

Fundamentos de la Física II

Cano Jones, Alejandro; Laín Sanclemente, Andrés

Curso 2017-2018

Contenido

1 Campos Conservativos	2
1.1 Interacción Gravitatoria y Eléctrica	2
1.1.1 Ley de la gravitación universal	2
1.1.2 Ley de Coulomb	3
1.1.3 Comparación entre fuerza gravitatoria y eléctrica	3
1.2 Campo Gravitatorio y Eléctrico	3
1.2.1 Concepto de campo	3
1.2.2 Campo gravitatorio	4
1.2.3 Campo eléctrico	4
1.3 Líneas de Campo	5
1.4 Cálculo del Campo Generado por Distribuciones de Carga/Masa	6
1.4.1 Campo Gravitatorio de dos Partículas Puntuales	6
1.4.2 Pequeña introducción a las densidades de masa y de carga	7
1.4.3 Campo Gravitatorio generado por una Varilla de Densi-	
dad Lineal Uniforme (horizontal)	7
1.4.4 Campo Gravitatorio Generado por una Varilla de Densi-	
dad Lineal Uniforme (Vertical)	9
1.4.5 Campo Gravitatorio generado por un Anillo Uniforme . .	11
1.4.6 Campo Eléctrico Generado por un Disco Uniforme	12
1.4.7 Campo Gravitatorio Generado por una Corteza Esférica	
Uniforme	15
1.4.8 Campo Gravitatorio Generado por una Esfera Maciza Uni-	
forme	15
A Problemas Matemáticos	17
A.1 Pequeña introducción al concepto de doble integral:	17
A.2 Área de un diferencial de corona circular y de un diferencial de	
trapezio circular	17

Capítulo 1

Campos Conservativos

1.1 Interacción Gravitatoria y Eléctrica

Definimos interacción como una acción recíproca entre dos o más cuerpos. En esta sección, trataremos las interacciones (fuerzas) gravitatorias y eléctricas, las cuales actúan sobre cuerpos con masa o con carga eléctrica (respectivamente).

1.1.1 Ley de la gravitación universal

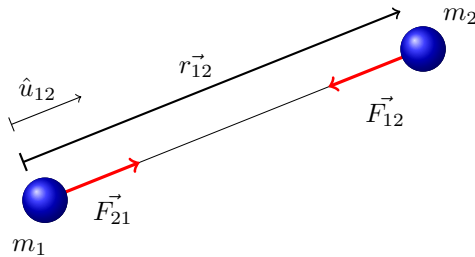
Comenzando con la interacción gravitatoria, ésta se ve definida mediante la llamada ley de Newton (1687 Sir Isaac Newton):

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} [N] \quad (1.1)$$

Equivalentemente, se puede escribir la ley de la Gravitación de Newton de la siguiente forma:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{u}_{12} [N] \quad (1.2)$$

Con \hat{u}_{12} denotamos el vector unitario que parte de la masa 1 y apunta a la masa 2. La explicación de por qué ambas expresiones son equivalentes la damos en el apéndice A.



Esta será una fuerza atractiva que aparece como interacción entre dos cuerpos con masas m_1 y m_2 . Además, esta fuerza siempre actuará en la dirección del vector que une dichos cuerpos.

G es una constante denominada constante de gravitación universal (medida por primera vez en 1798 por Henry Cavendish). Las unidades que posee en el

sistema internacional de unidades (SI) se escogen para que la fuerza gravitatoria sea dimensionalmente correcta, esto es, para que posea unidades newton [N].

$$G \simeq 6.674 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \right] \quad (1.3)$$

1.1.2 Ley de Coulomb

La interacción eléctrica se define mediante la ley de Coulomb (1785 Charles-Augustin de Coulomb):

$$\vec{F}_{12} = -K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} [N] \quad (1.4)$$

De nuevo, se puede expresar la ley de Coulomb equivalentemente como:

$$\vec{F}_{12} = -K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{u}_{12} [N] \quad (1.5)$$

Con \hat{u}_{12} denotamos el vector unitario que parte de la carga 1 y apunta a la carga 2.

A diferencia de la interacción gravitatoria, la interacción eléctrica puede ser tanto atractiva (las cargas que interaccionan son de distinto signo) como repulsiva (las cargas tienen el mismo signo). Del mismo modo que la interacción gravitatoria, la interacción eléctrica actuará en la dirección del vector que une los cuerpos con carga.

La constante K se denomina Constante de Coulomb (medida por el propio Coulomb). Esta "constante" depende del medio en el que suceda la interacción, siendo igual a:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right] \quad (1.6)$$

donde $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$; siendo ϵ_r la permitividad relativa del medio y ϵ_0 la permitividad en el vacío.

Las cargas eléctricas están cuantizadas, esto implica que existe una unidad de carga fundamental) la cual corresponde a la carga de un electrón $e \equiv q(e^-) \simeq 1.602 \cdot 10^{-19} C$.

