Déterminants

A. DECK

Table des matières

Chapitre 1

Préface

1.1 Notations

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas que).
Lorsque nous parlerons de groupes non-abélien, la loi de composition interne sera notée multiplicativement et l'élément neutre sera noté **1** ou **e**.
L'application identité sera notée Id, et la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ sera notée Id_n.
Si A est une matrice, on notera ${}^tA$ sa transposée.
Pour parler d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, j'utiliserai l'abriéviation $\mathbb{K}$-ev.
Ma notation $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Krönecker, c'est une fonction qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.
On notera $A \cong B$ pour dire que A et B sont isomorphes.
Si E est un ensemble, on notera $\#E$, $\text{Card}(E)$ ou encore $|E|$ le cardinal (nombre d'éléments) de E. Si G est un groupe, $|G|$ désignera l'ordre de G.

1.2 Notes de l'auteur

Ce cours à pour unique but de présenter le déterminant et ses différentes expressions. Le cours est rudimentaire et ne vise pas à traiter les sujets en profondeurs. Pour approfondir, des exercices seront proposés. Ces exercices permetrons notamment d'aller plus loing. Le cour ne traitera pas non plus des applications du déterminant. Cela sera proposé en exercice pour les lecteurs souhaitant approfondir. Personellement, je pense que le cours doit être vu comme un immense exercice. Pour être sur de maîtriser le cour, le lecteur doit s'assurer d'être en mesure de refaire chaques démonstrations.

Chapitre 2

Motivations

2.1 Histoire

Cette partie ne m'enchantant guère, elle sera la plus courte possible.

En mathématiques, le déterminant fut initialement introduit en algèbre, pour déterminer si un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues admet une unique solution. Il se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines (étude du déterminant d'un endomorphisme et recherche de ses valeurs propres, définition du déterminant de certaines familles de vecteurs, calcul différentiel).

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme n-linéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir encore ses champs d'applications. Mais le déterminant peut aussi se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension n de la notion de surface ou de volume orientés. Cet aspect, souvent négligé, est une approche pratique et éclairante des propriétés du déterminant.

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIXe siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

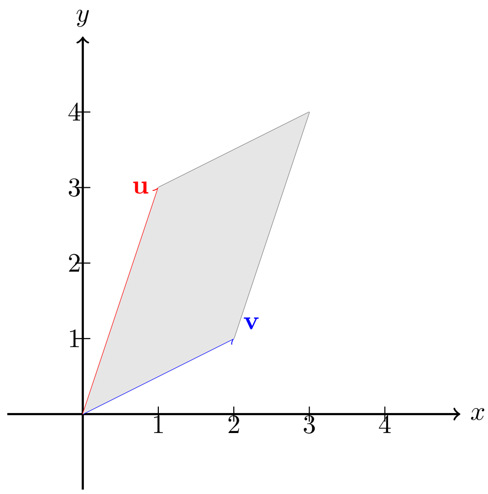
Dans son sens originel, le déterminant détermine l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son Ars Magna, sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de regula de modo.

Aujourd'hui, on enseigne le déterminant en commençant par une approche géométrique. Par manque évident de motivation de la part de l'auteur, cette approche, bien que très intéréssante, ne sera pas abordée. Sachez néanmoins que le déterminant à une réelle signification géométrique. Personnellement, je le vois comme une unité de mesure, tel que les m, Km, L, Kg, etc. Si vous êtes intéréssé pour en savoir plus, je vous conseille le papier de l'Université Claude Bernard–Lyon I - Déterminant en Géométrie.

2.2 Découverte

Pour ce chapitre, on définiera $\det(u,v) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ où $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

2.2.1 Géométrie



Calculer l'aire du losange formé par les vecteurs u et v (en gris). Puis calculer $\det(u,v)$ et $\det(v,u)$. Que peut-on en conclure ?

2.2.2 Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Calculer A^{-1} avec la méthode du pivot de Gauss, puis montrer que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$ où $B \in M_2(\mathbb{K})$. Enfin démontrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Chapitre 3

Permutations

3.1 Définitions et théorèmes

Définition 3.1.1. On appelle permutation toute bijection de E dans lui même.

Exemple 1. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et sa permutation $x \longmapsto x+2$.
On la note : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note les antécédents sur la première ligne et leurs images sur la seconde.

Définition 3.1.2. On appelle groupe symétrique de E et on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E muni de la loi de composition $\circ$. En particulier, si $E = [|1, n|]$, on le note $\mathfrak{S}_n$ et on l'appelle groupe symétrique d'ordre n.

Théorème 3.1.1. $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Démonstration. L'application identité est le neutre de ce groupe. De plus, la composition de deux bijections est une bijection. Enfin, comme ces deux bijections vont de E dans E, alors leurs compositions aussi.
Attention ! ce n'est pas forcement un groupe commutatif. ■

Définition 3.1.3. Une permutation qui échange deux éléments distincts i et j en laissant tous les autres inchangés est appelée transposition. On la note $(i\ j)$.

Exemple 2. Par exemple, écrire $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ b & a & c & d & e & f & g & h & i & j \end{pmatrix}$ est plustôt long. Comme cette permutation laisse tout les éléments inchangés sauf deux, c'est une transposition est on peut l'écrire $(a\ b)$.

Théorème 3.1.2. *Toute permutation de $\mathfrak{S}(E)$ peut s'écrire comme un produit de transpositions.*

Démonstration. Logique ? (ici le produit est la loi de composition). ■

Définition 3.1.4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$. Pour chaque paire d'éléments (i, j) de $\mathfrak{S}(E)$, ont dit que (i, j) est une inversion de σ si et seulement si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On appelle signature d'une permutation σ et on note $\varepsilon(\sigma)$ le nombre $(-1)^{\text{le nombre d'inversions de } \sigma}$.
On dit que une permutation est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire sinon.

Théorème 3.1.3. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.*

Démonstration. Etudions le numérateur de notre grosse formule :

- Si (i, j) n'est pas une inversion de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $k - l$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Si (i, j) n'est pas une inversion de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $-(k - l)$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Comme σ est une bijection, chaque paire k, l n'apparaît qu'une seule fois.

