复 习

1.4 多维随机变量及其分布

二维分布函数和概率密度

设（X，Y）为二维随机变量，x，y为实数，定义

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

为二维随机变量的分布函数。

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

概率密度的全概率公式和**Bayes**公式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x\mid A_i)P(A_i)$$ **概率密度的全概率公式**

$$f(x\mid A)=\frac{P(A\mid X=x)f(x)}{P(A)}=\frac{P(A\mid X=x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A\mid X=x)f(x)dx}$$

1.5 随机变量的数字特征

均值、方差、协方差/相关系数、矩

特别强调了不相关和独立之间的关系。

注意：

（1）独立则不相关，不相关不能推导出独立，除非是联合正态分布；

（2）不相关只是线性不相关，而这并不意味它们之间没有关系；

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

1.6 随机变量的函数（重点！）

随机变量函数的概率密度

多个随机变量的函数

随机变量函数的数字特征

$$f_Y(y) = f_X(x_1)\left|J_1\right| + \cdots + f_X(x_n)\left|J_n\right|$$

$$P_Y(y_i) = P_X(x_i) = P_X(g^{-1}(y_i)) \qquad i = 1,2$$

$$P_Y(y_3) = P_X(x_3) + P_X(x_4) = P_X(g_1^{-1}(y_3)) + P_X(g_2^{-1}(y_3))$$

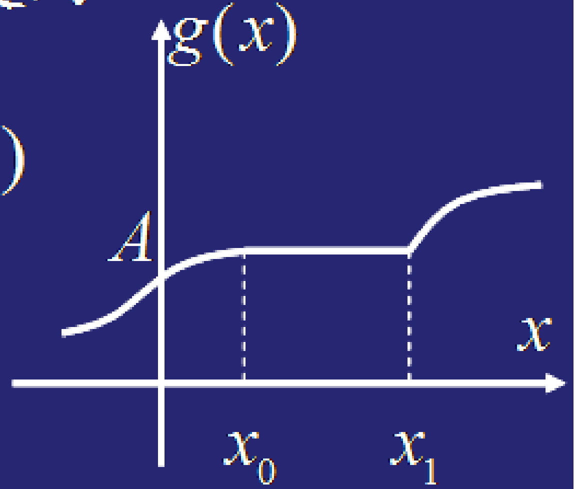
$$Y = g(X) = A \qquad x_0 < x \le x_1$$

则$f_Y(y)$在y=A处有一δ函数，δ函数的强度为

$$P(x_0 < X \le x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$$

$F_Y(y)$在y=A处不连续, 跳变点跳变高度为

$$P(x_0 < X \le x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$$



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

均值：

离散型 $E\{g(X)\}=\sum_i g(x_i)P_X(x_i)$

连续型 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$

方差：

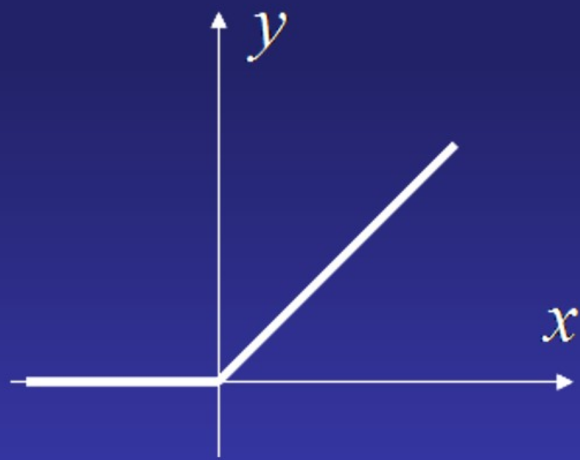
$$D(Y)=E\{[g(X)-E(g(X))]^2\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)-m_Y]^2 f_X(x)dx$$

上次的课堂题目与课后习题1.6

假定高斯随机变量通过一个半波线性检波，

$$y = g(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

Y的概率密度为？

第2章　随机过程

本章是本课程的基础和核心

第2章　随机过程

本章学习要点:

- 要注意对基本概念的理解
- 注意运用随机变量的理论
- 通过习题掌握统计特性的计算方法
- 重视脉冲型随机过程的学习（难点）
- 掌握平稳随机过程相关函数与功率谱的特性
- 注意运用MATLAB建立随机过程直观的印象

第2章　随机过程

习题:

2.3　　2.4

布置一道matlab题，可以不交，但建议做，考试也有可能写程序代码的。

离散型随机变量：

E：抛一枚硬币，观察正面H和反面T出现的情况

S= {H，T}

$$X=\begin{cases}0 & e=T\\1 & e=H\end{cases}$$

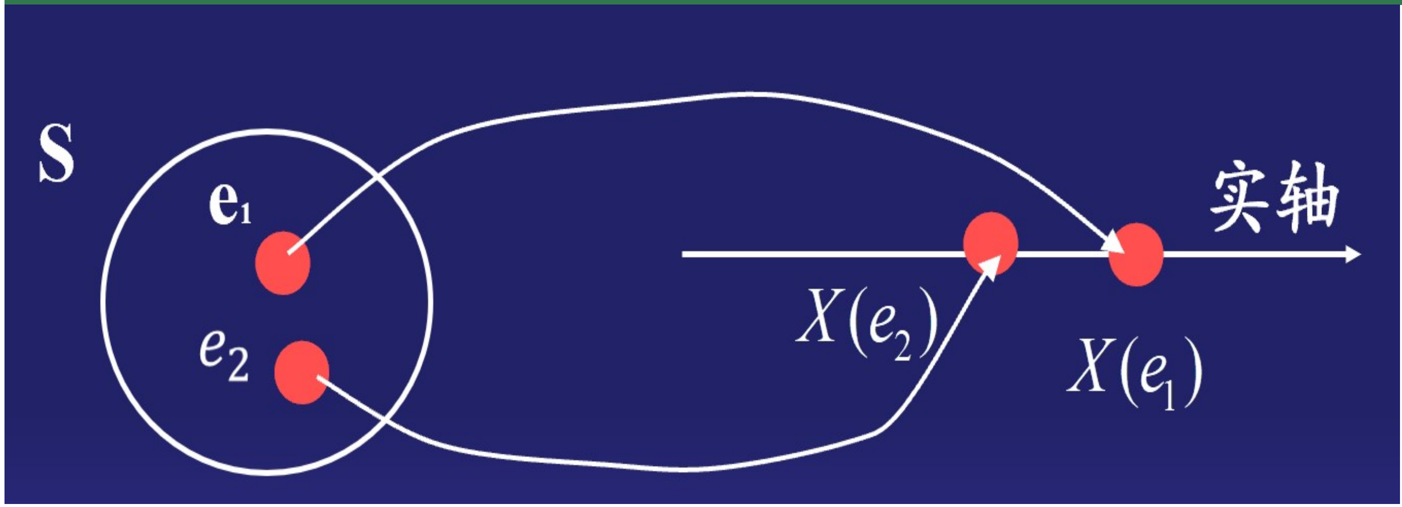
连续型随机变量：

E：任意抽取一枚灯泡，测试其寿命

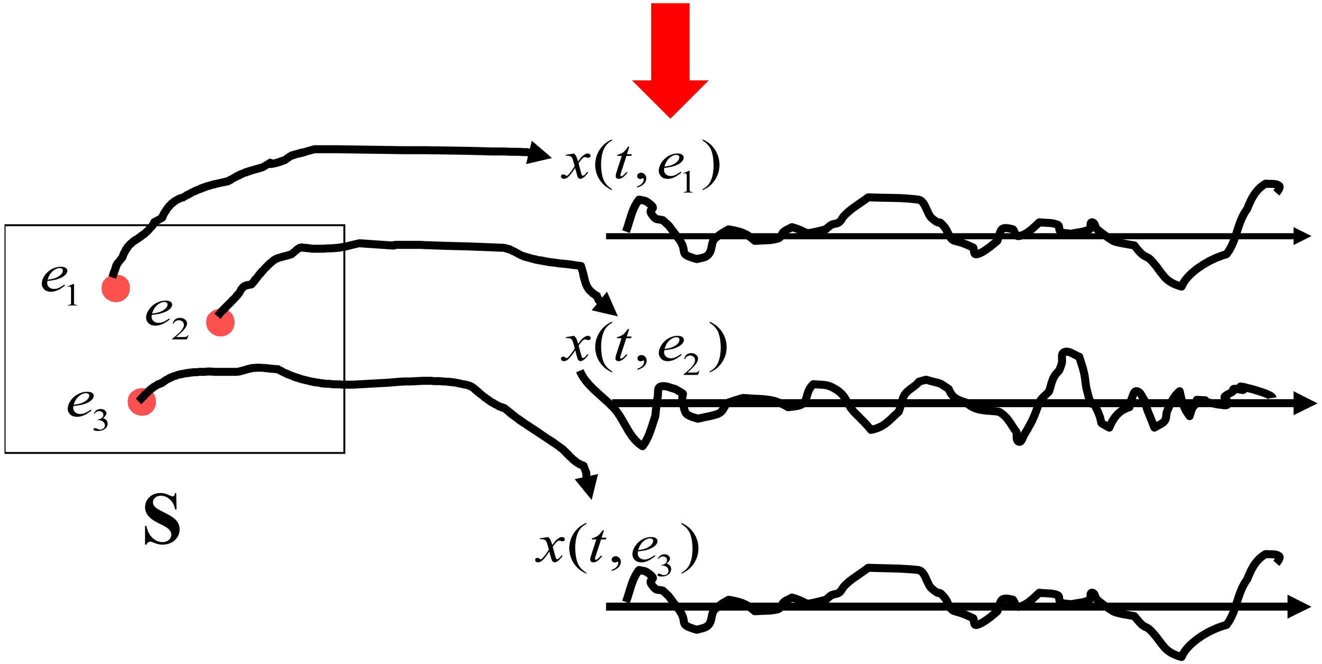
S= {t | t>0}

X~N(10000,100)

