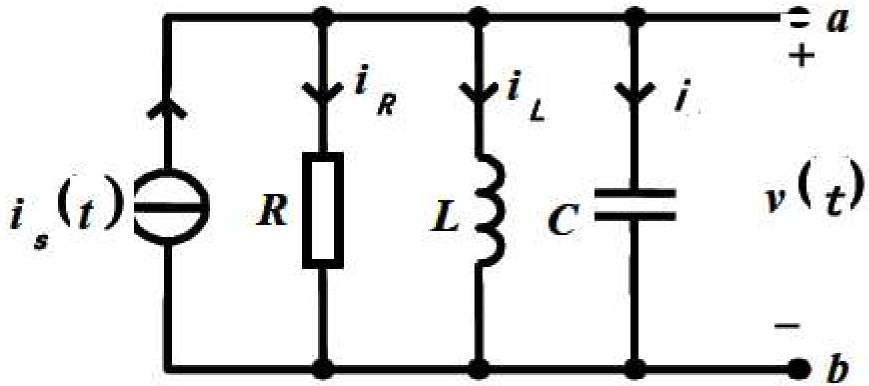
- 经典法
  - 齐次解 → 特征方程→特征根→齐次解（待定系数）
  - 齐次解+特解+初始条件(0+)→全响应解
  - 特 解 → 根据输入信号函数形式→设含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数定出特解

- 双零法
  - 零输入（齐次解） → 特征方程→特征根→含待定系数的齐次解→由初始条件(0-) →零输入响应
  - 零状态 → 方法①：先求解冲激响应，再计算输入信号与冲激响应的卷积来得到零状态响应。方法②：将输入信号等效为某虚拟系统的冲激响应，然后求解系统和虚拟系统的总响应，得到零状态响应。

- 变换域 → 拉氏变换等

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

微分方程的列写



电阻 $i_R(t)=\dfrac{1}{R}v(t)$

电感 $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$

电容 $i_C(t)=C\dfrac{dv(t)}{dt}$

根据KCL $i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$

- 换路期间电容两端的电压和流过电感中的电流不会发生突变，故

$u_C(0^-)=u_C(0^+)$， $i_L(0^-)=i_L(0^+)$

代入元件伏安关系，并化简有

$$C\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{di_S(t)}{dt}$$

RCL并联电路系统的二阶微分方程。

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

4) 冲激响应表——高阶系统的冲激响应（有重根）

重根冲激响应的表达式：

$$\boxed{\frac{1}{(p-a)^n}\delta(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)}$$

例：2.6.5：系统方程如下，求其冲激响应。

$$(p+1)^3(p+2)y(t)=\left(4p^3+16p^2+23p+13\right)f(t)$$

解：
$$H(p)=\frac{4p^3+16p^2+23p+13}{(p+1)^3(p+2)}=\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{3}{p+1}+\frac{1}{p+2}$$

故有：
$$\boxed{\begin{aligned}h(t)&=H(p)\delta(t)=\frac{2}{(p+1)^3}\delta(t)+\frac{1}{(p+1)^2}\delta(t)+\frac{3}{p+1}\delta(t)+\frac{1}{p+2}\delta(t)\\&=t^2e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t)+3e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)\end{aligned}}$$

部分分式展开方法请参阅附录一。

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

4) 冲激响应表——高阶系统的冲激响应（有复根）

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{N(p)}{D(p)}\delta(t)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$

如果遇到冲激响应如果只能化简到：

$$h(t)=\frac{a_1 p+b_1}{(p-a)^2+b^2}\delta(t)+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{c_i}{p-\lambda_i}\delta(t)$$

$$=\frac{a_1(p-a)}{(p-a)^2+b^2}\delta(t)+\frac{a_1 a+b_1}{b}\frac{b}{(p-a)^2+b^2}\delta(t)+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{c_i}{p-\lambda_i}\delta(t)$$

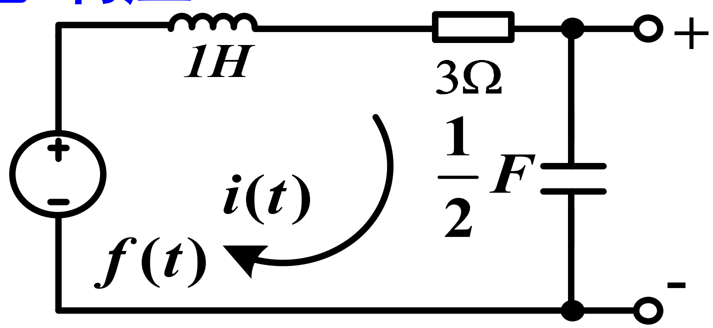
可以记住并使用下式来计算前面两项的响应。

$$\begin{cases} h_1(t)=\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}\delta(t)=e^{at}\sin(bt)u(t) \\ h_2(t)=\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}\delta(t)=e^{at}\cos(bt)u(t) \end{cases}$$

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

例1 已知如图示系统，试求输入为$f(t)=10e^{-3t}u(t)$，初始状态为$i(0^-)=0$，$u_c(0^-)=5$的响应。



解：1)先求零输入响应：①根据KCR和KVL列写微分方程

$$p^2 i(t) + 3pi(t) + 2i(t) = pf(t)$$

②列特征方程，求特征根 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$

③齐次解： $i_{zi}(t) = k_1 e^{-t} u(t) + k_2 e^{-2t} u(t)$

④确定k_1，k_2初始条件，需知道$i(0\text{-})$和$i'(0\text{-})$。由KVL

$$Ri(0^-) + Li'(0^-) + u_c(0^-) = 0 \rightarrow \quad i'(0^-) = \frac{1}{L}[-Ri(0^-) - u_c(0^-)] = -5$$

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

1、系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

⑤将$i(0\text{-})$和$i'(0\text{-})$带入齐次解：$i_{zi}(t)=k_1e^{-t}u(t)+k_2e^{-2t}u(t)$

可得零输入响应为：$i_{zi}(t)=-5e^{-t}u(t)+5e^{-2t}u(t)$

$$i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)$$

2)求冲激响应：将$f(t)=\delta(t)$带入 $p^2i(t)+3pi(t)+2i(t)=pf(t)$ 可得

$$h(t)=\frac{p}{p^2+3p+2}\delta(t)=\frac{2}{p+2}\delta(t)-\frac{1}{p+1}\delta(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$$

3)零状态响应为：$i_{zs}(t)=f(t)*h(t)=(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})u(t)$

4)全响应为：

$$i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)=\underbrace{-5e^{-t}+5e^{-2t}}_{\text{零输入响应}}\underbrace{-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t}}_{\text{零状态响应}}$$

1、连续时间LTI系统模型的建立及求解

系统全响应 = 自然响应 + 强迫响应

$$y(t) = \overbrace{\underbrace{-5e^{-t} + 5e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} \; -5e^{-t} + 20e^{-2t}}^{\text{自然响应}\ y_n(t)} \underbrace{}_{} \qquad t \ge 0$$

零输入响应 = 一部分自然响应

零状态响应 = 另一部分自然响应 + 强迫响应

注意：系统全响应中，零输入响应和零状态响应共同作用，有可能会产生系统齐次解中不存在的特解，也有可能抵消掉一些自然响应项。

2、离散时间LTI系统的求解

零输入响应的初始条件：

- n 阶连续时间系统初始条件：**0-时刻$y_{zi}(t)$的0～n-1阶导数**
- N 阶离散时间系统初始条件：**连续N个时刻$y_{zi}(n)$的样点值**

(注意：P83 例3.5.1之后一段话)

如果是N个时刻的初始条件，要注意给定的初始条件是$y_{zi}(.)$还是$y(.)$！

- $n<0$时， $y(n)=y_{zi}(n)$ $y_{zi}(-1)=y(-1)$、$y_{zi}(-2)=y(-2)$…
- $n\geq 0$时， $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$！ $y_{zi}(0)\neq y(0)$、$y_{zi}(1)\neq y(1)$…

一般的，待定系数可由初始态$y_{zi}(-1)$、$y_{zi}(-2)$、…、$y_{zi}(-N)$来确定.

2、离散时间LTI系统的求解

【例1】 某因果系统的差分方程为 $y(n)-4y(n-1)+3y(n-2)=x(n)$。初始条件为 $y(-1)=0$，$y(-2)=1/2$，$x(n)=2^n u(n)$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$

【解】：

①列特征方程，求特征根

$$D(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3=0 \quad \rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=3$$

②零输入响应的齐次解模式：

$$y_{zi}(n)=c_1(1)^n+c_2(3)^n$$

③由初始条件求待定系数。此处 $y(-1)=y_{zi}(-1)$ 和 $y(-2)=y_{zi}(-2)$ 与输入无关，可直接带入差分方程

$$\begin{aligned} y_{zi}(-1)&=y(-1)=c_1+(3)^{-1}c_2=0 \\ y_{zi}(-2)&=y(-2)=c_1+(3)^{-2}c_2=1/2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1=3/4 \\ c_2=-9/4 \end{cases}$$

④零输入响应为：

$$y_{zi}(n)=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}(3)^n, \quad n\geq 0$$

2、离散时间LTI系统的求解

【例1】 某因果系统的差分方程为 $y(n)-4y(n-1)+3y(n-2)=x(n)$。初始条件为$y(0)=-0.5$，$y(1)=0$，$x(n)=2^n u(n)$，求系统的零输入响应$y_{zi}(n)$

【解】：

①列特征方程，求特征根

$$D(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3=0 \quad \rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=3$$

②零输入响应为待定系数的齐次解：

$$y_{zi}(n)=c_1(1)^n+c_2(3)^n$$

③由初始条件求待定系数，此处 $y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0)$ $y(1)=y_{zi}(1)+y_{zs}(1)$

$$\begin{cases} y(1)-4y(0)+3y(-1)=x(1)=2 \rightarrow y(-1)=y_{zi}(-1)=0 \\ y(0)-4y(-1)+3y(-2)=x(0)=1 \rightarrow y(-2)=y_{zi}(-2)=1/2 \end{cases}$$

④零输入响应为：

$$y_{zi}(n)=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}(3)^n, \quad n\geq 0$$

几类常见的题目（系统时域分析）

第一类题目：系统线性/非线性、时变/时不变性的判定

第二类题目：单位冲激响应h(t)/单位样值响应h(n)

第三类题目：关于响应的求解（零输入/零状态法）、响应模式的分析

第四章　连续时间信号与系统频域分析

目录

Contents

1、傅里叶级数

§4.2周期信号的傅里叶展开

- 周期信号三角形式的FS （能算）
- 周期信号指数形式的FS（能算）
- 三角形式和指数形式傅里叶级数的互相转化（能算）
- 周期信号的频谱（能算、会画）

完备正交函数集：（正交性证明，能记住函数集，Ω是参数！）

①三角函数集{1,cos(kΩt), sin(kΩt), k=1,2,……}；

②虚指数函数集{$e^{jk\Omega t}$, k=0,±1, ±2,……}。

三角形式的FS

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\Omega t+b_k\sin k\Omega t)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(k\Omega t+\varphi_k)$$

单边谱

指数形式的FS

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\Omega t}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|F_k|e^{j\varphi_k}e^{jk\Omega t}$$

双边谱

1、傅里叶级数

求解周期信号频谱的方法：

（1）如果$f(t)$为正余弦之和的形式：

第一步：直接与三角形式的FS对照，得到单边谱；

第二步：由单边谱得出双边谱。

（2）如果$f(t)$为一般形式：

根据FS系数的求解公式计算得到

实信号单边谱与双边谱的关系：

（1）幅度谱：偶对称，直流相同，其余减半；

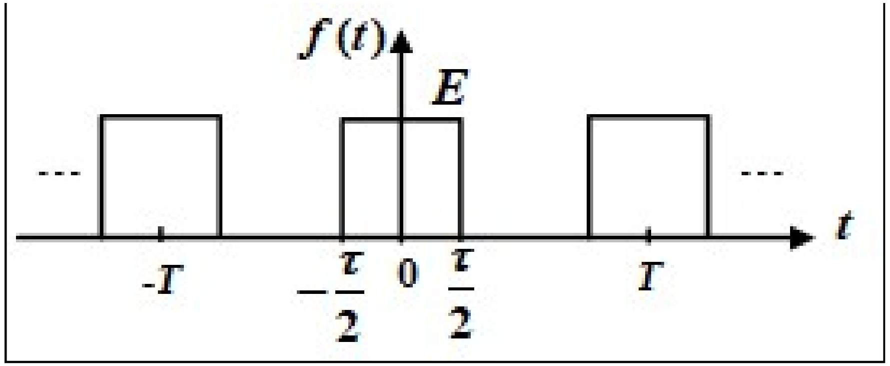
（2）相位谱：奇对称

1、傅里叶级数

几类具有对称特性的波形

- **奇信号：** 周期信号$f(t)$关于t=0反对称， 即有 $f(t)=-f(-t)$
- **偶信号：** 周期信号$f(t)$关于t=0对称，即有 $f(t)=f(-t)$
- **奇谐信号：** 波形移动T/2后与原信号关于时间轴对称，即有 $f(t)=-f(t\pm T/2)$
- **偶谐信号：** 波形移动T/2后与原信号重合，即有 $f(t)=f(t\pm T/2)$

例4.2.1 求右图所示信号的三角形式和虚指数形式的傅里叶级数展开，并画出频谱



解：(2) 展开为指数形式的傅里叶级数

①由图可知$f(t)$周期为T，所以基波角频率$\Omega=2\pi/T$，周期内的表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}E, |t|<\tau/2\\0, \tau/2<|t|<T/2\end{cases}$$

②指数形式的傅里叶级数：$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\Omega t}$

$$F_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jk\Omega t}dt$$

③确定系数（定义或三角转换）

$$F_k=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ee^{-jk\Omega t}dt$$

$$=\frac{E\tau}{T}Sa(\frac{k\Omega\tau}{2})$$

$$=|F_k|e^{j\varphi_k}$$

$$|F_k|=\frac{E\tau}{T}\left|Sa(\frac{k\Omega\tau}{2})\right|$$

$$\varphi_k=\begin{cases}0, F_k>0\\\pi, F_k<0, k>0\\-\pi, F_k<0, k<0\end{cases}$$

φ_k奇函数！

1、傅里叶级数

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|F_k|^2=c_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{c_k}{\sqrt{2}})^2$$

——功率有限信号的巴什瓦等式

周期信号的平均功率等于直流分量及各次谐波分量功率之和。

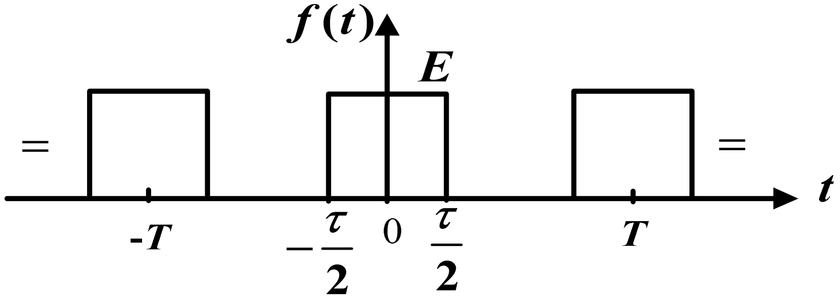
$|F_k|^2 \sim k\Omega$关系——称为周期信号的双边功率谱，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$(c_k/\sqrt{2})^2 \sim k\Omega$关系——称为周期信号的单边功率谱，$k=0,1,2,\cdots$

功率谱的意义：

- 反映了周期信号功率按各次谐波分量的振幅大小分配 给各个分量（正比关系）。
- 根据功率谱，可以确定信号**有效频带宽度**。

例4.3.1 设图所示的周期矩形脉冲信号中E=1,T=1/4s,τ=1/20s,求频带[0，2π/τ]内各谐波功率之和占信号总平均功率的比例。



解：

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = 4\int_{-1/40}^{1/40} 1dt = 0.2$$

$$\Omega = 2\pi/T = 8\pi, (0, 2\pi/\tau) = [0, 40\pi]$$

$$F_k = \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{k\Omega\tau}{2}\right) = \frac{1}{5} Sa\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

$$P' = |F_0|^2 + 2[|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2]$$

$$= (\frac{1}{5})^2 + 2\cdot(\frac{1}{5})^2 \left[Sa^2(\frac{\pi}{5}) + Sa^2(\frac{2\pi}{5}) + Sa^2(\frac{3\pi}{5}) + Sa^2(\frac{4\pi}{5}) \right] = 0.1806$$

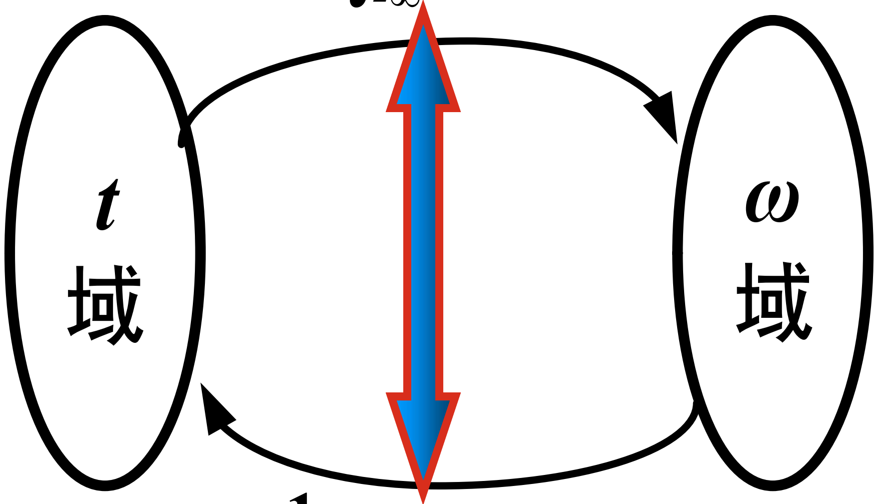
$$\frac{P'}{P} = \frac{0.1806}{0.2} = 90\%$$

