八、计算题（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

设一质点在一线段上随机游动，线段的两端设有反射壁，假定质点只能停留在 a1=-L，a2=0，a3=L 三个点上，且只在时间 t=T, 2T, . . . 发生位置的游动，游动的规则如下：如果游动前质点在 a2 位置上，则下一时刻向左、向右移动的概率均为 1/2；若游动前质点在 a1 位置，则下一时刻或以概率 1/2 向 a2 移动，或以概率均为 1/2 停留在原地；若游动前质点在 a3 位置，则下一时刻或以概率 1/2 向 a2 移动，或以概率均为 1/2 停留在原地。

(1)、试画出一步状态转移图；

(2)、列出一步状态转移矩阵；

(3)、求该链稳态时（平稳）的概率分布列。

6.1.5 平稳链

如果齐次链中所有时刻的状态概率分布列相同，即：

$$\mathbf{p}(n)=\mathbf{p}(1)$$

则此齐次链是平稳的。

若齐次链中序列X_1和X_2的概率分布列相同，即$\mathbf{p}(2)=\mathbf{p}(1)$，则此链平稳。因为：

$$\mathbf{p}(3)=\boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(2)=\boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(1)=\mathbf{p}(2)=\mathbf{p}(1)$$

依次类推

6.1 马尔科夫链

平稳链概率分布列求解问题（要求掌握）

已知平稳链 $\mathbf{p}(1)=\left[p_1,p_2,\cdots,p_N\right]^T$

求其中各个元素 $p_1,p_2,\cdots,p_N$

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{p}(1)=\mathbf{p}(1) \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
&\pi_{11}p_1+\pi_{21}p_2+\cdots+\pi_{N1}p_N=p_1\\
&\pi_{12}p_1+\pi_{22}p_2+\cdots+\pi_{N2}p_N=p_2\\
&\cdots\cdots\\
&\pi_{1N}p_1+\pi_{2N}p_2+\cdots+\pi_{NN}p_N=p_N\\
&p_1+p_2+\cdots+p_N=1
\end{aligned}\right.$$

6.1.4 齐次马尔可夫链

如果马尔可夫链的转移概率只取决于**n-s**，而与**n**和**s**本身的值无关，则称为齐次马尔可夫链，简称齐次链。

$$p_{ij}(s,n) = p_{ij}(n-s)$$

与前面一般随机过程比较

一步转移概率： $p_{ij} = p_{ij}(1)$

n-s步转移矩阵：

$$P(n-s) = \begin{bmatrix} p_{11}(n-s) & \cdots & p_{1N}(n-s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(n-s) & \cdots & p_{NN}(n-s) \end{bmatrix}$$

6.1 马尔科夫链

令 $\mathbf{P}^T(1) \triangleq \pi$，利用切普曼方程，有 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(2) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(1)\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(1) = \boldsymbol{\pi}^2$

$$\boxed{\mathbf{P}^T(n) = \pi^n}$$

一般：$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(s,n)\mathbf{p}(s)$

齐次：$\boxed{\mathbf{p}(n+k) = \mathbf{P}^T(n)\mathbf{p}(k) = \pi^n \mathbf{p}(k)}$

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{P}^T(n)\mathbf{p}(1) = \pi^n \mathbf{p}(1)$$