1.1.3 Comparación entre fuerza gravitatoria y eléctrica

Puede notarse que la interacción eléctrica es mucho más fuerte que la interacción gravitatoria (Por ejemplo, la fuerza eléctrica entre dos protones es 10^{36} veces más potente que la interacción gravitatoria entre ellos). Lo demostramos en el apéndice A.

1.2 Campo Gravitatorio y Eléctrico

1.2.1 Concepto de campo

Se dice que existe un campo asociado a una magnitud física, en una región del espacio, si se puede asignar un valor a dicha magnitud para todos los puntos de dicha región en cada instante.

1.2.2 Campo gravitatorio

El campo gravitatorio \vec{g} (también llamado intensidad de campo gravitatorio) en un punto es la fuerza gravitatoria que experimentaría una masa de 1 kg que se encontrara en ese punto debido a la interacción gravitatoria con una o varias masas (llamadas masas generadoras del campo).

Campo generado por una única masa: En este caso se cumple:

$$\vec{g} = \frac{F_g}{m} \quad (1.7)$$

Campo generado por una única partícula puntual: Ahora podemos usar (1.1) y obtenemos:

$$\vec{g} = \frac{F_g}{m} = -\frac{G \frac{Mm}{|\vec{r}_{12}|^3}}{m} \vec{r}_{12} = -G \frac{M}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.8)$$

Si usamos (1.2) en vez de (1.1), obtenemos la expresión equivalente:

$$\vec{g} = \frac{F_g}{m} = -\frac{G \frac{Mm}{|\vec{r}_{12}|^2}}{m} \hat{u}_{12} = -G \frac{M}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{u}_{12} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.9)$$

En general: Se cumple:

$$\vec{g} = \frac{\sum_i \vec{F}_{g,A,i}}{m} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.10)$$

La notación anterior puede parecer obscura, pero es una forma de expresar el sumatorio de todas las fuerzas gravitatorias que actúan sobre una masa que se encuentra en el punto A .

Nota: Si las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula hipotética que colocamos en el punto en el que estamos calculado el campo son gravitatorias, entonces se cumple que la aceleración que sufre la partícula es justamente el campo: $\vec{a} = \vec{g}$.

1.2.3 Campo eléctrico

El campo eléctrico \vec{E} (también llamado intensidad de campo eléctrico) en un punto es la fuerza eléctrica que sufriría una carga de $+1C$ situada en dicho punto debido a la interacción eléctrica con una o varias cargas (llamadas cargas generadoras del campo). Una particularidad de este campo es el hecho de que las partículas con carga positiva experimentan fuerzas en la dirección del campo \vec{E} , mientras que las partículas con cargas negativas experimentan fuerzas en dirección contraria. Análogamente al caso gravitatorio, tenemos los siguientes casos.

Campo generado por una única carga: En este caso se cumple:

$$\vec{E} = \frac{F_e}{m} \quad (1.11)$$

Campo generado por una única partícula puntual: Ahora podemos usar (1.4) y obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{F_e}{m} = \frac{K \frac{Qq}{|\vec{r}_{12}|^3}}{m} \vec{r}_{12} = -K \frac{Q}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.12)$$

Si usamos (1.5) en vez de (1.1), obtenemos la expresión equivalente:

$$\vec{E} = \frac{F_e}{m} = \frac{K \frac{Qq}{|\vec{r}_{12}|^2}}{m} \hat{u}_{12} = -K \frac{Q}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{u}_{12} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.13)$$

En general: Se cumple:

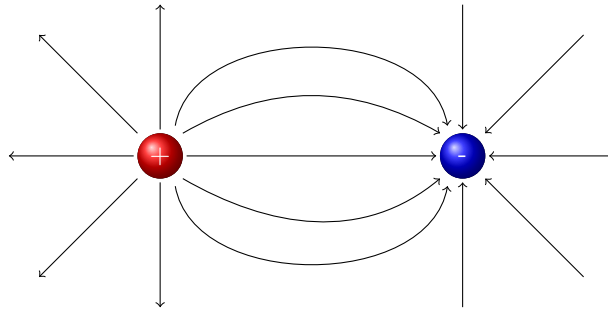
$$\vec{E} = \frac{\sum_i \vec{F}_{e,A,i}}{m} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.14)$$

Nota: Si las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula hipotética que colocamos en el punto en el que estamos calculado el campo son eléctricas, entonces se cumple que la aceleración que sufre la partícula es justamente el campo: $\vec{a} = \vec{E}$.

1.3 Líneas de Campo

Las líneas de campo son un método gráfico para la fácil visualización del campo vectorial que representan; forman un mapa de campo. Cada línea está dibujada de forma que el campo es tangente a la misma en cada punto de ésta y las puntas de las flechas indican la dirección del campo (Suponiendo una carga positiva). El espacio entre ellas indica el valor del campo. En las regiones en donde las líneas están muy juntas, éste es muy grande, mientras que donde están muy separadas, es muy pequeño. De aquí se deduce que la densidad de líneas es proporcional al campo. Así, un campo uniforme estará representado por líneas de campo igualmente espaciadas, rectas y paralelas. Además las líneas de campo definen superficies equipotenciales perpendiculares a éstas.

