中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

第3章 随机过程的线性变换

第3章 随机过程的线性变换

重点:

(1) 掌握输入输出随机过程的关系；

(2) 熟练掌握冲激响应法和频谱法计算系统输出的二阶统计特性，计算高斯信号激励下系统输出端概率密度；

(3) 计算系统等效噪声带宽；

(4) 最佳线性滤波器分析与计算；

(5) 线性系统输出端概率分布分析与计算。

作业：3.3　　3.7

3.1.1 变换的基本概念

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[.]} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = T[x(t)]$$

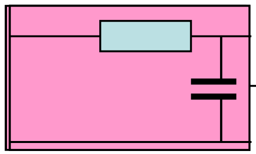
分类：连续时间系统、离散时间系统

因果系统、非因果系统

线性系统、非线性系统

3.1变换的基本概念与基本定理

1. 变换的定义

$x(t)$ →  → $y(t)$

线性放大器

线性滤波器

线性系统

平方律检波

全波线性检波

非线性系统

3.1变换的基本概念与基本定理

注意：

变换有确定性变换和非确定性变换两种。

特定的 $x(t,e_i)$作为 系统输入，可以得到特定的输出 $y(t,e_i)$ 。

所谓的随机性，主要体现为输入和输出是随机过程，而不是变换本身。

3.1变换的基本概念与基本定理

2. 线性变换

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\text{L[.]}} \longrightarrow Y(t)$$

$$Y(t) = T[X(t)]$$

分类：连续时间系统、离散时间系统

因果系统、非因果系统

线性系统、非线性系统

叠加性、齐次性

线性：$L[A_1X_1(t) + A_2X_2(t)] = A_1L[X_1(t)] + A_2L[X_2(t)]$

其中，A_1和A_1是任意两个随机变量

时不变性：$Y(t+\varepsilon) = L[X(t+\varepsilon)]$

3.1.2 线性变换的基本定理

定理1：设$Y(t) = L[X(t)]$，其中L是线性变换，则

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\}$$

即随机过程经过线性变换后，其输出的数学期望等于输入的数学期望通过线性变换后的结果。

E()和L()都是线性算子，可以互换位置

3.1变换的基本概念与基本定理

定理2：设$Y(t)=L[X(t)]$，其中L是线性变换，则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=L_{t_1}\cdot L_{t_2}\,[R_X(t_1,t_2)]$$

其中， L_{t_1}表示对t_1做L变换， L_{t_2}表示对t_2做L变换。

3.1变换的基本概念与基本定理

证明：因为 $X(t_1)Y(t)=X(t_1)L[X(t)]=L[X(t_1)X(t)]$

$$E\{X(t_1)Y(t)\}=E\{L[X(t_1)X(t)]\}=L\{E[X(t_1)X(t)]\}$$

令 $t=t_2$，可得 $R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$

同理可证 $R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]$

联合上面两式，得 $R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}\cdot L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$

以上两个定理是线性变换的两个基本定理，它给出了随机信号经过线性变换后，输出的均值和相关函数的计算方法。

从两个定理可知，对于线性变换，输出的均值和相关函数可以分别由输入的均值和相关函数确定。推广而言，对于线性变换，输出的k阶矩可以由输入的相应阶矩来确定。如

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)Y(t_2)\} = L_{t_1} \cdot L_{t_2} \cdot L_{t_3}\{E[X(t_1)X(t_2)X(t_2)]\}$$

注：输入宽平稳，则输出宽平稳；输入严平稳，则输出严平稳；输入遍历，则输出遍历

3.1变换的基本概念与基本定理

例3.1 随机过程导数的统计特性。设$\dot{X}$(t)=$\frac{dX(t)}{dt}$, L= $\frac{d}{dt}$是线性变换，根据定理1，导数过程$\dot{X}$(t)的均值为

$$m_{\dot{X}}(t)=\frac{dm_X(t)}{dt}$$

根据定理2，X(t)与$\dot{X}$(t)的互相关函数为

$$R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}$$

$\dot{X}$(t)的自相关函数为

$$R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)]=L_{t_2}[R_{\dot{X}X}(t_1,t_2)]$$

$$=\frac{\partial R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial R_{\dot{X}X}(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