En changeant k, l en i, j (car ce sont des varaibles muettes), on peut donc réécrire :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{\text{le nombre de transposition de } \sigma} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i - j}{i - j} = \varepsilon(\sigma)$$

■

Théorème 3.1.4. *La signature est un morphisme de groupe.*

Exemple 3. Prenons $(a\ b)$ et $(c\ d)$, alors $\varepsilon((a\ b) \circ (c\ d)) = 1 = \varepsilon((a\ b))\varepsilon((c\ d))$.
Pour rappel, si l'on a $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe, avec $(G, \star)$ et $(H, \spadesuit)$ deux groupes, alors $\forall x, y \in G$,

$$f(x \star y) = f(x) \spadesuit f(y).$$

Démonstration. Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ (je me permets de ne considérer que $\mathfrak{S}_n$ car pour tout groupe G fini d'ordre n, on a $G \cong \mathfrak{S}_n$). On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i - j} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \varepsilon(\sigma')
\end{aligned}$$

Si on étudie le terme restant comme dans la preuve précédente, on observe qu'on peut remplacer $\sigma'(i) = k$ et $\sigma'(j) = l$ tout en supposant $1 \leq k < l \leq n$ (quitte à multiplier par -1 en haut et en bas). On peut donc réindexer le produit restant et on trouve $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$. ■

Définition 3.1.5. On définit les permutations circulaires ou cycles. Le p-cycle associé aux éléments distincts $a_1, \ldots, a_p$ (pris dans cet ordre) envoie l'élément a_1 sur a_2, puis a_2 sur a_3 $\ldots$ et enfin a_p sur a_1. Tous les autres éléments restent inchangés. Un tel cycle se note habituellement sous la forme $(a_1 \ \ldots \ a_p)$.

Exemple 4. Reprenons $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors le 5-cycle $x \longmapsto x + 1$ se note : $(0\ 1\ 2\ 3\ 4)$.
Remarquons qu'une transposition est un 2-cycle.

Théorème 3.1.5. *Soit σ_p, un p-cycle $(a_1 \ \ldots \ a_p)$. Alors $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^{p-1}$.*

Démonstration. σ_p n'a aucun point invariant.
De plus, $\sigma_p = (a_1\ a_k)(a_1\ a_{k-1}) \ldots (a_1\ a_3)(a_1\ a_2)$. Conclusion : il y a bien $p-1$ transpositions et chaque transpositions possède exactement une inversion, donc $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^{p-1}$. ■

3.2 Exercices

Exercice 3.2.1. Lister les éléments de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. En déduire le cardinal de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.2. On dit qu'une permutation σ d'un ensemble E est un dérangement si elle n'a aucun point fixe, c'est à dire $\forall k \in E, \sigma(k) \neq k$. On notera D_n le nombre de dérengements de $\mathfrak{S}_n$. On définit $P_k(n)$ comme l'ensemble des permutations avec k points fixes de $\mathfrak{S}_n$.

i) Déterminez $\#P_k(n)$ en fonction de D_n.
ii) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ (vous pouvez considérer le cardinal de $\mathfrak{S}_n$).
iii) En utilisant la formule d'inversion de Pascal calculer D_n, puis calculer la probabilité quand $n \to +\infty$ de piocher une permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui soit un dérangement.

Rappel formule d'inversion de Pascal : si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, alors $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Exercice 3.2.3. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, trouver le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.4. On appelle support d'une permutation l'ensemble des éléments qui ne restent pas inchangés par cette dernière.
Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions et calculer la signature de σ.
Justifier l'affirmation suivante "un produit de cycles à supports disjoints est commutatif".

Exercice 3.2.5. On note A l'ensemble des cycles à supports disjoints de $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que $\langle A\rangle = \mathfrak{S}_n$, où $\langle A\rangle$ est le plus petit sous groupe de $\mathfrak{S}_n$ contenant A. On peut admettre que $\sigma^{n!} = Id$.

Plus généralement, si G est un groupe et $A \subset G$, $\langle A\rangle$ est le plus petit sous groupe de G contenant A. Si $A = \{a\}$, alors on notera $\langle a\rangle := \langle\{a\}\rangle$. Si $B \subset G$, on notera $\langle A, B\rangle := \langle A \cup B\rangle$.
Revenons sur ce que l'on a admis pour cet exercice. Il est plustôt évident que $\sigma^{n!} = Id$, mais ce résultat est un corollaire d'un théorème plus puissant : le **théorème de Lagrange**. Ce dernier nous dit que *si G est un groupe fini d'ordre n, alors pour tout sous groupe H de G, $|H|$ divise n.* Si on prend $H = \langle x\rangle$, avec $x \in G$, on en déduit que l'ordre de n'importe quel élément de G divise n.

Démonstration. Démontrons ce magnifique théorème. Soit G, un groupe fini d'ordre n, et H un sous groupe de G. On notera $xH := \{xh \mid h \in H\}$, où $x \in G$. Pour tout $x, y \in G$, on peut définir la relation d'équivalance $\mathcal{R}_H$:

$$x \; \mathcal{R}_H \; y \iff xH = yH.$$

Pour votre culture, si $x \; \mathcal{R}_H \; y$, on dit que x et y sont congrus à droite modulo H. Si vous le souhaitez, vous pouvez également définir la relation de congruence à gauche modulo H et vous en servir dans cette preuve. Remarquez que H et xH sont équipotents (équipotence donnée par $\tau_x(h) = xh$ et $\tau_x^{-1}(h) = \tau_{x^{-1}}(h) = x^{-1}h$). Il s'en suit que $|xH| = |H|$. Résultat très fort car il indique que toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_H$ sont de cardinal $|H|$. De plus, remarquons que G est l'union, qui plus est disjointes, des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_H$. Si on note $[G : H]$ l'indice de H dans G, qui est le nombre de classes à droite modulo H (le nombre de classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_H$ dans G), alors on :

$$|G| = [G : H] \times |H|.$$

Ainsi se conclut la preuve du théorème de Lagrange, que je trouve magnifique par la simplicité de son énoncé d'une part, par l'élémentarité des arguments de sa preuve une fois la relation $\mathcal{R}_H$ introduite d'autre part. ■

Exercice 3.2.6. On appelle ordre d'un élément σ de $\mathfrak{S}(E)$, le plus petit entier naturel non nul k, tel que $\sigma^k = Id$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que si σ se décompose en produit de cycles à supports disjoints $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_p$, d'ordres respectifs $i_1, i_2, \dots, i_p$, alors σ est d'ordre $\mathrm{ppcm}(i_1, i_2, \dots, i_p)$.

Cette notion d'ordre peut être généralisée pour un groupe quelconque. L'ordre d'un élément x d'un groupe G, est $|\langle x\rangle|$, où $|A|$ est le cardinal de A. Je vous laisse vous convaincre que cette définition est équivalente à celle donnée dans l'énoncé. On définit également l'ordre d'un groupe G comme $|G|$. Si $|G|$ est fini, alors on dit que G est un groupe fini. C'est le cas de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.7. Soit E un ensemble potentiellement infini. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(E)$, montrer que l'ordre de $\sigma\tau$ est égal à l'ordre de $\tau\sigma$.