2.1随机过程的基本概念及定义



随机变量，静态，e的函数



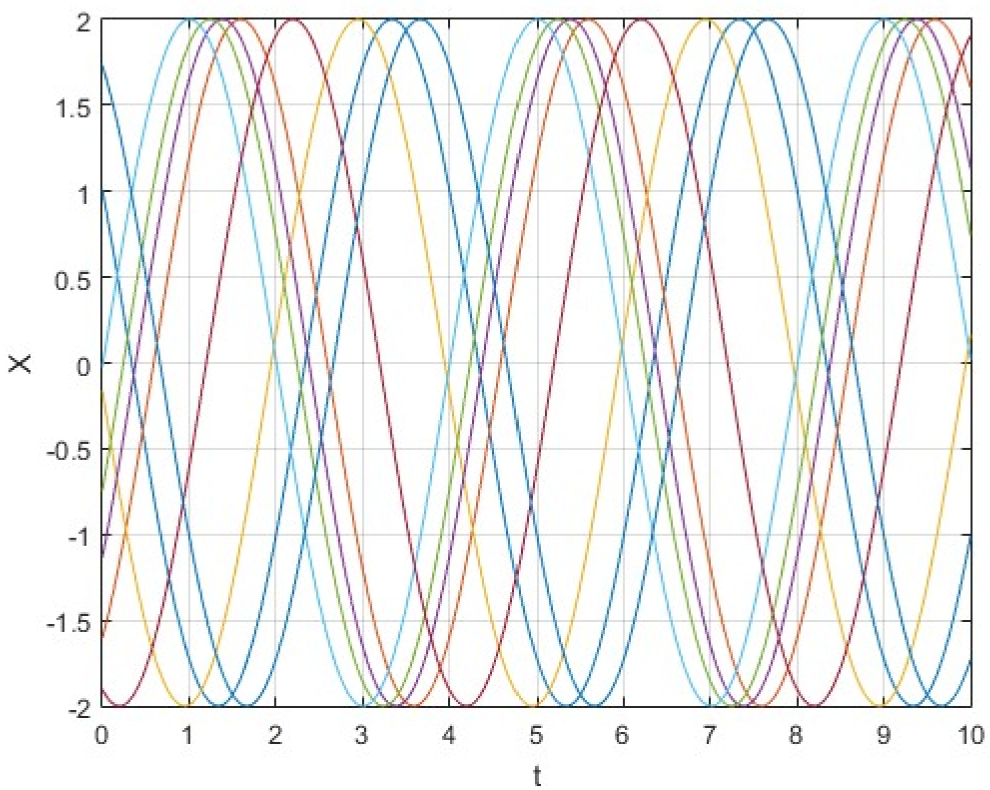
随机过程，动态，（e，t）的二维函数

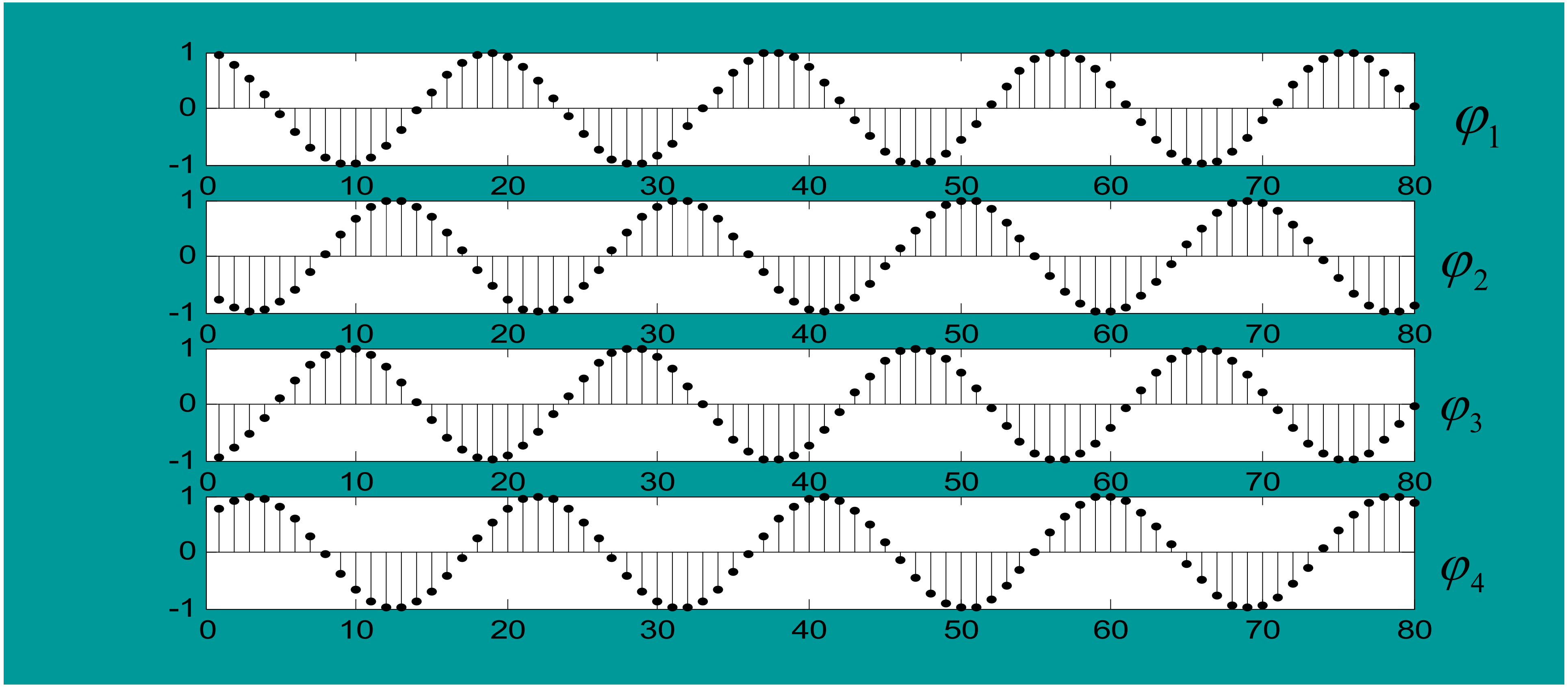
2.1随机过程的基本概念及定义

例2.1 分析随机相位信号

$$X(n) = A\cos(\omega_0 n + \Phi)$$

其中，ϕ 为$[0,2\pi]$均匀分布随机变量





横看： 由于初始相位 Φ 是随机变量，对于它的任意一个样本值 φ_i

$$x_i(n,\varphi_i) = A\cos(\omega_0 n + \varphi_i)$$

样本函数，时间n的函数

随机相位信号= $\left\{x_i(n,\varphi_i) = A\cos(\omega_0 n + \varphi_i),\quad \varphi_i \in \Phi\right\}$

随机相位信号 — 样本函数的集合

2.1随机过程的基本概念及定义

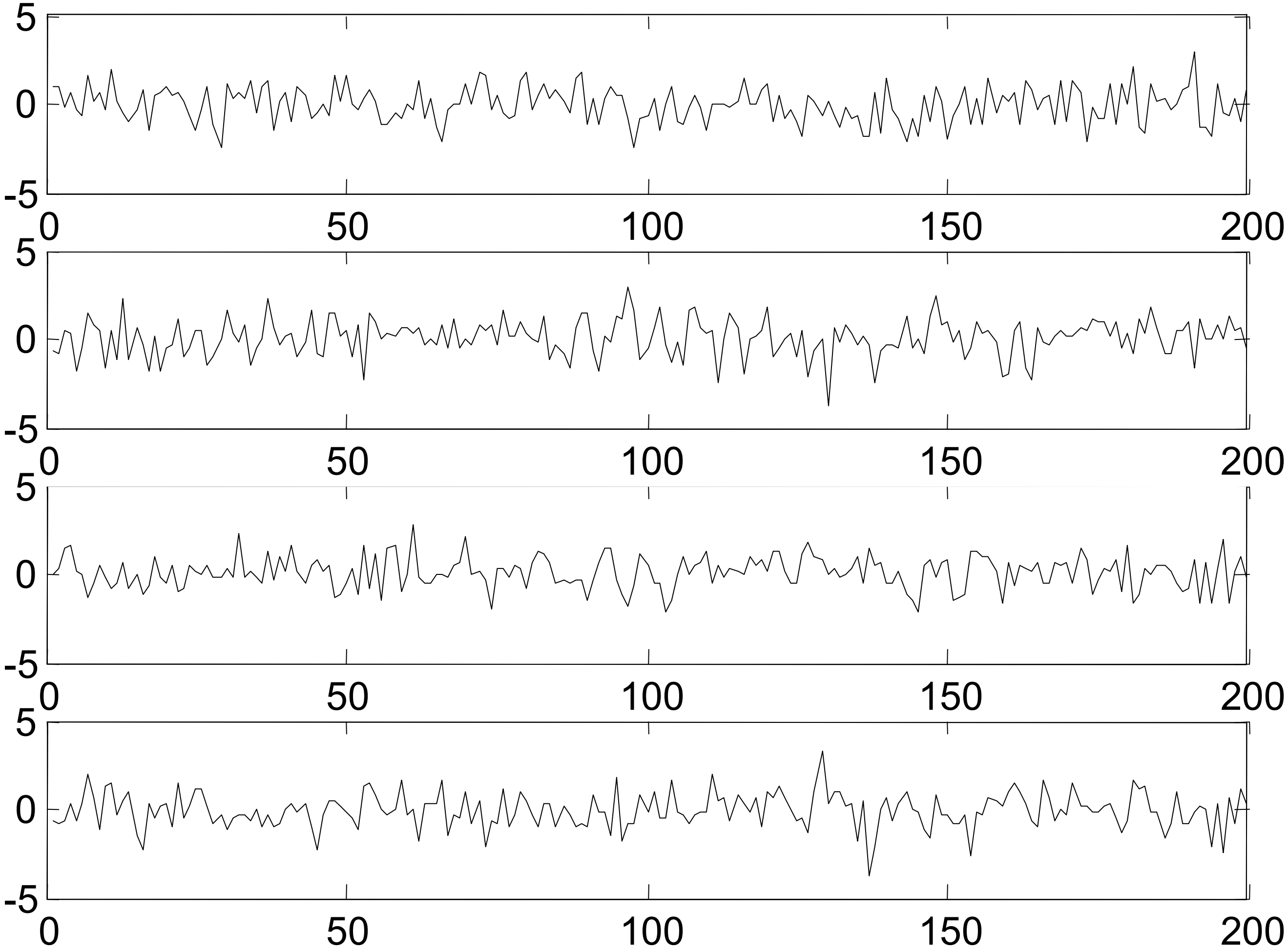
竖看:

固定某个时刻ti，得到一个随机变量，是样本e的函数，其取值分布在[-1,1]