2、傅里叶变换

常用傅里叶变换对（最最常用、最最基础）

傅里叶变换对

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

2、傅里叶变换：性质

傅里叶变换：$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}[f(t)]$

傅里叶反变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(j\omega)]$

1. 唯一性
2. 线性特性
3. 奇偶特性
4. 共轭特性
5. 对称特性
6. 时域展缩特性
7. 时移特性
8. 频移特性
9. 时域微分特性
10. 频域微分特性
11. 时域卷积定理
12. 频域卷积定理
13. 时域积分定理
14. 信号能量与频谱关系

2、傅里叶变换：性质

奇偶虚实性（总结）

时域	频域
偶信号	偶函数
奇信号	奇函数
$f^*(t)$	$F^*(-j\omega)$
$f^*(-t)$	$F^*(j\omega)$
$f(-t)$	$F(-j\omega)$
实信号	实部为偶函数，虚部为奇函数
实偶信号	实偶函数，虚部为0
实奇信号	虚奇函数，实部为0

2、傅里叶变换：基本变换对

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$Sa(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad a>0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad a>0$$

基本性质

① 时移 $f(t+t_0)=f(t)*\delta(t+t_0)\leftrightarrow F(j\omega)e^{j\omega t_0}$

② 频移 $f(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]=F[j(\omega-\omega_0)]$

③ 时域微分 $f'(t)=f(t)*\delta'(t)\leftrightarrow F(j\omega)\cdot j\omega$

④ 频域微分 $tf(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[j2\pi\delta'(\omega)]=jF'(j\omega)$

⑤ 时域积分 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=f(t)*u(t)\leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(j\omega)}{j\omega}$

易错公式 $t^n f(t)\leftrightarrow j^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(j\omega)$

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$f(at+b)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})e^{j\frac{b}{a}\omega}$$

3、傅里叶反变换

例：求$F(j\omega)$的反变换，其中：$F(j\omega)=\dfrac{\omega^2-4j\omega-5}{\omega^2-3j\omega-2}$

【解】：

1. 唯一性（时频域一一对应）
2. 线性性（齐次和叠加性）：

利用上述两个性质，拆分成熟悉的频域分量之和，然后求每个频域分量的反变换。

$$A=\frac{p+3}{(p+2)(p+1)}(p+2)\Big|_{p=-2}=-1$$

$$B=\frac{p+3}{(p+2)(p+1)}(p+1)\Big|_{p=-1}=2$$

$$F(j\omega)=\frac{-\omega^2+4j\omega+5}{-\omega^2+3j\omega+2}$$

$$=\frac{(j\omega)^2+4j\omega+5}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=1+\frac{-1}{j\omega+2}+\frac{2}{j\omega+1}$$

$$f(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)+2e^{-t}u(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

3、傅里叶反变换

例：求$F(j\omega)$的反变换，其中：$F(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)^3}$

解：①部分分式展开

$$F(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)^3}$$

$$=\frac{k_1}{j\omega+1}+\frac{a_0}{(j\omega+2)^3}+\frac{a_1}{(j\omega+2)^2}+\frac{a_2}{j\omega+2}$$

$$=\frac{1}{j\omega+1}+\frac{-1}{(j\omega+2)^3}+\frac{-1}{(j\omega+2)^2}+\frac{-1}{j\omega+2}$$

②求每部分的傅里叶反变换

$$f(t)=e^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-2t}-te^{-2t}-e^{-2t}\leftrightarrow F(j\omega)$$

3、傅里叶反变换

例：求$F(j\omega)$的反变换，其中：$F(j\omega)=\dfrac{2+j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+5}$

解：方法一：展开为复数

$$F(j\omega)=\frac{2+j\omega}{(j\omega+1+2j)(j\omega+1-2j)}$$

$$=\frac{2+j}{4}\frac{1}{j\omega+1+2j}+\frac{2-j}{4}\frac{1}{j\omega+1-2j}$$

$$f(t)=\cdots=\left(\cos 2te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right)u(t)$$

方法二：记公式

$$\cos\omega_0 te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2},a>0$$

$$\sin\omega_0 te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2},a>0$$

3、傅里叶反变换

例：已知$F(j\omega)=Sa(\omega)e^{-j\omega}$，求$f(t)$

解：

①由傅里叶变换对：

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\omega\tau/2\right)$$

②配平参数，令$\tau=2$，可得：

$$G_2(t) \leftrightarrow 2Sa\left(\omega\right) \Rightarrow \frac{G_2(t)}{2} \leftrightarrow Sa\left(\omega\right)$$

③由时移特性可得：

$$f(t)=\frac{G_2(t-1)}{2}$$

4、周期信号的FT

从周期延拓的角度：

$$F_T(j\omega)=F(j\omega)\cdot\Omega\delta_\Omega(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Omega F(jk\Omega)\delta(\omega-k\Omega)$$

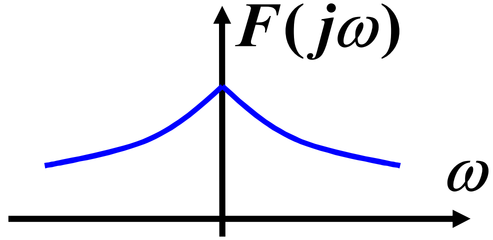
从FS级数展开角度：

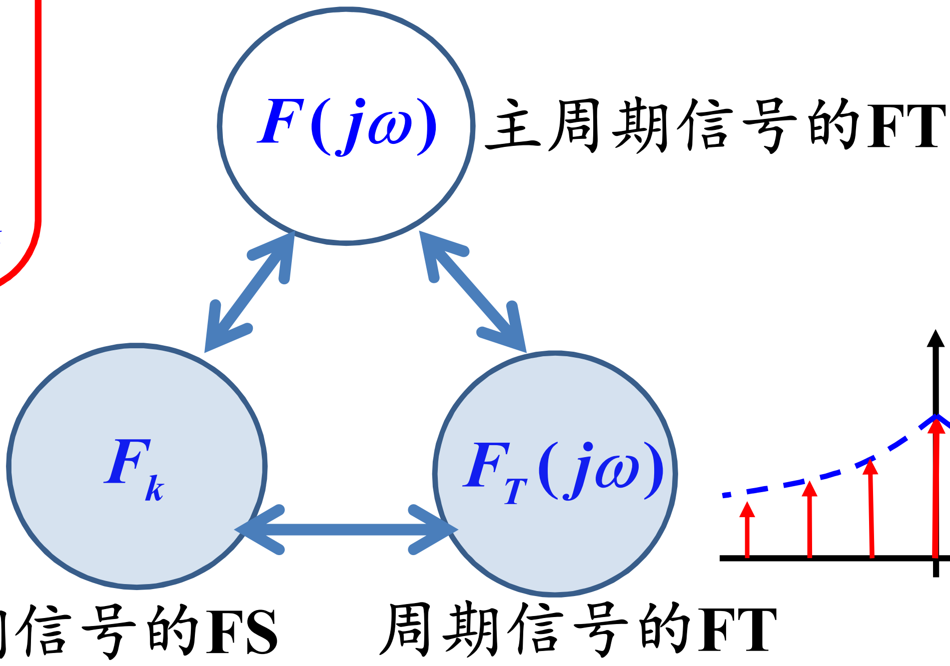
$$F_T(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi F_k\delta(\omega-k\Omega)$$

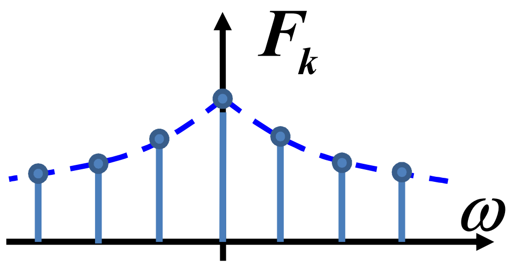
$$\Omega F(jk\Omega)=2\pi F_k$$

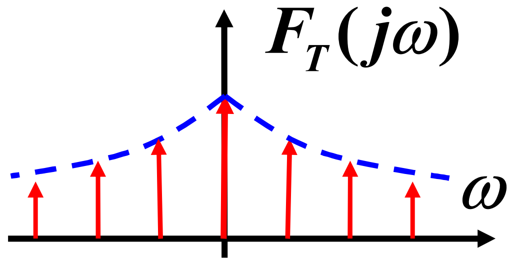
$$F_k=\frac{F(jk\Omega)}{T}=\left.\frac{F(j\omega)}{T}\right|_{\omega=k\Omega}$$

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}TF_k$$







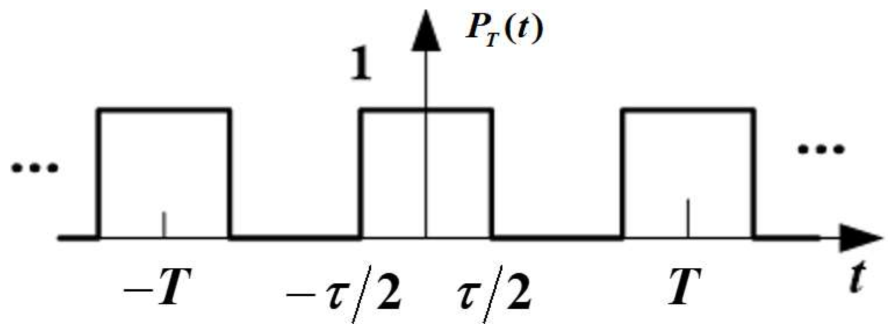


4、周期信号的FT

例2：求周期矩形脉冲信号 $P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_\tau(t-nT),\quad \tau<T$ 的频谱

①傅里叶级数展开

$$P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk\Omega t},\quad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$



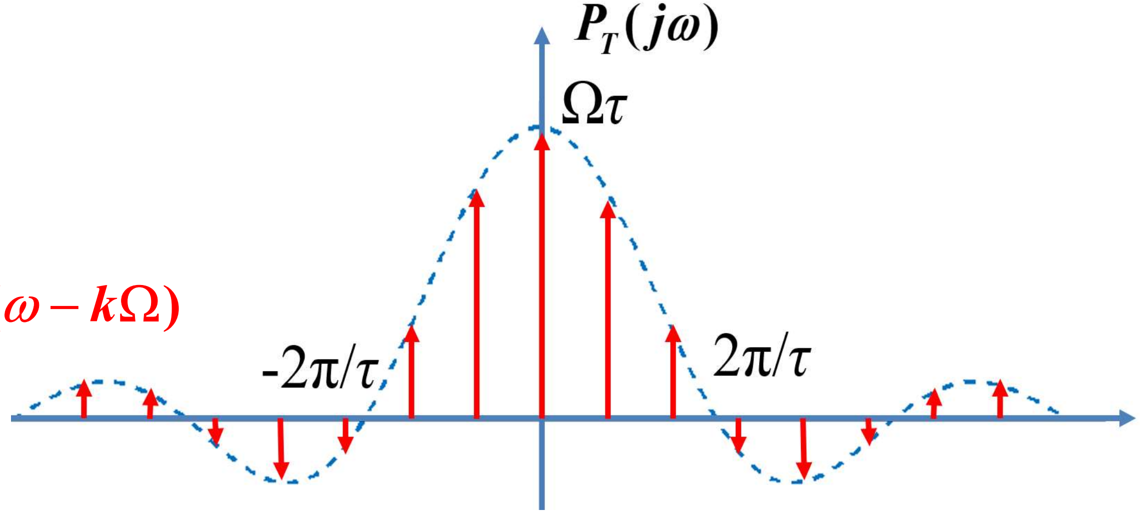
②求谐波分量的系数

$$F_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}P_T(t)e^{-jk\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jk\Omega t}dt=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\Omega\tau}{2}\right)=\frac{\Omega\tau}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\Omega\tau}{2}\right)$$

③对展开式做傅里叶变换

$$P_T(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\cdot 2\pi\delta(\omega-k\Omega)$$

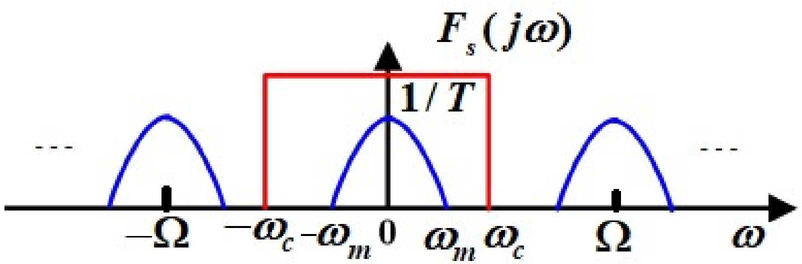
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Omega\tau\cdot\mathrm{Sa}\left(\frac{k\Omega\tau}{2}\right)\cdot\delta(\omega-k\Omega)$$

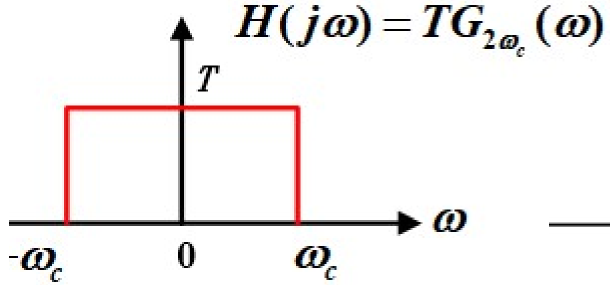


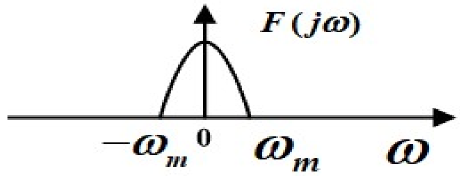
5、抽样定理

1.冲激串抽样

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\Omega\delta_\Omega(\omega)=\cdots+\frac{1}{T}F(j\omega+j\Omega)+\frac{1}{T}F(j\omega)+\frac{1}{T}F(j\omega-j\Omega)+\cdots$$







$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot F_s(j\omega)=F(j\omega),\quad \omega_m<\omega_c<\Omega-\omega_m$

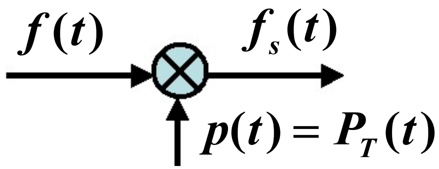
ω_m	信号最高频率（固定）
Ω 或 ω_s	冲激串基波频率（可设计）
ω_c	理想低通滤波器截止频率（可设计）

如果满足：$\omega_m<\omega_c<\Omega-\omega_m$，那么经过“抽样/滤波”后的抽样信号包含了原连续时间信号的全部信息。

5、抽样定理

2.脉冲串抽样

抽样信号为脉冲串$P_T(t)$ (开关函数)



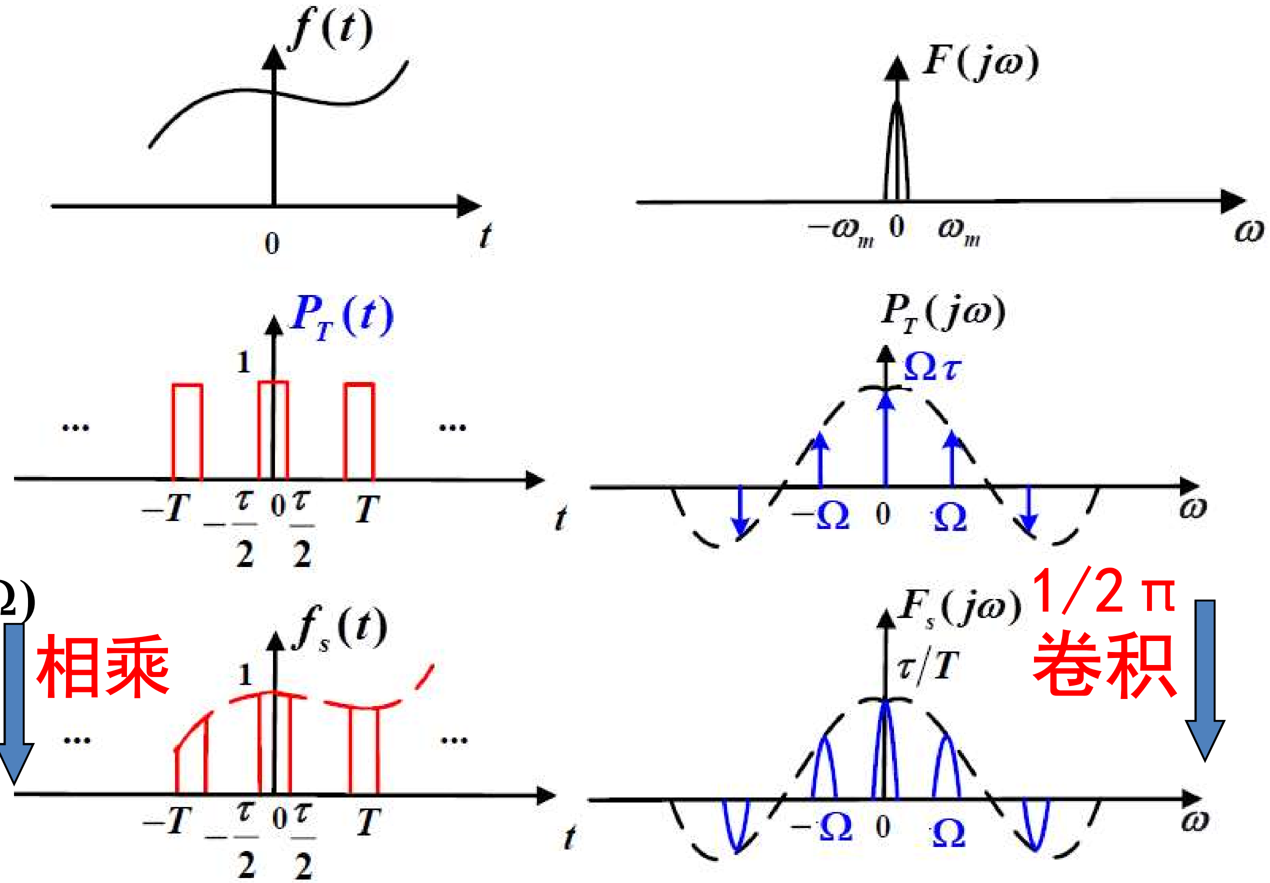
$$f_s(t) = f(t)\cdot P_T(t)$$

$$= f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\tau(t-nT)$$

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * P_T(j\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T}\mathrm{sa}\left(\frac{k\Omega\tau}{2}\right)F(j\omega - jk\Omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k F(j\omega - jk\Omega)$$

