Clase práctica
✨ Resolución en lógica de primer orden ✨

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

12/11/2024

¿Qué es?

- Procedimiento para determinar la **insatisfactibilidad** de una fórmula.
- Es útil como técnica de **demostración por refutación** (i.e., probar que τ es válida mostrando que $\neg\tau$ es insatisfactible).
- Consiste en la **aplicación sucesiva** de una regla de inferencia a un conjunto de cláusulas.

Satisfactibilidad y validez

En general,

- Una *asignación* asocia variables a valores del dominio.
- Una fórmula τ es **válida** sii toda asignación la hace verdadera.
- Una fórmula τ es **satisfactible** sii alguna asignación la hace verdadera.

El siguiente hecho permite utilizar al método como técnica de demostración:

$$\tau \text{ es válida sii } \neg\tau \text{ es insatisfactible}$$

Cláusulas y FNC

El método trabaja con fórmulas en **forma normal conjuntiva**.

- Conjunción de disyunciones de literales, siendo un *literal* una fórmula atómica o su negación.
- Una *cláusula* es cada una de estas disyunciones de literales. Las representamos en notación de conjuntos.

Ejemplo:

$$\{\neg\mathsf{menor}(X, Y), \mathsf{menor}(c, Y)\}$$

representa la cláusula

$$\forall X.\forall Y.(\neg\mathsf{menor}(X, Y) \lor \mathsf{menor}(c, Y))$$

Cláusulas y FNC

De esta manera, notamos a una fórmula en FNC como un conjunto de cláusulas. Este se entiende como la conjunción de todas ellas.

Por ejemplo, el conjunto que contiene a las cláusulas

- $\{\neg \text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$
- $\{\text{impar}(Z), \text{mayor}(Z, w)\}$

representa la fórmula

$\forall X.\forall Y.(\neg \text{menor}(X, Y) \lor \text{menor}(c, Y)) \land \forall Z.(\text{impar}(Z) \lor \text{mayor}(Z, w))$

Método de Resolución

Repaso

Estrategia

- Para demostrar que la fórmula τ es universalmente válida
  Demostramos que $\neg\tau$ es insatisfactible.
- Para demostrar que τ se deduce de $\sigma_1, \ldots \sigma_n$
  Demostramos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \neg\tau$ es insatisfactible.

Esquema general

- Expresar la o las fórmulas como cláusulas.
- Aplicar sucesivamente un paso de resolución
  (generando nuevas cláusulas)...
- Hasta llegar a la cláusula vacía
  o concluir que no es posible llegar a ella.
- Importante: al aplicar resolución suelen presentarse varias opciones.
  Conviene tener un plan.

La regla de resolución en el marco proposicional

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \ldots, A_m, Q\} \qquad \sigma_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q\}}{\tau = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}}$$

- A τ se la llama **resolvente** (de σ_i y σ_j)
- La regla se apoya en el hecho de que la siguiente proposición es una tautología:

$$(\alpha \lor P) \land (\beta \lor \neg P) \Leftrightarrow (\alpha \lor P) \land (\beta \lor \neg P) \land (\alpha \lor \beta)$$

- El conjunto de cláusulas $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ es lógicamente equivalente a $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \tau\}$

Ejemplo para entrar en calor

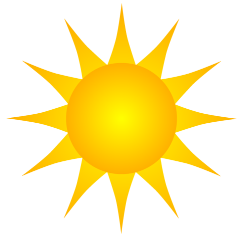
Práctica 7 - Ejercicio 4

Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalecían dos propuestas: la casa de Ana, que era cómoda y espaciosa, y la de Carlos, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Ana; y si no, en la de Carlos. (Desde ya, se juntarían en una sola casa.) Finalmente el grupo se juntó a comer en la casa de Ana, pero no llovió.

Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar - mediante el método de resolución - que el pronóstico se equivocó (anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

$P =$ "El pronóstico anunció lluvia."
$A =$ "El grupo se reúne en la casa de Ana."
$C =$ "El grupo se reúne en la casa de Carlos."
$L =$ "Llueve en el día de la reunión."