Vous pouvez faire cette démonstration dans un cadre plus général en prenant x, y dans un groupe quelconque.

Exercice 3.2.8. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\Sigma = \left\{\sigma^i \mid 1 \leq i \leq k\right\}$ est un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$, puis montrer que $\Sigma = \langle\sigma\rangle$.

Remarquons que pour montrer qu'une partie non vide H d'un groupe G est un sous groupe de G, il suffit de montrer que $\forall x, y \in H$, $x^{-1}y \in H$.

Bravo ! Pour vous féliciter d'être arrivé jusqu'ici, voici le treillis de $\mathfrak{S}_3$ ainsi que deux de ses graphes de Cayley.

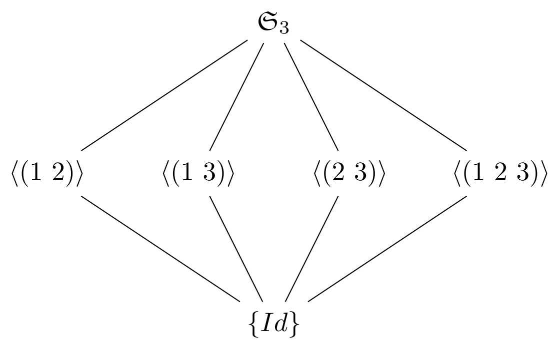


FIGURE 3.1 – Treillis des sous groupes de $\mathfrak{S}_3$.

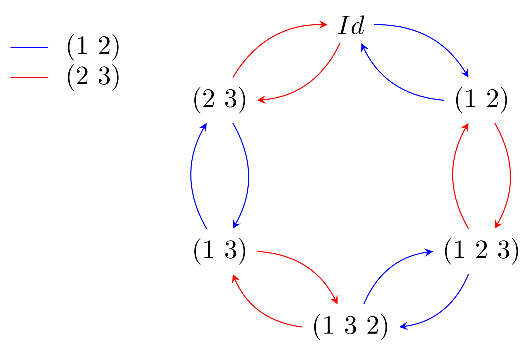


FIGURE 3.2 – Graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_3$ avec les générateurs (1 2) et (2 3).

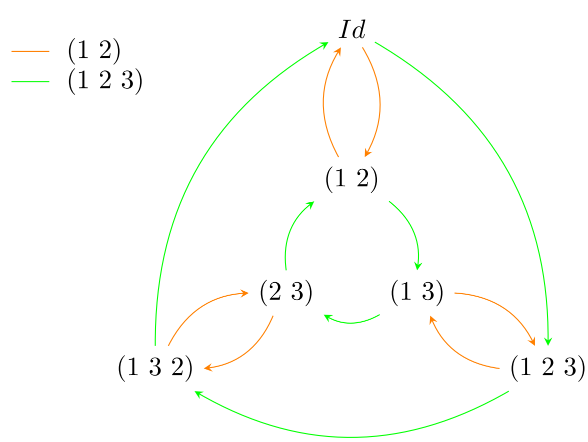


FIGURE 3.3 – Graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_3$ avec les générateurs (1 2) et (1 2 3).

Chapitre 4

Formes n-linéaires alternées

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-ev. On appelle $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire si f est linéaire en chaque variable, c'est à dire :

$$f(x_1, \dots, \lambda u + \mu v, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, u, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, v, \dots, x_n).$$

Exemple 1. Le produit scalaire est une application bi-linéaire (une forme bilinéaire plus précisement).

Définition 4.1.2. Si $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est une application n-linéaire et que $F = \mathbb{K}$, alors on appelle f une forme n-linéaire.

Définition 4.1.3. Si $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, alors on dit que f est antisymétrique.

Définition 4.1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. On dit que f est alternée si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple 2. Par exemple, $f(x, y) = x - y$ est alternée. On peut également observer f est antisymétrique : $f(y, x) = y - x = -(x - y) = -f(x, y)$.

4.2 Théorèmes

Théorème 4.2.1. *Si f est alternée, alors f est antisymétrique.*

Démonstration. Soit $f : E^n \longrightarrow F$, n-linéaire alternée. Soit $i, j \in [|1, n|]$,

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 \\ \iff & f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 \\ & \dots \\ \iff & f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\, f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

■

Théorème 4.2.2. *L'espace des formes n-linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est une droite vectoriel (espace vectorielle de dimension 1).*

Démonstration. Appelons $\mathcal{L}$ l'espace des formes n-linéaires et $\mathcal{H}$ l'espace des formes n-linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Prouvons que $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}$ et de dimension 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, une forme n-linéaire alternée. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.
Alors, $\forall j \in [|1, n|],\ x_j = \sum_{i_j=1}^{n} \lambda_{i_j{}^j} e_i$, avec $\lambda_{i_j{}^j} \in \mathbb{K}$.

(Attention ! il est important de comprendre la signification des trois indices sur le $\lambda_{a_b{}^j}$. Ces trois indices forment deux variables : a_b et j. a_b est une variable muette car c'est un indice de sommation qui prend toutes les valeurs possibles entre 1 et n. On pourrait donc se retrouver avec $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}$ où $i_1 = i_2$. Pourtant, cela ne signifie en rien que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$ car ils n'appartiennent pas au même ensemble. Justement, on peut noter l'ensemble des λ rattachés à x_j tel quel : $\Lambda_j = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ce qui nous permet de réécrire $x_j = \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \lambda e_i$ avec $i = 1$ puis 2 puis ... Bref, ce n'est pas pratique à noter donc revenons à nos trois indices, mais j'espère que vous avez compris leurs rôles.)

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} \lambda_{i_1{}^1} \dots \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

or f est alternée, donc $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0$, dès que $e_{i_a} = e_{i_b}, a, b \in [|1, n|]$. On peut donc garder uniquement $i_1, \dots, i_n$, où tous les éléments sont distincts.
Donc $\#\{i_1, \dots, i_n\} = n$ et donc $\mathfrak{S}(\{i_1, \dots, i_n\}) \cong \mathfrak{S}_n$.

