

# Sujet 2 : Doubles sommations

M. BOISDUR, A. DECK

## 1 Cours

### 1.1 Introduction du signe somme

Le signe somme n'est rien d'autre que la lettre grecque "sigma" en majuscule notée  $\sum$ .  
Voyons comment l'utiliser :

$\sum$  : lettre grecque utilisée pour écrire une Somme.

The diagram shows the summation symbol  $\sum$  with several annotations: a blue arrow points from the text "Dernière valeur" to the number 5 above the symbol; a red arrow points from the text "1<sup>ière</sup> Valeur" to the expression  $i=1$  below the symbol; a green arrow points from the text "Indice" to the variable  $i$  in  $i=1$ ; and a black arrow points from the text "Terme général  $f(i)$ " to the expression  $2i$  to the right of the symbol.

L'indice est un nombre entier allant de 1 à 5

On peut se représenter une somme comme une boucle. Par exemple nous pouvons écrire la somme ci-dessus comme la boucle for suivante :

```
somme = 0
for i in range(1,6,1):
    somme += 2*i
```

Enfin, cette somme s'écrirait en extension de la manière suivante :

$$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 .$$

On pourrait vouloir l'abrégé avec des points de suspensions comme ceci :

$$2 \times 1 + \dots + 2 \times 5$$

mais toutes ces manières de faire resteront moins concises et précises que d'écrire cette somme avec le signe sigma.

Nous vous avons présenté le signe sigma en mettant l'indice de sommation ainsi que sa valeur de départ en dessous de la lettre grecque, puis la dernière valeur de l'indice en haut. Néanmoins, il existe une autre

notation avec le signe sigma qui consiste à mettre toutes les propriétés sur l'indice en dessous du signe. Cette notation s'appelle "la somme généralisée" :

$$\sum_{i=1}^5 2i = \sum_{1 \leq i \leq 5} 2i .$$

## 1.2 Propriétés

*Le texte de référence parlant uniquement de somme finie, nous ignorerons le cas des séries pour ce passage.*

Comme le signe sigma n'est rien d'autre qu'une réécriture d'une somme, elle conserve donc les propriétés de l'opérateur "+".

Soient  $a_i, b_i, c_i$  des réels pour  $i$  allant de 1 à  $n$ . On a les propriétés suivantes pour l'opération de somme  $\sum$  :

**Associativité :**

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (1)$$

*Démonstration.* Cette propriété vient simplement du fait que l'opérateur "+" est associatif et commutatif. Par exemple :

$$\begin{aligned} \text{par associativité : } (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) &= a_1 + (a_2 + (b_1 + b_2)) \\ &= a_1 + ((a_2 + b_1) + b_2) \\ \text{on utilise la commutativité : } &= a_1 + ((b_1 + a_2) + b_2) \\ \text{puis en réutilisant l'associativité : } &= a_1 + (b_1 + (a_2 + b_2)) \\ &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{aligned}$$

■

**Distributivité :**

$$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n c \times a_i \quad (2)$$

*Démonstration.* Cette propriété nous vient du fait que l'opération " $\times$ " est distributive par rapport à "+" :

$$c(a + b) = c \times a + c \times b$$

■

**Commutativité :**

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ . Alors, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{\sigma(i)} \quad (3)$$

*Démonstration.* Cette propriété découle de la commutativité et de l'associativité de l'opérateur "+". Prenons  $\sigma$  une permutation de  $\{a, b, c\}$ , alors :

$$a + b + c = \sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(c)$$

■

### 1.3 Convention d'Iverson

La convention d'Iverson consiste à mettre une condition entre crochets. Ces crochets prendront alors la valeur 1 si la condition est vérifiée, 0 sinon. Cette convention revient finalement à utiliser une fonction indicatrice.