Probémoslo



Tenemos...

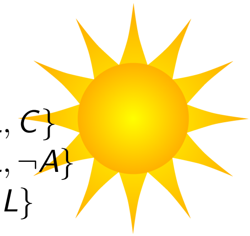
1. $P \Rightarrow A \rightsquigarrow \neg P \vee A$
2. $\neg P \Rightarrow C \rightsquigarrow P \vee C$
3. $\neg(A \wedge C) \rightsquigarrow \neg A \vee \neg C$
4. A
5. $\neg L$

Queremos ver que:

$$(P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)$$

Negación:
$\neg((P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)) \rightsquigarrow (\neg P \vee L) \wedge (P \vee \neg L)$

Expresando las cláusulas como conjuntos



1. $\{\neg P, A\}$
2. $\{P, C\}$
3. $\{\neg A, \neg C\}$
4. $\{A\}$
5. $\{\neg L\}$
6. $\{\neg P, L\}$
7. $\{P, \neg L\}$

De 6 y 2: 8. $\{L, C\}$
De 8 y 3: 9. $\{L, \neg A\}$
De 9 y 4: 10. $\{L\}$
De 10 y 5: $\square$

Ayuda: pensemos en lo que queremos demostrar y ¡hagamos un plan! Suponemos que el pronóstico no anunció lluvia o llovió...

Pasaje a FNC

Paso a paso

1. Eliminar implicación
2. Forma normal negada
3. Forma normal prenexa (opcional)
4. Forma normal de Skolem (dependencias = variables libres dentro del alcance del $\exists$)
5. Forma normal conjuntiva
6. Distribución de cuantificadores y renombre de variables

La regla de resolución en primer orden

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \ldots, A_m, P_1, \ldots, P_k\} \quad \sigma_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_l\}}{\tau = S(\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\})}$$

- S es el MGU de $\{P_1 \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} P_k \stackrel{?}{=} Q_1 \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} Q_l\}$ es decir, $S(P_1) = \ldots = S(P_k) = S(Q_1) = \ldots = S(Q_l)$.
- A τ se la llama **resolvente** (de σ_i y σ_j).
- Cada paso de resolución **preserva satisfactibilidad** (Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel).

Resolución en lógica de primer orden

⚠ Cosas importantes para recordar[1] ⚠

- Al skolemizar, usar la misma constante o función si y sólo si la variable que estamos eliminando es **la misma** (nunca para otras, aun si tienen el mismo nombre).
- Para encontrar las dependencias, ver qué variables están libres dentro del alcance del $\exists$ (sin contar la que se está eliminando).
- ¡No olvidarse de negar lo que se quiere demostrar! Y recordar que $\neg((\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau) = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \neg\tau$.
- Antes de empezar a aplicar pasos de resolución, convencerse de que lo que se quiere demostrar es verdadero, y trazar un plan para demostrarlo (mentalmente o por escrito).
- Recordar bien cómo funciona la unificación, y sustituir siempre **variables** (ni funciones, ni constantes, ni predicados).

[1] Seguir las indicaciones de esta lista previene los errores más frecuentes en los parciales.

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

- Representar en forma clausal la siguiente información referida a conjuntos, pertenencia (predicado Pert) e inclusión (predicado Inc).
  - i $\forall X.\forall Y.(\mathrm{Inc}(X,Y) \Leftrightarrow \forall Z.(\mathrm{Pert}(Z,X) \Rightarrow \mathrm{Pert}(Z,Y)))$
    X está incluido en Y si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y.
  - ii $\forall X.\neg\mathrm{Pert}(X,\emptyset)$
    Ningún elemento pertenece al vacío.
- Usar resolución para probar que el vacío está incluido en todo conjunto.
- Indicar justificando si la prueba realizada es SLD (volveremos sobre esto más adelante).

