南京邮电大学

2004年攻读硕士学位研究生入学考试数字信号处理试题参考答案

一、基础题（共50分）

1、填空题（每题2分，共20分）

（1）幅度是否经过量化 （2）DFT，KLT（均方误差准则下，失真最小） （3）14000 （4） $N(p+q)$

（注$\because X(k)=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^k Q_l(k),k=0,1,\cdots,N-1$ 又$Q_l(k)$实际上为一q点DFT其复乘次数为q^2一共有p组所以总共有复乘次数为$p\cdot q^2$，再者$X(k)=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^k Q_l(k),k=0,1,\cdots,N-1$包含复乘次数为$p\cdot N$，综述一共含复乘次数为$p\cdot N+p\cdot q^2=p^2\cdot q+p\cdot q^2=N(p+q)$）

（5）$H(s)\xrightarrow{L^{-1}[\bullet]}h_a(t)\xrightarrow{\text{抽样}}h_a(nT)=h(n)\xrightarrow{Z[\bullet]}H(z)$

（6）$\{3,4,3,2,1,0,1,2\}$ （7）、$1-j,(1+j)/2,(1-j)/2$

（8）$Y(z)=(1+z^2)X(z)$

注：解：令$y_2(n)=y_1(n-1)$

$$y_1(n)=\begin{cases}x(n/2) & \text{n 为偶数}\\ 0 & \text{n 为奇数}\end{cases}\qquad y_2(n)=\begin{cases}x[(n-1)/2] & \text{n 为奇数}\\ 0 & \text{n 为偶数}\end{cases}$$

则，$Y_1(z)=X(z^2)$，$Y_2(z)=z^{-1}X(z^2)$ $y(n)=y_1(n)+y_2(n)$

$\therefore Y(z)=Y_1(z)+Y_2(z)=(1+z^{-1})X(z)$

（9）$-2-2j$ （10） 低通、高通

2、判断题（每题3分，共15分）

（1）、错，DFT只适用于有限长信号，功率谱密度为实偶只能说明随机信号的自相关函数是实偶的。

（2）、对。

（3）、错，由于吉布斯效应，通过改变窗口的大小可以减小过渡带宽但不会减小过渡带两旁产生的肩峰和余振。

（4）、错，关键应看蝶形结构。

（5）、错，本题$H(z)=\dfrac{1-4z^2}{1-2z}=1+2z$，由于零极点对消。虽是递归结构，但从响应效果看属FIR数字滤波器。

3、简答题（每题5分，共15分）

（1）、若假设 $x(n)=\cos(\frac{2}{7}\pi n-\frac{\pi}{4})$ 为周期序列，则 $x(n)=x(n+rN)$ 即

$$x(n)=\cos(\frac{2}{7}\pi n-\frac{\pi}{4})=\cos\left[\frac{2}{7}\pi(n+rN)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\frac{2}{7}\pi n+\frac{2}{7}\pi rN-\frac{\pi}{4}\right)$$

只要 $\frac{2}{7}\pi rN=2m\pi$ 或 $r=\frac{7m}{N}$，即找一个 m、N 使 $\frac{7m}{N}$ 为正整数即可。

只要 $m=1,N=7$ 上式可成立，故 $x(n)$ 为周期序列，且最小正周期为 7。又若假设

$x(n)=e^{j(\frac{1}{8}n-\pi)}$ 为周期序列，则 $x(n)=e^{j(\frac{1}{8}n-\pi)}=e^{j(\frac{1}{8}n+\frac{1}{8}rN-\pi)}$

应有 $\frac{1}{8}rN=2\pi m$，有理数不可能等于无理数，所以 $x(n)=e^{j(\frac{1}{8}n-\pi)}$ 不可能是周期序列。

（2）、由复序列的虚实特性可知，若令 $x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$，则 $X(k)=X_1(k)+jX_2(k)$，故可令 $W(k)=X(k)+jY(k)$，对其做 IFFT 则，$\omega(n)=x(n)+jy(n)$。其实部和虚部就分别为所求的 $x(n)$ 和 $y(n)$。