Ce qui nous permet de réécrire en utilisant le caractère alterné puis antisymétrique de f :

$$\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(\{i_1,\dots,i_n\})} \left(\left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_{\sigma(i_j)^j}\right) f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\sigma(i)^i} f(e_{\sigma(1)},e_{i_2},\dots,e_{\sigma(n)})\\
&= f(e_1,\dots,e_n)\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\sigma(i)^i}\right).
\end{aligned}$$

De plus :

- $\mathcal{H}$ est stable par addition et multiplication par un scalaire

- $0_{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}$

- $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$

Conclusion : $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\dim(\mathcal{H}) = 1$. ■

Théorème 4.2.3. *Si f est une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$, on ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Soient $(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_i+\lambda x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) &= f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) + \lambda \underbrace{f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)}_{=0}\\
&= f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

. ■

Chapitre 5

Déterminant

Définition 5.0.1. On appelle déterminant dans une base $\mathfrak{B}$ d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, toute forme n-linéaire alternée $\varphi : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\text{n fois}} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi(\mathfrak{B}) = 1$.

On note une telle forme linéaire $\det_{\mathfrak{B}}$.
On définit le déterminant pour les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ en prenant leur vecteurs colonne et $\mathfrak{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ (les colonnes de I_n).

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ (idem pour une famille de vecteurs), on peut donc définir :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Souvent, on note $\det(A) = |A|$. Attention ! Ce n'est pas la valeur absolue de A, ni sa norme.

Dans ce chapitre, nous ne parlerons que de déterminant de matrices pour simplifier l'écriture. Mais tout peut être réécrit, en considérant le déterminant sur une famille de vecteurs.

5.1 Existence et unicité

Parler du déterminant c'est bien, mais est-ce qu'il existe ?

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, prouvons que $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ est bien une forme n-linéaire alternée telle que $\det(I_n) = 1$.
On a :

$$\begin{aligned} \det(I_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),i} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vous aurez remarqué que je me suis permis de réécrire I_n comme $(\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Avec cette écriture, on voit facilement que si σ n'est pas l'identité, alors le terme de la somme rattaché à σ est nul.
Montrons que det est une forme n-linéaire alternée. Pour ce faire, nous allons noter C_i la i-ème colonne de A. On notera également $C_{k,i}$ la k-ème coordonnée du vecteur C_i. Considérons $C_j = \lambda u + v$, avec $j \in [|1,n|], \lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(C_1, \dots, \lambda u + v, \dots, C_n) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} C_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) C_{\sigma(1),1} \dots C_{\sigma(j),j} \dots C_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) C_{\sigma(1),1} \dots (\lambda u_{\sigma(j),j} + v_{\sigma(j),j}) \dots C_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\lambda u_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + v_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} \right) \\
&= \lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} \\
&= \lambda \det(C_1, \dots, C_{j-1}, u, C_{j+1}, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_{j-1}, v, C_{j+1}, \dots, C_n)
\end{aligned}$$

donc det est une forme n-linéaire.
Pffiou, il ne reste plus que deux propriétés à prouver. Reprenons notre matrice mais considérons maintenant p et q dans $[|1,n|]$ tels que $p \neq q$ et $C_p = C_q$. Considérons alors τ la transposition qui inverse p et q.
Alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma\tau(1),1} \dots a_{\sigma\tau(n),n}$ car le produit est commutatif.
De plus, $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$.
Notons $\mathfrak{S}_n^+$ l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \varepsilon(\sigma) = 1\}$ et notons $\mathfrak{S}_n^-$ l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \varepsilon(\sigma) = -1\}$.
On a alors $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^- \cup \mathfrak{S}_n^+$ et $\mathfrak{S}_n^- \cap \mathfrak{S}_n^+ = \varnothing$. ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^-} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{(\sigma\tau)\in\mathfrak{S}_n^-} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbb{K}$ est un corps (donc stable par addition et multiplication), il est clair que $\det(A) \in \mathbb{K}$.
Conclusion : det est bien une forme n-linéaire alternée. ■

Ouf ! Nous nous intéressons à un objet qui existe. Mais est-il unique ?

Démonstration. Montrons l'unicité du déterminant.
Soit $\phi : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, qui vérifie les propriétés du déterminant (forme n-linéaire alternée telle que $\phi(I_n) = 1$). Comme l'espace des formes n-linéaires alternées est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1, alors $\phi(A) = \alpha \det(A)$. Donc, en évaluant en I_n, on trouve $\phi(I_n) = \alpha$.
On a alors $\phi(A) = \phi(I_n)\det(A)$. Or, si ϕ vérifie les propriétés du déterminant, alors $\phi(I_n) = 1$.
Conclusion : $\phi = \det$, ce qui prouve l'unicité du déterminant. ■

5.2 Développement par lignes et colonnes

Définition 5.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle mineur d'ordre i, j et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors $\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

Définition 5.2.2. On appelle cofacteur d'ordre i, j de la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et on note $C_{i,j}$ le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 5.2.1. *Pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [|1, n|]$ on a :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

C'est la formule de développement par ligne. On peut également développer par colonne :

$$\forall j \in [|1, n|],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{j,i}.$$

Avant de nous attaquer à cette preuve, occupons nous des Lemmes suivants.

Lemme 5.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$ (ce qui implique la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes).

Démonstration. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n} &= a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))}\cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))} \\ &= a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

De plus, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.
Donc,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \det({}^t A).\end{aligned}$$

■

Lemme 5.2.2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice bloc de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $A \in M_p(\mathbb{K}), B \in M_q(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. On note $\mathfrak{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Notons $\mathfrak{B}^F = (e_1, \dots, e_p)$; $F = Vect(\mathfrak{B}^F)$; $\mathfrak{B}^G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$; $G = Vect(\mathfrak{B}^G)$.
On a alors $\mathbb{K}^n = F \oplus G$. Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $M = M_{\mathfrak{B}_c}(h)$.
On peut écrire $h(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$, où $\forall i \in [|1, n|], f_i \in F$ et $\forall i \in [|1, q|], g_i \in G$.
Alors, $\det(A) = \det_{B^F}(f_1, \dots, f_p)$ et $\det(B) = \det_{B^G}(g_1, \dots, g_q)$.
Soit $\varphi : (F)^p \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\varphi(x_1, \dots, x_p) = \det_{B_c}(x_1, \dots, x_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$,
φ est une p-forme alternée sur F. On rappelle que l'espace des p-formes n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1, donc :
$\exists\ \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(x_1, \dots, x_p) = \alpha \det_{B^F}(x_1, \dots, x_p)$.
$\det(M) = \varphi(f_1, \dots, f_p) = \alpha \det(A)$.
$\varphi(e_1, \dots, e_p) = \alpha = \det_{\mathfrak{B}_c}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$
On enlève les f_i en leur soustrayant les vecteurs e_i, car le déterminant ne change pas par opérations sur les colonnes, on obtient :
$\alpha = \det_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_p)$
Soit $\Psi : (G)^q \longrightarrow \mathbb{K}$, tel que $\Psi(x_1, \dots, x_q) = \det_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_q)$,
$\Psi(x_1, \dots, x_q) = \beta \det_{\mathfrak{B}^G}(x_1, \dots, x_q)$
$\beta = \Psi(e_{p+1}, \dots, e_n) = det_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) = 1$
$\alpha = \Psi(g_1, \dots, g_q) = \det_{\mathfrak{B}^G}(g_1, \dots, g_q) = \det(B)$
Donc $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

■

Vous-êtes toujours là ? Bravo, mais c'est loin d'être fini ! Nous allons maintenant prouver la formule de développement du déterminant par ligne. La preuve pour le développement par colonne n'est pas nécessaire car $\det(A) = \det({}^t A)$.