3.1变换的基本概念与基本定理

补充：

1 随机变量的极限

定义：设有随机变量 X 及随机变量序列 $\{X_n\}$， $n=1,2,\cdots$， 均有二阶矩，且 $\lim\limits_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$ ，则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依均方收敛于 X ，或者说，随机变量 X 是随机变量序列 $\{X_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时的均方极限，记为 $\underset{n\to\infty}{l\cdot i\cdot m} X_n = X$ ，l.i.m 即 Limit in mean square。

3.1变换的基本概念与基本定理

补充：

随机信号的极限

随机变量序列极限的定义可以推广到随机信号的极限。设有随机信号 $X(t)$ 和随机变量 X，如果

$$\lim_{t\to t_0} E\{[X(t)-X]^2\}=0$$

则称 X 为随机信号 $X(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记为

$$\underset{t\to t_0}{l\cdot i\cdot m}\, X(t)=X$$

3.1变换的基本概念与基本定理

补充：

有了随机信号极限与连续性的定义后，我们就可以引入导数的概念。

1 导数的定义

定义：设随机信号 $X(t)$，如果下列极限存在，

$$\underset{\Delta t\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

则称此极限为随机信号 $X(t)$ 的导数，记为 $X'(t)$ 或 $\frac{dX(t)}{dt}$, 即

$$\frac{dX(t)}{dt}=\underset{\Delta t\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

由于在上式中的极限是均方意义下的极限，所以定义的导数也是均方意义下的导数。在本书中，今后除特别说明，我们通常所说的导数指的均方意义下的导数。

3.1变换的基本概念与基本定理

补充：

需要注意的是，随机信号的导数仍然是随机信号。任意函数的导数（只要存在）都是可唯一确定的，然而，如果没有更多的信息，函数的积分却不是唯一确定的。

可以证明，对于平稳随机信号，可导的充分必要条件是 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处存在一、二阶导数。而对于非平稳信号，可导的充分必要条件是

$$\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\bigg|_{t_1=t_2=t}$$

存在。

3.1变换的基本概念与基本定理

进一步，如果$X(t)$是平稳的，则

$$m_{\dot{X}}(t)=\frac{dm_X(t)}{dt}=0$$

$$R_{X\dot{X}}(\tau)=-\frac{dR_X(\tau)}{d\tau}$$

$$\Updownarrow$$

$$G_{X\dot{X}}(\varpi)=-j\varpi G_X(\varpi)$$

$$R_{\dot{X}}(\tau)=\frac{dR_{X\dot{X}}(\tau)}{d\tau}=-\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$G_{\dot{X}}(\varpi)=j\varpi G_{X\dot{X}}(\varpi)=\varpi^2G_X(\varpi)$$

3.1变换的基本概念与基本定理

$$R_X(t_1,t_2) \xrightarrow{\boxed{\frac{\partial}{\partial t_2}}} R_{X\dot{X}}(t_1,t_2) \xrightarrow{\boxed{\frac{\partial}{\partial t_1}}} R_{\dot{X}}(t_1,t_2)$$

$$R_X(\tau) \xrightarrow{\boxed{-\frac{d}{d\tau}}} R_{X\dot{X}}(\tau) \xrightarrow{\boxed{\frac{d}{d\tau}}} R_{\dot{X}}(\tau)$$

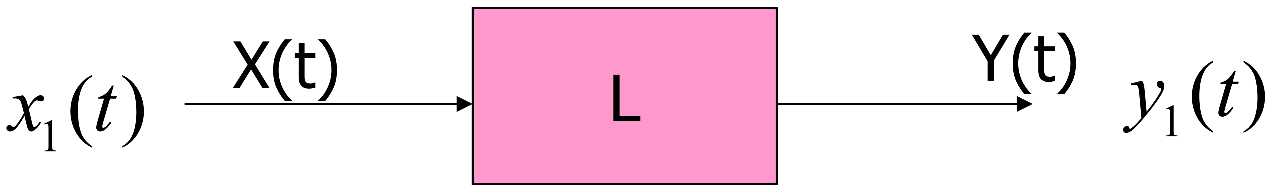
$$G_X(\varpi) \xrightarrow{\boxed{-j\varpi}} G_{X\dot{X}}(\varpi) \xrightarrow{\boxed{j\varpi}} G_{\dot{X}}(\varpi)$$

也可以换位置！

$R_{X\dot{X}}(-\tau)= -R_{X\dot{X}}(\tau)$ ➡ $R_{X\dot{X}}(\tau)$是奇函数 ➡ $R_{X\dot{X}}(0)=0$ ➡

