数字信号处理

邓振淼

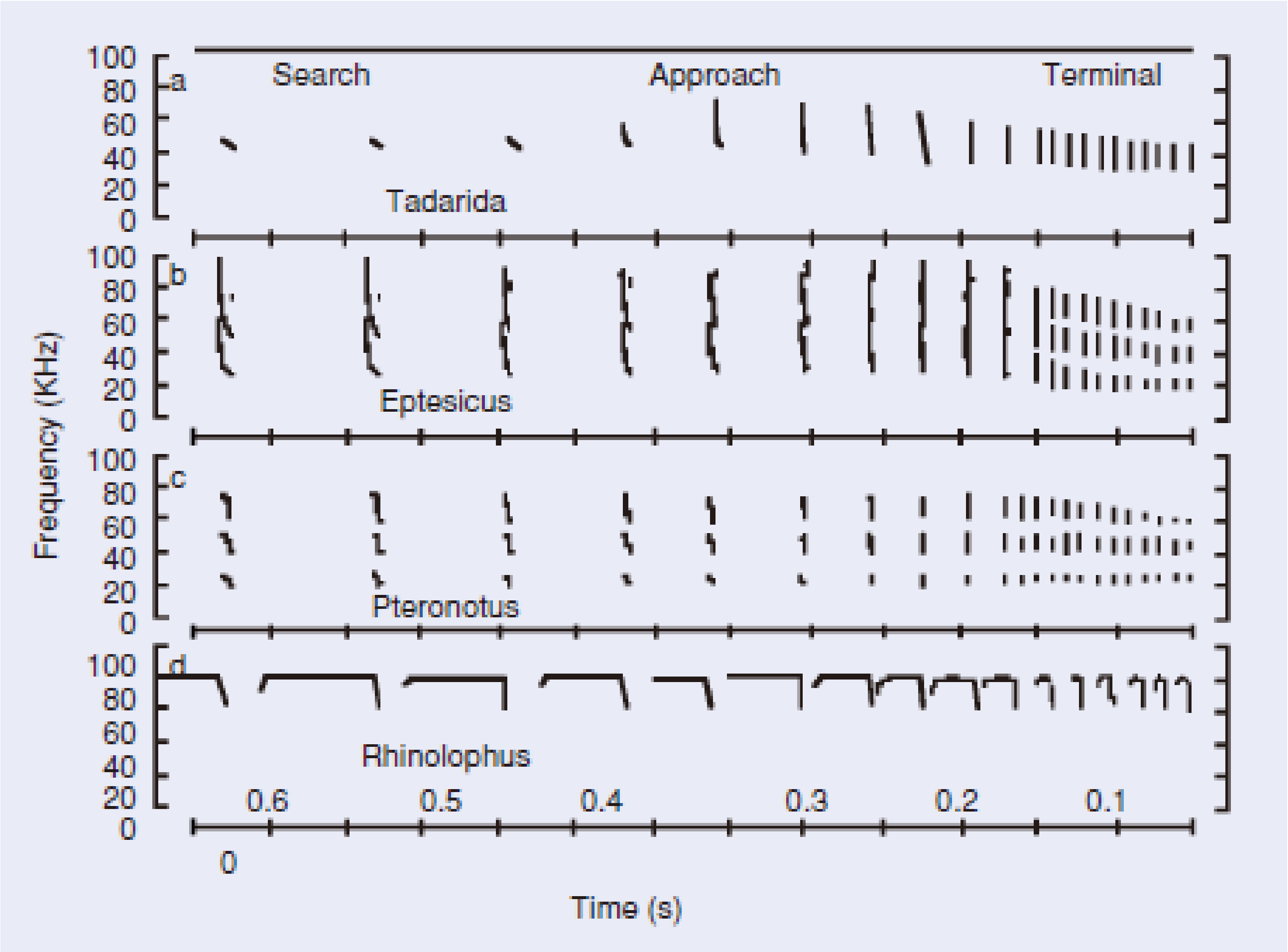
中山大学电子与通信工程学院

2019-8-28

离散傅里叶变换(DFT)

- 离散傅里叶变换的定义及物理意义
- 离散傅里叶变换的基本性质
- 频率域采样
- DFT应用举例


腾讯视频


Search
Approach
Terminal
a
Tadarida
b
Eptesicus
c
Pteronotus
d
Rhinolophus
Frequency (KHz)
100
80
60
40
20
0
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Time (s)

离散傅里叶变换(DFT)

- 离散傅里叶变换(DFT)的重要性：
  - 频域离散化，可采用数字信号处理在频域进行数值运算。
  - DFT有快速算法，提高了实时性，设备得以简化。
- DFT的定义：设$x(n)$是一个长度为M的有限长序列，则定义$x(n)$的N点离散傅里叶变换为

$$X(k)=\mathbf{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,\cdots,N-1$$

- $X(k)$的离散逆傅里叶变换(IDFT)为

$$x(n)=\mathbf{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},n=0,1,\cdots,N-1$$

- 其中$W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\boldsymbol{kn}}$，$N$为DFT变换区间的长度，$N\geq M$。
- 常用$\mathbf{DFT}[x(n)]_N$和$\mathbf{IDFT}[X(k)]_N$表示N点DFT和N点IDFT。

IDFT的唯一性

$$\mathrm{IDFT}[X(k)]_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}$$
$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-k(m-n)}$$

- 因为

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-k(m-n)}=\begin{cases}1, m=n+iN, i\text{为整数}\\0, m\neq n+iN, i\text{为整数}\end{cases}$$

- 所以在变换区间内

$$\mathrm{IDFT}[X(k)]_N=x(n), n=0,1,\cdots,N-1$$

- 因此IDFT是唯一的。

举例

- 例3.1.1 $x(n)=R_4(N)$，求$x(n)$的4点和8点DFT。
- 解：$N=4$时，

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}}=\begin{cases}4, k=0\\0, k=1,2,3\end{cases}$$

- $N=8$时，

$$\neq$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}, k=0,1,\cdots,7$$

对M点信号$x(n)$做N点DFT相当于对$x(n)$首先把补$N-M$个零，然后做N点DFT。补零会产生什么效果？请同学们思考

DFT与FT和ZT之间的关系

- 设$x(n)$是一个长度为M的有限长序列，其ZT和N点DFT分别为

$$X(z)=\mathbf{ZT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=\mathbf{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,\cdots,N-1$$

- 比较两式，可得

$$X(k)=X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},k=0,1,\cdots,N-1$$

说明：$x(n)$ 的N点DFT是ZT在单位圆上的N点等间隔采样。

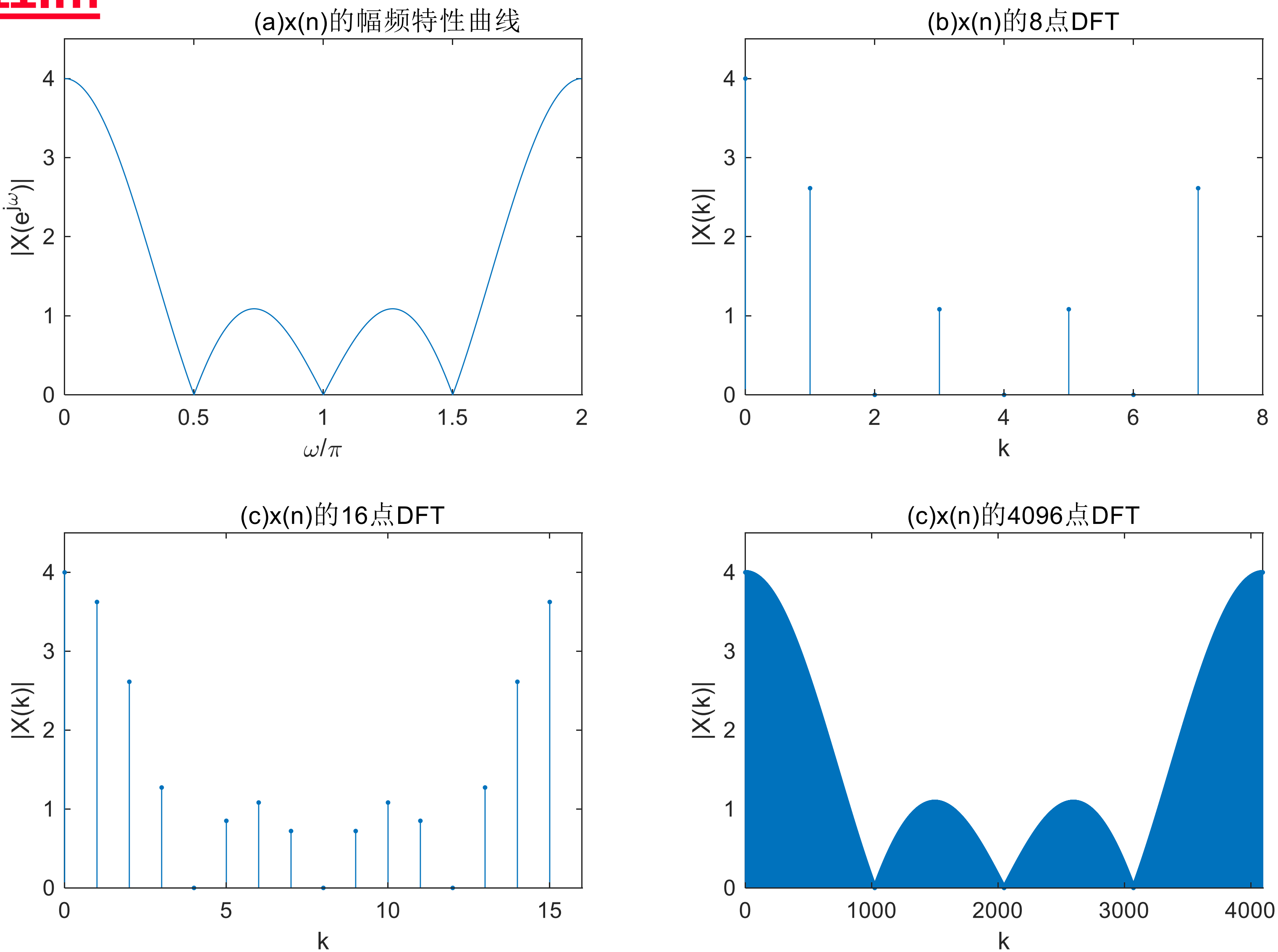
$$X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,\cdots,N-1$$

