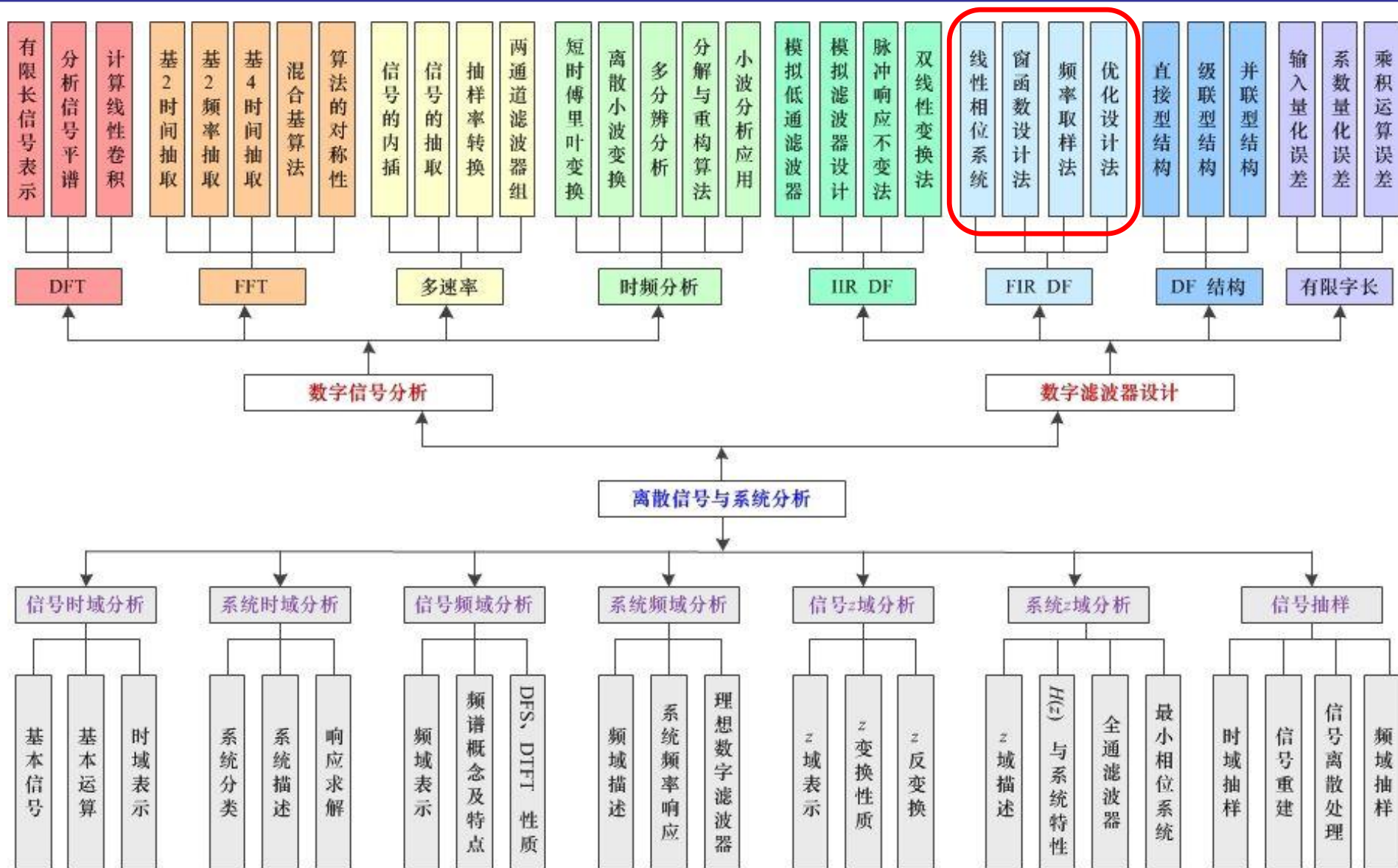


第七章 FIR滤波器设计





数字信号处理主要内容





第七章 有限脉冲响应数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点**
- **7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器**
- **7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器**
- **7.4 利用等波纹最佳逼近法设计FIR数字滤波器**
- **7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较**
- **7.6 几种特殊类型滤波器简介**
- **7.7 滤波器分析设计工具FDATool**



IIR数字滤波器的特性

➤ 优点:

设计方便，可利用模拟滤波器的设计结果；

➤ 缺点:

非线性相位，若需线性相位，则要增加相位校正网络；
系数存在量化误差情况下可能不稳定（极点跑出单位圆）。



线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

➤ FIR数字滤波器的特性

➤ 优点:

- 1) 可得到严格的线性相位，又可具有任意的幅度特性；
- 2) 系统无反馈，是无条件稳定系统；
- 3) 可由FFT实现滤波，即时域卷积用频域相乘实现。

➤ 缺点:

幅频特性较差，滤波器的阶次较高。



线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

FIR DF的特点

- 1、单位抽样响应 $h(n)$ 是有限长的，FIR DF一定是稳定的；
- 2、经延时， $h(n)$ 总可变成因果序列，所以FIR DF总可以由因果系统实现；
- 3、 $h(n)$ 为有限长，可以用FFT实现FIR数字滤波器；
- 4、FIR的相位特性可以是线性的，因此它有更广泛的应用，非线性的FIR一般不作研究。

□ FIR滤波器设计任务是选择有限长度的 $h(n)$ ，使频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 满足技术指标要求。

□ 本章主要介绍三种设计方法：**窗函数法、频率采样法和切比雪夫等波纹逼近法。**



线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

相位失真（波形失真之一）

当信号通过一个线性滤波器时，输出信号的幅度和相位都会发生变化，即

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

其中输出信号 $Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\arg[Y(e^{j\omega})]}$

输入信号 $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$

滤波器频率特性 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$

本章， $H(e^{j\omega})$ 记作 $H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$, $H_g(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$

$H_g(\omega)$ 称为幅度特性，是可正可负的实函数。



线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

➤ 两边取模:

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \cdot |H(e^{j\omega})|$$

幅度响应 $|H(e^{j\omega})|$ 决定了输入信号各个频率分量的放大量。

两边取相位:

$$\arg[Y(e^{j\omega})] = \arg[X(e^{j\omega})] + \theta(\omega)$$

相频特性 $\theta(\omega)$ 决定了输入信号各个频率分量的相位延迟。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

由于滤波器 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\theta(\omega)$ 都是 ω 的函数，

当输入信号的不同频率分量通过滤波器时，所产生的相位延迟也不同，从而有可能产生**相位失真**。

确保输出信号不产生相位失真的唯一方法是，使不同输入频率分量的信号通过滤波器时都有**相同的时间延迟**，即

$$\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \text{常数} \quad \longleftrightarrow \quad \theta(\omega) = -\tau\omega$$

即滤波器具有线性相位，可保证输入信号中不同频率的成分**延迟一致**，因此具有一定**带宽**的信号不会失真。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

1. 线性相位FIR数字滤波器

对于长度为 N 的 $h(n)$ ，频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \qquad H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

式中， $H_g(\omega)$ 称为幅度特性； $\theta(\omega)$ 称为相位特性。

说明：

$H_g(\omega) \neq |H(e^{j\omega})|$, $H_g(\omega)$ 为实数，有正负

线性相位FIR滤波器是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即

$$\theta(\omega) = -\tau\omega \quad \text{或} \quad \theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega, \quad \theta_0 \text{是初相}$$

第一类

第二类

$$\theta_0 = \pi / 2$$

常用



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

2. 线性相位FIR的时域约束条件

线性相位FIR滤波器的时域约束条件是指满足线性相位时，对 $h(n)$ 的约束条件。

1) 第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第一类线性相位FIR DF的相位函数 $\theta(\omega) = -\omega\tau$ ，根据傅里叶表达式：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j\sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega\tau - j\sin \omega\tau)$$

(7.1.5)



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

进一步得到:

$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{cases}$$

将两式相除得到:

$$\frac{\cos \omega\tau}{\sin \omega\tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}$$



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \omega \tau$$

移项并用三角公式化简得到:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \tau)] = 0$$

函数 $h(n)\sin\omega(n - \tau)$ 关于求和区间的中心 $(N - 1)/2$ 奇对称，是满足上式的一组解。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

因为 $\sin\omega(n - \tau)$ 关于 $n = \tau$ 奇对称，如果取 $\tau = (N - 1)/2$ ，则要求 $h(n)$ 关于 $(N - 1)/2$ 偶对称，所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

结论：长度为 N 的FIR数字滤波器具有第一类线性相位特性的条件是 $h(n)$ 关于 $n = (N-1)/2$ 点偶对称。

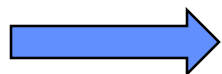
N 为奇数和偶数时， $h(n)$ 的对称情况分别如表中的情况1和情况2所示。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

关于 $H_g(\omega)$,有

$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{cases} \Rightarrow H_g(\omega)(\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos[(\omega - \tau)]$$