$X(t)$与$\dot{X}(t)$在同一时刻正交且不相关 $\xrightarrow{X(t)\text{正态}}$ 二者独立

3.2随机过程通过线性系统分析



已知： 输入和线性系统的特性。

求解： 输出的统计特征。

线性系统的描述方法：

- ✓微分方程
- ✓冲激响应
- ✓系统传递函数

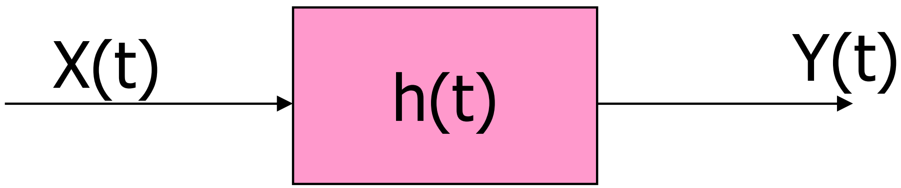
→

- ✓微分方程法
- ✓冲激响应法
- ✓频谱法

3.2随机过程通过线性系统分析

	时域法		变换域方法
	微分方程法	冲激响应法	频谱法
系统特性描述	微分方程和初始值	h(t)	H(ω)
适用范围	平稳和非平稳	平稳和非平稳	平稳
特点	运算繁琐	h(t)较简单时，较方便	方法简单

3.2.1 冲激响应法



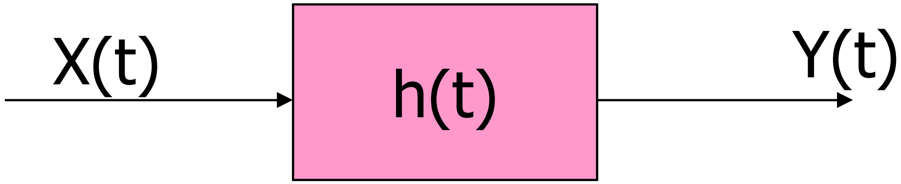
系统的输出：

$$y_i(t,e_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_i(t-\tau,e_i)h(\tau)d\tau=h(t)\otimes x_i(t,e_i)$$

$$\boxed{Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau=h(t)\otimes X(t)}$$

$L=h(t)\otimes$，是一个线性算子，$Y(t)=L[X(t)]$

3.2.1 冲激响应法



- 均值

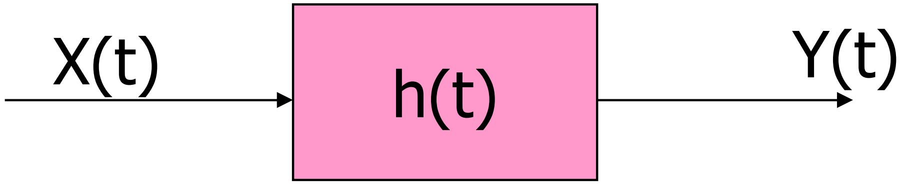
$$m_Y(t)=E[Y(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\}$$

$$=h(t)\otimes m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X(t-\tau)h(\tau)d\tau=$$

若X(t)是平稳的

$$m_Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X h(\tau)d\tau=m_X H(0)$$

3.2.1 冲激响应法



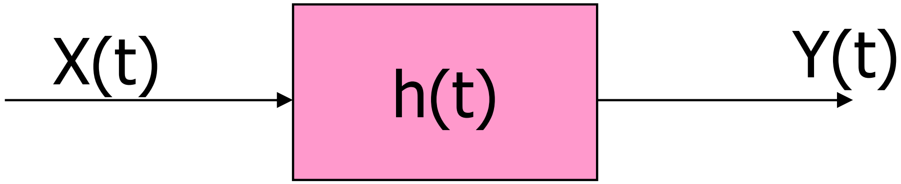
- 互相关函数

由定理2可得

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=h(t_2)\otimes R_X(t_1,t_2)$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_X(t_1,t_2)]=h(t_1)\otimes R_X(t_1,t_2)$$