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.:	$X \subseteq Y$ si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\mathrm{Inc}(X,Y) \Leftrightarrow (\forall Z.(\mathrm{Pert}(Z,X) \Rightarrow \mathrm{Pert}(Z,Y))))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Inc}(X_1,Y_1), \neg\mathrm{Pert}(Z_1,X_1), \mathrm{Pert}(Z_1,Y_1)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_2,Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2,Y_2),X_2)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_3,Y_3), \neg\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3,Y_3),Y_3)\}$
Cast.:	Ningún elemento pertenece al vacío.
1° o.:	$\forall X.\neg\mathrm{Pert}(X,\emptyset)$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Pert}(X_4,\emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	El vacío está incluido en todo conjunto.
1° o.:	$\forall X.\mathrm{Inc}(\emptyset,X)$
Neg.:	$\exists X.\neg\mathrm{Inc}(\emptyset,X)$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Inc}(\emptyset,\mathrm{c})\}$

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.:	$X \subseteq Y$ si y solo si cada elemento de X es un elemento de Y.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\mathsf{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z.(\mathsf{Pert}(Z, X) \Rightarrow \mathsf{Pert}(Z, Y))))$
Claus.:	$\{\neg\mathsf{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathsf{Pert}(Z_1, X_1), \mathsf{Pert}(Z_1, Y_1)\}$ $\{\mathsf{Inc}(X_2, Y_2), \mathsf{Pert}(\mathsf{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$ $\{\mathsf{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathsf{Pert}(\mathsf{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
Cast.:	Ningún elemento pertenece al vacío.
1° o.:	$\forall X.\neg\mathsf{Pert}(X, \emptyset)$
Claus.:	$\{\neg\mathsf{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	El vacío está incluido en todo conjunto.
1° o.:	$\forall X.\mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Neg.:	$\exists X.\neg\mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Claus.:	$\{\neg\mathsf{Inc}(\emptyset, \mathsf{c})\}$

Ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

$$\frac{\{A_1, ..., A_m, P_1, ..., P_k\} \qquad \{B_1, ..., B_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_l\}}{S(\{A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n\})}$$

donde S es el MGU de $\{P_1, ..., P_k, Q_1, ..., Q_l\}$.

1. $\{\neg\mathsf{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathsf{Pert}(Z_1, X_1), \mathsf{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\mathsf{Inc}(X_2, Y_2), \mathsf{Pert}(\mathsf{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\mathsf{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathsf{Pert}(\mathsf{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg\mathsf{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg\mathsf{Inc}(\emptyset, \mathsf{c})\}$
6. (2 y 5) $\{\mathsf{Pert}(\mathsf{f}(\emptyset, \mathsf{c}), \emptyset)\}$ $S = \{X_2 := \emptyset,\ Y_2 := \mathsf{c}\}$
7. (6 y 4) $\square$ $S = \{X_4 := \mathsf{f}(\emptyset, \mathsf{c})\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuela a partir de la relación Madre:

- Los hijos son descendientes:
  $\forall X.\forall Y.(\mathsf{Madre}(X, Y) \Rightarrow \mathsf{Descendiente}(Y, X))$
- La relación de descendencia es transitiva:
  $\forall X.\forall Y.\forall Z.(\mathsf{Descendiente}(X, Y) \wedge \mathsf{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \mathsf{Descendiente}(X, Z))$
- La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta:
  $\forall X.\forall Y.(\mathsf{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z.(\mathsf{Madre}(X, Z) \wedge \mathsf{Madre}(Z, Y)))$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$$\forall X.\forall Y.(\mathsf{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \mathsf{Descendiente}(Y, X))$$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas. Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.:	Los hijos son descendientes.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Madre}(X,Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\neg\text{Madre}(X_1,Y_1), \text{Descendiente}(Y_1,X_1)\}$
Cast.:	La relación de descendencia es transitiva.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.\forall Z.(\text{Descendiente}(X,Y) \wedge \text{Descendiente}(Y,Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X,Z))$
Claus.:	$\{\neg\text{Descendiente}(X_2,Y_2), \neg\text{Descendiente}(Y_2,Z_2), \text{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$
Cast.:	La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Abuela}(X,Y) \Rightarrow \exists Z.(\text{Madre}(X,Z) \wedge \text{Madre}(Z,Y)))$
Claus.:	$\{\neg\text{Abuela}(X_3,Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3,Y_3))\}$ $\{\neg\text{Abuela}(X_4,Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	Los nietos son descendientes
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Abuela}(X,Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y,X))$
Neg.:	$\exists X.\exists Y.(\text{Abuela}(X,Y) \wedge \neg\text{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\text{Abuela}(a,b)\}$ $\{\neg\text{Descendiente}(b,a)\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.:	Los hijos son descendientes.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Madre}(X,Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\neg\text{Madre}(X_1,Y_1), \text{Descendiente}(Y_1,X_1)\}$
Cast.:	La relación de descendencia es transitiva.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.\forall Z.(\text{Descendiente}(X,Y) \wedge \text{Descendiente}(Y,Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X,Z))$
Claus.:	$\{\neg\text{Descendiente}(X_2,Y_2), \neg\text{Descendiente}(Y_2,Z_2), \text{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$
Cast.:	La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Abuela}(X,Y) \Rightarrow \exists Z.(\text{Madre}(X,Z) \wedge \text{Madre}(Z,Y)))$
Claus.:	$\{\neg\text{Abuela}(X_3,Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3,Y_3))\}$ $\{\neg\text{Abuela}(X_4,Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

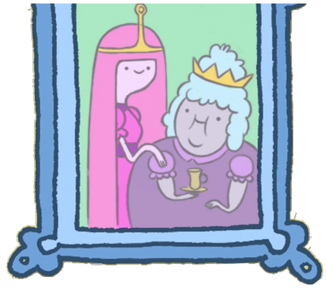
Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	Los nietos son descendientes
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(\text{Abuela}(X,Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y,X))$
Neg.:	$\exists X.\exists Y.(\text{Abuela}(X,Y) \wedge \neg\text{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\text{Abuela}(a,b)\}$ $\{\neg\text{Descendiente}(b,a)\}$

Otro ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008



1. $\{\neg\mathrm{Madre}(X_1, Y_1), \mathrm{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$
2. $\{\neg\mathrm{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg\mathrm{Descendiente}(Y_2, Z_2), \mathrm{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$
3. $\{\neg\mathrm{Abuela}(X_3, Y_3), \mathrm{Madre}(X_3, \mathrm{medio}(X_3, Y_3))\}$
4. $\{\neg\mathrm{Abuela}(X_4, Y_4), \mathrm{Madre}(\mathrm{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$
5. $\{\mathrm{Abuela}(a, b)\}$
6. $\{\neg\mathrm{Descendiente}(b, a)\}$

Resolvámoslo con nuestra herramienta.

Cómo mantenernos en línea

Si un conjunto de cláusulas $\mathcal{C}$ es insatisfactible, existe una secuencia de pasos de resolución *lineal* que lo refuta (prueba su insatisfactibilidad). Es decir, una secuencia de la forma:

$$
\begin{array}{cccc}
 & C_0 & & \\
B_1 & C_1 & & S_1 \\
B_2 & C_2 & & S_2 \\
B_3 & C_3 & & S_3 \\
B_{p-1} & \dots & & \\
 & C_{p-1} & & S_{p-1} \\
B_p & C_p = \square & & S_p
\end{array}
$$

donde C_0 y cada B_i es un elemento de $\mathcal{C}$ o algún C_j con $j < i$.

Resolución SLD (*Selective Linear Definite*)

La resolución es cara, pero hay cupones de descuento...

- El método de resolución es completo, pero ineficiente.
- El espacio de búsqueda - inicialmente cuadrático - crece en cada paso.
- Resolución lineal reduce el espacio de búsqueda.
- Resolución SLD es lineal y (un poco) más eficiente, preservando completitud...
  ¡pero no puede aplicarse a cualquier conjunto de cláusulas!

