南京邮电大学

2008年攻读硕士学位研究生入学考试数字信号处理试题参考答案

一、填空题（每空1分，共10分）

1、高通、带阻（切入点脉冲响应不变法具有频谱周期延拓效应，不仅适宜设计低通和带通滤波器。）

2、$\dfrac{2\pi}{T}$　3、单位圆内

4、-1（注 $W_N^k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ $\therefore W_N^{\frac{N}{2}} = e^{j\frac{2\pi}{N}\bullet\frac{N}{2}} = e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$）　5、不变、变窄（阻带最小衰耗取决于窗谱主副瓣面积之比，而矩形窗的过渡带宽为 $\dfrac{4\pi}{N}$）。

6、有限字长效应　7、$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$　$X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}$

二、选择题（每题2分，共10分）

1、a　2、b　3、c 4、a 5、b

注：2、

$\because$ 若为周期序列，则 $x(n)=\sin(\frac{16}{5}\pi n)=\sin\left[\frac{16}{5}\pi\left(n+rN\right)\right]=\sin\left(\frac{16}{5}\pi n+\frac{16}{5}\pi rN\right)$, $\therefore$ 当 $\frac{16}{5}\pi rN=2m\pi$ 时上式成立，为周期序列。

3、对于FIR数字滤波器的实现结构可以为递归亦可以为非递归结构，单IIR数字滤波器的实现结构则只能为非递归形式。

4、$\because$ $h(-1)=u(4)=1\neq 0$ $\therefore$ 系统为非因果系统；

又 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{3}|u(n)|$，显然无界，故该系统不稳定。

5、线性系统应满足叠加性和齐次性，　$\because y(n)=2x(n)+5$

$\therefore T\left[x_1(n)\right]=2x_1(n)+5; T\left[x_2(n)\right]=2x_2(n)+5.$

$\therefore T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=2ax_1(n)+2bx_2(n)+5\neq aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$ 为非线性系统

又 $T\left[x(n-n_0)\right]=2x(n-n_0)+5=y(n-n_0)$ $\therefore$ 为移不变（时不变）系统。

三、画图题（每题10分，共20分）

1、解：（1）、由混合基FFT算法，

$$\because X(k)=\sum_{i=0}^{p-1}W_N^{lk}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_N^{prk}$$

又 $\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_N^{prk}=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_q^{rk}=DFT\left[x(pr+l)\right]=Q_l(k), k=0,1,\cdots \text{q-1}$；

$\therefore X(k)=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^{lk}Q_l(k), k=0,1,\cdots\text{N-1}.$ $\therefore$ 先将 $x(n)$ 分解成3组长度为2的序列：

$$3\text{组}\begin{cases} x(0)、x(3) \\ x(1)、x(4) \\ x(2)、x(5) \end{cases}$$

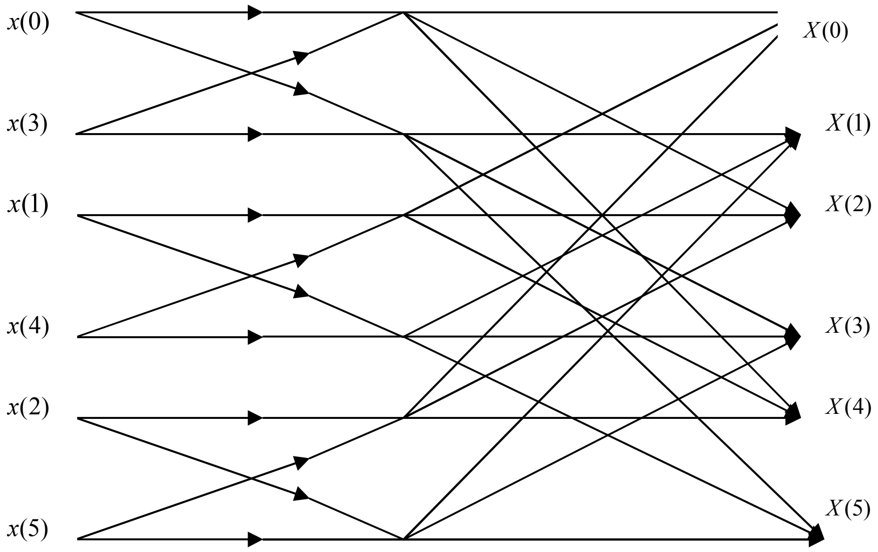
故可画出 FFT 的分解流程图如下:（图中每根线所乘的系数可用表 1.1 和表 1.2 来表示。

