INF 263 – Algoritmia

Estrategias Algorítmicas
Divide y Vencerás

MAG. RONY CUEVA

MAG. JOHAN BALDEON

2021-2

Introducción

- Estrategia introducida por los romanos en el siglo IV antes de Cristo.
  - Divide et impera
- Como estrategia algorítmica es una de las más exitosas.
  - Dividir un problema en instancias más pequeñas
  - Resolver cada instancia de manera independiente
  - Combinar las soluciones para solucionar problema original.
- Problemas clásicos como ordenación: soluciones más eficientes son del tipo divide y vencerás.
- Es más fácil aprender esta estrategia con ejemplos!

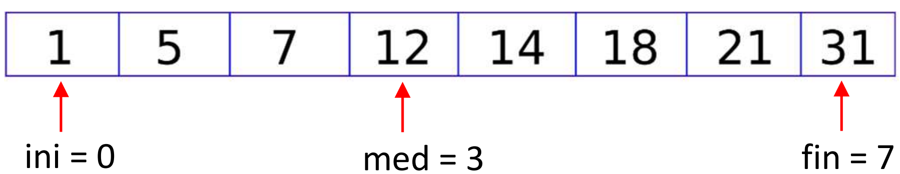
Ejemplo 1: Búsqueda Binaria

- Buscar una clave K en un arreglo ordenado A

1	5	7	12	14	18	21	31

K = 7

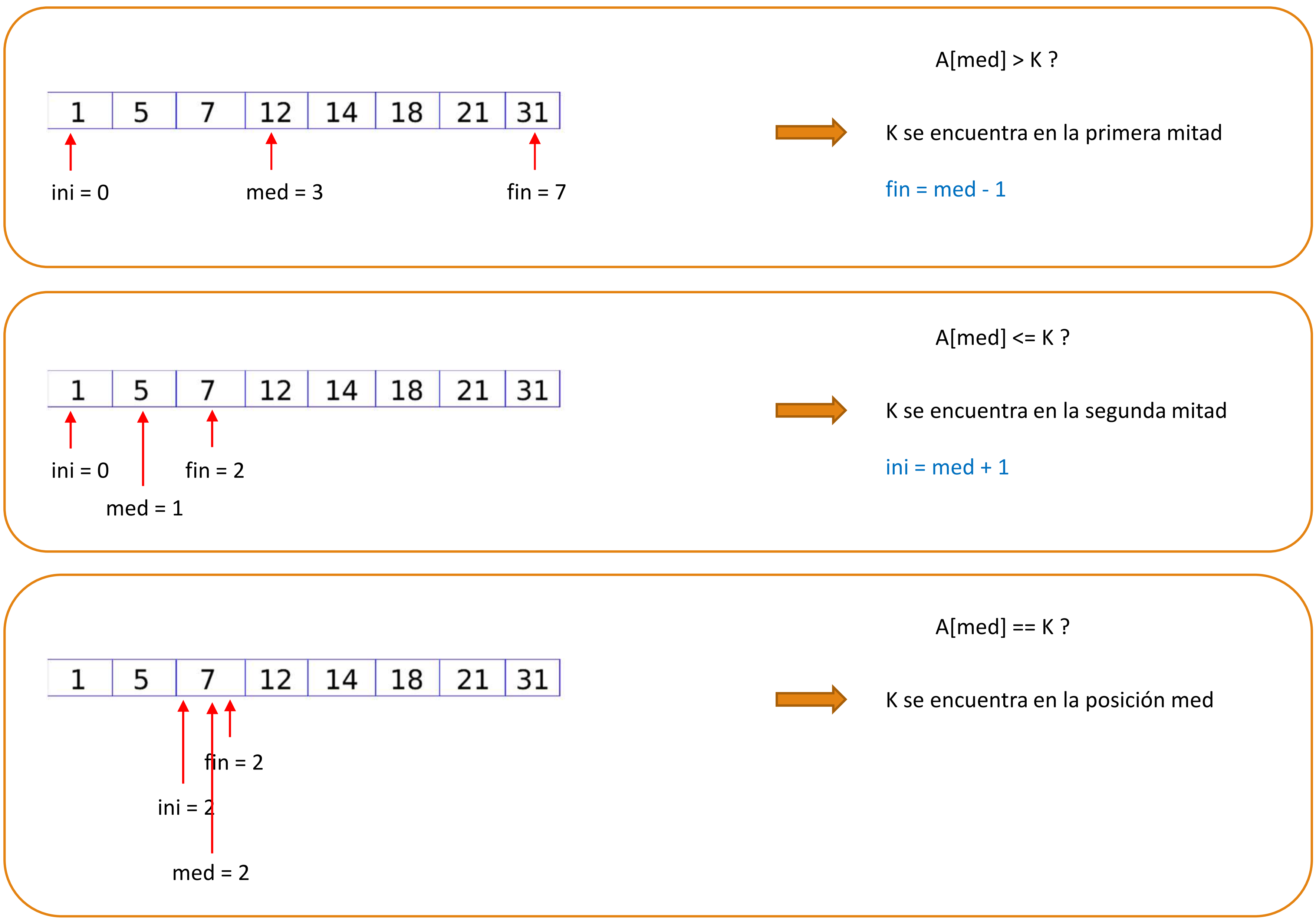
- Proceso
  - Como arreglo está ordenado, si verificamos a la mitad del arreglo, podemos descartar la mitad en donde sabemos que no encontraremos el elemento