随机相位信号 — 随机变量的集合

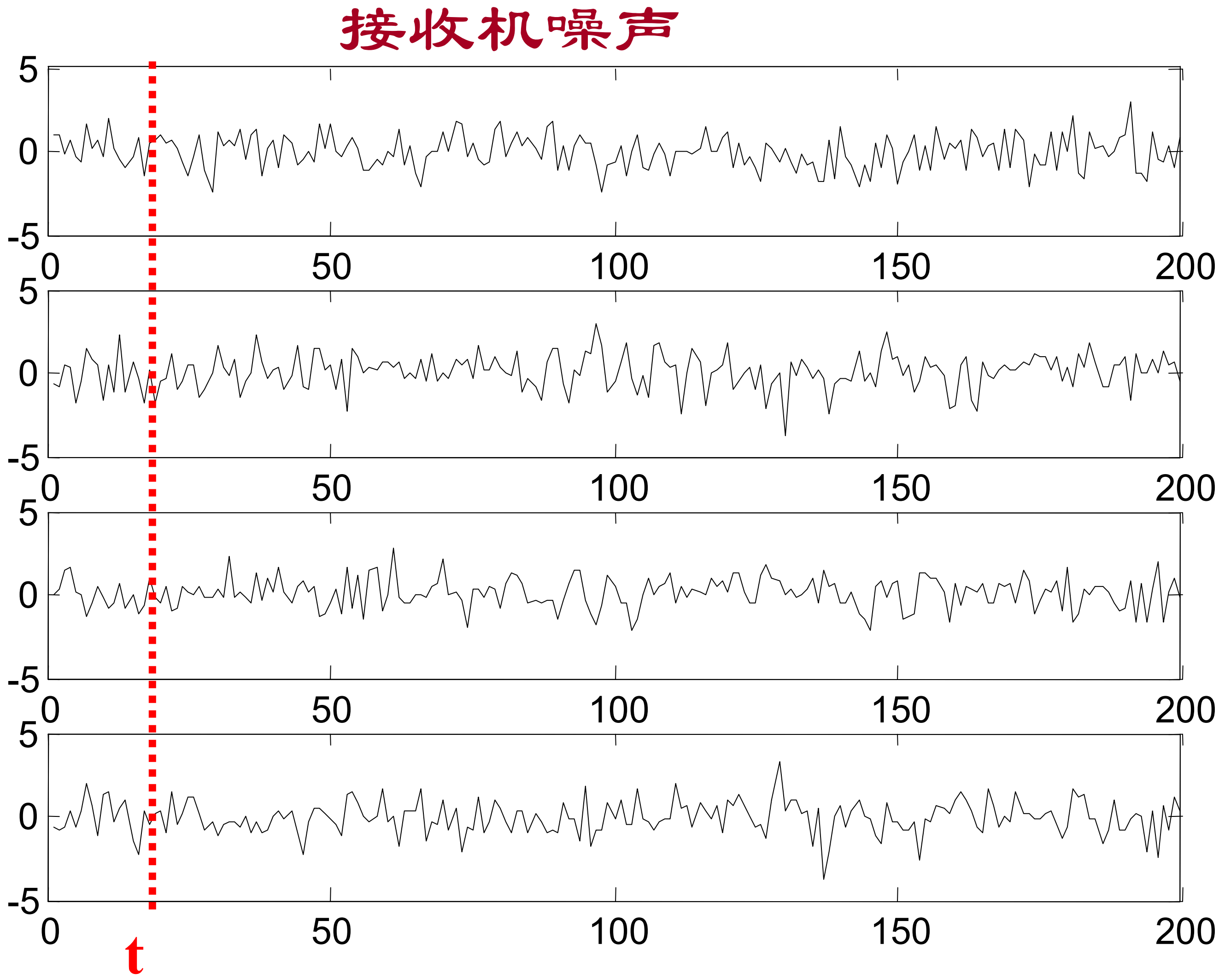
2.1随机过程的基本概念及定义

例2.2 接收机噪声



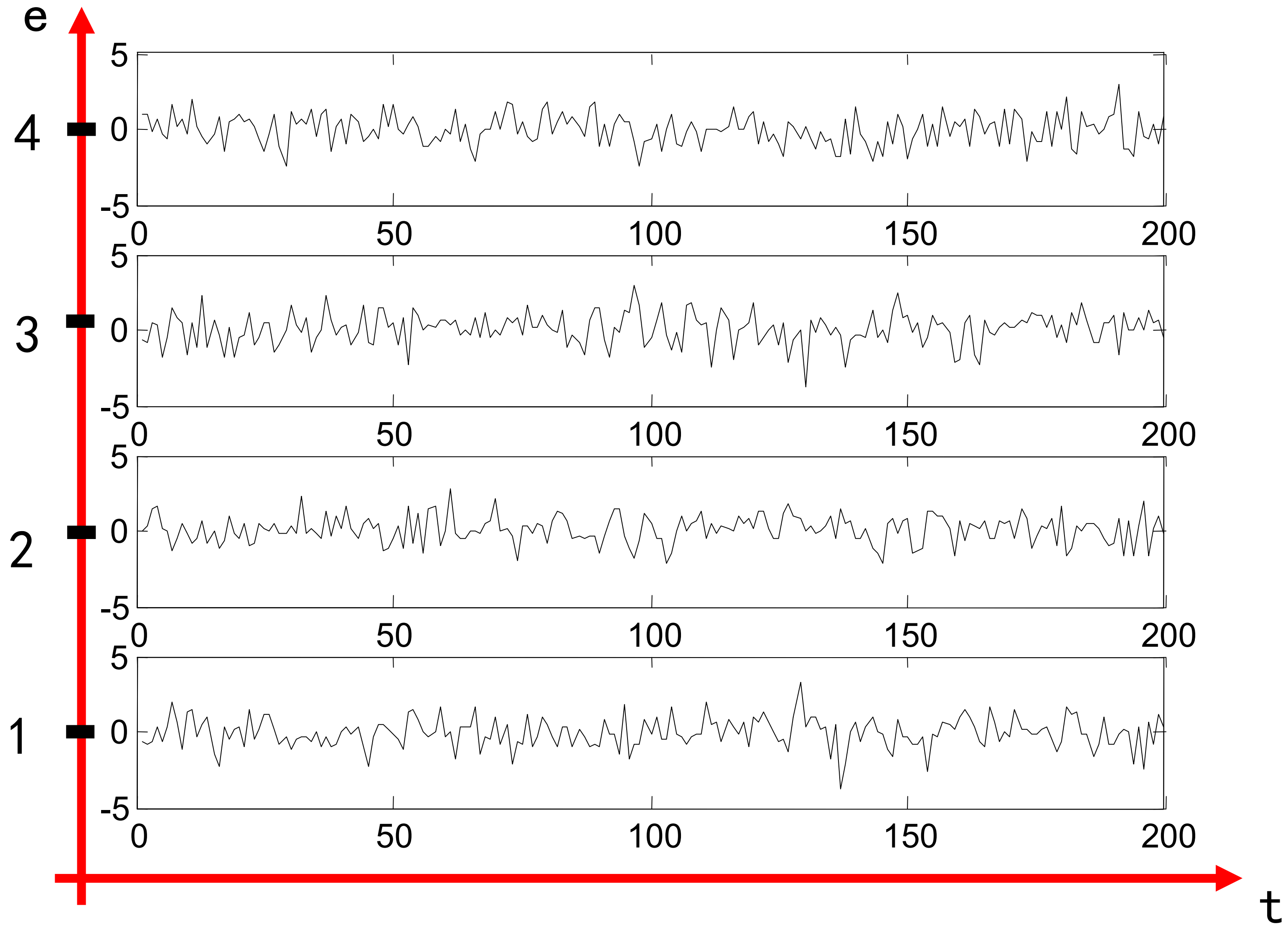
一簇样本函数的集合。

2.1随机过程的基本概念及定义



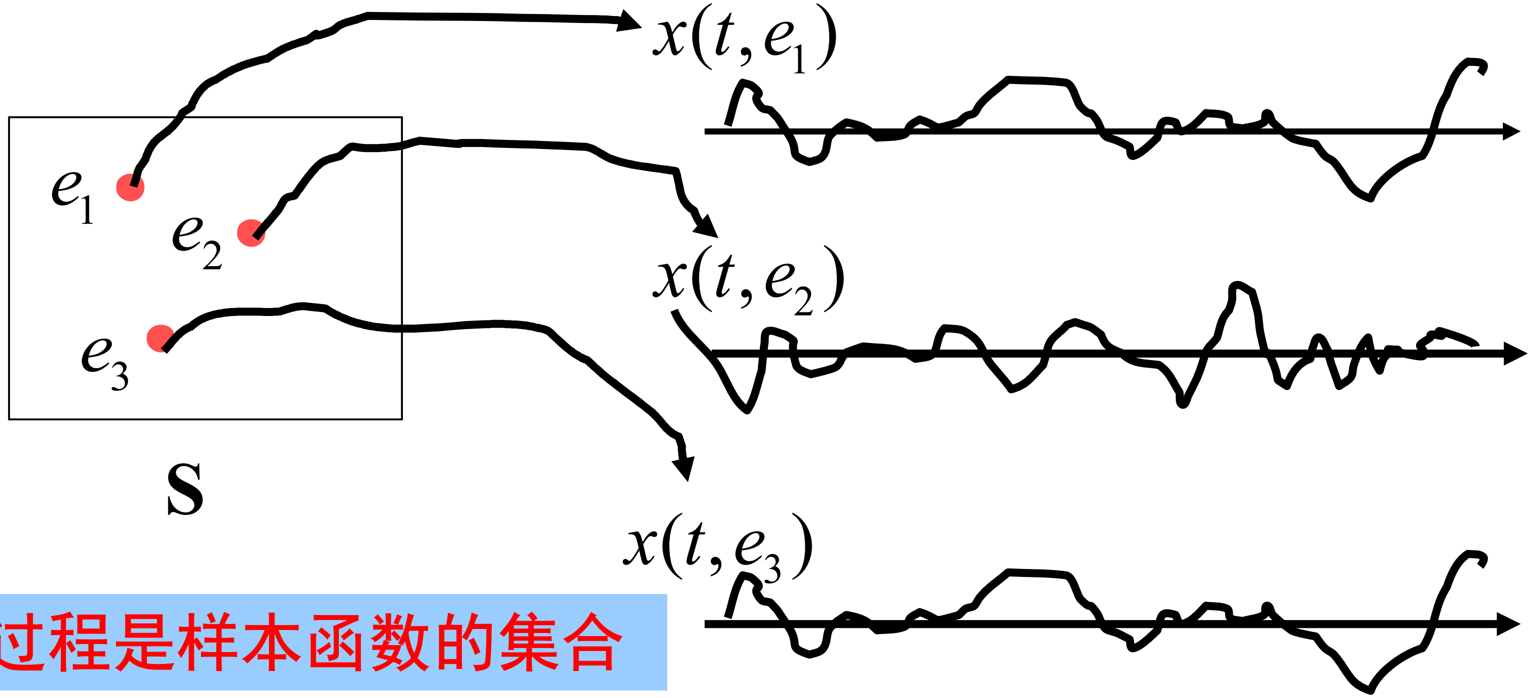
随着时间t而改变的随机变量

2.1随机过程的基本概念及定义



1、随机过程(Stochastic Process)定义

定义1：设随机试验E的样本空间为S={e}，对其每一个元素 $e_i\,(i=1,2,\ldots)$ 都以某种法则确定一个样本函数 $x(t,e_i)$, 由全部元素{e}所确定的一族样本函数 $X(t,e)$ 称为随机过程, 简记为 $X(t)$。



随机过程是样本函数的集合

定义2：设有一个过程 $X(t)$，若对于每一个固定的时刻 $t_j(j=1,2,...)$，$X(t_j)$是一个随机变量，则$X(t)$称为随机过程。

随机过程是随机变量的集合

上述二种定义实质上是一致的，相互起补充作用，在作实际观测时，通常采用定义1，据此定义，用试验方法观测各个样本函数，观测次数越多，所得到的样本数目亦越多，也就越能掌握这个过程的统计规律。在进行理论分析时，通常采用定义2，把随机过程看作为多维随机变量的推广，时间分割越细，维数越大，对过程的统计描述也越全面，并且可以把概率论中多维随机变量的理论作为随机过程分析的理论基础。

