Déterminants

A. DECK

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et histoire

Cette partie ne m'enchantant guère, elle sera la plus courte possible.

En mathématiques, le déterminant fut initialement introduit en algèbre, pour déterminer si un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues admet une unique solution. Il se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines (étude du déterminant d'un endomorphisme et recherche de ses valeurs propres, définition du déterminant de certaines familles de vecteurs, calcul différentiel).

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme n-linéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir encore ses champs d'applications. Mais le déterminant peut aussi se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension n de la notion de surface ou de volume orientés. Cet aspect, souvent négligé, est une approche pratique et éclairante des propriétés du déterminant.

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIXe siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

Dans son sens originel, le déterminant détermine l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son Ars Magna, sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de regula de modo.

Aujourd'hui, on enseigne le déterminant en commençant par une approche géométrique. Par manque évident de motivation de la part de l'auteur, cette approche, bien que très intéréssante, ne sera pas abordée. Sachez néanmoins que le déterminant à une réelle signification géométrique. Personnellement, je le vois comme une unité de mesure, tel que les m, Km, L, Kg, etc. Si vous êtes intéréssé pour en savoir plus, je vous conseille le papier de l'Université Claude Bernard–Lyon I - Déterminant en Géométrie.

Chapitre 2

Prérequis

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ mais pas que).
Dans ce chapitre, nous survolerons toutes les notions qu'il est nécéssaire de connaître pour aborder le déterminant.

2.1 Permutations

Définition 1. *On appelle permutation toute bijection de E dans lui même.*

Exemple 1. *Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et sa permutation $x \longmapsto x+2$.*
On la note : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On note les antécédents sur la première ligne et leurs images sur la seconde.*

Définition 2. *On appelle groupe symétrique de E et on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutation de E muni de la loi de composition $\circ$.En particulier, si $E = [|1, n|]$, on le note $\mathfrak{S}_n$.*

Définition 3. *Une permutation qui échange deux éléments distincts i et j en laissant tous les autres inchangés est appelée transposition. On la note $(i\ j)$.*

Théorème 1. *Toute permutation de $\mathfrak{S}(E)$ peut s'écrire comme un produit de transposition.*

Démonstration. Logique ? (ici le produit est la loi de composition). ■

Définition 4. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ une permutation se décomposant en un nombre de transposition finie. On appelle signature d'une permutation σ et on note $\varepsilon(\sigma)$ le nombre $(-1)^{\text{le nombre de transposition de } \sigma}$. On dit que une permutation est pair si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire sinon.*

Théorème 2. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.*

Démonstration. Etudions le numérateur de notre grosse formule :

- Si (i,j) n'est pas une transposition de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $k - l$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Si (i,j) n'est pas une transposition de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $-(k - l)$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Comme σ est une bijection, chaque paire k, l n'apparaît qu'une seule fois.

En changeant k, l en i, j (car ce sont des varaibles muettes), on peut donc réécrire :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{\text{le nombre de transposition de } \sigma} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i-j}{i-j} = \varepsilon(\sigma)$$

■

Théorème 3. *La signature est un morphisme de groupe.*

Démonstration. Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ (je me permet de ne considérer que $\mathfrak{S}_n$ car pour tout groupe G finie d'ordre n, on a $G \cong \mathfrak{S}_n$). On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i - j} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \varepsilon(\sigma')
\end{aligned}$$

Si on étudie le therme restant comme dans la preuve précédente, on observe qu'on peut remplacer $\sigma'(i) = k$ et $\sigma'(j) = l$ tout en supposant $1 \leq k < l \leq n$ (quitte à multiplier par -1 en haut et en bas). On peut donc réindexer le produit restant et on trouve $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$. ■

Théorème 4. *Si σ est une permutation, alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.*

Démonstration. Facile, si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$ alors $\sigma^{-1} = \tau_n^{-1} \dots \tau_1^{-1}$.
Je vous laisse vérifier que $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I_d$. ■

