答疑

问题1：为什么白噪声通过有限带宽的线性系统后，输出的是正态分布？

解释：　设随机过程 $X(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ 的线性系统，输出为 $Y(t)$，那么 $Y(t)=\int_{-\infty}^{t}X(\tau)h(t-\tau)d\tau=\lim_{\max\Delta\tau_i\to 0}\sum_{i=0}^{N}X(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i$

当 $\Delta\tau_i\to 0$ 时，$x(\tau_i)\Delta\tau_i$ 就是 τ_i 处的冲激函数的强度，系统对于这个冲击函数的响应则为 $x(\tau_i)\Delta\tau_i\cdot h(t-\tau_i)$，假定线性系统的冲击响应 $h(t)$ 的过渡时间为 Δt（一般有 $\Delta t\propto {}^{1}/_{\Delta f}$，$\Delta f$ 为系统通带），则 $Y(t)$ 可以看作是：

答疑

$$Y(t)=\int_{t-\Delta t}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\lim_{\substack{max\ \Delta\tau_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}x(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i$$

式中，$n=\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$

对于白噪声，有

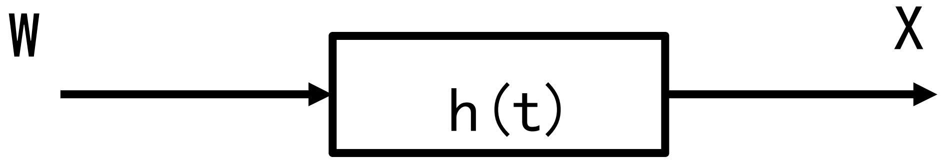
$$f_X(x_1,x_2,\tau)=f_X(x_1,t)f_X(x_2,t-\tau)$$

则由白噪声产生的随机变量$x(\tau_i)$之间相互独立，而$Y(t)$是n个随机变量之和，当$\Delta\tau\to 0$时，$n=\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\to\infty$，根据中心极限定理，大量独立同分布的随机变量之和服从正态分布。

答疑

问题2：习题3.36 模拟产生一个功率谱$G_X(\omega)=\frac{1}{1.25+cos\omega}$的正态随机序列。

答：利用ARMA方法，参考例题3.8



$$G_X(\omega)=G_n(\omega)|H(\omega)|^2=|H(\omega)|^2=\frac{1}{1.25+cos\omega}$$

得到 $H(\omega)=\frac{1}{1+0.5e^{-j\omega}}$ 或者 $H(z)=\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$

答疑

转化为系统的差分方程描述为：

$$X(n) = -0.5X(n-1) + W(n)$$

产生白噪声序列W(n),通过上式递推产生X（n），或者利用白噪声通过滤波器的方式产生X（n）

3.5最佳线性滤波器

3.5.1 输出信噪比最大的线性滤波器

信噪比：在$t=t_0$时输出端信号瞬时功率与噪声的平均功率之比

$$d_0 = \frac{s_o^2(t_0)}{E[n_o^2(t)]}$$

最佳滤波器： $$H(\omega) = c \cdot \frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

复习

最佳线性滤波器物理意义分析：

幅频特性为： $|H(\omega)| = c \cdot \dfrac{|S(\omega)|}{G_n(\omega)}$

相频特性为： $\arg H(\omega) = -\arg S(\omega) - \omega t_0$

3.5.2 匹配滤波器：白噪声+信号

$$\boxed{H(\omega) = cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

匹配滤波器冲激响应： $h(t) = cs^*(t_0 - t)$

对于实信号,有： $h(t) = cs(t_0 - t)$

如果c=1, h(t)与s(t)对于$t_0/2$点呈偶对称关系.