2.1随机过程的基本概念及定义

随机过程X(t,e)四种不同情况下的意义：
(注意书写的规范性)

- 当e固定（e_i），t固定（t_j）时， X（t） 是一个确定值$x_i(t_j)$；

- 当e可变，t固定（t_j）时， X（t） 是一个随机变量，$X(t_j)$；

- 当e固定（e_i），t可变，时，X（t） 是一个确定的时间函数（样本函数）$x_i(t)$，或者$x(t)$；

- 当t可变，e可变时， X（t） 是一个随机过程$X(t,e)$，或者$X\ (t)$；

说明：上述两个例子中，第一个例子，当样本e取定后，即随机相位取定后，是可以预测后续取值的，第二个例子，即使样本e取定后，还是不可以预测后续取值的。

把随机过程可以进一步细分为：不可预测（随机）过程，可预测（随机）过程。

注意区分“确定的”，“不可预测的”两者的区别！

2.1随机过程的基本概念及定义

2、随机过程分类

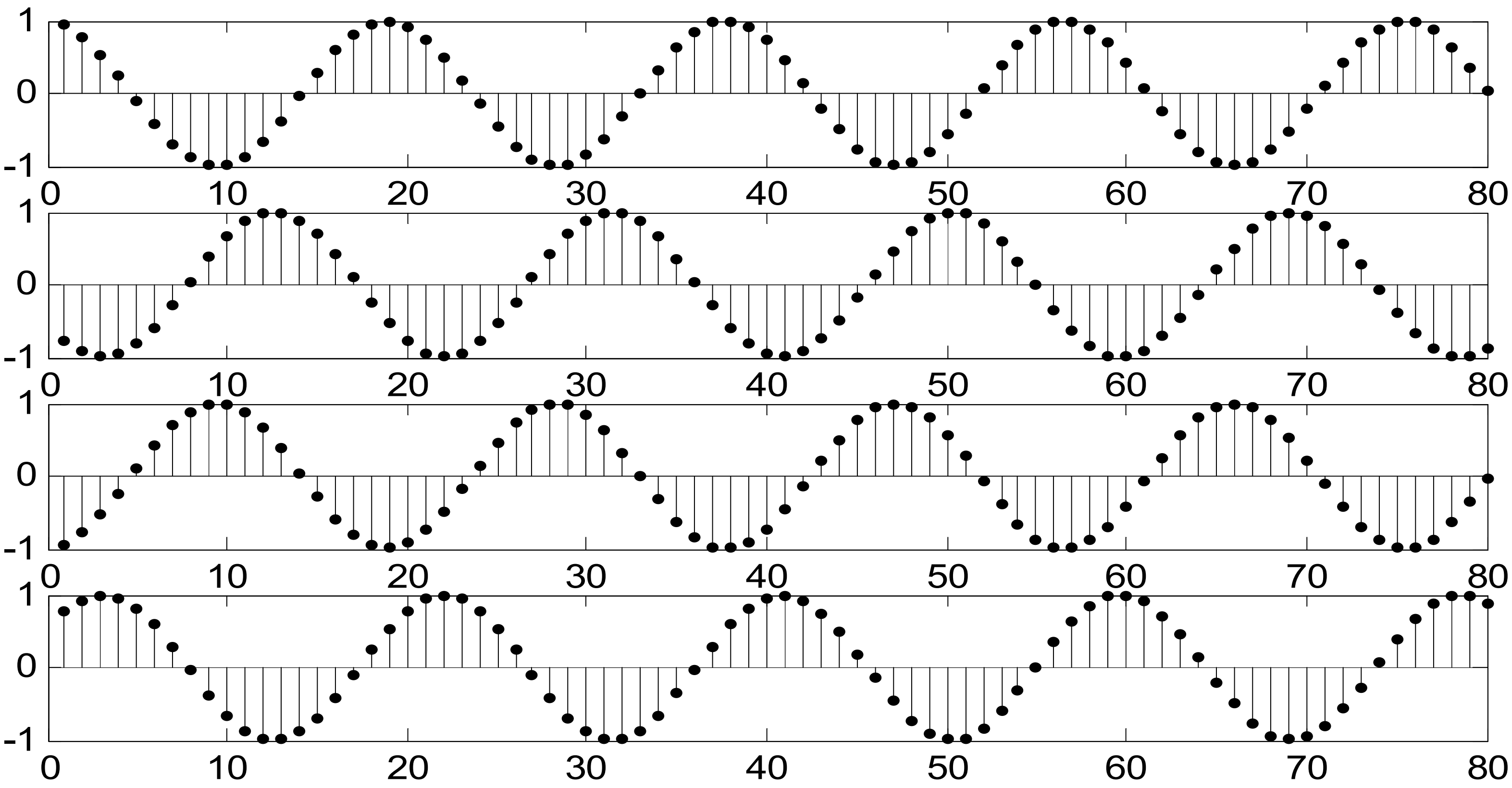
	状态	时刻
连续型随机过程	连续	连续
连续随机序列	连续	离散
离散型随机过程	离散	连续
离散随机序列	离散	离散

2、随机过程分类

●按随机过程的样本函数的形式分：

	特　点
不可预测的随机过程	任意样本函数的未来值不能由过去的观测值准确地预测
可预测的随机过程	任意样本函数的未来值能由过去的观测值准确地预测

2.1随机过程的基本概念及定义



$$X(n) = A\cos(\omega_0 n + \Phi) \qquad x_i(n,\varphi_i) = A\cos(\omega_0 n + \varphi_i)$$

随机相位信号

2.1随机过程的基本概念及定义

2、随机过程分类

- 按随机过程有无平稳性分：

  平稳随机过程、非平稳随机过程；

- 按随机过程有无遍历分：

  遍历随机过程、非遍历随机过程；

- 按随机过程功率谱特性分：

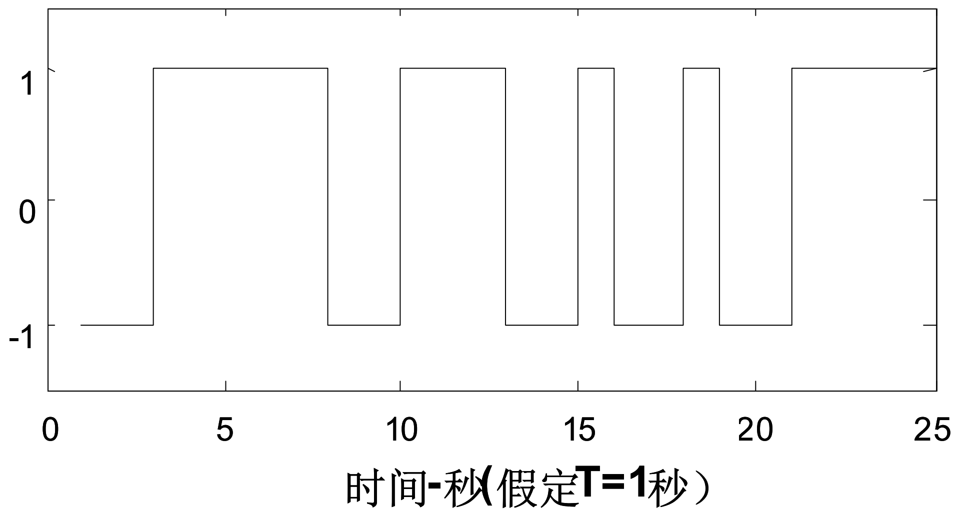
  宽带随机过程、窄带随机过程；

半二元传输信号

用无数次投掷硬币的随机试验来定义一个随机过程X(t)，

$$X(t)=\begin{cases}-1 & \text{第}n\text{次投出正面}\\ 1 & \text{第}n\text{次投出反面}\end{cases}\qquad (n-1)T\le t<T$$

X(t)称为半二元传输信号。

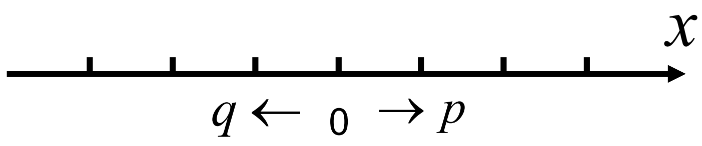


半随机二元传输信号

随机游动

设一质点在x轴上随机游动，质点在t=0时刻处于x轴的原点，在t=1,2,3…质点向正向(概率为p)或反向移动(概率为q=1-p)一个距离单元，设X(n)示质点在t=n时刻与原点的距离，如果X(n-1)=k，那么

$$X(n)=\begin{cases} k+1 & \text{质点正向移动一个距离单元} \\ k-1 & \text{质点反向移动一个距离单元} \end{cases}$$

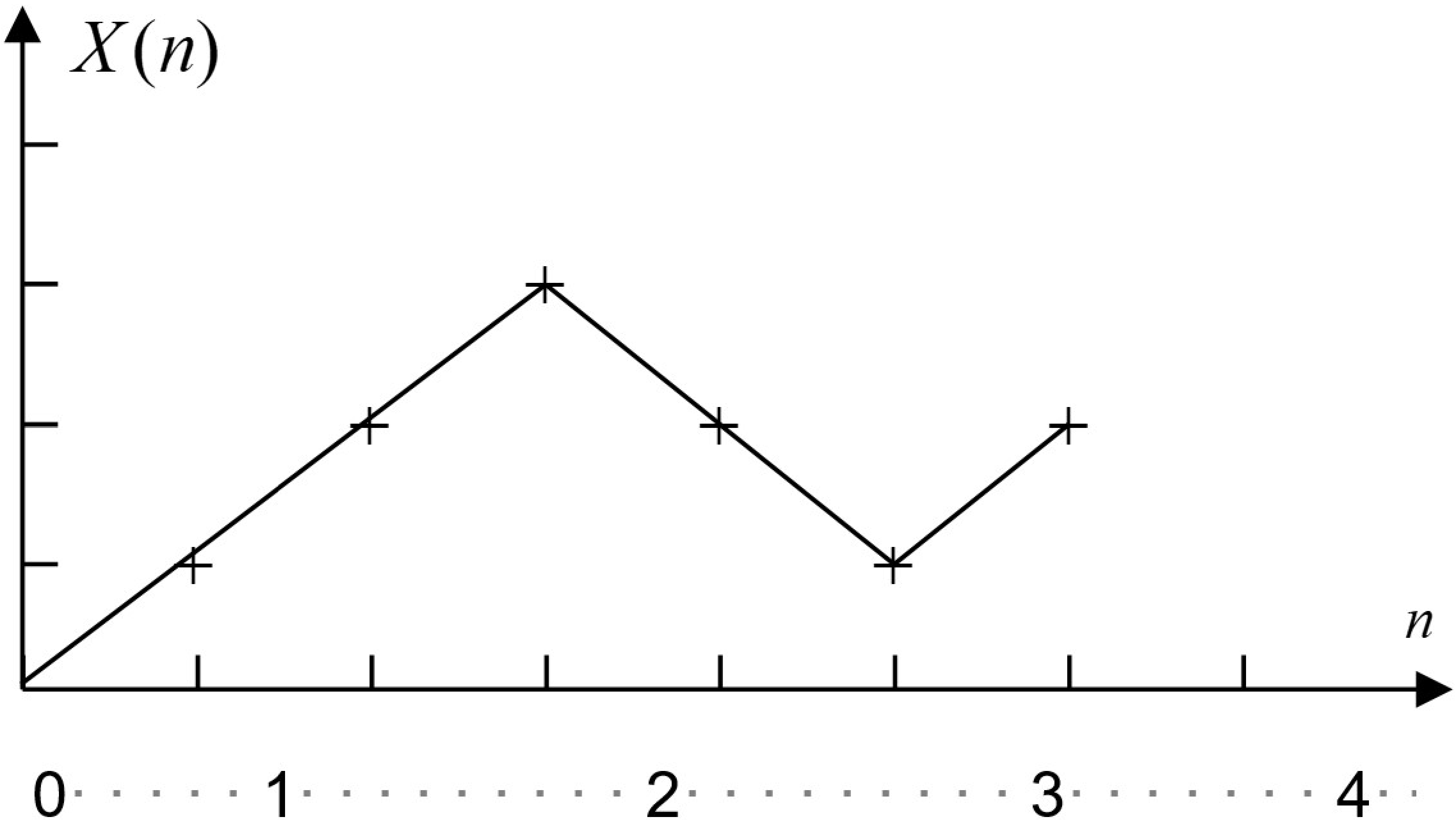


2.1随机过程的基本概念及定义

- 分子在液体或气体中的运动轨迹;
- 搜寻食物的动物的搜寻路径;
- 股票价格的变化
- 赌徒的财务状况
- ….

