3.5最佳线性滤波器

3.5.1 输出信噪比最大的线性滤波器

3.5.2 匹配滤波器

3.5.3 广义匹配滤波器

3.5最佳线性滤波器

3.5.1 输出信噪比最大的线性滤波器

$$X(t)=s(t)+n(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)=s_o(t)+n_o(t)$$

确知信号

零均值平稳随机过程，功率谱Gn(ω)

如何设计？

准则：最有利于检测，即信噪比最大

信噪比： 在$t=t_0$时输出端信号**瞬时功率**与噪声的**平均功率**之比

$$d_0=\frac{s_o^2(t_0)}{E[n_o^2(t)]}$$

3.5最佳线性滤波器

3.5.1 输出信噪比最大的线性滤波器

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

输出噪声功率为: $E[n_0^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2G_n(\omega)d\omega$

$$d_0=\frac{s_0^2(t_0)}{E[n_0^2(t)]}=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2G_n(\omega)d\omega}$$

$H(\omega)$如何取值，使得信噪比d_0最大

3.5最佳线性滤波器

3.5.1 输出信噪比最大的线性滤波器

结论:

最佳滤波器:

$$H(\omega) = c \cdot \frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

其幅频特性为:

$$|H(\omega)| = c \cdot \frac{|S(\omega)|}{G_n(\omega)}$$

其相频特性为:

$$\arg H(\omega) = -\arg S(\omega) - \omega t_0$$

3.5最佳线性滤波器

此时，即$H(\omega)=c\cdot\dfrac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$ 时，

最大输出信噪比为:

$$d_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{G_n(\omega)}d\omega$$

输出信号波形为:

$$s_0(t)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{G_n(\omega)}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

可知，当$t=t_0$时, 输出信号值最大, 是波形$s_0(t)$的尖峰.

3.5最佳线性滤波器

最佳线性滤波器物理意义分析:

幅频特性为:
$$\left|H(\omega)\right| = c \cdot \frac{\left|S(\omega)\right|}{G_n(\omega)}$$

相频特性为:

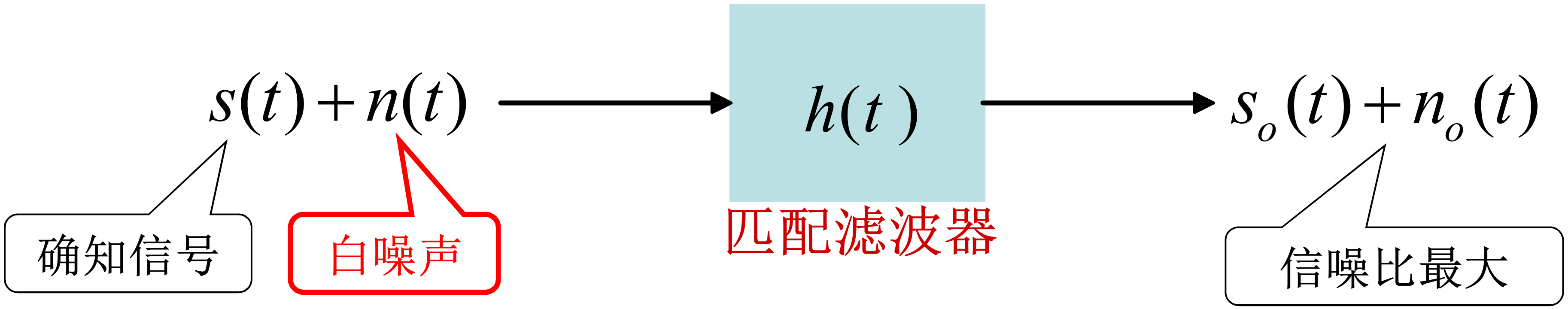
$$\arg H(\omega) = -\arg S(\omega) - \omega t_0$$

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\omega)\right|\left|H(\omega)\right| e^{j[\arg S(\omega)+\arg H(\omega)+\omega t]}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\omega)\right|\left|H(\omega)\right| e^{j[\arg S(\omega)-\arg S(\omega)-\omega t_0+\omega t]}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\omega)\right|\left|H(\omega)\right| e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

3.5.2 匹配滤波器



$$H(\omega)=c\cdot\frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

其中，$G_n(\omega)=c$

$$\boxed{H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

3.5最佳线性滤波器

匹配滤波器冲激响应:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = cs^*(t_0 - t)$$

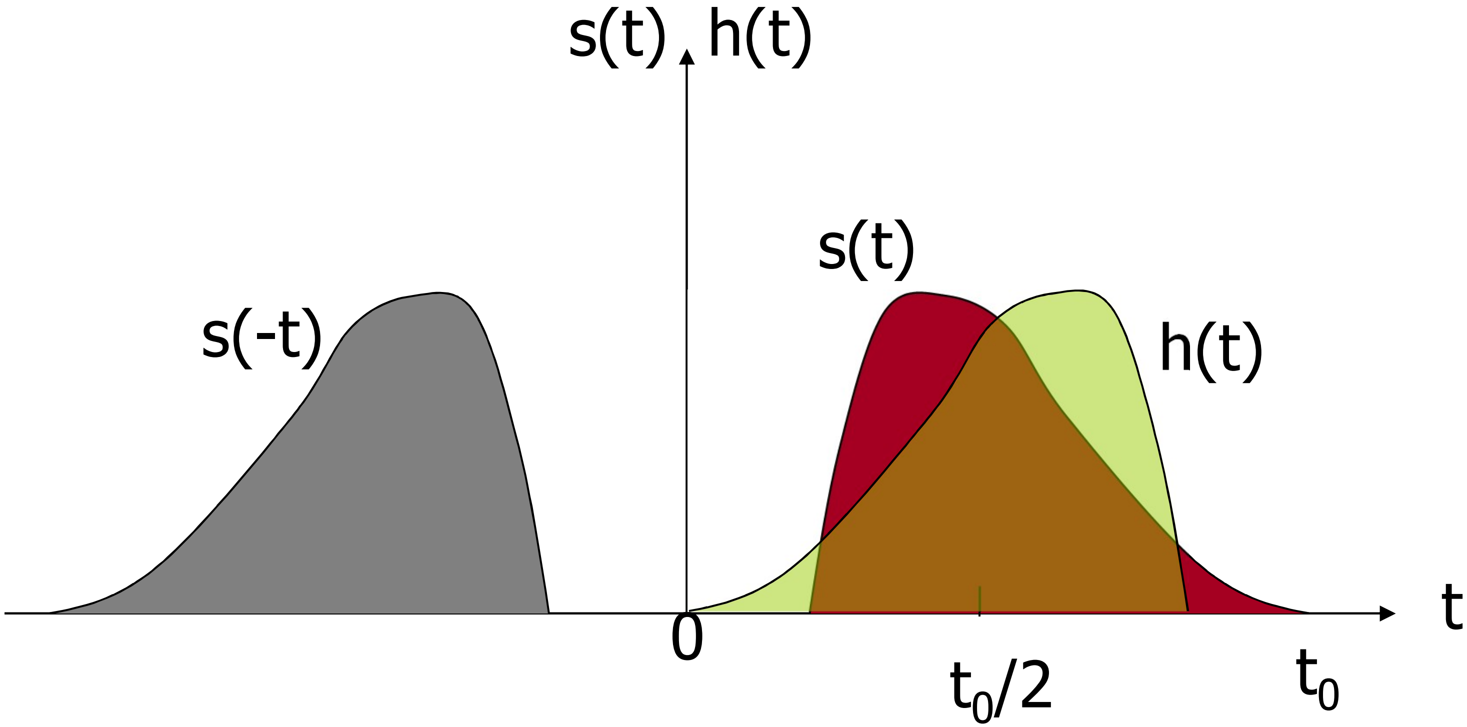
即匹配滤波器的冲激响应为信号的共轭镜像。

对于实信号,有:

$$h(t) = cs(t_0 - t)$$

如果c=1, h(t)与s(t)对于t_0/2点呈偶对称关系.

