Paradigmas de Programación

Correspondencia de Curry-Howard

2do cuatrimestre de 2024
Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{bool}}\,\text{T-TRUE} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathsf{bool}}\,\text{T-FALSE}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \mathsf{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ P : \tau}\,\text{T-IF}$$

$$\dfrac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\,\text{T-VAR} \qquad \dfrac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau.\, M : \tau \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}\,\text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Reglas de tipado

$$\dfrac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\,\text{T-VAR}$$

$$\dfrac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau.M : \tau \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \tau}\,\text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo Lambda

Deducción natural

$$\dfrac{}{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \tau}\,ax$$

$$\dfrac{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \sigma}{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma}\,\to_i$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash \quad \tau}{\Gamma \vdash \quad \tau}\,\to_e$$

- Ignoremos los términos del lambda cálculo
- Notar que las reglas de tipado se corresponden con reglas de deducción natural:

Correspondencia de Curry

- Observación realizada sobre la lógica combinatoria:

> **Lógica combinatoria**
>
> Variante del cálculo lambda que sustituye a las abstracciones por un conjunto limitado de combinadores.

- Curry & Feys observaron que si se lee el tipo $\sigma \to \tau$ como una implicación $\sigma \Rightarrow \tau$, luego

> la regla de tipado de la aplicación de una función es la regla **modus ponens**

Pruebas y Programas

Proposiciones	$\leftrightarrow$	Tipos
Pruebas	$\leftrightarrow$	Términos

> Un juicio $\vdash \tau$ es derivable **sí y sólo sí** el tipo τ está habitado, esto es, existe un término M tal que $\vdash M : \sigma$ es derivable.

Ejemplo

> **¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?**
>
> Si, por ejemplo:
>
> $$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$
>
> ---
>
> Corresponde al siguiente juicio de tipado:
>
> $$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma . x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$
>
> El **término** $\lambda x : \sigma . x$ se asocia con la **prueba** de $\sigma \Rightarrow \sigma$ que se muestra en la parte superior

Ejemplo

> **¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?**
>
> También existe la siguiente prueba
>
> $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\,ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$
>
> ---
>
> Corresponde al siguiente juicio de tipado:
>
> $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \to \sigma \vdash x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma \to \sigma . x : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \qquad \dfrac{\dfrac{}{y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda y : \sigma . y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : \sigma \to \sigma . x)(\lambda y : \sigma . y) : \sigma \to \sigma}\,\text{T-APP}$$
>
> El **término** $(\lambda x : \sigma \to \sigma . x)(\lambda y : \sigma . y)$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma}\Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma, y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash \lambda y : \sigma.y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \qquad \dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash (\lambda y : \sigma.y)x : \sigma}\,\text{T-APP}}{\vdash \lambda x : \sigma.(\lambda y : \sigma.y)x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

El **término** $\lambda x : \sigma.(\lambda y : \sigma.y)x$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Pruebas vs términos

- Una fórmula puede tener muchas pruebas distintas.
- Distintas pruebas corresponden a distintos juicios de tipado, es decir distintos términos.
- Notar que algunas pruebas de la misma proposición son mas complejas que otras:

Distintas pruebas de $\sigma \Rightarrow \sigma$

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\,ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

Correspondencia de Curry-Howard

- William Alvin Howard extiende la correspondencia:
  - Tratando los restantes conectivos lógicos.
  - Usando el cálculo lambda en lugar de la lógica combinatoria.
  - Mostrando una correspondencia entre la simplificación de pruebas y la computación.

Simplificación de pruebas

Corte (*Cut*)

Un corte es una afirmación intermedia (un lema) que probamos a pesar de que no es una subfórmula de la afirmación final (el teorema)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \rho}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\vdots\,\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \rho}\Rightarrow_e$$

σ es un corte

- Asumimos σ para probar ρ
- Probamos σ (como lemma)

Simplificación de pruebas

Corte (Cut)

Un corte es una afirmación intermedia (un lema) que probamos a pesar de que no es una subfórmula de la afirmación final (el teorema)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left.\vdots\right\}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \rho}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\left.\vdots\right\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \rho}\Rightarrow_e$$

σ es un corte

Caracterizado por el uso de $\Rightarrow_i$ seguido por $\Rightarrow_e$

Simplificación de pruebas

Eliminación de Corte (Cut)

Reescribir una prueba de manera tal que no tenga cortes:

- Eliminamos σ reemplazando cada uso σ en la prueba de ρ por una copia de la prueba de σ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left.\vdots\right\}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \rho}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\left.\vdots\right\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \rho}\Rightarrow_e$$

Eliminación del corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left.\vdots\right\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\left.\vdots\right\}\Phi}}{\Gamma \vdash \rho}$$

Eliminación de corte : Ejemplo

Eliminación de corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\}\Phi}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\left.\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}ax\right\}\Psi}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\left.\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}ax\right\}\Psi}{\}\Phi}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}$$

Computación como simplificación de pruebas

Eliminación de corte y reducción β

Un paso de reducción β (esto es, aplicar E-APPABS) se corresponde con una eliminación de corte.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \sigma \vdash M : \rho}}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \rho}\text{T-ABS} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.M)N : \rho}\text{T-APP} \quad \to \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\vdots}}{\Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho}$$

Normalización

Forma normal

Una prueba está en **forma normal** si no posee cortes.

