南京邮电大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试数字信号处理试题参考答案

一、基本概念题（共65分）

1、（21分）（1）

1.1.1 $\because h(n)=e^{an}R_N(n)$

$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ 故系统稳定；又 $n<0$ 时，$h(n)\equiv 0$ 故系统因果。

1.1.2 $\because h(n)=2^n u(-n)$

$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2<\infty$ 故系统稳定，又 $n<0$ 时，$h(n)\equiv 0$ 不成立故系统非因果。

1.1.3 $\because h(n)=0.5^{|n|}0.2^{|n|}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{|n|}$

$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n}=2\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{20}{9}<\infty$ 故系统稳定，又 $n<0$ 时，$h(n)\equiv 0$ 不成立故系统非因果。

（2）、

1.2.1 $\because H(z)=\dfrac{1}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\ |z|>0.8$

所以收敛域包含单位圆，故系统稳定。又收敛域包含 ∞ 点，故系统是因果的。

1.2.2 $\because H(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}}\ |z|>1$

所以收敛域不包含单位圆，故系统不稳定。又收敛域包含 ∞ 点，故系统是因果的。

1.2.3 $\because H(z)=\dfrac{3+4.5z^{-1}}{1+0.3z^{-1}}\ |z|<0.3$

所以收敛域既不包含单位圆，又不包含 ∞ 点，故系统不稳定且是非因果的。

1.2.4 $\because H(z)=\dfrac{1}{z^{-1}(1-0.5z^{-1})}\ \infty>|z|>0.5$

所以收敛域包含单位圆，但不包含 ∞ 点，故系统是稳定但非因果的。

2、（9分）

2.1 $\because T(x[n])=ax(n)+b(a\neq 0,b\neq 0)$

$\therefore T(x_1[n]) = ax_1(n)+b, T(x_2[n]) = ax_2(n)+b$

$T(Ax_1[n]+Bx_2[n]) = aAx_1[n]+aBx_2[n]+b$

又 $AT(x_1[n])+BT(x_2[n]) = aAx_1(n)+Ab+aBx_1(n)+Bb$

$\therefore T(Ax_1[n]+Bx_2[n]) \neq AT(x_1[n])+BT(x_2[n])$

所以系统为非线性的，又 $T(x[n-n_0]) = ax(n-n_0)+b$ 移不变的。

2.2 $\because T(x[n]) = x(n)+3u(n+1)$

$\therefore T(x_1[n]) = x_1(n)+3u(n+1), T(x_2[n]) = x_2(n)+3u(n+1)$

$T(ax_1[n]+bx_2[n]) = ax_1[n]+bx_2[n]+3u(n+1)$

又 $aT(x_1[n])+bT(x_2[n]) = ax_1(n)+bx_2(n)+3(a+b)u(n+1)$

$\therefore T(ax_1[n]+bx_2[n]) \neq aT(x_1[n])+bT(x_2[n])$

所以系统为非线性的。又若令 $y(n) = T(x[n]) = x(n)+3u(n+1)$ 则 $y(n-n_0) = x(n-n_0)+3u(n-n_0+1) \neq T(x[n-n_0]) = x(n-n_0)+3u(n+1)$

故系统为时变的。

2.3 $\because T(x[n]) = e^{x(n)}$

$\therefore T(x_1[n]) = e^{x_1(n)}, T(x_2[n]) = e^{x_2(n)}$，$T\left(ax_1[n]+bx_2[n]\right) = e^{ax_1(n)+bx_1(n)}$

又 $aT(x_1[n])+bT(x_2[n]) = ae^{x_1(n)}+be^{x_2(n)}$

$\therefore T\left(ax_1[n]+bx_2[n]\right) \neq T\left(ax_1[n]+bx_2[n]\right)$ 所以系统为非线性的。

又 $T(x[n-n_0]) = e^{x(n-n_0)}$ 故系统为时不变的。

3、（每题 2 分，共 10 分）

3.1 错，模拟周期信号的采样不一定是离散周期信号。比如：正弦信号为一周期信号，而欲使一正弦序列为周期序列，必须满足条件：

$A\sin\left(\omega_0 n+\varphi\right) = A\sin\left[\omega_0(n+rN)+\varphi\right]$ 即满 $\omega_0 rN = 2k\pi$ 或 $\dfrac{\omega_0}{\pi} = \dfrac{2k}{rN}$

由于 π 是无理数，显然只有当 $\omega_0 = \alpha\pi$（α 是有理数）时正弦序列是周期序列。

3.2 错，离散时间信号时间离散幅度连续而数字信号时间和幅度都是离散的。

3.3 错，功率谱或能量谱已完全丧失掉了相位信息，不可能完全恢复信号。（功率谱密度与自相关函数为一傅氏变换对，而自相关函数与信号则并不对应。）

3.4 错，FIR 滤波器在满足条件：$h(n) = \pm h(N-1-n)$ 且 $h(n)$ 为实数下，才具有线性相位。

3.5 错，双线性变换中，$s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ $\omega = 2arctg(\dfrac{\Omega T}{2})$ 很明显变换前后并不