3.5最佳线性滤波器



实信号及其匹配滤波器的冲激响应

3.5最佳线性滤波器

匹配滤波器性质:

☞最大输出信噪比d_m与信号s(t)波形无关;

$$d_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)}d\omega = \frac{2E}{N_0}$$

其中 $$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt$$

输出最大信噪比只与信号能量有关,而与信号波形无关。

（LFM信号的目的，兼顾能量和信号的分辨力）

3.5最佳线性滤波器

☞ t_0时刻应当选在信号s(t)结束之后;

物理可实现的滤波器满足:

$$h(t)=0, t<0 \quad \longleftrightarrow \quad s(t_0-t)=0, \quad t>t_0$$

如果选择输出最大的时刻t_0在信号结束之前,则匹配滤波器在物理上不可实现，如果将t<0的部分截断，滤波器将不再是最佳的。

3.5最佳线性滤波器

☞ 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性；

假定 $s_1(t) = as(t-\tau)$ 有 $S_1(\omega) = aS(\omega)e^{-j\omega\tau}$

则
$$H_1(\omega) = cS_1^*(\omega)e^{-j\omega t_1} = caS^*(\omega)e^{-j\omega(t_1-\tau)}$$
$$= caS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}e^{-j\omega(t_1-\tau-t_0)} = aH(\omega)e^{-j\omega(t_1-\tau-t_0)}$$

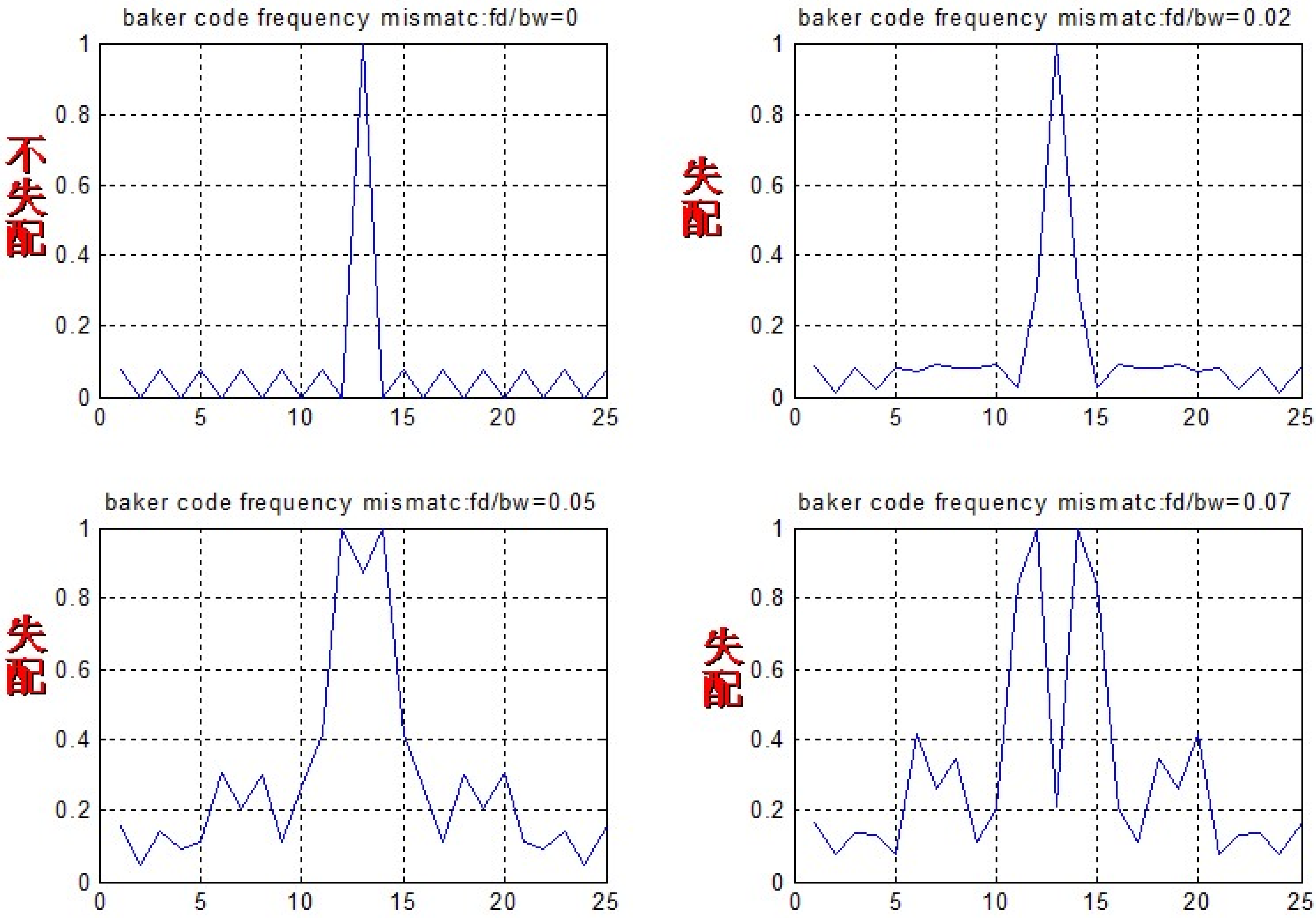
令$t_1 = \tau + t_0$， 则$H_1(\omega) = aH(\omega)$

☞ 匹配滤波器对信号的频移不具有适应性。

$$S_2(\omega) = S(\omega + \omega_d)$$

$$H_2(\omega) = cS^*(\omega+\omega_d)e^{-j\omega t_0} \neq dH(\omega)$$

3.5最佳线性滤波器

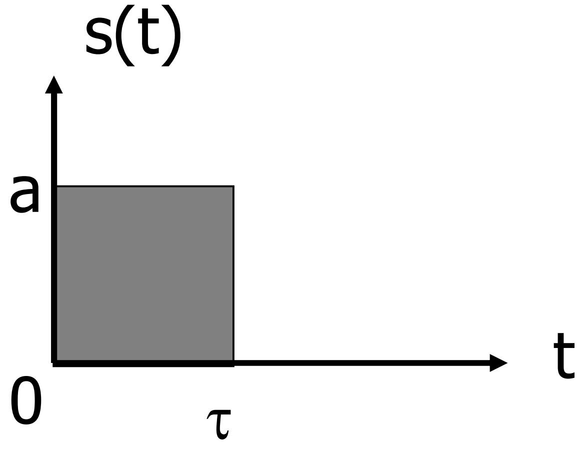

baker code frequency mismatc:fd/bw=0
不失配
baker code frequency mismatc:fd/bw=0.02
失配
baker code frequency mismatc:fd/bw=0.05
失配
baker code frequency mismatc:fd/bw=0.07
失配

3.5最佳线性滤波器

例1： 单个矩形脉冲信号

$$s(t)=\begin{cases} a, & 0\le t\le \tau \\ 0, & t<0, t>\tau \end{cases}$$

求其匹配滤波器的传输函数及输出信号波形.