Theorem (Normalización de pruebas)

Toda prueba puede ser "normalizada" mediante la eliminación sucesiva de cortes.

Conjunción

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \dots & ::= & \dots \mid \sigma \times \tau \\ M, N, \dots & ::= & \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \mathsf{fst}\ M \mid \mathsf{snd}\ N \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \sigma \qquad \Gamma \vdash \quad \tau}{\sigma \vdash \qquad \sigma \wedge \tau} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \qquad \sigma} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \quad \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash \qquad \tau} \wedge_{e_2}$$

Producto

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \dots & ::= & \dots \mid \sigma \times \tau \\ M, N, \dots & ::= & \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \mathsf{fst}\ M \mid \mathsf{snd}\ N \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\sigma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}\ M : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}\ M : \tau}$$

Conjunción : Corte

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \sigma} \qquad \cfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \tau}}{\Gamma \vdash \qquad \sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \qquad \sigma} \wedge_{e_1}$$

τ es un corte

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \sigma} \qquad \cfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \tau}}{\Gamma \vdash \qquad \sigma \wedge \tau} \wedge_i}{\Gamma \vdash \qquad \tau} \wedge_{e_2}$$

σ es un corte

Conjunción : Eliminación de corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \sigma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \tau}}{\Gamma \vdash \quad \sigma \wedge \tau}\wedge_i}{\Gamma \vdash \quad \sigma}\wedge_{e_1} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \sigma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \tau}}{\Gamma \vdash \quad \sigma \wedge \tau}\wedge_i}{\Gamma \vdash \quad \tau}\wedge_{e_2} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \quad \tau}$$

Producto : Reducción

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \sigma \times \tau}\wedge_i}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}\ \langle M, N\rangle : \sigma}\wedge_{e_1} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \sigma \times \tau}\wedge_i}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}\ \langle M, N\rangle : \tau}\wedge_{e_2} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}$$

Disjunción

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \sigma + \tau \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \mathsf{left}^{\sigma}\ M \mid \mathsf{right}^{\sigma}\ M \\ & & \mid \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\mathsf{left}\ x \to N, \mathsf{right}\ x \to P\} \end{array}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \quad \sigma}{\Gamma \vdash \quad \sigma \vee \tau}\vee_{i_1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \quad \tau}{\Gamma \vdash \quad \sigma \vee \tau}\vee_{i_2}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \quad \sigma \vee \tau \qquad \Gamma, \quad \sigma \vdash \quad \rho \qquad \Gamma, \quad \tau \vdash \quad \rho}{\Gamma \vdash \quad \rho}\vee_e$$

Suma

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \sigma + \tau \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \mathsf{left}^{\sigma}\ M \mid \mathsf{right}^{\sigma}\ M \\ & & \mid \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\mathsf{left}\ x \to N, \mathsf{right}\ x \to P\} \end{array}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\tau}\ M : \sigma + \tau} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{right}^{\sigma}\ M : \sigma + \tau}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma + \tau \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\mathsf{left}\ x \to N, \mathsf{right}\ x \to P\} : \rho}$$

Disjunción : Corte

> $\vee_{i_1}$ seguido de $\vee_e$ es un corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}}{\Gamma \vdash \text{left}^{\tau}\ M : \sigma + \tau}\vee_{i_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{}{\Gamma, x : \tau \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \text{case left}^{\tau}\ M \text{ with}\{\text{left } x \to N, \text{right } x \to P\} : \rho}\vee_e$$

> $\vee_{i_2}$ seguido de $\vee_e$ es un corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\Gamma \vdash \text{right}^{\sigma}\ M : \sigma + \tau}\vee_{i_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{}{\Gamma, x : \tau \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \text{case right}^{\tau}\ M \text{ with}\{\text{left } x \to N, \text{right } x \to P\} : \rho}\vee_e$$

Suma : Reducción (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}}{\Gamma \vdash \text{left}^{\tau}\ M : \sigma + \tau}\vee_{i_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \text{case left}^{\tau}\ M \text{ with}\{\text{left } x \to N, \text{right } x \to P\} : \rho}\vee_e$$

$$\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}}{\vdots}}{\Gamma \vdash N\{x := M\} : \rho}$$