3.2.1 冲激响应法



- 自相关函数

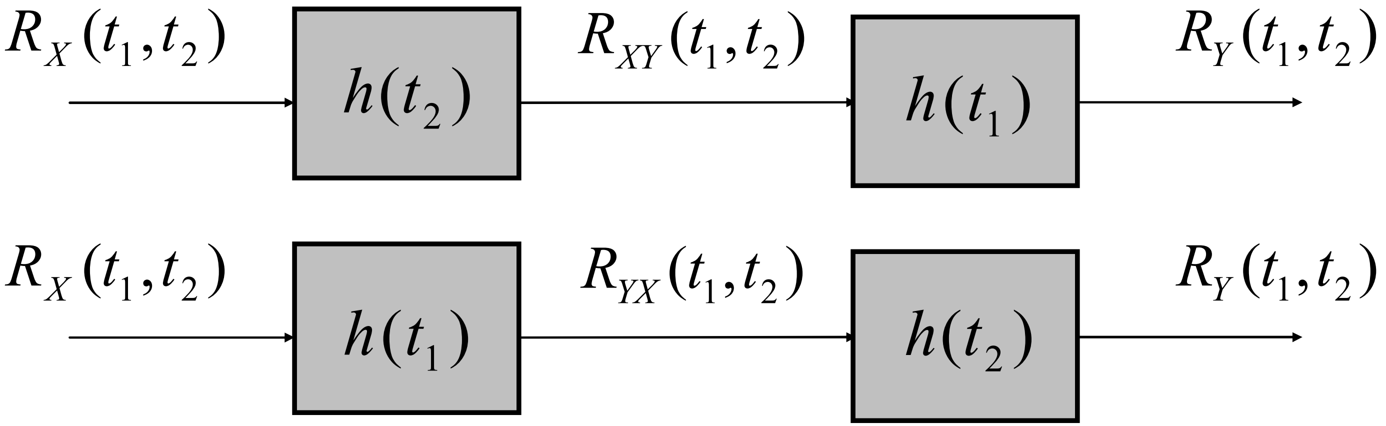
$$R_Y(t_1,t_2)=E\{Y(t_1)Y(t_2)\}=h(t_1)\otimes R_{XY}(t_1,t_2)$$

$$=h(t_2)\otimes R_{YX}(t_1,t_2)$$

$$=h(t_1)\otimes h(t_2)\otimes R_X(t_1,t_2)$$

3.2.1 冲激响应法

小结


$R_X(t_1,t_2)$
$h(t_2)$
$R_{XY}(t_1,t_2)$
$h(t_1)$
$R_Y(t_1,t_2)$
$R_X(t_1,t_2)$
$h(t_1)$
$R_{YX}(t_1,t_2)$
$h(t_2)$
$R_Y(t_1,t_2)$

3.2随机过程通过线性系统分析

进一步，如果X(t)是平稳随机过程，则有

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)*h(t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)du$$

$$\overset{\text{平稳}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1-t_2+u)h(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)du$$

即 $$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)\otimes R_X(\tau)$$

3.2随机过程通过线性系统分析

$$R_Y(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) * h(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t_1-t_2-u)h(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)du$$