3.5最佳线性滤波器

例3.11： 单个矩形脉冲信号 $s(t)=\begin{cases} a, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t<0, t>\tau \end{cases}$

求其匹配滤波器的传输函数及输出信号波形.

解： $$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\tau} ae^{-j\omega t}dt=\frac{a}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$

$$H(\omega)=\frac{ca}{-j\omega}(1-e^{j\omega\tau})e^{-j\omega\tau}=\frac{ca}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$ 取$t_0=\tau$

对比，可以看出 h(t)=c s(t)

3.5最佳线性滤波器

$$s_0(t)=s(t)\otimes h(t)=cs(t)\otimes s(t)=\begin{cases} ca^2t & 0\le t\le \tau \\ ca^2(2\tau-t) & \tau\le t\le 2\tau \\ 0 & 0 \end{cases}$$

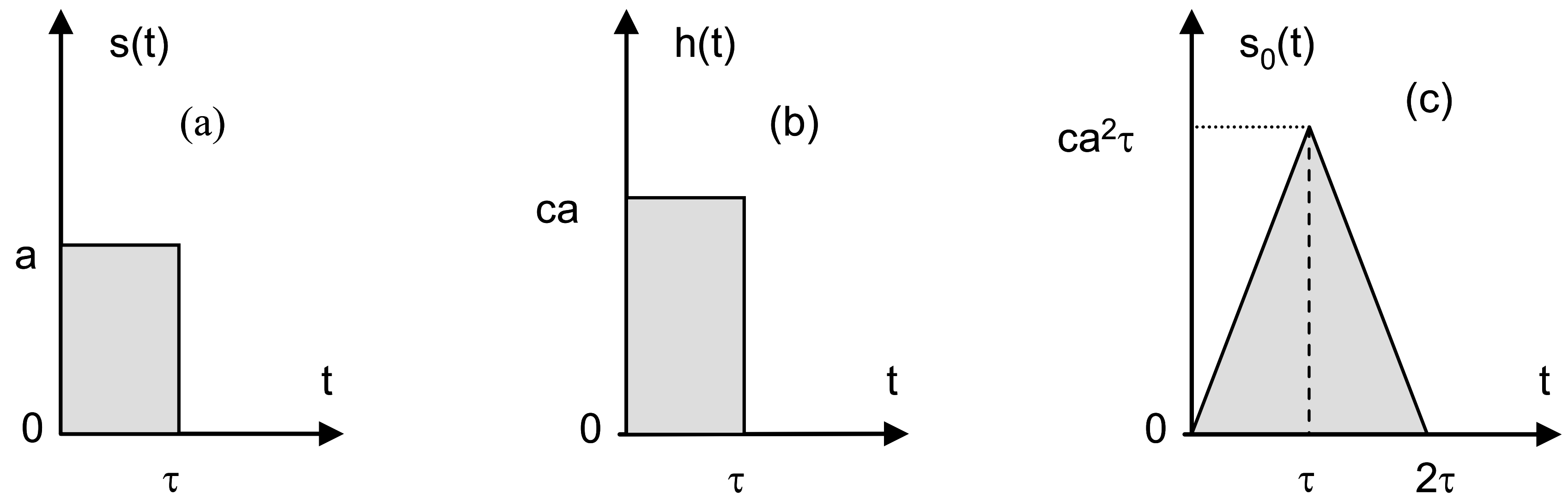


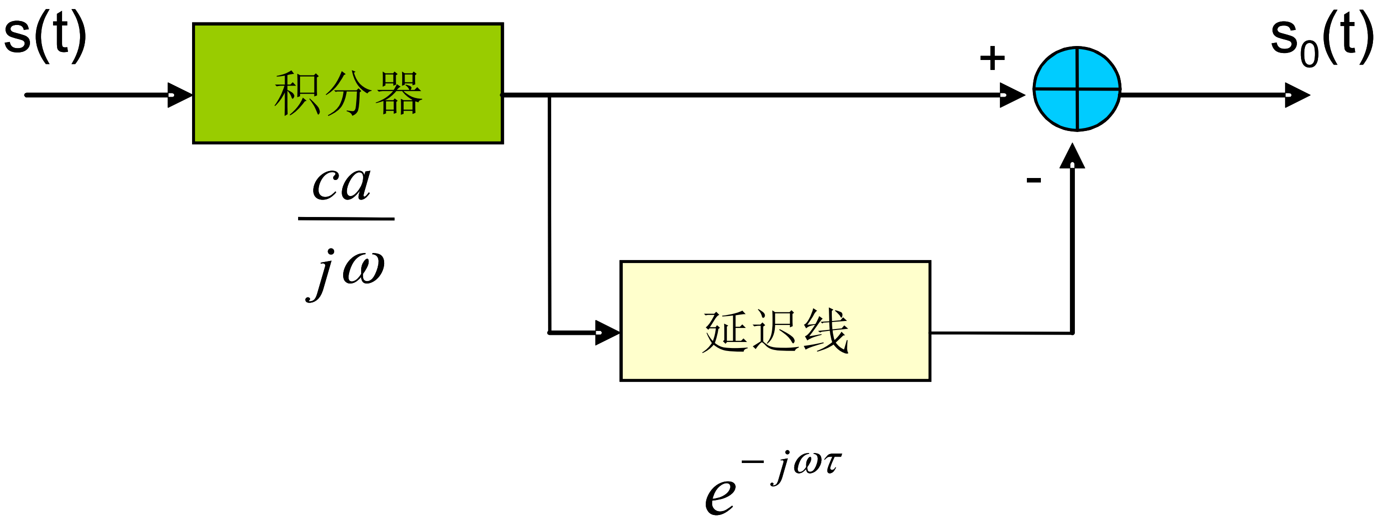
图3.17 矩形脉冲的匹配滤波器

(a)矩形脉冲信号 (b)匹配滤波器的冲击响应(c)匹配滤波器的输出信号

3.5最佳线性滤波器

匹配滤波器的实现

$$H(\omega)=\frac{ca}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$



矩形脉冲信号匹配滤波器实现框图

匹配滤波还可以利用频域方法实现。

3.5最佳线性滤波器

思考1: 单个矩形中频脉冲信号 $s(t)=arect(t/\tau)\cos\omega_0 t$

其中 $$rect(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1/2\\ 0 & other\end{cases}$$