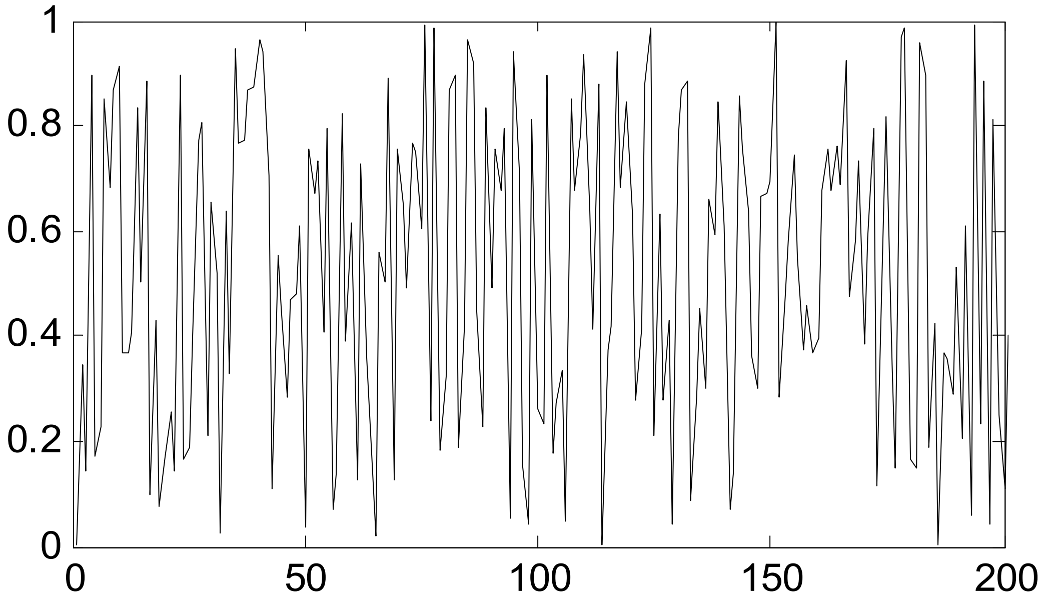
广泛应用于计算机、物理学、生态学、经济

随机游动



2.1随机过程的基本概念及定义

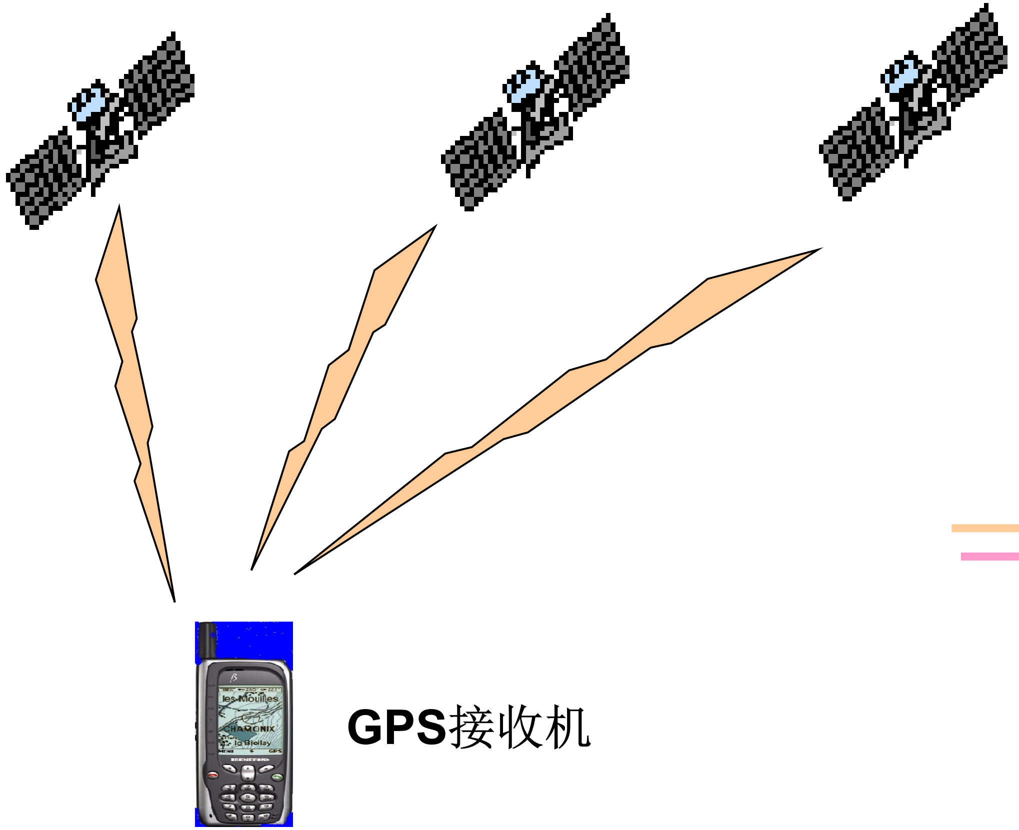
在实际中还有一类过程，它是按照确定的数学公式产生的时间序列，它是一个确定性的时间序列，但它的变化过程表现出随机序列的特征，我们把它称为伪随机序列，伪随机序列可以用来模拟自然界实际的随机过程 。

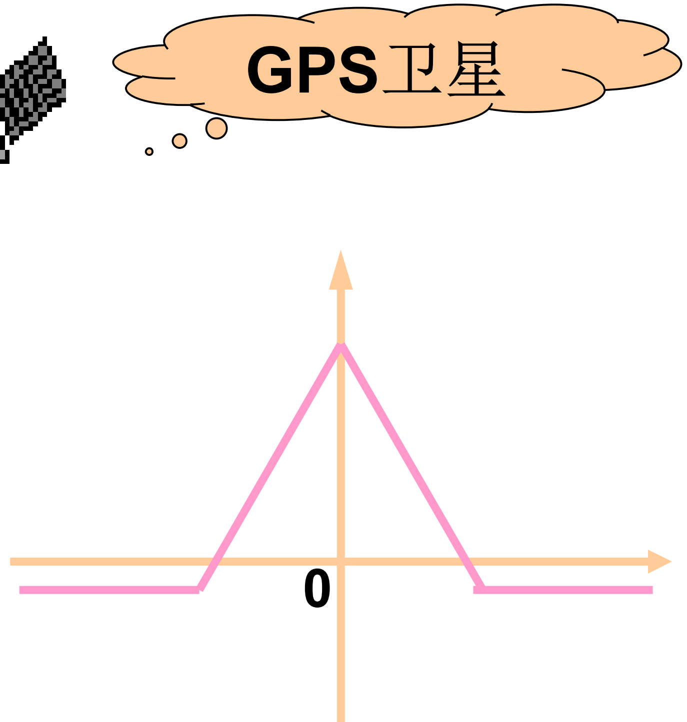


伪随机序列

2.1随机过程的基本概念及定义

伪随机序列应用举例





伪随机码自相关函数

2.2随机过程的统计描述

随机过程实际上是一组随时间变化的随机变量，因此我们可以用多维随机变量的理论来描述随机过程的统计特性。

- **概率分布与概率密度**

  一维分布、二维分布、N维分布

- **数字特征**

  均值、方差、相关函数

2.2随机过程的统计描述

一、随机过程的概率分布

1、一维概率分布

$$F_X(x,t)=P\{X(t)\le x\}$$

连续随机过程：

$$f_X(x,t)=\frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$

$$F_X(x,n)=P\{X(n)\le x\}$$

随机序列：

$$f_X(x,n)=\frac{\partial F_X(x,n)}{\partial x}$$

2.2随机过程的统计描述

例2.6 设随机振幅信号

$$X(t)=Y\cos\omega_0 t$$

其中ω_0是常数，**Y**是均值为零，方差为**1**的正态随机变量，求 $t=0,\dfrac{2\pi}{3\omega_0},\dfrac{\pi}{2\omega_0}$ 时**Y**的概率密度。

课堂阅读

2.2随机过程的统计描述

2、二维概率分布

$$F_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2\}$$

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

注意：**$X(t_1)$**及**$X(t_2)$**为同一随机过程上的随机变量。

2.2随机过程的统计描述

3、多维概率密度

同理，对于任意的时刻t_1，t_2，t_3,.... t_N， $X(t_1), X(t_2),\cdots X(t_N)$ 是一组随机变量，定义这组随机变量的联合分布为随机过程N维概率分布

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_N)\}$$

N维概率密度

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_N)=\frac{\partial^N F_X(x_1,x_2,\cdots x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_N}$$

2.2随机过程的统计描述

N维分布可以描述任意N个时刻状态之间的统计规律，比一维、二维含有更多的的统计信息，对随机过程的描述也更趋完善，一般说来，要完全描述一个过程的统计特性，应该使得$N \to \infty$，但实际上我们是无法获得随机过程的无穷维的概率分布的，在工程应用上，通常只考虑它的**二维概率分布**就够了。