Définition 5. *On définit les permutations circulaires ou cycles. Le p-cycle associé aux éléments distincts $a_1, \dots, a_p$ (pris dans cet ordre) envoie l'élément a_1 sur a_2, puis a_2 sur a_3 ... et enfin a_p sur a_1. Tous les autres éléments restent inchangés. Un tel cycle se note habituellement sous la forme $(a_1 \ \dots \ a_p)$.*

Exemple 2. *Reprenons $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors le 5-cycle $x \longmapsto x + 1$ se note : $(0\ 1\ 2\ 3\ 4)$.*

Théorème 5. *Soit σ_p, un p-cycle $(a_1 \ \dots \ a_p)$. Alors $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^p$.*

Démonstration. σ_p n'a aucun point invariant.
De plus, $\sigma_p = (a_1 \ a_\psi(1)) \circ (a_2 \ a_\psi(2)) \circ \dots \circ (a_p \ a_\psi(p))$, où

$$\begin{array}{cccc} \psi : & [|1, p|] & \longrightarrow & [|1, p|] \\ & n & \longmapsto & (n + 1 \mod p) + 1 \end{array}.$$

ψ est une permutation, donc pas de soucis !
Conclusion : il y a bien p transposition, donc $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^p$. ■

2.2 Formes n-linéaires alternées

Définition 6. *Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-ev. On appelle $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$, application n-linéaire si f est linéaire en chaque variabe.*
C'est à dire :

$$f(x_1, \dots, \lambda u + \mu v, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, u, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, v, \dots, x_n)$$

Exemple 3. *Le produit scalaire est une application bi-linéaire (une forme bilinéaire plus précisement).*

Définition 7. *Si $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est une application n-linéaire et que $F = \mathbb{K}$, alors on appelle f une forme n-linéaire.*

Définition 8. *Si* $f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = -f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$*, alors on dit que* f *est antysimétrique.*

Définition 9. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* f *une forme* n*-linéaire de* E^n*. On dit que* f *est alternée si* f *est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.*

Théorème 6. *Si* f *est alternée, alors* f *est antysimétrique.*

Démonstration. Soit $f : E^n \longrightarrow F$, n-linéaire alternée. Soit $i, j \in [|1, n|]$,

$$\begin{aligned} & f(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n) = 0 \\ \iff\ & f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n) + f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n) = 0 \\ & \dots \\ \iff\ & f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n) = -\,f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) \end{aligned}$$

■

Théorème 7. *L'espace des formes* n*-linéaires alternées d'un* K*-ev de dimension finie* n *est une droite vectorielle (espace vectorielle de dimension 1).*

Démonstration. Appelons $\mathcal{H}$ l'espace des formes n-linéaires et $\mathcal{L}$ l'espace des formes n-linéaires alternées d'un K-ev de dimension finie n. Prouvons que $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}$ et de dimenssion 1.
Soit $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, une forme n-linéaire alternée (avec E un K-ev de dimension finie n). Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(x_1,\dots,x_j) \in \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\text{n fois}}$.
Alors, $\forall j \in [|1, n|],\ x_j = \sum_{i_j=1}^{n} \lambda_{i_j{}^j} e_i$, avec $\lambda_{i_j{}^j} \in \mathbb{K}$.

(Attention ! il est important de comprendre la signification des trois indices sur le $\lambda_{a_b{}_j}$. Ces trois indices forment deux variables : a_b et j. a_b est une variable muette car c'est un indice de sommation qui prend toutes les valeurs possibles entre 1 et n. On pourrait donc ce retrouver avec $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}$ où $i_1 = i_2$. Pourtant cela ne signifie en rien que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$ car ils n'appartiennent pas aux même ensemble. Justement on peut noter l'ensemble des λ rattacher à x_j tel quel : $\Lambda_j = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, ce qui nous permet de réécrire $x_j = \displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_j} \lambda e_i$ avec $i = 1$ puis 2 puis ... Bref, ce n'est pas pratique à noter donc revenons à nos trois indices, mais j'espère que vous avez compris leurs rôles.)