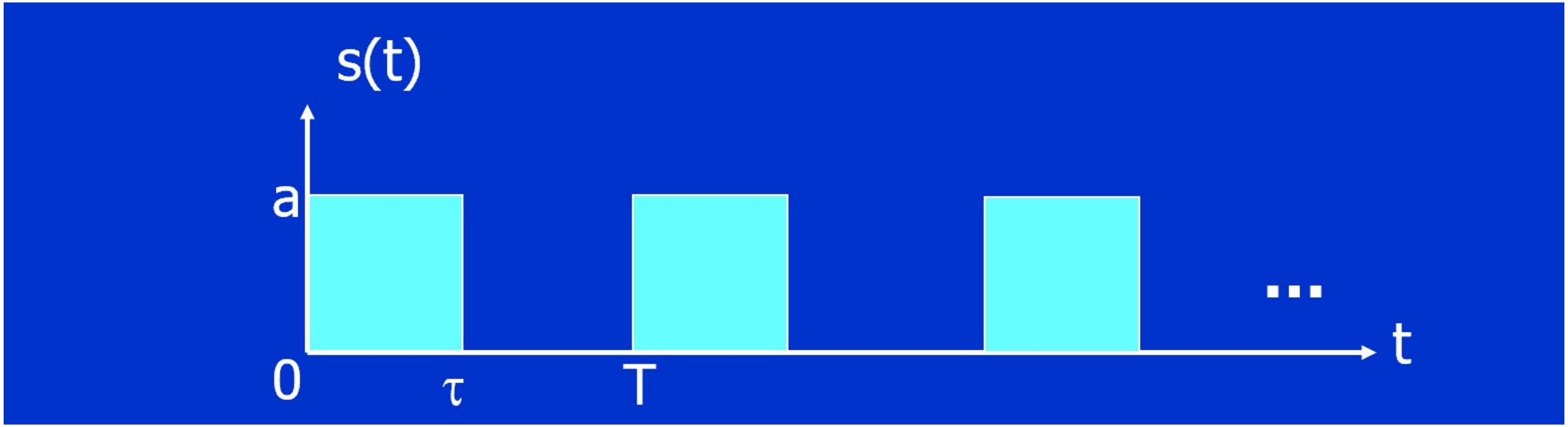
求其匹配滤波器的传输函数及输出信噪比。

思考2: 单个线性调频矩形中频脉冲信号

$$s(t)=arect(t/\tau)\cos(\omega_0 t+\mu t^2/2)$$

求其匹配滤波器的传输函数及输出信噪比。

例3.12 设计矩形脉冲串信号的匹配滤波器



3.5最佳线性滤波器

设矩形脉冲串信号为： $s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT)$

矩形脉冲串信号频谱为： $S(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}S_1(\omega)e^{-jk\omega T}$

s(t)的匹配滤波器 $H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^*(\omega)e^{jk\omega T}e^{-j\omega t_0}$

取$t_0=(M-1)T+\tau$

$$H(\omega)=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^*(\omega)e^{jk\omega T}e^{-j\omega[(M-1)T+\tau]}=cS_1^*(\omega)e^{-j\omega\tau}\sum_{k=0}^{M-1}e^{-j\omega(M-1-k)T}$$

3.5最佳线性滤波器

匹配滤波器可表示为

$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)$

$$H_1(\omega)=cS_1^*(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

子脉冲匹配滤波器

$$H_2(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}e^{-j\omega(M-1-k)T}=1+e^{-j\omega T}+\cdots+e^{-j\omega(M-1)T}$$

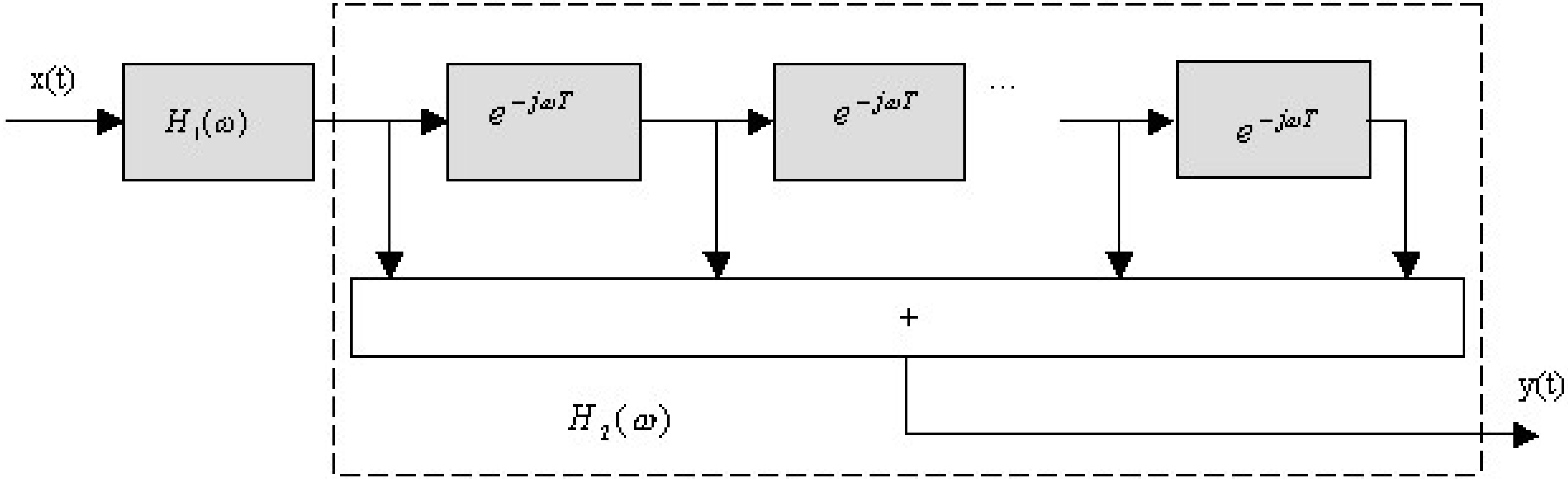
相参积累器

输出的最大信噪比

$$d_m=\frac{2E}{N_0}=\frac{2ME_1}{N_0}=M\cdot\frac{2E_1}{N_0}=Md_1$$

3.5最佳线性滤波器

脉冲串信号匹配滤波实现的结构



矩形脉冲串信号的匹配滤波器

3.5最佳线性滤波器

3.5.3 广义匹配滤波器

一般意义下的 $$H(\omega) = c\frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

假定噪声具有有理的功率谱

$$G_n(\omega) = G_n^+(\omega)G_n^-(\omega) = G_n^+(\omega)\cdot[G_n^+(\omega)]^*$$

$$H(\omega) = cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} / G_n(\omega) = \frac{1}{G_n^+(\omega)} \cdot c\left[\frac{S(\omega)}{G_n^+(\omega)}\right]^* e^{-j\omega t_0} = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

$$S'(\omega) = S(\omega) / G_n^+(\omega)$$

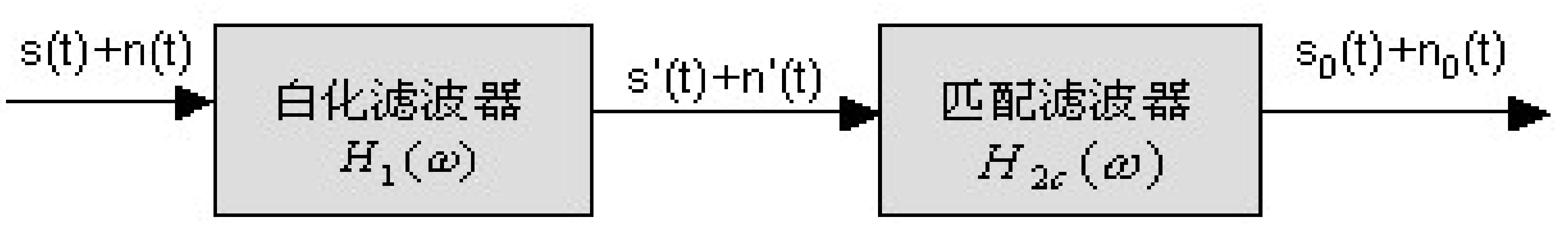
$$H_1(\omega) = \frac{1}{G_n^+(\omega)}$$

$$H_2(\omega) = cS'^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

3.5最佳线性滤波器

噪声通过$H_1(\omega)$后变成了白噪声，这是因为

$$G_{n'}(\omega)=G_n(\omega)\cdot\left|H_1(\omega)\right|^2=G_n(\omega)\cdot\frac{1}{G_n^+(\omega)}\cdot\frac{1}{[G_n^+(\omega)]^*}=1$$