即
$$R_Y(\tau) = h(\tau) \otimes R_{XY}(\tau)$$

所以，

$$R_Y(\tau) = h(-\tau) \otimes h(\tau) \otimes R_X(\tau)$$

3.2随机过程通过线性系统分析

同理可得，

$$R_{YX}(\tau) = h(\tau) \otimes R_X(\tau)$$

$$R_Y(\tau) = h(-\tau) \otimes R_{YX}(\tau)$$

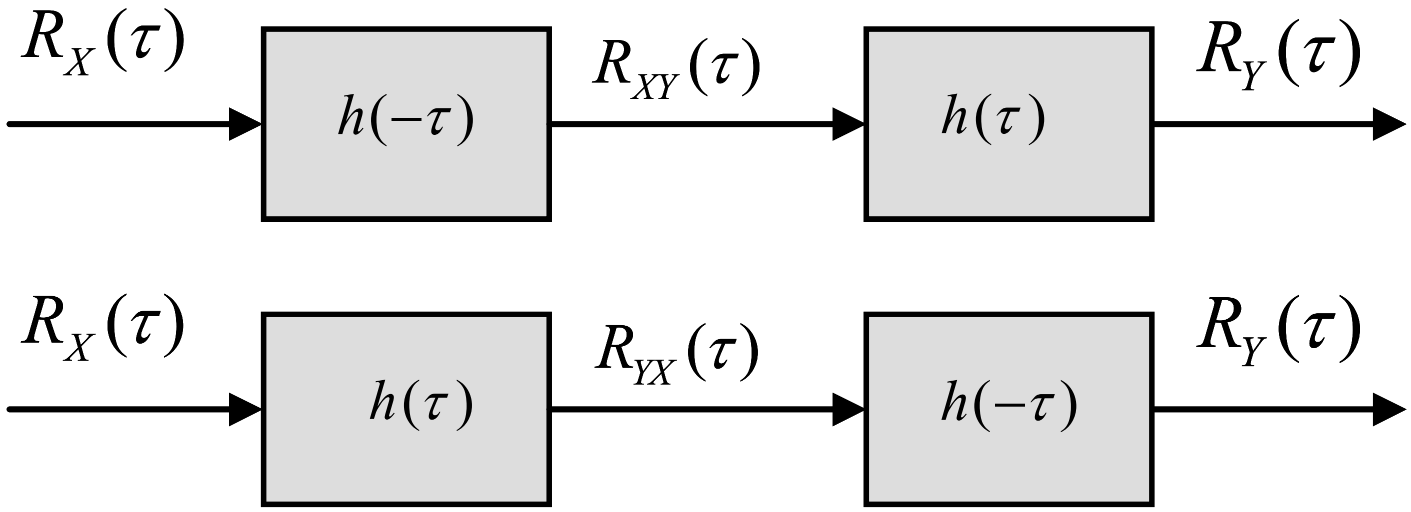


图3.6 平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

3.2.2 频谱法

只适用于平稳随机过程的分析

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)\otimes R_X(\tau) \longrightarrow G_{XY}(\omega)=H^*(\omega)G_X(\omega)$$

$$R_{YX}(\tau)=h(\tau)\otimes R_X(\tau) \longrightarrow G_{YX}(\omega)=H(\omega)G_X(\omega)$$

$$R_Y(\tau)=h(\tau)\otimes R_{XY}(\tau)=h(-\tau)\otimes R_{YX}(\tau)=h(-\tau)\otimes h(\tau)\otimes R_X(\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega)=H^*(\omega)G_{YX}(\omega)$$

$$=H^*(\omega)H(\omega)G_X(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 G_X(\omega)$$

3.2随机过程通过线性系统分析

例子3.2和3.4

设有微分方程 $\frac{dY(t)}{dt}+\alpha Y(t)=X(t)$

其中α为常数，且系统的初始状态为$Y(0)=0$

输入$X(t)$为平稳随机过程，且 $E[X(t)]=\lambda$

$$R_X(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$$

分别用冲激法和频谱法求 $Y(t)$ 的自相关函数

解：首先确定系统的冲击响应，令输入为 $\delta(t)$，则冲击响应为

$$\frac{dh(t)}{dt}+\alpha h(t)=\delta(t) \qquad h(t)=0 \;（t<0）$$

由此可解得，$h(t)=e^{-\alpha t} \qquad t\geq 0$

(1) 冲激响应法

$$m_Y(t)=h(t)*m_X(t)\mathrm{U(t)} = \int_0^t \lambda e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

3.2随机过程通过线性系统分析

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}R_X(t_1,t_2-u)h(u)du\ =\int_0^{t_2}[\lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2+u)]e^{-\alpha u}du$$

$$=\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha t_2})+\lambda e^{-\alpha(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)\qquad t_2>t_1$$

其中 $U(\cdot)$ 为单位阶跃函数。

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)du$$

$$=\int_0^{t_1}\left\{\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha t_2})+\lambda e^{-\alpha(t_2-t_1+u)}U(t_2-t_1+u)\right\}e^{-\alpha u}du$$

$$=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t_2})(1-e^{-\alpha t_1})+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_2-t_1)}(1-e^{-2\alpha t_1})\quad t_2>t_1$$

3.2随机过程通过线性系统分析

由于$R_Y(t_1,t_2)=R_Y(t_2,t_1)$，所以，只须将上式$t_1$和$t_2$的位置互换，就可以得到$t_1>t_2$情况。

由以上分析可以看出，输出$Y(t)$是非平稳的，当$t_1\to\infty,t_2\to\infty$时，输出$Y(t)$进入稳态，这时

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|} \qquad \tau=t_1-t_2$$

可见，用冲击响应法即可以分析瞬态时的统计特性，也可以分析稳态时的统计特性。

3.2随机过程通过线性系统分析

(2) 频谱法

由于系统是物理可实现的，且输入$X(t)$是从$t=0$加入，故而输出有一段瞬态过程，输出信号是非平稳的，这时不能应用频谱法进行分析，只有当$t_1\to\infty$，$t_2\to\infty$时，$Y(t)$进入稳态，输出信号为平稳信号，这时才能采用频谱法，即频谱法只适合稳态分析。