Cláusulas de Horn

- Cláusula de Horn
  - Cláusula de la forma $\forall X_1 \dots \forall X_m.C$ tal que la disyunción de literales C tiene a lo sumo un literal positivo.
- Cláusula de definición ("Definite Clause")
  - Cláusula de la forma $\forall X_1 \dots \forall X_m.C$ tal que la disyunción de literales C tiene exactamente un literal positivo.
- Sea $H = P \cup \{G\}$ un conjunto de cláusulas de Horn (con nombre de variables disjuntos) tal que
  - P conjunto de cláusulas de definición y
  - G una cláusula sin literales positivos.
- $H = P \cup \{G\}$ son las cláusulas de entrada.
  - P se conoce como el programa o base de conocimientos y
  - G el goal, meta o cláusula objetivo.

Cláusulas de Horn

Cláusulas con a lo sumo un literal positivo.

- $\cancel{\{P(X), P(Y), \neg Q(Y,Z)\}}$
- $\{Q(e,Z)\}$ ✓ $\to$ cláusula de definición (*hecho*)
- $\{P(X), \neg P(e)\}$ ✓ $\to$ cláusula de definición (*regla*)
- $\cancel{\{P(X), \neg P(e), Q(X,Y)\}}$
- $\{P(X), \neg P(e), \neg Q(X,Y)\}$ ✓ $\to$ cláusula de definición (*regla*)
- $\{\neg P(X), \neg P(e), \neg Q(X,Y)\}$ $\not\checkmark \to$ cláusula objetivo

⚠ No toda fórmula puede expresarse como una cláusula de Horn ⚠

$$\forall X.(P(X) \vee Q(X))$$

Resolución SLD

Un secuencia de pasos de resolución SLD para un conjunto de cláusulas de Horn H es una secuencia

$$< N_0, N_1, \ldots, N_p >$$

de cláusulas objetivo que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $N_0 \in H$ (N_0 es la cláusula objetivo de H).
2. *sigue en transparencia siguiente*.

Resolución SLD

2. para todo N_i en la secuencia, $0 < i < p$, si N_i es

$$\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna cláusula de definición C_i de la forma $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$ en H, tal que A_k y A son unificables con MGU S, y N_{i+1} es $\{S(\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n)\}$.

Resolución SLD

Un caso particular de la resolución general.

- Cláusulas de Horn con exactamente una cláusula objetivo.
- Resolvemos la cláusula objetivo con una cláusula de definición.
- Eso nos da otra cláusula objetivo.
- Repetimos el proceso con esta nueva cláusula...
- Hasta llegar a la cláusula vacía.
- Si se busca un resultado, computamos la sustitución respuesta componiendo todas las sustituciones que fuimos realizando.

$$\frac{\overbrace{\{R, \neg B_1, \ldots, \neg B_n\}}^{\text{definición}} \qquad \overbrace{\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m\}}^{\text{objetivo}}}{\underbrace{S(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_n, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m\})}_{\text{nuevo objetivo}}}$$

donde S es el MGU de $\{R \stackrel{?}{=} A_k\}$.

Volviendo al primer ejercicio de LPO que resolvimos...

1. $\{\neg\mathrm{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathrm{Pert}(Z_1, X_1), \mathrm{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\mathrm{Inc}(X_2, Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\mathrm{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg\mathrm{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg\mathrm{Inc}(\emptyset, \mathrm{c})\}$
6. (2 y 5) $\{\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c}), \emptyset)\}$ $S = \{X_2 := \emptyset,\ Y_2 := \mathrm{c}\}$
7. (6 y 4) $\square$ $S = \{X_4 := \mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c})\}$

¿Esto es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Resolución SLD

Ejemplo (computando una solución)

"Los enemigos de mis enemigos son mis amigos."