（3）、信号 2 的相关性强，在傅氏变换对中，类似正态分布的功率谱密度函数越宽则其相关函数越窄，即相关性越强。（提示下在傅氏变换中时域的有限对应于频域的无限，时域的无限对应频域的有限。）

二、证明题（每题 6 分，共 12 分）

1、证明：

$$\because \tilde{X}_2(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{k(n+N)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}(-1)^k$$

$\therefore$ 当 k 为偶数时，$\tilde{X}_2(k)=2\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}=2\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{N}^{kn/2}=2\tilde{X}_2(\frac{k}{2})$

当 k 为奇数时，$\tilde{X}_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}-\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}=0$

2、证明：利用输入输出互相关定理

$$\because E\left[x(n)y(n+m)\right]=R_{xy}(m)=R_x(m)*h(n)=\sigma_x^2\delta(m)*h(m)=\sigma_x^2h(m)$$

$$E\left[x(n)y(n)\right]=R_{xy}(m)|_{m=0}=\sigma_x^2h(m)|_{m=0}=h(0)\sigma_x^2$$

三、简单计算题（共 16 分）

1、解：由于频谱取样之间的数字角频率间隔为 $\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$，即其模

拟角频率间隔为$\Delta\Omega=\Delta\omega\cdot f_s$，故其取样频率间隔为$\Delta f=\dfrac{\Delta\Omega}{2\pi}=$

$$\frac{\Delta\omega\cdot f_s}{2\pi}=\frac{f_s}{N}=\frac{10000}{2048}=4.88Hz$$

2、解：

$\because H_a(s)=\dfrac{3s+2}{2s^2+3s+1}=\dfrac{1}{2s+1}+\dfrac{1}{s+1}$，由等式可知极点为$s_{p1}=-\dfrac{1}{2}$

$s_{p2}=-1$，$A_1=A_2=1$ 则相应的数字滤波器传递函数为：

$$H(z)=\sum_{i=1}^{2}\frac{A_iT}{1-e^{s_{pi}T}z^{-1}}=\frac{T}{1-e^{-\frac{1}{2}T}z^{-1}}+\frac{T}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

3、解：由于数字频率2π对应采样频率$200Hz$，因此数字域截止频率$\omega_c=0.2\pi$对应等效的模拟低通滤波器截止频率$f_c=20Hz$。若$f_s=1000Hz$，对应的模拟截止频率$f_c=100Hz$。

四、分析计算题（共 40 分）

1、（10 分）（1）证明：$\because X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ 又$n<0$时，$x(n)=0$

$$\therefore X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

当$z\to\infty$时，$z^{-1},z^{-2},z^{-3},\cdots$均趋于 0，上式只留下$x(0)$项，因此$\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=x(0)$。

（2）、答：若$n>0$时$x(n)$等于 0，那么

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}=x(0)+x(-1)z+x(-2)z^2+\cdots\cdots$$

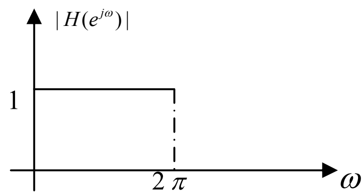
故$X(z)$与$x(0)$的关系是$x(0)=X(0)$。

（3）、解：由$X(z)=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}}$知，$X(z)$的两极点分别是

$z=\dfrac{1}{2},z=2$，又知$X(z)$的收敛域包含单位圆，收敛域一定是环状的，即$x(n)$为双边序列。$x(n)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2})^n u(n)+\dfrac{1}{4}(-2)^n u(-n-1)$ $\therefore x(0)=\dfrac{1}{3}$