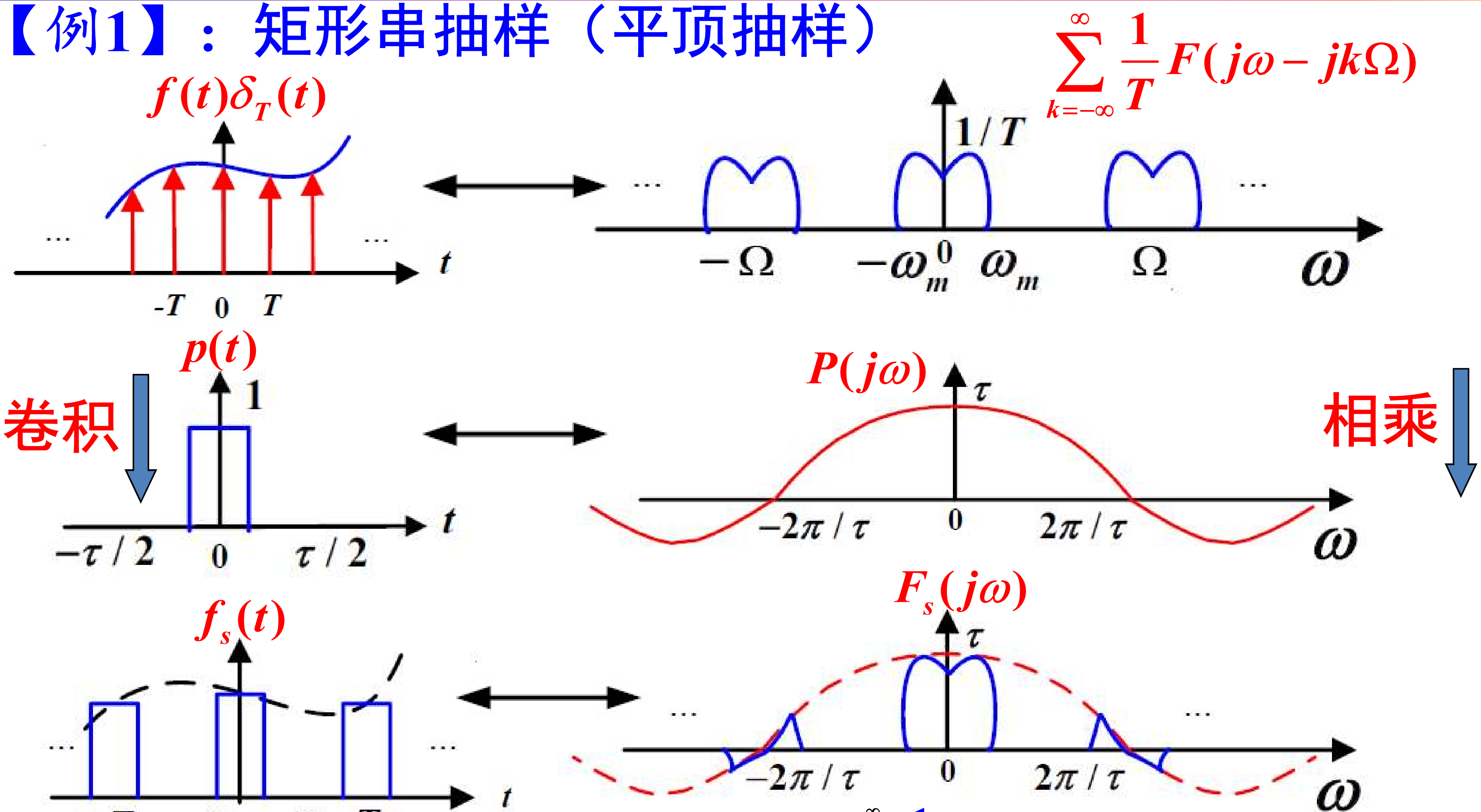


冲激串抽样（理想抽样）：频谱等幅周期延拓（$1/T$）

脉冲串抽样（曲顶抽样）：频谱衰减周期延拓（F_k）

5、抽样定理

【例1】：矩形串抽样（平顶抽样）



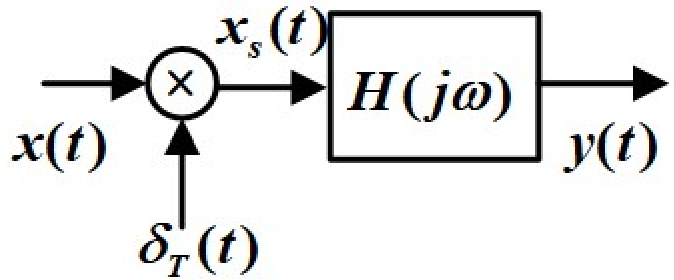
$$f_s(t)=\left[f(t)\delta_T(t)\right]*p(t) \longleftrightarrow$$

$$F(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}P(j\omega)F(j\omega-jk\Omega)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T}Sa(\frac{\tau\omega}{2})F(j\omega-jk\Omega)$$

5、抽样定理

【例2】：一个理想抽样系统如图，f_s=4Hz, 对信号抽样后理想低通滤波器 $H(j\omega)=0.25G_{8\pi}(\omega)$ 。今有两信号 $x_1(t)=\cos(2\pi t)$ 和 $x_2(t)=\cos(5\pi t)$，经过抽样和还原后有没有失真？为什么？



解：①将信号转换到频域：

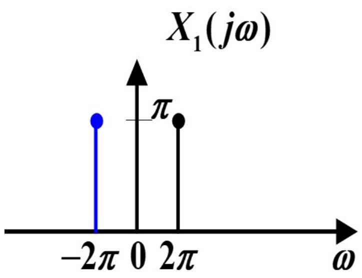
$$x_1(t)=\cos(2\pi t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega+2\pi)+\pi\delta(\omega-2\pi)$$

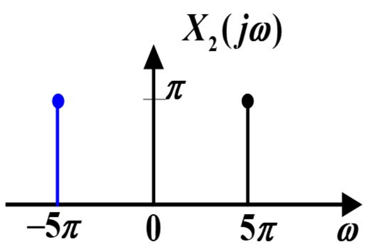
$$x_2(t)=\cos(5\pi t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega+5\pi)+\pi\delta(\omega-5\pi)$$

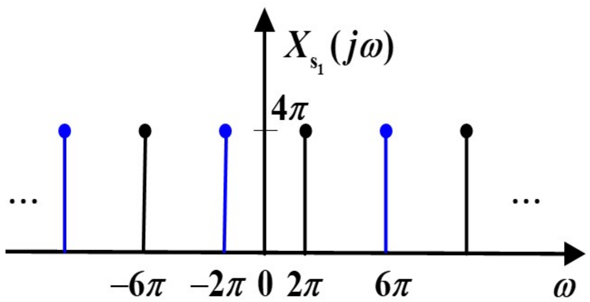
②求抽样后$x_s(t)$的频谱。易知$\Omega=2\pi f_s=8\pi$，抽样后频谱以8π为周期延拓。$x(t)\delta_T(t)\leftrightarrow X(j\omega) * \Omega\delta_\Omega(\omega)/(2\pi)$

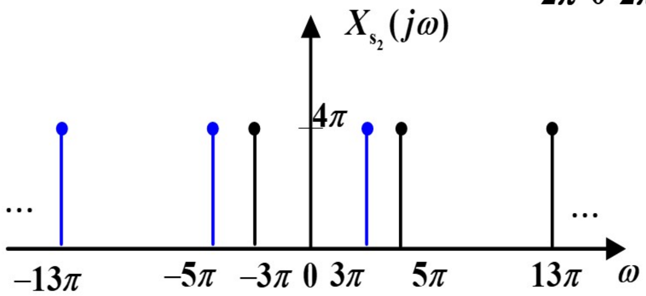
③画出滤波器频谱图

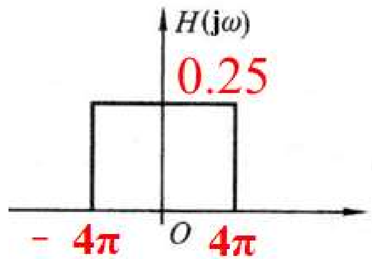
④将滤波器$H(j\omega)$与抽样信号频谱相乘





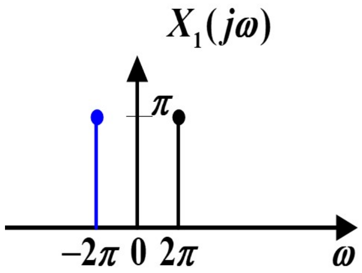






5、抽样定理

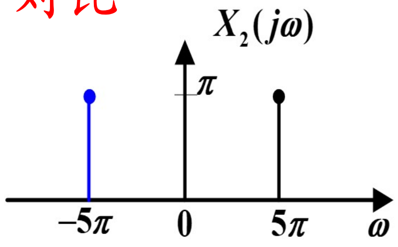
⑤将滤波器输出与原信号进行对比



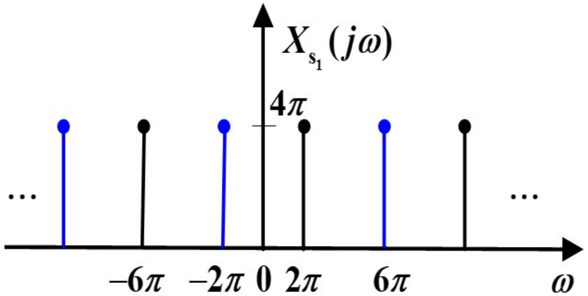
$$x_1(t)=\cos(2\pi t)$$

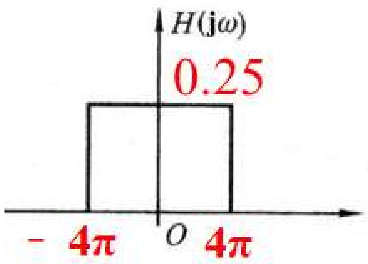
$$\Omega = 8\pi > 2\omega_1 = 2\times 2\pi$$

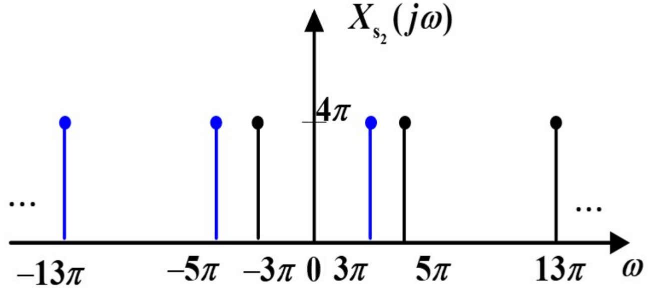
$$\Omega = 8\pi < 2\omega_2 = 2\times 5\pi$$

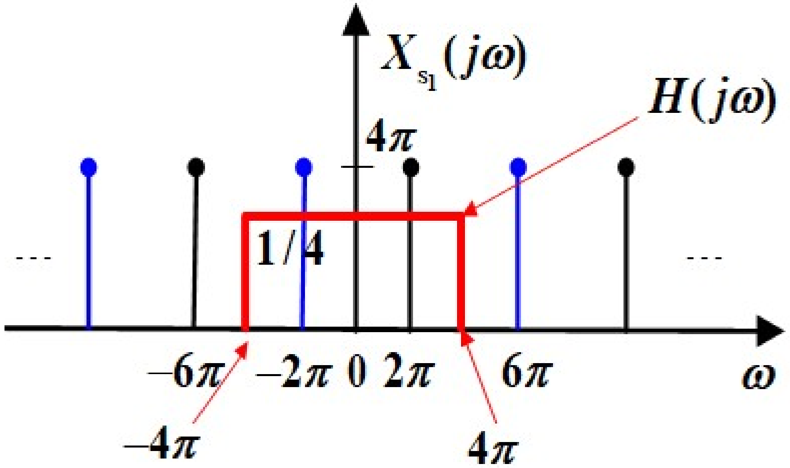


$$x_2(t)=\cos(5\pi t)$$

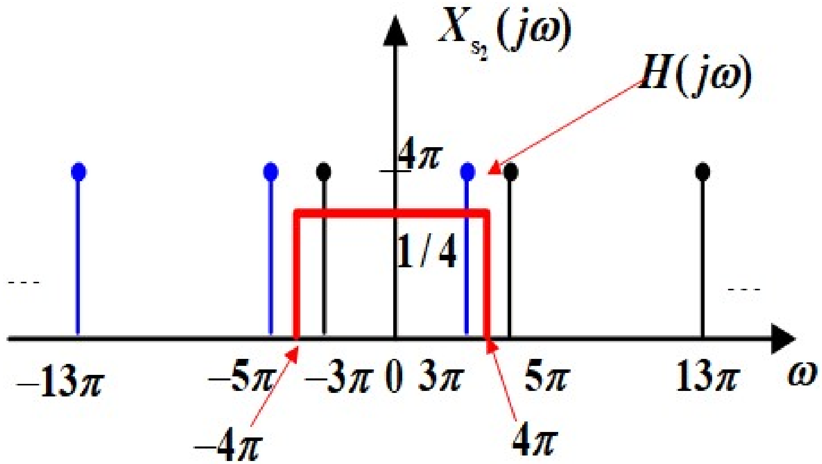








$$y_1(t)=\cos(2\pi t)$$



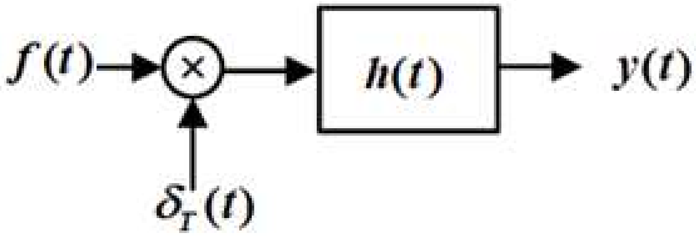
$$y_2(t)=\cos(3\pi t)$$

5、抽样定理

【例3】：一连续时间系统如图示，输入信号$f(t)$被抽样后，通过一个单位冲激响应为$h(t)$的系统，输出$y(t)$。已知$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=G_{\pi/2}(\omega)$，$h(t)=2G_1(t)$。$\delta_T(t)$为单位强度周期脉冲串，且$T=2$。

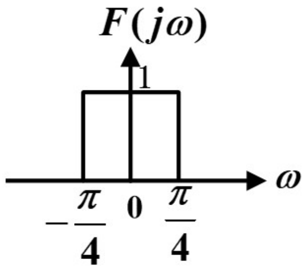
(1)请画出$\omega\in(-2\pi,2\pi)$区间上$y(t)$的频谱

(2)给出从$y(t)$恢复$f(t)$的方案



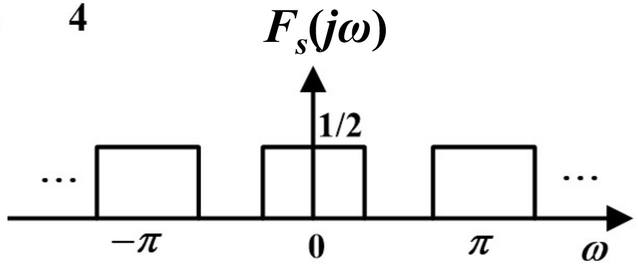
【解】：

①画出信号频谱$F(j\omega)$

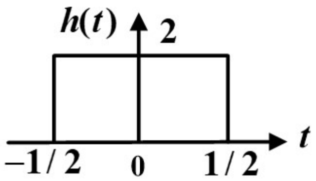


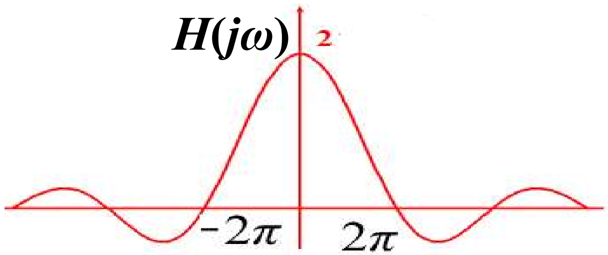
②求抽样信号的频谱（$\Omega=2\pi/T=\pi$）

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\Omega\delta_\Omega(\omega)=\frac{1}{T}F(j\omega)*\delta_\pi(\omega)$$