Suma : Reducción (2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\Gamma \vdash \text{right}^{\sigma}\ M : \sigma + \tau}\vee_{i_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \text{case right}^{\tau}\ M \text{ with}\{\text{left } x \to N, \text{right } x \to P\} : \rho}\vee_e$$

$$\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}}{\vdots}}{\Gamma \vdash P\{x := M\} : \rho}$$

Absurdo

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lll} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \bot \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \text{case } M \text{ with}\{\} \end{array}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \qquad \bot}{\Gamma \vdash \qquad\qquad \sigma}\bot_e$$

Absurdo

Extendemos la sintaxis

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \dots & ::= & \dots \mid \bot \\ M, N, P, \dots & ::= & \dots \mid \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\} : \sigma}\bot_e$$

- Notar que no hay constructores para el tipo $\bot$.
- El tipo $\bot$ (Void) es el tipo vacío.
- Se puede definir como un tipo de dato algebraico sin constructores.

Correspondencia de Curry-Howard

Theorem (Correspondencia de Curry-Howard)

$A_1, \dots, A_n \vdash \sigma$ es derivable en NJ **ssi** *existe un término M donde $fv(M) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash M : \sigma$.*

Consistencia de la lógica

La relación entre reducción y pruebas permite concluir que la lógica es consistente.

Corollary

$\nvdash \bot$ (en NJ).

Se obtiene a partir del siguiente razonamiento:

- Debe existir M, tal que $\vdash M : \bot$.
- Por terminación y preservación de tipos, debería existir un valor V, tal que $\vdash V : \bot$. Por analisis de casos en los posibles valores, se puede concluir que no existe.

Sobre la negación

- La negación se puede codificar como:

$$\neg\sigma \equiv \sigma \to \bot$$

- Notar que la regla:
  - $\neg_i$ corresponde a $\Rightarrow_i$
  - $\neg_e$ corresponde a $\Rightarrow_e$
- De esta manera no hay necesidad de extender al sistema de tipos

Tipo Unit

- Se puede considerar que la lógica está extendida con la fórmula $\top$ (fórmula válida).
- Se considera NJ extendido con la siguiente regla:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\top_i$$

- En el cálculo lambda extendemos la sintaxis con el tipo $\top$ que tiene un único elemento.

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \dots & ::= & \dots \mid \top \\ M, N, P, \dots & ::= & \dots \mid \top \end{array}$$

- Una única regla de tipado (que se corresponde con $\top_i$)

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top : \top}\text{T-UNIT}$$

- El tipo $\top$ es un tipo algebraico con un único constructor $\top$.

Sobre los booleanos

- Los ignoramos porque se pueden codificar.

Booleanos como sumas

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Bool} & \equiv & \top + \top \\ \mathsf{true} & \equiv & \mathsf{left}^{\top} \\ \mathsf{false} & \equiv & \mathsf{right}^{\top} \\ \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ P & \equiv & \mathsf{case}\ M\ \mathsf{with}\{\mathsf{left}^{\top}\ \_ \to N, \mathsf{right}^{\top}\ \_ \to P\} \end{array}$$

- Existen codificaciones en el fragmento implicativo (booleanos de Church)

Recursión

- Extendemos la sintaxis con un nuevo operador

$$M ::= \dots \mid \mathsf{fix}\ M$$

- No se precisan nuevos tipos pero sí una regla de tipado.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{fix}\ M : \sigma}\text{T-FIX}$$

Semántica operacional small-step

- No hay valores nuevos pero sí reglas de evaluación nuevas.

$$\frac{M \to M'}{\mathsf{fix}\ M \to \mathsf{fix}\ M'}\text{E-FIX}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}\ (\lambda x : \sigma.M) \to M\{x := \mathsf{fix}\ (\lambda x : \sigma.M)\}}\text{E-FIXBETA}$$

Ejemplos

Sea M el término

$$\begin{array}{l}\lambda f : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}.\\ \ \lambda x : \mathsf{nat}.\\ \ \ \mathit{if}\ \mathsf{iszero}(x)\ \mathit{then}\ \underline{1}\ \mathit{else}\ x * f(\mathsf{pred}(x))\end{array}$$

en

$$\mathsf{fix}\ M\ \underline{3}$$

Ejemplos

- Ahora podemos definir funciones parciales:

$$\mathsf{fix}\ (\lambda x : \sigma.x)$$

- Notar que $\vdash \mathsf{fix}\ (\lambda x : \sigma.x) : \sigma$ para cualquier σ.
- En particular, vale para $\sigma = \bot$.
- En consecuencia, si se extiende NJ con un operador fix , la lógica sería inconsistente ($\vdash \bot$ sería derivable)