

Machete: Tipos y Términos

Las **expresiones de tipos** (o simplemente **tipos**) son

$$\sigma ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \sigma \rightarrow \sigma$$

Sea \mathcal{X} un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los **términos** están dados por

$$\begin{aligned} M ::= & x \\ & \mid \lambda x : \sigma. M \\ & \mid M M \\ & \mid \text{true} \\ & \mid \text{false} \\ & \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ & \mid \text{zero} \\ & \mid \text{succ}(M) \\ & \mid \text{pred}(M) \\ & \mid \text{isZero}(M) \end{aligned}$$

8 de mayo de 2024 1 / 7

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \text{ax}_{\text{zero}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}} \text{succ} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}} \text{pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) : \text{Bool}} \text{isZero}$$

8 de mayo de 2024 3 / 7

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{ax}_{\text{true}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \text{ax}_{\text{false}}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ax}_v$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma} \text{if}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \rightarrow_e$$

8 de mayo de 2024 2 / 7

Machete: Semántica operacional

$$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(V)$$

(Los valores de tipo Nat pueden escribirse como \underline{n} , lo cual abrevia $\text{succ}^n(\text{zero})$).

Reglas de Evaluación en un paso

$$\text{Si } M_1 \rightarrow M'_1, \text{ entonces } M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2 \quad (\text{app}_l \text{ o } \mu)$$

$$\text{Si } M_2 \rightarrow M'_2, \text{ entonces } V M_2 \rightarrow V M'_2 \quad (\text{app}_r \text{ o } \nu)$$

$$(\lambda x : \sigma. M) V \rightarrow M\{x := V\} \quad (\beta)$$

8 de mayo de 2024 4 / 7

Reglas de Evaluación en un paso

if true then M_2 else $M_3 \rightarrow M_2$ (if_t)

if false then M_2 else $M_3 \rightarrow M_3$ (if_f)

Si $M_1 \rightarrow M'_1$, **entonces**
if M_1 then M_2 else $M_3 \rightarrow$ if M'_1 then M_2 else M_3 (if_c)

Reglas de Evaluación en un paso

pred(succ(n)) \rightarrow n (pred)

Opcional*: pred(zero) \rightarrow zero (pred₀)

isZero(zero) \rightarrow true (isZero₀)

isZero(succ(n)) \rightarrow false (isZero _{n})

Si $M \rightarrow N$, **entonces** succ(M) \rightarrow succ(N) (succ_c)

Si $M \rightarrow N$, **entonces** pred(M) \rightarrow pred(N) (pred_c)

Si $M \rightarrow N$, **entonces** isZero(M) \rightarrow isZero(N) (isZero_c)

*Introducir la regla pred₀ restaura la propiedad de Progreso, pero ya no modela los naturales tradicionales, sino una variante.

$M ::= \dots \mid \mu x : \tau. M$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mu x : \sigma. M : \sigma} \mu$$

$\mu x : \sigma. M \rightarrow M\{x := \mu x : \sigma. M\}$ (fix)