复习

匹配滤波器性质:

- ☞ 最大输出信噪比d_m与信号**s(t)**波形无关;
- ☞ t_0时刻应当选在信号**s(t)**结束之后;
- ☞ 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性;
- ☞ 匹配滤波器对信号的频移不具有适应性。

复习

3.5.3 广义匹配滤波器

$$H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}/G_n(\omega)=\frac{1}{G_n^+(\omega)}\bullet c\left[\frac{S(\omega)}{G_n^+(\omega)}\right]^* e^{-j\omega t_0}=H_1(\omega)H_2(\omega)$$

对于物理可实现的系统

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_{2c}(\omega)=\frac{1}{G_n^+(\omega)}\bullet\left[\frac{cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_n^-(\omega)}\right]^+$$

$$\text{最佳线性滤波器}\quad H(\omega)=c\cdot\frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}\quad\begin{cases}\text{匹配滤波器} & H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\\ \text{广义匹配滤波器} & \text{如上}\end{cases}$$

复习

3.6 线性系统输出端随机过程的概率分布

3.6.1 正态随机过程通过线性系统

正态随机信号通过线性系统输出服从正态分布

3.6.2 随机过程正态化

中心极限定理

4.1 非线性变换的直接分析法

$$X(t) \longrightarrow \boxed{y=h(\mathrm{x})} \longrightarrow Y(t)$$

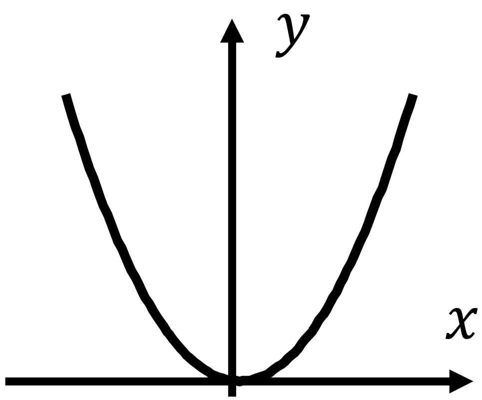
复习

4.2.1 概率密度

方法：直接根据随机变量的函数理论求解。

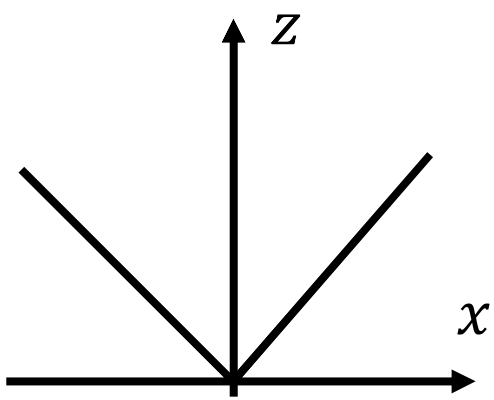
4.2.2 均值和自相关函数

结论：输入是二阶严平稳，输出是广义平稳。



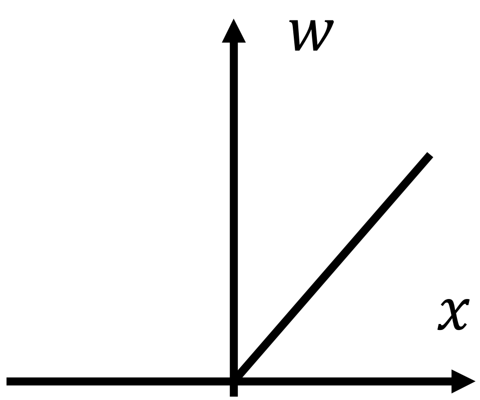
$$y = x^2$$

平方律检波器



$$z = |x|$$

全波线性检波器



$$w = (x + |x|)/2$$

半波线性检波器

习题：　　　4.1

4.1非线性变换的直接分析法

例子4.1 假定平方律检波器的输入为零均值平稳正态随机过程，其方差为σ^2，自相关函数为$R_X(\tau)$，求输出的一维概率密度、均值和自相关函数。

解：

由$y=x^2$得到反函数有两个，即$x_1=\sqrt{y}$，$x_2=-\sqrt{y}$（ y≥0 ），可得，$J_1=dx_1/dy=1/(2\sqrt{y})$，$J_2=dx_2/dy=-1/(2\sqrt{y})$，

有: $$f_Y(y,t)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y},t)+f_X(-\sqrt{y},t)\right] \quad (y\geq 0)$$

当y<0时， $f_Y(y,t)=0$

综合有， $$f_Y(y,t)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y},t)+f_X(-\sqrt{y},t)\right]U(y)$$