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, telle que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in [|1, n|]$, on réalise un i-cycle σ_1 sur les indices des i premières lignes afin d'obternir la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Du fait du caractère alterné du déterminant, nous avons que $\det(A) = \varepsilon(\sigma_1)\det(A') = (-1)^{i-1}\det(A')$. Nous allons continuer d'utiliser la linéarité du déterminant :

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i,2} & 0\dots & \dots 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,n} \\ \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

on met maintenant les termes non-nuls de chaque première ligne en facteur :

$$\det(A') = a_{i,1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + a_{i,n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On applique un cycle sur les indices des colonnes de chaque déterminant afin de faire passer la colonne comportant le 1 de la première ligne en première colonne :

$$\det(A') = a_{i,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{2,n} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,n} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons alors remarquer que nos déterminants sont des déterminants de matrices bloc, de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M_j \end{array}\right)$, avec M_j la matrice du j-ème terme de la somme ci-dessus.
Or, on sait que le déterminant d'une matrice bloc est le produit des déterminants des blocs diagonaux.
Donc $\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M \end{array}\right) = \det(1)\det(M_j) = \det(M_j)$.

Mais si nous observons de plus près une matrice $M_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ $\forall j \notin \{1, n\}$ (sinon je vous laisse réécrire la matrice). On remarque alors que M_j n'est rien d'autre que $\Delta_{i,j}$, le mineur d'ordre i, j de la matrice A.
Nous pouvons donc réécrire :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^i \det(A') \\ &= (-1)^i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^j \Delta_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \ . \end{aligned}$$

■

5.3 Propriétés

Dans cette section nous verrons quelques propriétés du déterminant (je ne démontrerai pas les plus évidentes). *Notez que vous en avez déjà vu certaines qui étaient nécessaires à la preuve du développement du déterminant.*

1. Si $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = ad - bc$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = aei + dhc + bfg - gec - dbi - ahf$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec une ligne ou une colonne dont tous les éléments sont nuls, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Démontrons la propriété 2.
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Prenons $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Définissons :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_A : & (\mathbb{K}^n)^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \longmapsto & \det_{\mathfrak{B}}(AX_1, \ldots, AX_n) \end{array}$$

φ_A est une forme n-linéaire alternée. Donc d'après le théorème 4.2.2, il existe $\alpha_A \in \mathbb{K}$, tel que :
$\varphi_A(X_1, \ldots, X_n) = \alpha_A \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n)$.
Tout d'abord, prouvons que $\alpha_A = \det_{\mathfrak{B}}(A)$.
On a $\varphi_A(e_1, \ldots, e_n) = \alpha_A$, or par définition, on a aussi :

$$\begin{aligned} \varphi_A(e_1, \ldots, e_n) &= \det_{\mathfrak{B}}(Ae_1, \ldots, Ae_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \ldots, C_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(A) \end{aligned}$$

où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de la matrice A. Donc $\alpha_A = \det_{\mathfrak{B}}(A)$.
On a obtenu que $\varphi_A(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathfrak{B}}(AX_1, \ldots, AX_n) = \det_{\mathfrak{B}}(A) \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n)$.
Regardons maintenant $\det_{\mathfrak{B}}(ABX_1, \ldots, ABX_n)$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathfrak{B}}(ABX_1, \ldots, ABX_n) &= \varphi_A(BX_1, \ldots, BX_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(BX_1, \ldots, BX_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \varphi_B \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(B) \times \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de $(K^n)^n$. Donc si on évalue en $\mathfrak{B}$, on obtient :

$$\det_{\mathfrak{B}}(ABe_1, \ldots, ABe_n) = \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(B) = \det_{\mathfrak{B}}(AB) \ .$$

■

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. Soient $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Indication : Remplacer la dernière colonne par une inconnue afin d'obternir un polynôme.

Exercice 5.4.2. Soient $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{bmatrix}$$

Indication : Même technique que la question précédente afin de travailler avec une fraction rationnelle.

Exercice 5.4.3. Calculer le déterminant suivant : $\det\left(pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

Indication : prouver la propriété suivante et servez-vous en pour réécrire la matrice :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

avec φ l'indicatrice d'Euler.

Chapitre 6

Pour aller plus loin

6.1 Un peu d'analyse

Grâce à mon cours, je pense que tout le monde adore le déterminant. Les derniers réfractaires ne peuvent être que les férus d'analyse. Mais pas de soucis, il y en a également pour vous. En effet, après tout, le déterminant n'est qu'une fonction, alors il est naturel de se demander s'il est possible de "dériver" le déterminant, ou bien d'en obtenir un développement limité.

6.1.1 Quelques notions de calcul différentiel

Le but de cette section est de calculer un développement limité à l'odre 1 du déterminant. Pour ce faire, je me dois d'introduire quelques outils de calcul différentiel qui nous seront indispensables.

Définition 6.1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on dit que f est différentiable en a si et seulement si il existe $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, tel que, pour h au voisinage de a, on a :

$$f(a+h) = f(a) + u_a(h) + o(\|h\|).$$

Si une telle application existe, on notre $u_a = df_a$ et on l'appelle la différentielle de f en a.

Exemple 1. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, calculons la différentielle de $f : M \longmapsto M^2$. Soit H au voisinage de M,

$$\begin{aligned} f(M+H) &= (M+H)^2 \\ &= M^2 + MH + HM + H^2 \\ &= f(M) + (MH + HM) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

On a donc que $df_M(H) = MH + HM$. Si vous vous ennuyez, n'hésitez pas à vérifier que df_M est bien une application linéaire.

La méthode que nous venons d'utiliser est très efficace lorsque nous disposons d'une expression facilement manipulable de notre fonction. Mais nous, nous nous attaquons au déterminant. Il est possible de calculer sa différentielle avec cette méthode mais ce sera très fastidieux. Si vous n'avez pas peur des énormes calculs alors lancez-vous ! Sinon, pour nous faciliter la tâche, je vais introduire le concept de dérivée partielle.