广义匹配滤波器结构

对于物理可实现的系统

$$H_{2c}(\omega)=\left[\frac{cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_n^-(\omega)}\right]^+$$

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_{2c}(\omega)=\frac{1}{G_n^+(\omega)}\left[\frac{cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_n^-(\omega)}\right]^+$$

3.5最佳线性滤波器

例3.13 $$s(t)=\begin{cases} e^{-t/2}-e^{-t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$ $$G_n(\omega)=1/(1+\omega^2)$$

求广义匹配滤波器的传递函数

[解] $$G_n(s)=\frac{1}{1-s^2}=\frac{1}{(1+s)(1-s)}$$

谱分解 $$G_n^+(s)=\frac{1}{1+s} \qquad G_n^-(s)=\frac{1}{1-s}$$

白化滤波器 $$H_1(s)=\frac{1}{G_n^+(s)}=1+s$$

信号的拉普拉斯变换 $$S(s)=\frac{1}{1/2+s}-\frac{1}{1+s}=\frac{1}{(1+2s)(1+s)}$$

3.5最佳线性滤波器

$$H_2(s)=\frac{cS(-s)e^{-st_0}}{G_n^-(s)}=\frac{c}{1-2s}e^{-st_0}$$

$$h_2(t)=\begin{cases}\frac{c}{2}e^{(t-t_0)/2} & -\infty<t\le t_0\\ 0 & t>t_0\end{cases}$$

取物理可实现部分

$$h_{2c}(t)=\begin{cases}\frac{c}{2}e^{(t-t_0)/2} & 0<t\le t_0\\ 0 & t<0\text{或}t>t_0\end{cases}$$

对应的传递函数为

$$H_{2c}(s)=\int_0^{t_0}\frac{c}{2}e^{(t-t_0)/2}e^{-st}dt=\frac{c}{1-2s}\left(e^{-st_0}-e^{-t_0/2}\right)$$

s(t)的广义匹配滤波器为

$$H(s)=H_1(s)H_{2c}(s)=c\cdot\frac{1+s}{1-2s}\left(e^{-st_0}-e^{t_0/2}\right)$$

3.6.1 正态随机信号通过线性系统

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} X(\tau)h(t-\tau)d\tau=\lim_{\max\Delta\tau_i\to 0}\sum_{i=0}^{n} X(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i$$

$$Y_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2 + \cdots + l_{1N}X_N$$

$$Y_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2 + \cdots + l_{2N}X_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_N = l_{N1}X_1 + l_{N2}X_2 + \cdots + l_{NN}X_N$$

☞正态随机信号通过线性系统输出服从正态分布

3.6线性系统输出端随机过程的概率分布

例3.14

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H(\omega)}} \longrightarrow Y(t)$$

X（t）是零均值平稳正态随机过程，功率谱为$G_X(\omega)$，求输出的一维和二维概率密度

解：

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$$

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

若**X(t)**均值为零：

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_Y(0)}}\exp\left[-\frac{y^2}{2R_Y(0)}\right]$$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

3.6线性系统输出端随机过程的概率分布

$Y(t)$ 的二维概率密度为：

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{K}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{y}\right\}$$

其中， $\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2]^T$ $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(\tau) \\ R_Y(\tau) & R_Y(0) \end{bmatrix}$

或者写成：

$$f_Y(y_1, y_1) = \frac{1}{2\pi R_Y(0)\sqrt{1-r_Y^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_Y^2(\tau))R_Y(0)}[y_1^2 - 2r_Y(\tau)y_1y_2 + y_2^2]\right\}$$

