Notes trigonométriques

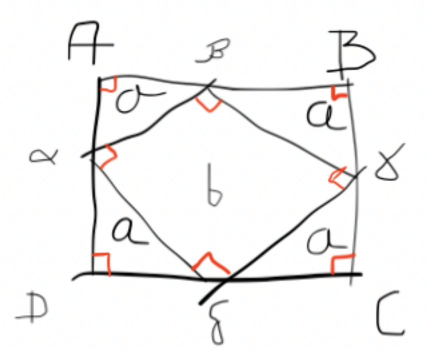
Arthur

Préambule

Cette note n'a pas vocation à être un cours sérieux. Elle vise à introduire quelques conceptes basiques de trigonométrie.
Avant de commencer, il est important de s'accorder sur quelques mots de vocabulaires.
Dessinez sur votre feuille un triangle ABC, rectangle en B. Alors le côté AC, opposé à l'angle droit du triangle est appellé **hypoténuse**. Le côté **opposé** à un angle, dans un triangle rectangle, est le côté qui ne touche pas cet angle. Par exemple, dans notre triangle, le côté opposé à l'angle Â est BC. Le côté **adjacent** à un angle, dans un triangle rectangle, est le côté qui touche l'angle mais qui n'est pas l'hypoténuse.
Mettons en pratique ce nouveau vocabulaire et démontrons le théorème de Pythagore.

Théorème Pythagore. *Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.*
Autrement dit : si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Démonstration. Pour cette démonstration je me contenterai d'un croquis. A vous de rédiger cela formellement si vous le souhaitez.



Contentez-vous d'écrire ce que vaut l'aire du carré $ABCD$ de différentes manières. ■

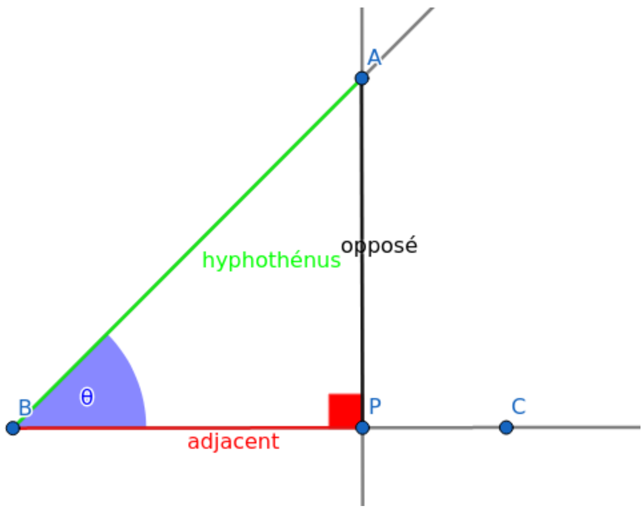
1 Introduction

Dans cette note, nous allons essentiellement parler de fonctions trigonométriques. Alors commençons par définir ce que sont cos (cosinus), sin (sinus) et tan (tangeante).
Ces trois fonctions s'appliquent à des angles (exprimés en radians) et sont définits si-dessous.

Soit θ un angle quelconque exprimé en radians,

$$\cos\theta = \frac{adjacent}{hypotenuse}$$
$$\sin\theta = \frac{oppose}{hypotenuse}$$
$$\tan\theta = \frac{oppose}{adjacent}$$

Représentons nous cela sur une figure géométrique :



Ici, $\theta = \widehat{ABC}$. On place P, le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On obtien alors le triangle BAP rectangle en P.
On peut alors calculer le sinus, le cosinus et la tangeante de θ.

$$\cos\theta = \frac{BP}{BA}$$
$$\sin\theta = \frac{AP}{BA}$$
$$\tan\theta = \frac{AP}{BP}$$

On oberve égalément :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{AP}{BA}}{\frac{BP}{BA}} = \frac{AP}{BP} = \tan\theta$$

Néanmoins, ces premières définitions ne nous permettent que de manipuler des angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. Si l'on considère un point $A(x_A, y_A)$ sur le cercle, alors on a :

