数字信号处理

邓振淼

中山大学电子与通信工程学院

2019-8-28

时域离散信号和系统的频域分析

- 引言
- 时域离散信号的傅里叶变换定义及性质
- 周期序列的离散傅里叶级数及傅里叶变换表示式
- 时域离散信号的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换之间的关系
- 序列的Z变换
- 利用Z变换分析信号和系统的频响特性

序列的Z变换

- 序列$x(n)$的双边Z变换定义为

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- 其中z是一个复变量，其所在平面称为z平面。
- 序列$x(n)$的单边Z变换定义为

$$X(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- 本课不作另外说明，**均指**双边Z变换。
- Z变换存在的条件：

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty}$$ **绝对可和**

- 上式成立时，z取值的域称为收敛域。

z变换的收敛域

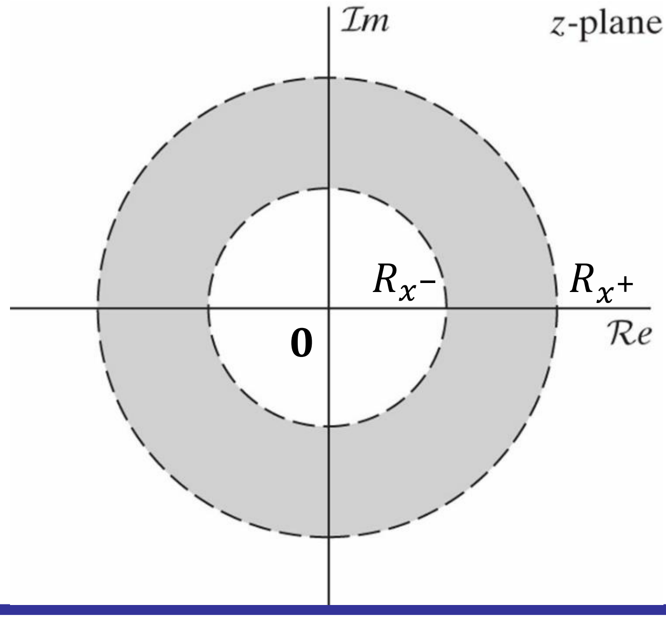
➢一般收敛域为环状域，即

$$R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

➢令$z = re^{j\omega}$，代入上式得到

$$R_{x^-} < r < R_{x^+}$$

➢收敛域是分别以R_{x^-}和R_{x^+}为收敛半径的两个圆形成的环状域。



Z变换

- 常用的Z变换是一个有理函数，用多项式之比表示：

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

- $P(z)$的根是$X(z)$的零点，$Q(z)$的根是$X(z)$的极点。
- 在极点处Z变换不存在，因此收敛域中没有极点，收敛域总是用极点限定其边界。
- 傅里叶变换(FT)和Z变换(ZT)的关系：

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

- $z=e^{j\omega}$表示在平面上$r=1$的单位圆。说明：单位圆上的Z变换就是序列的FT。由序列的ZT可以求序列的FT，条件是收敛域中包含单位圆。

举例

- 例： $x(n)=u(n)$，求其Z变换。
- 解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

- $X(z)$存在的条件是$|z^{-1}|<1$，因此收敛域为$|z|>1$
- 因此

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},|z|>1$$

- 收敛域不包含单位圆，所以FT不存在。如果引入奇异函数$\delta(\omega)$，就可以表示出FT。
- 此例说明：序列的FT不存在，但其ZT可以存在。

序列特性对收敛性的影响

- **有限长序列**：$x(n) = \begin{cases} x(n), n_1 \le n \le n_2 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$
- 其收敛域为：

$$n_1 < 0, n_2 \le 0\text{时}, 0 \le |z| < \infty$$

$$n_1 < 0, n_2 > 0\text{时}, 0 < |z| < \infty$$

$$n_1 \ge 0, n_2 > 0\text{时}, 0 < |z| \le \infty$$

- 判断办法：
  - 如果$n_1 < 0$，则收敛域不包括∞点；
  - 如果$n_2 > 0$，则收敛域不包括$z = \mathbf{0}$点；
  - 因果序列收敛域包括$z = \infty$点。