对系统的冲击响应取傅立叶变换，可得到系统的传递函数为

$$H(\omega)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

输入的功率谱密度为：$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi\lambda^2\delta(\omega)+\lambda$

得 $$G_Y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2G(\omega)=\frac{2\pi\lambda^2}{\alpha^2+\omega^2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{\alpha^2+\omega^2}$$

3.2随机过程通过线性系统分析

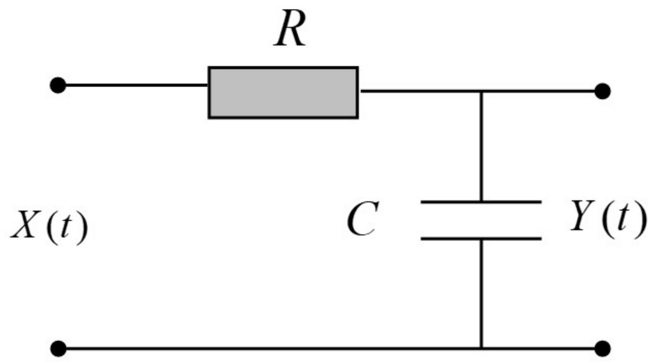
求上述功率谱的傅立叶反变换即可得输出得自相关函数，

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$$

3.2随机过程通过线性系统分析

例子3. 3和3. 5

假定输入为零均值的平稳随机过程，且相关函数为$R_X(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$，利用冲激法和频谱法求稳态时$Y(t)$自相关函数



解：根据表 3.1, RC 电路的冲击响应为$h(t)=\alpha e^{-\alpha t}U(t) \quad \alpha=1/RC$

系统的传递函数为 $H(\omega)=\dfrac{\alpha}{\alpha+j\omega}$

(1) 冲击响应法

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)\otimes R_X(\tau)=\int_0^{+\infty}R(\tau+u)h(u)du$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\beta|\tau+u|}\alpha e^{-\alpha u}du$$

3.2随机过程通过线性系统分析

当$\tau \geq 0$时， $R_{XY}(\tau)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta(\tau+u)} \alpha e^{-\alpha u} du=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-\beta \tau}$

当$\tau<0$时， $R_{XY}(\tau)=\int_{0}^{-\tau} e^{\beta(\tau+u)} \alpha e^{-\alpha u} du+\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-\beta(\tau+u)} \alpha e^{-\alpha u} du$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-\beta} e^{\beta \tau}-\frac{2 \alpha \beta}{\alpha^{2}-\beta^{2}} e^{\alpha \tau}$$

$$R_{Y}(\tau)=R_{XY}(\tau) \otimes h(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau-u) R_{XY}(u) du$$

当$\tau<0$时 $R_{Y}(\tau)=R_{XY}(\tau) \otimes h(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau-u) R_{XY}(u) du$

3.2随机过程通过线性系统分析

$$=\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{\beta u}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}e^{\alpha u}\right]\alpha e^{-\alpha(\tau-u)}du=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{\beta\tau}-\beta e^{\alpha\tau})$$

由于$R_Y(\tau)$是偶函数，所以$R_Y(\tau)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$

(2) 频谱法

$X(t)$的功率谱为$G_X(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

可得 $G_Y(\omega)=G_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2=\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cdot\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$

3.2随机过程通过线性系统分析

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha\cdot\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}-\beta\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right]$$

求上式的傅立叶反变换, 可得 $R_Y(\tau)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$

两种方法求得结果完全相同, 在这里, 频谱法更为简单。

3.2.3 平稳性讨论

情况一：

如果输入$X(t)$是平稳的，$h(t)$在$(-\infty,+\infty)$中都存在(即系统是物理不可实现的)，那么由(3.2.3)式、(3.2.9)式和(3.2.11)式可以看出，输出$Y(t)$ 也是平稳的，且输入与输出是联合平稳的。