Définition 6.1.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$. La dérivée partielle de f en a par rapport à la i-ème coordonnée, que l'on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}.$$

Si cette limite existe, on dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable.

Cette définition peut se généraliser aux fonctions vectorielles, mais comme le déterminant est une forme n-linéaire, nous utiliserons la définition ci-dessus.
Introduisons maintenant un théorème qui nous permettra de calculer la différentielle d'une fonction à partir de ses dérivées partielles.

Théorème 6.1.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a. Soit h au voisinage de a, on note h_i la i-ème coordonnée de h dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors on a :*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration. Je vous encourage à faire cette preuve par vous même, c'est un très bon exercice, qui plus est très accessible.
Pour les flemmards, faisons tout de même la preuve. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a pour tout i entre 1 et n,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a)+df_a(te_i)+o(\|te_i\|)-f(a)}{t}\\ &= df_a(e_i).\end{aligned}$$

On a simplement utilisé le caractère différenciable de f en a pour passer de la première à la deuxième ligne ; puis, comme t est un scalaire et que df_a est linéaire, on a pu simplifier. On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned}df_a(h) &= df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i df_a(e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Enfin, nous avons besoin d'un dernier Lemme avant de pouvoir attaquer.

Lemme 6.1.1. $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans$M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, considérons la suite $A_p = M + \frac{1}{p}I_n$, et prouvons que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers M et est à valeur dans $Gl_n(\mathbb{R})$. Le fait que $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$ est immédiat.
Si A_p n'est pas inversible, alors $\det(A_p) = 0 \iff \det(M + \frac{1}{p}I_n) = 0 \iff \frac{1}{p} \in \mathrm{Sp}(M)$. Or, M est d'ordre n, donc a au plus n valeurs propres. On pose alors $p_0 = \max\left\{p \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{p} \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$, et on construit la suite

$$B_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq p_0 \\ A_p & \text{si } p > p_0 \end{cases}$$

alors $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers M et est à valeurs dans $Gl_n(\mathbb{R})$. Ce qui conclut la démonstration du lemme. ■

6.1.2 Différentielle du déterminant

Nous allons maintenant calculer la différentielle du déterminant et obtenir son développement limité d'ordre 1. Néanmoins, je trouve cet exercice très intéressant, alors je vous encourage vivement à le faire par vous-même. Voici quelques pistes pour vous aider : commencez par calculer la différentielle du déterminant en I_n, puis servez vous en pour obtenir une différentielle en $X \in Gl_n(\mathbb{R})$; enfin généralisez à $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Résolution :

Pour cette exercice nous considèrerons l'application det de $M_n(\mathbb{R})$, mais rien ne vous empêche de faire cette exercice en considérant le déterminant sur une famille de vecteurs et une base. Pour faciliter l'écriture, on notera $f : A \longmapsto \det(A)$. Soient $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} df_{I_n}(H) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(I_n) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\lim_{t\to 0}\frac{f(I_n + tE_{ij} - f(I_n)}{t} \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(H). \end{aligned}$$

On a donc obtenu $\det(I_n + H) = 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(\|H\|)$ et donc que $df_{I_n} = \mathrm{Tr}$.
Soit $X \in Gl_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det(X(I_n + X^{-1}H)) \\ &= \det(X) \times \det(I_n + X^{-1}H) \\ &= \det(X)(1 + \mathrm{Tr}(X^{-1}H + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \det(X)\,\mathrm{Tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}(\det(X)X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H) + o(\|H\|)) \end{aligned}$$

Super ! On sait mainenant que $df_X(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$.
Maintenant prenons $Y \in M_n(\mathbb{R})$. On observe que $X \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$ est continue sur $Gl_n(\mathbb{R})$ et

coïncide avec df_Y. De plus, df_Y est une application linéaire dans un espace vectoriel de dimension finie, elle est donc continue. Comme $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, on peut conclure que $df_X = df_Y$, ce qui termine la résolution de cet exercice.

6.1.3 Exercices

Exercice 6.1.1. Soit $f : U \subset R^n \longrightarrow R^p$ avec $f : x \longmapsto (f_1, \ldots, f_p)$, si f est différentiable en $a \in U$, on appelle matrice jacobienne de f et l'on note $J_f(a)$ ou $D_f(a)$ la matrice suivante

$$D_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \ddots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La jacobienne de f et sa différentielle sont liée par la relation suivante : $df_x(h) = D_f(x)h$.

Soit $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow R^m$, si g est également différentiable en a, alors $D(g \circ f)(a) = D_g(f(a)) \cdot D_f(a)$.
Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) = \det(e^{xA})$.
En utilisant les formules données précédemment, calculer $df_x(h)$.

6.2 Algorithme

Le déterminant est très facile lorsque l'on est un ordinateur et que l'on peut effectuer des milliers de calculs sans erreur. Il sert notamment à résoudre des systèmes linéaires, notamment avec la célèbre formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{Com}(M)$. Faisons donc un algorithme capable de calculer des inverse !

```
"""
M = [[1,2,3],
     [4,5,6],
     [7,8,9]]
Notre matrice M sera representee par une liste a deux dimensions et ou l'element i,j de M sera accessible par M[i][j].
"""

def poplc(A, l, c):
    B = [ [A[i][j] for j in range(len(A[i])) ] for i in range(len(A))]
    B.pop(l) #supprime la l-eme ligne
    for (k) in range(len(B)): #supprime la c-eme colonne
        B[k].pop(c)
    return B


def det(A):
    for i in range(len(A)): # on teste si A est carree
        if len(A[i]) != len(A):
            return 0

    if len(A) > 1:
        s = 0
        for i in range(len(A)):
            s += (-1)**(i)  * A[0][i] * det(poplc(A,0,i)) # on recopie la formule
        return s
    else :
        return A[0][0]


```

```python
def comatrice(A):
    B = [[0 for j in range(len(A[i]))] for i in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[i])):
            B[i][j] = (-1) ** (i+j)  * det(poplc(A,i,j)) # on calcule les cofacteurs
    return B


def transpose (A):
    B = [[0 for j in range(len(A[i]))] for i in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[i])):
            B[i][j] = A[j][i] # on inverse lignes et colonnes
    return B


def inverse(A):
    if (det(A) != 0): # on test si A est inversible
        d = det(A)
        B = transpose(comatrice(A))
        for i in range(len(B)):
            for j in range(len(B[i])):
                           B[i][j] /= d
        return B
    else:
        return 0
```

Cet algorithme n'est pas du tout efficace, ne le donnez pas à la NASA !

