

## Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente **tipos**) son

$$\sigma ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \sigma \rightarrow \sigma$$

Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto infinito enumerable de variables y  $x \in \mathcal{X}$ . Los **términos** están dados por

$$\begin{aligned} M ::= & x \\ & \mid \lambda x : \sigma. M \\ & \mid M \ M \\ & \mid \text{true} \\ & \mid \text{false} \\ & \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ & \mid \text{zero} \\ & \mid \text{succ}(M) \\ & \mid \text{pred}(M) \\ & \mid \text{isZero}(M) \end{aligned}$$

8 de mayo de 2024

1 / 7

## Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} a_{X_{\text{zero}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat} \quad \Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}} \text{succ} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat} \quad \Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}} \text{pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat} \quad \Gamma \vdash \text{isZero}(M) : \text{Bool}}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) : \text{Bool}} \text{isZero}$$

8 de mayo de 2024

3 / 7

## Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} a_{X_{\text{true}}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} a_{X_{\text{false}}}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} a_{X_v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma} \text{if}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M \ N : \tau} \rightarrow_e$$

8 de mayo de 2024

2 / 7

## Machete: Semántica operacional

$$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(V)$$

(Los valores de tipo Nat pueden escribirse como  $\underline{n}$ , lo cual abrevia  $\text{succ}^n(\text{zero})$ ).

Reglas de Evaluación en un paso

$$\text{Si } M_1 \rightarrow M'_1, \text{ entonces } M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2 \quad (\text{app}_l \text{ o } \mu)$$

$$\text{Si } M_2 \rightarrow M'_2, \text{ entonces } V M_2 \rightarrow V M'_2 \quad (\text{app}_r \text{ o } \nu)$$

$$(\lambda x : \sigma. M) V \rightarrow M\{x := V\} \quad (\beta)$$

8 de mayo de 2024

4 / 7

Reglas de Evaluación en un paso

if true then  $M_2$  else  $M_3 \rightarrow M_2$  (if<sub>t</sub>)

if false then  $M_2$  else  $M_3 \rightarrow M_3$  (if<sub>f</sub>)

**Si**  $M_1 \rightarrow M'_1$ , **entonces**

if  $M_1$  then  $M_2$  else  $M_3 \rightarrow$  if  $M'_1$  then  $M_2$  else  $M_3$  (if<sub>c</sub>)

Machete: Extensión con  $\mu$

$M ::= \dots \mid \mu x : \tau. M$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mu x : \sigma. M : \sigma} \mu$$

$\mu x : \sigma. M \rightarrow M\{x := \mu x : \sigma. M\}$  (fix)

Reglas de Evaluación en un paso

$\text{pred}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \underline{n}$  (pred)

**Opcional\*:**  $\text{pred}(\text{zero}) \rightarrow \text{zero}$  (pred<sub>0</sub>)

$\text{isZero}(\text{zero}) \rightarrow \text{true}$  (isZero<sub>0</sub>)

$\text{isZero}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \text{false}$  (isZero<sub>n</sub>)

**Si**  $M \rightarrow N$ , **entonces**  $\text{succ}(M) \rightarrow \text{succ}(N)$  (succ<sub>c</sub>)

**Si**  $M \rightarrow N$ , **entonces**  $\text{pred}(M) \rightarrow \text{pred}(N)$  (pred<sub>c</sub>)

**Si**  $M \rightarrow N$ , **entonces**  $\text{isZero}(M) \rightarrow \text{isZero}(N)$  (isZero<sub>c</sub>)

\*Introducir la regla pred<sub>0</sub> restaura la propiedad de Progreso, pero ya no modela los naturales tradicionales, sino una variante.