用到 $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

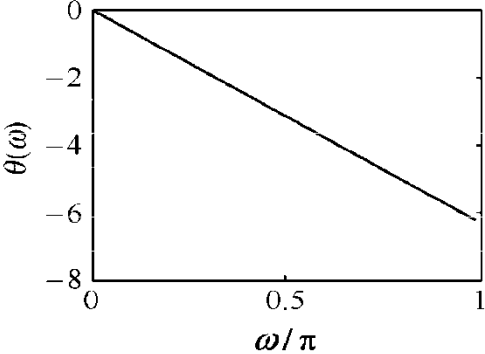
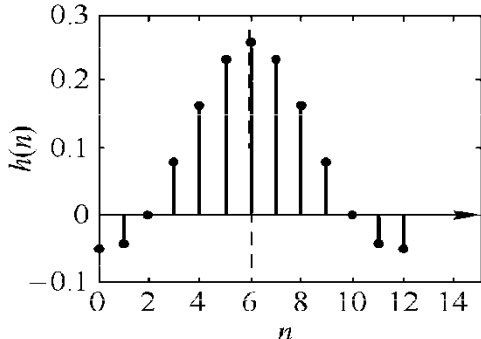
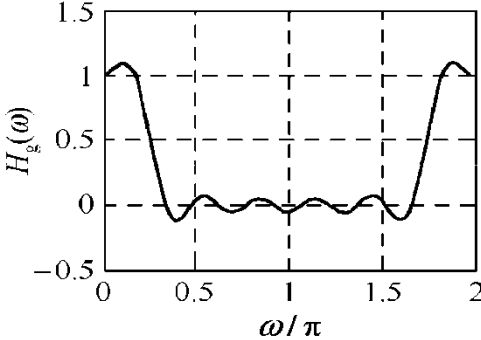
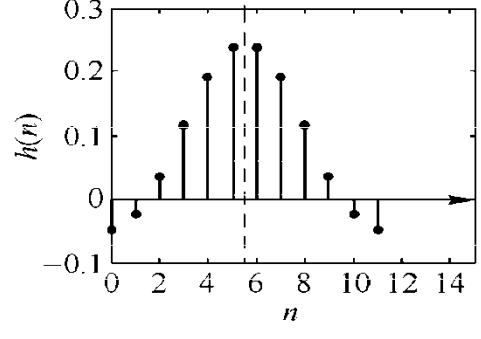
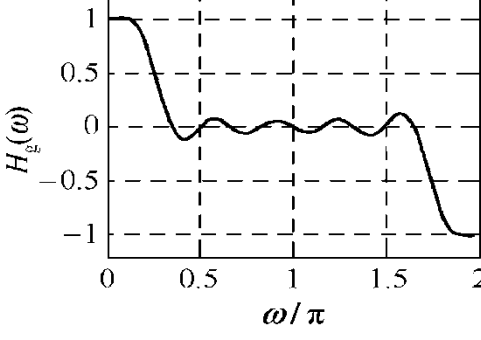
$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{N/2-1/2} h(n) \cos[(\omega - \tau)], \quad N \text{ is odd}$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2} h(n) \cos[(\omega - \tau)], \quad N \text{ is even}$$



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性——第一类

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	<p>$\theta(\omega) = -\omega\tau$, $\tau = \frac{N-1}{2}$</p> <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 
情况 2		<p>N 为偶数 ($N=12$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

2) 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第二类线性相位FIR数字滤波器的相位函数为 $\theta(\omega)=-\pi/2-\omega\tau$ ，经过同样的推导过程可得到：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j(\pi/2+\omega\tau)}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[\omega(n-\tau)] = 0$$

函数 $h(n)\cos [\omega(n - \tau)]$ 关于求和区间的中心 $(N - 1)/2$ 奇对称，是满足条件的一组解。

因为 $\cos [\omega(n - \tau)]$ 关于 $n=\tau$ 偶对称，所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

结论：长度为 N 的FIR数字滤波器具有第二类线性相位特性的条件是 $h(n)$ 关于 $n=(N-1)/2$ 点奇对称。

N 为奇数和偶数时 $h(n)$ 的对称情况分别如表中情况3和情况4所示。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

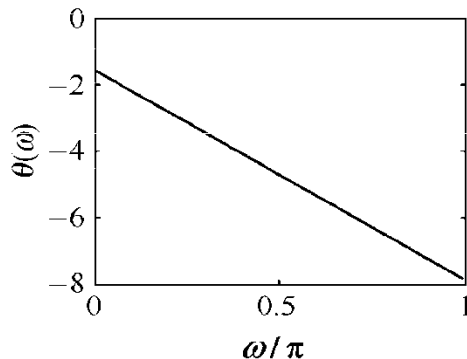
第二类线性相位特性

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

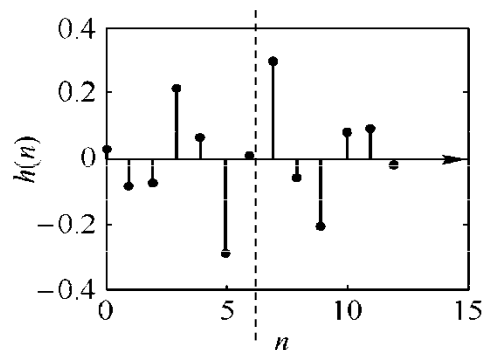
情况
3

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

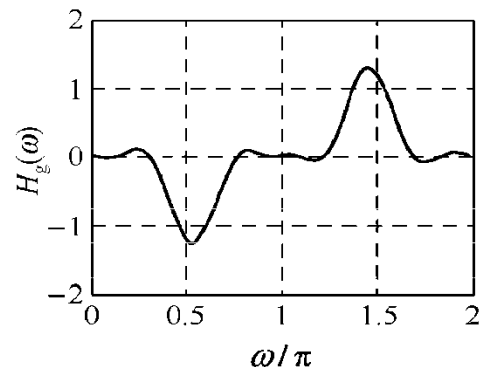
(以 $N=5$ 为例画图)



N 为奇数 ($N=13$)

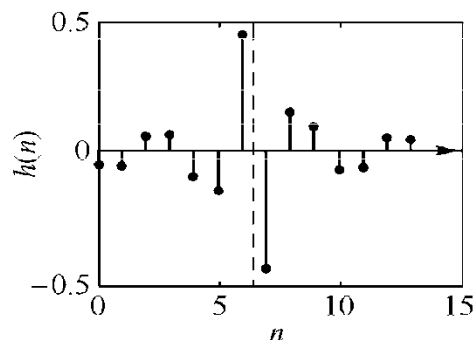


$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

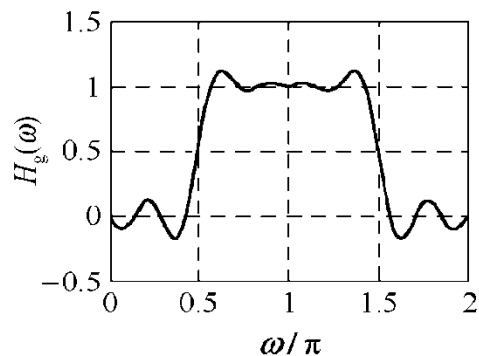


情况
4

N 为偶数 ($N=14$)

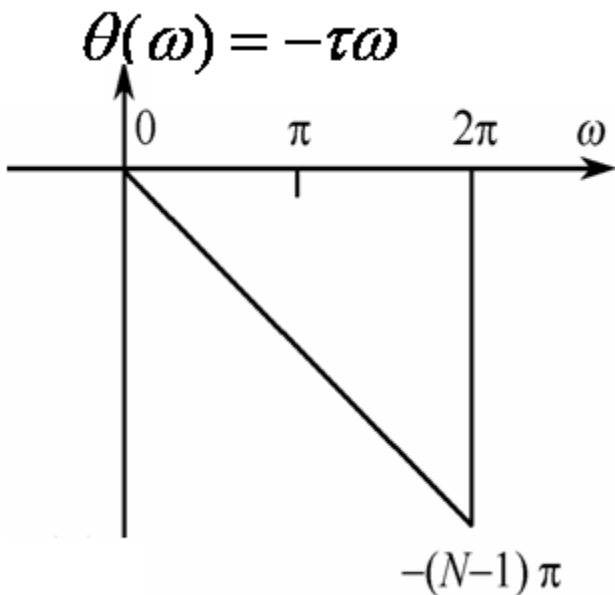


$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

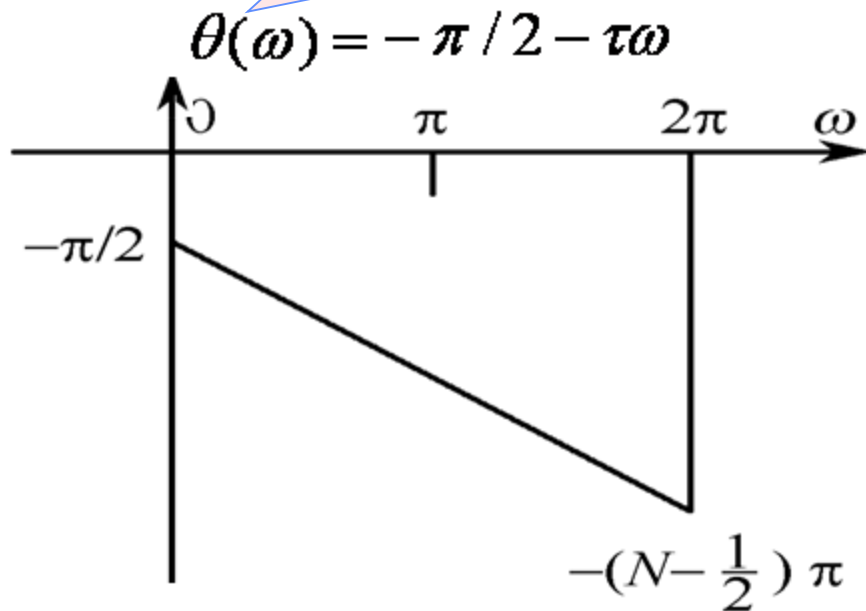




1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点



$h(n)$ 偶对称时的线性相位特性



相位特性同样为一严格的直线，但在零点处有 $\pi/2$ 的截距

$h(n)$ 奇对称时的线性相位特性



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

➤ 所以，FIR滤波器的线性相位的充要条件是：

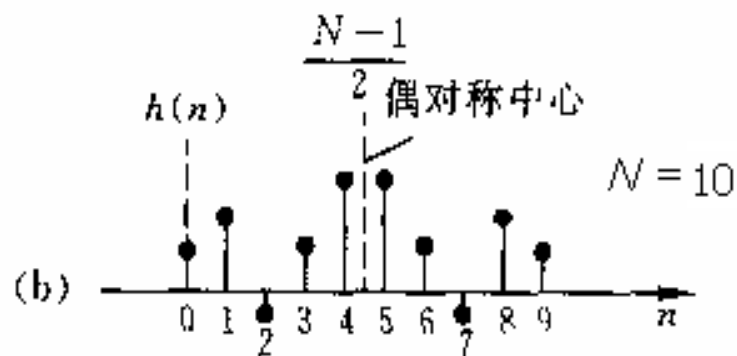
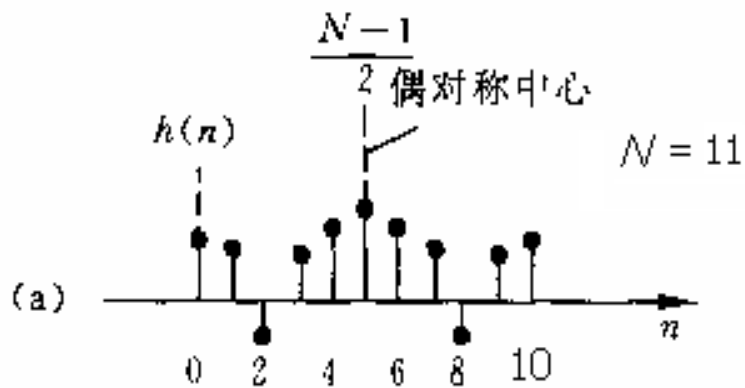
$$\tau = (N - 1) / 2$$