Las líneas de campo pueden ser abiertas (como es el caso del campo gravitatorio) o cerradas (como en el eléctrico). Así, en el campo eléctrico las líneas "nacen" en las cargas positivas (fuente) y acaban en las cargas negativas (sumidero).



1.4 Cálculo del Campo Generado por Distribuciones de Carga/Masa

Según el principio de superposición de campos (según vimos en (1.14) y (1.10)), el campo generado por un sistema de partículas es igual a la suma de los campos generados por las partículas individuales.

Si se trata de partículas puntuales las expresiones anteriores se reducen a:

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = K \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.15)$$

O, alternativamente:

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{u}_i \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = K \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{u}_i \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.16)$$

Cuando el número de partículas es muy grande y las partículas están muy próximas unas de otras (como en cualquier objeto sólido), supondremos que se trata de un medio continuo y aproximaremos los sumatorios por una integral. Damos una explicación matemática en el apéndice A. Las expresiones de (1.15) y (1.16), quedan:

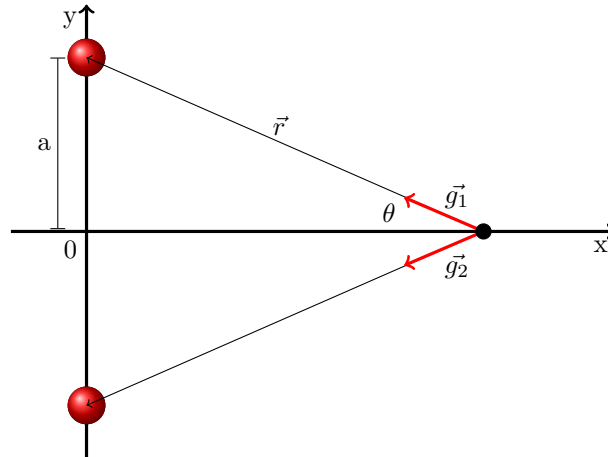
$$\vec{g} = \int d\vec{g} = -G \int \frac{dm}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad \vec{E} = \int d\vec{E} = K \int \frac{dq}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.17)$$

O alternativamente:

$$\vec{g} = \int d\vec{g} = -G \int \frac{dm}{|\vec{r}|^2} \hat{u} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad \vec{E} = \int d\vec{E} = K \int \frac{dq}{|\vec{r}|^2} \hat{u} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.18)$$

1.4.1 Campo Gravitatorio de dos Partículas Puntuales

Ejercicio: Sean dos partículas puntuales de masa m situadas en el eje y de forma simétrica (tal como se representa), calcular el valor del campo gravitatorio en un punto cualquiera del eje x .



Realización: Lo primero que notamos al analizar el sistema de partículas es que, debido a la simetría, la componente del campo en la dirección y será nula; por lo tanto, nos basta con calcular la componente horizontal:

$$\vec{g} = -|\vec{g}_1| \cos \theta \hat{i} - |\vec{g}_2| \cos \theta \hat{i}$$

Ahora, notemos:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2| = G \frac{m}{r^2}$$

Sustituyamos:

$$\vec{g} = -2|\vec{g}_1| \cos \theta \hat{i} = -2G \frac{m}{r^2} \cos \theta \hat{i}$$

Por el dibujo, es fácil ver que $\cos \theta = \frac{x}{r}$ y $r^2 = a^2 + x^2$. Haciendo estos cambios:

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -2G \frac{m}{r^2} \cos \theta \hat{i} = -2G \frac{m}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{r} \hat{i} = -2G \frac{m}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{i} = \\ &= -2G \frac{mx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \end{aligned}$$

Solución: $\vec{g} = -2G \frac{mx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right].$

1.4.2 Pequeña introducción a las densidades de masa y de carga

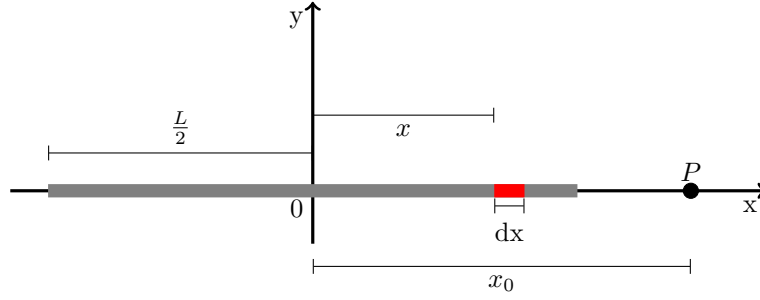
A lo largo de los ejercicios posteriores vamos a usar λ, σ, ρ para representar densidades de carga y de masa. El uso de una letra u otra depende de la dimensiones del objeto que estemos tratando; así:

- Lineal L (longitud): $\lambda \equiv \frac{dq}{dL} = \frac{q}{L}$
- Superficie S (superficie): $\sigma \equiv \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S}$
- Volumen V (volumen): $\rho \equiv \frac{dq}{dV} = \frac{q}{V}$

Nota: la definición en el caso de masa es igual, cambiando " q " por " m ".