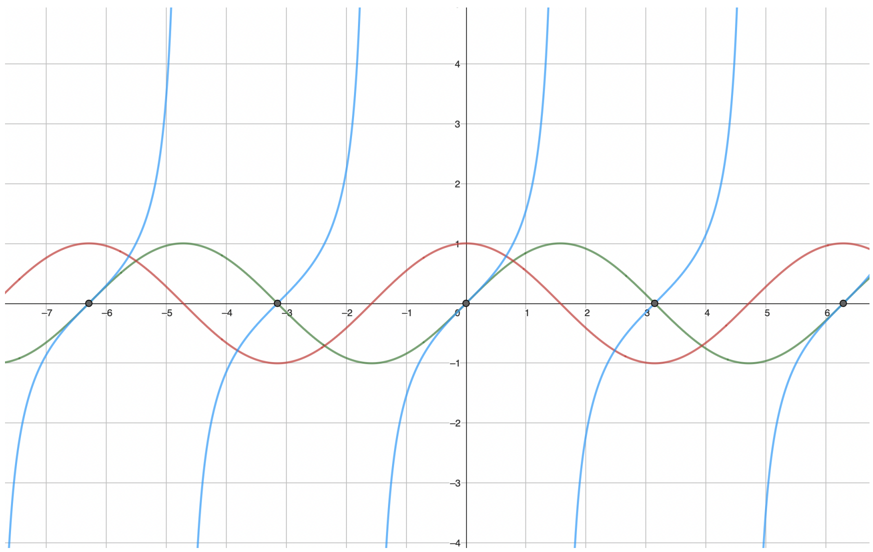
$$\cos(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = x_a \text{et} \sin(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = y_a$$

Cette définition est simple d'utilisation et permet de manipuler tout les réels positifs ou négatifs.

Nous pouvons également (encore me diriez-vous) définir le cosinus et le sinus à partir de séries entières. Je me contenterai de donner leurs définitions sans m'attarder sur ce point. Nous avons donc :

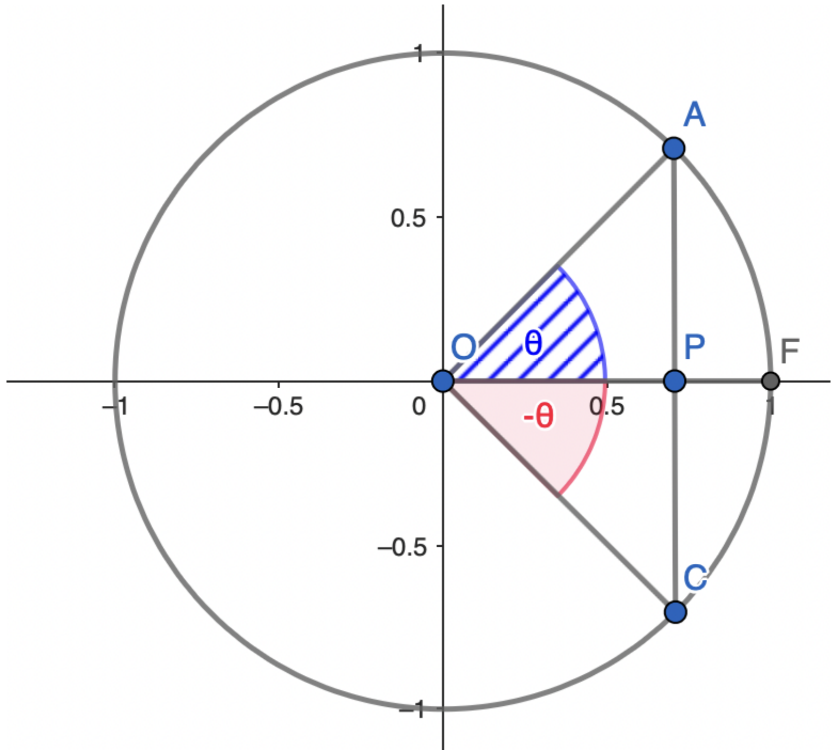
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Observons maintenant le graphe de nos trois fonctions trigonométriques.