- 对于齐次马尔可夫链，状态概率由初始概率和一步转移概率决定。即利用初始分布和一步转移概率矩阵就能完整地描述齐次马尔可夫链的统计特性。

6.1 马尔科夫链

例1 分析用于表征通信系统的错误产生机制的马尔可夫模型，假定其级数为2，求二步转移概率矩阵 。

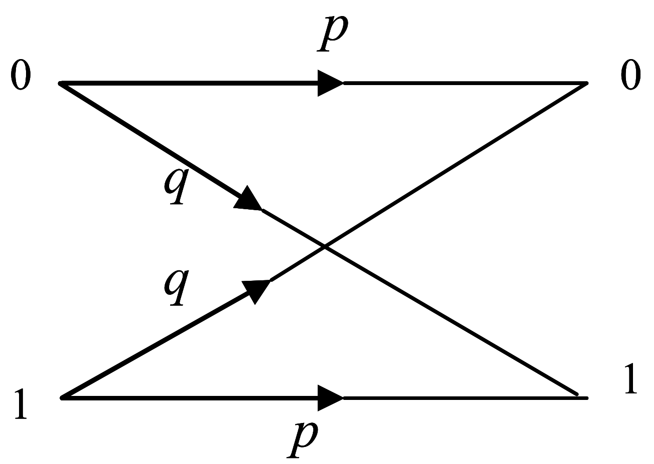


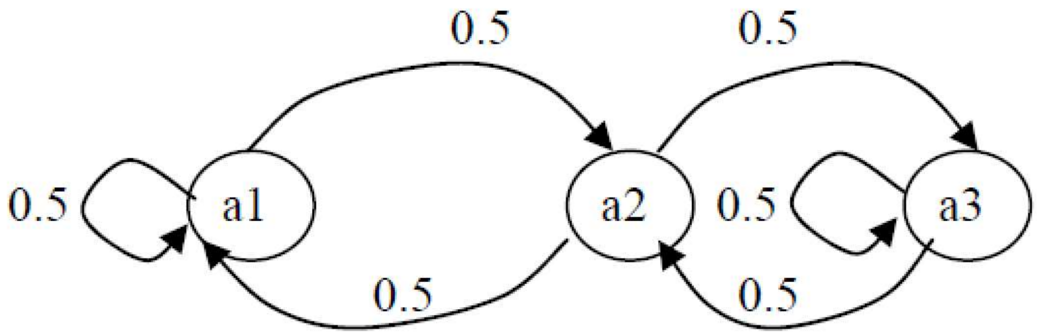
图6.2 二进制对称信道

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(2)=\mathbf{P}^2(1)=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{bmatrix}$$

解：

（1）设 $t=nT$ 时刻质点的位置为 $X_n = X(nT)$，该随机变量的可能值为 $a_1, a_2, \cdots, a_5$。这三种状态中的任意两种间的转移概率 $p_{ij}(s,n)$ 与 n 和 s 本身的值无关，而只与 $n-s$ 有关，故其状态转移图为（3 分）



（2）一步转移矩阵为

$$P(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

（3）根据 $\pi p(1)=p(1)$， $\pi=P^T(1)$， 故 结合p1+p2+p3=1与下式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

解之： $p(1)=p(2)=p(3)=\frac{1}{3}$

九、计算题（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

设有如下两种假设，观测次数为 N 次，

$$H_0 \quad z_k = n_k$$

$$H_1 \quad z_k = 2 + n_k \qquad k=1,2,.....,N$$

其中n_k服从均值为 0 方差为σ^2的正态分布，假设$p(H_0)$=0.5，$p(H_1)$=0.5，求

(1)、最小错误概率准则下的判决表达式；

(2)、虚警概率P_F与检测概率P_D（结果由误差函数表示）。

3、最小总错误概率准则

在已知信号的先验概率 $P(H_1)$ 和 $P(H_0)$ 的条件下，使总错误概率最小：

$$P_e = P(D_1, H_0) + P(D_0, H_1) = P_F P(H_0) + P_M P(H_1) = \min$$

常应用在数字通信中。相当于贝叶斯准则中

$C_{00}=C_{11}=0$, $C_{01}=C_{10}=1$。

最大后验概率判决式

判决规则为：$\Lambda(z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta_0 = \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$

假设检验问题转化似然比检验

8.2 判决准则

例8.2 高斯白噪声中直流电平的检测问题。设有两种假设

H_0:　　$z_i=v_i$,　　　　$i=1,2,....,N$

H_1:　　$z_i=A+v_i$,　　　$i=1,2,....,N$

其中$\{v_i\}$是服从均值为零、方差为σ^2的高斯白噪声序列，假定参数A是已知的，且A>0，求贝叶斯准则（或最小总错误概率准则）的判决表达式，并确定判决性能。