1.4.3 Campo Gravitatorio generado por una Varilla de Densidad Lineal Uniforme (horizontal)

Ejercicio: Sea una varilla uniforme de longitud L cuyo centro está situado en el eje de coordenadas. Calcular el valor del campo generado por la varilla en un punto cualquiera del eje x .



Realización: Al observar la posición de la varilla respecto al eje x podemos ver que no existirá componente del campo en el eje y . Debemos comenzar tomando un diferencial de longitud de la varilla en un punto cualquiera de ésta y estudiar el campo que genera. Conviene tomar un diferencial **lo más general posible**, evitando, los puntos que estén en la mitad o en los extremos; pues pueden llevarnos a confusión. Vamos a tratar nuestro dx como una partícula puntual y sirviéndonos de (1.18), vamos a calcular el campo generado por la varilla, integrando:

$$d\vec{g} = -G \frac{dm}{r^2} \hat{i}$$

Usando $dm = \lambda dx$:

$$\begin{aligned} d\vec{g} &= -G \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2} \hat{i} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{g} &= \int d\vec{g} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(-G \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2} \hat{i} \right) = -G\lambda \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{(x_0 - x)^2} dx \right) \hat{i} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{g} &= -G\lambda \left[\frac{1}{x_0 - x} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \hat{i} = -G\lambda \left(\frac{1}{x_0 - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x_0 + \frac{L}{2}} \right) \hat{i} = -G\lambda \left(\frac{x_0 + \frac{L}{2} - x_0 + \frac{L}{2}}{x_0^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right) \hat{i} = \\ &= -\frac{G\lambda L}{x_0^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \hat{i} = -\frac{Gm}{x_0^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right] \end{aligned}$$

Solución:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{x_0^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.19)$$

Nota: Esta fórmula sólo sirve para el caso $x_0 > \frac{L}{2}$.

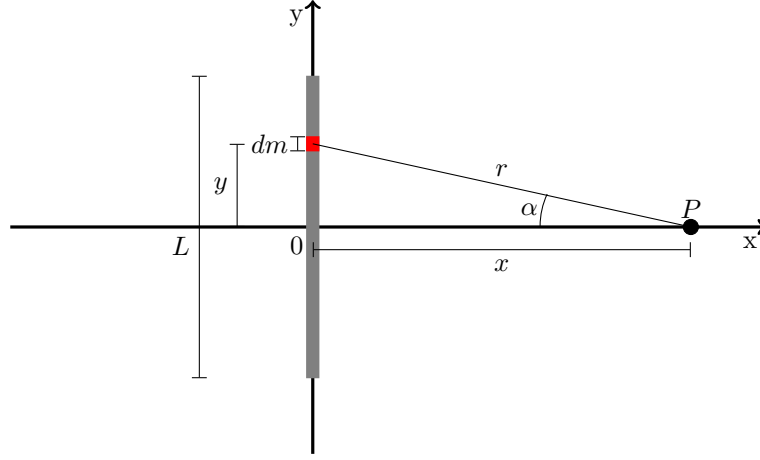
Nota: Se puede llegar a la expresión de la solución de muchas maneras diferentes. Independientemente del método seguido, la solución es única. En el apéndice B se presentan más formas de hacer este ejercicio.

Nota: Nótese que en todos estos casos, no hay simetría. Para ver si la hay, cogemos dos puntos a la misma distancia del eje vertical y vemos si generan el mismo campo.

Límite: $x \gg L$: $\vec{g} = -\frac{Gm}{x_0^2 - (\frac{L}{2})^2} \hat{i} \stackrel{x_0^2 - (\frac{L}{2})^2 \simeq x_0^2}{\simeq} -\frac{Gm}{x_0^2} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right]$. (Como una partícula puntual).

1.4.4 Campo Gravitatorio Generado por una Varilla de Densidad Lineal Uniforme (Vertical)

Ejercicio: Sea una varilla uniforme de longitud L cuyo centro está situado en el eje de coordenadas. Calcular el valor del campo generado por la varilla en un punto cualquiera del eje x .



