南京邮电大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试数字信号处理试题参考答案

一、填空题（每空 1 分，共 10 分）

1、带通 （从 FIR 滤波器的幅频特性曲线出发，$H(0)=0, H(\pi)=0$ 故只能设计带通滤波器） 2、$2\pi f_s$ 2π 3、$\{X_0, X_2, \cdots X_{14}\}$ 4、抗混叠滤波 抗镜像滤波 5、有限 Z 平面 6、$h_1(n)*h_2(n)$ $H_1(z)\cdot H_2(z)$

7、$\phi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$

二、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1、错，因果系统只要求系统的收敛域包含∞，正确的应该为因果稳定系统的极点只能在单位圆内。

2、对。

3、对。

4、错，过渡带宽变小，阻带最小衰耗不会变化。

5、错，应该为离散的周期信号，因为傅氏变换的对偶性决定了时域离散对应频域的周期，时域的周期对应频域的离散，即时域的离散周期必然对应频域的周期离散。

三、论述题（每题 5 分，共 15 分）

1、待解中

2、答：由 DFT 的性质，若 $x(n)$ 为实序列，则 $X(k)$ 共轭偶对称，即实部偶对称，虚部奇对称；若 $x(n)$ 为偶对称，则 $X(k)$ 实部偶对称，虚部偶对称。故 $X(k)$ 也是实序列、偶对称的。

3、答：由于在实轴附近分布的稀，虚轴附近分布的密会使实轴附近的极点量化误差大，而低通、高通滤波器的极点分布在实轴附近，故使低通、高通滤波器的量化误差较大。对应的带通滤波器的极点分布在实轴附近，而量化位置在实轴附近分布的密，故使带通滤波器的量化误差小。

四、问答题（每题 6 分，共 12 分）

解：1、

$$\because y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)$$

$$\therefore T\left[x_1(n)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m); T\left[x_2(n)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)$$

$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} ax_1(m)+bx_2(m)=a\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)+b\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)$$

$$=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$$

所以该系统为线性系统，又

$$T\left[x(n-n_0)\right]=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m-n_0)=\sum_{m'=-\infty}^{n-n_0}x(m')=\sum_{m=-\infty}^{n-n_0}x(m)=y(n-n_0)$$

故该系统为线性时不变系统。

2、

$\because y(n)=x(n-n_0)\therefore h(n)=\delta(n-n_0)$

$\therefore$当$n_0>0$时,$h(n)\equiv 0\left(n<0\text{时}\right)$, 故该系统为因果的。

当$n_0<0$时,$h(n)\equiv 0$不成立$\left(n<0\text{时}\right)$, 故该系统为非因果的。

又$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\delta(n-n_0)|<\infty \therefore$该系统为稳定的。

五、画图题（共 24 分）

1、（6 分）答案见 02 年真题二计算题（3）。

2、（8 分）解：

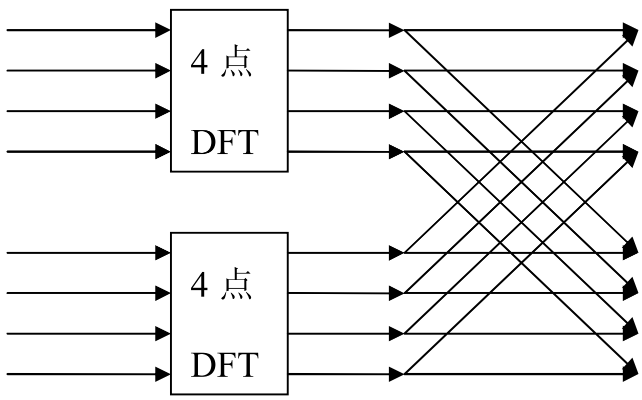
$\because$当$x(n)=u(n), X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$

$\therefore$由Z变换的性质，当$x(n)=e^{j\omega_0 n}x(n)$时，$X(z)=\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$

$\therefore$收敛域不变为$|z|>1$，零点为$z=0$，极点为$z=e^{j\omega_0}$。

至于分布图就略了。

3、（10 分）(1)