说明：$X(k)$是$X(e^{j\omega})$在区间$[0,2\pi]$上的N点等间隔采样。

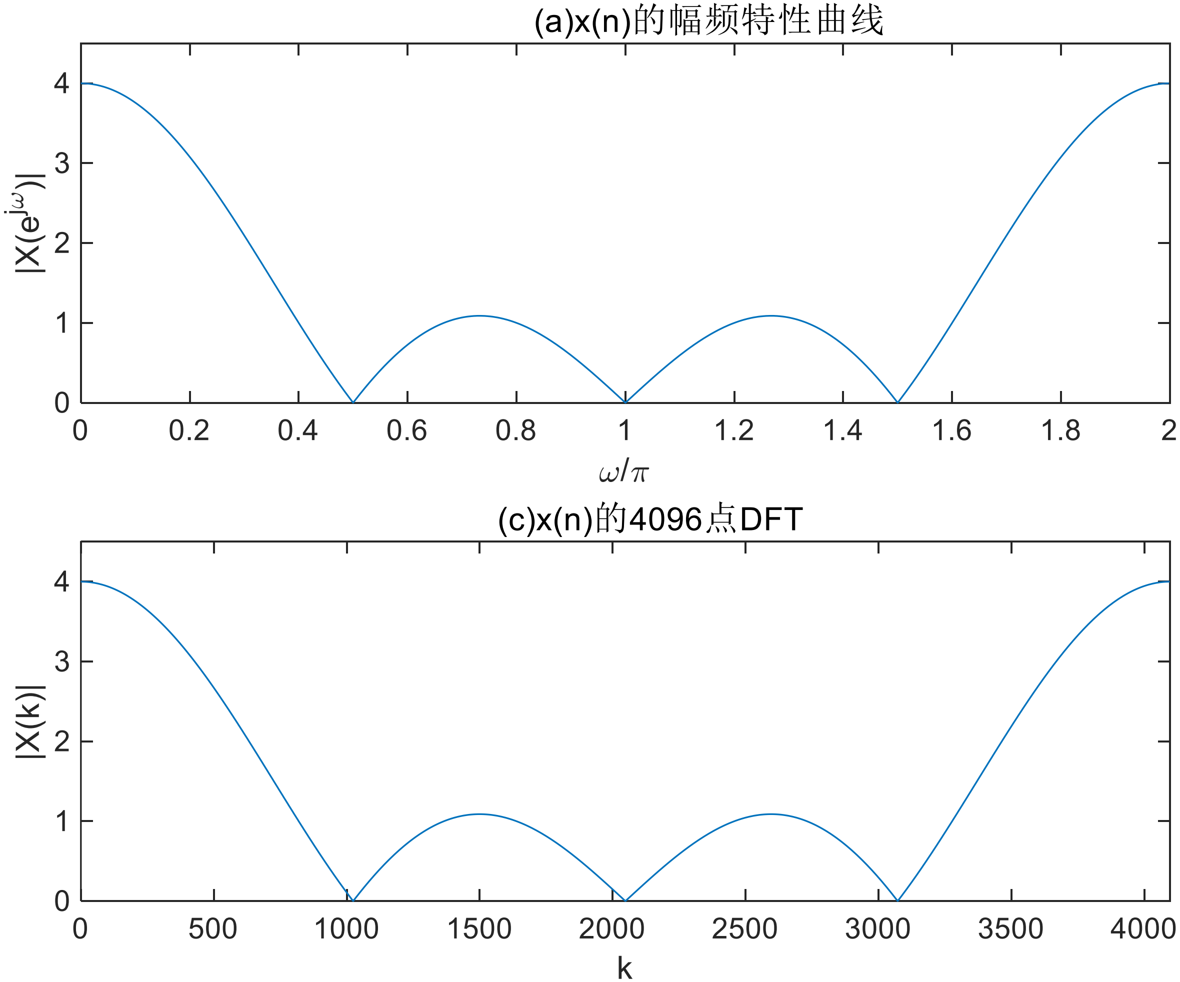
- 这就是DFT的物理意义！

DFT与FT和ZT之间的关系

fig311.m



➢ 把fig311.m里的stem改成plot，发现补很多零后DFT的幅度跟幅频特性曲线完全吻合。



DFT隐含的周期性

- 由于W_N^{kn}的周期性，导致$X(k)$和$x(n)$隐含周期性，且周期均为N。即$W_N^k = W_N^{k+mN}$, k和m为整数，N为自然数。亦即，我们做DFT时，无意识地实际上把信号当成是周期序列了！
- 因此

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

- 任何周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$都可以看做长度为N的有限长序列的周期延拓。即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$$
$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

- 周期序列$\tilde{x}(n)$从$n=\mathbf{0}$到$n=\boldsymbol{N}-\mathbf{1}$的第一个周期称为$\tilde{x}(n)$的主值区间，而$x(n)$称为$\tilde{x}(n)$的主值序列。

DFT隐含的周期性

- 当N大于等于序列$x(n)$的长度时，用$x((n))_N$表示$x(n)$以N为周期的周期延拓序列

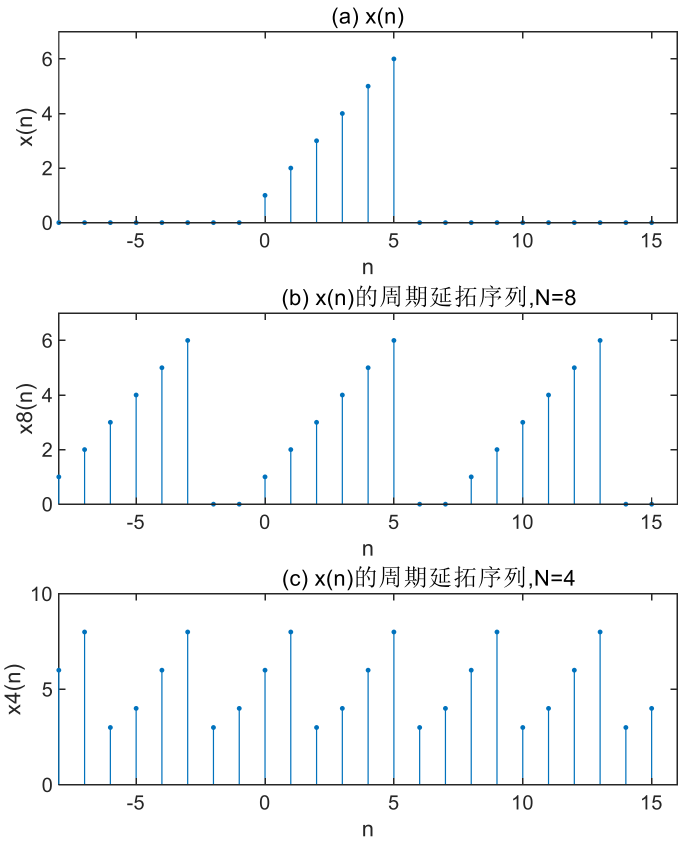
$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

- $((n))_N$表示模N对n求余。
- 例如，$N = 8$，$\tilde{x}(n) = x((n))_8$
- 则

$$\tilde{x}(8) = x\big((8)\big)_8 = x(0)$$

$$\tilde{x}(9) = x\big((9)\big)_8 = x(1)$$

- 延拓时要求$N \geq M$。否则有一些样本会交叠。



DFT与DFS的关系

- 设$x(n)$长度为M, 且$\tilde{x}(n)=x((n))_N$，$\boldsymbol{N}\geq\boldsymbol{M}$，则$\tilde{x}(n)$的DFS为

$$\tilde{X}(\boldsymbol{k})=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x((n))_N W_N^{kn}=\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}}$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