【解】 两种假设下的似然函数为: $f(\mathbf{z}|H_0)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)$

$$f(\mathbf{z}|H_1)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

8.2 判决准则

$$\Lambda(\boldsymbol{z})=\frac{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]}{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)}=exp\left[\frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i-\frac{1}{2}A\right)\right]$$

对数似然比为: $ln\,\Lambda\,(\boldsymbol{z})=\frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i-\frac{1}{2}A\right)$

判决表达式为： $\frac{NA}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i-\frac{1}{2}A\right)\begin{matrix}H_1\\>\\<\\H_0\end{matrix}\;ln\,\eta_0$

令$\bar{z}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i$，将上式整理后得: $\bar{z}\begin{matrix}H_1\\>\\<\\H_0\end{matrix}\;\frac{\sigma^2}{NA}ln\,\eta_0+\frac{1}{2}A=\gamma$

8.2 判决准则

检验统计量$\bar{z}$为样本均值，为了确定判决的性能，首先需要确定检验统计量的分布，在H_0为真时，$\bar{z}|H_0=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i$，那么，

$$f_{\bar{z}}(\bar{z}|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma^2/N}\right)$$

在H_1为真时，$\bar{z}|H_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A+v_i)=A+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i$

$$f_{\bar{z}}(\bar{z}|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{(\bar{z}-A)^2}{2\sigma^2/N}\right)$$

检测概率$P_D=P(\bar{z}>\gamma|H_1)=\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}}exp\left(-\frac{(\bar{z}-A)^2}{2\sigma^2/N}\right)d\bar{z}$

$$=Q\left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma}\right)$$

8.2 判决准则

当采用最小错误概率准则且$P(H_1)=P(H_0)$时，$\eta_0=1$，判决表达式为

$$\bar{z} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}A = \gamma$$

$$P_F = Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right), \quad P_D = Q\left(-\frac{\sqrt{N}A)}{2\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right)$$

总的错误概率为: $$P_e = P(H_0)P_F + P(H_1)P_M = Q\left(\frac{\sqrt{N}A}{2\sigma}\right)$$

解：两种假设下的似然函数为

$$f(\mathbf{z}\,|\,H_0)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(\mathbf{z}\,|\,H_1)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z_i-2)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z_i-2)^2}{2\sigma^2}\right]}{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)} = \exp\left[\frac{2N}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - 1\right)\right]$$

对数似然比为： $$\ln\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{2N}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - 1\right)$$

判决表达式为 $$\frac{2N}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i - 1\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\frac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

令 $\overline{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$，将上式整理后得 $$\overline{z} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

检验统计量$\bar{z}$为样本均值，为了确定判决的性能，首先需要确定检验统计量的分布，在H_0为真时，$\bar{z} \mid H_0 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$，那么，

$$f_{\bar{z}}(\bar{z} \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / N}} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma^2 / N}\right) \qquad \text{（3 分）}$$

在H_1为真时，$\bar{z} \mid H_1 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(2 + v_i) = 2 + \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$

$$f_{\bar{z}}(\bar{z} \mid H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / N}} \exp\left(-\frac{(\bar{z}-2)^2}{2\sigma^2 / N}\right)$$

所以，虚警概率为

$$P_F = P(\bar{z} > \gamma \mid H_0) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / N}} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma^2 / N}\right) d\bar{z} = Q\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\right) \qquad \text{（1 分）}$$

检测概率为

$$P_D = P(\bar{z} > \gamma \mid H_1) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 / N}} \exp\left(-\frac{(\bar{z}-2)^2}{2\sigma^2 / N}\right) d\bar{z} = Q\left(-\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\right) \qquad \text{（1 分）}$$