(2)直接计算时的乘法次数为$8*8=64$次，现按 N=2×4 分解则两个四点 DFT 的乘法次数为$2*4*4=32$，然后由两个 4 点 DFT 的结果导出 8 点 DFT 的结果需要 4 个蝶形结，每隔蝶形结含一次复数乘法。所以共有 4 次乘法运算，故总共含乘法次数为 32+4=36 次，因此减少的乘法次数为 28 次。

六、证明题（共 14 分）

1、证明：

$$\because DFT\left[x_e(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x_e(n)W_N^{kn}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]W_N^{kn}$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}x^*(N-n)W_N^{kn}](\text{令}m=N-n)$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{m=N}^{1}x^*(m)W_N^{k(N-m)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{m=N}^{1}x^*(m)W_N^{-km}]=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}+(\sum_{m=N}^{1}x(m)W_N^{km})^*]$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$$

$\therefore DFT\left[x_e(n)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$证毕。

$$\because DFT\left[x_o(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x_e(n)W_N^{kn}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]W_N^{kn}$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}-\sum_{n=0}^{N-1}x^*(N-n)W_N^{kn}](\text{令}m=N-n)$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}-\sum_{m=N}^{1}x^*(m)W_N^{k(N-m)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}-\sum_{m=N}^{1}x^*(m)W_N^{-km}]=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}-(\sum_{m=N}^{1}x(m)W_N^{km})^*]$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$$

$\therefore DFT\left[x_o(n)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$证毕。

2、证明：

$$\because E\left[\hat{m}_x\right]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E\left[x(n)\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}m_x=\frac{1}{N}\cdot N\cdot m_x=m_x$$

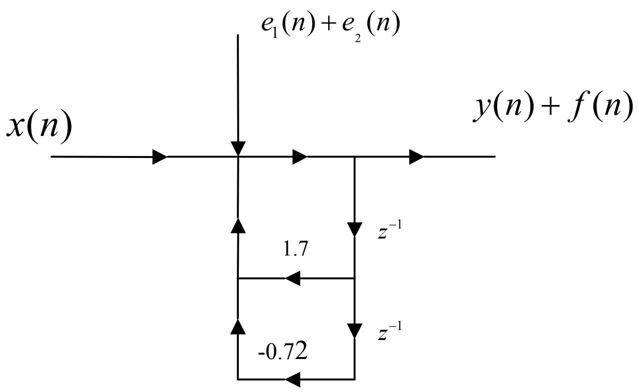
$\therefore \hat{m}_x$是m_x的无偏估计。

七、设计题（共 25 分）

1、（12 分）解：

$$\because H(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}=\frac{1}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}}=\frac{1}{A(z)}$$

$\therefore$该系统的直接型实现结果如下：



$\therefore$上图画出了直接型结构定点相乘舍入后的统计模型，两个系数相乘，有两个舍入噪声$e_1(n)+e_2(n)$，它只通过$H_0(z)=\dfrac{1}{A(z)}$网络。

$\therefore$若令输出噪声误差为$\sigma_f{}^2$，则

$$\sigma_f{}^2=2\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c H_0(z)H_0(z^{-1})\frac{dz}{z}$$

$$=2\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{A(z)}\frac{1}{A(z^{-1})}\frac{dz}{z}$$

$$=2\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1-0.9z)(1-0.8z)}\frac{dz}{z}$$

先计算$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c\dfrac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}\cdot\dfrac{1}{(1-0.9z)(1-0.8z)}\dfrac{dz}{z}$围线 c 为单位圆，围线内只有两个极点$z=0.9,z=0.8$，求此两个极点的留数，即

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{z}{(1-0.9z)(1-0.8z)(z-0.9)(z-0.8)}dz$$