$$h(n) = \pm h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

由于 $h(n)$ 有奇对称和偶对称两种，而 $h(n)$ 的点数又有奇数和偶数两种形式，共有四种形式，它们的性质各不相同。

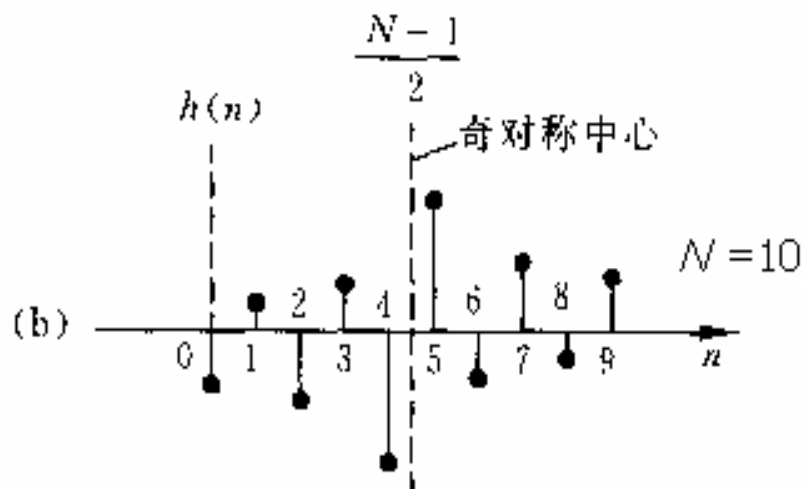
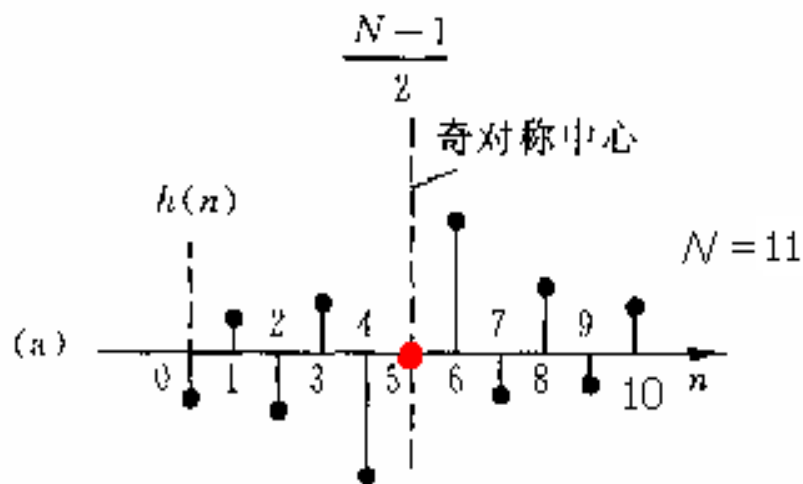


1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点



$h(n)$ 偶对称

(a) N 为奇数; (b) N 为偶数



$h(n)$ 奇对称

(a) N 为奇数; (b) N 为偶数



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

3. 线性相位FIR滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点

实质上，幅度特性的特点就是线性相位FIR滤波器的频域约束条件。

对于两类线性相位特性，下面分四种情况讨论其幅度特性的特点。为了推导方便，引入两个参数符号：

$$\tau = \frac{N-1}{2}, \quad M = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$$

式中， $\lceil (N-1)/2 \rceil$ 表示取不大于 $(N-1)/2$ 的最大整数。

当 N 为奇数时， $M=T=(N-1)/2$ 。



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

情况1: $h(n)=h(N - n - 1)$, N 为奇数。

将时域约束条件 $h(n)=h(N - n - 1)$ 和 $\theta(\omega)= - \omega\tau$ 代入傅里叶公式, 可得到:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)}] \\ &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} + h(n)e^{-j\omega(N-n-1)}] \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right\} \\ &= e^{-j\omega\tau} \left\{ h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)] \right\} \end{aligned}$$



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

所以

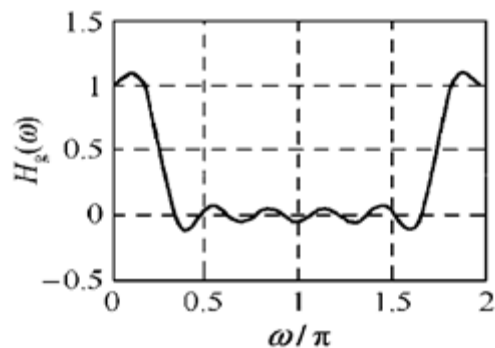
$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$

因为 $\cos [\omega(n-\tau)]$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称,

所以, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称。情况1
可以实现各种 (低通、高通、带通、带阻) 滤波器。

对于 $N=13$ 的低通情况, $H_g(\omega)$ 如图所示。

$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$





1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

情况2: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数。

仿照情况1的推导方法得到:

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos(\omega(n-\tau))$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$$

式中, $\tau = (N-1)/2 = N/2 - 1/2$ 。因为 N 是偶数, 所以当 $\omega = \pi$ 时

$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$



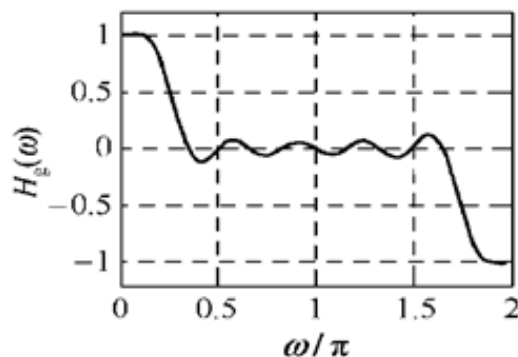
1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

因为 $\cos [\omega(n - \tau)]$ 关于过零点奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。

所以 $H_g(\pi)=0$ ， $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。情况2适合于设计低通和带通滤波器；不能实现高通和带阻滤波器。

对 $N=12$ 的低通情况， $H_g(\omega)$ 如下图所示。

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$





1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

情况3: $h(n) = -h(N - n - 1)$, N 为奇数。

将时域约束条件 $h(n) = -h(N - n - 1)$ 和 $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$ 代入, 并考虑 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$, 得到:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)}] \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} - h(n)e^{-j\omega(N-n-1)}] \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} - e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \\ &= -je^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \\ &= e^{-j(\pi/2+\omega\tau)} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

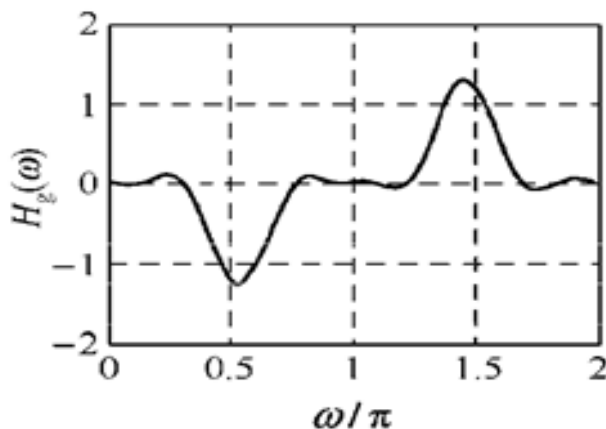
式中， N 是奇数， $\tau=(N-1)/2$ 是整数。

因为 当 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 时， $\sin[\omega(n-\tau)]=0$ ，而且 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点奇对称。

所以 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点奇对称，**情况3只能实现带通滤波器**（在 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 处幅度为0）。

对 $N=13$ 的带通滤波器举例， $H_g(\omega)$ 如下所示。

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$





1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

情况4: $h(n) = -h(N - n - 1)$, N 为偶数。

用情况3的推导过程可以得到:

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n - \tau)] \quad (7.1.13)$$

式中, N 是偶数, $\tau = (N - 1)/2 = N/2 - 1/2$ 。

当 $\omega = 0, 2\pi$ 时, $\sin [\omega(n - \tau)] = 0$, 为过零点;

**当 $\omega = \pi$ 时, $\sin [\omega(n - \tau)] = \sin [\pi (n - N/2) + \pi / 2]$
 $= \cos [\pi (n - N/2)] = (-1)^{n - N/2}$, 为峰值点。**

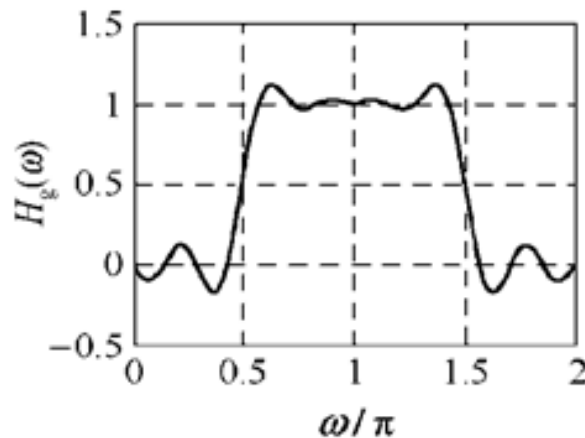


1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

由于 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称，关于峰值点 $\omega=\pi$ 偶对称。因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称，关于 $\omega=\pi$ 偶对称。情况4故适用于高通，带通滤波器，不能实现低通和带阻滤波器。