其中 $r_Y(\tau) = R_Y(\tau)/R_Y(0)$

类似地，可以写出任意N维概率密度。

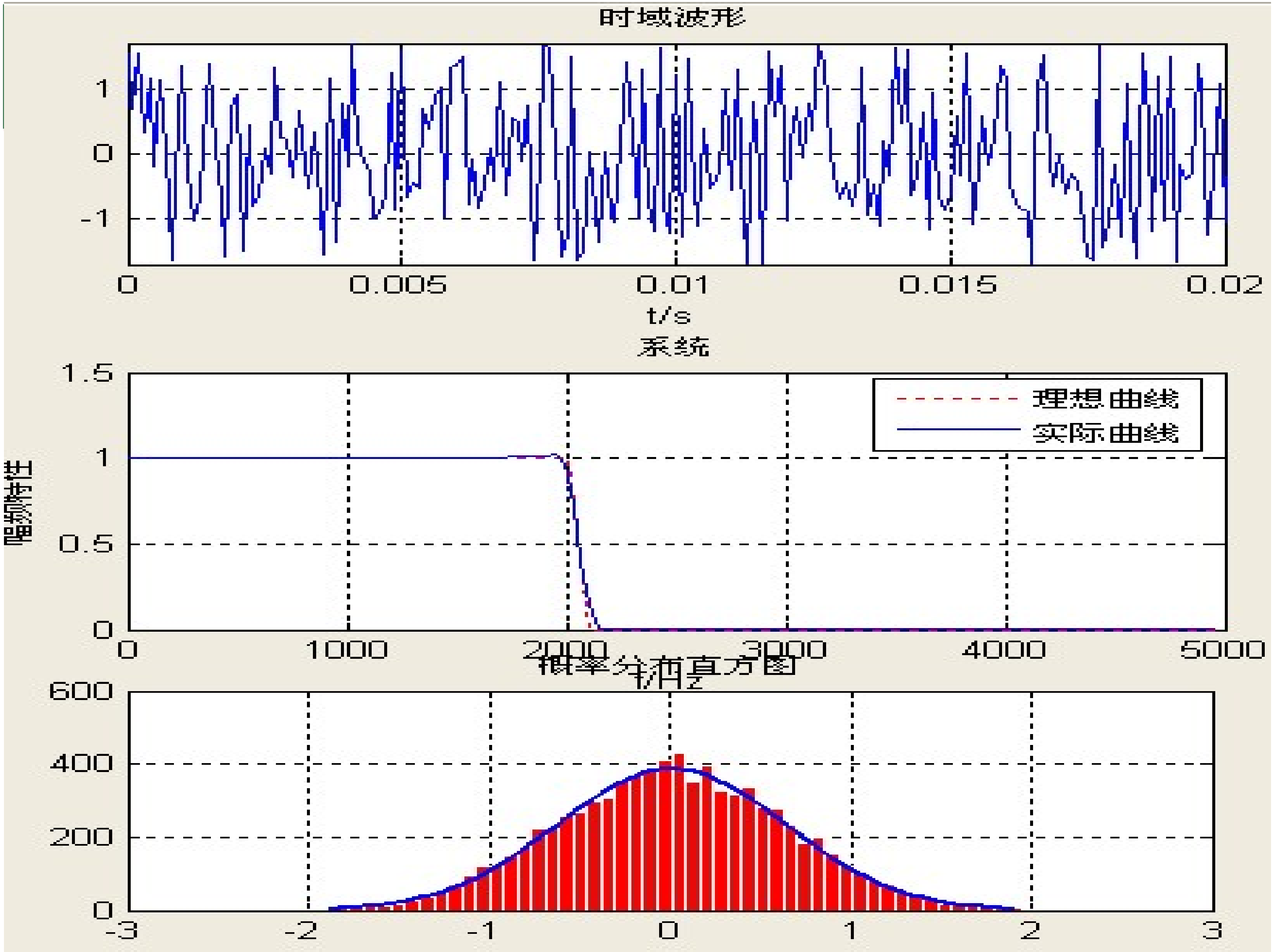
3.6.2 随机过程正态化

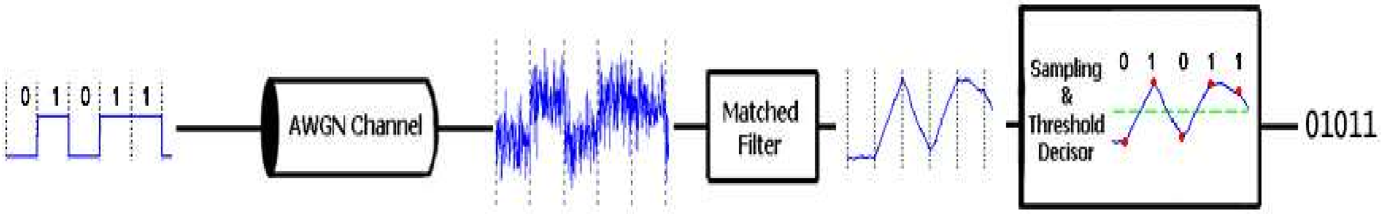
中心极限定理：

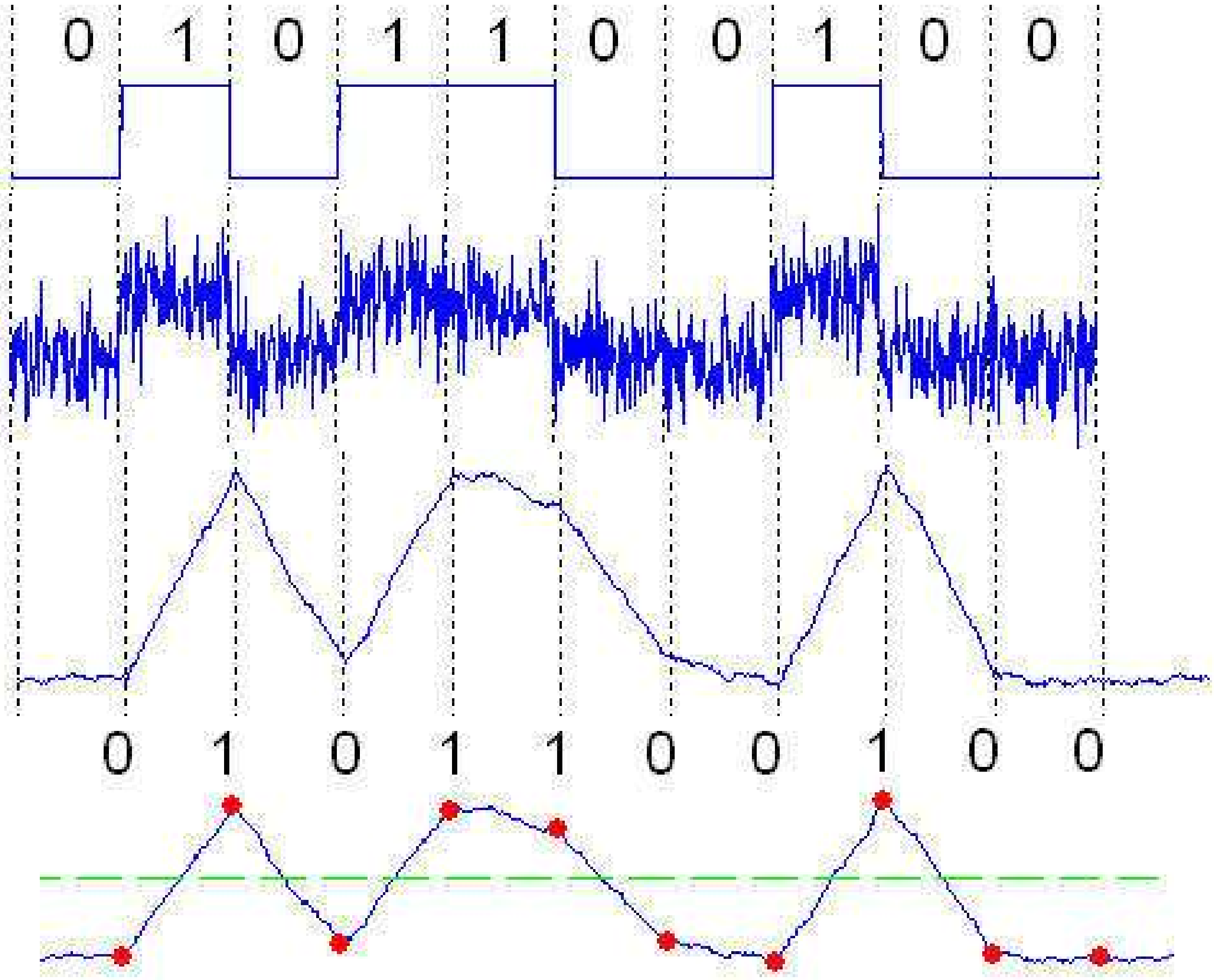
大量独立同分布的随机变量之和，其分布是趋于正态的。

$$Y(t)=\lim_{\substack{\max\Delta\tau_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}X(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i$$

- 白噪声通过有限带宽线性系统
- 宽带随机信号通过窄带线性系统


时域波形
t/s
系统
理想曲线
实际曲线
f/Hz
概率分布直方图


0 1 0 1 1
AWGN Channel
Matched Filter
Sampling & Threshold Decisor
0 1 0 1 1
01011


0 1 0 1 1 0 0 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 0

数字通信系统：

第四章 随机过程的非线性变换

第二专题 随机过程的变换

- 线性变换
  - 基本定理
  - 分析方法
    - 冲击响应法
    - 频谱法
  - 典型应用 ： 限带过程
  - 系统设计
    - 最佳线性滤波器
    - 匹配滤波器
    - 广义匹配滤波器
  - 实例：有色高斯噪声的模拟
- 非线性变换
  - 直接分析法
  - 变换法
  - 级数展开法