$=\Big($被积函数在单位圆内极点z_k上的留数$\Big)$

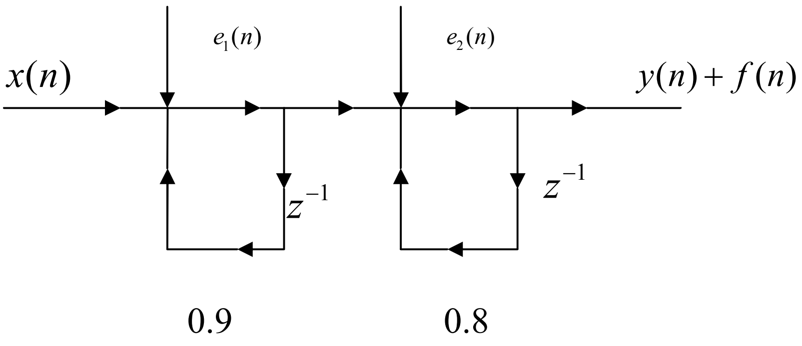
$$=\frac{0.9}{0.1\times(1-0.81)(1-0.72)}+\frac{0.8}{(-0.1)\times(1-0.72)(1-0.64)}$$

$=169.1729-79.3651=89.8078$

$$\therefore\sigma_f{}^2=2\sigma_e{}^2\times 89.8078=2\times\frac{q^2}{12}\times 89.8078=14.9680q^2(q=2^{-b})$$ 又

$$\because H(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}=\frac{1}{1-0.9z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}=\frac{1}{A_1(z)}\cdot\frac{1}{A_2(z)}$$

其中，$A_1(z)=1-0.9z^{-1};A_2(z)=1-0.8z^{-1}$，所以其级联型实现结构如下：



由图可知，噪声$e_1(n)$经过网络$A_1(z) and A_2(z)$,而噪声$e_2(n)$只经过网络$A_2(z)$。

$\therefore f(n)=e_1(n)\times h_1(n)+e_2(n)\times h_2(n)$

$$h_1(n)=Z^{-1}\left[\frac{1}{A_1(z)}\cdot\frac{1}{A_2(z)}\right],h_2(n)=Z^{-1}\left[\frac{1}{A_2(z)}\right]$$

$\therefore$输出噪声的方差

$$\sigma_f{}^2=\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{A_1(z)A_2(z)A_1(z^{-1})A_2(z^{-1})}\frac{dz}{z}+\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{A_2(z)A_2(z^{-1})}\frac{dz}{z}$$

$$=\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})(1-0.9z)(1-0.8z)}\frac{dz}{z}$$

$$+\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}\frac{dz}{z}$$

$$=\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{z}{(z-0.9)(z-0.8)(1-0.9z)(1-0.8z)}dz+\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{1}{(z-0.8)(1-0.8z)}dz$$

$$=\sigma_e{}^2\cdot\left[\frac{0.9}{0.1\times(1-0.81)(1-0.72)}+\frac{0.8}{(-0.1)(1-0.72)(1-0.64)}\right]+\sigma_e{}^2\cdot\frac{1}{1-0.64}$$ 2、

$$=(89.8078+2.7778)\sigma_e{}^2=92.5856\sigma_e{}^2=92.5856\times\frac{q^2}{12}=7.7155q^2(q=2^{-b})$$

（13 分）解：

（1）、首先设计一个$3dB$截止频率为 1.5k 的数字低通滤波器，预畸

$\because f_c=1.5k=1500\therefore\Omega_c=1500\cdot 2\pi$

$$\therefore\Omega_c{}'=\frac{2}{T}tg(\frac{\Omega_c T}{2})=\frac{2}{T}tg(\frac{\pi}{4})=\frac{2}{T}$$

用$s=\dfrac{s}{\Omega_c'}$对 Butterworth 滤波器的归一化低通原型进行反归一，则

$$H(s)=\frac{1}{(\frac{s}{\Omega_c'})^3+2(\frac{s}{\Omega_c'})^2+2(\frac{s}{\Omega_c'})+1}$$

$$=\frac{1}{(\frac{T}{2})^3 s^3+2(\frac{T}{2})^2 s^2+2(\frac{T}{2})s+1}$$

所以所设计的数字低通滤波器的传递函数$H(z)$为

$$H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1}$$

$$=\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{2(3+z^{-2})}$$

接下来进行数字低通滤波器到数字高通滤波器的转换，由于在设计的过程中数字低通滤波器的截止频率和数字高通滤波器截止频率相同。

$$\therefore H(z)=H(u)|_{u^{-1}=G(z^{-1})},u^{-1}=G(z^{-1})=-\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$$