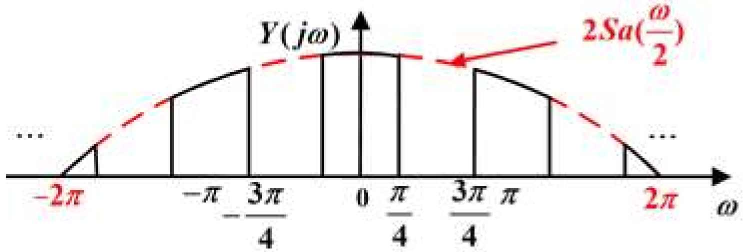


③画出滤波器$H(j\omega)$频谱图

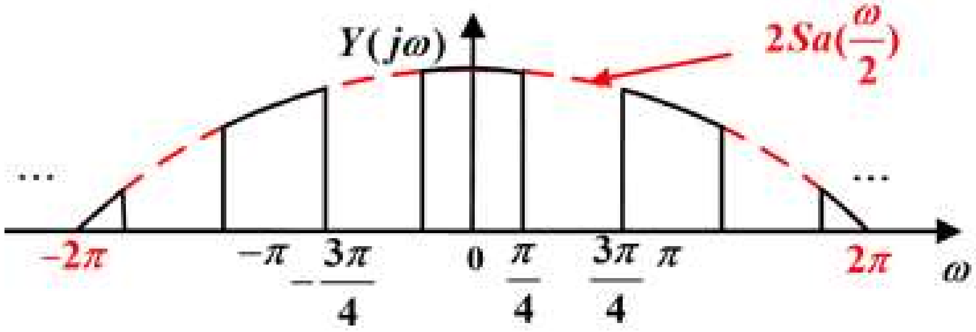




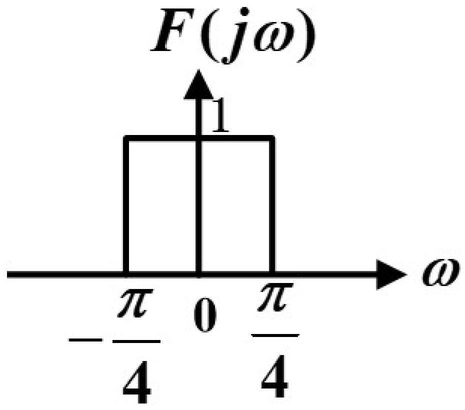
④画出$Y(j\omega)=F_s(j\omega)H(j\omega)$



5、抽样定理

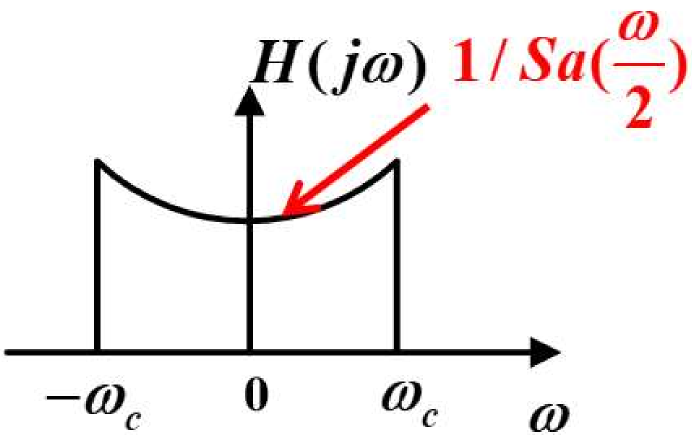


$Y(j\omega)$
$2Sa(\frac{\omega}{2})$
…
…
-2π
$-\pi$
$-\frac{3\pi}{4}$
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
2π
ω



$F(j\omega)$
1
$-\frac{\pi}{4}$
0
$\frac{\pi}{4}$
ω

$Y(j\omega)$
$H(j\omega)$
$F(j\omega)$



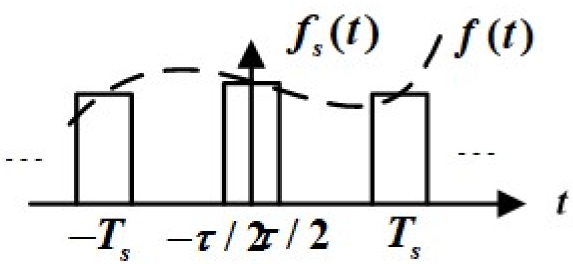
$H(j\omega)$
$1/Sa(\frac{\omega}{2})$
$-\omega_c$
0
ω_c
ω

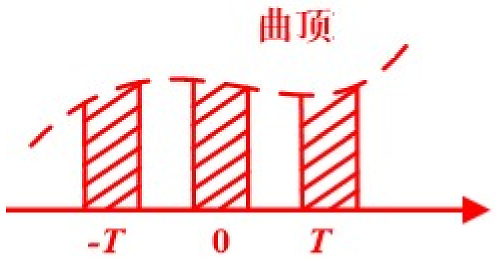
5、抽样定理

【例4】：已知连续信号$f(t)$的频谱为$F(j\omega)$，非零频带范围为($-\omega_m$，ω_m)，若$f(t)$被宽度为τ的矩形信号以周期T_s平顶抽样，抽样后信号$f_s(t)$的波形如下如图所示。

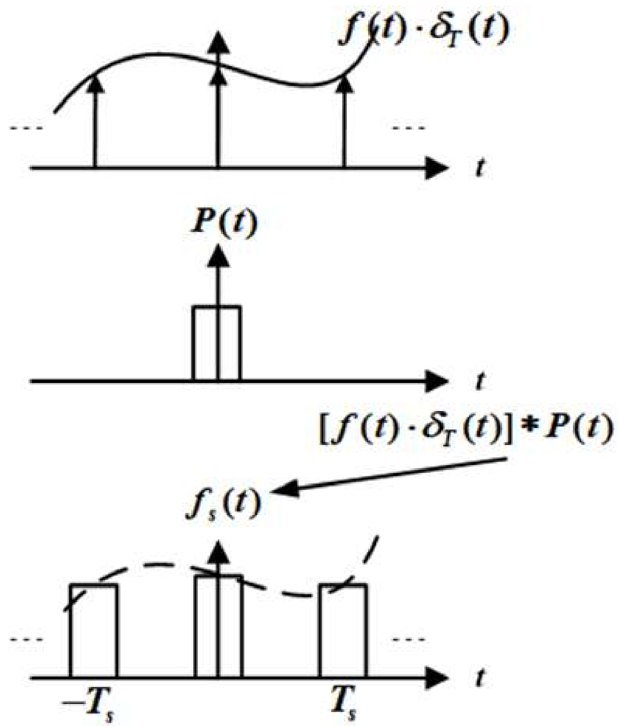
1.求$f_s(t)$的频谱

2.为了从$f_s(t)$无失真地恢复$f(t)$，问需要满足那些条件？如何恢复？





脉冲串抽样信号



5、抽样定理

三种抽样方法

1. 信号要求：设 $F(j\omega)=0, |\omega|>\omega_m$ 即带限信号 $\omega\in(-\omega_m,\omega_m)$

2. 抽样现象：

$\Omega>2\omega_m \rightarrow \Omega-\omega_m>\omega_m \rightarrow F(j\omega)$ 以Ω 为周期延拓，不会发生重叠

$\Omega<2\omega_m \rightarrow \Omega-\omega_m<\omega_m \rightarrow F(j\omega)$ 以Ω 为周期延拓，会发生重叠

3. 信号滤波重建：(注：不一定局限低通，也可能是带通)

恢复$f(t)$,前提：$\Omega>2\omega_m$ 且 $\omega_m<\omega_c<\Omega-\omega_m$

冲激串抽样（理想抽样） $H(j\omega)=TG_{2\omega_c}(\omega)$

脉冲串抽样（曲顶抽样） $H(j\omega)=\dfrac{T}{\tau}G_{2\omega_c}(\omega)$

脉冲串抽样（平顶抽样） $H(j\omega)=\dfrac{T}{\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})}G_{2\omega_c}(\omega)$

保证 $Y(j\omega)=F(j\omega)$

第五章 离散时间信号与系统频域分析

目录
Contents

1、离散傅里叶级数

离散周期信号的傅里叶级数（DFS）

DFS变换对 $\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$

数字基频（角频率）：$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

DFS正变换 $$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

DFS反变换 $$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{jk\Omega_0 n}$$

或

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N}, -\infty < k < \infty \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j2\pi kn/N}, -\infty < n < \infty \end{cases}$$

(1)离散傅里叶级数变换对中，$\tilde{x}(n)$ 和$\tilde{X}(k)$ 都以 N 为周期。

(2)$\tilde{x}(n)$表示第n个采样点信号的时域值

（连续时间关于采样间隔ΔT 的归一化）

(3)$\tilde{X}(k)$表示离散周期序列的k倍谐波，即 $2\pi k/N = k\Omega_0 = k\omega_0 / f_s$

(数字域角频率关于采样频率f_s 的归一化)

(4)由于周期性上述求和区间可在任意连续 N 个值上进行。

温故知新，上讲回顾

公式 $\Omega_0=\dfrac{\omega_0}{f_s}$ 的理解

Ω_0—数字角频率，单位：rad

ω_0—模拟角频率，单位：rad/s

f_s — 抽样频率，　单位：Herz，或1/s

【简单推导】

模拟信号 $x_a(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$

数字信号 $x(n)=x_a(nT_s)=A\sin(n\omega_0 T_s+\phi)=A\sin(n\Omega_0+\phi)$

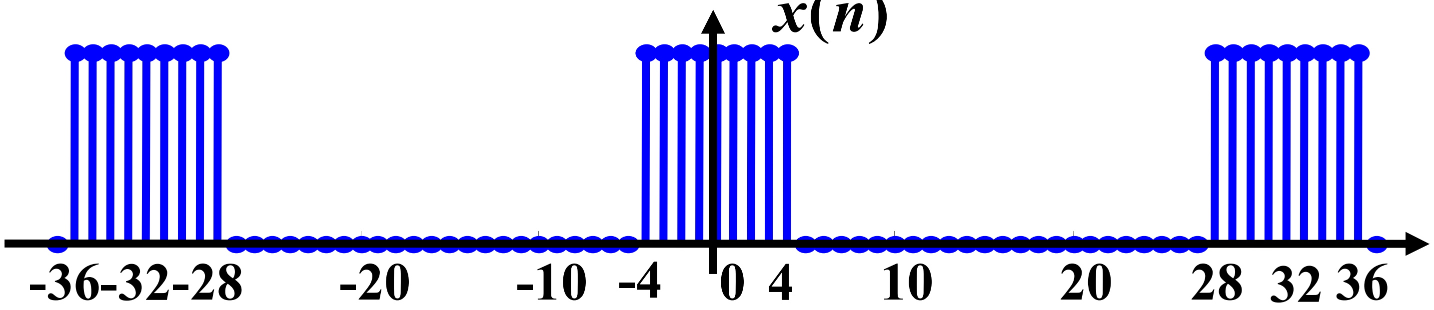
数字角频率和模拟角频率间的桥梁 $\Omega_0=\omega_0 T_s=\dfrac{\omega_0}{f_s}$

数字角频率 = 模拟角频率对抽样频率的归一化

模拟角频率 = 数字角频率 X 抽样频率

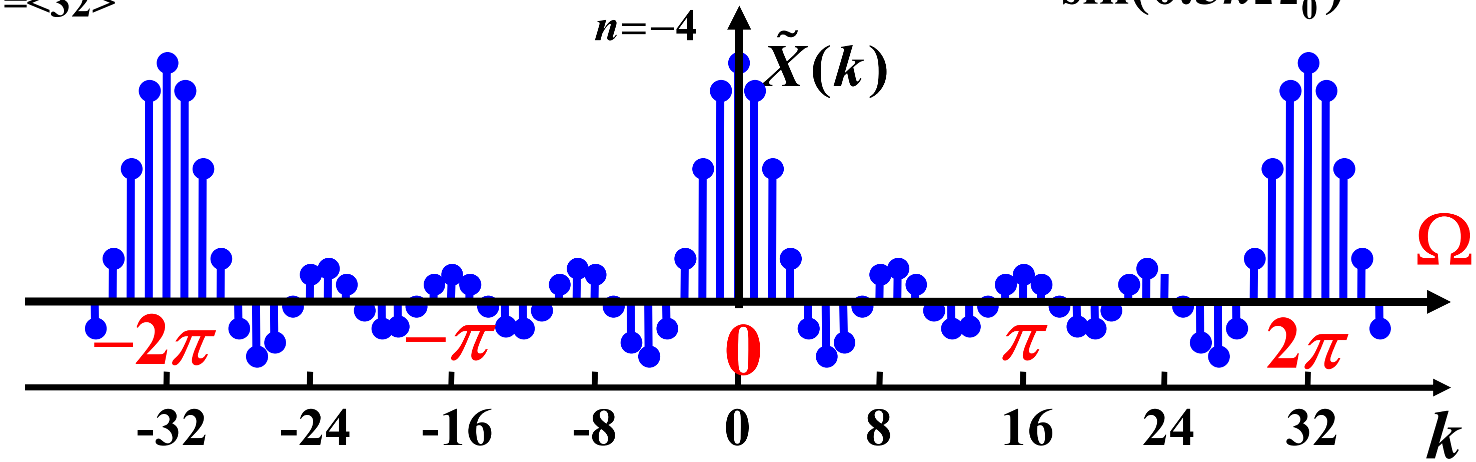
1、离散傅里叶级数

例 周期矩形脉冲序列离散时间傅里叶级数(DFS)。



解: $N=32$ $\Omega_0 = 2\pi/32 = \pi/16$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=<32>} \tilde{x}(n) e^{-jk(\pi/16)n} = \sum_{n=-4}^{4} e^{-jk(\pi/16)n} = \frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)}$$



结论：时域周期离散性 ⟷ 频域离散周期性

1、离散傅里叶级数

DTFS与CTFS的比较

	离散时间周期信号的傅里叶级数 DFS	连续时间周期信号的傅里叶级数 CTFS
研究对象	离散时间周期信号 周期：N；基频：$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$	连续时间周期信号 周期：T；基频：$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$
正交信号集	$\left\{e^{jk\Omega_0 n},k=0,1,...,N-1\right\}$ 只有 N 项	$\left\{e^{jk\omega_0 t},k=0,\pm1,\pm2,...\right\}$ 无穷多项
级数展开式	$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{jk\Omega_0 n}$	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}$
系数（频谱）求解公式	$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ $\tilde{X}(k+N)=\tilde{X}(k)$	$X_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

重点1：掌握离散时间周期信号频谱的特点——离散性、谐波性、周期性。

重点2：会求常用离散时间周期信号的DFS（正余弦序列、周期矩形脉冲等）

1、离散傅里叶级数

离散周期信号的傅里叶级数（DFS）

$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$$

$$\begin{cases} \tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jk\Omega_0 n} & \text{正变换} \\ \tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{jk\Omega_0 n} & \text{反变换} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N} \\ \tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j2\pi kn/N} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} \\ \tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \end{cases}$$

定义域：$-\infty < n < \infty$， $-\infty < k < \infty$ 旋转因子：$W_N = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\Omega_0}$

物理含义：

(1)$\tilde{x}(n)$可以表示成有限个复指数序列的线性组合；

(2)$\tilde{X}(k)$表示离散周期序列谐波分量的$\boxed{\text{相对频谱}}$大小

(3)DFS变换对中，$\tilde{x}(n)$ 和$\tilde{X}(k)$ 都以 N为周期

（如果以$k\Omega_0$表示就是以2π为周期）。

由于周期性上述求和区间可在任意连续N个值上进行

2、离散时间傅里叶变换

DTFT变换对 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega)$

DTFT正变换 $$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}} \overset{\Delta}{=} DTFT[x(n)]$$

DTFT反变换 $$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega} \overset{\Delta}{=} IDTFT[X(\Omega)]$$

物理含义：

（1） $x(n)$可以表示成无穷多个复指数序列的线性组合（2π区间内）

（2） X(Ω)表示了$x(n)$中各个频率分量的相对大小（频谱）；

（3） X(Ω)是连续的，并且以2π为周期。

时域：非周期　　　　离散

序列绝对可和是DTFT存在的条件，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right| < \infty$

2、离散时间傅里叶变换

DTFT的性质

性质名称	表达式
线性	$ax_1(n)+bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$
共轭特性	$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$
	实序列的频谱为共轭对称函数 即幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数
时移特性	$x(n-n_0) \leftrightarrow X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
频移特性	$x(n)e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$
频域微分	$nx(n) \leftrightarrow j\dfrac{d}{d\Omega}X(\Omega)$
时域翻转	$x(-n) \leftrightarrow X(-\Omega)$
时域卷积	$x_1(n)*x_2(n) \leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
频域卷积	$x_1(n)x_2(n) \leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta}$
巴什瓦定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x(n)\|^2 = \boxed{\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left\|X(e^{j\Omega})\right\|^2 d\Omega}$

3、离散时间系统的频域分析

离散时间系统的**频率响应$H(\Omega)$**的求解：

（1）求单位样值响应 $h(n)$ 的DTFT得到；

（2）可以由输出和输入的DTFT得到 $$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

（3）可以由差分方程直接得到

系统频率响应只取决于系统本身，而与激励无关，与系统内部的初始状态也无关

3、离散时间系统的频域分析

例1：某LTIS的起始状态为0，且$y(n)-a\,y(n-1)=x(n)$,其中a为常数，且有$|a|<1$，求系统频率响应并画出幅频特性。

解：

①对系统差分方程求DTFT可得： $Y(\Omega)-aY(\Omega)e^{-j\Omega}=X(\Omega)$

②由系统冲激响应的定义，可得频率响应：

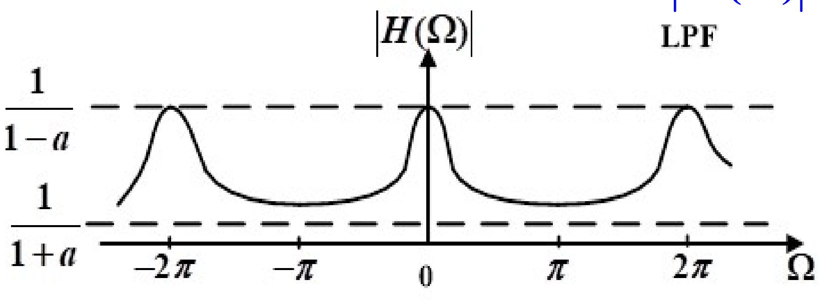
$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