序列特性对收敛性的影响

- **右序列**：右序列是指$n \geq n_1$时序列值不全为0，$n < n_1$时序列值全为0的序列。其ZT为

$$X(z) = \underbrace{\boxed{\sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{-n}}}_{0 \leq |z| < \infty} + \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}}_{R_{x^-} < |z| \leq \infty}$$

- R_{x^-}为第二项的最小收敛半径。
- 两收敛域的交集为：$R_{x^-} < |z| < \infty$
- 如果是因果序列，则收敛域为

$$R_{x^-} < |z| \leq \infty$$

序列特性对收敛性的影响

- 左序列：左序列是指$n \le n_2$时序列值不全为0，$n > n_2$时序列值全为0的序列。其ZT为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- 如果$n_2 \le 0$，$z = 0$点收敛，$z = \infty$点不收敛，其收敛域是在某一半径为R_{x^+}的圆内，收敛域为$0 \le |z| < R_{x^+}$。如果$n_2 > 0$，则收敛域为$0 < |z| < R_{x^+}$

序列特性对收敛性的影响

- **双边序列**：一个序列可以看做是一个左序列和一个右序列之和，其ZT表示为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z)$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n},0\le|z|<R_{x^+}$$

$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n},R_{x^-}<|z|\le\infty$$

- 如果$R_{x^+}>R_{x^-}$，收敛域为$R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$，如果$R_{x^+}<R_{x^-}$，收敛域没有交集，$X(z)$不存在。

举例

- 例 2.5.5：$x(n)=a^{|n|}$，a为实数，求$x(n)$的ZT及其收敛域。
- 解：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{-n}$

$$=\underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a^{n}z^{n}}}_{|z|<|a|^{-1}}+\underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{-n}}}_{|z|>|a|}$$

- 如果$|a|\geq 1$，则无公共收敛域，$X(z)$不存在。
- 如果$|a|<1$，收敛域交集为$|a|<|z|<|a|^{-1}$，$X(z)$为

$$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

举例

考虑一个为两个实指数和的信号

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n}$$

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1 \qquad =\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n}+\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n} \qquad \left|\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}\right|<1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

最终的收敛域为： $|z|>\frac{1}{2}$

举例-有限长截断指数序列

考虑信号

$$x[n]=\begin{cases}a^n, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

那么

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a}$$

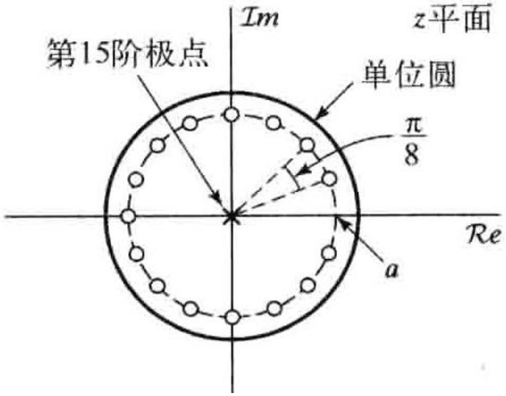
收敛域由满足

$$\sum_{n=0}^{N-1}|az^{-1}|^n<\infty$$

的 z 值所决定。因为只有有限个非零项，所以只要 az^{-1} 是有限的，其和就一定有限。

分子多项式的 N 个根在 z 平面的如下位置：

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$



以N=15为例

对应于 $k=0$ 的零点，抵消了 $z=a$ 的极点。结果，除了原点处的 $N-1$ 个极点外没有任何极点。剩余零点位于 z 平面的如下位置：

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)},\qquad k=1,\cdots,N-1$$

关于有限长信号的FT的讨论

- 时域加窗，等于频域卷积
- 无限长指数信号的频谱，由冲激函数变成一序列离散的谱峰。谱峰的幅度是sinc。

$$s(\boldsymbol{t}) = e^{j\omega_0 \boldsymbol{t}}, \boldsymbol{t} = -\infty, \cdots, \infty \qquad \times \qquad \text{矩形窗}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{t})$$

$$S(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \qquad * \qquad \mathrm{sinc}(x)$$

$$\delta(t - t_0) * s(t) = s(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) \times s(t) = s(t_0)$$

?