对 $N=12$ 的高通滤波器举例， $H_g(\omega)$ 如下所示。

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$





1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

4. 线性相位FIR数字滤波器的零点分布特点

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

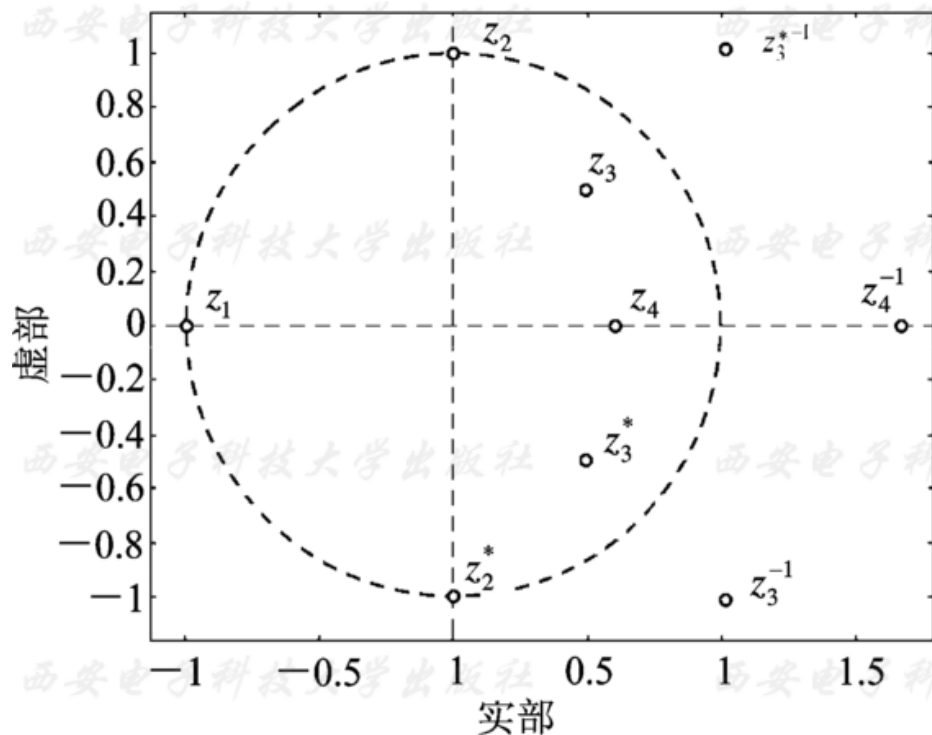
将 $h(n)=\pm h(N-1-n)$ 代入上式, 得到:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} \\ &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$



1、线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

可以看出，如 $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，其倒数 z_i^{-1} 也必然是其零点；又因为 $h(n)$ 是实序列， $H(z)$ 的零点必定共轭成对，因此 z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$ 也是其零点。这样，线性相位FIR滤波器零点必定是互为倒数的共轭对，确定其中一个，另外三个零点也就确定了，如图7.1.1中 z_3 、 z_3^{-1} 、 z_3^* 和 $(z_3^*)^{-1}$ 当然，也有一些特殊情况，如图7.1.1中 z_1 、 z_2 和 z_4 情况。





第七章 有限脉冲响应数字滤波器的设计

- 7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点
- 7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器
- 7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器
- 7.4 利用等波纹最佳逼近法设计FIR数字滤波器
- 7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较
- 7.6 几种特殊类型滤波器简介
- 7.7 滤波器分析设计工具FDATool



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

一、窗函数设计法原理

一般先给出为理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ ，现要求设计一个 N 点($0 \leq n \leq N-1$) 的 FIR 滤波器

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

去逼近 $H_d(e^{j\omega})$

逼近方法有三种：

- ◆ 1、窗函数设计法（时域逼近）
- ◆ 2、频率采样法（频域逼近）
- ◆ 3、最优化设计（等波纹逼近）



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ 通过傅立叶反变换获得

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

一般来说，理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 是分段常数型的，在边界频率处有突变点，所以，这样得到的理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ 一定是无限长序列，而且是非因果的。

而能实现的 $h(n)$ 只能是因果的、有限长序列。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

- 怎样用一个有限长序列 $h(n)$ 来逼近无限长的 $h_d(n)$?
- 最简单的办法是直接截取一段 $h_d(n)$ 代替 $h(n)$ 。这种截取可以形象地想象为 $h(n)$ 是**通过一个“窗口”**看到一段 $h_d(n)$
- $h(n)$ 也可表示为 $h_d(n)$ 和一个“窗函数”的乘积, 即

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

式中窗函数 $w(n)$ 就是矩形脉冲函数 $R_N(n)$, 为了改善设计滤波器的特性, 窗函数还可以有其它的形式。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

➤ 窗函数设计法是从单位冲激响应着手，使 $h(n)$ 逼近理想的单位冲激响应序列 $h_d(n)$

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

如果窗函数 $w(n)$ 的序列值 $\neq 1$ ，则在 $0 \leq n \leq N-1$ 内，对 $h_d(n)$ 作一定的调整（加权处理）。

$w(n)$ 是引起时域误差和频域误差的根本原因，因此，窗函数 $w(n)$ 序列的**形状**和**长度**是非常关键的选择。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

已知理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$, 求 $h_d(n)$ 。

傅立叶反变换

$$(1) \quad H_d(e^{j\omega}) \Rightarrow h_d(n)$$

窗函数截取

$$(2) \quad h_d(n) \Rightarrow h_d(n)w(n) = h(n)$$

(3) 检验 $h(n)$ 在误差指标内是否满足 理想频率特性。

$$h(n) \Rightarrow H(e^{j\omega}) \Leftarrow H_d(e^{j\omega})$$

(4) 若不满足, 则重新选择窗函数设计。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

- 下面以一个截止频率为 ω_c 的**线性相位理想低通滤波器**为例，讨论FIR的设计问题。
- 给定的理想低通滤波器为

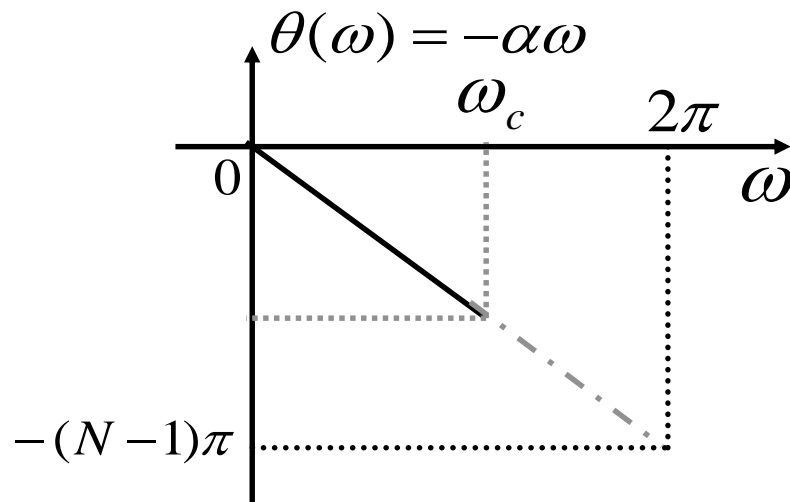
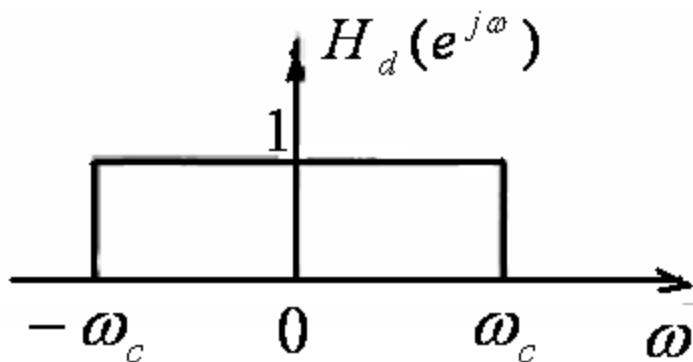
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

式中 α 为滤波器的群延迟时间（平均延迟时间）；
 ω_c 为低通滤波器的通带截止频率。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

➤ 下面是滤波器的理想频率特性





2 利用窗函数法设计FIR滤波器

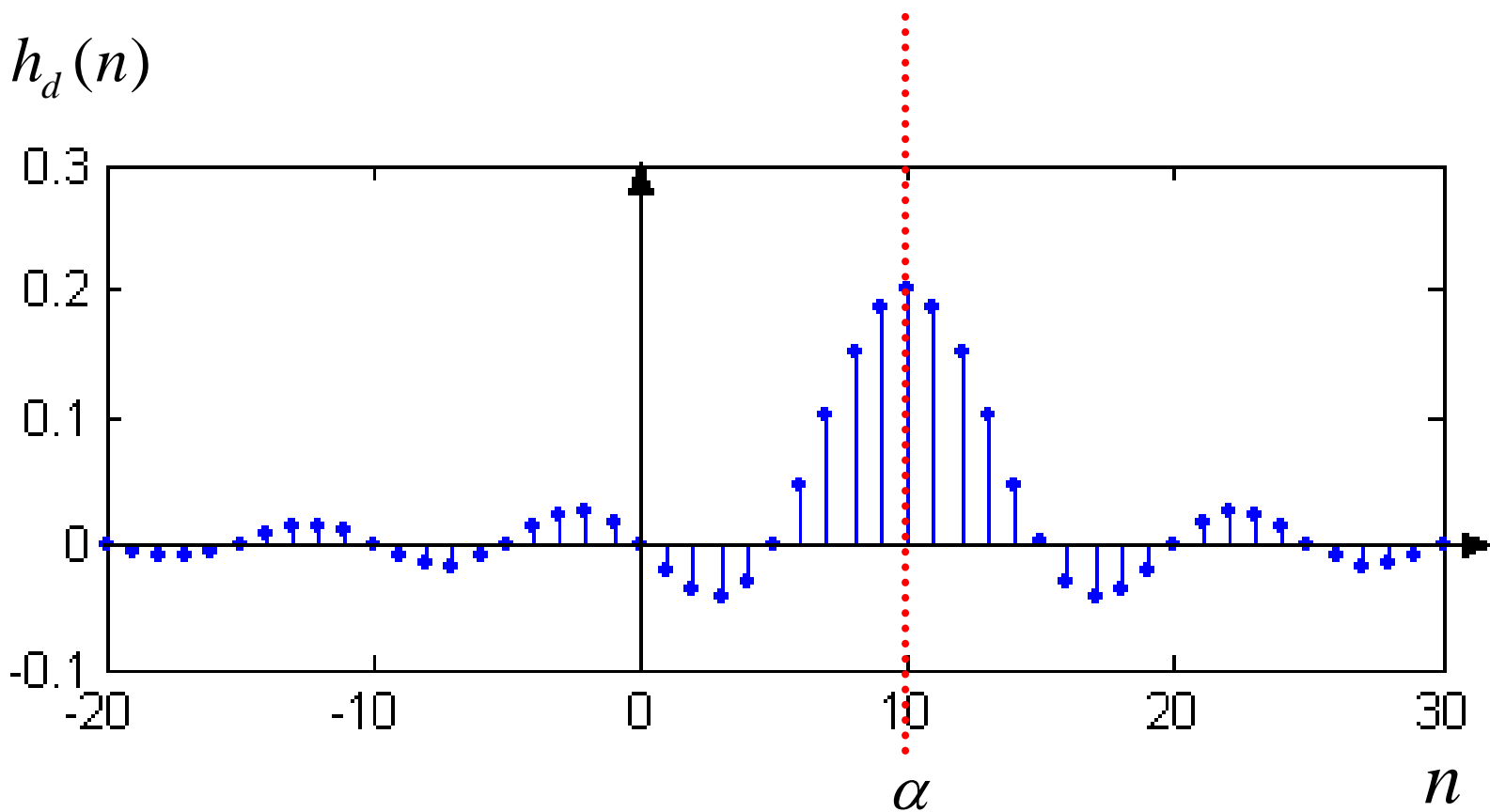
➤ 第一步：计算 $h_d(n)$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sa}[\omega_c(n-\alpha)] \end{aligned}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