存在线性关系。
4、论述题（共 25 分）
4.1（8 分）a、DIT FFT
b、$X_{i+1}(k)=X_i(k)+W_N^2X_i(l) \quad X_{i+1}(l)=X_i(k)-W_N^2X_i(l)$
4.2（8 分）
$y(n)=h(0)\left[x(n)+x(n-5)\right]+h(1)\left[x(n-1)+x(n-4)\right]+h(2)\left[x(n-2)+x(n-3)\right]$
4.3（9 分）方法一：$\because x(n)=IDFT\left[X(k)\right]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$
比较 DFT 公式 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$
可见，只要将W_N^{kn}因子该为W_N^{-kn}因子，将输入$x(n)$改为$X(k)$输出$X(k)$改为对应的$x(n)$。在每级运算中分别乘一$\dfrac{1}{2}$因子。
方法二：

$$\because x^*(n)=\frac{1}{N}(\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn})^*=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{kn}=\frac{1}{N}DFT\left[X^*(k)\right]$$

$$\therefore x(n)=(x^*(n))^*=\frac{1}{N}DFT\left[X^*(k)\right]^*$$

所以①先对$X(k)$作共轭变换乘以，即虚部-1。
②访问 FFT 子程序。
③对结果取共轭，并乘以常数$\dfrac{1}{N}$。完成运算。
二、计算题（共 30 分）
1、（10 分）解：由题知

（a）$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(\omega_0-\omega)n}=\frac{1-e^{j(\omega_0-\omega)N}}{1-e^{j(\omega_0-\omega)}}$$

（提示：也可以从 Z 变换出发求$X(e^{j\omega})$，然后根据$X(e^{j\omega})$的性质求所需的结果。）

（b）$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\frac{1-e^{j(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k)N}}{1-e^{j(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k)}}=\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k)}}(k=0,1,\cdots,N-1)$$

（c）$$\because X(k)=\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k)}}(k=0,1,\cdots,N-1)$$

将$\omega_0=\frac{2\pi}{N}k_0$代入上式，则得到$\omega_0=\frac{2\pi}{N}k_0$时，$x(n)$的 DFT

$$X(k)=\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k_0N}}{1-e^{j(\frac{2\pi}{N}k_0-\frac{2\pi}{N}k)}}=\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k_0N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}}(k=0,1,\cdots,N-1)$$

2、解：（1）$\because a[n]=\{1,2,2,2\},b[n]=\{2,1,2\}$

$$\therefore a[n]*b[n]=[\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)+2\delta(n-3)]*[2\delta(n)+\delta(n-1)+2\delta(n-2)]$$
$$=2\delta(n)+4\delta(n-1)+4\delta(n-2)+4\delta(n-3)+\delta(n-1)+2\delta(n-2)+2\delta(n-3)+2\delta(n-4)$$
$$+2\delta(n-2)+4\delta(n-3)+4\delta(n-4)+4\delta(n-5)$$
$$=2\delta(n)+5\delta(n-1)+8\delta(n-2)+10\delta(n-3)+6\delta(n-4)+4\delta(n-5)$$
$$=\{2,5,8,10,6,4\}$$

（2）具体步骤如下：$\because N_1=4,N_2=3,N=N_1+N_2-1=6$所以取 N=8.

①对序列$x(n)$，$h(n)$补零至长为 N=8。

②用 FFT 计算$h(n)$，$x(n)$的离散傅立叶变换。

③计算$Y(k)=X(k)H(k)$。

④用 IFFT 计算$Y(k)$的离散傅立叶反变换得$y(n)=IFFT[Y(k)]$。

3、（10 分）解：

$$\because X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=1+2e^{-j2\omega}+2e^{-j3\omega}+\alpha e^{-j4\omega}+e^{-j5\omega}$$

$$\therefore X_1(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{2}k}$$

$$\therefore X_1(0)=X(e^{j\omega})|_{\omega=0}=6+\alpha \quad 又X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

所以$X_1(0)=x_1(0)+x_1(1)+x_1(2)+x_1(3)=4+1+2+2=9$

故$\alpha=3$。

三、设计题（共 40 分）

1、（12 分）解：(1)、

$$\because 系统的差分方程为y(n)=x(n)-\frac{1}{2}x(n-2)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

同时对两边取 Z 变换，则

$$Y(z)=X(z)-\frac{1}{2}z^{-2}X(z)+\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)$$

$\therefore$ 系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$

（2）、$\because H(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{z^2-\frac{1}{2}}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$