逆Z变换(IZT)

- 序列的ZT为$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

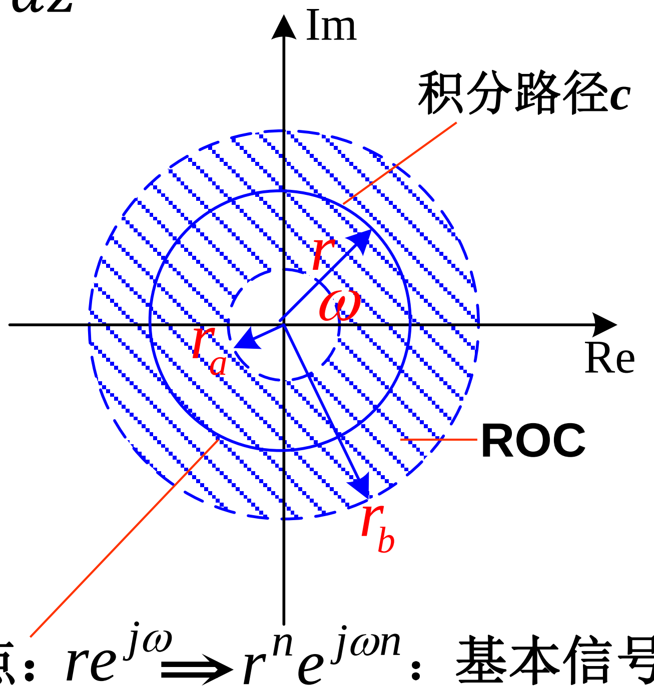
$$\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\oint_c \sum_{m=-\infty}^{\infty}[x(m)z^{-m}]\,z^{n-1}dz$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\oint_c z^{n-m-1}dz$$

- **根据复变函数的柯西公式，只有当**

  $n-m-1=-1$时，$\oint_c z^{n-m-1}dz=2\pi\mathrm{j}$

  否则积分等于0。

- **于是**



逆Z变换(IZT)

➢ 柯西公式的朴素理解：

$$\oint_c z^{n-m-1}dz = \int_0^{2\pi} \left(re^{j\omega}\right)^{n-m-1} dre^{j\omega} =$$

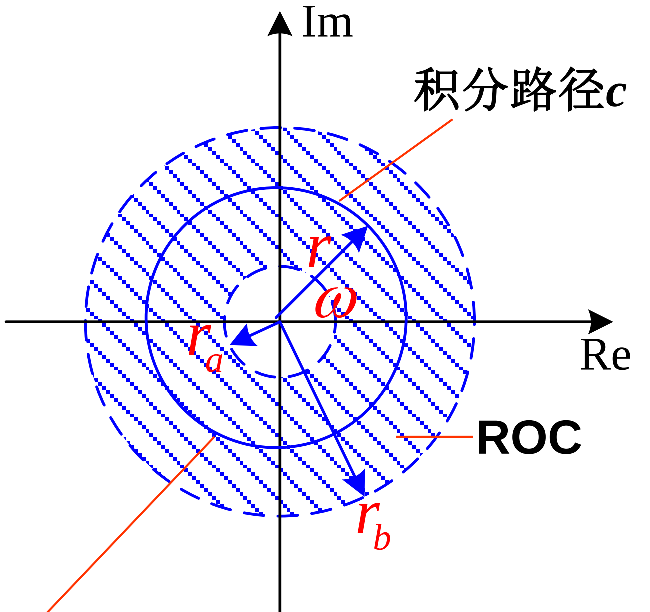
$$jr^{n-m}\int_0^{2\pi} e^{j\omega(n-m-1)}\, e^{j\omega} d\omega$$

➢ 注意当$n-m-1=-1$，即$n-m=\mathbf{0}$时，上式等于

$$\oint_c z^{n-m-1}dz = jr^{\mathbf{0}}\int_0^{2\pi} e^{-j\omega}\, e^{j\omega}d\omega = j2\pi$$

➢ 当$n-m-1\neq -1$时，

$$\int_0^{2\pi} e^{j\omega(n-m)}\, d\omega = \mathbf{0}$$



点：$re^{j\omega} \Longrightarrow r^n e^{j\omega n}$：基本信号

IZT的计算

- IFT的计算有**留数法**、**部分分式展开法**和**幂级数法**。
- **1. 用留数定理求IFT**
- 用$F(z)$表示被积函数，$F(z)=X(z)z^{n-1}$。