2.2随机过程的统计描述

例**2.7** 设随机相位信号

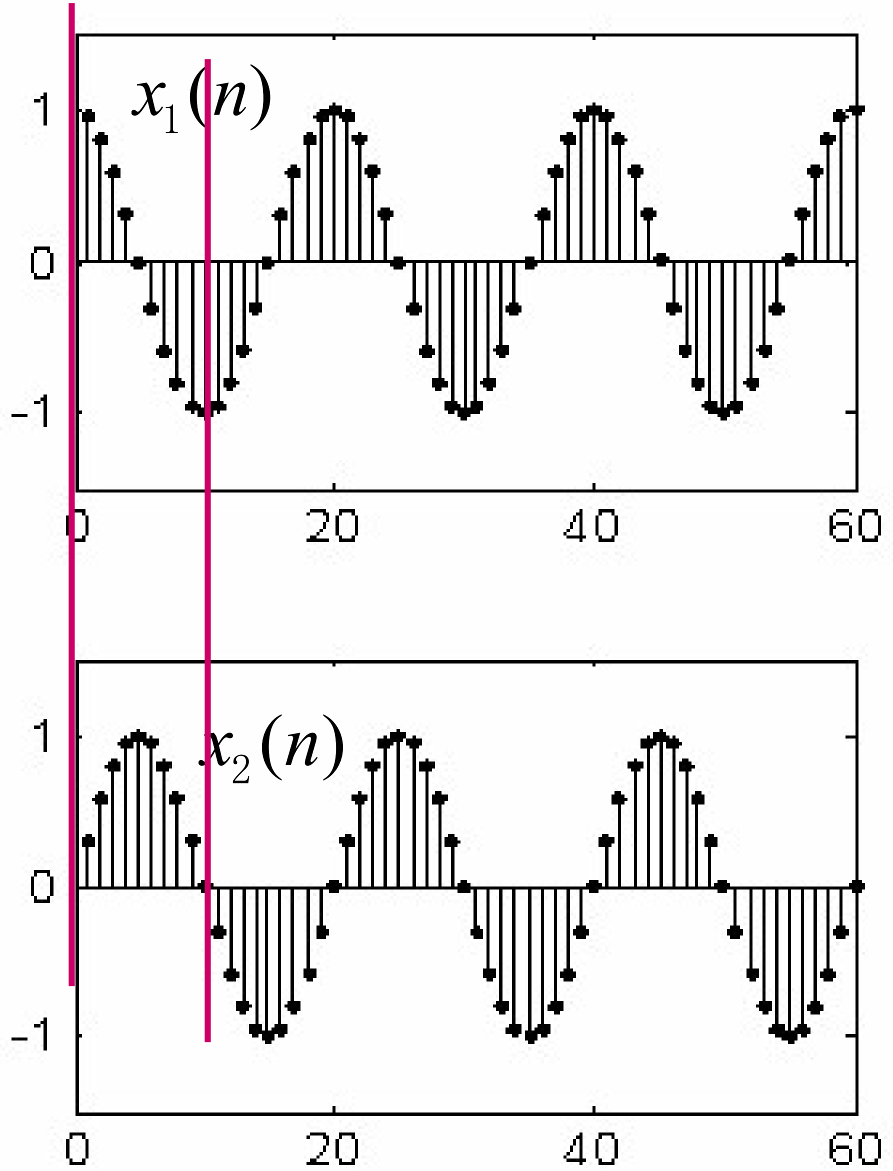
$$X(n)=\cos(\pi n/10+\Phi)$$

其中 $\Phi=\{0,-\pi/2)$ ，且取值概率各为**1/2,** 求 $n_1=0$ ，$n_2=10$ 时的一维和二维概率分布。

解答：本题的随机过程只有两个样本函数，且两个样本函数都具有确定的形式，是一种可预测的随机过程。它的两个样本函数为

$$x_1(n)=\cos(\pi n/10) \qquad x_2(n)=\cos(\pi n/10-\pi/2)$$

2.2随机过程的统计描述



这个过程在任意的时刻都只有两个可能的取值，所以它是一个离散型随机过程.

对于离散型随机过程，只要确定了它的概率分布列就可以确定它的概率密度（一串冲激函数）.

2.2随机过程的统计描述

当 $n_1=0$ 时，$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$，即 $X(0)$ 的取值为 1 或 0，

而当 $n_2=10$ 时，$X(10)$ 的取值为-1 或 0。

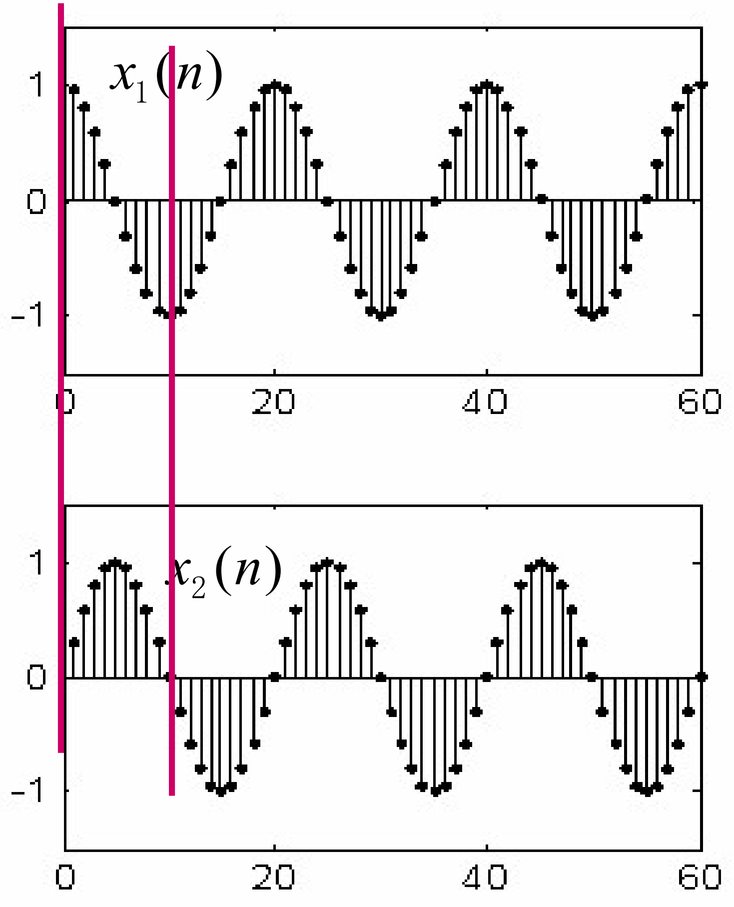


表 2.1(a) X(0)的概率分布列

X(0)	1	0
$P(x_1, 0)$	1/2	1/2

表 2.1(b) X(10)的概率分布列

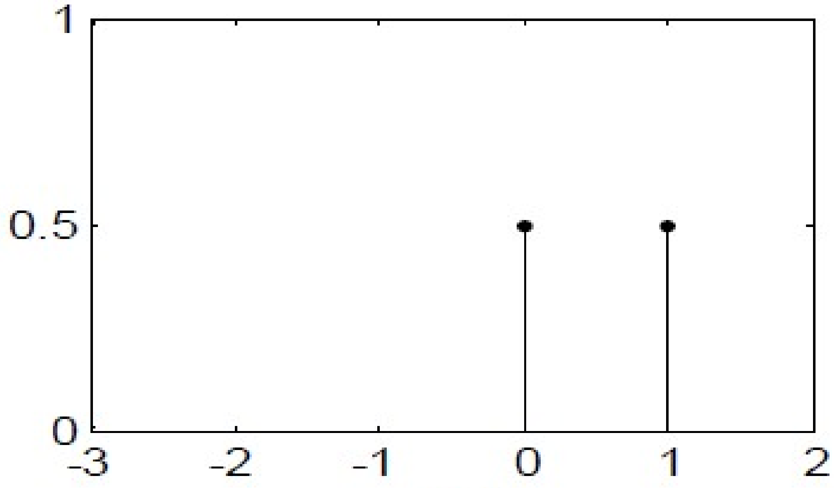
X(10)	−1	0
$P(x_2, 10)$	1/2	1/2

2.2随机过程的统计描述

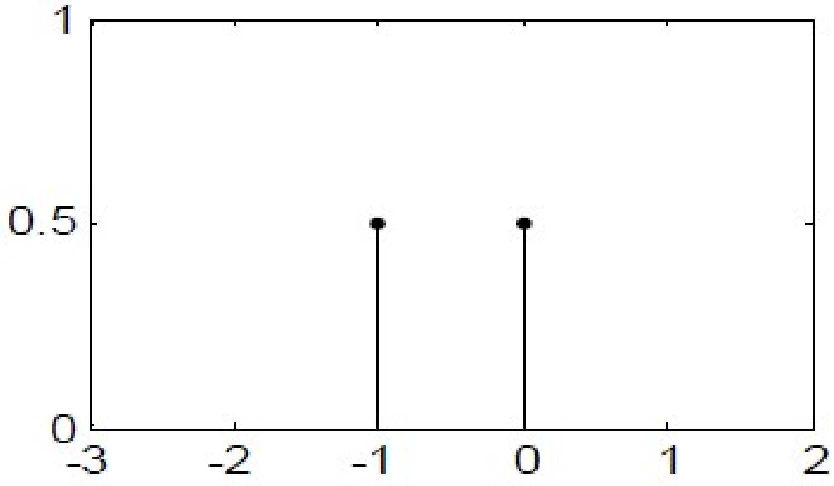
所以，一维概率密度为

$$f_X(x_1,0)=0.5\delta(x_1-1)+0.5\delta(x_1)$$

$$f_X(x_2,10)=0.5\delta(x_2+1)+0.5\delta(x_2)$$



(c)



(d)