所以零点为 $z_{01,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，极点为 $z_{\infty1}=\dfrac{1}{4},z_{\infty2}=\dfrac{1}{2}$。

（3）、系统是否稳定应对 z 的收敛域分三种情况进行探讨：

①$|z|<\dfrac{1}{4}$，系统不稳定。

②$|z|>\dfrac{1}{2}$，系统稳定。

③$\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{2}$，系统不稳定。

2、（10 分）解：

$\because H_a(s)=\dfrac{8(s+2)}{s^2+2s+5}=\dfrac{4-2j}{s+1-2j}+\dfrac{4+2j}{s+1+2j}$

$\therefore$ 所求的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{(4-2j)T}{1-e^{(-1+2j)T}}+\frac{(4+2j)T}{1-e^{(-1-2j)T}}=\frac{T\left(8-8e^{-T}\cos 2T+4e^{-T}\sin 2T\right)}{1-2e^{-T}\cos 2T+e^{-2T}}$$
$$=\frac{0.2\left(8-8e^{-0.2}\cos 0.4+4e^{-0.2}\sin 0.4\right)}{1-2e^{-0.2}\cos 0.4+e^{-0.4}}$$

3、（10 分）解：

$\because G_a(z)=\dfrac{5z^2+4z-1}{8z^2+4z}$

$$\therefore G_a(s)=G_a(z)|_{z=\frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}}=G_a(z)|_{z=\frac{1+s}{1-s}}=\frac{5(\frac{1+s}{1-s})^2+4\frac{1+s}{1-s}-1}{8(\frac{1+s}{1-s})^2+4\frac{1+s}{1-s}}$$

$$=\frac{5(1+s)^2+4(1-s^2)-(1-s)^2}{8(1+s)^2+4(1-s^2)}=\frac{12s+8}{4s^2+16s+12}=\frac{3s+2}{s^2+4s+3}$$

4、（10 分）解：

（1）、通带最大波动出现在数字频率 $\omega_c-\frac{2\pi}{N}$ 处，对应的模拟频率为 $(\omega_c-\frac{2\pi}{N})\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{T}=(2\pi f_cT-\frac{2\pi}{N})\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{T}=f_c-\frac{1}{N}F_s$；对应的阻带最大波动出现在模拟频率 $f_c+\frac{1}{N}F_s$ 处。

（2）、用矩形窗设计时，波动幅度取决于窗谱主副瓣面积之比为 8.95%，而与 N 无关。

$\therefore$ 通带最大波动为 $20\lg 1.0895=0.74\mathrm{dB}$

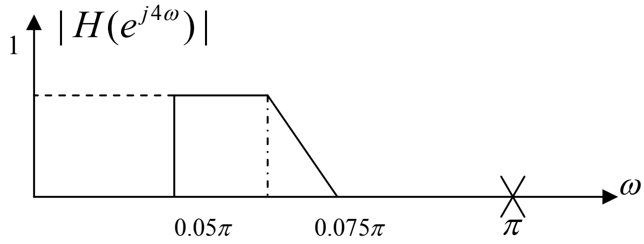
四、分析题（15 分）

1、(6 分)解：$\because H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

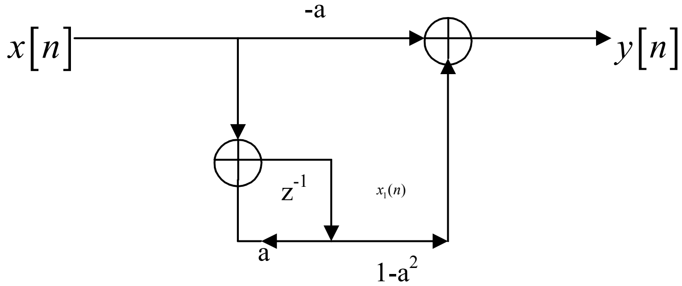
图示是 $H(z)$ 的幅频特性曲线 $|H(e^{j\omega})|\leftrightarrow\omega$

而 $H(z^4)$ 的幅频特性曲线 $|H(e^{j4\omega})|\leftrightarrow\omega$

显然为一横轴的压缩过程，其具体图示如下



2、（9 分）解：依题知其框图为



则 $x_1(n)=ax_1(n-1)+x(n-1)$，$y(n)=-ax(n)+(1-a^2)x_1(n)$

分别对以上两式做 Z 变换则，

$X_1(z) = az^{-1}X_1(z) + z^{-1}X(z)$，$Y(z) = -aX(z) + (1-a^2)X_1(z)$

故$Y(z) = -aX(z) + (1-a^2)\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}X(z)$

所以系统的传递函数 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = -a + \dfrac{(1-a^2)z^{-1}}{1-az^{-1}} = \dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$

故其最少乘法器 Z 域系统结构图为