在Z域分析中，求反变换更容易

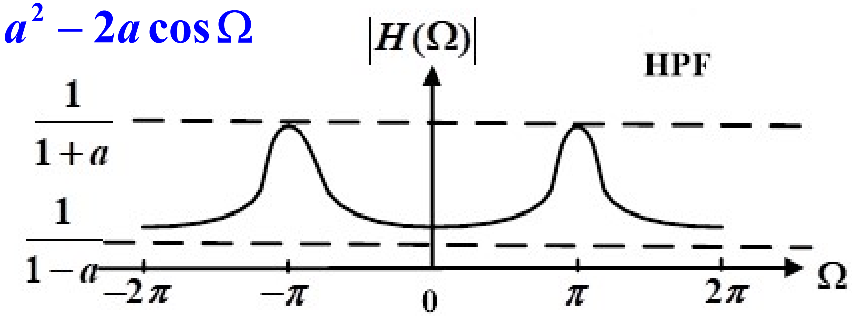
上节课分析过其DTFT

$$h(n)=a^n u(n),|a|<1$$

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}}$$



幅频特性 0<a<1



幅频特性 -1<a<0

3、离散时间系统的频域分析

例2：$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n)$ 求$H(\Omega)$及$h(n)$。

解：对差分方程两端求DTFT，并化简可得

$$H(\Omega)=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

$$=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$h(n)=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

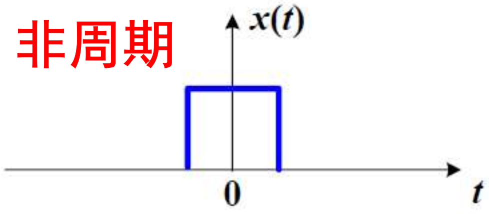
$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r e^{-j\Omega r}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-j\Omega k}}$$

变换对

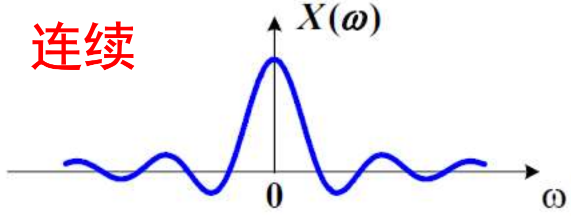
$$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}},|a|<1$$

§ 5.4 几种傅里叶变换的关系

连续、非周期



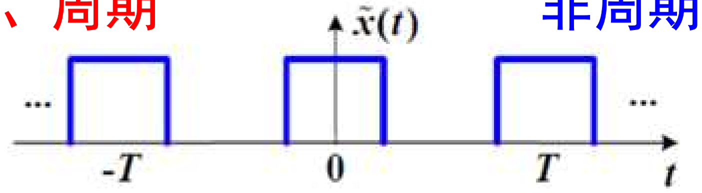
非周期、连续



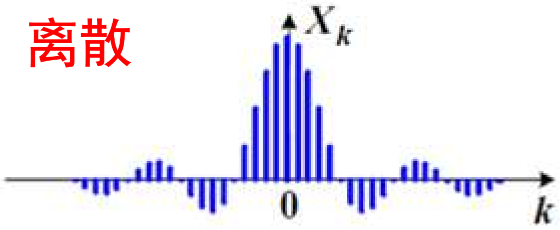
CTFT

$$X(\omega)=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

连续、周期



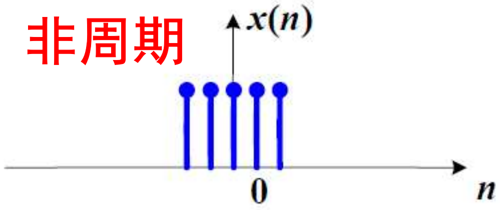
非周期、离散



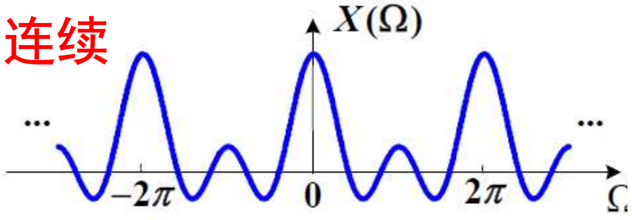
CTFS

$$X_k=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{k\omega_0\tau}{2})$$

离散、非周期



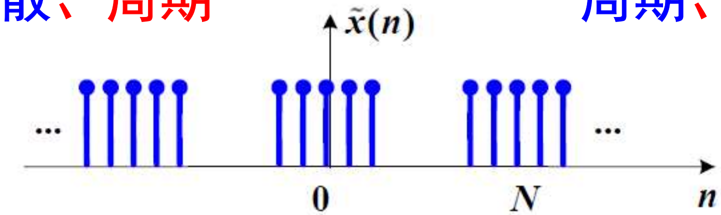
周期、连续



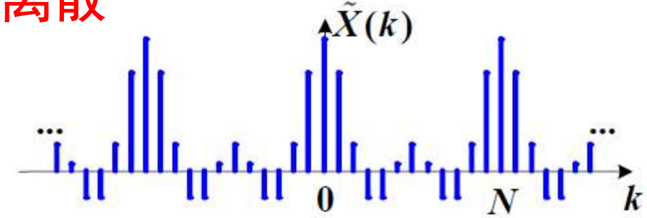
DTFT

$$X(\Omega)=\frac{\sin(N_0\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

离散、周期



周期、离散



DFS

$$\tilde{X}(k)=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0 N_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0\right)}$$

要点：一个域的离散性，对应另外一个域的周期性

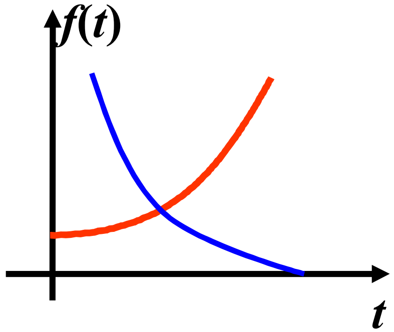
第六章 连续时间信号与系统复频域分析

目录
Contents

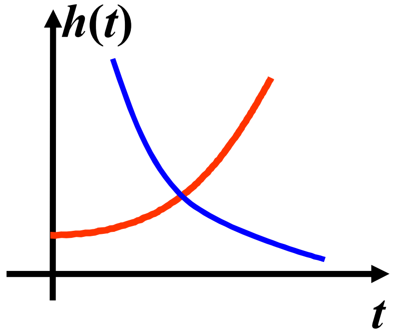
温故知新：LT提出的原因

频域分析以正/余弦或虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本单元，将信号与系统冲激响应分解为众多不同频率ω的基本单元的加权和。物理意义直观清晰，但也有不足：

- 用定义求$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$时，要求$f(t)$绝对可积。（很多有些重要信号，如$u(t)$、$e^{2t}u(t)$不满足FT条件）。
- 难于利用FT分析不稳定系统。
- 零输入响应的频域分析困难。



指数增长信号



指数增长系统

1、拉普拉斯变换的收敛域(ROC)

例4 求下列信号的双边拉氏变换。

$f_1(t)= e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

$f_2(t)= -e^{-3t}u(-t) - e^{-2t}u(-t)$

$f_3(t)=e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(-t)$

解：

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma > -2$$

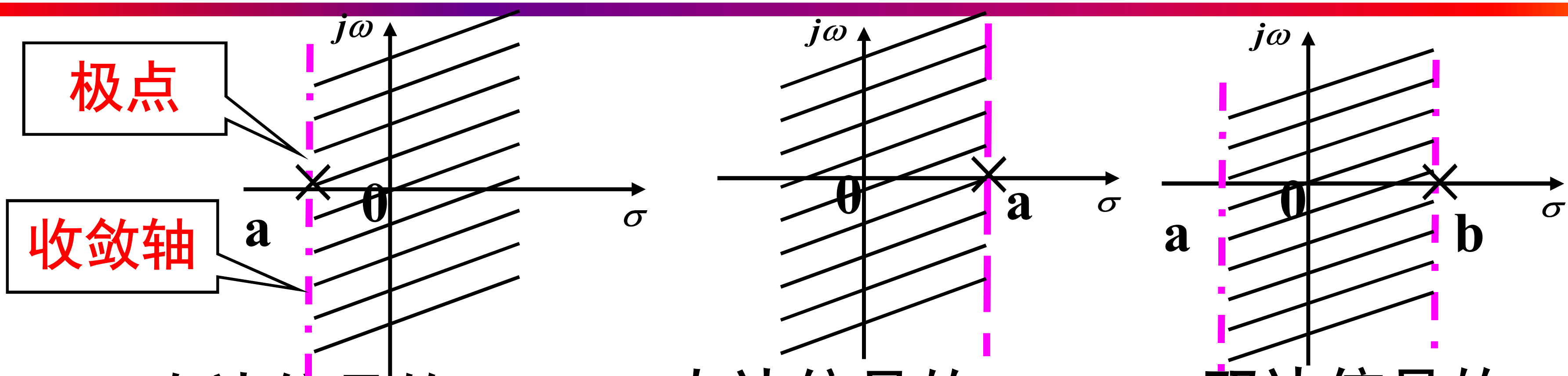
$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma < -3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \qquad -3 < \sigma < -2$$

象函数相同，但收敛域不同。

双边拉氏变换必须标出收敛域。

1、拉普拉斯变换的收敛域(ROC)



右边信号的ROC　　左边信号的ROC　　双边信号的ROC

$$\boxed{e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \mathrm{Re}[s] > a}$$

$$\boxed{-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \mathrm{Re}[s] < a}$$

$$e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$$
$$\alpha < \mathrm{Re}[s] < \beta$$

ROC小结

右边信号的收敛域是右边收敛；

左边信号的收敛域是左边收敛；

双边信号的收敛域是带状收敛。

有限信号的收敛域是全平面

收敛域不包含极点。

2、常见信号的单边拉普拉斯变换

1、复指数信号 $f(t)=e^{s_0 t}u(t)$

$$e^{s_0 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}, \mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[s_0]$$

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}[s] > a$$

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega_0} \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}[s] > 0$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}[s] > 0$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

§6.2 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

(1) 当$F(s)$收敛域包含虚轴时，拉氏变换和傅氏变换都存在

$$F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$$

如单边指数衰减信号 $f(t)=e^{at}u(t),a<0$

(2) 当$F(s)$收敛域不包含虚轴,但以虚轴为界时,

拉氏变换和傅氏变换都存在 $F(j\omega)\neq F(s)\big|_{s=j\omega}$

如阶跃信号 $u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$ $\quad u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

(3) 当$F(s)$收敛域不包含虚轴而且不以虚轴为界时,

拉氏变换存在，但傅氏变换不存在

如单边指数增长信号 $f(t)=e^{at}u(t),a>0$

小结

第一点：拉氏变换的定义及含义

傅氏变换

$f(t)e^{-\sigma t}$的傅氏变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \longrightarrow \boxed{F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt}$$

双边拉氏变换

限定f(t)为因果信号

单边拉氏变换

第二点：理解收敛域ROC的含义

第三点：拉氏变换的求解

第四点：拉氏变换与傅里叶变换的关系

3、拉氏变换的性质

时移（延时）特性（注：单边拉氏变换只研究右移。$t_0>0$）

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$,　　　　$\mathrm{Re}[s] > \sigma_c$

则 $\boxed{f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}, \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_c}$

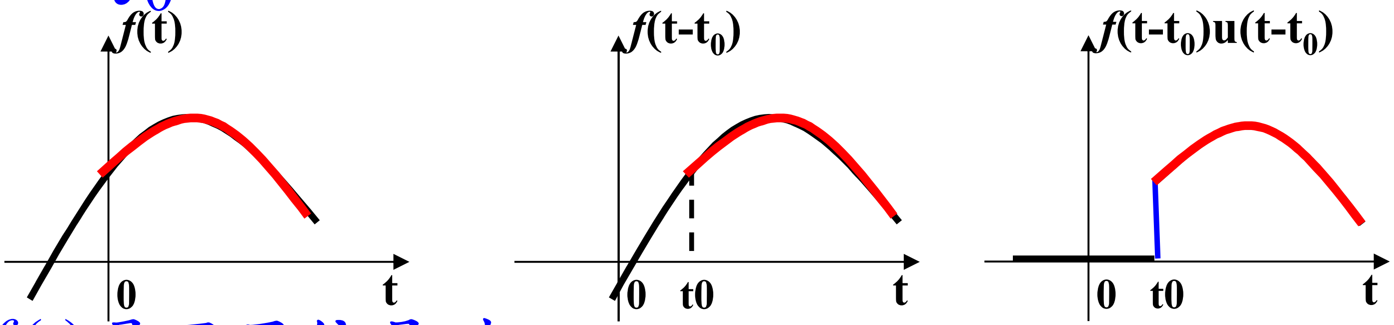
$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

当 $f(t)$不是因果信号时，

$$f(t-t_0) \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$= \int_{-t_0}^{0^-} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau + \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$= \cancel{\int_{0^-}^{t_0} f(t-t_0)e^{-st}dt} + F(s)e^{-st_0}$$



当 $f(t)$是因果信号时，$f(t) = f(t)u(t)$

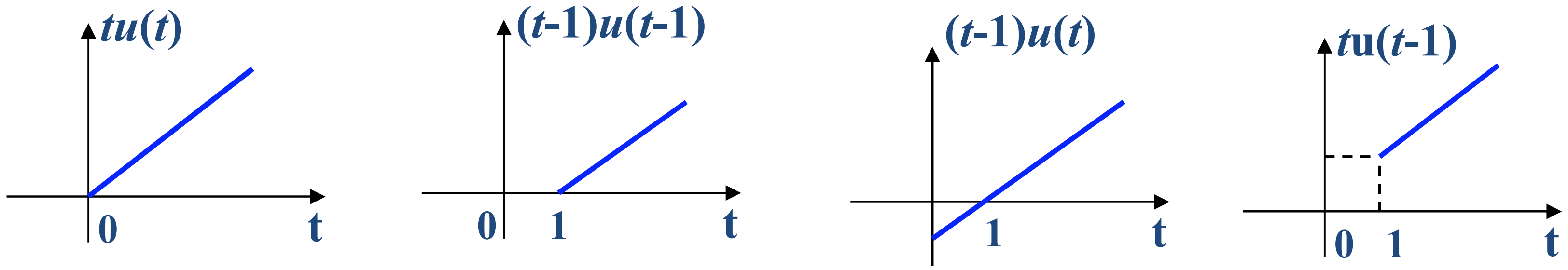
3、拉氏变换的性质

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

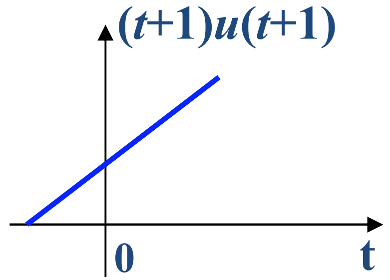
$$(t-1)u(t-1) \quad \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s}}$$

$$(t-1)u(t) = tu(t) - u(t) \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}}$$

$$tu(t-1) \quad = (t-1)u(t-1) + u(t-1) \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s}}$$



$$[(t+1)u(t+1)] = [(t+1)u(t)] \leftrightarrow \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$



3、拉氏变换的性质

. 复频移特性

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)]$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_c$

则 $\boxed{f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0), \quad \mathrm{Re}[s]-\mathrm{Re}[s_0]>\sigma_c}$

$$\boxed{f(t-t_0)e^{s_0(t-t_0)} \leftrightarrow F(s-s_0)e^{-st_0}}$$

举例

$$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

$$e^{-at} \cdot \cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-a$$

$$e^{-at} \cdot \sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-a$$

3、拉氏变换的性质

时域微分定理

$$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$， $\mathrm{Re}[s] > \sigma_c$

$$\boxed{\text{则 } f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0^-),} \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_c$$

证明：$\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \underbrace{f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}}_{\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(0^-) = -f(0^-)} + \underbrace{s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}_{sF(s)}$

$= sF(s) - f(0^-)$

$$\boxed{f''(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)}$$

推论：$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$

若$f(t)$为因果信号：$\dfrac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow sF(s)$

3、拉氏变换的性质

$$\boxed{f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)}$$

应用举例1：求系统全响应

若系统的微分方程为：$y'(t) + 2y(t) = f(t)$

频域的方法 $[j\omega + 2]Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)$

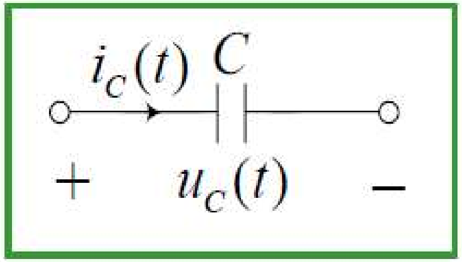
$$Y_{zs}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}F(j\omega)$$ 只能求零状态响应

复频域的方法 $[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = F(s)$

系统的复频域分析，可以引入初始条件，求解全响应。

应用举例2：电路系统分析

电容：



$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}u_C(t)$$

$$I_C(s) = CsU_C(s) - Cu_c(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs}I_C(s) + \frac{1}{s}u_c(0^-)$$

3、拉氏变换的性质

性质总结

时移：$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$

频移：$f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0) \qquad \sigma-\sigma_0>\sigma_c$

尺度：$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad ,\sigma>a\sigma_c \qquad a>0$

时域微分：$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$

卷积定理：$f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1 \cdot F_2 \qquad f_1 \cdot f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}F_1 * F_2$

复频域微分：$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

复频域积分：$\frac{1}{t}f(t) \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(s_1)ds_1$

初值定理：$\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

终值定理：$\lim_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

3、拉氏变换的性质

例：利用性质求解下列信号的单边拉氏变换。

$(1)e^{3t}u(t)-e^{-2t}u(t)$

$(2)\delta(t-t_0)$

$(3)\delta'(t-t_0)$

$(4)t^n u(t)$

$(5)te^{-at}u(t)$

$(6)e^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)$

$(7)e^{-t}u(t-2)$

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{5}{s^2-s-5}$

(2) $\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}$

(3) $\delta(t)\leftrightarrow 1\Rightarrow \delta'(t)\leftrightarrow s\Rightarrow \delta'(t-t_0)\leftrightarrow se^{-st_0}$