➤ 理想低通的 $h_d(n)$





2 利用窗函数法设计FIR滤波器

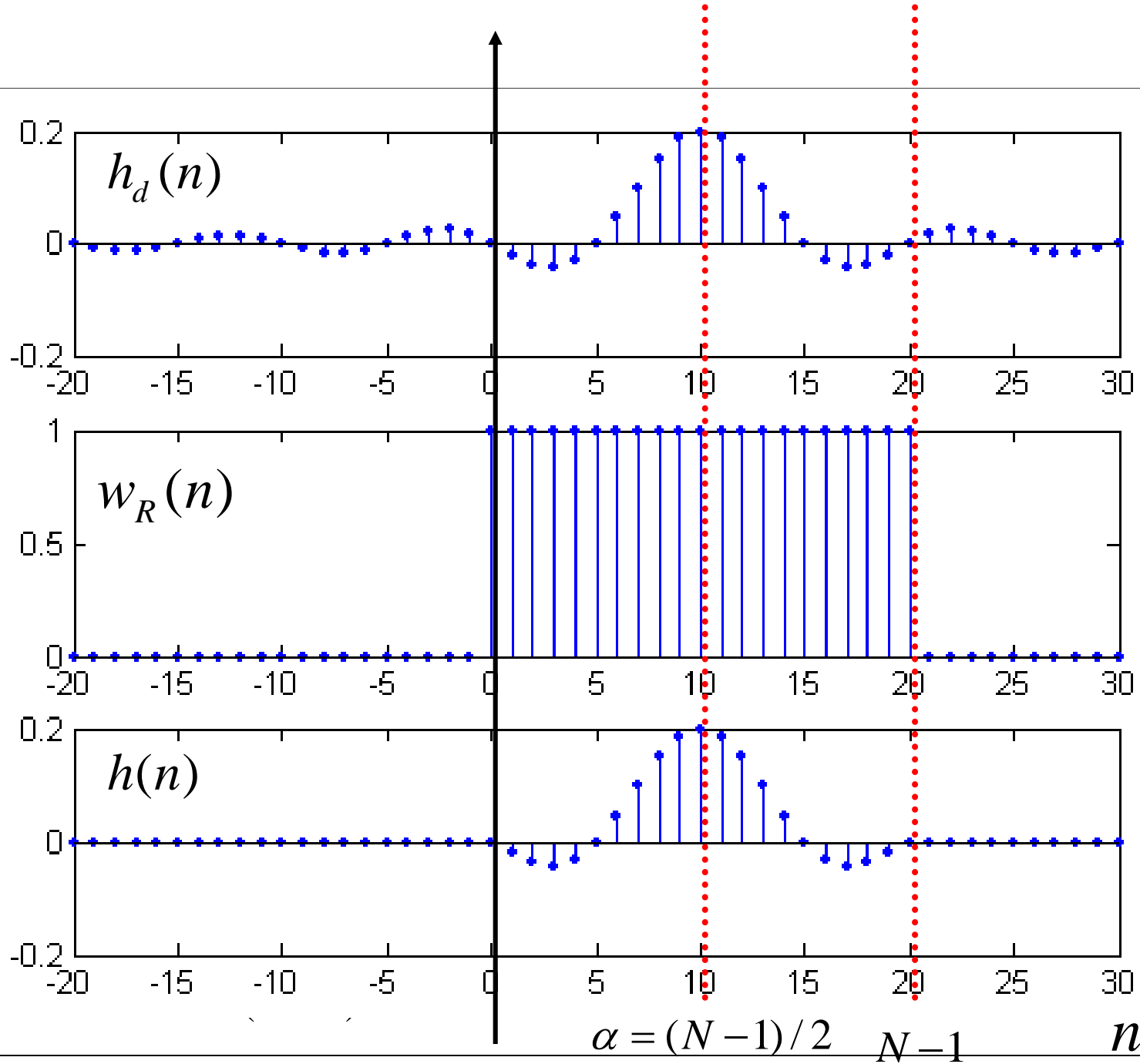
➤ $h_d(n)$ 是一个以 a 中心的偶对称的无限长非因果序列，如果截取一段 $n=0 \sim N-1$ 的 $h_d(n)$ 作为 $h(n)$ ，则为保证所得到的是线性相位FIR滤波器，延时 a 应怎样选择？

a 为 $h(n)$ 长度 N 的一半, 即 $\alpha = (N - 1) / 2$

第二步：用窗函数截取 $h_d(n)$

$$h(n) = w_R(n) \cdot h_d(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其它值} \end{cases}$$

其中 $w_R(n) = R_N(n)$





二、矩形窗函数设计方法

第三步，检验求 $h_d(n)$ 的频率特性 $H(e^{j\omega})$

$$\text{由于 } h(n) = w_R(n) \cdot h_d(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其它值} \end{cases}$$

$$\text{所以, } H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} W_R(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega})$$

其中 $W_R(e^{j\omega})$ 是矩形窗函数的频率特性,

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

用幅度函数和相位函数来表示，则有

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}, \quad \alpha = \frac{N - 1}{2}$$

其线性相位部分 $e^{-j\omega\alpha}$ 表示延时一半长度

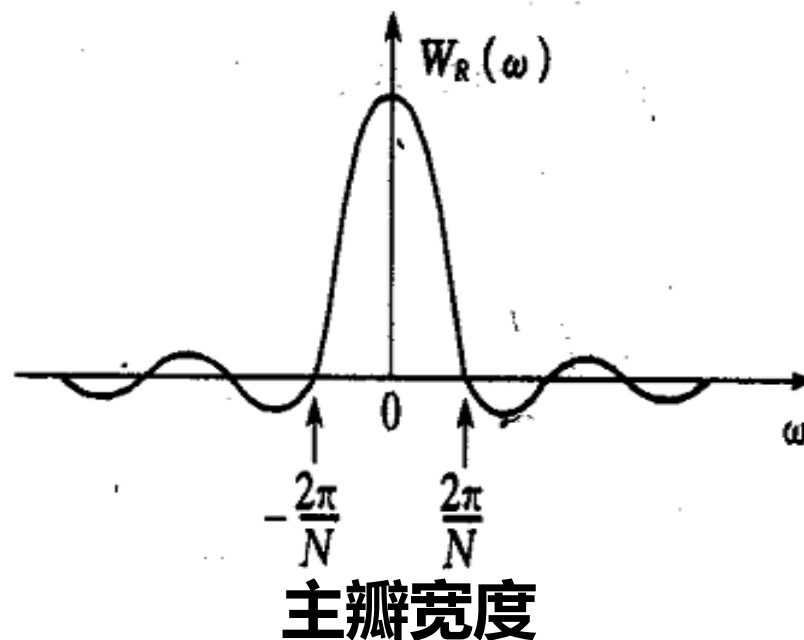
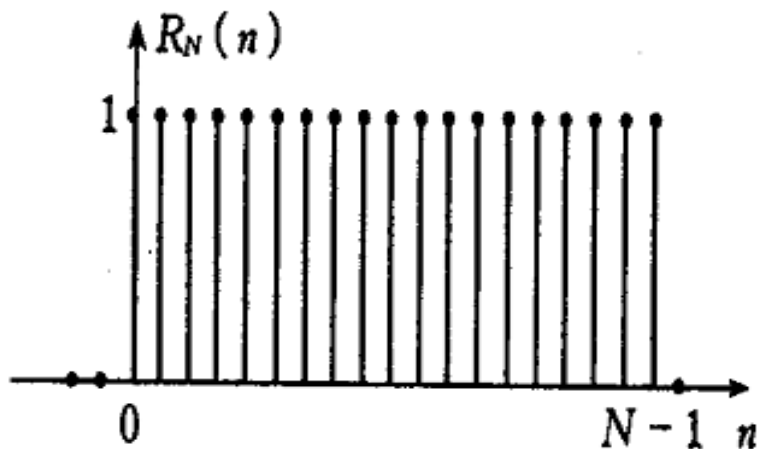
$$\alpha = (N - 1) / 2$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

➤ 对频率响应起作用的是它的幅度函数

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$





2 利用窗函数法设计FIR滤波器

理想低通滤波器的幅度特性函数

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

将 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 代入, 得到:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_{Rg}(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