输出均值： $$E\left[Y(t)\right]=E\{X^2(t)\}=R_X(0)=\sigma^2$$

4.1非线性变换的直接分析法

自相关函数：

$$R_Y(\tau)=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}$$

利用公式（习题2.38）： 假设X_k零均值正态随机变量，有：

$$E[X_1X_2X_3X_4]=E[X_1X_2]E[X_3X_4]+E[X_1X_3]E[X_2X_4]$$
$$+E[X_1X_4]E[X_2X_3]$$

$$R_Y(\tau)=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}=E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)]$$
$$+E[X(t)X(t-\tau)]E[X(t)X(t-\tau)]$$
$$+E[X(t)X(t-\tau)]E[X(t)X(t-\tau)]$$

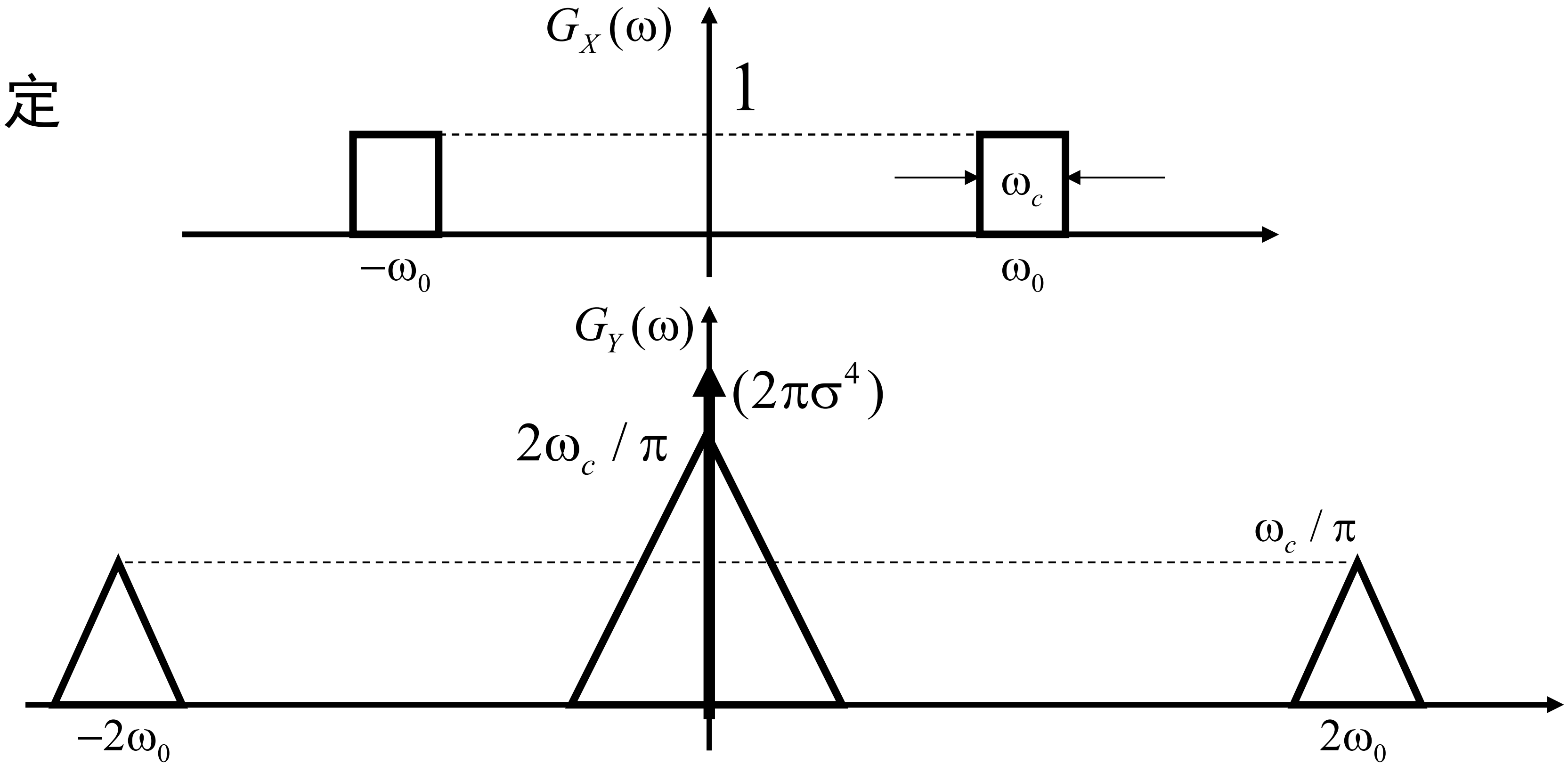
因此， $$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