  如果$F(z)$在围线c内的极点用z_k表示，根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathbf{RES}[F(z),z_k]$$

$\mathbf{RES}[F(z),z_k]$表示被积函数$F(z)$在极点z_k的**留数**，IZT是c内所有的极点留数之和。c是收敛域内包含原点的一条逆时针旋转的**闭合曲线**，不一定是圆！

- **情况1**：如果z_k是**单阶**极点，则

$$\mathrm{RES}[F(z),z_k]=(z-z_k)F(z)|_{z=z_k}$$

IZT的计算-留数法

- 情况2：如果z_k是m阶极点，则根据留数定理

$$\mathrm{RES}[F(z),z_k]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_k)^m F(z)]|_{z=z_k}$$

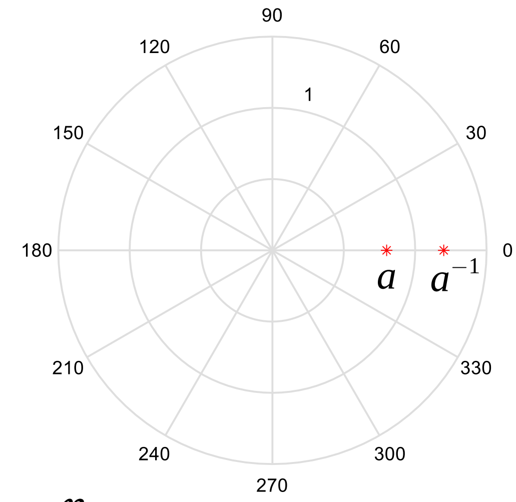
- 上式要计算$m-1$次导数，比较麻烦。
- 根据留数辅助定理：

$$\sum_{k=1}^{N_1} \boldsymbol{RES}[F(z),z_{1k}]=-\sum_{k=1}^{N_2} \boldsymbol{RES}[F(z),z_{2k}]$$

- 其中N_1是围线c内的收敛域里的极点数量，N_2是围线c外的收敛域里的极点数量，$N=N_1+N_2$。
- 留数辅助定理成立的条件是分母阶次应比分子阶次高二阶或二阶以上。

IZT的计算-留数法举例

- 例2.5.7：已知$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}, |a|<1$，求其逆变换$x(n)$.
- 解：题目未给出收敛域，必须先确实收敛域
- 有三种可能的收敛域：
  - $|z|>|a^{-1}|$，对应因果序列
  - $|z|<|a|$，对应左序列
  - $|a|<|z|<|a^{-1}|$，对应的序列是双边序列



- (1) 收敛域：$|z|>|a^{-1}|$

$$F(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}=\frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n$$

- 此时，在c内有两个极点$z=a$和$z=a^{-1}$，于是

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z),a]+\mathrm{Res}[F(z),a^{-1}]$$

$$=\frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}(z-a)\Big|_{z=a}+\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1})\Big|_{z=a^{-1}}$$

$$=a^n+a^{-n}$$

- 于是：$x(n)=(a^n+a^{-n})\boldsymbol{u(n)}$

IZT的计算-留数法举例

- (2) 收敛域： $|z| < |a|$
- 此时$x(n)$为左序列，无须计算$n \geq 0$情况。$n < 0$时，c内只有一个n阶极点$z = 0$，根据留数定理，改求c外极点留数之和。

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), a] - \text{Res}[F(z), a^{-1}]$$
$$= a^{-n} - a^{n}$$

- 即$x(n) = (a^{-n} - a^{n})\boldsymbol{u}(-\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$
- (3) 收敛域：$|a| < |z| < |a^{-1}|$
- 此时$x(n)$为双边序列按$n \geq 0$和$n < 0$两种情况讨论。
- $n \geq 0$时，c内只有一个极点$z = a$

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a] = a^{n}$$

- $n < 0$时，c内有两个极点，包括一个n阶极点，改求c外极点留数。

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), a^{-1}] = a^{-n}$$

- 最终$x(n) = \begin{cases} a^{n}, n \geq 0 \\ a^{-n}, n < 0 \end{cases}$，即$x(n) = a^{|n|}$。