十、计算题（共 1 小题，每小题 12 分，共 12 分）

设 $z(t)=s\cos\omega_0 t+n(t)$，通过取样对幅度 s 作线性估计。设 $z(t)$ 在 $\omega_0 t=0,\omega_0 t=\pi/3$ 处取样，并设：

$$E[s]=0,E[n_1n_2]=0,E[s^2]=2,E[sn]=0,E[n_1]=E[n_2]=0,E[n_1^2]=E[n_2^2]=1$$

求：

（1）、线性最小均方估计 $\hat{s}_{lms}$；

（2）、线性最小均方估计的均方误差。

解：1）

$$z_1=s+n_1$$

$$z_2=\frac{1}{2}s+n_2$$

设 $\hat{s}=az_1+bz_2+c$，不难验证 c=0，

由正交原理，

$$E\left[(s-\hat{s})z_1\right]=0$$
$$E\left[(s-\hat{s})z_2\right]=0$$

$$E\left[(s-az_1-bz_2)x_1\right]=0$$
$$E\left[(s-az_1-bz_2)x_2\right]=0$$

$$E\left[(s-az_1-bz_2)z_1\right]=E(sz_1)-aE(z_1^2)-bE(z_1z_2)$$
$$E\left[(s-az_1-bz_2)z_2\right]=E(sz_2)-aE(z_1z_2)-bE(z_2^2)$$

$$E\left[sz_1\right]=E\left[s(s+n_1)\right]=E(s^2)=2$$
$$E\left[sz_2\right]=E\left[s(\frac{1}{2}s+n_1)\right]=\frac{1}{2}E(s^2)=1$$

$$E\left[z_1^2\right]=E\left[(s+n_1)^2\right]=E(s^2)+E(n_1^2)=2+1=3$$

$$E\left[z_2^2\right]=E\left[(\frac{1}{2}s+n_2)^2\right]=\frac{1}{4}E(s^2)+E(n_2^2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$E\left[z_1z_2\right]=E\left[(s+n_1)(\frac{1}{2}s+n_2)\right]=\frac{1}{2}E(s^2)=1$$

$$\begin{cases}2-3a-b=0\\1-a-\frac{3}{2}b=0\end{cases}\Rightarrow \qquad a=\frac{4}{7},b=\frac{2}{7}$$ （9 分）

2） $E[\tilde{s}^2]=E[\tilde{s}s]=E[(s-az_1-bz_2)s]==\frac{4}{7}$ （3 分）

第二套习题卷

填空题：

1、 样本函数　随机变量
2、 0，1
3、 直接法，变换法
4、 均值，协方差阵
5、 任意维概率密度不随时间起点的变化而变化，均值为常数，自相关函数只与时间差相关
6、 白噪声，不相关
7、 正态，瑞利，均匀
8、 冲激响应法，频谱法
9、 5 或-5，4
10、 输出信噪比最大
11、 不相关，正交，独立
12、 最大后验

判断题：

1、×
2、√
3、×
4、×
5、√
6、√
7、√
8、×
9、√
10、×

四、计算题（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

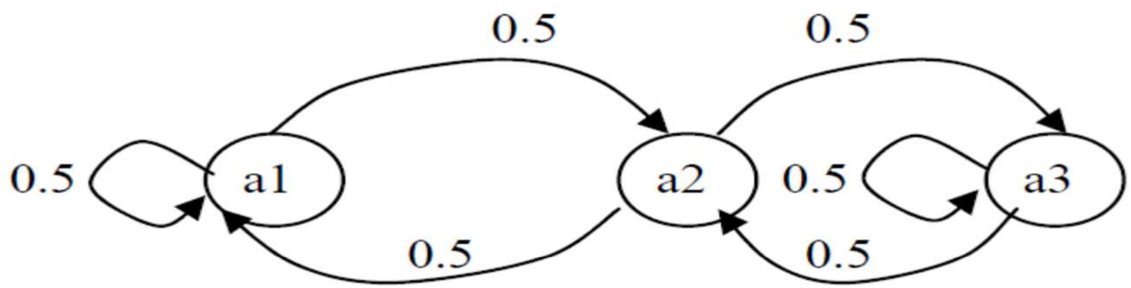
设一质点在一线段上随机游动，线段的两端设有反射壁，假定质点只能停留在 a1=-L，a2=0，a3=L 三个点上，且只在时间 t=T,2T,...发生位置的游动，游动的规则如下：如果游动前质点在 a2 位置上，则下一时刻向左、向右移动的概率均为 1/2；若游动前质点在 a1 位置，则下一时刻或以概率 1/2 向 a2 移动，或以概率 1/2 停留在原地；若游动前质点在 a3 位置，则下一时刻或以概率 1/2 向 a2 移动，或以概率 1/2 停留在原地。