(4) $u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s}\Rightarrow tu(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s^2}\Rightarrow t^2u(t)\leftrightarrow \dfrac{2}{s^3}$

$\Rightarrow t^n u(t)\leftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

(5) $e^{-at}u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s+a}\Rightarrow te^{-at}u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{(s+a)^2}$

(6) $e^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)\leftrightarrow \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0{}^2}$

(7) $e^{-t}u(t-2)=e^{-[t-2+2]}u(t-2)\leftrightarrow \dfrac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}$

3、拉氏变换的性质

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow s$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^{\,2}}$$

$$e^{-at}\cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^{\,2}}$$

$$\sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^{\,2}}$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^{\,2}}$$

3、拉氏变换的性质

【例】： 求 $F(s)=\frac{1}{s^3}(1-e^{-st_0}), t_0>0$ 的拉氏反变换。

$$\frac{t^n}{n!}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^{n+1}}$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

解： 将复频域拆解

①基本单边拉氏变换对

$$\frac{1}{2}t^2u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^3}$$

②时移特性

$$\frac{1}{2}(t-t_0)^2u(t-t_0)\leftrightarrow\frac{1}{s^3}e^{-st_0}$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2u(t-t_0)$$

4、拉氏反变换

【例】：（有复根）求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+s+1)}$ 的拉氏反变换 $f(t)$。

解：方法一（配方法: 例6.3.6）★

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\therefore f(t)=u(t)-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^{\,2}}$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^{\,2}}$$

5、利用拉式变换求解微分方程

【例】：求全响应：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+f(t)$

已知：$f(t)=e^{-3t}u(t), y(0^-)=1, y'(0^-)=1$

【解】：

Step1 两边取拉氏变换，利用微分性质（代入初始状态）

$$\underline{s^2Y(s)}-sy(0^-)-y'(0^-)+\underline{3\left[sY(s)\right.}\left.-y(0^-)\right]+\underline{2Y(s)}=2sF(s)+F(s)$$

Step2 代数运算求出Y(s)

$$Y(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+2}F(s)+\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+3y(0^-)}{s^2+3s+2}$$

$$=\frac{2s+1}{s^2+3s+2}\frac{1}{s+3}+\frac{s+4}{s^2+3s+2}$$ 带入初始条件

5、利用拉式变换求解微分方程

Step3 拉氏反变换求出y(t)

$$Y(s)=\underbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{3}{s+2}+\frac{-\frac{5}{2}}{s+3}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{s+2}}_{\text{零输入响应}}$$

求反变换得到全响应：

$$y(t)=\underbrace{-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+3e^{-2t}u(t)-\frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{零状态响应}y_{zs}(t)}+\underbrace{3e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)}_{\text{零输入响应}y_{zi}(t)}$$

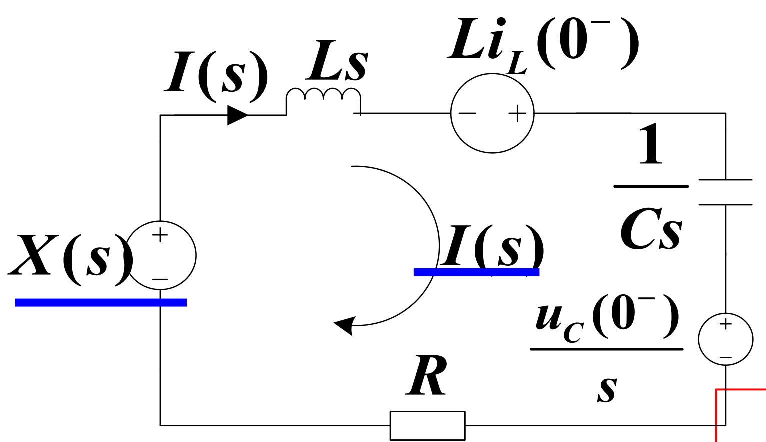
$$=\underbrace{\frac{5}{2}e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)}_{\text{自然响应}y_n(t)}\underbrace{-\frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应}y_f(t)}$$

5、利用拉式变换求解电路系统

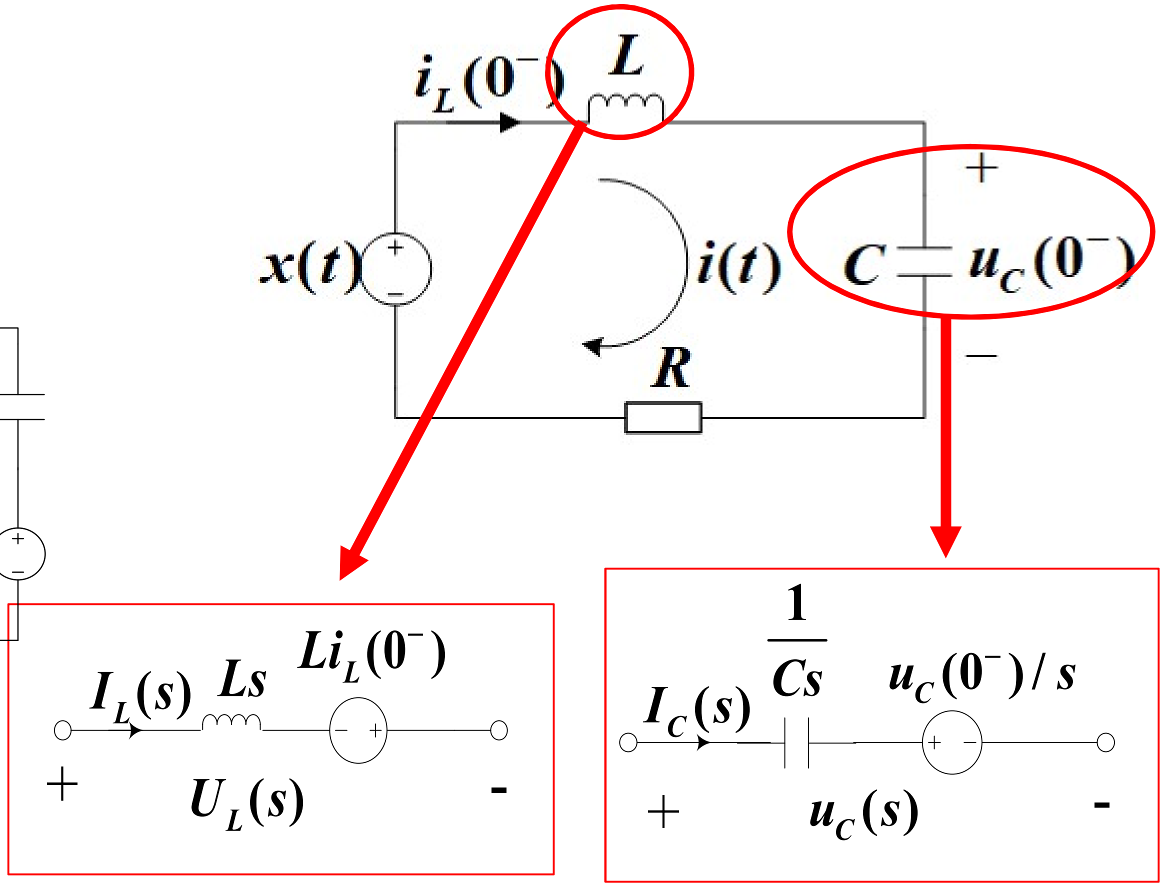
. 电路系统的复频域求解

例1：如图电路，R=5/2Ω，C=1F，L=1H，输入为电压源$u(t)$输出为回路中电流，初始状态为 $i_L(0^-)=1A, u_C(0^-)=2V$ 求全响应电流。

Step1:画s域等效电路图



s 域等效电路图

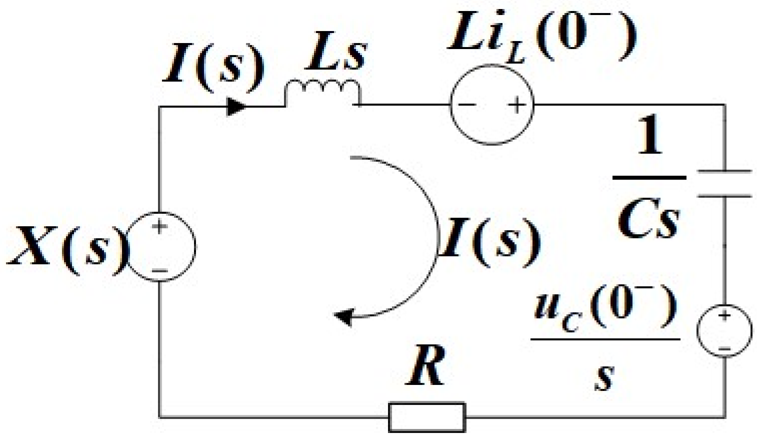


5、利用拉式变换求解电路系统

. 电路系统的复频域求解

Step2:列出代数方程，求$I(s)$

$$LsI(s) - Li_L(0^-) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} + RI(s) = X(s)$$



s 域等效电路图

$$I(s) = \frac{X(s) + Li_L(0^-) - \dfrac{u_c(0^-)}{s}}{Ls + R + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{s-1}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1} = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s + \frac{1}{2}}$$

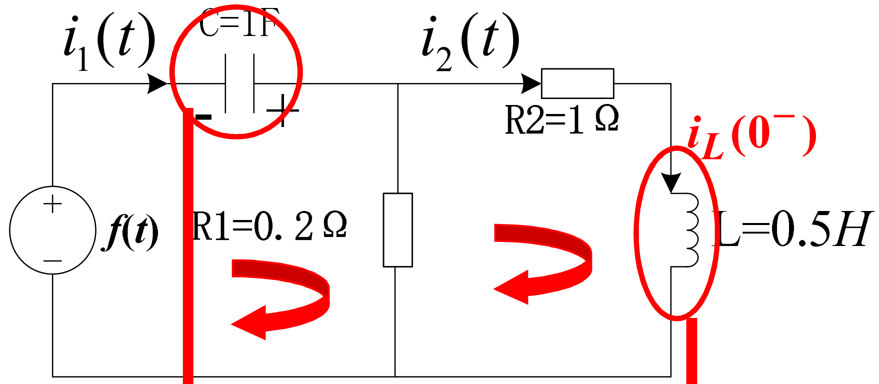
Step3:拉式反变换求出$i(t)$

$$i(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

例2： RLC电路如图所示，已知 $u_c(0^-)=5V, i_L(0^-)=4A$

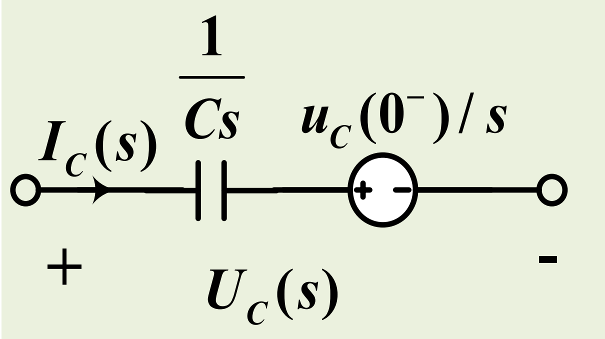
$f(t)=10u(t)$V

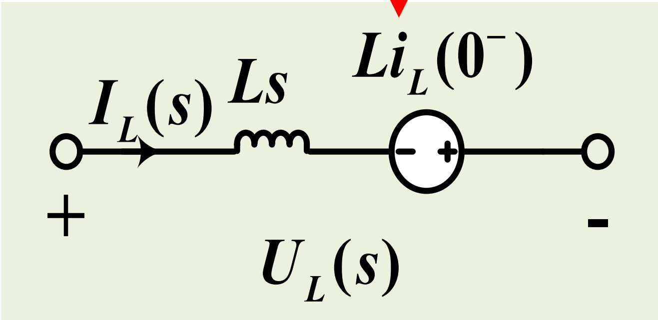
求全响应电流$i_1(t)$。



解：①电路s域模型

$$\begin{cases} R \to R \\ C \to \dfrac{1}{Cs} + \dfrac{u_C(0^-)}{s} \\ L \to Ls - Li_L(0^-) \end{cases}$$

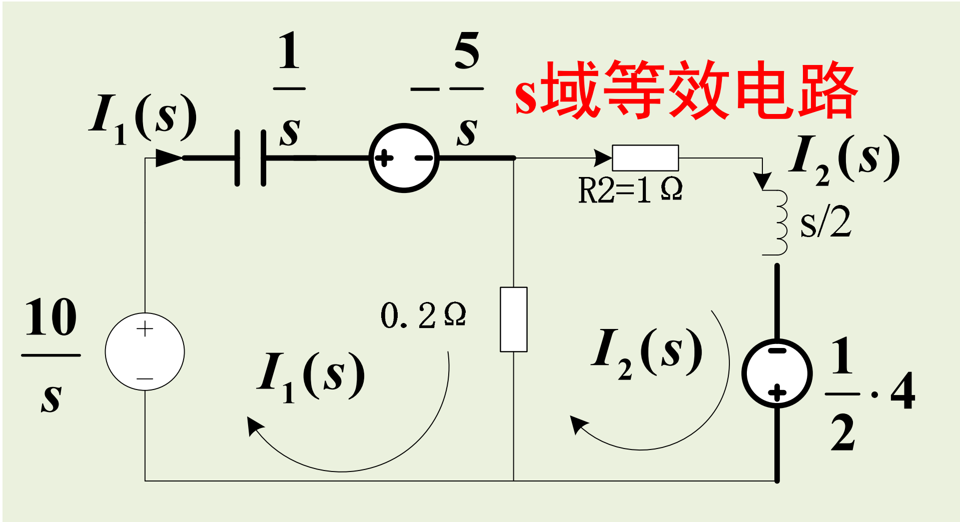




②由KVL得：

$$\boxed{\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{s}\right)I_1(s)-\dfrac{1}{5}I_2(s)=\dfrac{10}{s}+\dfrac{5}{s} \\ -\dfrac{1}{5}I_1(s)+\left(\dfrac{1}{5}+1+\dfrac{s}{2}\right)I_2(s)=2 \end{cases}}$$

$$I_1(s)=\frac{79s+180}{s^2+7s+12}=-\frac{57}{s+3}+\frac{136}{s+4}$$



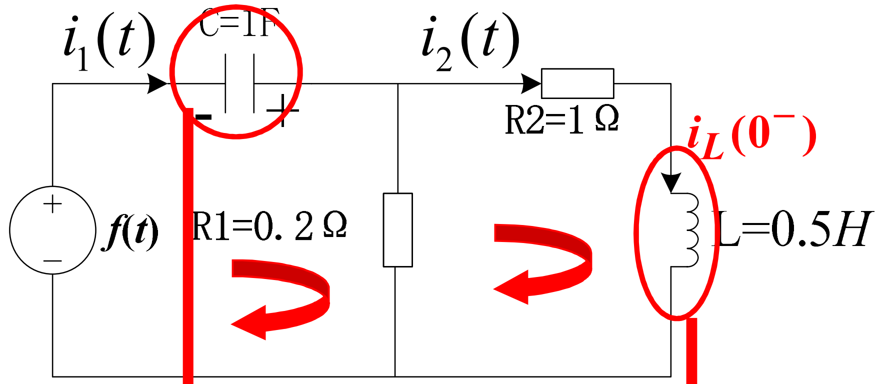
③拉氏反变换

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[I_1(s)\right]=(-57e^{-3t}+136e^{-4t})u(t)$$

例2： RLC电路如图所示，已知 $u_c(0^-)=5V, i_L(0^-)=4A$

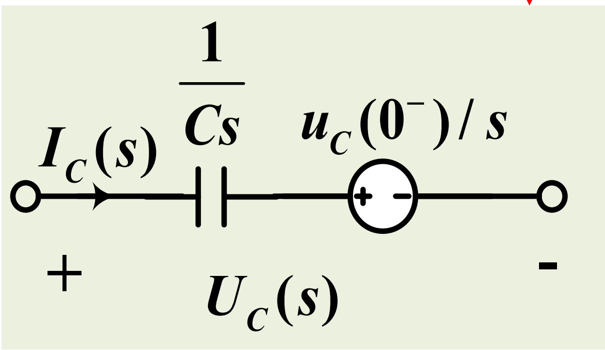
$f(t)=10u(t)$V

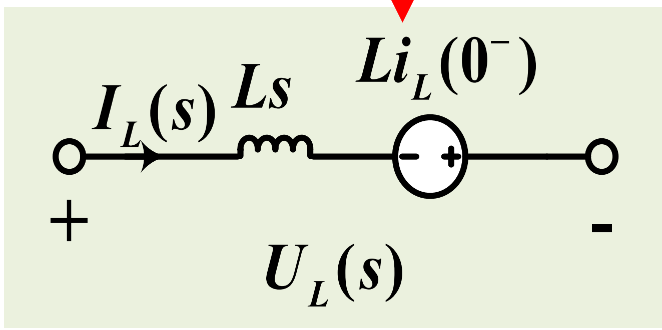
求全响应电流$i_1(t)$。



解：①电路s域模型

$$\begin{cases} R \to R \\ C \to \dfrac{1}{Cs}+\dfrac{u_C(0^-)}{s} \\ L \to Ls - Li_L(0^-) \end{cases}$$