On a ici la courbe de la fonction cos en rouge, celle de la fonction sin en vert, et enfin celle de la fonction tan en bleue. Les points noir quand à eux représentent l'occurence des multiples de π ($\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$).
On remarque que cos et sin son 2π-périodique. Quand à elle, tan est π-périodique. On remarque également que tan n'est pas définie sur $\{\frac{\pi}{2}k | k \in Z\}$.
Intéressons-nous à la parité de nos fonctions. On observe que cos est une fonction paire et que sin ainsi que tan sont impaires.

Démonstration. Prouvons que cos est une fonction paire.
Soit θ un angle quelconque. On se place dans le cercle trigonométrique de centre O. Puis on place les points A, P, F et C selon le dessins suivant.



Comme P est le milieu du segment AC, alors $AP = PC$. On noterra cette longueur h. De plus nous sommes dans le cercle trigonométrique de rayon 1. Donc $OA = OC = 1$. Montrons que $\cos(-\theta) = \cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{h}{OA} = h$$
$$\cos(-\theta)\frac{h}{OA} = h$$

Conclusion : cosinus est une fonction paire.

Prouvons maintenant que sinus est impaire. Nous allons procéder par une approche différente en utilisant la définition de sinus en série entière :

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\Rightarrow \sin(-\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On a alors $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \times (-1) = -1$, donc :

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{-\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

■

Voici un tableau récapitulant les valeurs du sinus et cosinus des angles remarquables :

θ	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\cos\theta$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	0	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Je vous conseille de l'apprendre par coeur.

2 Formules Trigonométriques

Commençons par la formule la plus importante de tout votre cours sur la trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{1}$$

Démonstration. Plaçons nous sur le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1), puis prenons un angle quelconque θ. Nous appelerons O le centre du cercle et A le point correspondant à l'angle sur le cercle. Enfin, nous appellerons le point B, le projeté orthogonal du point A sur la droite d'équation $y = x$. Nous avons donc un triangle ABO rectangle en B. Nous allons utiliser le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} & BO^2 + AB^2 = AO^2 \\ \iff & \frac{BO^2}{AO^2} + \frac{AB^2}{AO^2} = \frac{AO^2}{AO^2} \\ \iff & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \end{aligned}$$

■

Voyons maintenant les autres formules qu'il peut être utile de connaître :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{2}$$

$$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(a) + \cos(b)\sin(b) \tag{3}$$

Démonstration. Nous allons démontrer la formule (2) :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Plaçons nous dans le cercle trigonométrique. On appelera O, le centre du cercle et $\overrightarrow{i}$ le vecteur de coordonées $(1; 0)$ (de la base canonique du plan). Plaçons les points A et B de coordonnées $(\cos(a); \sin(a))$ et $(\cos(b); \sin(b))$. Alors $a = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA})$ et $b = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB})$.
Par Chasles :

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) \\ \iff & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) \\ \iff & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = b - a \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \\ \iff &\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b-a) \\ \iff &\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a-b) \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ avec les coordonnées ($\overrightarrow{OA} = (\cos(a);\sin(a))$ et $\overrightarrow{OB} = (\cos(b);\sin(b))$) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

On en déduit que :

$$\cos(a-b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

■

De ces deux formules je vous laisse trouver celles de $\sin(a-b)$ *et de* $\cos(a+b)$.

Voici quelques autres formules pouvant s'avérer utiles (*leurs démonstrations étant purement calculatoire seront laissées au lecteurs en exercices).*

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \tag{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \tag{5}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \tag{6}$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{7}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \tag{8}$$

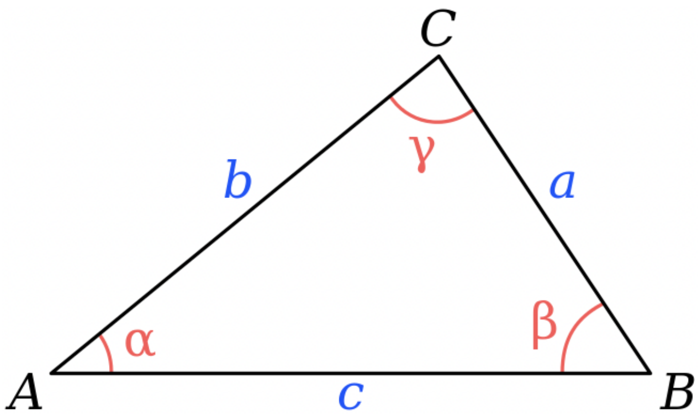
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \tag{9}$$