- 其中：$X(k)=\tilde{X}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{k})$
- 回顾$x(n)$的$\boldsymbol{N}$点DFT：

$$X(k)=\mathbf{DFT}[x(n)]=\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,\cdots,N-1}$$

- 结论：周期延拓序列的频谱完全由其DFS的序数$\tilde{X}(\boldsymbol{k})$决定，而$X(k)$是$\tilde{X}(\boldsymbol{k})$的主值序列，因此$X(k)$就表征了$x((n))_N$的频谱特性！这是$\boldsymbol{N}$点DFT的第二种物理意义。

用MATLAB计算序列的DFT

Y = fft(X)
Y = fft(X,n)
Y = fft(X,n,dim)

X为输入的数字信号，n为DFT的点数，dim为维数。如果n是2的次幂，就做基2FFT，否则进行因式分解。

```
xn=[1 1 1 1];                  %输入时域序列向量xn=R8(n)
Xk16=fft(xn,16);               %计算xn的16点DFT
Xk32=fft(xn,32);               %计算xn的32点DFT
k=0:15;wk=2*k/16;              %产生16点DFT对应的采样点频率(关于π归一化值)
subplot(2,2,1);stem(wk,abs(Xk16),'.'); %绘制16点DFT的幅频特性图
title('(a)16点DFT的幅频特性图');xlabel('ω/π');ylabel('幅度')
subplot(2,2,3);stem(wk,angle(Xk16),'.'); %绘制16点DFT的相频特性图
line([0,2],[0,0]);title('(b)16点DFT的相频特性图')
xlabel('ω/π');ylabel('相位');axis([0,2,-3.5,3.5])
k=0:31;wk=2*k/32;              %产生32点DFT对应的采样点频率(关于π归一化值)
subplot(2,2,2);stem(wk,abs(Xk32),'.'); %绘制32点DFT的幅频特性图
title('(c)32点DFT的幅频特性图');xlabel('ω/π');ylabel('幅度')
subplot(2,2,4);stem(wk,angle(Xk32),'.'); %绘制32点DFT的相频特性图
line([0,2],[0,0]);title('(d)32点DFT的相频特性图');
xlabel('ω/π');ylabel('相位');axis([0,2,-3.5,3.5])
```

傅里叶变换前后的信号分析

- 某被噪声污染的信号$r(n)=Ae^{j\theta_c}e^{j2\pi f_c n}+w(n)$，请问DFT前后的信噪比有何变化？
- 解：$s(n)$的DFT为

$$\boldsymbol{R}(k)=\mathbf{DFT}[r(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}r(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}Ae^{j\theta_c}e^{j2\pi f_c n}W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}w(n)W_N^{kn}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k})$$

注意到$W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}$，所以当$\frac{K}{N}=f_c$时，

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})=A\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\theta_c}e^{j\mathbf{0}}$$

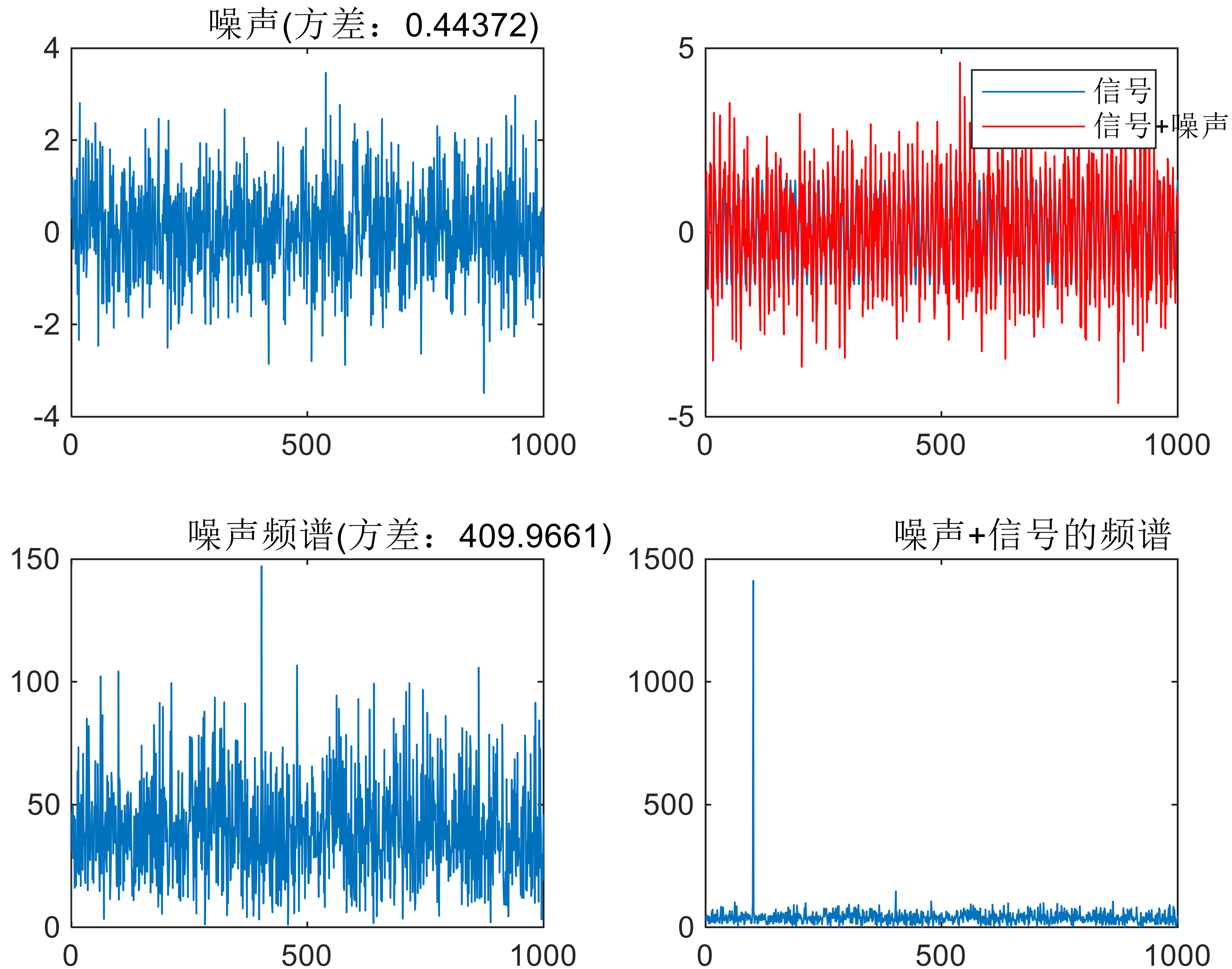
则$|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})|=NA$。根据概率论的知识，$w(n)$的方差为$\sigma^2$，而$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k})$的方差为$N\sigma^2$。

信噪比的定义为$\frac{A^2}{\sigma^2}$，所以FT前后的信噪比分别为$\frac{A^2}{\sigma^2}$和$\frac{\boldsymbol{N}^2A^2}{\boldsymbol{N}\sigma^2}$(即，$\boldsymbol{N}\frac{A^2}{\sigma^2}$)