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{1\le i_1,\dots,i_n \le n} \lambda_{i_1{}^1} \dots \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

or f est alternée, donc $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0$, dès que $e_{i_a} = e_{i_b}, a, b \in [|1, n|]$. On peut donc garder uniquement $i_1,\dots,i_n$, où tous les éléments sont distincts.

Donc $\#\{i_1, \dots, i_n\} = n$ et donc $\mathfrak{S}(\{i_1, \dots, i_n\}) \cong \mathfrak{S}_n$.
Ce qui nous permet de réecrire en utilisant le charactère alternée puis antysimétrique de f :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{i_1, \dots, i_n\})} \left(\left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_{\sigma(i_j)^j} \right) f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i)^i} f(e_{\sigma(1)}, e_{i_2}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= f(e_1, \dots, e_n) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i)^i} \right) \end{aligned}$$

De plus :

- $\mathcal{H}$ est stable par addition et multiplication par un scalaire
- $0_{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}$
- $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$

Conclusion : $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\dim(\mathcal{H}) = 1$. ■

Théorème 8. *Si f est une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$, on ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Soient $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + \lambda f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Déterminant

Définition 10. *On appelle déterminant dans une base* $\mathfrak{B}$ *d'un* $\mathbb{K}$*-ev* E *de dimension* n*, toute forme* n*-linéaire* $\varphi : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{K}$ *tel que* $\varphi(\mathfrak{B}) = 1$*.*
On note une telle forme linéaire $\det_{\mathfrak{B}}$*.*
On définit le déterminant pour les matrice de $M_n(\mathbb{K})$ *en prenant leur vecteurs colonne et en prenant* $\mathfrak{B} = I_n$*.*

On peut donc définir que pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ *(idem pour une famille de vecteurs) :*

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}}$$

Souvent, on note $\det(A) = |A|$*. Attention ! ce n'est pas la valeur absolue de* A *(d'ailleur ça n'existe pas (à ma connaissance)).*

Dans cette partie nous ne parlerons que de déterminant de matrice.

3.1 Existence et unicité

Parler du déterminant c'est bien, mais est-ce qu'il existe ?

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$,prouvons que $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ est bien une forme n-linéaire alternée telle que $\det(I_n) = 1$.

$$\begin{aligned} \det(I_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vous arrez remarqué que je me suis permit de réécrire I_n comme $(\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Avec cette écriture on voit facilement que si σ n'est pas l'identité, alors le therme de la somme rattaché à σ est nul.
Montrons que det est multilinéaire alternée. Pour ce faire, nous allons noter C_i la i-ème collone de A.

On notera également $C_{k,i}$ la k-ème coordonnée du vecteurs C_i. Nous allons poser $C_j = \lambda u + v$, avec $j \in [|1,n|], \lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(C_1, \dots, \lambda u + v, \dots, C_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} C_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) C_{\sigma(1),1} \dots C_{\sigma(j),j} \dots C_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) C_{\sigma(1),1} \dots (\lambda u_{\sigma(j),j} + v_{\sigma(j),j}) \dots C_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\lambda u_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + v_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} \right) \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} \\
&= \lambda \det(C_1, \dots, C_{j-1}, u, C_{j+1}, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_{j-1}, v, C_{j+1}, \dots, C_n)
\end{aligned}$$