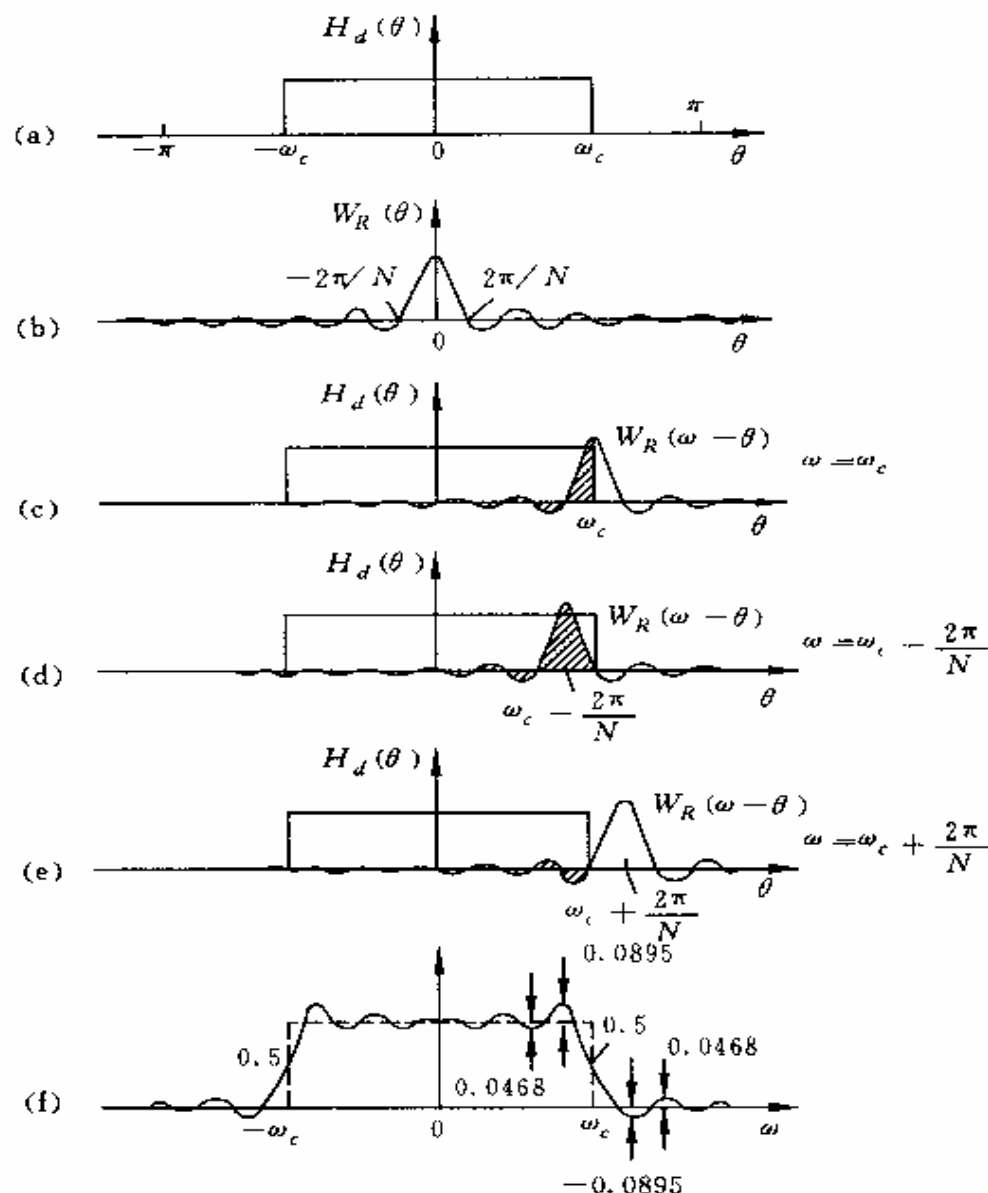
将 $H(e^{j\omega})$ 写成 $H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) e^{-j\omega\alpha}$, 则

$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta$$

该式说明加窗后的滤波器的幅度特性等于理想低通滤波器的幅度特性 $H_{dg}(\omega)$ 与矩形窗幅度特性 $W_{Rg}(\omega)$ 的卷积。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器



$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) R_N(\omega - \theta) d\theta$$

$\omega=0$ 时: $H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} R_N(\theta) d\theta$

$\omega = \omega_c$ 时:

$$H(\omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} R_N(\omega_c - \theta) d\theta$$

$\omega = \omega_c - 2\pi/N$ 时 ——正峰

$$H\left(\omega_c - \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} R_N\left(\omega_c - \frac{2\pi}{N} - \theta\right) d\theta$$

$$= 1.0895 H(0) = \text{Max}$$

$\omega = \omega_c + 2\pi/N$ 时 ——负峰

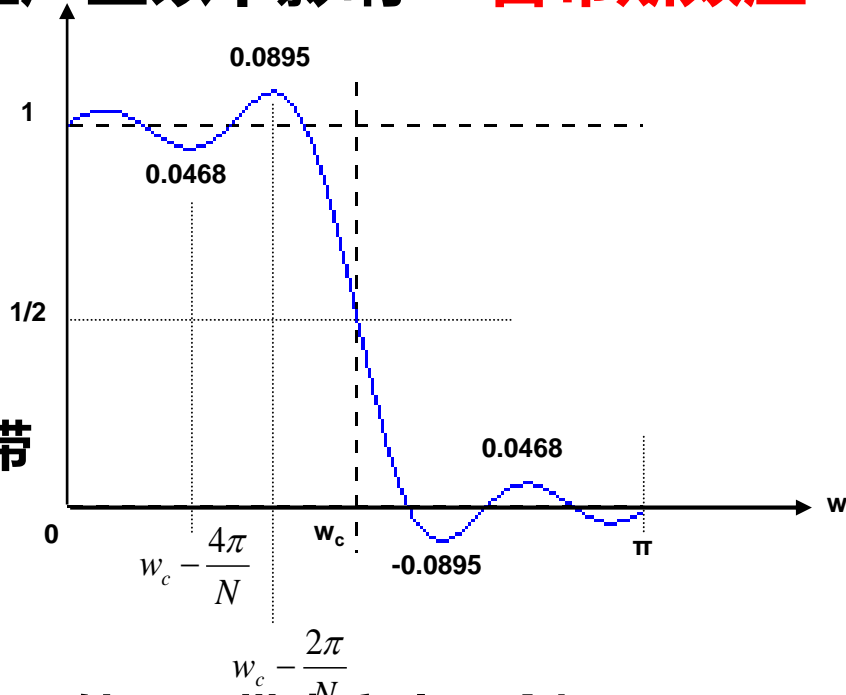
$$H\left(\omega_c + \frac{2\pi}{N}\right) = -0.0895 H(0) = \text{Min}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

综上所述：加窗对理想矩形频率响应产生以下影响---**吉布斯效应**

窗函数的频率特性使**矩形频率响应**产生带内和带外**波动**。在 $\omega = \omega_c \pm 2\pi / N$ (在过渡带的两侧)波动最大, 约为8.95%, 与 N 无关, 称为**吉布斯效应**。



(1)在理想特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度, 近似等于 $R_N(\omega)$ 主瓣宽度 (实际的过渡带要小), 即 $4\pi/N$ 。

(2) 通带内产生了波纹, 最大的峰值在 $\omega_c - 2\pi/N$ 处。阻带内产生了余振, 最大的负峰在 $\omega_c + 2\pi/N$ 处。

其震荡的幅值取决于旁瓣的相对幅度, 而震荡的多少取决于旁瓣的多少。窗谱肩峰及其波动的存在影响了滤波器通带内的平稳性, 影响阻带的衰减。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(3) 在主瓣附近，按照前面分析， $W_{Rg}(\omega)$ 可近似为

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\omega / 2} \approx N \frac{\sin x}{x}$$

增加 N ，**只能改变窗谱的主瓣宽度**、 ω 坐标的比例、 $W_{Rg}(\omega)$ 的绝对值大小等内容，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例，这个相对比例由窗函数的形状决定。

因而，当截取长度 N 增加时，只会减小过渡带宽($4\pi/N$)，即增加 N 只能使通、阻带内振荡加快，但相对振荡幅度却不减小，而不会改变肩峰的相对值。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