4.1非线性变换的直接分析法

$$X(t) \longrightarrow \boxed{y=h(\mathrm{x})} \longrightarrow Y(t)$$

已知：输入的统计特性、系统的非线性变换关系；

求解：输出的统计特征。

研究对象： $\boxed{\text{无惰性、时不变、非线性系统。}}$

分析方法：

- ✓**直接分析法；**
- ✓**变换法;**
- ✓**级数展开法。**

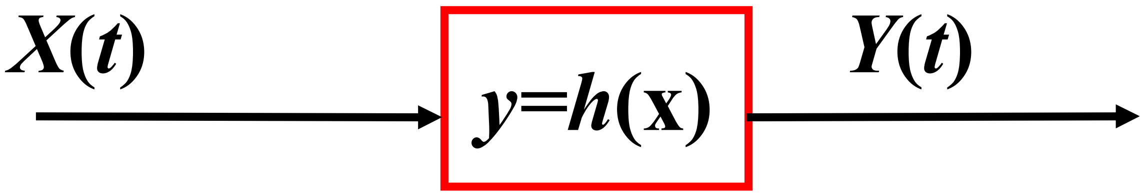
4.1非线性变换的直接分析法

4.1 直接分析法

4.2 变换法

4.3 级数展开法

4.1非线性变换的直接分析法



已知：输入的统计特性、系统的非线性变换函数

求解：输出的概率密度和数字特征。

方法：直接根据随机变量的函数理论求解。

4.1非线性变换的直接分析法

4.1.1 概率密度

$$X(t) \longrightarrow \boxed{y=h(x)} \longrightarrow Y(t)$$

（1）h为单值函数：　$f_Y(y,t)=|J|\,f_X(x,t)$

（2）h为多值函数：

$$f_Y(y,t)=|J_1|\,f_X(x_1,t)+|J_2|\,f_X(x_2,t)+\cdots$$

4.1非线性变换的直接分析法

二维概率密度：　　对于两个不同时刻t_1和t_2，

有　$Y(t_1)=h[X(t_1)]$　　$Y(t_2)=h[X(t_2)]$

$$f_Y(y_1,y_2,t_1,t_2)=|J|\,f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)$$

其中，

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

4.1非线性变换的直接分析法

4.1.2 均值与相关函数

$$E[Y(t)] = E\{h[X(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$$

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\{h[X(t_1)]h[X(t_2)]\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2) f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

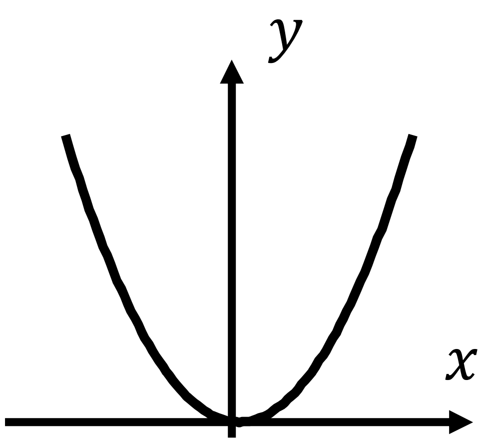
如果输入是二阶严平稳，则输出是广义平稳的，

但不能由输入是广义平稳得出输出也是广义平稳的结论。

4.1非线性变换的直接分析法

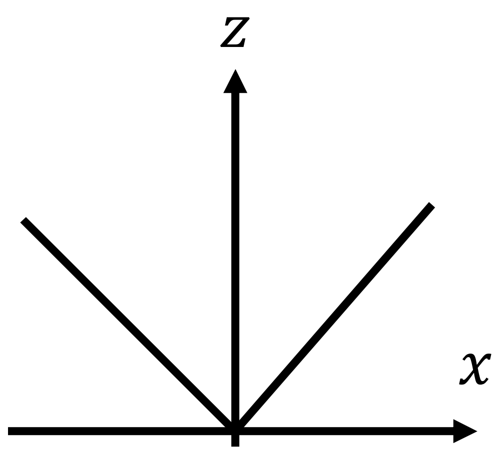
典型非线性系统：三类检波器

平方律检波器



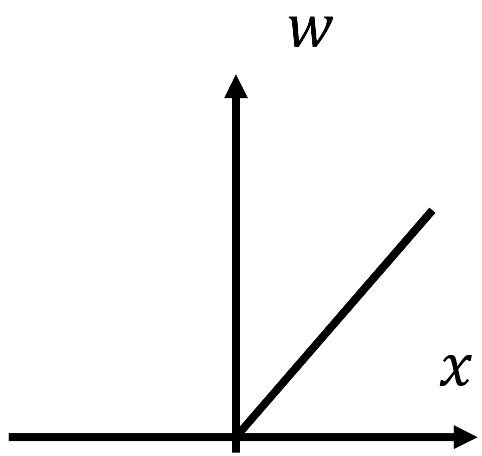
$$y = x^2$$

全波线性检波器



$$z = |x|$$

半波线性检波器



$$w = (x + |x|)/2$$

4.1非线性变换的直接分析法

例子4.1　假定平方律检波器的输入为零均值平稳正态随机过程，其方差为σ^2，自相关函数为$R_X(\tau)$，求输出的一维概率密度、均值和自相关函数。

解：

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y\sigma^2}}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right)\qquad y>0$$

输出均值：

$$E\left[Y(t)\right]=E\{X^2(t)\}=R_X(0)=\sigma^2$$

自相关函数：

$$R_Y(\tau)=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}$$

4.1非线性变换的直接分析法

利用公式（习题2.38）：　假设X_k零均值正态随机变量，有：

$$E[X_1X_2X_3X_4]=E[X_1X_2]E[X_3X_4]+E[X_1X_3]E[X_2X_4]$$
$$+E[X_1X_4]E[X_2X_3]$$
（由特征函数）

$$R_Y(\tau)=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}=E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)]$$
$$+E[X(t)X(t-\tau)]E[X(t)X(t-\tau)]$$
$$+E[X(t)X(t-\tau)]E[X(t)X(t-\tau)]$$