4.1非线性变换的直接分析法

$$R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) = \sigma^4 + 2R_X^2(\tau)$$

$$G_Y(\omega) = 2\pi\sigma^4\delta(\omega) + \frac{1}{\pi} G_X(\omega) \otimes G_X(\omega)$$

假定



特点：输出产生了新的频率分量

4.1非线性变换的直接分析法

例4.2 全波线性检波 $Z(t)=|X(t)|$，其中X(t)为零均值平稳正态随机过程，方差为σ^2。求输入的一维概率密度和均值

解： 一维概率密度：

$$x_1=z \qquad x_2=-z \qquad |J_1|=\left|\frac{dx_1}{dz}\right|=1 \qquad |J_2|=\left|\frac{dx_2}{dz}\right|=1$$

$$\begin{aligned} f_Z(z)&=\left\{[f_X(x_1)|J_1|]_{x_1=z}+[f_X(x_2)|J_2|]_{x_2=-z}\right\}U(z)\\ &=[f_X(z)+f_X(-z)]U(z)\\ &=2f_X(z)U(z)\end{aligned}$$

$$f_Z(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]U(z)$$

4.1非线性变换的直接分析法

$$E[Z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz = \int_0^{\infty} \frac{2z}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

或

$$E[Z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x)dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

积分得到，$E[Z(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$

4.1非线性变换的直接分析法

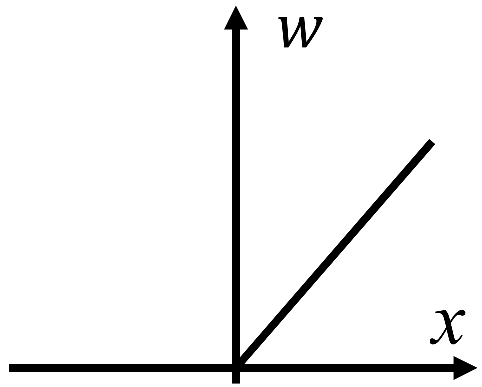
相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= E[Z(t+\tau)Z(t)] = E[|X(t+\tau)|X(t)|] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x_1||x_2|f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2 \\
&= ?
\end{aligned}
$$

4.1非线性变换的直接分析法

例子4.3 半波线性检波器 $W(t)=[X(t)+|X(t)|]/2$

求一维概率分布，一维概率密度，均值。



解：半波线性检波器的输出为

$$W(t)=\begin{cases}X(t) & X(t)\geq 0\\ 0 & X(t)<0\end{cases}$$

我们先求分布函数， $F_W(w,t)=P\{W(t)\leq w\}$

当w<0时， $P\{W(t)\leq w\}=0$

当w=0时， $P\{W(t)\leq 0\}=P\{W(t)=0\}=P\{X(t)\leq 0\}=1/2$；

当w>0时， $P\{W(t)\leq w\}=P\{X(t)\leq w\}=F_X(w)$

4.1非线性变换的直接分析法

综合以上各式得: $F_W(w,t) = P\{W(t) \le w\} = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1/2 & w = 0 \\ F_X(w) & w > 0 \end{cases}$

所以 $$f_W(w) = \frac{1}{2}\delta(w) + f_X(w)U(w)$$

进一步有:

$$E[W(t)] = \frac{1}{2}E[X(t)] + \frac{1}{2}E[|X(t)|] = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$R_W(\tau) = E[W(t+\tau)W(t)] = ?$$

4.2.1 变换法的基本公式

复习特征函数：

$$\Phi_X(\omega)=E[e^{j\omega X}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}f_X(x)dx$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega)e^{-j\omega x}d\varpi$$

$$\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_1 x_1+\omega_2 x_2}f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$f_X(x_1,x_2,\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega_1 x_1-\omega_2 x_2}\Phi_X(\omega_1,\omega_2,\tau)d\omega_1 d\omega_2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