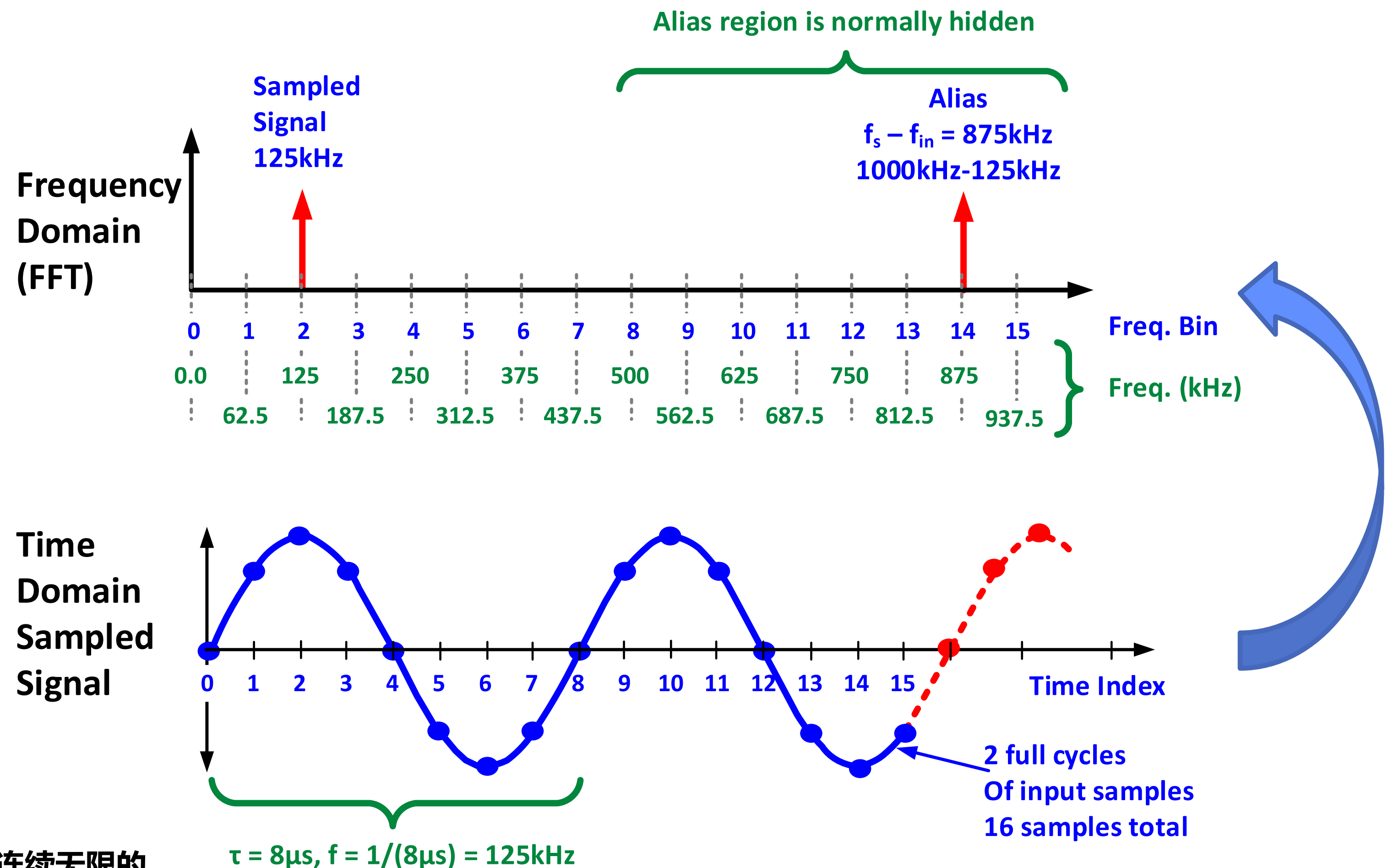
注意到，经过傅里叶变换，单频正弦波信号的信噪比**提高了*N*倍！**

事实上，其它有规律的信号有同样的结论。

傅里叶变换前后的信号分析



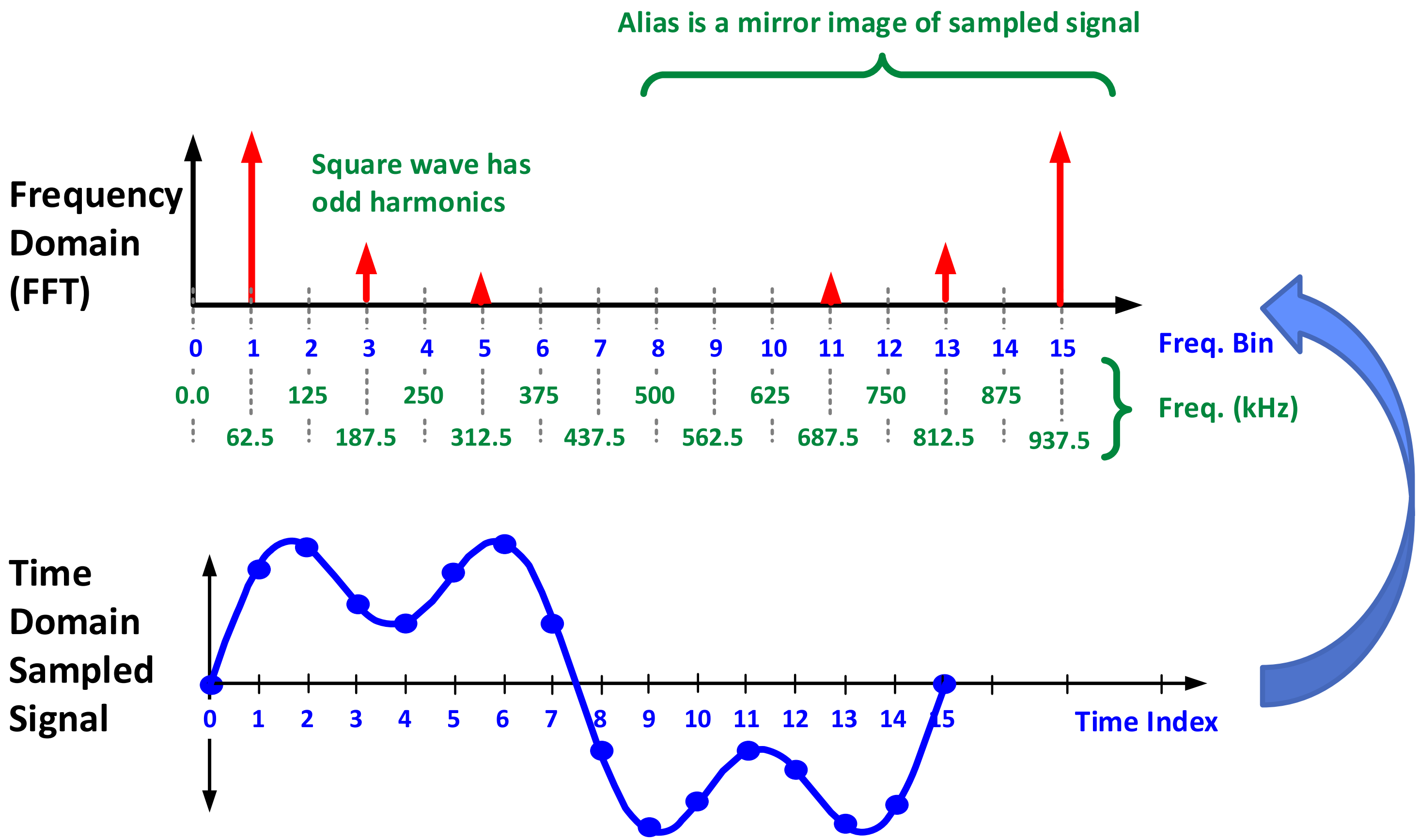
FFT和频率分辨率



1. FFT假定时域信号是连续无限的
2. 时域上的点数等于FFT的点数
3. 混叠(alias)区域(负频率区域，只有实数才存在)通常不考虑。镜像(负频率)关于fs / 2对称
4. 频率分辨率 = Δf = fs / N

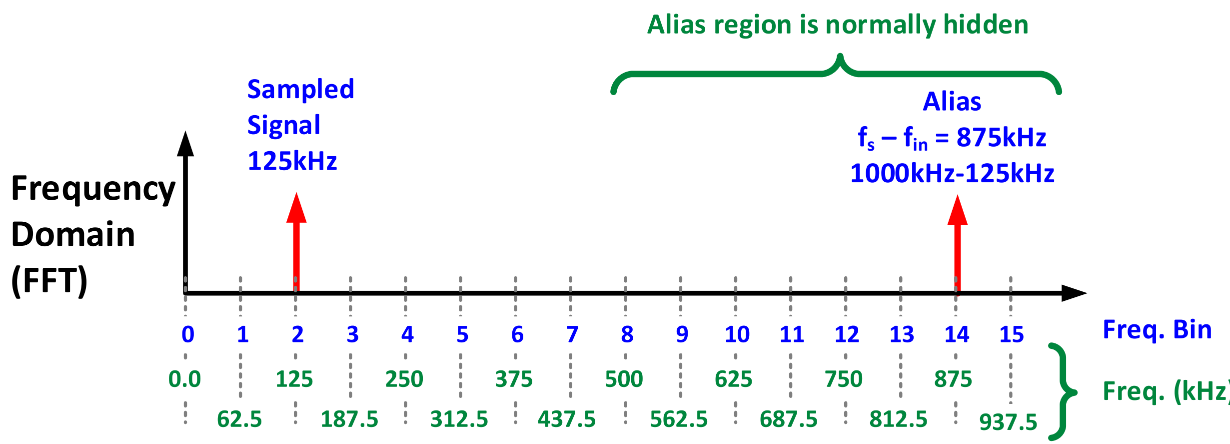
   Δf = fs / N = 1MHz / 16 = 62kHz

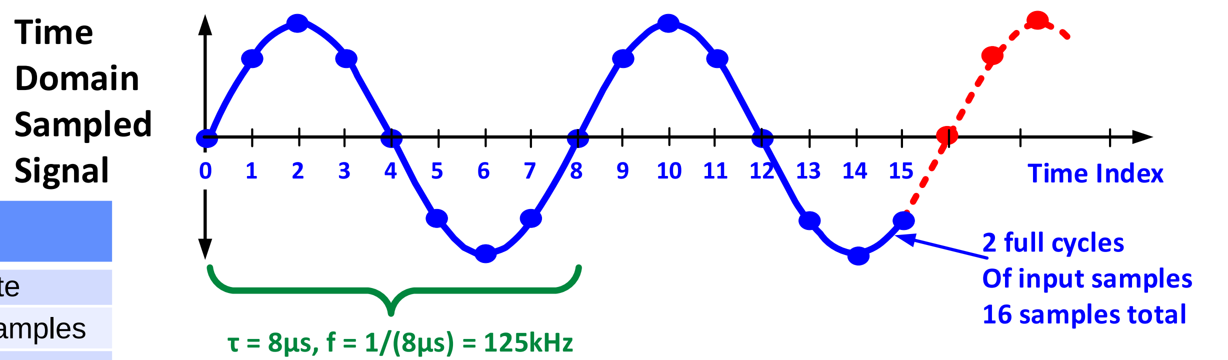
Alias是采样信号的镜像



- 方波的例子
- 方波包括奇数次谐波，例如3, 5, 7 …
- 注意本例里关于500kHz对称

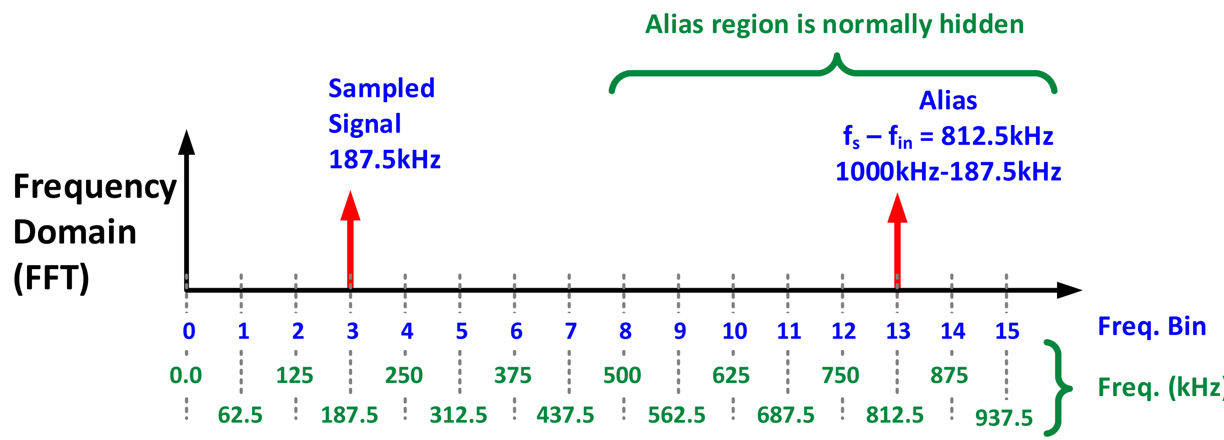