因此，　$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$

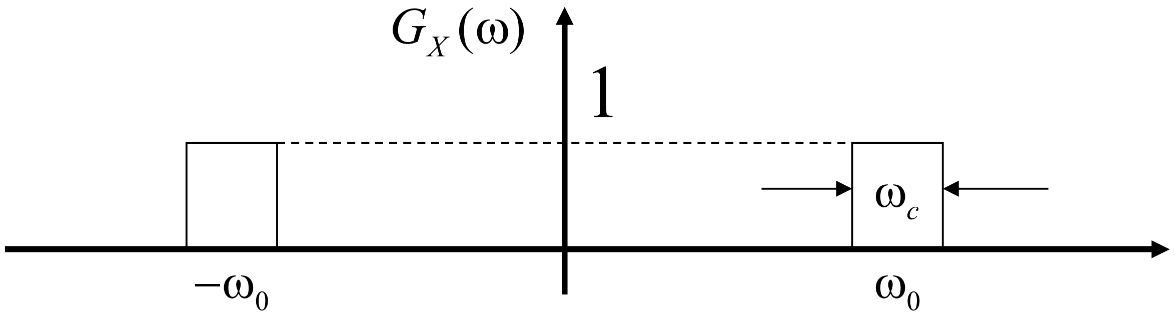
4.1非线性变换的直接分析法

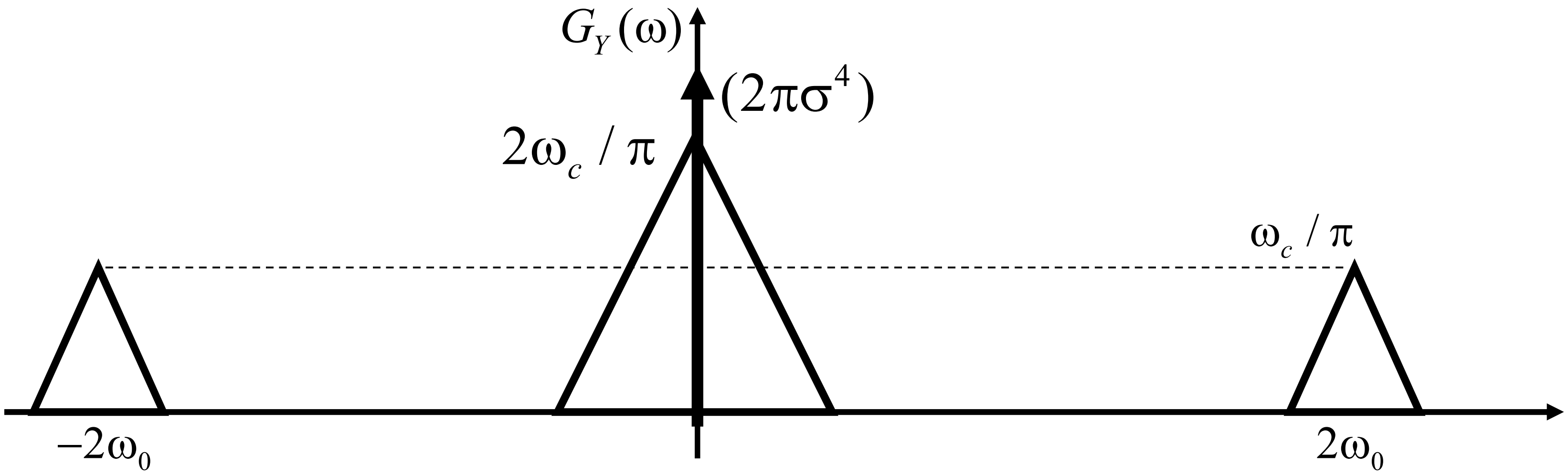
$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)=\sigma^4+2R_X^2(\tau)$$

$$\Updownarrow$$

$$G_Y(\omega)=2\pi\sigma^4\delta(\omega)+\frac{1}{\pi}G_X(\omega)\otimes G_X(\omega)$$

假定





特点：输出产生了新的频率分量

4.1非线性变换的直接分析法

例4.2 全波线性检波 $Z(t)=|X(t)|$，其中X(t)为零均值平稳正态随机过程，方差为σ^2。求输入的一维概率密度和均值

解： 一维概率密度：

$$x_1=z \qquad x_2=-z \qquad |J_1|=\left|\frac{dx_1}{dz}\right|=1 \qquad |J_2|=\left|\frac{dx_2}{dz}\right|=1$$

$$\begin{aligned} f_Z(z)&=\left\{[f_X(x_1)|J_1|]_{x_1=z}+[f_X(x_2)|J_2|]_{x_2=-z}\right\}U(z)\\ &=[f_X(z)+f_X(-z)]U(z)\\ &=2f_X(z)U(z) \end{aligned}$$

$$f_Z(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]U(z)$$

4.1非线性变换的直接分析法

$$E[Z(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz=\int_0^{\infty}\frac{2z}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

或

$$E[Z(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\, f_x(x)dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

积分得到，$E[Z(t)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$

4.1非线性变换的直接分析法

相关函数：

$$R_Z(\tau)=E[Z(t+\tau)Z(t)]=E[|X(t+\tau)|X(t)|]$$

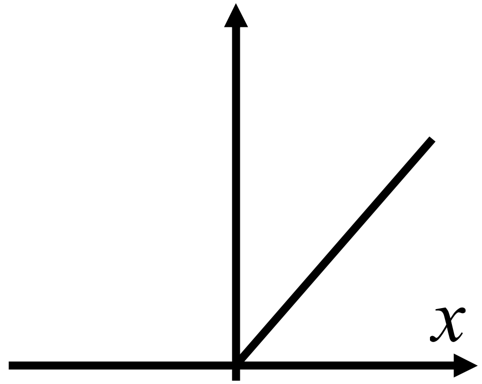
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x_1||x_2|f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$=?$$

4.1非线性变换的直接分析法

例子4. 3 半波线性检波器

$$W(t)=[X(t)+|X(t)|]/2$$



$$F_W(w)=\begin{cases}0 & w<0\\ 1/2 & w=0\\ F_X(w) & w>0\end{cases}$$

变换函数为一常数，分布函数在该常数处有一跳变。

$$f_W(w)=\frac{1}{2}\delta(w)+f_X(w)U(w)$$

4.1非线性变换的直接分析法

$$E[W(t)] = \frac{1}{2}E[X(t)] + \frac{1}{2}E[|X(t)|] = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$R_W(\tau) = E[W(t+\tau)W(t)] = ?$$

4.2 非线性系统分析的变换法

4.2.1 变换法的基本公式

特征函数：

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)dx$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega)e^{-j\omega x}dx$$

$$\Phi_X(\omega_1, \omega_1, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2} f_X(x_1, x_2, \tau)dx_1 dx_2$$

$$f_X(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2}\Phi_X(\omega_1, \omega_2, \tau)d\omega_1 d\omega_2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

如果h(t)满足绝对可积条件，

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-j\omega x}dx \qquad h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

如果h(t)不满足绝对可积条件，可用拉普拉斯变换

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-sx}dx$$

$$h(x)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty}H(s)e^{sx}ds$$

λ为常数

4.2 非线性系统分析的变换法

$$R_Y(\tau) = E\{h[X(t+\tau)]h[X(t)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_1x_1-\omega_2x_2}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)d\omega_1d\omega_2dx_1dx_2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)e^{-j\omega_1x_1-\omega_2x_2}dx_1dx_2}_{H(\omega_1)H(\omega_2)}d\omega_1d\omega_2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\omega_1,\tau)H(\omega_1)H(\omega_2)d\omega_1 d\omega_2$$

或用拉氏变换表示：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{(2\pi j)^2}\int_D\int_D\Phi_X(s_1,s_2,\tau)H(s_1)H(s_2)ds_1 ds_2$$

4.2.2 Price定理

定理 假定输入为零均值平稳正态随机过程，输出过程为Y(t)=h[X(t)],则输出的自相关函数满足下列关系：

$$\frac{d^{(k)}R_Y(\tau)}{dR_X^{(k)}(\tau)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h^{(k)}(x_1)h^{(k)}(x_2)f_X(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

$$=E[h^{(k)}(X_1)h^{(k)}(X_2)]$$

其中，

$$h^{(k)}(X_1)=\frac{d^{(k)}h(X_i)}{dX_i^k}\qquad i=1,2$$

4.2 非线性系统分析的变换法

常用检波器的自相关函数总结

平方律检波器

$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

全波线性检波器

$$R_Z(\tau)=\frac{2\sigma^2}{\pi}(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha)$$

半波线性检波器的自相关函数

$$R_W(\tau)=\frac{\sigma^2}{2\pi}(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{1}{4}R_X(\tau)$$

理想硬限幅器的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\frac{2\alpha}{\pi}=\frac{2}{\pi}\arcsin(R_X(\tau)/R_X(0))$$

4.3 非线性系统分析的级数展开法

无论是直接法还是变换法都会遇到复杂的积分问题，稍微复杂的非线性系统就可能使积分求解变得复杂。在实际中，我们通常采用级数展开法，这种方法把变换函数用台劳级数展开。

4.3 非线性系统分析的级数展开法

假定变换函数y=h(x)可以在x=0处用台劳级数展开为

$$y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

其中， $$a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k h(x)}{dx^k}$$

$$E[Y(t)] = E\{h[X(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...] f_X(x) dx$$

$$= a_0 + a_1 E[X(t)] + a_2 E[X^2(t)] + ...$$

$$= a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + ...$$

其中， $m_k = E[X^k(t)]$

4.3 非线性系统分析的级数展开法

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t+\tau)Y(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1)h(x_2)f_X(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_2^j f_X(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k a_j \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^j f_X(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k a_j E[X^k(t+\tau)X^j(t)]$$