IZT的计算-部分分式展开法

- 设$x(n)$的Z变换$X(z)$是有理函数，分母多项式是N阶，分子多项式是M阶，将$X(z)$展开为常用的部分分式之和，通过查表可求得各部分的逆变换，再相加得到便得到$x(n)$。
- 设$X(z)$只有N个一阶极点，可展开为

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^{N} \frac{A_m z}{z - z_m},\quad \text{即} \frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \sum_{m=1}^{N} \frac{A_m}{z - z_m}$$

- 于是有：

$$A_0 = \mathrm{Re}\boldsymbol{s}\left[\frac{X(z)}{z}, 0\right],\quad A_m = \mathrm{Re}\boldsymbol{s}\left[\frac{X(z)}{z}, z_m\right]$$

求出A_m后，查表可得到$x(n)$。

IZT的计算-部分分式展开法

序列	Z 变换	收敛域
$\delta(n)$	1	$0 \le \lvert z\rvert \le \infty$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$R_N(n)$	$\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$nu(n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

IZT的计算-部分分式展开法

$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\cos\theta-z^{-1}\cos(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\|>1$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}u(n)$	$\dfrac{z^{-m}}{(1-z^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>1$

Z变换的性质和定理

1. 线性性质

设$m(n) = ax(n) + by(n)$，a和b为常数。

$$X(z) = ZT[x(n)], R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$
$$Y(z) = ZT[y(n)], R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

则

$$M(z) = ZT[m(n)] = aX(z) + bY(z), R_{m^-} < |z| < R_{m^+}$$

$$R_{m^+} = \mathbf{min}[R_{x^+}, R_{y^+}]$$

$$R_{m^-} = \mathbf{max}[R_{x^-}, R_{y^-}]$$

- 如果没有公共收敛域，即$R_{x^-} > R_{y^+}$时，$M(z)$不存在。

Z变换的性质和定理

2. 序列的移位性质

设$X(z) = ZT[x(n)], R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$，

$$ZT[x(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z), R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

3. 序列乘以指数序列的性质

$$X(z) = ZT[x(n)], R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$y(n) = a^n x(n), a\text{为常数}$$

则 $$Y(z) = ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$$

其中$|a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$。

Z变换的性质和定理

4. 序列乘以n的ZT

设$X(z)=ZT[x(n)], R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$，则

$$ZT[\mathrm{n}x(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz}, R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$

证: $\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}[z^{-n}]$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)\,z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)\,z^{-n}$$

$$=-z^{-1}ZT[\mathrm{n}x(n)]$$

5. 复共轭序列的ZT

设$X(z)=ZT[x(n)], R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$，则

$$ZT[x^*(n)]=X^*(z^*)\ , R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$

6. 初值定理

设$x(n)$是因果序列，$X(z)=ZT[x(n)]$，则

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

证明：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

因此

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

➢ 7. 终值定理

设$x(n)$是因果序列，其ZT的极点，除可以有一个一阶极点在$z=1$上，其他极点均在单位圆内，则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

➢ 证：$(z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=-1}^{n} x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=\mathbf{0}}^{n} x(m)z^{-m}\right]$$

因果性

➢ 因为$(z-1)X(z)$在单位圆上无极点，两端对$z=1$取极限

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=-1}^{n} x(m+1) - \sum_{m=0}^{n} x(m)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} x(n+1) = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

Z变换的性质和定理

➢ 8. 时域卷积定理

设$\omega(n)=x(n)*y(n)$

$$X(z)=ZT[x(n)], R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$
$$Y(z)=ZT[y(n)], R_{y^-}<|z|<R_{y^+}$$

➢ 则

$$W(z)=ZT[\omega(n)]=X(z)Y(z), R_{\omega^-}<|z|<R_{\omega^+}$$

$$R_{\omega^+}=\mathbf{min}[R_{x^+}, R_{y^+}]$$

$$R_{\omega^-}=\mathbf{max}[R_{x^-}, R_{y^-}]$$

9. 复卷积定理

如果$\omega(n) = x(n)\,y(n)$，$ZT[x(n)] = X(z), R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$，$ZT[y(n)] = Y(z), R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$