Avec $t = \tan\frac{\theta}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \tag{10}$$

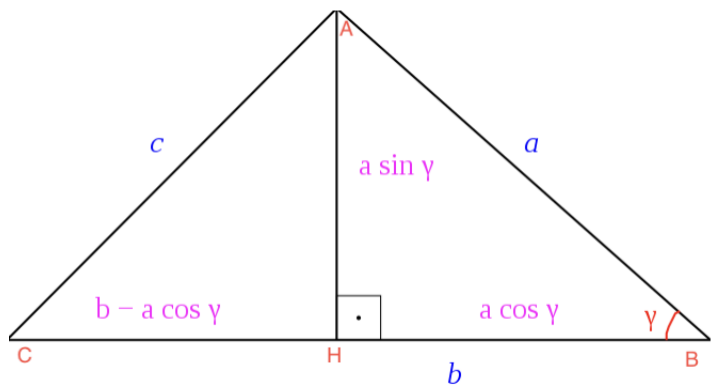
3 Généralisation du théorème de Pythagore : loi des cosinus

L'introduction des fonctions trigonométriques permirent au celèbre mathématicien Al-Kashi de généraliser le théorème de Pythagore à des traingles quelconques.



Théorème d'Al-Kashi. *Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure ci-dessus. Alors : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cos\gamma$.*

Démonstration. Pour mieux comprendre la démonstration, nous allons l'illustrer :



Nous avons là, un triangle ABC, de côté a, b, c et d'angles quelconques. On a :

$$\cos\gamma = \frac{AH}{AB}$$
$$\sin\gamma = \frac{HB}{AB}$$

donc en multipliant par a (AB) on obtient :

$$AH = a \times \sin\gamma$$
$$HB = a \times \cos\gamma$$

on en déduit alors que $CH = b - a\cos\gamma$. On peut ainsi appliquer le théorème de Pythagore sur le triangle AHC :

$$\begin{aligned} & AC^2 = CH^2 + AH^2 \\ \iff & c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 \\ \iff & c^2 = b^2 - 2ba\cos\gamma + a^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) \\ \iff & c^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2 \end{aligned}$$

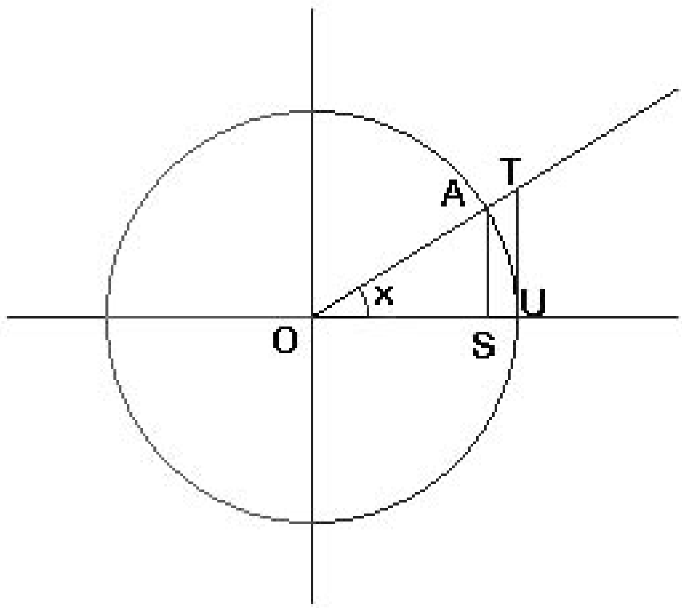
■

4 Dérivées

Cette section vise à vous rappeler les dérivées des fonctions trigonométriques.

$$\begin{aligned} &\textit{soit } x \in \mathbb{R}, \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\sin x)' &= \cos x \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est que sa dérivée est $\cos x$.
Rappel : L'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle au centre θ (en radians) est égale à $\frac{1}{2} \times r^2 \times \theta$.
Plaçons nous sur le cercle trigonométrique :



Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On $A = (\cos x; \sin x)$ et $UT = \tan x$. Désignons l'aire du triangle OAS par A_1, l'aire du secteur OAU par A_2 et l'aire du triangle OTU par A_3 . On voit sur la figure que $A_1 < A_2 < A_3$.

$$\begin{aligned} & A_1 < A_2 < A_3 \\ \iff & \frac{OA \times AS}{2} < \frac{1}{2} \times OA^2 \times x < \frac{UT \times OU}{2} \\ \iff & \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \end{aligned}$$

Comme $\sin x \neq 0$ et $\frac{2}{\sin x} > 0$, on multiplie l'égalité des deux côtés par ce terme :

$$\begin{aligned} \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{aligned}$$

Donc en appliquant la règle des gendarmes on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

$$= \sin'(0) = \cos(0)$$

Donc sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos(0)$.

$$\begin{aligned} &\textit{soit } x \in \mathbb{R} \textit{ et } h \neq 0, \\ \sin(a+h) - \sin(a) &= \sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a \\ &= \sin a(\cos h - 1) + \sin h \cos a \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h}$$

ainsi

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$$

Donc $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x) = \cos x$.
La preuve pour la dérivée de $\cos x$ ainsi que la dérivée de $\tan x$ sont laissées en exercice. ■

5 Fonctions réciproques

Considérons les fonctions : $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$, $\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$, $\tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}$.
Elles sont surjectives (sauf tan qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car pas définie sur $\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$). Néanmoins, si nous les restrenions, elles peuvent devenir bijectives :
$\cos : \quad [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, $\sin : \quad [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$, $\tan : \quad]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow [-1,1]$.
Maintenant que nos trois fonctions sont bijectives, nous pouvons leur définir des réciproques.

Rappel : soit $f : \quad [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *, ($a < b$ et $c < d$), une application bijective. Alors il existe une application réciproque à f,* $f : \quad [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *tel que $\forall x \in [c,d]$, $f(g(x)) = x$ et $\forall x \in [a,b]$, $g(f(x)) = x$. Par convention, on note g comme f^{-1}.*

On définit alors les fonctions réciproques de cos, sin et tan.

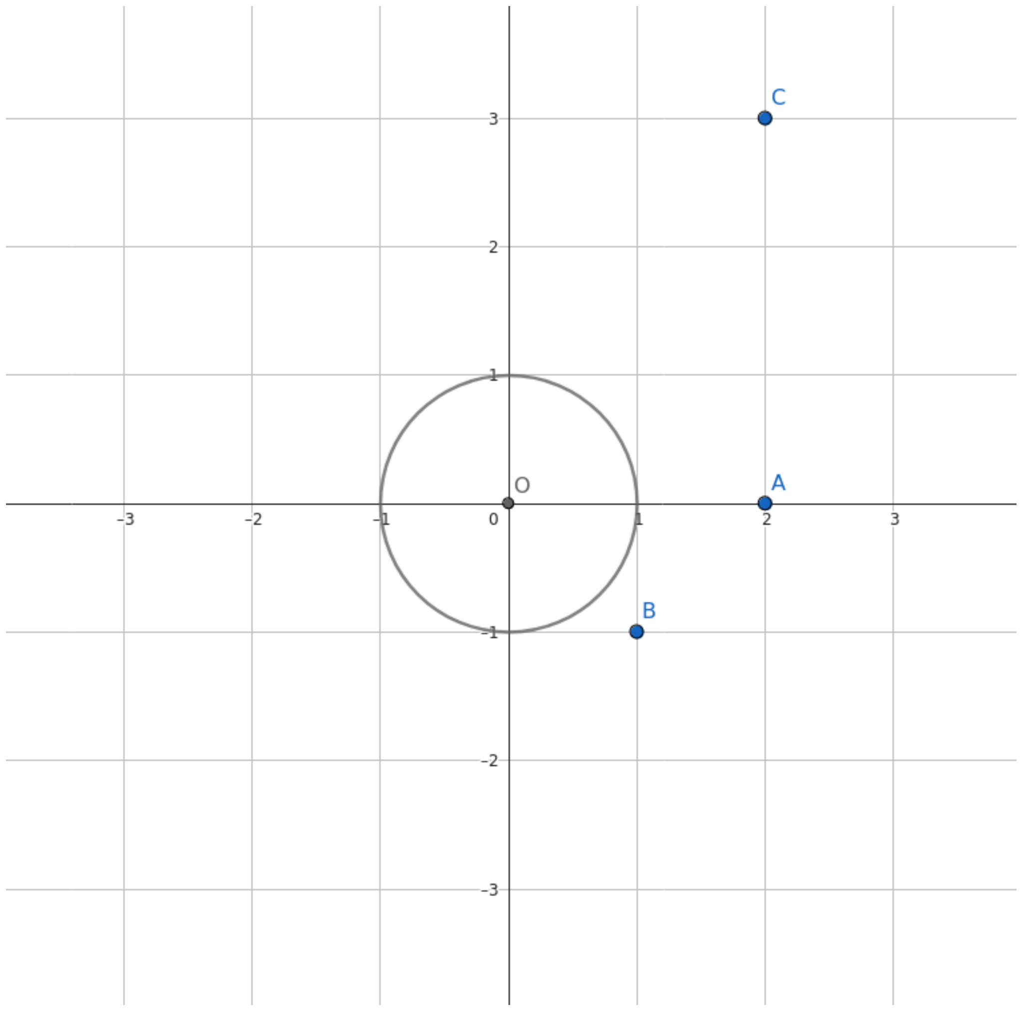
$$\text{arccos} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \cos^{-1} x \end{array} , \text{arcsin} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \sin^{-1} x \end{array} , \text{arctan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \tan^{-1} x \end{array} .$$