FFT计算举例

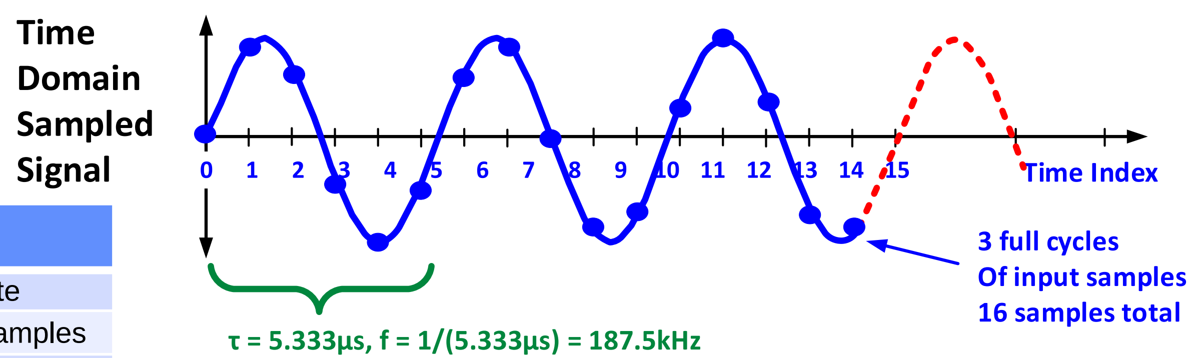




Example FFT	
$f_s = 1\text{Msps}$	Sampling Rate
$N_{samp} = 16$	Number of Samples
$\Delta f = \frac{f_s}{N_{samp}} = \frac{1\text{Msps}}{16} = 62.5ksps$	Frequency Resolution
$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1\text{Msps}} = 1\mu s$	Sampling time
$f_{in} = 125kHz$	Input signal
$k_f = \frac{f_{in}}{\Delta f} = \frac{125kHz}{62.5ksps} = 2.0$	Frequency Bin Note: f_{in} is an exact integer multiple of Δf