Pffiou, il ne reste plus que deux propriétés à prouver. Reprenons notre matrice mais prennons maintenant p et q dans $[|1,n|]$ tel que $p \neq q$ et $C_p = C_q$. Considérons alors τ la transposition qui inverse p et q.
Alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma\tau(1),1} \dots a_{\sigma\tau(n),n}$ car le produit est commutatif.
De plus,$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$.
Notons $\mathfrak{S}_n^+$ l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \varepsilon(\sigma) = 1\}$ et notons $\mathfrak{S}_n^-$ l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \varepsilon(\sigma) = -1\}$.
On a alors $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^- \cup \mathfrak{S}_n^+$ et $\mathfrak{S}_n^- \cap \mathfrak{S}_n^+ = \varnothing$. ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^-} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{(\sigma\tau) \in \mathfrak{S}_n^-} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbb{K}$ est un corps (donc stable par addition et multiplication), il est clair que $\det(A) \in \mathbb{K}$.
Conclusion : det est bien une forme multilinéaire alternée ! ■

Ouf ! nous nous intéressons à un truc qui existe. Mais est-il unique ?

Démonstration. Montrons l'unicité du déterminant.
Soit $\phi : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, qui vérifie les propriétés du déterminant (forme n-linéaire alternée tel que

$\phi(I_n) = 1$). Comme l'espace des formes n-linéaires alternées est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1, alors $\phi(A) = \alpha \det(A)$. Donc, en évaluant en I_n, on trouve $\phi(I_n) = \alpha$.
On a alors $\phi(A) = \phi(I_n) \det(A)$. Or, si ϕ vérifie les propriétés du déterminant, alors $\phi(I_n) = 1$.
Conclusion : $\phi = \det$, ce qui prouve l'unicité du déterminant. ∎

3.2 Développement lignes colonnes

Définition 11. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle mineur d'ordre i, j et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.*

Exemple 4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, *alors* $\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

Définition 12. *On appelle cofacteur d'ordre i, j de la matrice $(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et on note $C_{i,j}$ le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.*

Théorème 9. *Pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [|1, n|]$ on a :*

$$\boxed{\det(A) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}}$$

C'est la formule de développement par ligne. On peut également dévelloper par colonne :

$$\boxed{\forall j \in [|1, n|],\ \det(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{j,i}}$$

Avant de nous attaquer à cette preuve, occupons nous des Lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$ (ce qui implique la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes).*

Démonstration. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} &= a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))}\dots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))} \\ &= a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \end{aligned}$$

De plus, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.
Donc,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1})a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\dots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \det({}^tA) \end{aligned}$$

∎

Lemme 2. *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice bloc de la forme* $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ *avec $A \in M_p(\mathbb{K}), B \in M_q(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.*
Alors $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. On note $\mathfrak{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Notons $\mathfrak{B}^F = (e_1, \dots, e_p)$; $F = Vect(\mathfrak{B}^F)$; $\mathfrak{B}^G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$; $G = Vect(\mathfrak{B}^G)$.
On a alors $\mathbb{K}^n = F \oplus G$. Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $M = M_{\mathfrak{B}_c}(h)$.
On peut écrire $h(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$, où $\forall i \in [|1, n|], f_i \in F$ et $\forall i \in [|1, q|], g_i \in G$.
Alors, $\det(A) = \det_{B^F}(f_1, \dots, f_p)$ et $\det(B) = \det_{B^G}(g_1, \dots, g_q)$.
Soit $\varphi : (F)^p \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\varphi(x_1, \dots, x_p) = \det_{B_c}(x_1, \dots, x_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$,
φ est une p-forme alternée sur F. On rappelle que l'espace des p-formes n-linéaires altéernées est un espace vectorielle de dimension 1.
$\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(x_1, \dots, x_p) = \alpha \det_{B^F}(x_1, \dots, x_p)$.
$\det(M) = \varphi(f_1, \dots, f_p) = \alpha \det(A)$.
$\varphi(e_1, \dots, e_p) = \alpha = \det_{\mathfrak{B}_c}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1} + g_1, \dots, f_n + g_q)$
On enlève les f_i en leur soustrayant les vecteurs e_i, car le déterminant de change pas par oppérations sur les colonnes.
$\alpha = \det_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_p)$
Soit $\Psi : (G)^q \longrightarrow \mathbb{K}$, tel que $\Psi(x_1, \dots, x_q) = dey_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_q)$,
$\Psi(x_1, \dots, x_q) = \beta \det_{\mathfrak{B}^G}(x_1, \dots, x_q)$
$\beta = \Psi(e_{p+1}, \dots, e_n) = det_{\mathfrak{B}_c}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) = 1$
$\alpha = \Psi(g_1, \dots, g_q) = \det_{\mathfrak{B}^G}(g_1, \dots, g_q) = \det(B)$
Donc $\det(M) = \det(A) \det(B)$.