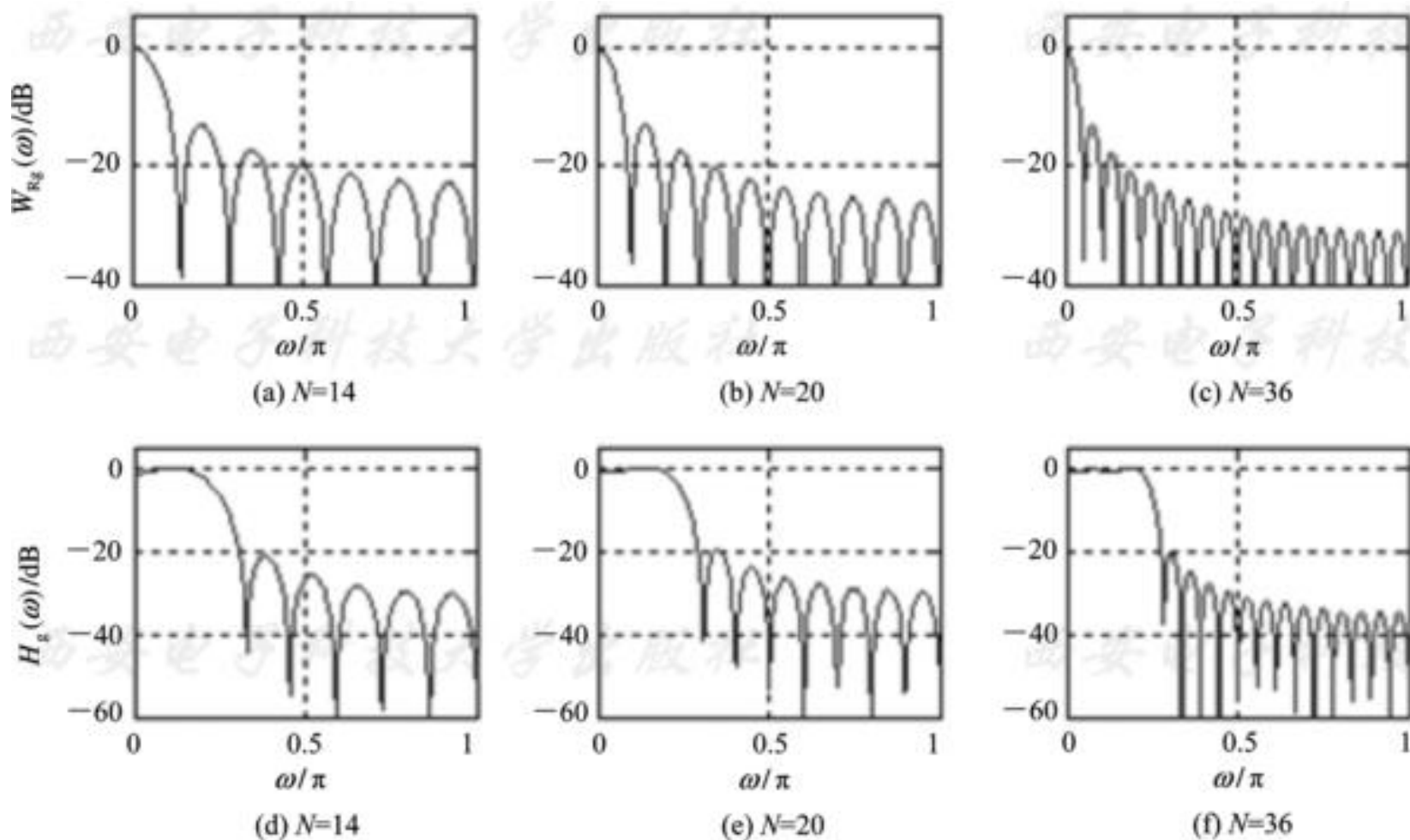


图7.2.4 矩形窗函数长度的影响



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

窗函数的选择对吉布斯效应会产生影响，
分析窗函数的选取原则：

调整窗口**长度** N 只能有效地控制过渡带的宽度，而要减少带内波动以及增大阻带衰减，只能从窗函数的**形状**上找解决问题的方法。

1. 尽可能减少主瓣宽度，以使过渡带尽量陡；
2. 旁瓣相对于主瓣越小越好，这样可使肩峰和波动减小，即能量尽可能集中于主瓣内。

旁瓣的减小可使通带、阻带波动减小，从而加大阻带衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。

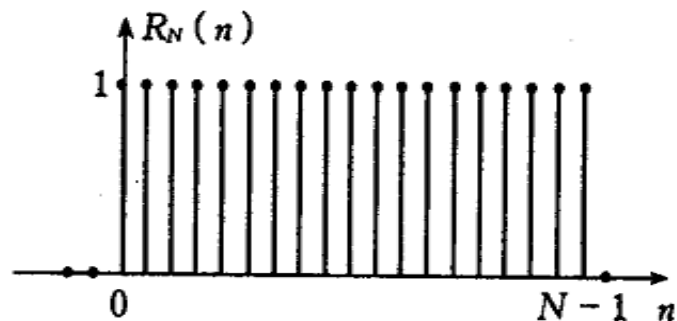


2 利用窗函数法设计FIR滤波器

1. 矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$



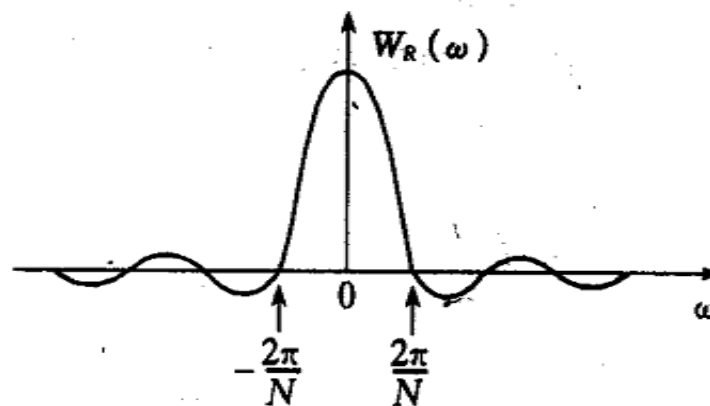
为了描述方便，定义窗函数的几个参数：

旁瓣峰值 α_n ——窗函数的幅频函数

$|W_g(\omega)|$ 的最大旁瓣的最大值相对主瓣最大值的衰减值 (dB) ；

过渡带宽度 B_g ——用该窗函数设计的FIR数字滤波器 (FIRDF) 的过渡带宽度；

阻带最小衰减 α_s ——用该窗函数设计的FIRDF的阻带最小衰减。





2 利用窗函数法设计FIR滤波器

2. 巴特列特 (Bartlett) 窗 (又称三角形窗)

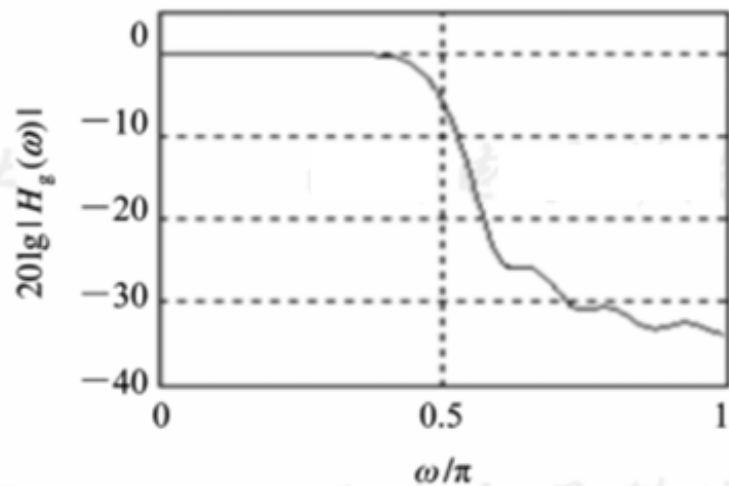
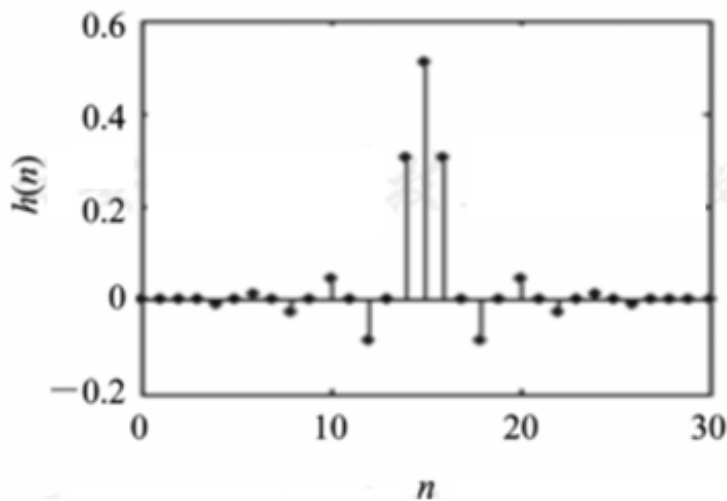
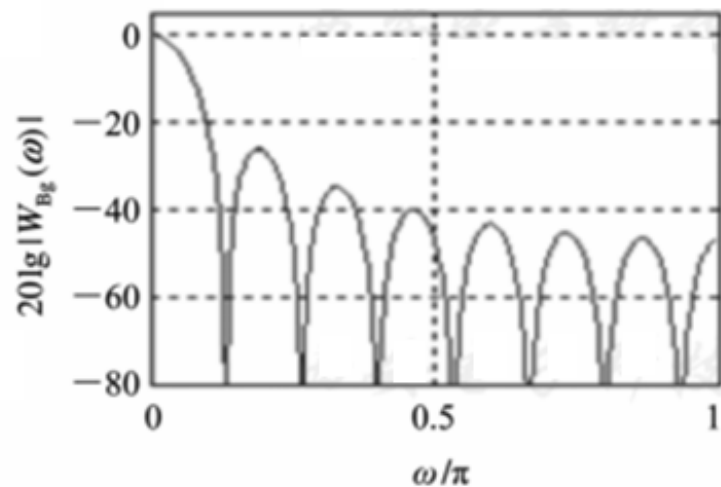
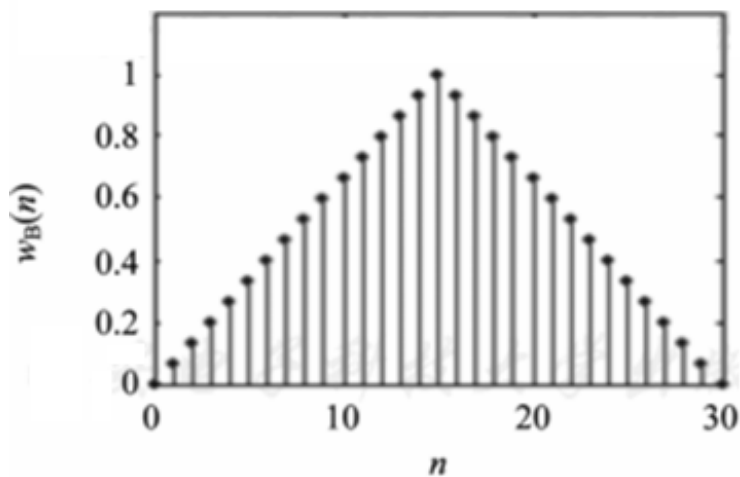
$$\omega_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1) \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{1}{2}(N-1) < n \leq N-1 \end{cases}$$

其幅度函数为

$$W_{Bg}(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器



三角窗的四种波形



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

3. 汉宁 (Hanning) 窗——升余弦窗

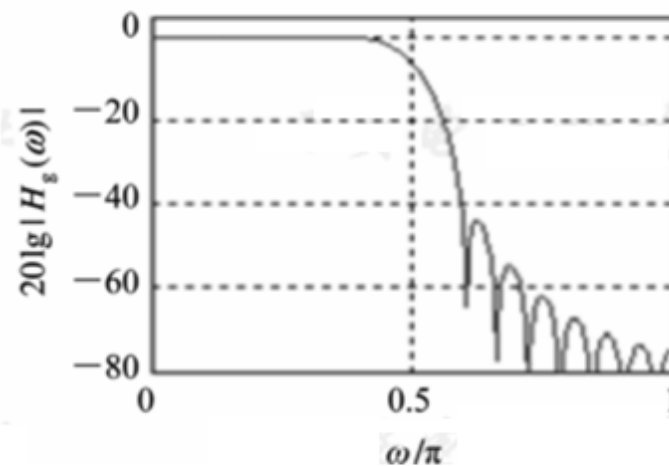
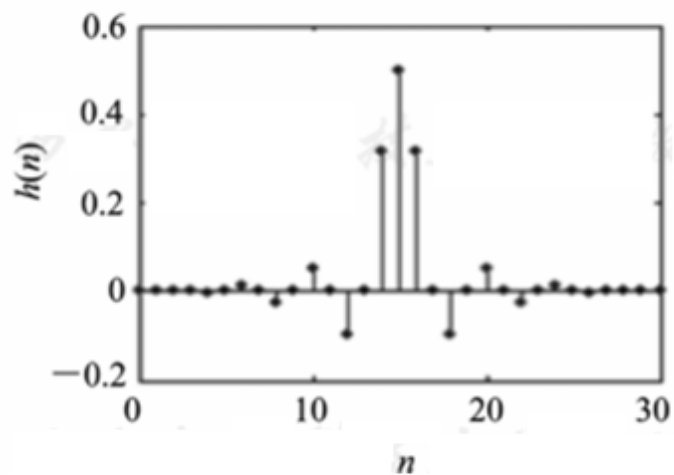
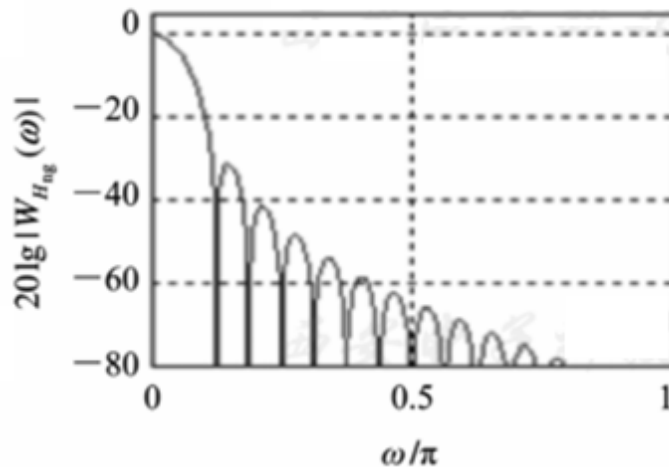
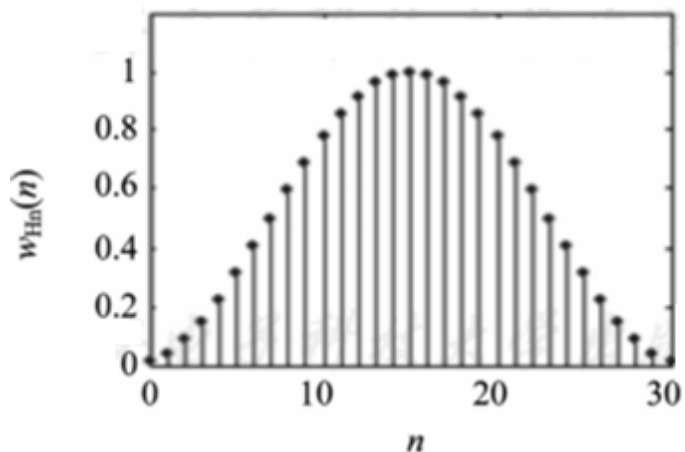
$$w_{\text{Hn}}(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