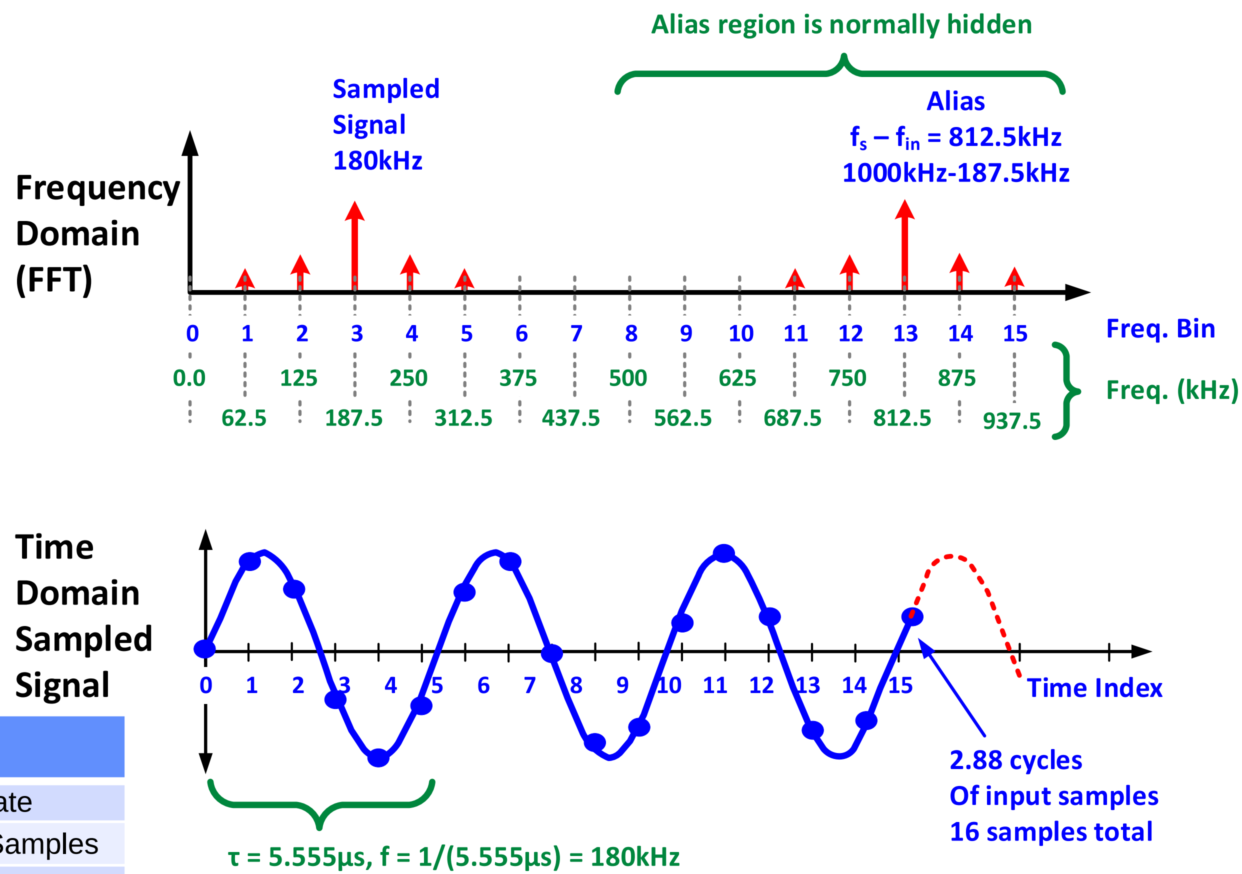
FFT计算举例-不同的输入频率





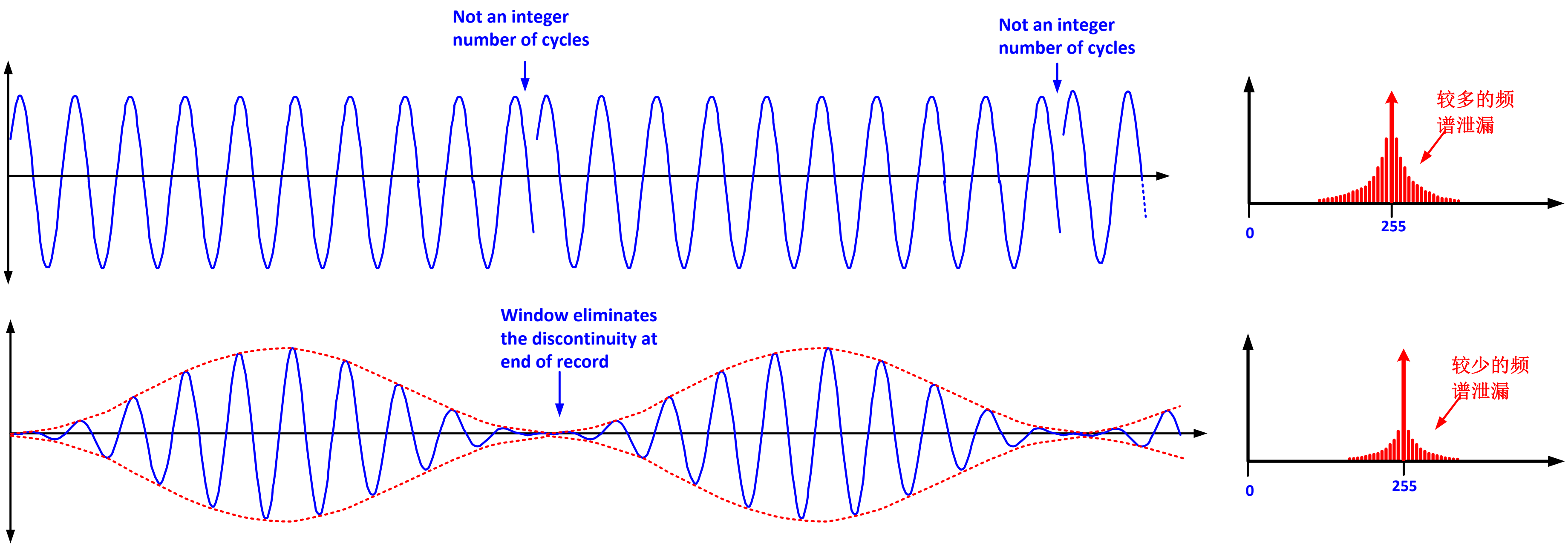
Example FFT	
$f_s = 1\text{Msps}$	Sampling Rate
$N_{samp} = 16$	Number of Samples
$\Delta f = \frac{f_s}{N_{samp}} = \frac{1\text{Msps}}{16} = 62.5ksps$	Frequency Resolution
$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1\text{Msps}} = 1\mu s$	Sampling time
$f_{in} = 187.5kHz$	Input signal
$k_f = \frac{f_{in}}{\Delta f} = \frac{187.5kHz}{62.5ksps} = 3.0$	Frequency Bin Note: f_{in} is an exact integer multiple of Δf

FFT – Spectral Leakage

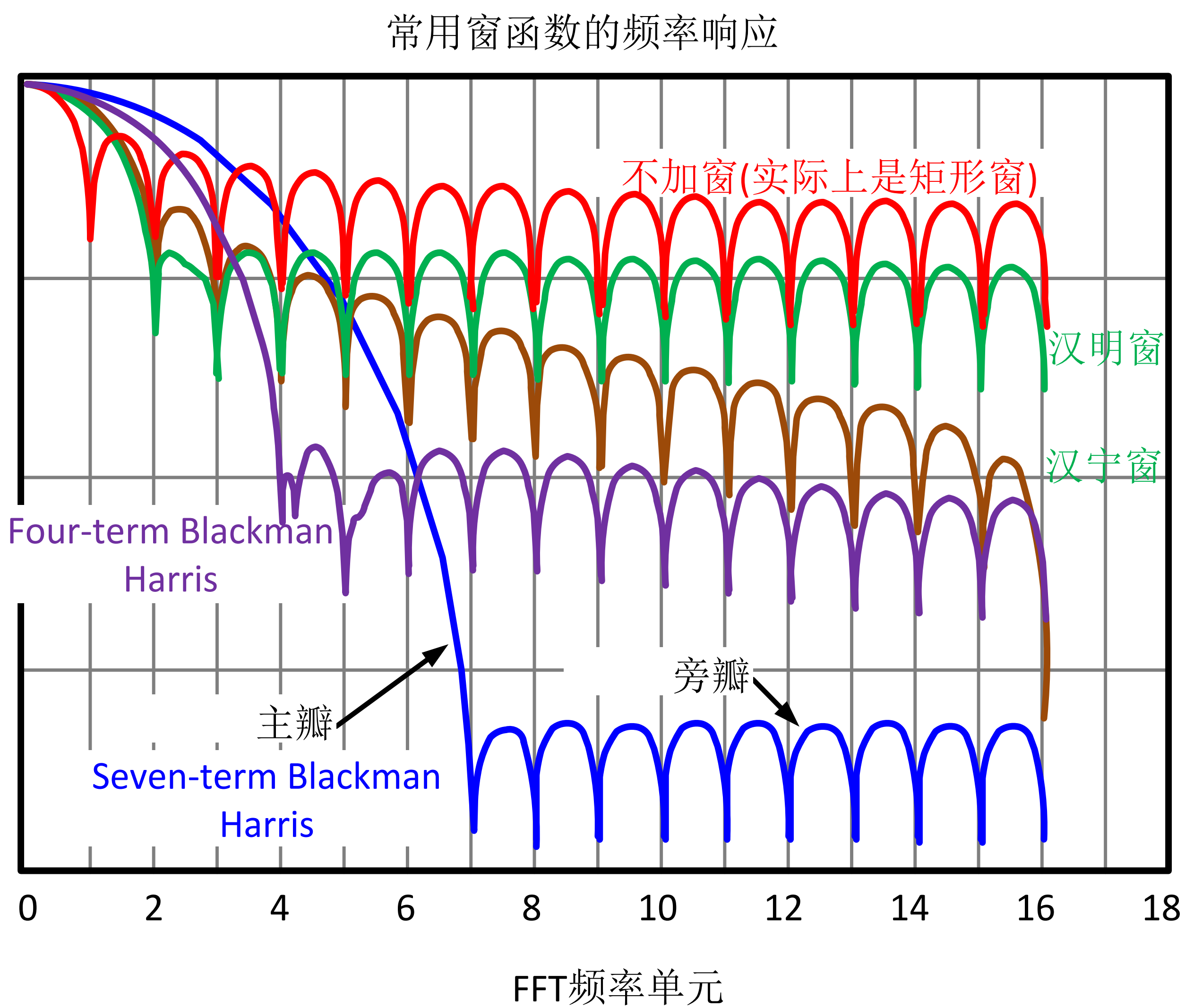


Example FFT	
$f_s = 1\text{Msps}$	Sampling Rate
$N_{samp} = 16$	Number of Samples
$\Delta f = \frac{f_s}{N_{samp}} = \frac{1\text{Msps}}{16} = 62.5ksps$	Frequency Resolution
$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1\text{Msps}} = 1\mu s$	Sampling time
$f_{in} = 180kHz$	Input signal
$k_f = \frac{f_{in}}{\Delta f} = \frac{180kHz}{62.5ksps} = 2.88$	Frequency Bin Note: f_{in} is an exact integer multiple of Δf

加窗：消除采样波形的不连续



各种窗函数频率响应的比较



- **理想情况下，我们希望的是非常窄的主瓣和非常低的旁瓣(副瓣)**
- **根据ADC的特性，7 term Blackman Harris是较常用的。**
- **通信和雷达等应用根据需要不同，采用相应的窗函数。**
- **雷达常用汉明窗**
- **通信常用升余弦**
- **电子对抗常用具有阻带等波纹特性的Parks-McClellan窗**

噪声污染的正弦波信号模型

高斯白噪声污染的正弦波信号表示为:

$$x(n) = Ae^{j\theta_c}e^{j2\pi f_c n\Delta t} + w(n), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

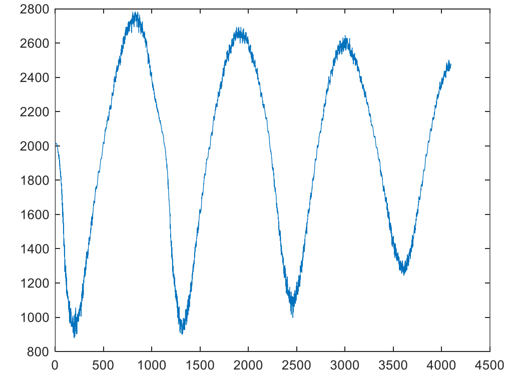
其中A, f_c,θ_c分别是振幅, 频率和初相, Δt是采样间隔, N是样本数, $w(n)$是实部和虚部相互独立的, 方差为$2\sigma^2$的零均值复高斯白噪声.

- M Rife. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. IEEE Transactions on Information Theory, 1974.

  648 Citations

  IEEE (633) | Other Publishers (7) | Patents (8)

- 虽然正弦波频率估计是一个最简单，最经典的估计问题，但一直是研究热点，到现在国内外仍然有很多研究。



正弦波频率估计

- 邓振淼. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究，电子学报，2007.