■

Vous-êtes toujours là ? Bravo, mais c'est loing d'être finie !

Démonstration. Nous allons prouver la formule de développement du déterminant par ligne. La preuve pour le développement par colonne ce fait de la même manière.

$$\text{Soit } A \in M_n(\mathbb{K}),\ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in [|1, n]$, on réalise un i-cicle σ_1 sur les indices des i premières ligne afin d'obternir la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Du fait du caractère alterné du déterminant, nous avons que $\det(A) = \varepsilon(\sigma_1) \det(A') = (-1)^i \det(A')$.

Nous allons continuer d'utiliser la linéarité du déterminant :

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i,2} & 0\dots & \dots 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,n} \\ & & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

on sort maintenant les thermes non-nuls de la première ligne en facteur :

$$\det(A') = a_{i,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + a_{i,n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On applique un cycle sur les indices des colonnes de chaque déterminants afin de faire passer la colonne comportant le 1 de la première ligne en première :

$$\det(A') = a_{i,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + a_{i,n}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ a_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,1} \\ a_{2,n} & a_{2,1} & \dots & a_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,n} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,1} \\ a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,1} \end{vmatrix}.$$

Nous povons remarquer alors que nos déterminants sont des déterminants de matrice bloc : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M_j \end{array}\right)$, avec M_j la matrice du j-ème therme de la somme.
Or, on sait que le déterminant d'une matrice bloc est le produit des déterminants des matrices diagonales. Donc $\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M \end{array}\right) = \det(1)\det(M_j) = \det(M_j)$.

Mais si nous observons de plus près une matrice $M_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$
(avec de préférence $j \notin \{1, n\}$, sinon je vous laisse réécrire la matrice), on remarque alors que M_j n'est rien d'autre que $\Delta_{i,j}$, le mineure d'ordre i, j de la matrice A.
Nous pouvons donc réécrire :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^i \det(A') \\ &= (-1)^i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^j \Delta_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \ . \end{aligned}$$

■

3.3 Propriétés

Dans cette section nous verrons quelques propriétées du déterminant (je ne démontrerai pas les plus évidente). *Notez que vous en avez déjà vu certaines qui étaient nécéssaire à la preuve du développement du déterminant.*

1. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Soit$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = ad - bc$.
5. Soit$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = aei + dhc + bfg - gec - dbi - ahf$.
6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec une ligne ou une colonne de 0, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Démontrons 2).
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Prenons $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Définissons :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_A : & (\mathbb{K}^n)^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & \det_{\mathfrak{B}}(AX_1, \dots, AX_n) \end{array}$$

φ_A est une forme n-linéaire alternée. Donc d'après le théorème 7, il existe $\alpha_A \in \mathbb{K}$,
tel que $\varphi_A(X_1, \dots, X_n) = \alpha_A \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \dots, X_n)$.
Prouvons que $\alpha_A = \det_{\mathfrak{B}}(A)$.
On a $\varphi_A(e_1, \dots, e_n) = \alpha_A$, or

$$\begin{aligned} \varphi_A(e_1, \dots, e_n) &= \det_{\mathfrak{B}}(Ae_1, \dots, Ae_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathfrak{B}}(A) \end{aligned}$$