- 则

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}$$

收敛域为$R_{x^-}R_{y^-} < |z| < R_{x^+}R_{y^+}$

- 围线积分的z平面上，被积函数的收敛域为

$$\max\left(R_{x^-}, \frac{|z|}{R_{y^+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x^+}, \frac{|z|}{R_{y^-}}\right)$$

Z变换的性质和定理

- 证明：$W(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)v^{n-1}dv\right]y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\frac{dv}{v}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}$$

- $R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$， $R_{y^-}<\left|\frac{z}{v}\right|<R_{y^+}$

$$R_{x^-}R_{y^-}<|z|<R_{x^+}R_{y^+}$$

$$\max\left(R_{x^-},\frac{|z|}{R_{y^+}}\right)<|v|<\min\left(R_{x^+},\frac{|z|}{R_{y^-}}\right)$$

Z变换的性质和定理

10. 帕斯维尔定理

$$X(z) = ZT[x(n)], R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$
$$Y(z) = ZT[y(n)], R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

- $R_{x^-}R_{y^-} < \mathbf{1}$，$R_{x^+}R_{y^+} > \mathbf{1}$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

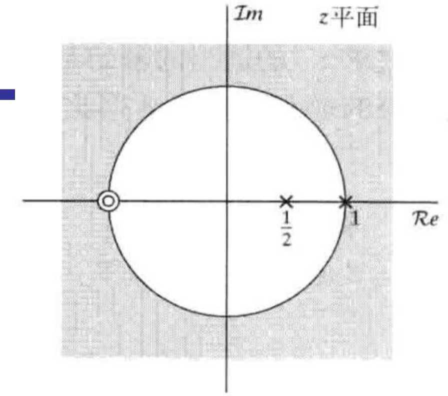
- v平面上，c所在的收敛域为

$$\max\left(R_{x^-}, \frac{\mathbf{1}}{R_{y^+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x^+}, \frac{\mathbf{1}}{R_{y^-}}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)X(z^{-1})\frac{dv}{z}$$

举例

- 某一序列$x(n)$的ZT为



$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)},|z|>1$$

- 根据收敛域以及ZT的性质，可知$x(n)$为一个右边序列。因为$M=N=2$且极点均为一阶，因此$X(z)$可表示为

$$X(z)=B_0+\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

- 常数B_0用长除法求得

$$\begin{array}{r@{}l} & \quad\quad\quad 2 \\ \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 \big) & \overline{z^{-2}+2z^{-1}+1} \\ & \underline{z^{-2}-3z^{-1}+2} \\ & \quad\quad 5z^{-1}-1 \end{array}$$

- 经过一次长除，余式中变量z^{-1}阶次为1，所以不必再除下去。

举例

- 于是$X(z)$可写为

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}$$

- 系数A_1和A_2可通过将上式代入$A_k=(1-d_k z^{-1})X(z)|_{z=d_k}$求得

$$A_1=\left[\left(2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right]_{z=-1/2}=-9$$

$$A_2=\left[\left(2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}\right)\left(1-z^{-1}\right)\right]_{z=1}=8$$

- 于是$X(z)=\mathbf{2}-\frac{\mathbf{9}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\mathbf{8}}{1-z^{-1}}$
- 根据ZT的性质，得到

$$x(n)=2\delta(n)-9\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+8u(n)$$

实际上就是留数：

$$A_0=\mathrm{Re}\boldsymbol{s}\left[\frac{X(z)}{z},0\right]$$

$$A_m=\mathrm{Re}\boldsymbol{s}\left[\frac{X(z)}{z},z_m\right]$$

部分分式展开法——几点说明

- $\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$项对应于$\boldsymbol{(d_k)^n u(n)}$还是$\boldsymbol{-(d_k)^n u(-n-1)}$取决于收敛域ROC
- 有理式函数既可写成$\boldsymbol{z}$的多项式，也可写成z^{-1}的多项式
- 二重极点因果序列的$\boldsymbol{z}$变换对

$$\frac{C_2}{(1-d_i z^{-1})^2} \overset{Z}{\leftrightarrow} C_2(n+1)(d_i)^n u(n)$$

例 3.16　非有理 z 变换的逆变换

本例将用微分性质和时移性质一起求例 3.12 的 z 逆变换。由于

$$X(z)=\log(1+az^{-1}),\qquad |z|>|a|$$

首先对 z 微分得到一个有理表达式

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

根据微分性质，得到

$$nx[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}},\qquad |z|>|a| \tag{3.64}$$