如果h(t)满足绝对可积条件，

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-j\omega x}dx \qquad h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

如果h(t)不满足绝对可积条件，可用拉普拉斯变换

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-sx}dx$$

$$h(x)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty}H(s)e^{sx}ds$$

λ为常数

4.2 非线性系统分析的变换法

$$R_Y(\tau) = E\{h[X(t+\tau)]h[X(t)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_1x_1-\omega_2x_2}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)d\omega_1d\omega_2dx_1dx_2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)e^{-j\omega_1x_1-\omega_2x_2}dx_1dx_2}_{H(\omega_1)H(\omega_2)}d\omega_1d\omega_2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)H(\omega_1)H(\omega_2)d\omega_1 d\omega_2$$

或用拉氏变换表示：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{(2\pi j)^2}\int_D\int_D\Phi_X(s_1,s_2,\tau)H(s_1)H(s_2)ds_1 ds_2$$

这是一般表达式，计算也是比较复杂的，对于输入为零均值平稳正态随机过程，可以进一步简化，即

4.2 非线性系统分析的变换法

4.2.2 Price定理

定理 假定输入为零均值平稳正态随机过程，输出过程为Y(t)=h[X(t)],则输出的自相关函数满足下列关系：

$$\frac{d^{(k)}R_Y(\tau)}{dR_X^{(k)}(\tau)} = E[h^{(k)}(X_1)h^{(k)}(X_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{(k)}(x_1)h^{(k)}(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

其中，

$$h^{(k)}(X_1) = \frac{d^{(k)}h(X_i)}{dX_i^k} \qquad i = 1,2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

常用检波器的自相关函数总结

平方律检波器

$$R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)$$

全波线性检波器

$$R_Z(\tau) = \frac{2\sigma^2}{\pi}(\alpha \sin\alpha + \cos\alpha)$$

半波线性检波器的自相关函数

$$R_W(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(\alpha \sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{1}{4}R_X(\tau)$$

理想硬限幅器的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}\arcsin(R_X(\tau)/R_X(0))$$

4.3 非线性系统分析的级数展开法

无论是直接法还是变换法都会遇到复杂的积分问题，稍微复杂的非线性系统就可能使积分求解变得复杂。在实际中，我们通常采用级数展开法，这种方法把变换函数用台劳级数展开。

4.3 非线性系统分析的级数展开法

假定变换函数y=h(x)可以在x=0处用台劳级数展开为

$$y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

其中， $$a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k h(x)}{dx^k}$$

$$E[Y(t)] = E\{h[X(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.] f_X(x) dx$$

$$= a_0 + a_1 E[X(t)] + a_2 E[X^2(t)] + \ldots$$

$$= a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots$$

4.3 非线性系统分析的级数展开法

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t+\tau)Y(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_2^j f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k a_j \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^j f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k a_j E[X^k(t+\tau)X^j(t)]$$