où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de la matrice A.
On a obtenue que $\varphi_A(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathfrak{B}}(AX_1, \ldots, AX_n) = \det_{\mathfrak{B}}(A) \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n)$.
Regardons maintenant $\det_{\mathfrak{B}}(ABX_1, \ldots, ABX_n)$:

$$\begin{aligned}
\det_{\mathfrak{B}}(ABX_1, \ldots, ABX_n) &= \varphi_A(BX_1, \ldots, BX_n) \\
&= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(BX_1, \ldots, BX_n) \\
&= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \varphi_B \\
&= \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(B) \times \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) \\
&= \det_{\mathfrak{B}}(AB) \times \det_{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n).
\end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de $(K^n)^n$. Donc si on évalue en $\mathfrak{B}$, on obtient :

$$\det_{\mathfrak{B}}(ABe_1, \ldots, ABe_n) = \det_{\mathfrak{B}}(A) \times \det_{\mathfrak{B}}(B) = \det_{\mathfrak{B}}(AB) \ .$$

■

Chapitre 4

Exercices

4.1 Exercices

4.1.1 Déterminant de Vandermonde

Soit $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Indication : Remplacer la dernière colonne par une inconnue afin d'obternir un polynôme.

4.1.2 Déterminant de Cauchy

Soit $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{bmatrix}$$

Indication : Même technique que la question précédente afin de travailler avec une fraction rationnelle.

4.1.3 Déterminant de Smith

Calculer le déterminant suivant : $\det\left(pgcd(i,j)_{1 \le i,j \le n}\right)$.

Indice : prouver la propriété suivante et servez-vous en pour réécrire la matrice :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

avec φ l'indicatrice d'Euler.

4.2 Corrections

4.2.1 Vandermonde

Comme indiqué, considérons le polynôme suivant :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & X_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Attention, c'est bien un polynôme et non une matrice, ne vous laissez pas impressionner ! Si on développe par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$P = (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} + \dots + X^{n-1}(-1)^{n+n} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

On remarque ainsi que le degré de P est au plus égal à $n-1$. Or, le caractère alterné du déterminant nous donne que $P(a_i) = 0,\ \forall i \in [|1, n|]$. On peut alors conclure que P est de degré $n-1$ et que nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i). \tag{4.2}$$

Si l'on note D_n, le déterminant de Vandermonde à l'ordre n, on à l'égalité suivante : $P(a_n) = D_n$. D'après *(1)*, nous observons que $\lambda = D_{n-1}$, ce qui en nous servant de *(2)* nous permet d'établir la relation de récurrence suivant :

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{i=1}^{1} (a_2 - a_i) \times \dots \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} a_j - a_i \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i. \end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas convaincu, ce résultat ce démontre très bien par récurrence sur j.

4.2.2 Cauchy

Nous allons appliquer la même technique en remplaçant notre déterminant par la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+X}. \end{vmatrix}$$

Cela marche également si vous avez remplacé a_n. Le but étant de travailler sur l'exterieur du déterminant afin d'obternir une relation de récurrence. Pour cet exercice, je vais aller un peu plus vite car vous devriez déjà être plus alaise avec ce type de manipulation. En développant $F(X)$ par rapport à la dernière colonne, et en réduisant au même dénominateur, on obtient alors :

$$F(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 (a_j+X) \\ j\neq i}}^{n}}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+X)}. \tag{4.3}$$

On noterra P, le polynôme au numétrateur. On remarque immédiatement que P est de degré $n-1$ et que ses racines sont $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Donc :

$$F(X) = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(X-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(X+a_i)}$$

Essayons d'identifier λ, pour ce faire retournons à la forme première de F afin d'y faire des oppérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

$$F(X)(a_n+X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(X-b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(X+a_i)}$$

On évalue cette expression en $-a_n$ et on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}$$

D'où, si l'on note le déterminant de Cauchy à l'ordre n C_n :

$$\lambda = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)}.$$

Remplaçons λ dans notre expression initiale :

$$C_n = F(b_n) = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)} \times \frac{1}{a_n+b_n}.$$

Avec un tout petit peu d'intuition et de calcul, on en déduit la relation de récurrence suivante :

$$C_n = C_{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \times \frac{1}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

Encore une voix, je vous laisse vérifier ce résultat vous-même si vous y tenez.