表 1.1 r 等于 0，1 时对应的 W_q^{rk}

k	0	1
0	W_2^0	W_2^0
1	W_2^0	W_2^1

表 1.2 l 等于 0、1、2 时对应的 W_N^{lk}

k	0	1	2
0	W_6^0	W_6^0	W_6^0
1	W_6^0	W_6^1	W_6^2
2	W_6^0	W_6^2	W_6^4
3	W_6^0	W_6^3	W_6^6
4	W_6^0	W_6^4	W_6^8
5	W_6^0	W_6^5	W_6^{10}



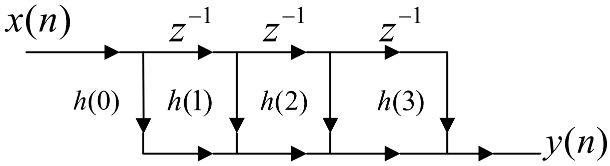
m

（2）、在直接计算 DFT 的情况下乘法次数为 6∗6=36 次，而采用混合基的情况下乘法次数为 3∗2∗2+3∗6=12+18=30，所以减少的乘法次数为 6。

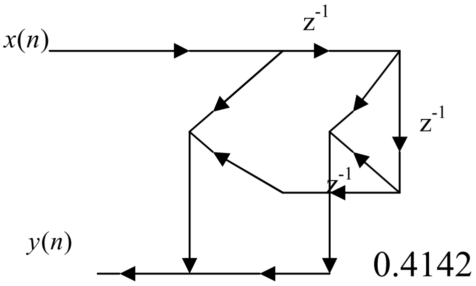
2、解：

由 $H(z)=(1-1.4142z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1})=1-0.4142\ z^{-1}\ -0.4142z^{-2}+z^{-3}$ 则

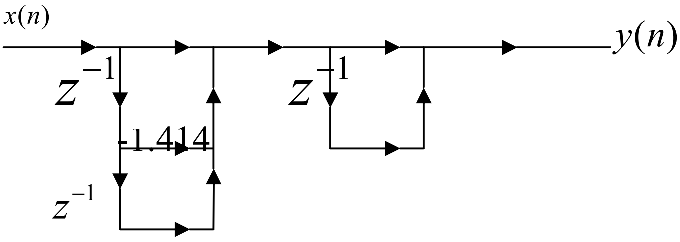
横截型实现结构如：



线性相位型实现结构如：



级联型实现结构如：



四、证明题（共 10 分）

证明：

$$\because h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-kn}$$

$$\therefore y(n)=\tilde{x}(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(m)h(n-m)$$

由于 $\tilde{x}(n)$ 为周期序列，$h(n)$ 有限长，显然 $y(n)$ 为一长度为 N 的周期序列。即

$$y(n)=\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-k(n-m)} \qquad (n=0、1、2\cdots、N-1)$$

$$\therefore \tilde{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-kn}\cdot\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\cdot W_N^{km}$$

$$\therefore \tilde{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-kn}\cdot\tilde{X}(k) \quad \text{又} H(k)=H(z)|_{z=W_N^{-k}}=H(W_N^{-k})$$

$$\therefore \tilde{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(W_N^{-k})\tilde{X}(k)W_N^{-nk} \quad \text{证毕。}$$

五、计算题（共 36 分）

1、（10 分）

（给出脉冲响应不变法和双线性变换法将模拟传递函数转变为数字传递函数的思路：

脉冲响应不变法：

$$H(s)\xrightarrow{L^{-1}[\bullet]}h_a(t)\xrightarrow{\text{抽样}}h_a(nT)=h(n)\xrightarrow{Z[\bullet]}H(z)$$

双线性变换法：

$$H(s)\rightarrow \text{微分方程}\rightarrow \text{差分方程}\xrightarrow{Z[\bullet]}H(z)$$

$$H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$ ）

解：在脉冲响应不变情况下

$$\because Ha(s)=\frac{3}{(s+1)(s+3)}=\frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+3}$$

$$\therefore s_{p1}=-1,s_{p2}=-3;A_1=\frac{3}{2},A_2=-\frac{3}{2},T=\frac{1}{2}$$

$$\therefore H(z)=\sum_{k=1}^{2}\frac{A_kT}{1-e^{s_{pk}T}z^{-1}}=\frac{\frac{3}{2}T}{1-e^{-\frac{1}{2}}z^{-1}}-\frac{\frac{3}{2}T}{1-e^{-\frac{3}{2}}z^{-1}}=\frac{\frac{3}{4}}{1-e^{-\frac{1}{2}}z^{-1}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-e^{-\frac{3}{2}}z^{-1}}$$