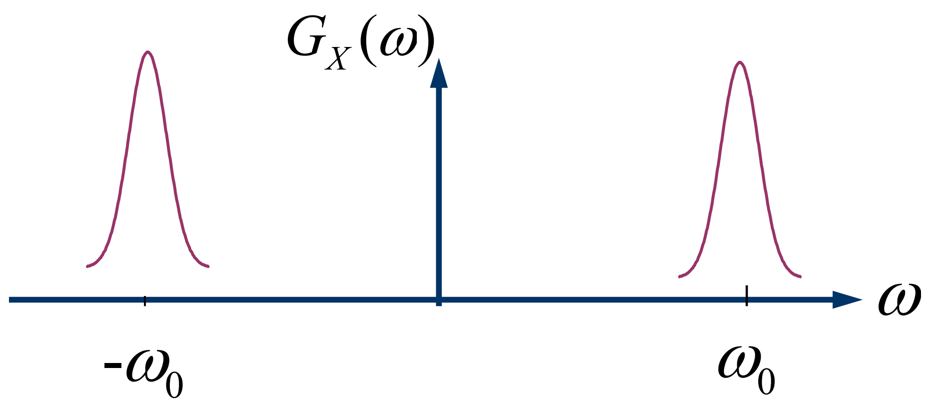
实际中近似处理

第五章　　窄带随机过程

5 窄带随机过程

5 窄带随机过程

如果一个随机信号的功率谱集中在某一中心频率附近的一个很小的频带内，且该频带又远小于其中心频率，这样的随机信号称为窄带随机信号。



5 窄带随机过程

在电子系统中，窄带系统是很多的，一般的无线电接收系统都有的高频和中频放大器就是窄带系统。例如微波脉冲雷达，工作频率约在1000MHz以上，而它的带宽一般都在几兆赫以下。而语言信号本身仅有近3.4kHz的带宽，即使采用PCM数字编码也只有64kbps的码速率，若再压缩编码，则仅有2.4kbps甚至更低的码速率，但为了通过无线电波或光缆设备传输，通常必须把它调制在兆赫以上量级的载波上进行传输等。工作于这些系统发射机和接收机中的高频或中频放大器，为了与窄带信号相匹配，通常都是窄带系统。

5.1.1 希尔伯特变换的定义

？问题：为什么要引入希尔伯特变换

假定一实函数x(t)，其希尔伯特变换为：

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

其反变换为：

$$H^{-1}[\hat{x}(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}}$$

5.1 希尔伯特变换

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{\pi t}} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

幅频特性为： $|H(\omega)| = 1$

相频特性为： $\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases}$

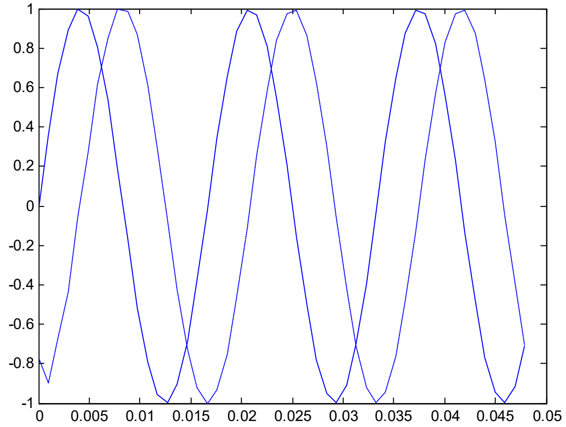
正交滤波器

5.1.2 希尔伯特（Hilbert）变换的性质

（1） $$H[\hat{x}(t)] = -x(t)$$

（2） $$H[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$H[\sin(\omega_0 t + \varphi)] = -\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



记忆：相当于-pi/2

5.1 希尔伯特变换

(3) 设$a(t)$为低频信号, 其傅立叶变换为$A(\omega)$, 且

$$A(\omega)=0 \qquad |\omega|>\Delta\omega/2$$

则当$\omega_0>\Delta\omega/2$时, 有

$$H[a(t)\cos\omega_0 t]=a(t)\sin\omega_0 t$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t]=-a(t)\cos\omega_0 t$$

不影响低频的

幅度和相位分量

(4) 设$A(t)$与$\phi(t)$为低频信号，则

$$H[A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]]=A(t)\sin[\omega_0 t+\phi(t)]$$

$$H[A(t)\sin[\omega_0 t+\phi(t)]]=-A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]$$

5.1 希尔伯特变换

（5） 设 $y(t) = v(t) \otimes x(t)$

则 $\hat{y}(t) = \hat{v}(t) \otimes x(t) = v(t) \otimes \hat{x}(t)$

根据卷积运算得结合律就可以证明该性质。

（6） 设平稳随机过程$X(t)$，自相关函数为$R_X(\tau)$，则

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

5.1 希尔伯特变换

(7) $$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$

$$\tau = t_1 - t_2$$

(8)

X(t)与他的希尔伯特变换的互相关函数是奇函数，即

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau) \qquad R_{\hat{X}X}(-\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(0) = -R_{X\hat{X}}(0) = 0$$

上式也表明，$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻是正交的。

5.1 希尔伯特变换

(9) 偶函数的希尔伯特变换是奇函数；

奇函数的希尔伯特变换是偶函数。