4.2.3 Smith

Commençons par démontrer l'égalité suggérée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $E = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$. On voit alors directement que $|E| = n$.
Réécrivons maintenant E d'une autre manière, en réduisant toutes les fractions sous formes irréductibles :

$$\bigcup_{d|n}\left\{\ \frac{k}{d}\ |\ k \in [|1, n|]\ et\ k \wedge n = 1\right\}$$

C'est une union disjointe donc rien de plus facile que de calculer son cardinal :

$$|E| = \sum_{d|n}\left|\left\{\ \frac{k}{d}\ |\ k \in [|1, n|]\ et\ k \wedge n = 1\right\}\right| = \sum_{d|n}\varphi(d).$$

Si vous n'avez pas compris le passage à φ, je vous invite à regarder la définition de $\varphi(n)$. Sinon, tant mieux !
Essayons maintenant d'écrire notre matrice avec notre nouvelle formule.

$$\forall(i, j) \in [|1, n|]^2,\ pgcd(i, j) = \sum_{d|pgcd(i,j)}\varphi(d)$$

Pas très pratique n'est-ce pas ! Comme i et j varient entre 1 et n, nous pouvons un peu arranger notre formule :

$$\forall(i, j) \in [|1, n|]^2,\ pgcd(i, j) = \sum_{\substack{d=1 \\ d|pgcd(i,j)}}^{n}\varphi(d).$$

Presque super ! Mais la condition $d|pgcd(i, j)$ nous embête toujours. Pour s'en débarraser, posons :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ i|j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ce qui nous permet maintenant de réécrire :

$$\forall(i, j) \in [|1, n|]^2,\ pgcd(i, j) = \sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj}.$$

Hummm, cette formule ne vous fait donc penser à rien ? On dirait un petit peu (un tout petit peu) la formule du produit matriciel.
Essayons alors d'écrire notre matrice de départ comme un produit :

$$pgcd(i, j)_{1\leq i,j\leq n} = \left(\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
$$= AB$$

avec $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_ij)_{1\leq i,j\leq n}$.
Par identification, on trouve : $a_{ij}=\varphi(j)\delta ji$ et $b_{ij}=\delta_{ij}$. Ouf ! nous pouvons enfin finir en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det\left(pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n}\right) &= \det(AB)\\
&= \det(A)\det(B)\\
&= \det\begin{pmatrix}\varphi(1) & 0 & \dots & 0\\ ? & \varphi(2) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ ? & \dots & ? & \varphi(n)\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & ? & \dots & ?\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & ?\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \prod_{i=1}^{n}\varphi(n).
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Pour aller plus loing

Ce chapitre est un extra : il n'y aura ni rigueur ni démonstration.

Si vous observez bien, tout ce que nous avons fait précédament peut s'étendre aux matrice de $M_n(\mathbb{A})$, avec $\mathbb{A}$ un anneau commutatif. Rien ne vous empêche alors d'étudier le déterminant sur les modules (mais ça sera sans moi).

5.1 Un peu d'analyse

Grâce à mon cours, je pense que tout le monde adore manipuler le déterminant. Les derniers réfractaires ne peuvent être que les férues d'analyse. Mais pas de soucis, il y en a également pour vous.