（1）试画出一步状态转移图，

（2）列出一步状态转移矩阵，

（3）根据一步状态转移图，求自 a3 出发，经过三步转移后回到 a3 的概率。

解：（1）设 $t = nT$ 时刻质点的位置为 $X_n = X(nT)$，该随机变量的可能值为 $a_1, a_2, \cdots, a_5$。这三种状态中的任意两种间的转移概率 $p_{ij}(s,n)$ 与 n 和 s 本身的值无关，而只与 $n-s$ 有关，故其状态转移图为　　（5 分）



（2）一步转移矩阵为　　（5 分）

$$P(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(3)转移概率：$3 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.375$　　（3 分）

五、计算题（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

设 N 次观测独立观测为

$$z_i = A + v_i \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

其中 A 为未知常量，$\{v_i\}$ 为零均值高斯白噪声，求 A 的最大似然估计，并求估计的方差。

7.2 贝叶斯估计（掌握）

频率派与贝叶斯派之争：
比较ML 和 MAP

$$p(\theta \mid z) = \frac{p(z \mid \theta)\, p(\theta)}{p(z)}$$

$$\underbrace{p(\theta \mid z)}_{\text{posterior}} \propto \underbrace{p(z \mid \theta)}_{\text{likehood}}\, \underbrace{p(\theta)}_{\text{prior}}$$

- MLE（频率学派）认为参数 θ 是一个未知的常量，需要从数据中估计出来。MAP（贝叶斯学派）认为参数 θ 是一个随机变量，服从一个概率分布，应该充分利用先验概率。
- MLE的缺点是如果数据集太小会出现过拟合，或者严重偏差；MAP的缺点是使用不同的先验会得到不同的结果。

7.2 贝叶斯估计

1、贝叶斯估计

在估计某个量时，噪声的影响使估计产生误差，估计误差是要付出代价的，这种代价可以用代价函数来加以描述，记为$c(\theta,\hat{\theta}) = c(\theta-\hat{\theta}) = c(\tilde{\theta})$。贝叶斯估计准则就是在已知代价函数及先验概率基础上，使估计付出的平均代价最小。

设观测值为z，待估参量为θ

估计误差：$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}(z)$

$$\hat{\theta}(z) \Leftarrow \min_{\hat{\theta}} E[C(\tilde{\theta})]$$

7.2 贝叶斯估计

统计平均代价：

$$E[C(\tilde{\theta})] = E[C(\theta, \hat{\theta}(z))]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta, z) d\theta dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta \mid z) d\theta\right]} f(z) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C}(\theta \mid z) f(z) dz$$

条件平均代价

等价于使下式最小：

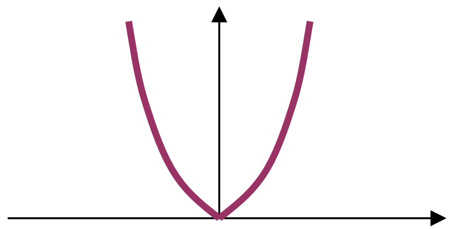
$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta, \hat{\theta}(z)) f(\theta \mid z) d\theta \ = \ 最小$$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

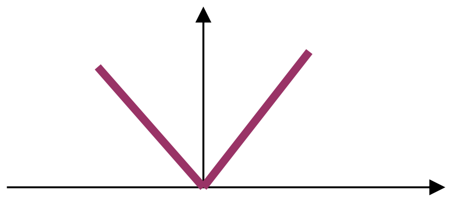
7.2 贝叶斯估计

2、典型代价函数及贝叶斯估计

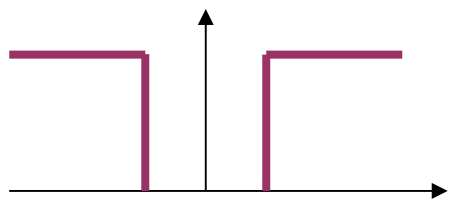
平方代价： $C(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$