式(3.64)的 z 逆变换可以联合利用例 3.1 的变换对、微分性质、线性性质和时移性质来得到。具体地，将 $nx[n]$ 表示成

$$nx[n]=a(-a)^{n-1}u[n-1]$$

因此

$$x[n]=(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u[n-1]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}\log(1+az^{-1}),\qquad |z|>|a|$$

利用ZT解差分方程-求稳态解

- 设N阶线性常系数差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- 如果输入序列$x(n)$是在∞时加上的，则$n=0$时刻的$\boldsymbol{y}(n)$是稳态解，对差分方程求ZT得到

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- 稳态解为：$y(n) = \mathbf{IZT}[Y(z)]$

利用ZT解差分方程-求暂态解

- 求N阶差分方程的暂态解需要知道N个初始条件，设$x(n)$是因果序列，已知初始条件$y(-1)$，$y(-2)$，$\cdots y(-N)$。
- 设$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y(n)z^{-n}$

$$ZT[y(n-m)u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-m)z^{-n}=$$

$$z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}y(n-m)z^{-(n-m)}$$

$$=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(k)z^{-k}=z^{-m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}y(k)z^{-k}+\sum_{k=-m}^{-1}y(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{-m}\left[Y(z)+\sum_{k=-m}^{-1}y(k)z^{-k}\right]$$

- 则对$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$进行单边ZT得到

$$\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1}y(l)z^{-l}\right]=\sum_{k=0}^{M}b_k X(z)z^{-k}$$

利用ZT解差分方程-求暂态解

$$Y(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z)-\frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- 第一部分与系统初始状态无关，称为**零状态解**。
- 第二部分与输入信号无关，称为**零输入解**。

举例

- 例2.5.11：已知差分方程$y(n)=by(n-1)+x(n)$，式中$x(n)=a^n u(n)$，$y(-1)=2$。求$y(n)$。
- 解：对差分方程进行ZT：

$$Y(z)=bz^{-1}Y(z)+by(-1)+X(z)$$

- 整理得到：$Y(z)=\frac{2b+X(z)}{1-bz^{-1}}$
- 其中$\boldsymbol{X}(z)=\frac{\mathbf{1}}{1-\boldsymbol{a}z^{-1}}, |\boldsymbol{z}|>|a|$
- 从而$Y(z)=\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{b}}{1-bz^{-1}}\frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$
- 收敛域为$|\boldsymbol{z}|>\mathbf{max}(|a|,|\boldsymbol{b}|)$，因此

$$y(n)=\underbrace{\boxed{2b^{n+1}}}_{\text{零输入解}}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})}}_{\text{零状态解}},n\geq 0$$

举例

- 例：非零初始条件对系统的影响。考虑一个由如下线性常系数差分方程描述的系统

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

- 设$x(n)$为因果序列，且初始条件为$y(-1)$ 。
- **方程两边取单边z变换**

$$Y(z) - ay(-1) - az^{-1}Y(z) = X(z)$$

- 则

$$Y(z) = \frac{ay(-1)}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}X(z)$$

- 如果$y(-1) = \mathbf{0}$，则

$$Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}X(z) = \boldsymbol{H}(z)X(z)$$

- $\boldsymbol{H}(z)$为LTI系统的系统函数。

举例

- 如果对所有n均有$x(n)$=0，则输出等于$y(n) = a^{n+1}y(-1)$。如果$y(-1)$不等于0，系统将不是线性系统！因为输入为0，而输出不等于0。
- 如果$\boldsymbol{x(n)} = \boldsymbol{Au(n)}$，则$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}}$，$|z| > 1$，从而

$$Y(z) = \frac{ay(-1)}{1-az^{-1}} + \frac{A}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

- 从而得到

$$y(n) = \begin{cases} y(-1), & n = -1 \\ \underbrace{\boxed{y(-1)a^{n+1}}}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\boxed{\frac{A}{1-a}(1-a^{n+1})}}_{\text{零状态解}}, & n \geq 0 \end{cases}$$

作业

1. 课后习题P78-82:14(2)(6),15(2), 16, 18, 19(1), 20, 21(3),22。

谢谢！