在双线性变换法情况下

$$\therefore H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{3}{(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1)(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+3)}$$

$$=\frac{3(1+2z^{-1}+z^{-2})}{[4(1-z^{-1})+1+z^{-1}][4(1-z^{-1})+3(1+z^{-1})]}$$

$$=\frac{3(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(5-3z^{-1})(7-z^{-1})}=\frac{3(1+2z^{-1}+z^{-2})}{35-26z^{-1}+3z^{-2}}$$

2、（6 分）

解：由题

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-Az^{-1}+Bz^{-2}}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-Cz^{-1}-Dz^{-2}}$$

$$\therefore H_a(s)=H(z)|_{z=\frac{1+s}{1-s}},G_a(s)=H(\frac{1}{s})=H(z)|_{z=\frac{1+\frac{1}{s}}{1-\frac{1}{s}}}$$

$$\therefore G(z')=G_a(s)|_{s=\frac{z-1}{z+1}}=H(z)|_{z=\frac{1+\frac{z'+1}{z'-1}}{1-\frac{z'+1}{z'-1}}}=H(z)|_{z=-z'}$$

$$=H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-Az^{-1}+Bz^{-2}}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-Cz^{-1}-Dz^{-2}}|_{z=-z'}$$

$$=\frac{1-2z'^{-1}+z'^{-2}}{1+Az'^{-1}+Bz'^{-2}}\cdot\frac{1-2z'^{-1}+z'^{-2}}{1+Cz'^{-1}-Dz'^{-2}}$$

即高通滤波器的传递函数为：

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+Az^{-1}+Bz^{-2}}\cdot\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+Cz^{-1}-Dz^{-2}}$$

将其与图示的传递函数进行对照，则发现应对系数做以下修整：

$A\to -A,2\to -2,C\to -C,2\to -2.$其余不变。

3、（10 分）

解：由题

（1）

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}e^{-j(\omega-\pi)\alpha}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=(-1)^{\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega$$

$$=(-1)^{\alpha}\frac{e^{j\pi(n-\alpha)}}{\pi(n-\alpha)}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_c(n-\alpha)}-e^{-j\omega_c(n-\alpha)})\right]$$

$$=(-1)^{\alpha}\frac{e^{j\pi(n-\alpha)}}{\pi(n-\alpha)}\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]$$

由分析知$\alpha=\dfrac{N-1}{2}$

（2）由于为一高通滤波器所以只可能有两种情况，即第一类和第四类线性相位情况。

4、（10 分）

解：（1）预畸：

$\because f_c = 400, \therefore \Omega_c = 400 \cdot 2\pi$

$\therefore \Omega_c{'} = \frac{2}{T} tg(\frac{\Omega_c T}{2}) = \frac{2}{T} tg(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{T}$

用 $s = \frac{s}{\Omega_c{'}}$ 进行反归一，则

$$H(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\Omega_c{'}})^3 + 2(\frac{s}{\Omega_c{'}})^2 + 2(\frac{s}{\Omega_c{'}}) + 1}$$

$$= \frac{1}{(\frac{T}{2})^3 s^3 + 2(\frac{T}{2})^2 s^2 + 2(\frac{T}{2}) s + 1}$$

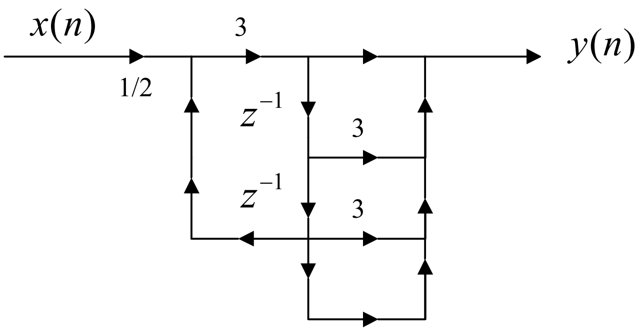
$$\therefore H(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3 + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1}$$

$$= \frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{2(3+z^{-2})}$$

故所设计的低通滤波器系统函数 $H(z)$ 为上式。

（2）该滤波器的直接 II 型实现结构如下：



六、说明题（共 14 分）

（1）（8 分）答：方法有两种一种是将长度为 2N 的实序列，分解为奇数项和偶数项部分序列，分别进行 N 点的 FFT，结果记为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，然后利用公式：

$$X(k)=X_1(k)+W_N^k X_2(k), k=0,1,2\cdots，\text{N-1}$$

$$X(N+k)=X_1(k)-W_N^k X_2(k), k=0,1,2\cdots，\text{N-1}$$

即得到$X(k)$的值。

另一种方法则为将长度为 2N 的实序列进行前后对半分开，做以下运算：

$$\begin{aligned}x_1(n)&=x(n)+x(n+N)\\ x_2(n)&=\left[x(n)-x(n+N)\right]W_N^n\end{aligned}\qquad n=0,1,2\cdots,\text{N-1}$$