3.2.3 平稳性讨论

情况二：

对于物理可实现系统，假定输入X(t)平稳，若输入从-∞加入（双侧随机信号）**则输出Y(t)平稳，且与X(t)联合平稳；**

$$m_Y(t) = m_X \int_0^{+\infty} h(u)du = m_X H(0)$$

$$R_{XY}(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau)Y(t)\} = \int_0^{+\infty} R_X(\tau+v)h(v)dv$$

$$R_{XY}(\tau)$$

$$R_Y(t+\tau, t) = E[Y(t+\tau)Y(t)] = \int_0^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)du$$

$$R_Y(\tau)$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} R_X(\tau+v-u)h(u)h(v)dudv$$

3.2随机过程通过线性系统分析

3.2.3 平稳性讨论

情况二：

对于物理可实现系统，假定输入X(t)平稳，若输入从-∞加入(双侧随机信号) 则输出Y(t)平稳，且与X(t)联合平稳；

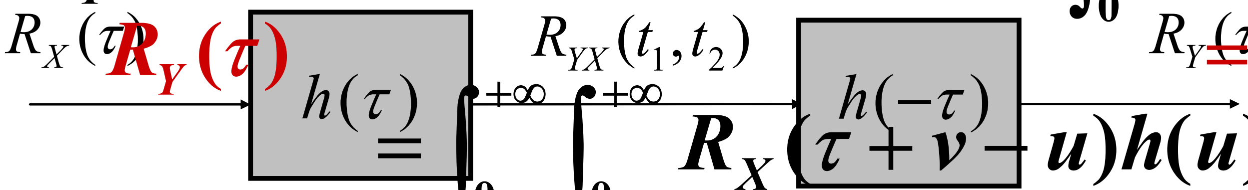
$$m_Y(t) = m_X\int_0^{+\infty} h(u)du = m_X H(0)$$

$$R_{XY}(t+\tau,t) = E\{X(t+\tau)Y(t)\} = \int_0^{+\infty} R_X(\tau+v)h(v)dv$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau)*h(-\tau)$$

$$R_Y(t+\tau,t) = E[Y(t+\tau)Y(t)] = \int_0^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)du$$

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau)*h(\tau)$$



$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} R_X(\tau+v-u)h(u)h(v)dudv$$

$$= R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

3.2.3 平稳性讨论

情况三：

对于物理可实现系统，假定输入X(t)平稳，若输入从0时刻加入（单侧随机信号）则输出Y(t)非平稳。

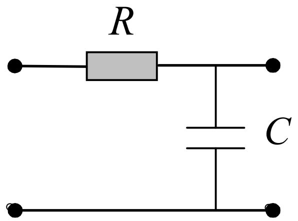
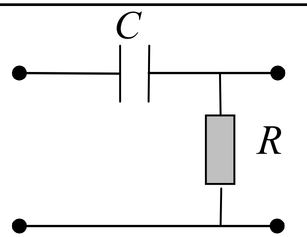
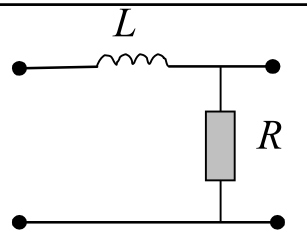
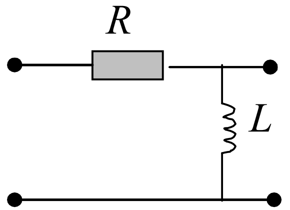
$$Y(t)=\int_0^{+t} X(t-u)h(u)du$$

$$m_Y(t)=m_X\int_0^t h(u)du$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(t_1-u,t_2-v)h(v)h(u)dvdu$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(\tau-u+v)h(v)h(u)dvdu$$

3.2随机过程通过线性系统分析

电路	$H(\omega)$	$h(t)$
	$\dfrac{1}{1+j\omega RC}$	$\dfrac{1}{RC}e^{-t/RC}U(t)$
	$\dfrac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$	$\delta(t)-\dfrac{1}{RC}e^{-t/RC}U(t)$
	$\dfrac{R}{R+j\omega L}$	$\dfrac{R}{L}e^{-Rt/L}U(t)$
	$\dfrac{j\omega L}{R+j\omega L}$	$\delta(t)-\dfrac{R}{L}e^{-Rt/L}U(t)$

输入输出相关函数关系图