A[med] > K ? → K se encuentra en la primera mitad

A[med] <= K ? → K se encuentra en la segunda mitad

K = 7


1 5 7 12 14 18 21 31
ini = 0
med = 3
fin = 7
A[med] > K ?
K se encuentra en la primera mitad
fin = med - 1
1 5 7 12 14 18 21 31
ini = 0
fin = 2
med = 1
A[med] <= K ?
K se encuentra en la segunda mitad
ini = med + 1
1 5 7 12 14 18 21 31
fin = 2
ini = 2
med = 2
A[med] == K ?
K se encuentra en la posición med

Búsqueda Binaria

- Si el elemento se encuentra, las dos posiciones extremos siempre convergerán al elemento buscado.
- Si el elemento no se encuentra, la posición inicial sobrepasará a la posición final cerca del elemento buscado.
- NOTAS
  - El problema es recursivo
  - Usamos las observaciones anteriores para definir nuestro caso base.

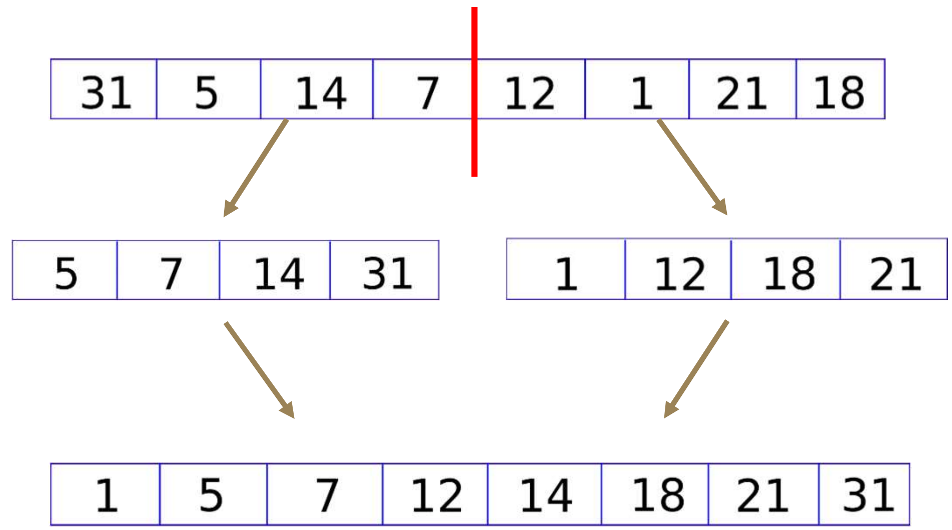
Algoritmo – Búsqueda Binaria

- Pre-condición: Arreglo A [0..N-1] ordenado, clave K, posición inicial, posición final
- Post-condición: V o F

  - Si ini > fin
    - Retornar F
  - med = (fin + ini)/2
  - Si A[med]=K
    - Retornar V
  - Caso contrario Si A[med] < K
    - Retornar BusquedaBinaria(A, K, med+1, fin)
  - Caso contrario
    - Retornar BusquedaBinaria(A, K, ini, med - 1)

Ejemplo 2: Ordenación por Mezcla

- Algoritmo eficiente para ordenar una secuencia de números
- Idea
  - Dividir el arreglo en 2
  - Ordenar recursivamente las dos mitades
  - Mezclar las dos listas ordenadas en una sola lista ordenada
- El caso base de la recursión es cuando hay un solo elemento, en cuyo caso ya está ordenado.