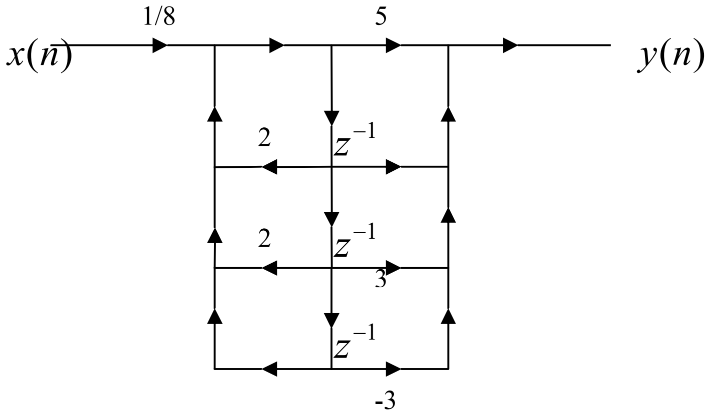
$$\alpha=-\frac{\cos(\frac{\theta_p+\omega_p}{2})}{\cos(\frac{\theta_p-\omega_p}{2})}(\theta_p=\omega_p=\Omega_c T=\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \alpha=-1,\text{则}H(z)=H(u)|_{u^{-1}=G(z^{-1})}=H(u)|_{u^{-1}=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1+3\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+3\cdot(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}{2\left[3+(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2\right]}$$

$$=\frac{5+4z^{-1}+3z^{-2}-3z^{-3}}{8(1+2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3})}$$

所以其直接 II 型实现结构如下：



八、综合题（共 40 分）

1、（7 分）解：

$$\because x(n)=|n-3|u(n)$$

$$\therefore X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n-3|u(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{2}(3-n)u(n)z^{-n}+\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)u(n)z^{-n}$$

$$=3+2z^{-1}+z^{-2}+\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)z^{-n}=3+z^{-1}-z^{-2}-3\sum_{n=3}^{\infty}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$

$$=3+z^{-1}-z^{-2}-\frac{3z^{-3}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}\ |z|>1$$

$$=\frac{3-4z^{-1}+2z^{-4}}{(1-z^{-1})^{2}}\ |z|>1$$

2、（8 分）解：（1）

$$\because H(z)=\frac{1}{1-\frac{2}{3}\sqrt{3}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}z+\frac{4}{9}}$$

$\therefore$ 系数量化前极点为令分母为零，即$z^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}z+\frac{4}{9}=0$极点为

$$z_{1,2}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2-4\cdot\frac{4}{9}}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pm j\frac{1}{3}$$

系数量化后 $H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-z+\frac{1}{2}}$ 同样令分母为零得极点为

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$$

（2）根据求出的极点位置，由几何确定法相关结论可以画出量化前后的幅频特性大致曲线如下：

3、（10 分）解：

（1）、由于系统的单位脉冲响应为输入为单位脉冲序列时的零状态响应，则

$$\because y(n)=x(n)-2x(n-2)+x(n-3)$$

$$\therefore h(n)=\delta(n)-2\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

很明显该系统为一 FIR 系统。

（2）、

$$\because y(n)+2y(n-1)=x(n)+x(n-1)$$

$\therefore$ 对两边求Z变换，则$Y(z)+2z^{-1}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}}$$

$$\therefore h(n)=(-2)^n u(n)+(-2)^{n-1}u(n-1)$$

很明显该系统为一 IIR 系统。

4、

	左边序列、右边序列、双边序列？	有限长序列还是无限长序列？	起点在n=0处还是n<0处还是n>0处？	序列傅氏变换是否存在？	系统的因果性？	系统的稳定性？
a)	左边序列	无限长	$n \le 0$	否	否	否
b)	双边序列	无限长	$n < 0$	是	否	是
c)	右边序列	无限长	$n \ge 0$	否	是	否
d)	左边序列	无限长	$n > 0$	是	否	是
e)	右边序列	无限长	$n < 0$	是	否	是