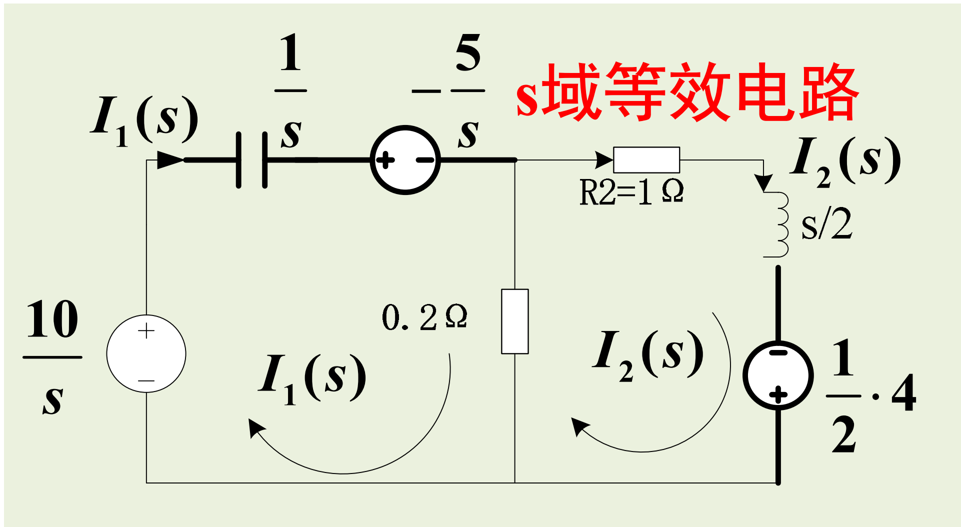
②由KVL得：

$$\boxed{\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{s}\right)I_1(s)-\dfrac{1}{5}I_2(s)=\dfrac{10}{s}+\dfrac{5}{s} \\ -\dfrac{1}{5}I_1(s)+\left(\dfrac{1}{5}+1+\dfrac{s}{2}\right)I_2(s)=2 \end{cases}}$$

$$I_1(s)=\frac{79s+180}{s^2+7s+12}=-\frac{57}{s+3}+\frac{136}{s+4}$$

③拉氏反变换

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[I_1(s)\right]=(-57e^{-3t}+136e^{-4t})u(t)$$



6、系统函数和零状态响应的s域分析法

线性时不变系统的一般表示

$$b_n y^{(n)}(t)+b_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+b_1 y'(t)+b_0 y(t)=a_m f^{(m)}(t)+\dots+a_1 f'(t)+a_0 f(t)$$

系统为零状态，且输入为冲激信号时：

$$b_n h^{(n)}(t)+b_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\dots+b_1 h'(t)+b_0 h(t)=a_m \delta^{(m)}(t)+\dots+a_1 \delta'(t)+a_0 \delta(t)$$

因果系统：$\dfrac{d^n h(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n H(s)\underline{-s^{n-1}h(0^-)-s^{n-2}h^{(1)}(0^-)-\cdots-h^{(n-1)}(0^-)}$

等于零

$$\left(b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\dots+b_1 s+b_0\right)H(s)=a_m s^n+\dots+a_1 s+a_0$$

$$H(s)=\frac{a_m s^n+\dots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\dots+b_1 s+b_0}$$

$$H(s)\triangleq\frac{\mathrm{L}[y_{zs}(t)]}{\mathrm{L}[f(t)]}=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$$

$$H(s)=\mathrm{L}[h(t)]$$

$H(s)$称为**系统函数**或传递函数，与初始状态和输入无关，仅取决于系统本身属性。

6、系统函数和零状态响应的s域分析法

$$b_n y^{(n)}(t)+b_{n-1}y^{(n-1)}(t)+...+b_1 y'(t)+b_0 y(t)=a_m f^{(m)}(t)+...+a_1 f'(t)+a_0 f(t)$$

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{a_m s^n+...+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1 s+b_0}$$

系统函数$H(s)$是线性时不变系统的自身属性，系统的很多性质都可以根据$H(s)$分析。

系统函数$H(s)$ ⇨

- 时域特性
- 频域特性（滤波特性）
- 因果性
- 稳定性

6、系统函数和零状态响应的s域分析法

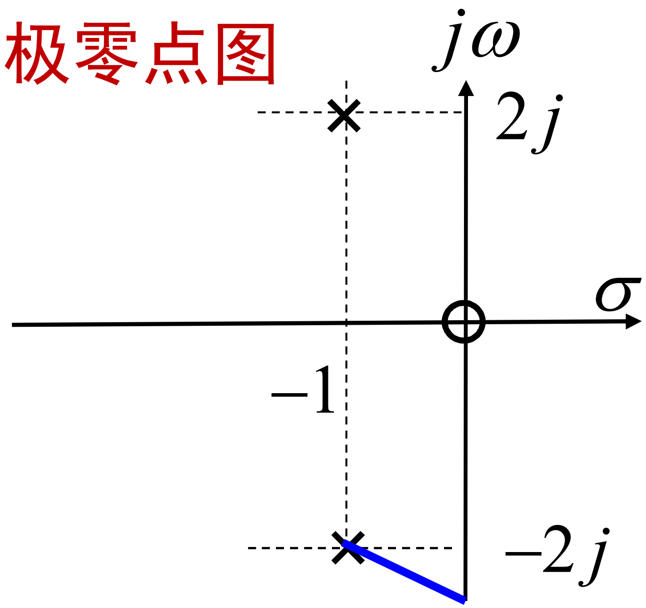
【例3】：已知H(s)的极点、零点分布图如图所示，且$h(0^+)=3$，求H(s)的表达式。

【解】：由极零点分布图

$$H(s)=\frac{Ks}{[s-(-1+2j)][s-(-1-2j)]}$$

$$=\frac{Ks}{(s+1)^2+4}=\frac{Ks}{s^2+2s+5}$$

极零点图



根据初值定理有

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{Ks^2}{s^2+2s+5}=K$$

$$\therefore \quad \mathrm{H}(s)=\frac{3s^2}{s^2+2s+5}$$

7、系统的稳定性

极零点图与稳定性

除了一个常数因子外，系统的零极点可以完全表征系统，借助于系统函数的极零点图可以确定系统的因果性，稳定性。

1）因果性：

如果 $t<0$ 时 $h(t)=0$，则系统是因果的。

2）稳定性：

如果系统稳定，则有 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt<\infty$ 。

因此 $H(j\omega)$ 必存在。意味着 $H(s)$ 的收敛域必然包含 $j\omega$

综合以上两点，可以得到：因果稳定系统的 $H(s)$ 其全部极点必须位于S平面的左半平面。

7、系统的稳定性

系统稳定性（BIBO稳定）的判断：

◆ 时域上：根据h(t)是否绝对可积

如果 $h(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$，则系统稳定。

◆ 频域上：根据FT是否存在

如果h(t)的傅里叶变换存在，即H(jω)存在，则系统稳定。

◆ 复频域上：根据极点位置

对于因果系统，如果所有极点都在左半开平面，则系统稳定。

…

◆ 复频域上：根据收敛域

如果收敛域（ROC）包含虚轴，则系统稳定。

关于稳定性的更为严格的定义和描述，参考：B.P.Lathi著《线性系统与信号》，西安交通大学出版社，P156

7、系统的稳定性

例：根据线性时不变系统系统函数确定稳定性。$H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$

分析：未给出收敛域，需分情况讨论稳定性。

解：

确定极点：$s_1=-1$，$s_2=2$。

确定收敛域：极点必须位于收敛域之外，对应三种情况。

Re[s]>2，不含虚轴，不稳定，因果

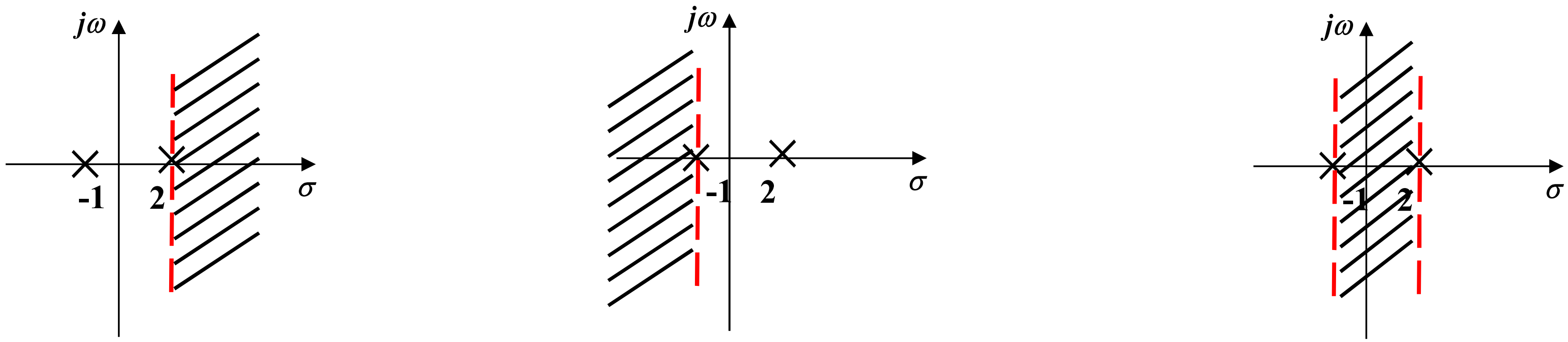
$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

Re[s]<－1，不含虚轴，不稳定，反因果

$$h(t)=-\frac{2}{3}e^{-t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

－1<Re[s]<2，含虚轴，稳定 ，双边

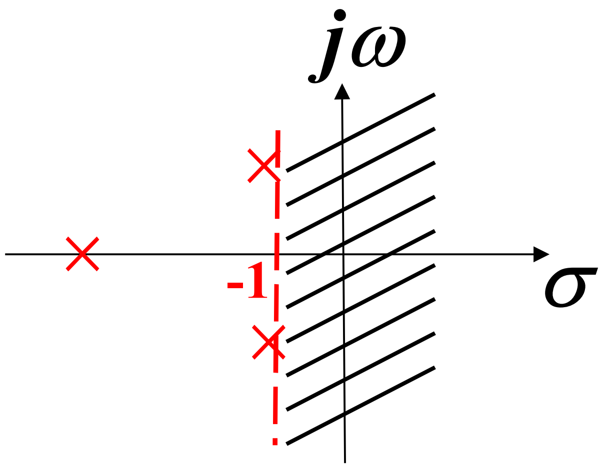
$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



7、系统的稳定性

例：因果系统：$H(s)=\dfrac{s^2+s+5}{s^3+6s^2+10s+8}$，判断系统的稳定性。

解：求极点　$H(s)=\dfrac{s^2+s+5}{(s+4)[(s+1)+1]^2}$



极点：$s_1=-4$，　$s_2=-1+j$，$s_3=-1-j$

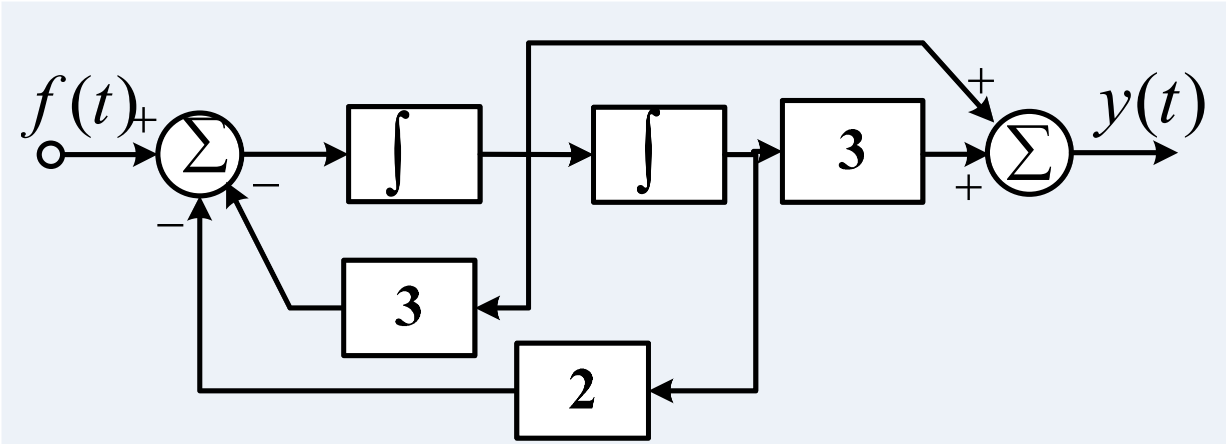
三个极点的实部均小于0，全部位于s平面的左半平面，因此，系统是稳定的。

由$H(s)$判断稳定性的方法：求出极点（特征方程的特征根），再根据收敛域的情况，来判断稳定性、因果性。

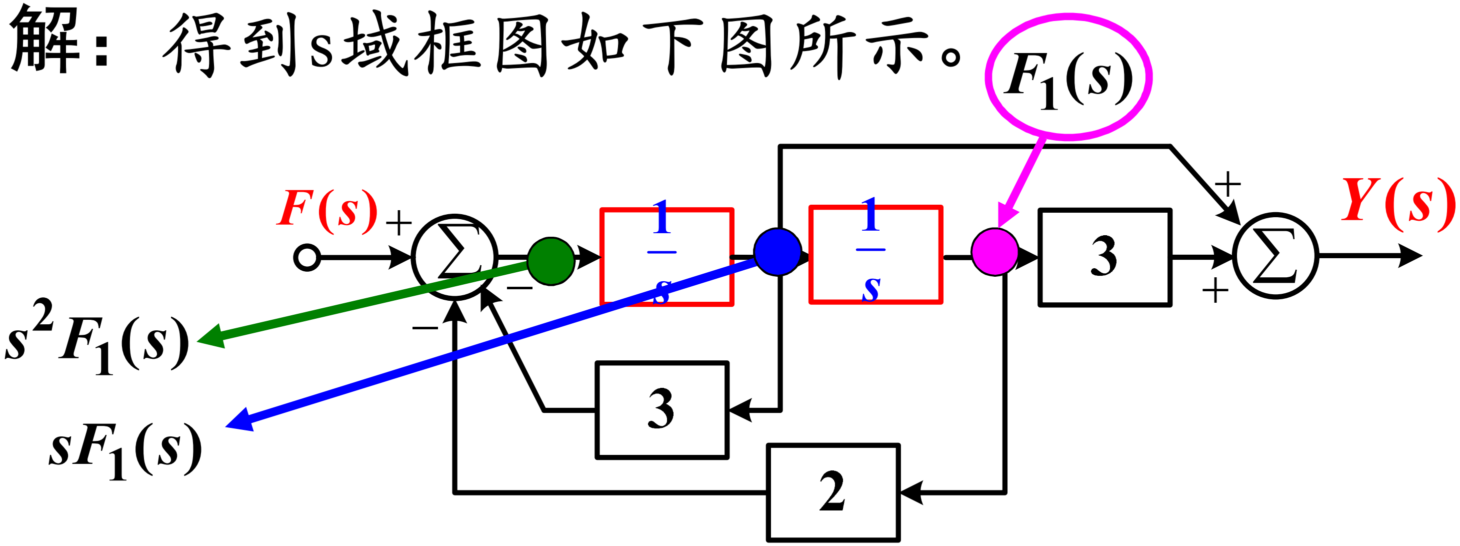
劳斯-霍尔维茨稳定性判断（了解），可不用求极点。

8、系统的框图表示

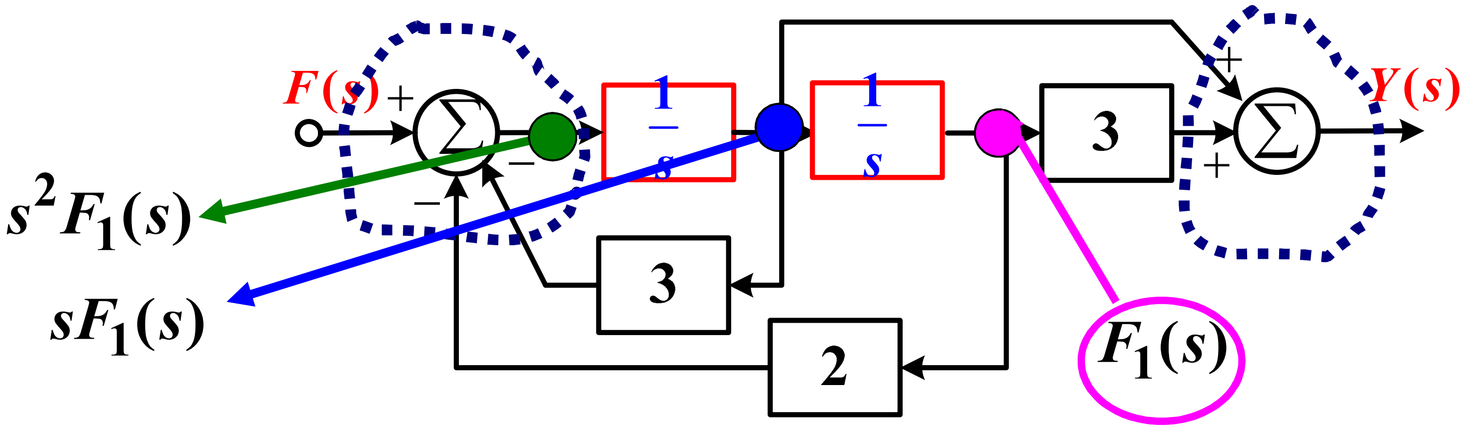
【例】某LTI系统的框图如图所示，求系统函数H(s)，并建立描述系统的微分方程。



解：得到s域框图如下图所示。



8、系统的框图表示



$$s^2F_1(s) = -3sF_1(s) - 2F_1(s) + F(s)$$

$$\therefore F_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}F(s)$$

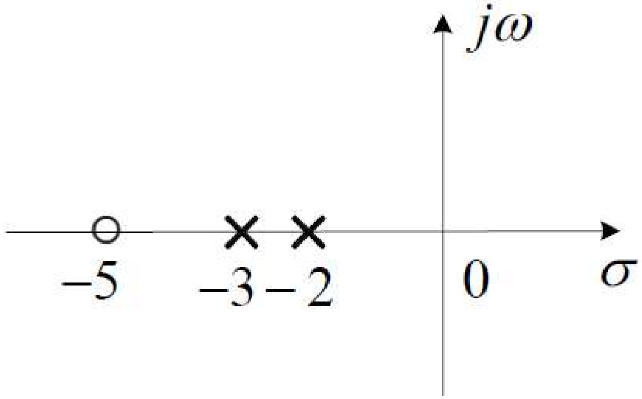
$$\therefore Y(s) = (s+3)F_1(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$\therefore$ 微分方程为$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$