1. $\{\mathrm{amigo}(A, B), \neg\mathrm{enemigo}(A, C), \neg\mathrm{enemigo}(C, B)\}$
2. $\{\mathrm{enemigo}(\mathrm{Dulce\ Princesa}, \mathrm{Rey\ Helado})\}$
3. $\{\mathrm{enemigo}(\mathrm{Rey\ Helado}, \mathrm{Ricardio})\}$
4. $\{\mathrm{enemigo}(\mathrm{Rey\ Helado}, \mathrm{Finn})\}$
5. $\{\neg\mathrm{amigo}(\mathrm{Dulce\ Princesa}, X)\}$
6. (1 y 5) $\{\neg\mathrm{enemigo}(\mathrm{Dulce\ Princesa}, C), \neg\mathrm{enemigo}(C, B)\}$
   $S_6 = \{A := \mathrm{Dulce\ Princesa}, X := B\}$
7. (2 y 6) $\{\neg\mathrm{enemigo}(\mathrm{Rey\ Helado}, B)\}$
   $S_7 = \{C := \mathrm{Rey\ Helado}\}$
8. (3 y 7) $\square$ $S_8 = \{B := \mathrm{Ricardio}\}$
   $S = S_8 \circ S_7 \circ S_6 =$
   $\{A := \mathrm{Dulce\ Princesa}, X := \mathrm{Ricardio}, B := \mathrm{Ricardio},$
   $C := \mathrm{Rey\ Helado}\}$

Árbol de resolución

¡Es *lineal*!

- La resolución SLD es lineal: no hay vuelta atrás posible.
- Si el objetivo puede resolverse con más de una regla, elegir la correcta.
- Si hay más de una, elegir cualquiera.
- Si nos equivocamos, entonces lo que hicimos *no* es parte de la resolución SLD.
- Puede haber varias resoluciones SLD posibles.
- Prolog intenta buscar todas (resolución SLD + backtracking).

Resolución SLD y Prolog

Preguntas generales

- El mecanismo de búsqueda en la resolución SLD ¿está determinado?
- ¿El método es completo?
- ¿Prolog usa resolución SLD? ¿Su método es completo? ¿Está determinado?
- ¿Dónde está el problema (o la diferencia)?

Resolución SLD y Prolog

El ejemplo anterior en Prolog

"Los enemigos de mis enemigos son mis amigos."

{amigo(A,B), ¬enemigo(A,C), ¬enemigo(C,B)}	`amigo(A, B) :- enemigo(A, C), enemigo(C, B).`
{enemigo(Dulce Princesa, Rey Helado)}	`enemigo(dulceprincesa, reyhelado).`
{enemigo(Rey Helado, Ricardio)}	`enemigo(reyhelado, ricardio).`
{enemigo(Rey Helado, Finn)}	`enemigo(reyhelado, finn).`
{¬amigo(Dulce Princesa, X)}	`?- amigo(dulceprincesa, X).`

¿Cuál es la relación? ¿Cualquier ejemplo se puede traducir así?
¿Qué hay que tener en cuenta?

Resolución SLD y Prolog

Veamos ahora este ejemplo tomado de la práctica de Prolog:

1. `natural(0).`
2. `natural(suc(X)) :- natural(X).`
3. `menorOIgual(X, suc(Y)) :- menorOIgual(X, Y).`
4. `menorOIgual(X,X) :- natural(X).`

¿Qué pasa en Prolog si ejecutamos la consulta `menorOIgual(0,X)`?

¿Podremos encontrar la respuesta usando resolución?