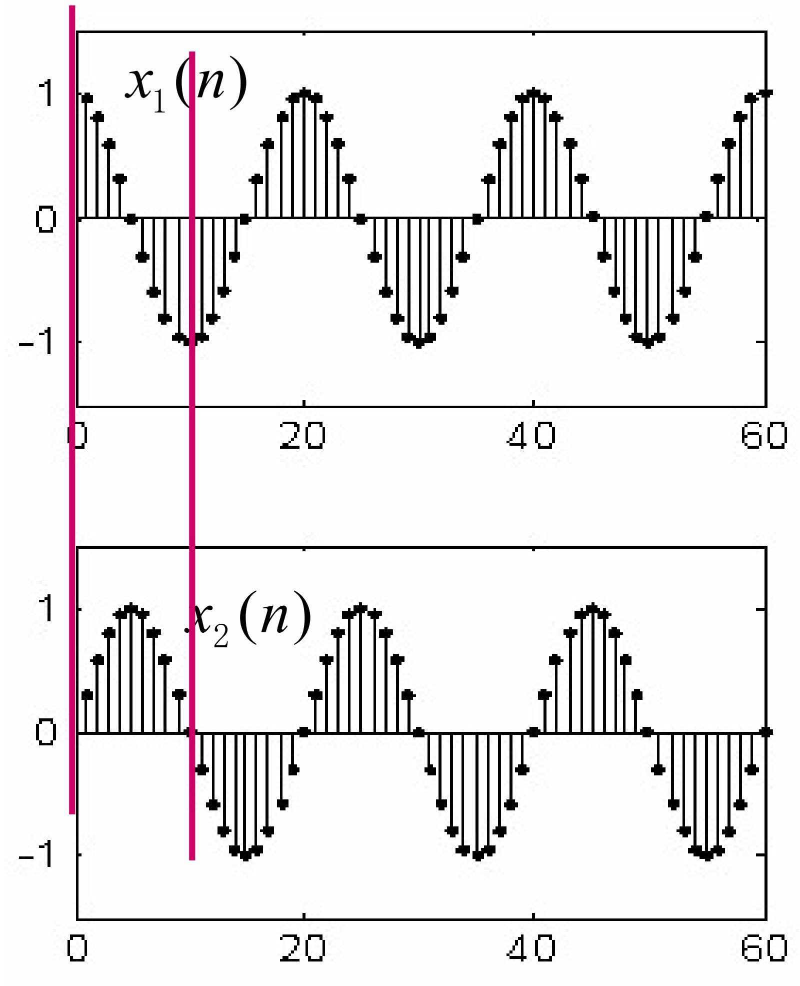
Go on，求二维概率密度

2.2随机过程的统计描述

$$P\{X(n_1)=1, X(n_2)=-1\} = P\{X(n_1)=1\}P\{X(n_2)=-1 \mid X(n_1)=1\}$$

$$=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$$

X(0) / P(x1,x2) / X(10)	1	0
-1	1/2	0
0	0	1/2



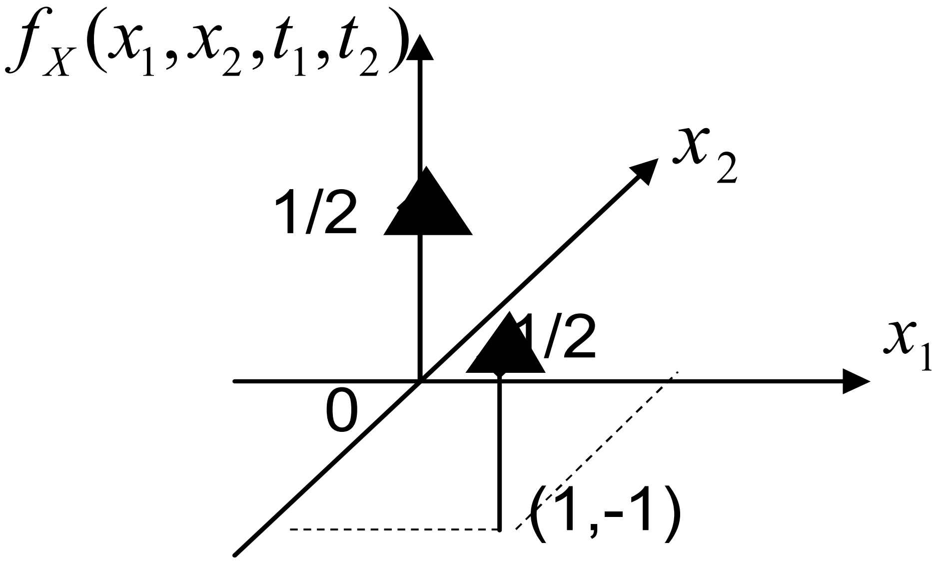
2.2随机过程的统计描述

$$P\{X(n_1)=1, X(n_2)=-1\}=1/2$$

$$P\{X(t_1)=0, X(t_2)=0\}=1/2$$

$$P\{X(t_2)=0, X(t_1)=1\}=0$$

$$P\{X(t_2)=-1, X(t_1)=0\}=0$$



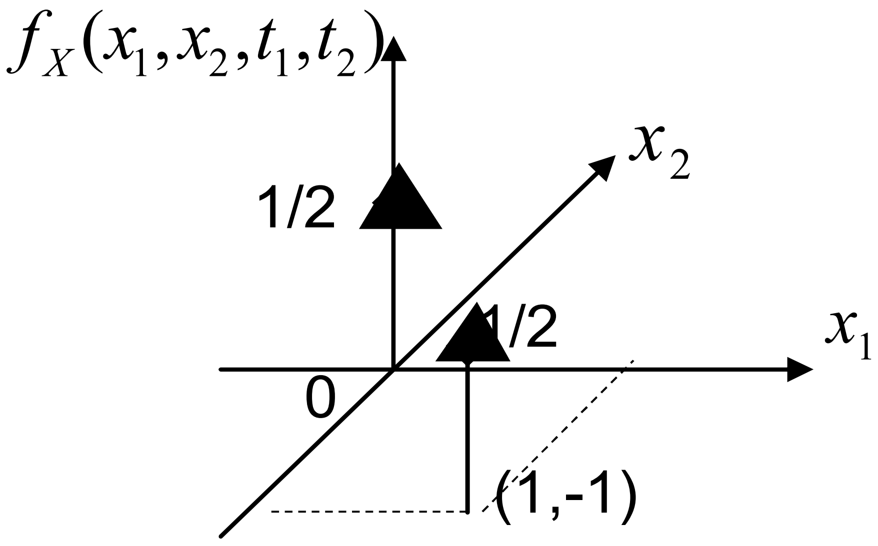
二维概率密度图

根据二维分布列可写出二维概率密度：

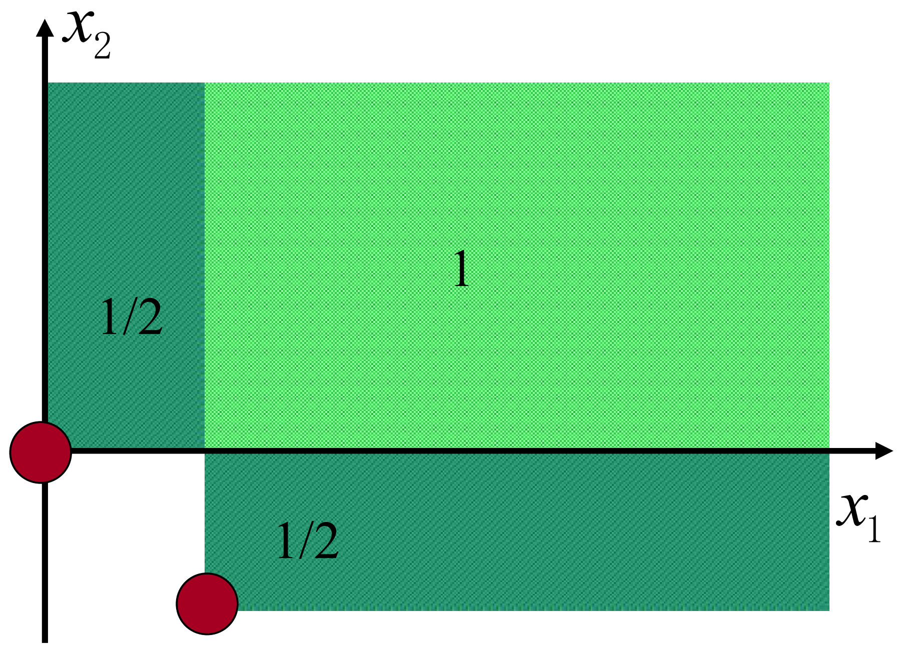
$$f_X(x_1,x_2,0,10)=0.5\delta(x_1-1,x_2+1)+0.5\delta(x_1,x_2)$$

二维概率分布

$$F_X(x_1,x_2,0,\frac{\pi}{\omega_0})=\sum_{\substack{x_1\\x_2}}P\{X(0)\le x_1,X(10)\le x_2\}$$



二维概率密度图



2.2随机过程的统计描述

二、随机过程的数字特征

• **均值** $$m_X(t)=E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x,t)dx$$

随机过程的均值是时间t的函数，也称为均值函数，统计均值是对随机过程中所有样本函数在时间t的所有取值进行概率加权平均，所以又称为集合平均。随机过程的均值可以直观地理解为在t时刻所有样本函数取值的一取值中心，它反映了样本函数统计意义下的平均变化规律。 $m_X(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)p_i(t)$

- 方差

$$\sigma_X^2(t)=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}$$

$$=E\{X^2(t)\}-m_X^2(t)$$

X(t)------单位电阻上的电压

$X^2(t)/1$------消耗在单位电阻上的瞬时功率

$[X(t)-m_x(t)]^2/1$------消耗在单位电阻上的瞬时交流功率

$E\{[X(t)-m_x(t)]^2/1\}$------消耗在单位电阻上的瞬交流功率的统计平均值

$$E\{X^2(t)\}=\sigma_X^2(t)+m_X^2(t)$$

表示消耗在单位电阻上的总的平均功率

平均交流功率

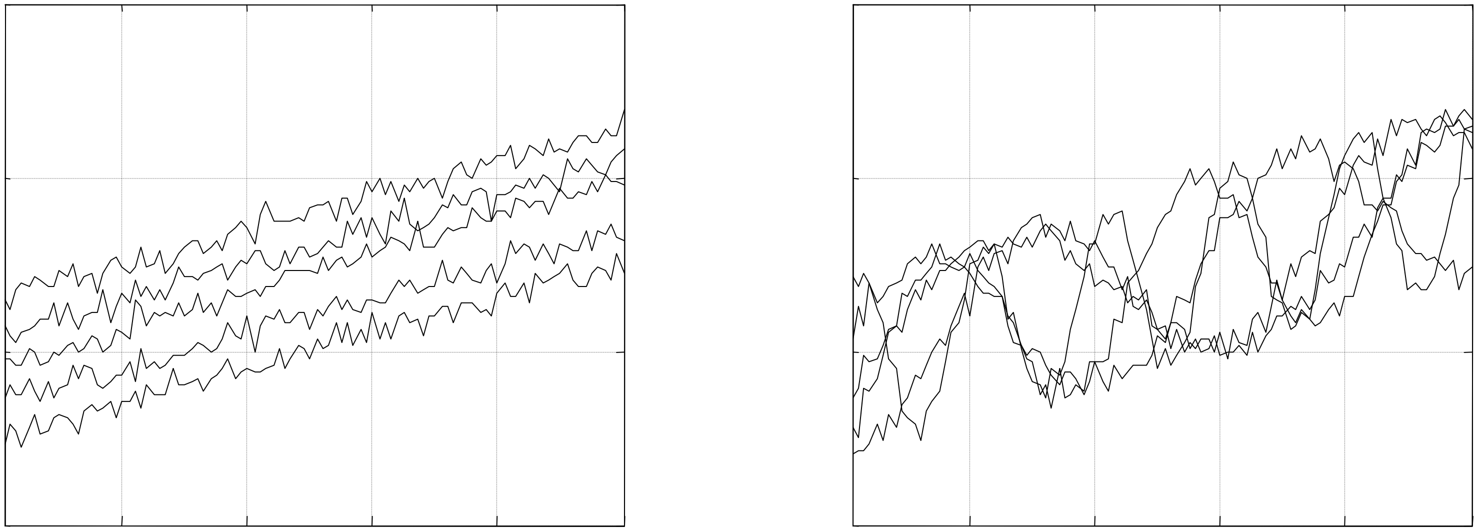
平均直流功率

2.2随机过程的统计描述

- 自相关函数(Autocorrelation function)