	篇名	作者	刊名	年/期	被引	下载	预览	分享
1	正弦波频率估计的修正Rife算法	邓振淼; 刘渝; 王志忠	数据采集与处理	2006/04	78	480		
2	正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究	邓振淼; 刘渝	电子学报	2007/01	54	435		

- 审稿记录：
  - 电子学报，基于全相位分段的双子段相位差频率估计法，2014
  - 电子学报， 一种高精度的频率估计算法研究，2012
  - 电子学报，SAR复图像域多普勒中心频率估计，2012
  - 电子学报，SVR在基于相位频率估计算法中的应，2013
  - 电子学报，基于交叉信息融合的频率估计方法，2013
  - 兵工学报，基于双门限判决修正Rife算法的GPS信号载波频偏估计，2013
  - 系统工程与电子技术，电子与信息学报。。。

-

正弦波频率估计的应用

- 雷达目标速度估计 $s(t)=A\exp(j4\pi f_c\frac{v}{c}t)=A\exp\left[\boxed{j2\pi\left(2f_c\frac{v}{c}\right)t}\right]$
- 雷达测距：发射信号 接收信号

$$s(t)=\exp(j\pi kt^2) \qquad r(t)=\exp[j\pi k(t-\tau)^2]+n(t)$$

测距：

$$r(t)s^*(t)=\exp(-j\pi kt^2)\exp[j\pi k(t-\tau)^2]+n'(t)$$
$$=\exp(\boxed{-j2\pi k\tau t}+\pi k\tau^2)+n'(t)$$

- 通信里的频偏估计：
  - BPSK： $s_B(t)=A\exp\{j[2\pi f_e t+\theta_c+\phi(t)]\}$
  - QPSK： $s_Q(t)=A\exp\{j[2\pi f_e t+\theta_c+\phi(t)]\}$

$$\phi(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Pi(t-iT_s)$$

$$\alpha_i\in\{\frac{2\pi}{M}l\}_{l=0}^{M-1}$$

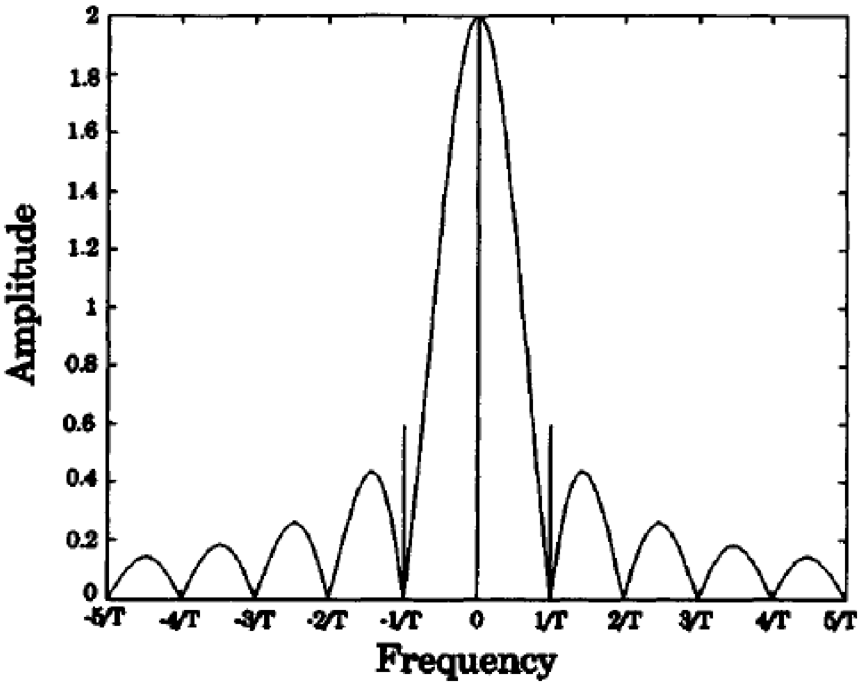
$$s_B^2(t)=A^2\exp\{\boxed{j[4\pi f_e t+2\theta_c]}\}$$
$$s_Q^4(t)=A^4\exp\{\boxed{j[8\pi f_e t+4\theta_c]}\}$$

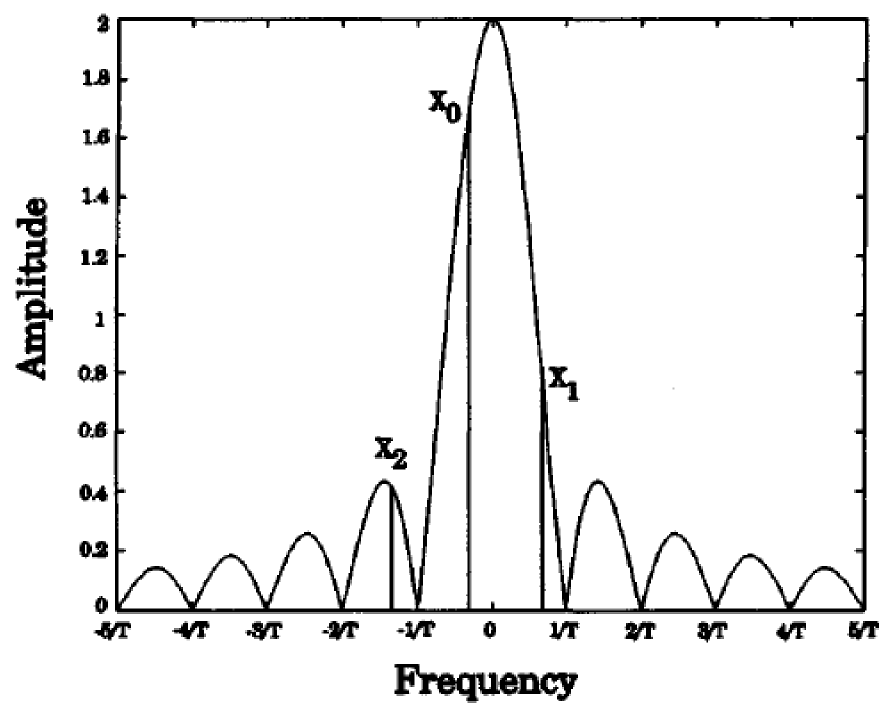
噪声污染的正弦波信号模型

高斯白噪声污染的正弦波信号表示为:

$$x(n) = Ae^{j\theta_c} e^{j2\pi f_c n\Delta t} + w(n), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

其中A, f_c, θ_c分别是振幅, 频率和初相, Δt是采样间隔, N是样本数, $w(n)$是实部和虚部相互独立的, 方差为$2\sigma^2$的零均值复高斯白噪声.





Rife算法的推导

- 设k为最大谱线与真实频率f_c之间的距离，三根最大的谱线分别为

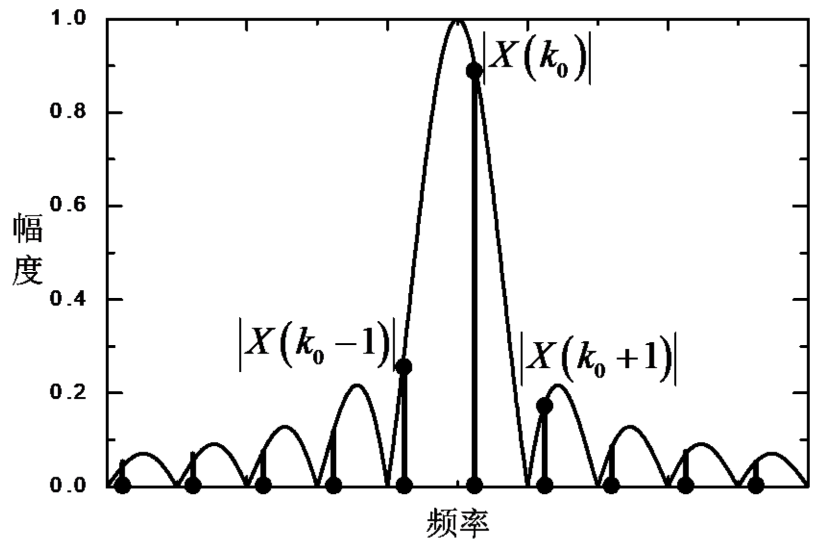
$$X_0 = \frac{\sin(\pi T k)}{\pi k} \qquad X_1 = \frac{-\sin(\pi T k)}{\pi\left(k - \frac{1}{T}\right)} \qquad X_2 = \frac{\sin(\pi k)}{\pi\left(k + \frac{1}{T}\right)}$$

- 假设$X_1 > X_2$，则联立X_0和X_1解方程可以得到

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{k}{1-k} \quad \text{or} \quad k = \frac{X_1}{X_0 + X_1}$$

- 从而f_c等于

$$f_c = k_0 \pm k$$



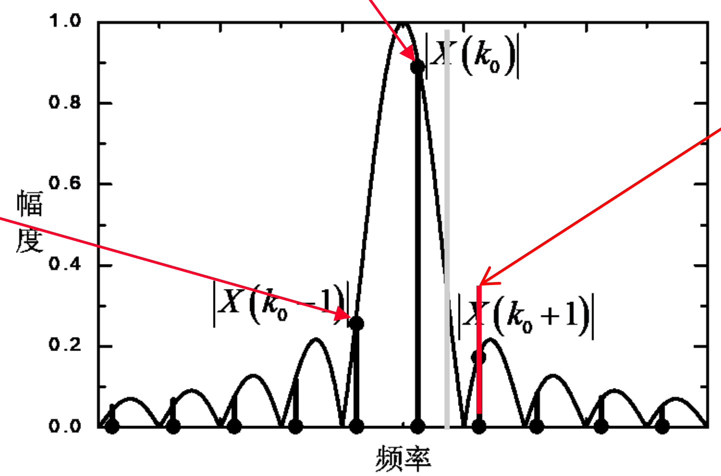
Rife算法

一般情况下,离散频谱的幅度有一个最大值, 记为$|X(k_0)|$.最大值相邻的两根谱线幅度值分别记为$|X(k_0-1)|$和$|X(k_0+1)|$.D C Rife指出利用最大谱线和次大谱线进行插值得到真实频率估计值(即Rife算法):

$$\hat{f}_c=\frac{1}{T}\left(k_0+r\frac{|X(k_0+r)|}{|X(k_0)|+|X(k_0+r)|}\right)$$

当$|X(k_0+1)|\le|X(k_0-1)|$时$r=-1$,当$|X(k_0+1)|\ge|X(k_0-1)|$时$r=1$.