De Prolog a Resolución

Considerar las siguientes definiciones en prolog:

```
preorder(nil,[]).
preorder(bin(I,R,D),[R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI),
                              preorder(D,LD).
append([],YS,YS).
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

- ¿Qué sucede al realizar la consulta
  `?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).`?
- Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema. Para ello, convertir el programa a forma clausal.
- Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD, y justificar. En caso de ser SLD, ¿respeta el orden en que Prolog hubiera resuelto la consulta?

Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

En este ejercicio usaremos el método de resolución para demostrar una propiedad de las relaciones binarias; a saber, que una relación no vacía no puede ser a la vez irreflexiva, simétrica y transitiva.
Para esto tomaremos una relación R y se demostrará que, si R satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía.
Dadas las siguientes definiciones:

1. R **es irreflexiva:** $\forall X.\neg R(X,X)$
2. R **es simétrica:** $\forall X.\forall Y.(R(X,Y) \Rightarrow R(Y,X))$
3. R **es transitiva:** $\forall X.\forall Y.\forall Z.((R(X,Y) \wedge R(Y,Z)) \Rightarrow R(X,Z))$
4. R **es vacía:** $\forall X.\neg\exists Y.R(X,Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

Último ejercicio
2° parcial 1° Cuat. 2011

Cast.:	R es irreflexiva.
1° o.:	$\forall X.\neg R(X,X)$
Claus.:	$\{\neg R(X_1,X_1)\}$
Cast.:	R es simétrica
1° o.:	$\forall X.\forall Y.(R(X,Y) \Rightarrow R(Y,X))$
Claus.:	$\{\neg R(X_2,Y_2), R(Y_2,X_2)\}$
Cast.:	R es transitiva.
1° o.:	$\forall X.\forall Y.\forall Z.((R(X,Y) \wedge R(Y,Z)) \Rightarrow R(X,Z))$
Claus.:	$\{\neg R(X_3,Y_3), \neg R(Y_3,Z_3), R(X_3,Z_3)\}$

Último ejercicio (cont.)
2° parcial 1° Cuat. 2011

Se desea demostrar que:

Cast.:	R es vacía:
1° o.:	$\forall X.\neg\exists Y.R(X,Y)$
Neg.:	$\exists X.\exists Y.R(X,Y)$
Claus.:	$\{R(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$

Último ejercicio (resolviendo)
2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1,X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2,Y_2), R(Y_2,X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3,Y_3), \neg R(Y_3,Z_3), R(X_3,Z_3)\}$
4. $\{R(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$
5. (4 y 2) $\{R(\mathrm{b},\mathrm{a})\}$ $S = \{X_2 := \mathrm{a},\ Y_2 := \mathrm{b}\}$
6. (5 y 3) $\{\neg R(X_6,\mathrm{b}), R(X_6,\mathrm{a})\}$ $S = \{Y_3 := \mathrm{b},\ Z_3 := \mathrm{a}\}$ renombrando X_3 a X_6
7. (6 y 4) $\{R(\mathrm{a},\mathrm{a})\}$ $S = \{X_6 := \mathrm{a}\}$
8. (7 y 1) $\square$ $S = \{X_1 := \mathrm{a}\}$

¿Esta demostración por resolución es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Alternativa SLD
2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1,X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2,Y_2), R(Y_2,X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3,Y_3), \neg R(Y_3,Z_3), R(X_3,Z_3)\}$
4. $\{R(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$
5. (1 y 3) $\{\neg R(X_1,Y_3), \neg R(Y_3,X_1)\}$ $S = \{X_3 := X_1,\ Z_3 := X_1\}$
6. (5 y 4) $\{\neg R(\mathrm{b},\mathrm{a})\}$ $S = \{X_1 := \mathrm{a},\ Y_3 := \mathrm{b}\}$
7. (6 y 2) $\{\neg R(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$ $S = \{X_2 := \mathrm{a},\ Y_2 := \mathrm{b}\}$
8. (7 y 4) $\square$ $S = \emptyset$

¿Es la única posible?

Otra alternativa SLD (más corta)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(\mathsf{a}, \mathsf{b})\}$
5. (1 y 3) $\{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ $S = \{X_3 := X_1,\ Z_3 := X_1\}$
6. (5 y 2) $\{\neg R(X_2, Y_2)\}$ $S = \{X_1 := X_2,\ Y_3 := Y_2\}$
7. (6 y 4) $\square$ $S = \{X_2 := \mathsf{a},\ Y_2 := \mathsf{b}\}$