Chapitre 7

Correction

7.1 Permutations

3.2.1. Essayons de construire une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ pour voir ce qu'il ce passe. Prenons $x_1 \in [|1, n|]$, nous avons n possibilité pour choisir x_1. Puis, une fois choisit nous avons $n-1$ choix pour son image. Posons donc $\sigma(x_1) = x_2$. Il nous reste alors $n-2$ choix pour l'image de x_2. Si nous itérons l'opérations, nous voyons que nous avons $n!$ choix pour construitre σ. Donc $\mathfrak{S}_n$ contient $n!$ éléments.

3.2.2. i) Pour déterminer $\#P_k(n)$, construisons $\sigma \in P_k(n)$. Premièrement, il nous faut choisir un ensemble $K \subset [|1, n|]$ à k éléments, de sorte que $\sigma\Big|_K = Id$. Or, pour choisir K, nous avons exactement $\binom{n}{k}$ possibilitées ! Enfin, il nous reste à choisir les images de σ sur $[|1, n|]$
K. Or nous avons exactement D_{n-k} manière de choisir ces images. On conclue donc que $\#P_k(n) = \binom{n}{k} D_{n-k}$.
ii) On sait que $!n = \#\mathfrak{S}_n$. Chercons donc à découper $\mathfrak{S}_n$ en unions disjointes, de sorte à obtenir une égalité sur les cardinaux. Remarquons que

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(n),$$

de plus c'est une union disjointes. Ce qui, en utilisant la symétrie des coefficient binomiaux, nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^{n} \#P_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k. \end{aligned}$$

iii) On applique la formule d'inversion de Pascal avec $a_n = n!$ et $b_n = D_n$:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}k! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Calculer la probabilité de piocher un dérangement dans $\mathfrak{S}_n$, lorsque $n \to +\infty$, revient à calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\frac{D_n}{n!} &= \lim_{n\to+\infty} n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

On a alors reconnu le développement en série de $\exp(-1)$, ce qui nous permet de conclure en disant que cette probabilité est de $\frac{1}{e}$.

3.2.3. Il nous faut tout d'abord choisir un ensemble à p éléments dans $[|1,n|]$. Nous avons $\binom{n}{p}$ manières de choisir cet ensemble. Pour le choix du premier élément de notre cycle, nous avons p choix, puis $p-1$ pour le deuxième ... Enfin, il y à p manière d'écrire un p cycle. Donc le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$ est $\frac{\binom{n}{p}p!}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p}$.

3.2.4. On étudie $\sigma^k(1)$, et on observe qu'il forme le 6-cyles $\gamma = (1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5)$. Par chance, tous les éléments de $[|1,6|]$ sont dans le support de γ. Donc, $\sigma = \gamma$. Si tout les éléments de $[|1,6|]$ n'étaient pas dans le support de γ, alors on aurait répéter la même méthode sur les éléments manquants.
Décomposons σ en produit de transpositions : $\sigma = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$, on trouve que $\varepsilon(\sigma) = 1$.
Enfin, cette affirmation

3.2.5. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et $k \in [|1,n|]$. Soit α le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^\alpha = Id$ (il existe comme $\sigma^{n!} = Id$). On considère alors le cycle $\gamma_k = (\sigma(k)\ \sigma^2(k)\ \dots\ \sigma^{\alpha-1}(k))$. Si k et l sont différents et dans $[|1,n|]$, alors les cycles γ_k et γ_l sont soit à supports disjoints, soit à supports confondus. S'ils sont à support disjoint alors on fait le produit des deux, et on recommence l'opération avec $m \notin k,l$, sinon on garde uniquement γ_k et on recommence avec m. De cette manière, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints. Donc l'ensemble des cycles à supports disjoints engendre bien $\mathfrak{S}_n$.

3.2.6. On a vu dans l'exercice 3.2.4 qu'un produit de cycle à support disjoint est commutatif, d'où : $\sigma^m = \gamma_1^m\gamma_2^m\dots\gamma_p^m$. Comme les cycles sont à supports disjoint, $\sigma^m = Id \iff \forall j \in [|1,p|], \gamma_j^m = Id$. Il vient directement que $\sigma^m = Id \iff m$ divise $i_1 i_2 \dots i_p$. Or comme par définition de l'odre, si σ est d'odre m, m est le plus petit entier à vérifier cette condition, donc $m = \text{ppcm}(i_1, \dots, i_p)$.

3.2.7. Nous allons démontrer ce résultat dans un cadre plus général. Soit $(G, \cdot)$ un groupe quelconque, on notera 1 son élément neutre. Soient $x, y \in G$, on note m l'odre de xy et n l'ordre yx (le cas où n ou m est infini étant trivial, il ne sera pas traité). Résonnons par l'absurde, on peut supposer sans perte de généralité que $m < n$. On a alors $(xy)^m = 1$ et $(yx)^n = 1$. Or,

$$\begin{aligned} 1 &= (yx)^n \\ &= \underbrace{yxyxyx\dots yx}\, n \text{ fois} \\ &= yxy\underbrace{xyxy\dots xyxy}_{m \text{ fois}}\dots xyx \\ &= \underbrace{yxyxyx\dots yx}_{n \pmod m \text{ fois}} \end{aligned}$$

C'est absurde car $n \pmod m < n$ et donc par définition de l'ordre, $(yx)^{n \pmod m} \neq 1$. Donc on a prouvé que $m = n$, ce qui conclu l'exercice.

3.2.8. Montrons ce résultat dans un cadre plus général. Soient G un groupe fini, $\mathbf{e}$ son neutre et un élément x de G d'ordre (fini) k. Montrons que $X = \left\{x^i \mid 1 \leq i \leq k\right\}$ est un sous groupe de G.
Il est évident que $\mathbf{e}$ appartient à X. Soit $a, b \in X$, alors $a = x^\alpha$ et $b = x^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Donc $ab = x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha+\beta \pmod k}$. Or, $\alpha + \beta \pmod k < k$, donc $ab \in X$. De plus, soit $y = x^p \in X$, avec $1 \leq p \leq k$. Alors, $y^{-1} = x^{k-p}$ vérifie $yy^{-1} = x^{k-p+p} = y^{-1}y = x^k = \mathbf{e}$. Donc X est bien un sous groupe de G. Montrons maintenant que $\langle x \rangle = X$. Par définition $\langle x \rangle \subseteq X$. Soit $y \in X$, alors $y = x^l$, or $x \in \langle x \rangle$ et comme c'est un groupe $y = x^l \in \langle x \rangle$. Donc $\langle x \rangle \supseteq X$. On a donc montrer que $X = \langle x \rangle$ par double inclusion.