2、（10 分）解：由题知

（1）、系统的差分方程为 $y(n)=a_0\omega(n)+a_1\omega(n-1)$ 又
$\omega(n)=x(n)+b_1\omega(n-1)$ 同时对上式两边取 Z 变换，则有
$W(z)=b_1W(z)z^{-1}+X(z)\cdots\cdots$（1），
$Y(z)=a_0W(z)+a_1W(z)z^{-1}\cdots\cdots$（2）
分别解上（1）、（2）式，则$W(z)=\dfrac{X(z)}{1-b_1z^{-1}},W(z)=\dfrac{Y(z)}{a_0+a_1z^{-1}}$
即$\dfrac{X(z)}{1-b_1z^{-1}}=\dfrac{Y(z)}{a_0+a_1z^{-1}}$ $\therefore$系统函数$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{a_0+a_1z^{-1}}{1-b_1z^{-1}}$
$\therefore$系统的差分方程为$y(n)-b_1y(n-1)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$，即
$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+b_1y(n-1)$
（2）、当$b_1=0.5,a_0=0.5,a_1=1$时，
$$H(z)=\frac{0.5+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$
$\therefore$此时系统的单位脉冲响应$h(n)=-0.5(\frac{1}{2})^nu(n)+(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$
（3）、极点为$z=0.5$，零点为$z=2$。零极点呈现共轭倒数，所以这是全通函数，幅频特性曲线为一与横轴平行的直线。如下：



3、解：由题知：
（1）因为系统的差分方程为 $y(n)=2.5y(n-1)-y(n-2)+x(n-1)$
同时对两边取 Z 变换，则$Y(z)=2.5z^{-1}Y(z)-z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z)$
$$\therefore \text{系统函数}H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z}{z^2-2.5z+1}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}$$
极点为$z_{\infty1}=2,z_{\infty2}=\dfrac{1}{2}$，零点为$z_{01}=0,z_{02}=\infty$。（零极点分布图就不画了）
（2）、如果系统是因果的，则$H(z)$的$ROC:|z|>2$系统不稳定。系统的单位脉冲响应为$h(n)=\dfrac{2}{3}\left[2^nu(n)-(0.5)^nu(n)\right]$。

（3）、如果系统是稳定的，则$H(z)$的$ROC:\frac{1}{2}<|z|<2$，系统非因果。

系统的单位脉冲响应为$h(n)=\frac{2}{3}\left[-2^n u(-n-1)-(0.5)^n u(n)\right]$

4、（10 分）解：由题知：

（1）、$\because$系统的差分方程为$y(n)=x(n)-x(n-4)$ 同时对两边取 Z 变换，则

$Y(z)=X(z)-z^{-4}X(z)$ $\therefore$系统函数为$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1-z^{-4}$

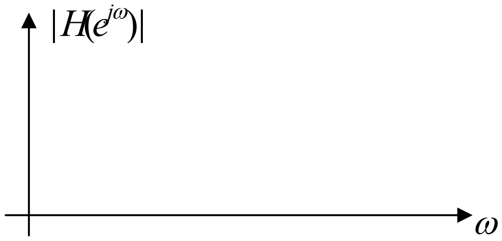
零点为 $z_{0k}=e^{j\frac{2\pi k}{4}},k=0,1,2,3.$

（2）、$\because$系统的差分方程为$y(n)=x(n)-x(n-4)$ 又系统的单位脉冲响应为，系统输入为$\delta(n)$时的零状态响应。

$\therefore$系统的单位脉冲响应$h(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$

又$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=1+e^{-j4\omega}=e^{-j2\omega}(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})=2\cos2\omega e^{-j2\omega}$

$\therefore|H(e^{j\omega})|=2|\cos2\omega|,\varphi(\omega)=-2\omega.$其特性曲线分别如下：



（3）、想阻止直流、50Hz 工频及其 2、3、4 等高次谐波的通行，系统采样频率应是 200Hz。（注：若要阻止以上频率成分通过，则$\omega=\frac{\pi}{2}$应代表模拟频率 50Hz，而$\omega=2\pi$对应采样频率，故采样频率$f_s=4\cdot50=200Hz$。

五、设计题（共 32 分）

1、（6 分）答：

（1）、是，$\because u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m),s(n)=u(n)*h(n)=\sum_{m=0}^{\infty}h(n-m)$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}h_a\left[(n-m)T\right]=\sum_{m=0}^{\infty}h_a\left[(n-m)T\right]=\sum_{k=-\infty}^{n}h_a(kT)$$

（2）、否，若干数的和相等未必这些数相等。

2、（8 分）解：由题知

（1）、$\theta_k=-\frac{N-1}{2}\omega|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=-\frac{\pi k(N-1)}{N}=-\frac{4\pi}{15}k(N=15)$，这是第一类滤波器。