Les intervalles auxquels j'ai restreint mes fonctions ne sont pas uniques, il en existe une infinité de sorte que $\cos, \sin$ et tan soient bijectives.

6 Complexe

Certains prérequis sont nécessaire pour cette section. Une connaissance minimale des nombres complexes est attendue.

En mathématiques, le plan complexe (aussi appelé plan d'Argand, plan d'Argand-Cauchy ou plan d'Argand-Gauss1) désigne un plan, muni d'un repère orthonormé, dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe unique. Le complexe associé à un point est appelé l'affixe de ce point. Une affixe est constituée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire correspondant respectivement à l'abscisse et l'ordonnée du point.
Voici quelques exemples : $A = 2$, $B = 1 - i$, $C = 2i + 3$ et $D = -3 - 2i$.



Vous remarquerez que le point D n'est pas placé, je vous laisse le faire.

Rappelez-vous que les module de z notée $|z| := \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$, et que $e^{i\theta} := \cos a + i \sin b$.
Retournez sur le plan complexe et placez-y le point z d'affixe $z = 2e^i$.

Vous vous demandez peut-être ce que viennent faire des nombres complexes dans une note trigonométrique. Mais observons plusieurs relations entre la notation $e^{i\theta}$ et cos et sin.

Premièrement les deux formules de Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{11}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{12}$$

Les démonstrations de ces formules étant triviales, elles sont laissées en exercice au lecteur.

Ces deux formules couplées à la formule du binôme de Newton permettent de linéariser bon nombres d'expressions.

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration. Nous allons effectuer un raisonnement par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Supposons qu'il existe un entier n tel que la formule du binôme de Newton soit vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
On a :

$$\begin{aligned}
&(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
\iff &(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
\iff &(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
\iff &(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
\iff &(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

■

Vous pouvez ressortir cette démonstration lors d'une soirée pour impressioner vos amis avec le signe $\sum$ *!*
Enfin, pour terminer cette courte section, remarquons que $\sin\theta = Im(e^{i\theta})$ et que $\cos\theta = Re(e^{i\theta})$.

7 Intégration : règles de Bioche

Cette section vise à présenter quelques astuces de calcul d'intégrales avec des fonctions trigonométriques, connues sous le nom de règle de Bioche.