Nous pouvons donc définir la convention d'Iverson comme une fonction. On notera  $[ \ ]$  la condition d'Iverson (attention à ne pas confondre avec la fonction partie entière). On note  $\Omega$  l'univers des conditions et  $C$  une condition quelconque. Alors, on peut définir la convention d'Iverson ainsi :

$$\begin{aligned} [ \ ] &: \Omega \longrightarrow \{0, 1\} \\ C &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } C \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

*Exemple :*

Imaginons que nous voulons écrire la somme des inverses des  $n$  premiers entiers pairs, que nous appellerons  $S_n$ . Nous l'écrirons naturellement de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

Nous pouvons tenter de l'écrire avec une fonction indicatrice afin de nous préparer à l'usage de la convention d'Iverson :

On pose :  $I = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \mathbb{1}_I(k)$$

Mais cette écriture est encore bien complexe, tandis qu'avec la convention d'Iverson nous pouvons écrire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} [k \text{ pair}]$$

De plus, la convention d'Iverson est "fortement nulle". Cela permet d'oublier les problèmes de divisions par 0, et donc de ne pas spécifier l'ensemble d'appartenance de l'indice de sommation :

$$S_n = \sum_k \frac{1}{k} [k \text{ pair}] [1 \leq k \leq 2n]$$

## 2 Exercices

*Nous allons maintenant résoudre les deux exercices qui nous étaient demandés de faire.*

### 2.1 Exercice 5

Qu'est-ce qui cloche dans le calcul suivant ?

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{a_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^n n = n^2$$

Regardons cette égalité petit à petit :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ \iff \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) &= \frac{a_1}{a_1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n} \\ &\iff \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{a_k} \end{aligned}$$

Donc la première partie de l'égalité est vraie !

Regardons la suite de l'égalité :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{a_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k}$$

Erreur de syntaxe !

Il est interdit de nommer deux variables différentes de la même manière (dans la même somme). Au risque de les confondre et de fausser les calculs.

*Rappel : En mathématiques, une variable libre est une notation qui spécifie à quelles places dans une expression une substitution peut avoir lieu. Elle s'oppose à la notion de variable muette (encore appelée variable liée).*

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k} \neq \sum_{k=1}^n n$$

Néanmoins, si nous supposons l'égalité ci-dessus vraie, alors :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^n n = n^2$$

est également vraie.

La seule erreur dans cet énoncé a donc été de changer  $j$  en  $k$  en oubliant que ce sont des variables muettes.

## 2.2 Exercice 15

Dans cet exercice, l'auteur nous demande de trouver une formule pour  $\sum_{k=1}^n k^3$  en partant de l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 = 2 \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} jk$$

Pour cet exercice, nous adopterons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k^3, \\ T_n &= \sum_{k=1}^n k^2. \end{aligned}$$

L'auteur nous suggère d'appliquer une méthode dont nous allons démontrer la validité avant de débiter l'exercice : soient  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Cherchons à calculer :

$$P_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k$$

On observe que :

$$P_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_j a_k = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_k a_j$$

Utilisons la convention d'Iverson :

$$[1 \leq j \leq k \leq n] + [1 \leq k \leq j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] + [1 \leq j = k \leq n]$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2P_n &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j a_k + \sum_{1 \leq j = k \leq n} a_j a_k \\ &= \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \end{aligned}$$

Bravo ! Nous venons de démontrer la validité de la méthode de l'auteur.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'égalité suggérée par ce dernier avant de pouvoir enfin débiter l'exercice :

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= \sum_{k=1}^n k^2 + k^3 \\ &= \sum_{k=1}^n k(k(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \times 2 \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k \sum_{j=1}^k j \\ &= 2 \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} jk \end{aligned}$$

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à commencer (et finir) l'exercice.

On a :

$$S_n + T_n = 2 \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} jk$$

En appliquant la méthode démontrée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= 2 \times \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + T_n \end{aligned}$$

puis, en simplifiant :

$$S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Vérifions maintenant notre résultat.

*Démonstration.* On considère  $P_n = " S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 "$ .

Initialisation : Prenons  $n = 1$  :

$$S_1 = 1 = \left( \frac{1(1+1)}{2} \right)^2$$

Donc  $P_n$  est vraie pour  $n = 1$ .

Hérédité : Supposons  $\exists n \in \mathbb{N}$ , tel que  $P_n$  soit vraie. Montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On a par hypothèse de récurrence :

$$S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Par définition de  $S_{n+1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ \iff S_{n+1} &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{(n+1)(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ \iff S_{n+1} &= \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion :  $P_n$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

■

### 3 Références bibliographiques

R.L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Mathématiques concrètes, Fondations pour l'informatique, 2ème édition*. Vuibert, Traduction de Alain Denise, 2003.