Merge-sort: Pseudocódigo

- Pre-condición: Arreglo A[0..N-1], posición inicial, posición final
- Post-condición: Arreglo A[0..N-1] ordenado

- Si ini = fin
  - Retornar
- med = (fin + ini)/2
- Mergesort(A, ini, med)
- Mergesort(A, med+1, fin)
- Merge(A, ini, med, fin)

Mergesort

- El procedimiento que hace todo el trabajo es el algoritmo de mezcla
- Si se implementa eficientemente, toda la ordenación será eficiente
- Idea
  - Crear copias de ambos subarreglos e ir comparando los elementos, insertándolos en el orden correcto

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 0

B =

1	12	18	21

q = 0

C =

1							

m = 0

B[q] < A[p] ⇒ C[m] = B[q]   q++   m++

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 0

B =

1	12	18	21

q = 1

C =

1	5						

m = 1

B[q] < A[p] → C[m] = B[q]   q++   m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p]   p++   m++

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 1

B =

1	12	18	21

q = 1

C =

1	5	7					

m = 2

B[q] < A[p] → C[m] = B[q] q++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 2

B =

1	12	18	21

q = 1

C =

1	5	7	12				

m = 3

B[q] < A[p] → C[m] = B[q] q++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

B[q] < A[p] → C[m] = B[q] q++ m++

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 2

B =

1	12	18	21

q = 2

C =

1	5	7	12				

m = 4

B[q] < A[p] → C[m] = B[q] q++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

B[q] > A[p] → C[m] = A[p] p++ m++

B[q] < A[p] → C[m] = B[q] q++ m++

⋮

Algoritmo Mezcla

A =

5	7	14	31

p = 5

B =

1	12	18	21

q = 5

C =

1	5	7	12	14	18	21	31

m = 9

- Proceso termina cuando C contiene todos los elementos mezclados
- Problema: tener cuidado cuando se termina de analizar un arreglo y aún quedan elementos en el otro arreglo
  - Con quién comparamos?
- Truco: aumentar ambos sub-arreglos con números muy grandes y ejecutar proceso hasta que C contenga todos los elementos.

A =

5	7	14	31	∞

B =

1	12	18	21	∞

Análisis de Algoritmos

1	constant
$\log n$	logarithmic
n	linear
$n \log n$	n-log-n or linearithmic
n^2	quadratic
n^3	cubic
2^n	exponential
$n!$	factorial

Algoritmo – Búsqueda Binaria

- Pre-condición: Arreglo A [0..N-1] ordenado, clave K, posición inicial, posición final
- Post-condición: V o F

$$T(n) = 1 + T(n/2)$$

- Si ini > fin
  - Retornar F
- med = (fin + ini)/2
- Si A[med]=K
  - Retornar V
- Caso contrario Si A[med] < K
  - Retornar BusquedaBinaria(A, K, med+1, fin)
- Caso contrario
  - Retornar BusquedaBinaria(A, K, ini, med - 1)

$$T(n) = O(\log n)$$

Merge-sort: Pseudocódigo

- Pre-condición: Arreglo A[0..N-1], posición inicial, posición final
- Post-condición: Arreglo A[0..N-1] ordenado

- Si ini = fin
  - Retornar
- med = (fin + ini)/2
- Mergesort(A, ini, med)
- Mergesort(A, med+1, fin)
- Merge(A, ini, med, fin)

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

Conclusiones

- Estrategia muy útil para resolver eficientemente problemas
  - Idea: resolver problemas independientemente (clave para reducir complejidad) y luego fusionar soluciones
- Generalmente la solución se puede expresar recursivamente
  - No necesariamente la implementación tiene que ser recursiva
  - Se puede implementar iterativamente, aunque eso suponga algún esfuerzo extra del programador.