Realización: Basándonos en el dibujo, podemos ver:

$$d\vec{g} = G \frac{dm}{r^2} \hat{i}$$

Nótese que las componentes verticales de los $d\vec{g}$ se anulan al sumar. De esta forma, podemos centrarnos únicamente en la componente horizontal. Así:

$$d\vec{g} = -\frac{Gdm}{r^2} \cos \alpha \hat{i}$$

Ahora nuestro objetivo es expresarlo todo como una sola variable para poder integrar. Teniendo en cuenta $dm = \lambda dy$ y $r^2 = x^2 + y^2$, podemos expresar el $\cos \alpha$ como:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Haciendo todas las sustituciones oportunas, llegamos a:

$$d\vec{g} = -\frac{G\lambda dy}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} = -\frac{G\lambda x dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

Ahora ya podemos integrar:

$$\vec{g} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{G\lambda dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \stackrel{\text{simetría}}{=} -2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{G\lambda dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x \tan \alpha \quad dy = x \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad \tan \alpha_{máx} = \frac{\frac{L}{2}}{x} = \frac{L}{2x} \Leftrightarrow \alpha_{máx} = \arctan \left(\frac{L}{2x} \right)$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \frac{G\lambda x}{(x^2 (1 + \tan^2 \alpha))^{\frac{3}{2}} \cos^2 \alpha} d\alpha \hat{i} = -2G\lambda x^2 \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot x^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = \\ & = -\frac{2G\lambda}{x} \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = -\frac{2G\lambda}{x} \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = \\ & = -\frac{2G\lambda}{x} \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \hat{i} = -\frac{2G\lambda}{x} \int_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \cos \alpha d\alpha \hat{i} = \frac{2G\lambda}{x} [\sin \alpha]_0^{\arctan \frac{L}{2x}} \hat{i} = \\ & = -\frac{2G\lambda}{x} \sin \left(\arctan \left(\frac{L}{2x} \right) \right) \hat{i} \stackrel{\text{Ver nota}}{=} -\frac{2G\lambda}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{L}{2x} \right)^2}} \hat{i} = \frac{2G\lambda}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{L^2}{4x^2}}} \hat{i} = \\ & = -\frac{2G\lambda}{x} \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} = -\frac{2G\lambda}{x} \sqrt{\frac{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2}{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} = -\frac{2G\lambda}{x} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} = \\ & = -\frac{G\lambda L}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} \stackrel{\lambda L = m}{=} -\frac{Gm}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} \end{aligned}$$

Solución:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.20)$$

Nota: Ofrecemos una explicación de ese paso en el apéndice A.

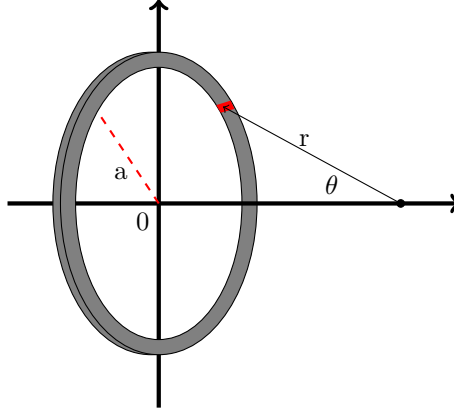
$$\textbf{Límite } x \gg L: \quad \vec{g} = -\frac{Km}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} \stackrel{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \simeq x^2}{\simeq} -\frac{Km}{x \sqrt{x^2}} \hat{i} = -\frac{Km}{x^2} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right]$$

$$\begin{aligned} \textbf{Límite } x \ll L: \quad \vec{g} &= -\frac{Km}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} \stackrel{x^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \simeq \left(\frac{L}{2} \right)^2}{\simeq} -\frac{Km}{x \sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2}} \hat{i} = -\frac{Km}{x \frac{L}{2}} \hat{i} = \\ &= -\frac{2Km}{Lx} \hat{i} \stackrel{m = \lambda L}{=} -\frac{2K\lambda L}{Lx} \hat{i} = -\frac{2K\lambda}{x} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right] \end{aligned}$$

Nota: Cuando tenemos una varilla infinita, siempre podemos suponer que nos encontramos en la mitad de la varilla.

1.4.5 Campo Gravitatorio generado por un Anillo Uniforme

Ejercicio: Sea un anillo con masa m y de radio a situado en el plano YZ y centrado en el origen de coordenadas, calcular el valor del campo generado por el mismo en un punto cualquiera del eje X .



Realización: Conociendo el campo gravitatorio generado por una partícula puntual (1.2) podemos calcular el campo generado por un anillo como la suma de todos los campos generados por los distintos diferenciales de longitud del anillo. Nótese que debido a la simetría del anillo, las componentes de \vec{g} en el eje Y u Z se anulan.

$$d\vec{g} = -G \frac{dm}{r^2} \cos \theta \hat{i} \Leftrightarrow \vec{g} = \int -G \frac{dm}{r^2} \cos \theta \hat{i} = -G \frac{\cos \theta}{r^2} \int dm \hat{i} = -G \frac{m}{r^2} \cos \theta \hat{i}$$

Ahora, como $\cos \theta = \frac{x}{r}$:

$$\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \hat{i} = -G \frac{mx}{r^3} \hat{i} \quad r^2 = a^2 + x^2 \quad -G \frac{mx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

Solución:

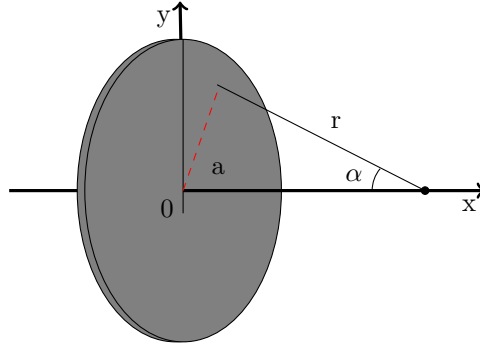
$$\vec{g} = -\frac{Gmx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right] \quad (1.21)$$

Límite: $x \gg a$: $\vec{g} = -\frac{Gmx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \stackrel{a^2 + x^2 \simeq x^2}{\simeq} -\frac{Gmx}{x^3} \hat{i} = -\frac{Gm}{x^2} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right]$ (Como una partícula puntual).

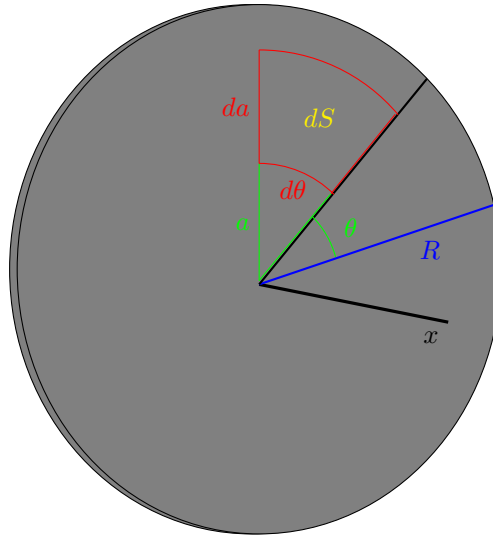
Límite $x \ll a$: $\vec{g} = -\frac{Gmx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \stackrel{a^2 + x^2 \simeq a^2}{\simeq} -\frac{Gmx}{a^3} \hat{i} \left[\frac{N}{Kg} \right]$

1.4.6 Campo Eléctrico Generado por un Disco Uniforme

Ejercicio: Sea un disco de densidad uniforme centrado en el origen de coordenadas, calcular el valor del campo eléctrico generado por el mismo en un punto cualquiera del eje X .



Realización (integral doble):



Vamos a tener que realizar una integral doble. Se realiza una pequeña introducción al concepto de doble integral en el apéndice A.1.

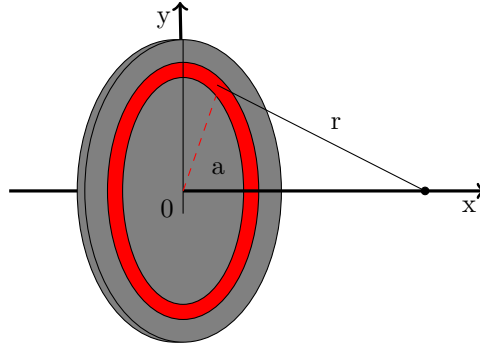
Nuestro primer problema consiste en hallar el valor de dS en función de a y θ . Para ello, debemos darnos cuenta de que dS es el área de un trapecio circular. En nuestro caso:

$$dS = a \cdot da \cdot d\theta$$

Esto lo probamos en el apéndice A.2. Ahora, debemos notar que el campo generado en las direcciones Y y Z se anula, de manera que el campo eléctrico

tiene como dirección la del eje X . Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \int d\vec{E} = \int \frac{K dq}{r^2} \hat{i} \stackrel{dq=\sigma dS}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{K \sigma a da d\theta}{r^2} \cos \alpha \hat{i} \stackrel{\cos \alpha = \frac{x}{r}}{=} \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{K \sigma a da d\theta}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \hat{i} \stackrel{r^2=x^2+a^2}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{K \sigma a da d\theta}{a^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \hat{i} = \\
 &= \int_0^R \frac{K \sigma a da x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{i} = \int_0^R \frac{K \sigma a da x 2\pi}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = K \sigma 2\pi x \int_0^R \frac{a da}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = \\
 &= -K \sigma 2\pi x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \right]_0^R \hat{i} = -K \sigma 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{|x|} \right) \hat{i} \\
 &= K \sigma 2\pi x \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \hat{i} = \pm K \sigma 2\pi \hat{i} - \frac{K \sigma 2\pi x}{x \sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} \hat{i} = \\
 &= \pm K \sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} \right) \hat{i}
 \end{aligned}$$



Realización (anillo): Habiendo obtenido la expresión del valor del campo generado por un anillo en un punto cualquiera del eje X (1.21), podemos sumar el campo generado por varios anillos de distinto radio hasta alcanzar el disco, esto es:

$$\begin{aligned}
 d\vec{E} &= K \frac{dq \cdot x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \vec{E} &= \int_0^R K \frac{dq \cdot x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = K \int_0^R \frac{x dq}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}
 \end{aligned}$$