绝对值代价： $C(\theta,\hat{\theta})=|\theta-\hat{\theta}|$

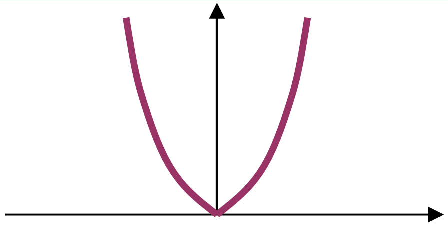


均匀代价： $C(\theta,\ \hat{\theta})=\begin{cases}1, & |\theta-\hat{\theta}|\ge\dfrac{\Delta}{2}\\ 0, & |\theta-\hat{\theta}|<\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$



7.2 贝叶斯估计

平方代价： $C(\theta,\hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$



☞ **最小均方估计(Minimal Square)**

$$\bar{C}(\theta \mid z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 f(\theta \mid z) d\theta = \text{最小}$$

对 $\hat{\theta}$ 求导数，并使其等于零：

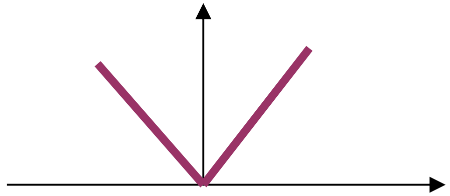
$$\frac{d\bar{C}(\theta \mid z)}{d\hat{\theta}} = -2\int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta \mid z) d\theta + 2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta \mid z) d\theta$$

得： $\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta \mid z) d\theta$

即 $\hat{\theta} = E[\theta \mid z]$ ，也称为条件均值估计。

7.2 贝叶斯估计

绝对值代价： $C(\theta,\hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$



☞条件中位数估计(Median)

$$\overline{C}(\theta \mid z) = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| f(\theta \mid z) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta \mid z) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) f(\theta \mid z) d\theta$$

对 $\hat{\theta}$ 求导数，并使其等于零，得：

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} f(\theta \mid z) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} f(\theta \mid z) d\theta$$

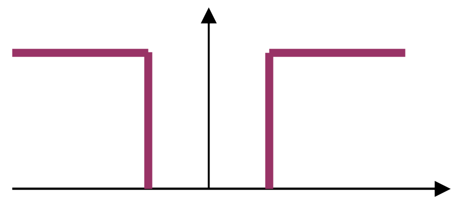
可见，估计为条件概率密度 $f(\theta \mid z)$ 的中位数。

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

7.2 贝叶斯估计

均匀代价：

$$C(\theta,\ \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta-\hat{\theta}| \geq \dfrac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta-\hat{\theta}| < \dfrac{\Delta}{2} \end{cases}$$



☞最大后验概率估计(**maximal posterior probability**)

$$\overline{C}(\theta \mid z) = 1 - \int_{\hat{\theta}_{map}-\frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}_{map}+\frac{\Delta}{2}} f(\theta \mid z) d\theta$$

应当选择 $\hat{\theta}$ ，使它处在后验概率 $f(\theta \mid z)$的最大处。

最大后验概率方程：

$$\left.\frac{\partial f(\theta \mid z)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \text{ 或 } \left.\frac{\partial \ln f(\theta \mid z)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0$$

7.2 贝叶斯估计

由关系式： $$f(\theta \mid z)=\frac{f(z \mid \theta) f(\theta)}{f(z)}$$

两边取对数并对θ求导，得最大后验概率方程的另一形式：

$$\left[\frac{\partial \ln f(z \mid \theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial \ln f(\theta)}{\partial \theta}\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0$$

1、最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimate)

由最大后验概率估计

$$\left[\frac{\partial \ln f(z\,|\,\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial \ln f(\theta)}{\partial \theta}\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{map}}=0$$

若先验概率密度函数 $f(\theta)$ 未知，则由左边第一项求解参量θ，即最大似然估计，用 $\hat{\theta}_{mL}$ 表示。最大似然方程为：

$$\frac{\partial \ln f(z\,|\,\theta)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{mL}}=0$$