当真实频率与量化频率接近时,第二大谱线$|X(k_0+r)|$的幅度较小, 此时受噪声的影响插值的精度下降.



方向错误

两个正弦波的相互影响

- $s(n) = s_1(n) + s_2(n)$
  $= A_1 e^{j(2\pi f_1 n+\theta_1)} + A_2 e^{j(2\pi f_2 n+\theta_2)}$
- 请大家思考两个正弦波信号加在一起，对幅度谱有何影响？
- 解：$s(n)$的**FT**为

$$S(e^{j\omega}) = A_1 e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + A_2 e^{j\theta_2} W(e^{j(\omega-\omega_2)})$$

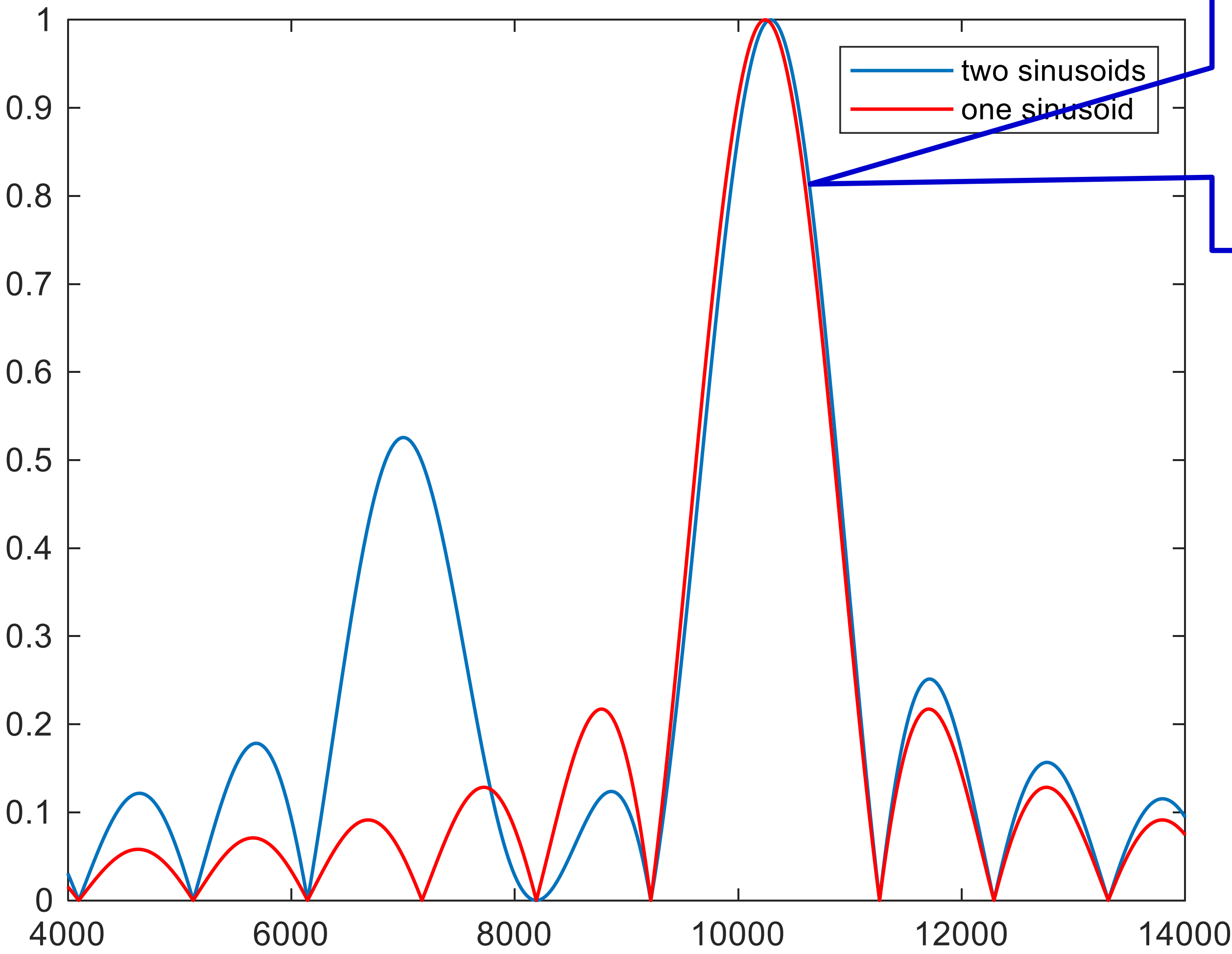
其中$W(e^{j\omega})$为矩形窗的FT。根据$X(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$可以得到$s(n)$的**DFT**$X(k)$。

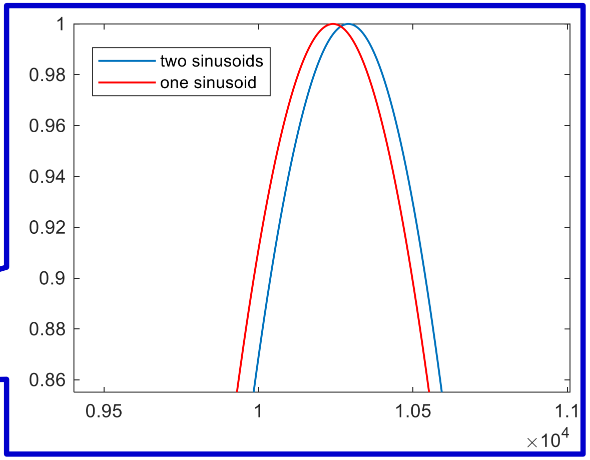
$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- 看起来似乎好像两个信号的频率之间是没有什么瓜葛。实际上是否如此？

两个正弦波的相互影响

TwoTone.m





两个正弦波的相互干涉，会导致峰值的形状和位置出现变化！

基于FFT频率估计的进一步讨论

- 上述的分析基于的是不加窗(实际上矩形窗)，如果采用加窗，加不同的窗，估计方法是否有区别?
- 请参考《宽带数字接收机》第四章

作业

1. 课后习题P116-121：1(6)(9),2(2),3,8,13,。
2. 补充作业：请用DFT分析复正弦波信号

$$s(n)=e^{j2\pi fn}, n=0,1,\cdots,\boldsymbol{M}-1$$

其中$f=\mathbf{0.1}$，$\boldsymbol{M}=\mathbf{32}$。请分别用(1)$\boldsymbol{N}=\mathbf{32}$,(2)$\boldsymbol{N}=\mathbf{64}$，(3)$\boldsymbol{N}=\mathbf{1024}$分析的频谱$s(n)$。请分析补零对频谱的影响。(4)请尝试用被零的方法得到信号的准确频率。

拨高选做题：(5)请加上20dB的噪声，然后研究采用补零的方法，需要补多少个零，才能使得到的频率估计精度达到理论下限，即克拉美-罗限(见下页)。

3.补充作业：请大家估计出老师提供的数据的信号的频率，并估算出目标的距离。参数：采样率476kHz。距离估算公式：f/(250e6/(2.1e-6*4096))*3e8/2。其中f是从数据中估计出来的频率。(信号是signal.mat)

正弦波频率估计的克拉美-罗限

- 对于非随机的被估计量θ，若存在无偏估计$\hat{\theta}$，它的方差一定大于等于克拉美–罗限。对复正弦波信号，在相位、幅度和频率三个参数均未知的情况下，频率估计的方差下限为

$$\operatorname{var}\left\{\hat{f}\right\} = \frac{12\sigma^2}{(2\pi)^2 A^2 \Delta t^2 N(N^2-1)}$$

- 其中A为信号的幅度，Δt为采样间隔，N为样本数，σ^2为复高斯白噪声的方差。
- 代码提供给大家。

谢谢！