7.2 Déterminant

5.4.1. Comme indiqué, considérons le polynôme suivant :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & X_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Attention, c'est bien un polynôme et non une matrice, ne vous laissez pas impressionner ! Si on développe par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$P = (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} + \dots + X^{n-1}(-1)^{n+n} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \quad (7.1)$$

On remarque ainsi que le degré de P est au plus égal à $n-1$. Or, le caractère alterné du déterminant nous donne que $P(a_i) = 0, \ \forall i \in [|1, n|]$. On peut alors conclure que P est de degré $n-1$ et que nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i). \quad (7.2)$$

Si l'on note D_n, le déterminant de Vandermonde à l'ordre n, on à l'égalité suivante : $P(a_n) = D_n$. D'après *(1)*, nous observons que $\lambda = D_{n-1}$, ce qui en nous servant de *(2)* nous permet d'établir la relation de récurrence suivant :

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{i=1}^{1} (a_2 - a_i) \times \cdots \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} a_j - a_i \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i. \end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas convaincu, ce résultat ce démontre très bien par récurrence sur j.

5.4.2. Nous allons appliquer la même technique en remplaçant notre déterminant par la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+X}. \end{vmatrix}$$

Cela marche également si vous avez remplacé a_n. Le but étant de travailler sur l'exterieur du déterminant afin d'obternir une relation de récurrence. Pour cet exercice, je vais aller un peu plus vite car vous devriez déjà être plus alaise avec ce type de manipulation. En développant $F(X)$ par rapport à la dernière colonne, et en réduisant au même dénominateur, on obtient alors :

$$F(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j + X)}{\prod_{i=1}^{n} (a_i + X)}. \tag{7.3}$$

On noterra P, le polynôme au numétrateur. On remarque immédiatement que P est de degré $n-1$ et que ses racines sont $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Donc :

$$F(X) = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)}{\prod_{i=1}^{n} (X + a_i)}$$

Essayons d'identifier λ, pour ce faire retournons à la forme première de F afin d'y faire des oppérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

$$F(X)(a_n + X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (X + a_i)}$$

On évalue cette expression en $-a_n$ et on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n + a_i)}$$

D'où, si l'on note le déterminant de Cauchy à l'ordre n C_n :

$$\lambda = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n + a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n - b_i)}.$$

Remplaçons λ dans notre expression initiale :

$$C_n = F(b_n) = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n + a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n - b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \times \frac{1}{a_n + b_n}.$$

Avec un tout petit peu d'intuition et de calcul, on en déduit la relation de récurrence suivante :

$$C_n = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \times \frac{1}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)}.$$

Encore une voix, je vous laisse vérifier ce résultat vous-même si vous y tenez.

5.4.3. Commençons par démontrer l'égalité suggérée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $E = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$. On voit alors directement que $|E| = n$.
Réécrivons maintenant E d'une autre manière, en réduisant toutes les fractions sous formes irréductibles :

$$\bigcup_{d|n} \left\{ \frac{k}{d} \mid k \in [|1, n|] \ et \ k \wedge n = 1 \right\}$$

C'est une union disjointe donc rien de plus facile que de calculer son cardinal :

$$|E| = \sum_{d|n} \left| \left\{ \frac{k}{d} \mid k \in [|1, n|] \ et \ k \wedge n = 1 \right\} \right| = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Si vous n'avez pas compris le passage à φ, je vous invite à regarder la définition de $\varphi(n)$. Sinon, tant mieux !
Essayons maintenant d'écrire notre matrice avec notre nouvelle formule.

$$\forall (i,j) \in [|1, n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{d|pgcd(i,j)} \varphi(d)$$

Pas très pratique n'est-ce pas ! Comme i et j varient entre 1 et n, nous pouvons un peu arranger notre formule :

$$\forall (i,j) \in [|1, n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{\substack{d=1 \\ d|pgcd(i,j)}}^{n} \varphi(d).$$

Presque super ! Mais la condition $d|pgcd(i,j)$ nous embête toujours. Pour s'en débarraser, posons :

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si \ \ i|j \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

ce qui nous permet maintenant de réécrire :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj}.$$

Hummm, cette formule ne vous fait donc penser à rien ? On dirait un petit peu (un tout petit peu) la formule du produit matriciel.
Essayons alors d'écrire notre matrice de départ comme un produit :

$$\begin{aligned} pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n} &= \left(\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj} \right)_{1\leq i,j\leq n} \\ &= AB \end{aligned}$$

avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_i j)_{1\leq i,j\leq n}$.
Par identification, on trouve : $a_{ij} = \varphi(j)\delta ji$ et $b_{ij} = \delta_{ij}$. Ouf ! nous pouvons enfin finir en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned} \det\left(pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n}\right) &= \det(AB) \\ &= \det(A)\det(B) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi(1) & 0 & \dots & 0 \\ ? & \varphi(2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & \dots & ? & \varphi(n) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \varphi(n). \end{aligned}$$

7.3 Calcul diff

6.1.1. On pose $g : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, tel que $g(x) = e^{xA}$. det et g sont C^1 sur $\mathbb{R}$, donc leur composition aussi. Soient $x, h \in \mathbb{R}$, on peut donc utiliser la formule donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} df_x(h) &= D_f(x) \cdot h \\ &= D(\det \circ g)(x) \cdot h \\ &= D_{\det}(g(x)) \cdot D_g(x) \cdot h \\ &= \underbrace{D_{\det}(g(x))Ae^{xA}}_{d\det_{g(x)}(Ae^{xA})} \cdot h \\ &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(g(x))Ae^{xA}) \cdot h \\ &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(e^{xA})Ae^{xA}) \cdot h \\ &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(e^{xA})e^{xA}A) \cdot h \\ &= \mathrm{Tr}(\det(e^{xA})A) \cdot h \\ &= f(x) \cdot \mathrm{Tr}(A) \cdot h. \end{aligned}$$

Ouf ! Ce n'était que quelques lignes mais pas des plus faciles.

Chapitre 8

Bibliographie

- Wikipédia - Permutations
- Wikipédia - Déterminant
- Déterminant Christophe Bertault — Mathématiques en MPSI
- Techno-science.net - Déterminant
- Bibm@th - Permutations
- Bibm@th - Déterminant
- Maths adulte - Déterminant (YouTube)
- CNRS - Déterminant
- Maths du supérieur (YouTube)
- Maths* - Oraux X-ens (YouTube)
- Correction du devoir de Calcul Différentiel - Univerité de Toulouse par Gavrilov
- Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes - Alain Debreil