$$W_{\text{Hn}}(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N})]$$

汉宁窗的幅度函数 $W_{\text{Hn}}(\omega)$ 由三部分相加，旁瓣互相抵消，使能量更集中在主瓣中。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器



汉宁窗的四种波形



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

4. 哈明 (Hamming) 窗——改进的升余弦窗

$$w_{\text{Hm}}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

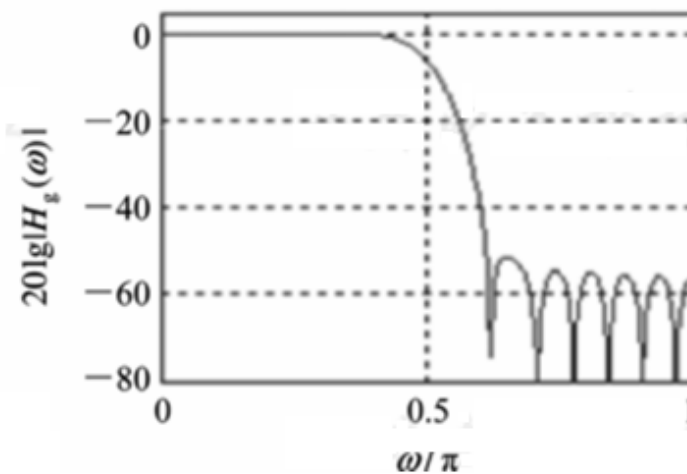
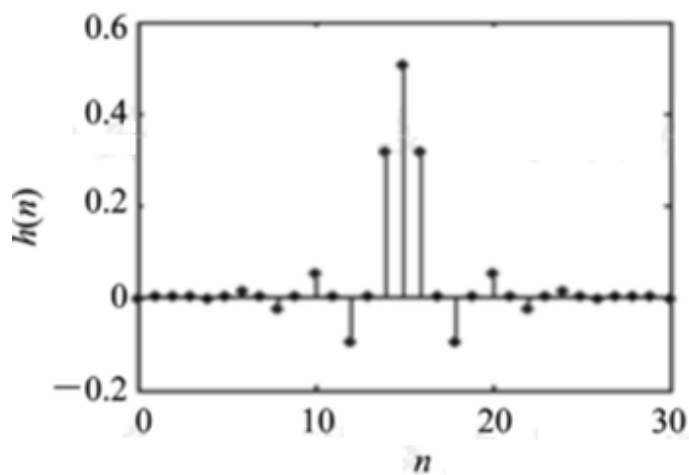
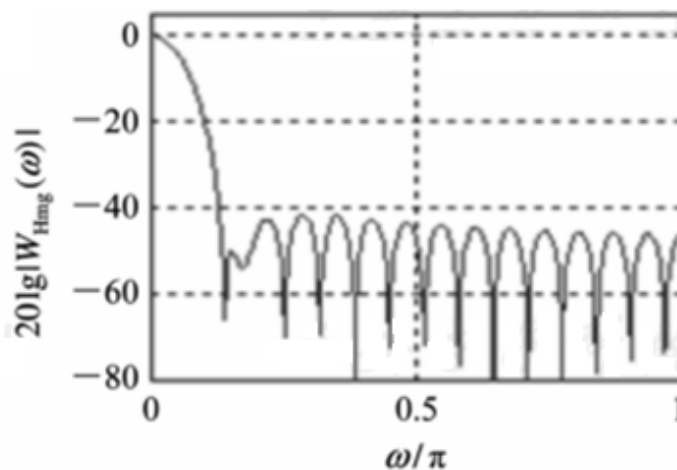
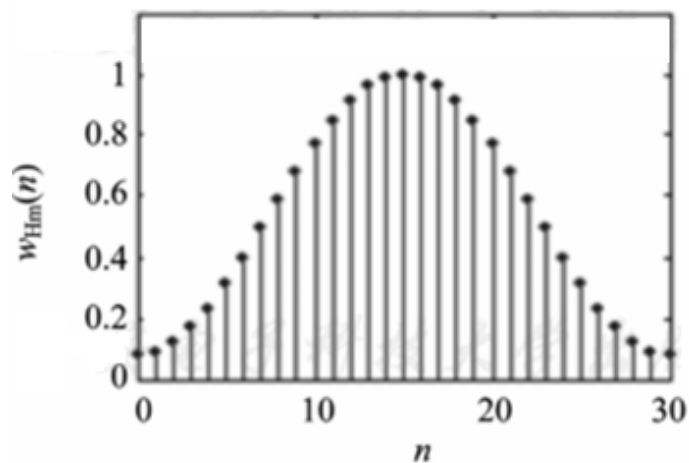
其幅度函数 $W_{\text{Hmg}}(\omega)$ 为

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) = 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

这种改进的升余弦窗，能量更加集中在主瓣中，主瓣的能量约占99.96%，瓣峰值幅度为40 dB，但其主瓣宽度和汉宁窗的相同，仍为 $8\pi/N$ 。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器



哈明窗的四种波形



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

6种窗函数的基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 α_n /dB	过渡带宽度 B_t		阻带最小衰减 α_s /dB
		近似值	精确值	
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74
凯塞窗($\beta = 7.865$)	-57		$10\pi/N$	-80



窗函数法设计FIR滤波器的步骤

- (1) 根据对过渡带及阻带衰减的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N 。
- (2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$
- (3) 计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- (4) 加窗得到设计结果： $h(n)=h_d(n)w(n)$ 。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(1)根据对过渡带及阻带衰减的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N 。

先按照阻带衰减选择窗函数类型。原则是在保证阻带衰减满足要求的情况下，尽量选择主瓣窄的窗函数。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$, 即

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

对所谓的“标准窗函数法”，就是选择 $H_d(e^{j\omega})$ 为线性相位理想滤波器（理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻）。以低通滤波器为例， $H_{dg}(\omega)$ 应满足：

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(3) 计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

如果 $H_d(e^{j\omega})$ 较复杂，或者不能用封闭公式表示，则不能用上式求出 $h_d(n)$ 。我们可以对 $H_d(e^{j\omega})$ 从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$

采样 M 点，采样值为 $H_{dM}(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$, $k=0, 1, 2, \dots, M-1$,

1, 进行 M 点IDFT(IFFT)，得到：

$$h_{dM}(n) = \text{IDFT}[H_{dM}(k)]_M$$

根据频域采样理论， $h_{dM}(n)$ 与 $h_d(n)$ 应满足如下关系：

$$h_{dM}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rM) R_M(n)$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

因此，如果 M 选得较大，可以保证在窗口内 $h_{dM}(n)$ 有效逼近 $h_d(n)$ 。

对 (7.2.19) 式给出的线性相位理想低通滤波器作为 $H_d(e^{j\omega})$ ，由 (7.2.2) 式求出单位脉冲响应 $h_d(n)$ ：

$$h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)}$$

为保证线性相位特性， $\alpha = (N - 1)/2$ 。

(4) 加窗得到设计结果： $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

例1、用窗函数法设计线性相位高通FIRDF，要求通带截止频率 $\omega_p=\pi/2$ rad，阻带截止频率 $\omega_s=\pi/4$ rad，通带最大衰减 $\alpha_p=1$ dB，阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB。

解 (1) 选择窗函数 $w(n)$ ，计算窗函数长度 N 。

已知阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB，由表可知汉宁窗和哈明窗均满足要求，选择汉宁窗。

过渡带宽度 $B_t \leq \omega_p - \omega_s = \pi/4$ ，汉宁窗的精确过渡带宽度

$B_t=6.2\pi/N$ ，所以要求 $B_t=6.2\pi/N \leq \pi/4$ ，解之得 $N \geq 24.8$ 。对高通滤波器 N 必须取奇数，取 $N=25$ ，则

$$w(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi n}{12} \right) \right] R_{25}(n)$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(2) 构造 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

式中

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 12, \quad \omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{3\pi}{8}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

(3) 求出 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right) \\ &= \frac{\sin \pi(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} - \frac{\sin \omega_c(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} \end{aligned}$$

将 $\tau=12$ 代入得

$$h_d(n) = \delta(n - 12) - \frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)}$$



2 利用窗函数法设计FIR滤波器

$\delta(n - 12)$ 对应全通滤波器, $\frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)}$ 是截止频率为 $3\pi/8$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应, 二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。这就是求理想高通滤波器的单位脉冲响应的另一个公式。

(4) 加窗:

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$
$$= \left\{ \delta(n - 12) - \frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)} \right\} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) \right] R_{25}(n)$$



谢谢!