然后分别对长度为 N 的 N 点序列$x_1(n)$和$x_2(n)$进行 N 点 FFT，输出的结构即为倒序的$X(k)$的值，对其进行一个变值运算则得到$X(k)$的正确值。

（2）（6 分） 待解中

七、计算及综合题（共 50 分）

1、（12 分）解：

（1）、$x_1(n)$和$x_2(n)$的线性卷积为：$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$

```
    1 1 1 0 0 0 1
  ×         1 1 1
-----------------
    1 1 1 0 0 0 1
  1 1 1 0 0 0 1
1 1 1 0 0 0 1
-----------------
1 2 3 2 1 0 1 1 1
```

所以$y(n)=\{1、2、3、2、1、0、1、1、1\}$。

圆周卷积为线性卷积的一周期延拓:

```
1 2 3 2 1 0 1 1 1
              1 2 3 2 1 0 1 1 1
                            1 2 3 2 1 0 1 1 1
```

长度为 7 所以结果为$\{2、3、3、2、1、0、1\}$

（2）若令线性卷积长度为 M，周期卷积长度为 N，则线性卷积等于周期卷积的条件为，$N\ge M$。

2、（12 分）（1）解：

$$\because x(n)=-0.5^n u(-n-1)$$

$$\therefore X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}0.5^n z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n$$

当$|2z|$<1 时，$X(z)=-\dfrac{2z}{1-2z}=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

所以序列的 Z 变换为$X(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$，零点为 0，极点为 0.5.

收敛域为$|z|<\frac{1}{2}$。

（2）$\because x(n)=\cos\omega_0 n\cdot u(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})u(n)$

又当$x(n)=u(n)$时的 Z 变换为$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\quad |z|>1$

由 Z 变换的性质，则所求的 Z 变换

$$X(z)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}}{1-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$$

收敛域为 $|z|>1$

3、解：由图可知系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)+x(n-N)$$

对其两边求 Z 变换，则

$$Y(z)=X(z)+z^{-N}X(z)$$

所以系统函数为$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+z^{-N}$

对于单位脉冲响应为输入为$\delta(n)$时的零状态响应，即

$$h(n)=\delta(n)+\delta(n-N)$$

频响幅度特性大致曲线如右图(根据几何确定法确定)：

该系统为 FIR 系统，显然为一非递归结构。

4、（14 分）解：（1）

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}(\frac{N}{2}e^{j\theta}W_N^{-mn}+\frac{N}{2}e^{-j\theta}W_N^{-(N-m)n})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{j\theta}W_N^{-mn}+e^{-j\theta}W_N^{mn})=\frac{1}{2}(e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+e^{-j\theta}e^{-j\frac{2\pi}{N}mn})$$

$$=\cos(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)$$

（2）$x(n)$ 的共轭偶对称序列 $x_e(n)=x^*(-n)$ 的 DFT 为

$$DFT[x_e(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(-n)W_N^{kn}=\sum_{n=-(N-1)}^{0}x^*(n)W_N^{-kn}$$

$$=(\sum_{n=-(N-1)}^{0}x(n)W_N^{kn})^* \ =X^*(k)$$

$x(n)$ 的共轭偶对称序列 $x_o(n)=-x^*(-n)$ 的 DFT 为

$$DFT[x_o(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}-x^*(-n)W_N^{kn}=-\sum_{n=-(N-1)}^{0}x^*(n)W_N^{-kn}$$

$$=-(\sum_{n=-(N-1)}^{0}x(n)W_N^{kn})^*=-X^*(k)$$

（3）$X(k)$ 的共轭偶对称序列 $X_e(k)=X^*(-k)=X^*(N-k)$

$X(k)$ 的共轭奇对称序列 $X_o(k)=-X^*(-k)=-X^*(N-k)$

所以：

$$X_e(k)=\begin{cases}\frac{N}{2}e^{j\theta},k=m\\ \frac{N}{2}e^{-j\theta},k=N-m\\ 0 \quad \text{其他 k}\end{cases} \qquad X_o(k)=\begin{cases}-\frac{N}{2}e^{j\theta},k=m\\ -\frac{N}{2}e^{-j\theta},k=N-m\\ 0 \quad \text{其他 k}\end{cases}$$