Si nous nous intéressons de plus près à l'application det, nous remarquons qu'elle est polynômiale. Super ! elle est donc de classe C^∞. Amusons nous donc à calculer la diférentielle du déterminant. Comme je ne suis pas très fort je vais prendre $H \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale.
On a donc $\det(I_n + H) = \prod_{1 \leq i \leq n} 1 + h_{i,j}$. On développe ce produit :

$$\begin{aligned}
\det(I_n + H) &= 1 + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} h_{i_1,i_1} + \cdots + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n} h_{i_1,i_1} h_{i_2,i_2} \ldots h_{i_n,i_n} \\
&= 1 + \mathrm{Tr}(H) + f(H) \\
\text{avec } f(H) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} h_{i_1,i_1} h_{i_2,i_2} + \cdots + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n} h_{i_1,i_1} h_{i_2,i_2} \ldots h_{i_n,i_n}.
\end{aligned}$$

Observons maintenant les inégalités suivantes (ne me demandé pas comment j'ai trouvé) :

$$0 \leq |f(H)| \leq \sum_{2 \leq k \leq n} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |h_{i_1,i_1}| \ldots |h_{i_k,i_k}| \right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \|H\|^k.$$

Enfin (du facil), on remarque que $\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \|H\|^{k-1} \underset{H \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes (étonnant de le retrouver ici non ?), $\frac{|f(H)|}{\|H\|} \underset{H \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Conclusion : on connaît un DL à l'ordre 1 du déterminant en I_n (et donc sa diférentielle Tr), qui est :

$$\det(I_n + H) \underset{H \to 0}{=} 1 + \mathrm{Tr}(H) + \mathrm{o}(\|H\|).$$

Si vous êtes motivé, rien ne vous empêche d'étendre ce résultat à toutes les matrices et en d'autres points que I_n.

5.2 Algorithme

Enfin ! la première partie de ce chapitre que je maîtrise.
Le déterminant est très facile lorsque l'on est un ordinateur et que l'on peut effectuer des milliers de calculs sans erreur. Il sert notamment à résoudre des systèmes linéaires, notamment avec la célèbre formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{com}(M)$. Faisons donc un algorithme capable de calculer des inverse !

```python
"""
M = [[1,2,3],
     [4,5,6],
     [7,8,9]]
Notre matrice M sera representee par une liste a deux dimensions et ou l'element i,j de M sera accessible par M[i][j].
"""

def poplc(A, l, c):
    B = [ [A[i][j] for j in range(len(A[i])) ] for i in range(len(A))]
    B.pop(l) #supprime la l-eme ligne
    for (k) in range(len(B)): #supprime la c-eme colonne
        B[k].pop(c)
    return B


def det(A):
    for i in range(len(A)): # on test si A est carre
        if len(A[i]) != len(A):
            return 0

    if len(A) > 1:
        s = 0
        for i in range(len(A)):
            s += (-1)**(i)  * A[0][i] * det(poplc(A,0,i)) # on recopie la formule
        return s
    else :
        return A[0][0]


def comatrice(A):
    B = [[0 for j in range(len(A[i]))] for i in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[i])):
            B[i][j] = (-1) ** (i+j)  * det(poplc(A,i,j)) # on calcule les cofacteurs
    return B


def transpose (A):
    B = [[0 for j in range(len(A[i]))] for i in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[i])):
            B[i][j] = A[j][i] # on inverse lignes et colonnes
    return B


def inverse(A):
    if (det(A) != 0): # on test si A est inversible
        d = det(A)
        B = transpose(comatrice(A))
        for i in range(len(B)):
            for j in range(len(B[i])):
                               B[i][j] /= d
        return B
    else:
        return 0
```

Cette algorthime n'est pas du tout efficace ne le donné pas à la NASA.

Chapitre 6

Blibliographie

- Wikipédia - Permutations
- Wikipédia - Déterminant
- Déterminant Christophe Bertault — Mathématiques en MPSI
- Techno-science.net - Déterminant
- Bibm@th - Permutations
- Bibm@th - Déterminant
- Maths adulte - Déterminant (YouTube)
- CNRS - Déterminant
- Maths du supérieur (YouTube)
- Maths* - Oraux X-ens (YouTube)
- Correction du devoir de Calcul Différentiel - Univerité de Toulouse par Gavrilov