补充习题：拉氏变换求全响应（灵活用初始条件）

某系统函数 $H(s)$ 的零极图如下图所示，且 $H(0)=5$，当初始条件 $y\left(0^{+}\right)=2$，$y'\left(0^{+}\right)=3$，激励 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时，求该系统的系统函数 $H(s)$，系统的零输入响应，零状态响应，全响应。



解：

$$令\ H(s)=K\frac{s+5}{(s+3)(s+2)}$$

$$\because H(0)=\frac{5}{6}K=5$$

$$\therefore K=6$$

$$\therefore H(s)=\frac{6(s+5)}{(s+3)(s+2)}$$

系统方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6x'(t)+30x(t)$

补充习题：拉氏变换求全响应（灵活用初始条件）

系统方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6x'(t)+30x(t)$

$$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

系统方程两边求拉氏变换，得到：（按0+定义）

$$s^2Y(s)-sy(0^+)-y'(0^+)+5sY(s)-5y(0^+)+6Y(s)=6sX(s)-6x(0^+)+30X(s)$$

$$\therefore Y(s)=\frac{6s+30}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{y'(0^+)+sy(0^+)+5y(0^+)-6x(0^+)}{s^2+5s+6}$$

$$=\frac{6s+30}{(s+2)(s+3)(s+1)}+\frac{2s+7}{(s+2)(s+3)}=\left(\frac{12}{s+1}-\frac{18}{s+2}+\frac{6}{s+3}\right)+\left(\frac{3}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right)$$

零状态响应 $y_{zs}(t)=12e^{-t}u(t)-18e^{-2t}u(t)+6e^{-3t}u(t)$

零输入响应 $Y_{zi}(s)=3e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$

全响应 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=12e^{-t}u(t)-15e^{-2t}u(t)+5e^{-3t}u(t)$

第七章　Z变换

目录

Contents

1、Z变换的收敛域

小结

双边z变换的收敛域：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

1 有限长序列

全平面收敛

2 右边序列

圆外收敛

单边z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

一定是最外部极点的外部，且包括$|z|=\infty$。

3 左边序列

圆内收敛

4 双边序列

环状收敛

离散时间非因果信号和系统也有很多应用，所以双边z变换也非常重要。

单边z变换和双边z变换统称为z变换。

性质	拉式变换（单边）	z变换（单、双边）
时移	$x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$	$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0}X(z)$
时域微分	$\dfrac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$	$x(n-m)u(n) \leftrightarrow z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$
复频移	$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0)$	z域展缩 $a^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{a})$
时域展缩	$x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{a}X\left(\dfrac{s}{a}\right), a>0$	时域反转 $x(-n) \leftrightarrow X\left(\dfrac{1}{z}\right)$
复频域/z域微分	$tx(t) \leftrightarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$	$nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$
卷积	$x_1(t)*x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)\cdot X_2(s)$	$x_1(n)*x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)\cdot X_2(z)$

1、Z变换的收敛域

$$\text{双边}X(z)+\text{收敛域} \overset{\text{一一映射}}{\longleftrightarrow} x(n)$$

当收敛域为 |z|>|a| 时，为右边序列；

当收敛域为 |z|<|a|时，为左边序列。

$X(z)$	$x(n)$	
	$ROC:\|z\|>\|a\|$	$ROC:\|z\|<\|a\|$
$\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$	$a^n u(n)$	$-a^n u(-n-1)$
$\dfrac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}=\dfrac{z}{(z-a)^2}$	$na^{n-1}u(n)$	$-na^{n-1}u(-n-1)$

2、Z反变换

利用一些基本ZT对，可求出IZT（根据ROC，但常用多为单边）

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$nx(n) \xleftrightarrow{ZT} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\frac{n(n-1)\cdots[n-(m-2)]}{(m-1)!} a^{n-(m-1)} u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^m}, |z| > |a|$$

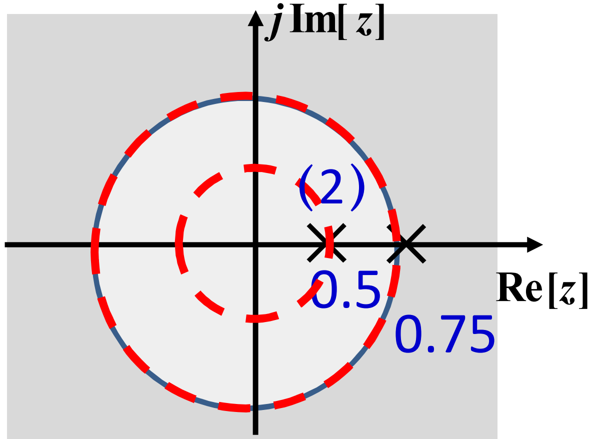
$a = e^{\pm j\Omega}$

$$\cos(n\Omega_0)u(n) \longleftrightarrow \frac{z(z-\cos\Omega_0)}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$$

$$\sin(n\Omega_0)u(n) \longleftrightarrow \frac{z\sin\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$$

2、Z反变换

例2：已知 $X(z)=\dfrac{z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\left(z-\frac{3}{4}\right)}, |z|>\dfrac{3}{4}$，求其反变换$x(n)$。



解：

$$X(z)=z\frac{z^2}{[z-1/2]^2(z-3/4)}$$

$$=z\left[\frac{A}{z-3/4}+\frac{C_2}{(z-1/2)^2}+\frac{C_1}{z-1/2}\right]$$

$$=z\left[\frac{9}{z-3/4}+\frac{-1}{(z-1/2)^2}+\frac{-8}{z-1/2}\right]$$

$$x(n)=9\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)-n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-8\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$C_k=\frac{1}{(r-k)!}\frac{d^{r-k}}{dz^{r-k}}\left[(z-z_i)^r X(z)\right]\Big|_{z=z_i}$$

3、常用z变换对与性质

单边ZT时

- $$u(n-1)\longleftrightarrow\frac{1}{z-1}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$
- $$u(n+1)\longleftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$$
- $$\delta(n+m)\longleftrightarrow 0\qquad m>0$$
- $$R_N(n)\longleftrightarrow\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}\qquad |z|>0$$
- $$u(n)*u(n)=(n+1)u(n)\longleftrightarrow\frac{z^2}{(z-1)^2}=\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$
- $$\sum_{i=0}^{n}x(i)=x(n)*u(n)\longleftrightarrow X(z)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

4、差分方程的变换域解

2.求解前向差分方程（注意初始状态）

$$y(n+i) \leftrightarrow z^{i}[Y(z)-\sum_{j=0}^{i-1} z^{-j} y(j)]$$

已知$x(n)=x(n)u(n)$，求$y(n)$。

①若初始状态为：$y(0)$， $y(1), \ldots, y(k\text{-}1)$，输出初始状态中包含了输入$x(0)$， $x(1), \ldots, x(m\text{-}1)$ 影响

方法：两边做单边ZT，利用左移特性，代入$y(n)$的初始状态和$x(n)$。

② 若初始状态为$y_{zi}(0)$， $y_{zi}(1), \ldots, y_{zi}(k\text{-}1)$，输出初始状态仅与储能有关，与输入$x(0)$， $x(1), \ldots, x(m\text{-}1)$ 无关

方法：两边取单边ZT，利用左移特性，左边带入初始状态 $y_{zi}(0)$，$y_{zi}(1), \ldots, y_{zi}(k\text{-}1)$；但右边的$x(0)$， $x(1), \ldots, x(m\text{-}1)$ 全部取零。

4、差分方程的变换域解

例2:某系统为$y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2x(n+1)$，输入$x(n)=u(n)$，

初始条件为$y(0)=0$， $y(1)=1$，求$y(n)$。

例3:某系统为$y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2x(n+1)$，输入$x(n)=u(n)$，

初始条件为$y_{zi}(0)=0$， $y_{zi}(1)=-1$，求$y(n)$。

4、差分方程的变换域解

例2:某系统为$y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2x(n+1)$，输入$x(n)=u(n)$，初始条件为$y(0)=0$， $y(1)=1$，求$y(n)$。

解：对差分方程两端求单边Z变换：

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]+3z[Y(z)-y(0)]+2Y(z)=2z[X(z)-x(0)]$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{2zX(z)}{z^2+3z+2}}_{Y_{zs}(z)}+\underbrace{\frac{z^2y(0)+y(1)z+3zy(0)-2zx(0)}{z^2+3z+2}}_{Y_{zi}(z)}$$

$$x(n)=u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{2z}{z^2+3z+2}\frac{z}{z-1}+\frac{-z}{z^2+3z+2}$$

$$=z\left[\frac{1}{z+1}-\frac{4}{3}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-1}\right]+z\left[\frac{-1}{z+1}+\frac{1}{z+2}\right]$$

$$y(n)=\underbrace{\left[(-1)^n-\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{1}{3}\right]u(n)}_{y_{zs}(n)}+\underbrace{\left[(-2)^n-(-1)^n\right]u(n)}_{y_{zi}(n)}=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-2)^n\right]u(n)$$

4、差分方程的变换域解

例3:某系统为$y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2x(n+1)$，输入$x(n)=u(n)$，初始条件为$y_{zi}(0)=0$， $y_{zi}(1)=-1$，求$y(n)$。

解：差分方程两边求单边Z变换。左边的初始条件为零输入响应；右端求Z变换时，只保留$X(z)$项。

$$z^2[Y(z)-y_{zi}(0)-y_{zi}(1)z^{-1}]+3z[Y(z)-y_{zi}(0)]+2Y(z)=2zX(z)$$

$$\left(z^2+3z+2\right)Y(z)=2zX(z)+z^2y_0(0)+zy_0(1)+3zy_0(0)$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{2zX(z)}{z^2+3z+2}}_{Y_{zs}(z)}+\underbrace{\frac{z^2y_{zi}(0)+zy_{zi}(1)+3zy_{zi}(0)}{z^2+3z+2}}_{Y_{zi}(z)}$$

$$Y(z)=\frac{2z}{z^2+3z+2}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{-z}{z^2+3z+2}$$

$$Y(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{3}\frac{z}{z+2}$$

$$y(n)=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-2)^n\right]u(n)$$

4、利用Z变换分析线性时不变系统（离散）

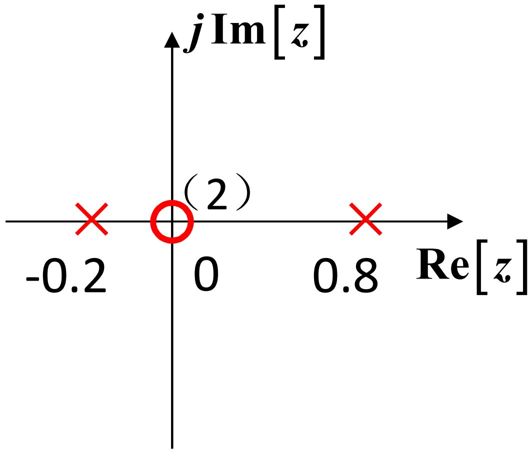
例：系统 $y(n)-0.6y(n-1)-0.16y(n-2)=5x(n)$,

求系统函数$H(z)$和单位样值响应$h(n)$，并画出极零点图。

$$解：H(z)=\frac{5}{1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2}}=\frac{5z^{2}}{z^{2}-0.6z-0.16}$$

$$=\frac{5z^{2}}{(z+0.2)(z-0.8)}=\frac{z}{z+0.2}+\frac{4z}{z-0.8}$$

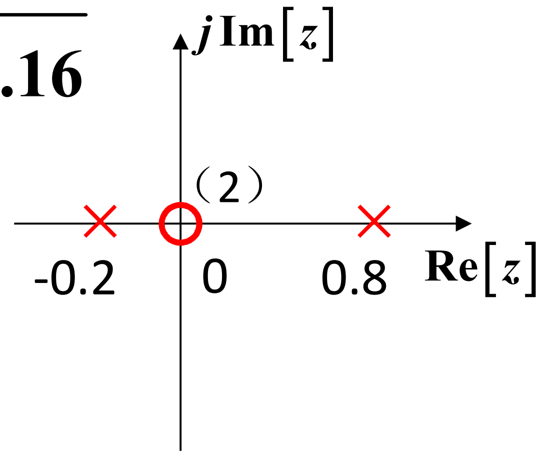
根据收敛域，分三种情况讨论……



4、利用Z变换分析线性时不变系统（离散）

$$H(z)=\frac{5}{1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2}}=\frac{5z^2}{z^2-0.6z-0.16}$$

$$=\frac{5z^2}{(z+0.2)(z-0.8)}=\frac{z}{z+0.2}+\frac{4z}{z-0.8}$$



当收敛域为$|z|>0.8$时

$$h(n)=(-0.2)^n u(n)+4\times 0.8^n u(n)$$

当收敛域为$|z|<0.2$时

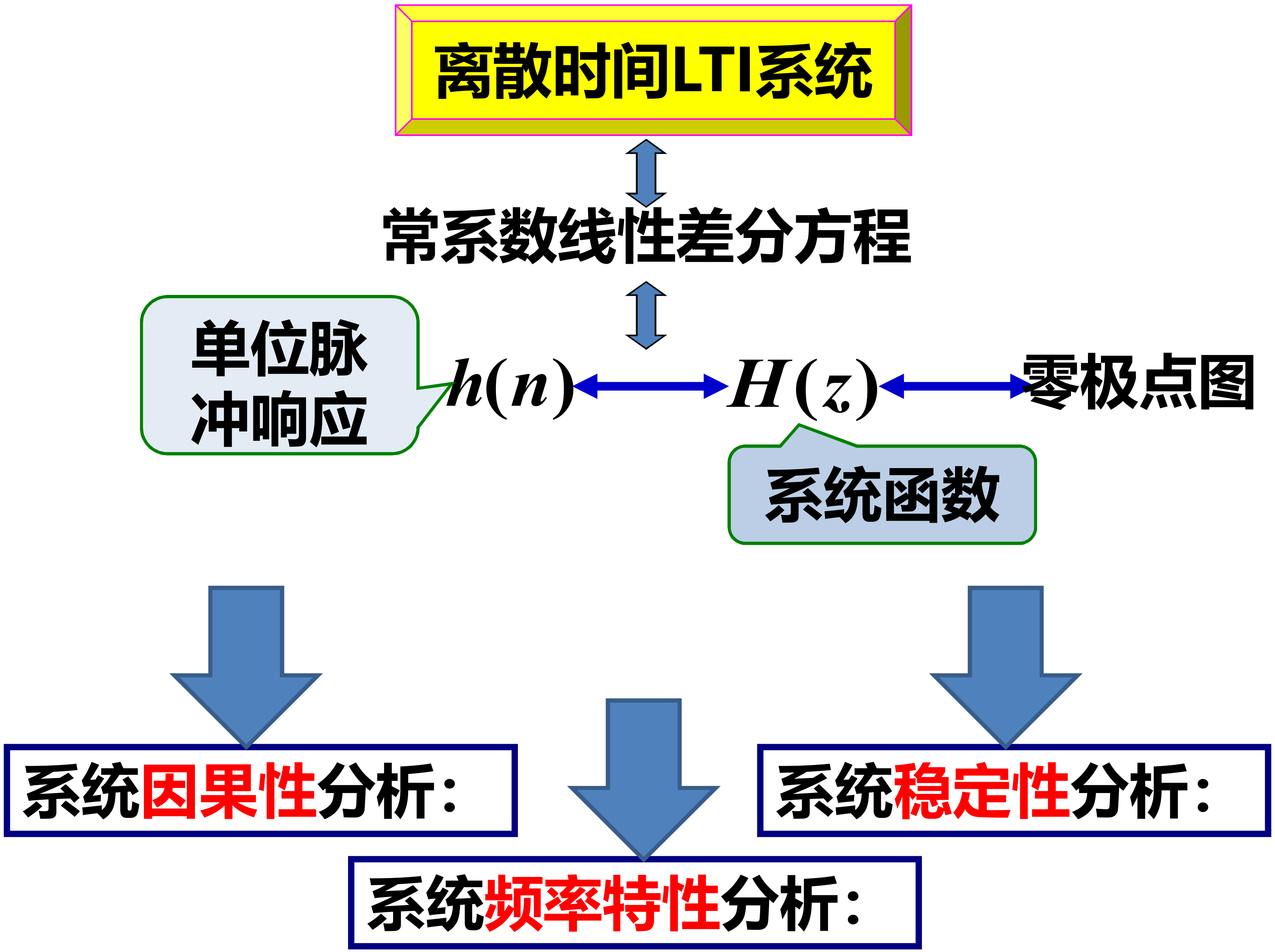
$$h(n)=-(-0.2)^n u(-n-1)-4\times 0.8^n u(-n-1)$$

当收敛域为$0.2<|z|<0.8$时

$$h(n)=(-0.2)^n u(n)-4\times 0.8^n u(-n-1)$$

119

4、利用Z变换分析线性时不变系统（离散）



4、利用Z变换分析线性时不变系统（离散）

1.系统函数（因果性和稳定性）

因果系统: $h(n)=h(n)u(n)$

判断： $h(n)=a^{n}u(n), H(z)=\dfrac{z}{z-a}, |z|>|a|$

$$h(n)=-a^{n}u(-n-1), H(z)=\frac{z}{z-a}, |z|<|a|$$

系统因果的条件： $H(z)$收敛域为圆外收敛(包含无穷远点)

稳定系统：系统对于任意一个有界输入，输出也有界。

LTI离散时间系统稳定的充分必要条件是:

单位样值响应h(n)是绝对可和的 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$。

系统稳定的条件： $H(z)$收敛域包含单位圆