Ces règles permettent de calculer des intégrales de fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.
Ce sont les fractions construites à partir de $\cos x$ et $\sin x$ et des constantes en utilisant les "quatre opérations" $+$, , $\times$, $/$. Autrement dit, ce sont les fractions rationnelles de la forme : $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, où P et Q sont des polynômes à deux variables et $u = \cos x$; $v = \sin x$. On nottera la fonction rationnelle associé

à cette fraction rationnelle f.

Les règles de Bioche nous suggèrent des changements de variables judicieux pour intégrer f :
- $f(-x) = -f(x) \to t = \cos x$
- $f(\pi - x) = -f(x) \to t = \sin x$
- $f(\pi + x) = f(x) \to t = \tan x$
- si aucun des trois ne marches on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

8 Exercices

Après l'effort, le réconfort. Il est temps de s'exercer.

Exercice 1

Vous vous trouvez en plein Manhattan, lors de votre voyage organisé par votre femme, et votre gps vient de tomber en panne. Cette dernière étant tombée en panne d'essence, elle vous à demandé de lui amener un bidon de 50L d'essence. Vous l'avez dans le coffre mais votre voiture ne dispose plus que de 6L d'essence. Vous devez donc déterminer si oui ou non il faut passer à la station essence avant de rejoindre votre femme. Vous disposez de plusieurs informations :
- votre voiture consomme 1L par Km
- si l'on se place dans un repère orthonormé où vous êtes à l'origine et où l'unitté de mesure est le mètre, votre femme se trouve aux coordonnées (-5690,7643)
- les routes de Manhattan sont toutes perpendiculaires (vous pouvez tourner uniquement de 90°)

Déterminez combien de cm vous sépare de votre femme et si vous avez le temps de la rejoindre sans passer à la station essence.

Exercice 2

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes : $\tan x$, $\arccos x$, $\arcsin x$ et $\arctan x$.

Exercice 3

Écrire sous forme d'expression algébrique :
- 1. $\sin(\arccos x)$, 2. $\cos(\arcsin x)$, 3. $\cos(2\arcsin x)$
- 4. $\sin(\arctan x)$, 5. $\cos(\arctan x)$, 6. $\sin(3\arctan x)$

Exercice 4

1. Résoudre l'équation suivante :

$$\arccos x = 2\arccos\frac{\pi}{2}$$

2. Calculer : $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{3}))$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$ et $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{3}))$.

Exercice 5

Vérifier de deux manières différentes :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6

Linéariser les expressions suivantes :

— $\sin(3\theta)$
— $\cos^4(x)$
— $\sin^5(x)$

Exercice 7

Calculer les primitives suivantes :

— $\int \cos^8 x \cdot \sin^3 x \; dx$
— $\int \frac{1}{\sin x} \; dx$
— $\int \cos^2 x \; dx$
— $\int \frac{-56}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$ (de deux manières différentes)
— $\int \frac{1}{(3+x)^2-4(2-\frac{4}{6})} \; dx$
— $\int \frac{-4}{x^2+x+1} \; dx$

Exercice 8

Montrer la propriété suivante :
$\forall x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Bonus

Depuis la nuit des temps, π fascine les mathématiciens ? Aujourd'hui, vous allez fabriquer votre propre formule afin de calculer les premières décimales de π.

1. Prouver l'énoncé suivant : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (série de Grégory).

2. En déduire une expression en série de $\arctan x$.

3. Utiliser la réponse à la question **2** pour trouver une expression de π.

Bravo ! vous pouvez essayer de calculer des décimales de π avec cette formule. Malheureusement, il vous faudra à peu près un million de temes pour obtenir 5 décimales correctes. Essayons donc de rendre cette formule plus efficace. Pour cela, nous allons essayer d'obtenir un angle le plus proche de 0 *possible.*

4. Prouver l'énoncé suivant :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ tel que $xy \neq 1$ et $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

5. Exprimer $2\arctan\frac{1}{5}$, puis continuer à découper votre angle jusqu'à obtenir $arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.

6. A partir de la question **5**, trouver une expression des $\frac{\pi}{4}$ (formule de John Machin).

Bravo ! Maintenant vous disposez d'une formule réellement efficace pour calculer les décimales de π. Si nous étions au 17^es, vous seriez surement devenu un mathématicien de renom.