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

自相关函数反映了随机过程在两个不同的时刻取值的依赖性



相似均值和方差的随机过程

2.2随机过程的统计描述

自相关函数可正可负，其绝对值越大，表示（线性）相关性越强。一般说来，时间相隔越远，相关性越弱，自相关函数的绝对值也越弱，当两个时刻重合时，其相关性应是最强的，所以$R_X(t,t)$最大。

2.2随机过程的统计描述

- （自）协方差函数

$$K_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$

如果 $K_X(t_1,t_2)=0$，则称 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的。如果 $\boldsymbol{R_X}(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)=0$ ，则称 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是相互正交的。如果 $f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,t_1)f_X(x_2,t_2)$ ，则称随机过程在 t_1 和 t_2 时刻的状态是相互独立的。

2.2随机过程的统计描述

两随机过程的相互关系

1. 互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{XY}(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

2. 互协方差函数：

$$K_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

2.2随机过程的统计描述

两随机过程的相互关系：

- $$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')$$
  $$=f_X(x_1,\cdots,x_n,t_1\cdots,t_n)f_Y(y_1,\cdots,y_m,t_1',\cdots,t_m')$$
  X(t)与Y(t)独立；

- 若 $R_{XY}(t_1,t_2)=0$ ，则X(t)与Y(t)正交；

- 若 $K_{XY}(t_1,t_2)=0$ ，则X(t)与Y(t)不相关；

回忆对比随机变量的情况

2.2随机过程的统计描述

离散随机过程数字特征

$$m_X(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)p_i(t)$$

$$\sigma_X^2(t)=\sum_{i=1}^{N}[x_i(t)-m_X(t)]^2 p_i(t)$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_i(t_1)x_j(t_2)p_{ij}(t_1,t_2)$$

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[x_i(t_1)-m_X(t_1)][x_j(t_2)-m_X(t_2)]p_{ij}(t_1,t_2)$$

和

2.2随机过程的统计描述

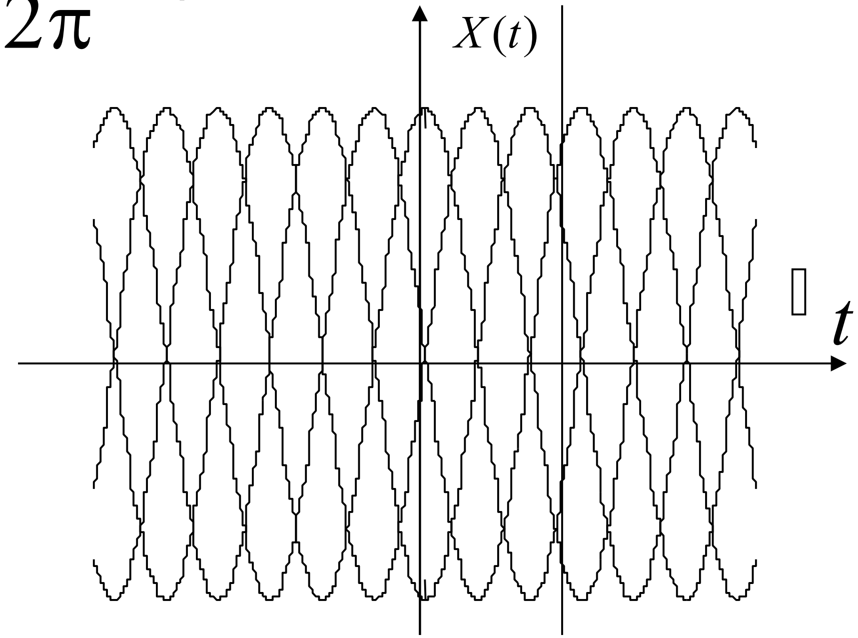
例题：2.8　　随机相位信号的均值、方差和自相关函数

$$X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Phi)$$

$$E[X(t)]=E[A\cos(2\pi f_0 t+\Phi)]$$

$$=\int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi=0$$

随机相位信号任意时刻取值的平均值为零



2.2随机过程的统计描述

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{A\cos(2\pi f_0 t_1+\Phi)A\cos(2\pi f_0 t_2+\Phi)\}$$

$$=\frac{1}{2}A^2E\{\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Phi]\}$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}A^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)$$

自相关函数也是同频率信号

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)=\frac{1}{2}A^2$$

随机相位信号的平均功率

2.2随机过程的统计描述

课堂练习 设随机振幅信号为

$$X(t)=V\sin\omega_0 t$$

其中 ω_0 为常数，**V**是标准正态随机变量。

求该随机信号的均值、方差、相关函数和协方差函数。

$$m_X(t)=E(X(t))=E(V\sin\omega_0 t)=\sin\omega_0 tE(V)=0$$

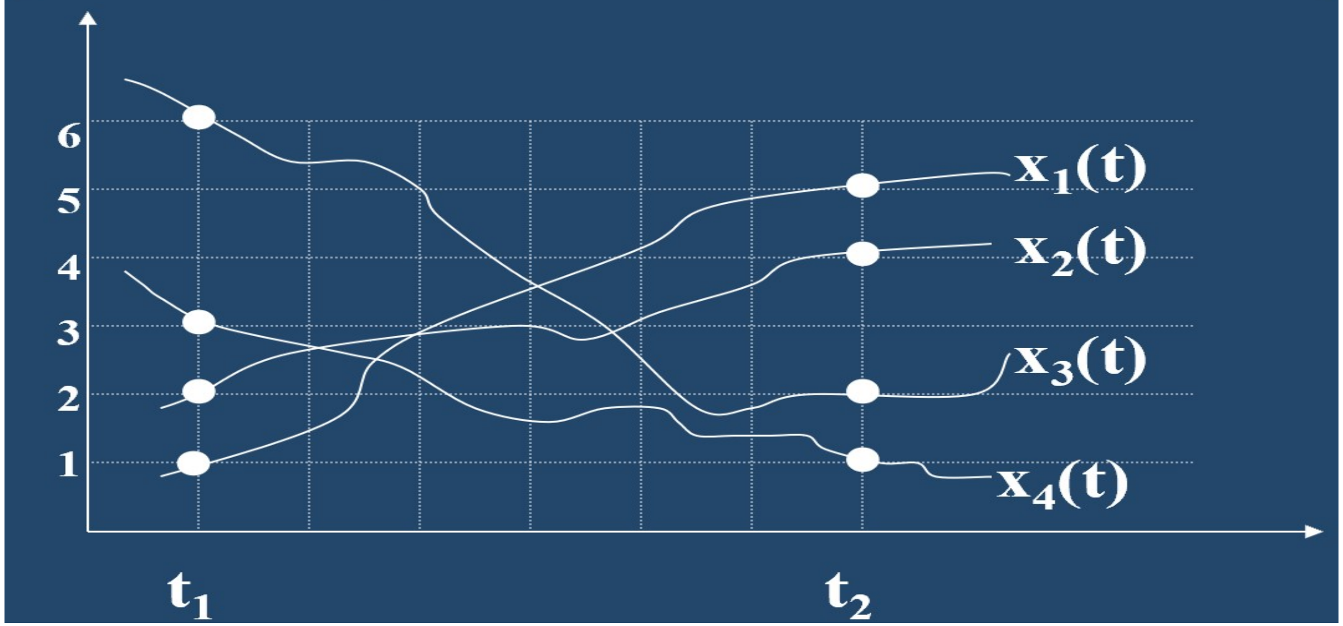
$$\sigma_X^2(t)=D(X(t))=\sin^2\omega_0 tD(V)=\sin^2\omega_0 t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 E(V^2)=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2$$

$$K_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]=\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2$$

例2.9 离散随机过程自相关函数计算举例

X(t) \ t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
t_1	1	2	6	3
t_2	5	4	2	1



每一条样本函数出现的概率相等

2.2随机过程的统计描述

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}x_i(t_1)x_j(t_2)p_{ij}(t_1,t_2)$$

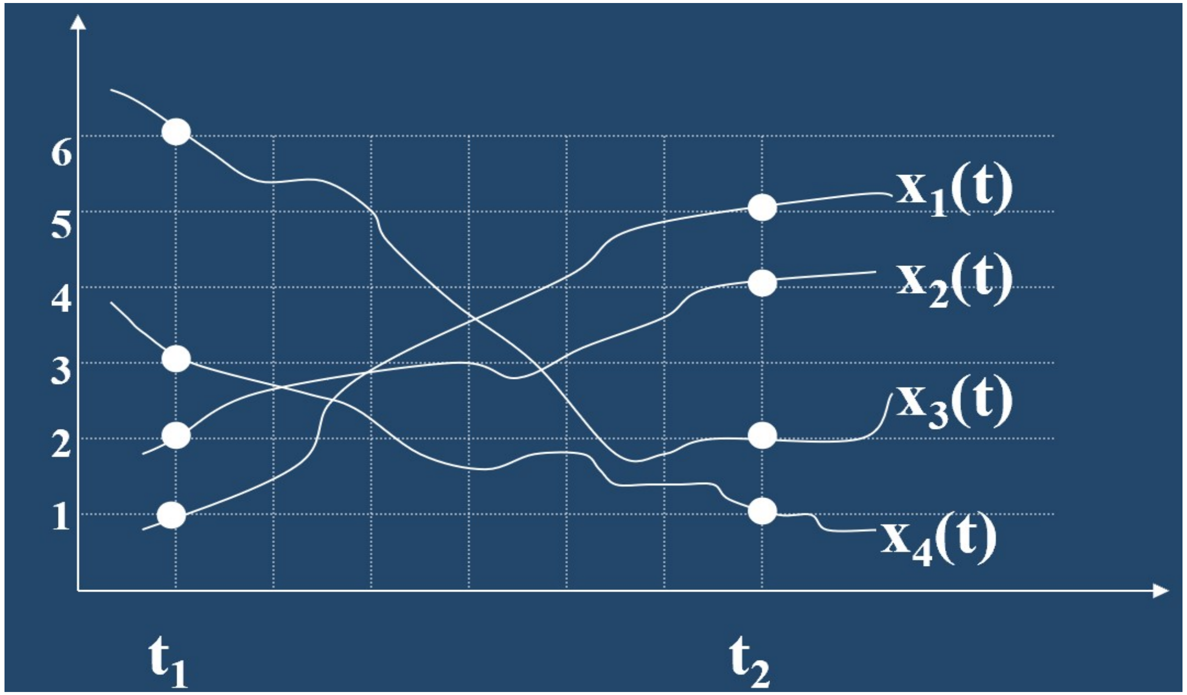
$$p_{ij}(t_1,t_2)=P\{X(t_1)=x_i(t_1),X(t_2)=x_j(t_2)\}$$

$$=P\{X(t_1)=x_i(t_1)\}P\{X(t_2)=x_j(t_2)\big|X(t_1)=x_i(t_1)\}$$

1/4

关键是这个条件概率的计算

2.2随机过程的统计描述



$$p_{ij}(t_1,t_2)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \dfrac{1}{4} & i=j\end{cases}$$

$$P\{X(t_2)=x_i(t_2)\big|X(t_1)=x_i(t_1)\}=1$$

$$R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i(t_1)x_i(t_2)p_{ii}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}(1\times5+2\times4+6\times2+3\times1)=7$$