2、无偏估计量的性能边界

（1）非随机参量

假定满足正则条件

$$E\left\{\frac{\partial \ln f(\mathbf{z};\theta)}{\partial \theta}\right\}=0$$

$$Var(\hat{\theta})=E\{[\theta-\hat{\theta}]^2\}\geq I(\theta)^{-1}$$

克拉美-罗限

$$I(\theta)=E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(z;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\}=-E\left\{\frac{\partial^2 \ln f(z;\theta)}{\partial \theta^2}\right\}$$

等号成立的条件：

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z};\theta)}{\partial \theta}=k(\theta)(\hat{\theta}-\theta)$$

7.4 估计量的性能

2、无偏估计量的性能边界

（2）随机参量

任何无偏估计量的均方误差满足

$$Mse(\hat{\theta}) = E\{[\theta - \hat{\theta}]^2\} \geq J^{-1}$$

克拉美-罗限

$$J = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(z,\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f(z,\theta)}{\partial \theta^2}\right\}$$

等号成立的条件： $$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z},\theta)}{\partial \theta} = k \cdot (\hat{\theta} - \theta)$$ （式7.4.29）

注意，k不是 $\mathbf{z}$ 或者 θ 的函数

解：先求似然函数，

$$f(\mathbf{z};A)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2\right\}$$

$$\ln f(\mathbf{z};A)=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2$$

$$\frac{\partial\ln f(\mathbf{z};A)}{\partial A}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)=\frac{N}{\sigma^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i-A\right)$$

（5 分）

根据最大似然方程，得

$$\hat{A}_{ml} = \bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$$

$\bar{z}$ 为观测的样本均值，由于

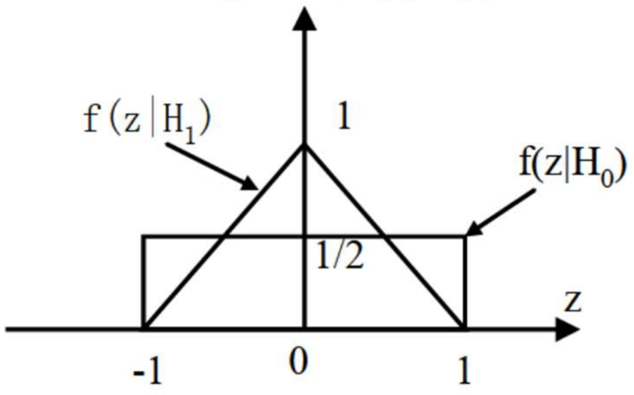
$$\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; A)}{\partial A^2} = -\frac{N}{\sigma^2} < 0$$ （5 分）

估计的方差为：$\dfrac{\sigma^2}{N}$ （3 分）

结论

六、计算题（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

设有两种假设 H_0 和 H_1，其观测的概率密度如下图所示，要求虚警概率 $P_F=0.1$，求判决表达式，并确定正确判决概率 $P_D=P(D_1\mid H_1)$。



4、纽曼-皮尔逊准则(neyman-pearson)

在许多情况下，给出信号的先验概率或代价因子是困难的，如雷达系统。此时可采样*纽曼-皮尔逊准则*：指定一个虚警概率α的容许值，在约束α不变的条件下使检测概率**P_D**达到最大。即：

利用拉格朗日乘子构造函数**:**

$$J = P_M + \lambda(P_F - \alpha)$$

划分判决域使**J**最小。

$$J = \int_{Z_0} f(z \mid H_1)dz + \lambda[\int_{Z_1} f(z \mid H_0)dz - \alpha]$$

$$= \lambda(1-\alpha) + \int_{Z_0} [f(z \mid H_1) - \lambda f(z \mid H_0)]dz$$

8.2 判决准则

划分的结果是使J最小的分界面满足:

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z}|H_1)}{f(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

选取λ满足α=常数的约束条件，即:

$$\alpha = \int_{Z_1} f(\mathbf{z}|H_0)d\mathbf{z} = \int_{\lambda}^{\infty} f[\Lambda(\mathbf{z})|H_0]d\Lambda$$