Los límites de integración corresponderán al radio mínimo ($a=0$) y al radio máximo ($a=R$). Podemos expresar el diferencial de masa como $dm = \sigma ds$ siendo ds un diferencial de superficie. Su valor: $dS = 2\pi a da$ lo calculamos en el

apéndice A.2. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= K \int_0^R \frac{x dq}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \stackrel{dq=\sigma da}{=} Kx \int_0^R \sigma 2\pi a da \hat{i} = K\sigma 2\pi x \int_0^R \frac{ada}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \\
 &= -K\sigma 2\pi x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_0^R \hat{i} = -K\sigma 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{|x|} \right) \hat{i} \\
 &= K\sigma 2\pi x \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \hat{i} = \pm K\sigma 2\pi \hat{i} - \frac{K\sigma 2\pi x}{x\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \hat{i} = \\
 &= \pm K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \hat{i}
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\pm K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \hat{i} \quad (1.22)$$

Corolario: Campo Eléctrico Generado por un Plano (Límite $x \ll R$):

Podemos considerar un plano como un disco de radio infinito; por ello, si nos encontramos en un punto donde la distancia al disco es despreciable en relación al radio del disco ($R \gg x$) podemos aproximar el disco a un plano infinito, cuyo campo se verá definido por:

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pm K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2}} \right) \hat{i} = \pm K\sigma 2\pi \hat{i} \stackrel{K=\frac{1}{4\pi\epsilon}}{=} \pm \frac{1}{4\pi\epsilon} \sigma 2\pi \hat{i} = \\
 &= \pm \frac{\sigma}{2\epsilon} \hat{i}
 \end{aligned}$$

Límite $x \gg R$: Este límite resulta bastante complicado de calcular; pues si hacemos el límite matemático, obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pm K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2}} \right) \hat{i} = \vec{0}$$

El resultado que deberíamos obtener es que se comporta como una partícula puntual. Como vemos, eso no ocurre. Para poder obtener el resultado, vamos a tener que hacer un desarrollo en serie de Taylor. Concretamente nos va a bastar

con el polinomio de segundo grado centrado en el cero de la expresión. Sea:

$$f(x) \equiv K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2}} \right)$$

Ahora, definamos otra función:

$$g(a) \equiv K\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a}} \right)$$

donde $a \equiv \frac{R^2}{x^2}$. Ahora:

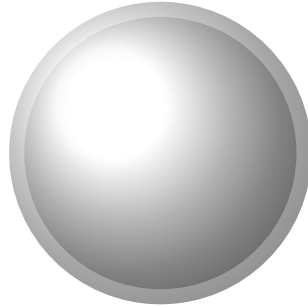
- $g(0) = 0$
- $g'(a) = -K\sigma 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{K\sigma\pi}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow g'(0) = K\sigma\pi$

De esta forma:

$$T_{1,0}(g)(a) = K\sigma\pi a \stackrel{a=\frac{R^2}{x^2}}{=} \frac{K\sigma\pi R^2}{x^2} \stackrel{\sigma=\frac{q}{\pi R^2}}{=} \frac{K\pi R^2}{x^2} \cdot \frac{q}{\pi R^2} = \frac{Kq}{x^2}$$

1.4.7 Campo Gravitatorio Generado por una Corteza Esférica Uniforme

Ejercicio: Sea una corteza esferica de densidad uniforme centrada en el origen de coordenadas, calcular el valor del campo gravitatorio que genera en un punto cualquiera del eje X :

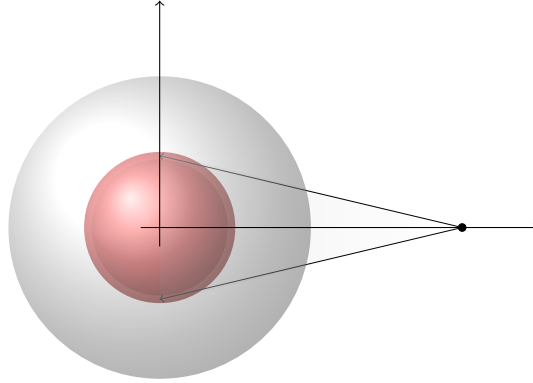


Realización:

Corolario: Campo Gravitatorio en el interior de una Corteza Esférica

1.4.8 Campo Gravitatorio Generado por una Esfera Maciza Uniforme

Ejercicio Sea una esfera maciza de densidad uniforme centrada en el origen de coordenadas, calcular el valor del campo gravitatorio en un punto cualquiera del eje x .