（2）、$e^{j\frac{\pi(N-k)(n-1)}{N}}=e^{j\frac{\pi N(N-1)-\pi k(N-1)}{N}}=e^{j\pi N(N-1)}\cdot e^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}}=e^{-j\frac{\pi k(N-1)}{N}}$

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_k e^{j\theta_k}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{1}{N}\left[1\cdot e^{j0}\cdot e^{j0}+0.5e^{j\frac{\pi\cdot 1\cdot(N-1)}{N}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot 1}+0.5e^{j\frac{\pi\cdot(N-1)\cdot(N-1)}{N}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot(N-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\left[1+0.5e^{j\frac{\pi(N-1)}{N}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n}+0.5e^{j\frac{\pi\cdot(N-1)}{N}}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right]$$

$$=\frac{1}{15}\left[1+0.5e^{-j\frac{14\pi}{15}+\frac{2\pi n}{15}}+0.5e^{-j(\frac{14\pi}{15}+\frac{2\pi n}{15})}\right]$$

$$=\frac{1}{15}\left[1+\cos(\frac{-14\pi+2\pi n}{15})\right]$$

3、（10 分）解:

（1）、先设计一个$3dB$截止频率为 3kHz 的低通滤波器，

预畸 $\Omega_c^{'}=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right)=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{T}$

用$s=\frac{s}{\Omega_c^{'}}$对$H(s)$进行反归一，则$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\Omega_c^{'}}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\frac{s}{\Omega_c^{'}}+1}$所设计的低通滤波器系统函数为$H(z)=H(s)|_{\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$，又由数字低通换为数字高通有

$$H\left(z\right)=H(z)|_{z=-\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}}=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1+\frac{1+\alpha z^{-1}}{z^{-1}+\alpha}}{1-\frac{1+\alpha z^{-1}}{z^{-1}+\alpha}}}=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z^{-1}+\alpha+1+\alpha z^{-1}}{z^{-1}+\alpha-1-\alpha z^{-1}}}$$

又$\alpha=-\frac{\cos\left(\frac{\theta_p+\omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p-\omega_p}{2}\right)}=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

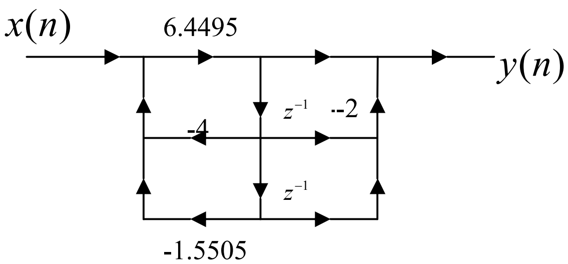
$$\therefore H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z^{-1}+\alpha+1+\alpha z^{-1}}{z^{-1}+\alpha-1-\alpha z^{-1}}}=H(s)|_{s=-\frac{2}{T}\frac{3(z^{-1}+1)}{1-z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}(1+z^{-1})}{1-z^{-1}}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(1+z^{-1})}{1-z^{-1}}+1}$$

$$=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{3(1+2z^{-1}+z^{-2})+\sqrt{6}(1-z^{-2})+1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{4+\sqrt{6}+4z^{-1}+(4-\sqrt{6})z^{-2}}$$

$$=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{6.4495+4z^{-1}+1.5505z^{-2}}$$

（2）、直接 II 型实现结构如下：



4、（8 分）解：

因为$H(z)|_{z=1}=H(e^{j\omega})|_{\omega=0}=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}|_{\omega=0}=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|\geq|\sum_{n=0}^{\infty}h(n)|=|H(z)|_{z=1}|=\frac{1}{(1-0.9)(1-0.8)}=500$$

若 $A\leq\frac{1}{x_{\max}\sum_{m=0}^{\infty}|h(n)|}$，必有 $A<\frac{1}{x_{\max}\sum_{m=0}^{\infty}|H(z)|_{z=1}|}$。

本题 $y_{\max}<\frac{1}{1.7}=0.58$，须满足

$$y_{\max}<\frac{1}{1.7}=0.58A<\frac{0.58}{x_{\max}|H(z)|_{z=1}|}=\frac{0.58}{1\times 500}=0.00116$$

信号的最大输出值$|y_{\max}|$为 0.58。