9 Correction

Détrompez-vous, si vous pensiez trouver ici les réponses aux exercices. Aucun exercice ne sera corrigé. Vous trouverez dans cette section des méthodes pour réussir, mais en aucun cas des résultats.

Correction de l'exercice 1

Je penses qu'avec cette exercice j'ai inventé la chose la plus ennuyante du monde. Je n'ai aucune idée de la réponse, et je ne vous tiendrais pas rigueur si vous sauté cet exercice.

Correction de l'exercice 2

Pour trouver la dérivée de $\tan x$, il suffit d'utiliser la formule de la dérivée de quotient :

$$\text{Soit } u, v \text{ deux fonctions dérivables sur } I \text{ , alors } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour trouver la formule des dérivées des fonctions réciproques, il suffit de partir de l'égalité suivante :

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

puis en dérivant cette égalité grâce à la formule de la dérivee composée, on obtient :

$$f^{-1\prime}(x) \cdot f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Maintenant, à vous de finir le travail.

Correction de l'exercice 3

La clé pour réussir cette exercice est de relier la fonction "extérieure" à la fonction intérieure. Procédons à un exemple : Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bijectives.
Si nous avons l'égalité suivante : $f(x) = 2g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, et que je vous demande d'exprimer $f(g^{-1}(x))$ sous forme d'expression algébrique, nous allons lier f à g^{-1} :

$$f(g^{-1}(x)) = 2g(g^{-1}(x)) = 2x$$

A vous de reproduire ça dans l'exercice.

Correction de l'exercice 4

Pour résoudre cette équation, il vous suffit d'appliquer la fonction cos, puis la formule de $\cos(2\theta)$ (qui se déduit de $\cos(a+b)$). Attention pour la deuxième partie de l'exercice, les fonctions ne sont pas forcément définies sur $\mathbb{R}$.

Correction de l’exercice 5

La prermière méthode consiste à exprimer $\arccos x$ ou $\arcsin x$ en fonction du reste. Puis appliquez sa réciproque et vous devriez réussir en utilisant si besoin une formule trigonométrique.
La deuxième méthode utilise la dérivée :
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(0) = f(1) = f(-1616) = f(0.008391)...$$

A vous donc de choisir la bonne fonction afin de trouver une dérivée nulle et de prouver l’égalité.

Correction de l’exercice 6

Remarquez que $f(6) = f(1+1+1+1+1+1)$.
Souvenez vous également des formules d’Euler et de celle du binôme de Newton :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Correction de l’exercice 7

- — décomposez $\sin^3 x$ puis à l’aide de **(1)** retrouvez une expression de la forme $u' \times u^n$.
- — essayez de faire apparaître une forme du type $\frac{u'}{u}$
- — utilisez la formule de $\cos(2\theta)$ afin d’obtenir une expression de $\sin^2\theta$
- — je ne peux pas vous donner d’indication sans vous donner la réponse
- — utilisez les dérivées des fonctions réciproques
- — essayez de faire apparaître la dérivée du numérateur au dénominateur puis décomposer la fraction afin de pouvoir intégrer avec ln et arctan.

Correction de l’exercice 8

Utilisez l’une des méthodes de l’exercice 5. Puis, observez une somme téléscopique.

Correction de l’exercice Bonus

1. Utilisez la formule ci-dessous (qui peut être démontrée par récurrence), puis passez à la limite.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

2. Essayez d’obtenir $\frac{1}{1+x}$, puis $\frac{1}{1+x^2}$. De là observez une relation entre ce que vous avez obtenu et la fonction arctan.

3. Evaluez votre expression en $x = 1$.

4. Utilisez ces trois formules successivement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x$$

5. Appliquez l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} 2\arctan\theta &= \arctan\theta + \arctan\theta \\ &= \arctan a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\arctan\theta &= 2\arctan\theta + 2\arctan\theta \\ &= \arctan a + \arctan a \end{aligned}$$

J'ai transformé ma somme de arctan grâce à la formule trouvée précédemment. Puis je répète l'algorythme en multipliant par deux.

6. Ajoutez $\frac{\pi}{4}$ dans la formule obtenue, puis souvenez vous que $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ et que arctan est impaire.