Realización Habiendo calculado el valor del campo generado por una corteza esférica en un punto radial cualquiera exterior a la corteza, podemos emplear este dato para calcular el campo generado por una esfera maciza unicamente sumando los campos generados por las cortezas de radio creciente, es decir:

$$d\vec{g} = -G \frac{dm}{r^2} \hat{i}$$

$$\vec{g} = \int_0^M \left(-G \frac{dm}{r^2} \hat{i} \right) = -G \frac{1}{r^2} \left(\int_0^M dm \right) \hat{i}$$

Así, obtenemos el resultado:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{i} \quad (1.23)$$

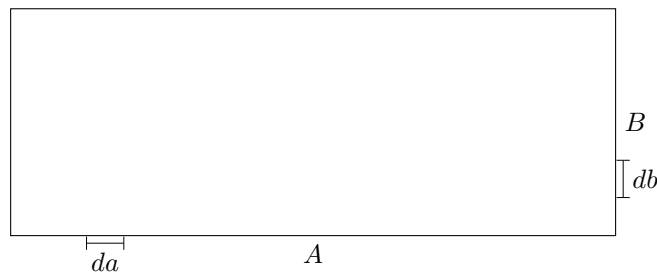
Campo Gravitatorio en el Interior de una Esfera Maciza Hemos visto anteriormente que el valor del campo generado por una corteza esférica es nulo en todos los puntos interiores a la misma, por ello, en el interior de una esfera maciza, el valor del campo es igual al valor del campo generado por la esfera maciza inferior a la capa donde se encuentra el punto de calculo; podemos observar el cambio del valor del campo en relación a la distancia del centro de la esfera en la siguiente representación grafica:

Apéndice A

Problemas Matemáticos

A.1 Pequeña introducción al concepto de doble integral:

Del mismo modo que cuando se realiza una integral "normal" se recorre una línea (una dimensión), al hacer una doble integral se recorre una superficie (dos dimensiones). Vayamos con un ejemplo sencillo. Imaginemos que queremos hallar el área de un rectángulo, de lados A y B como se muestra en el dibujo.



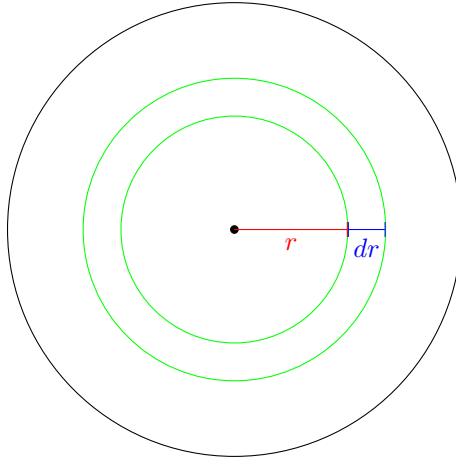
Para recorrer todo el rectángulo debemos o bien recorrer primero el lado A y desplazar todo el lado A a lo largo de B o hacer lo inverso: es decir, recorrer B y luego desplazar B a lo largo de A. Matemáticamente sería:

$$\begin{aligned}\int_0^A \int_0^B da db &= \int_0^A da \int_0^B db = \int_0^A da [b]_0^B = \int_0^A da (B - 0) = \\ &= B \int_0^A da = B [a]_0^A = AB\end{aligned}$$

Como vemos el resultado es el esperado.

A.2 Área de un diferencial de corona circular y de un diferencial de trapecio circular

Empecemos con el diferencial de corona circular:



Sabemos que el área de una corona circular es:

$$A = \pi (r_{grande}^2 - r_{pequeño}^2)$$

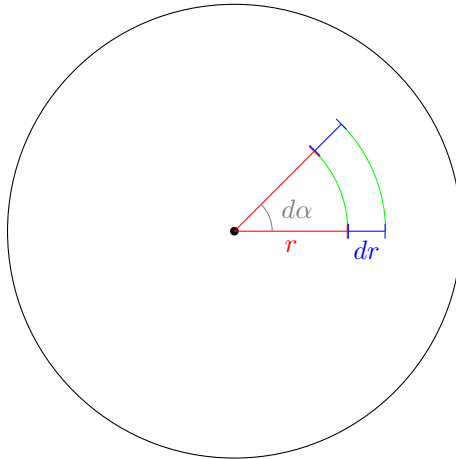
Así, en nuestro caso, obtenemos:

$$dA = \pi [(r + dr)^2 - r^2] = \pi (r^2 + 2rdr + (dr)^2 - r^2) = \pi (2rdr + (dr)^2)$$

Ahora, podemos despreciar $(dr)^2$ porque su valor es extraordinariamente pequeño. Por ejemplo, si suponemos que dr es del orden de 10^{-10} , entonces, $(dr)^2$ sería del orden de 10^{-20} ; es decir, mucho más pequeño que dr . Así, nos queda:

$$dA = 2\pi r dr$$

En el caso del trapecio circular, únicamente queremos una porción de la corona circular que es proporcional a un ángulo que llamaremos $d\alpha$:



Ahora con una simple regla de tres, sabemos que a un ángulo α le corresponden:

$$\frac{dA_{corona}}{2\pi} = \frac{dA_{trapecio}}{d\alpha} \Leftrightarrow dA_{trapecio} = \frac{dA_{corona} \cdot d\alpha}{2\pi} = \frac{2\pi r dr d\alpha}{2\pi} = r dr d\alpha$$