假设检验问题转化似然比检验

8.2 判决准则

例**8.6**：设有两种假设，

H_0: z=v

H_1: z=1+v

其中**v~N(0,1)**，规定α=**0.1**，试根据一次观测数据**z**，应用奈曼-皮尔逊准则给出最佳判决及相应检测概率。

【解】

由例8.1可知，似然比检验为: $\Lambda(z) = exp\left(z - \frac{1}{2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$

或者化简为: $z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\,\lambda + \frac{1}{2} = \gamma$

8.2 判决准则

门限γ由给定的虚警概率确定，

$$\int_{\gamma}^{\infty} f(z|H_0)dz = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 0.1$$

由上式可解得门限γ = 1.29，对应的检测概率为

$$P_D = \int_{\gamma}^{\infty} f(z|H_1)dz = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-1)^2/2} dz = 0.389$$

【完毕】

解：本题观测的取值范围是$-1<z<1$，因此，我们只需根据该范围内的观测值进行判决，

当$-1<z<1$ 时，

$$f(z|H_1)=1-|z| \qquad\qquad f(z|H_0)=1/2$$

似然比为

$$\Lambda(z)=\frac{1-|z|}{1/2}=2(1-|z|)$$

判决表达式为

$$2(1-|z|)\ \mathop{\gtrless}\limits_{H_0}^{H_1}\ \lambda$$

（5 分）

或者

$$|z|\ \mathop{\lessgtr}\limits_{H_0}^{H_1}\ 1-\lambda/2=\gamma$$

所以观测空间的划分为 $Z_1=(-\gamma,\gamma)$, $Z_0=(-1,-\gamma)\cup(\gamma,1)$ 。 （3 分

其中γ由给定的虚警概率确定，

$$P_F=\int_{Z_0} f(z\,|\,H_0)dz=\frac{1}{2}\cdot 2\gamma=\gamma=0.1$$

即 H_1 和 H_0 的判决域分别为 $Z_1=(-0.1,0.1)$, $Z_0=(-1,-0.1)\cup(0.1,1)$ 。

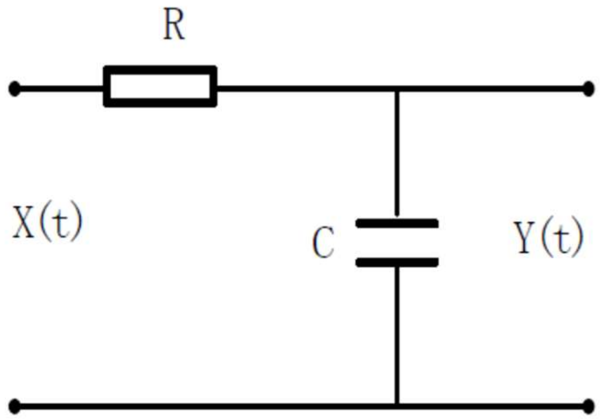
七、计算题（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

假定功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声通过如下图所示的 RC 电路，

（1）求输出 Y(t)的功率谱密度；

（2）求输出 Y(t)的自相关函数 $R_y(\tau)$；

（3）求输出 Y(t)的一维概率密度。



解：根据电路图可求得 RC 电路的冲激响应和系统函数分别为

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} U(t) \qquad \alpha = \frac{1}{RC}$$

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

（3 分）

易知系统是线性时不变的。

（1）根据题意：功率谱密度为常数的高斯白噪声是平稳白噪声；即输入是平稳随机过程的，而本系统是物理可实现系统，即当 $t<0$ 时，$h(t)=0$，假定输入始终作用于系统的输入端，则输出一般是平稳的；如果输入在 t＝ti 时才作用入系统的输入端，则输出将有一个瞬态过程，瞬态过程是非平稳的，只有其达到稳态时输出随机过程才是平稳的。

（2）输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2=\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha N_0}{4}e^{-\alpha|\tau|}$$

（3）总平均功率为

$$\mathrm{R_Y(0)}=\frac{\alpha \mathrm{N_0}}{4}=\frac{\mathrm{N_0}}{4\mathrm{RC}}$$

概率密度:N $\left(0,\ \frac{\mathrm{N_0}}{4\mathrm{RC}}\right)$

课程结束语