支持向量机-弱对偶性证明

2018年11月22日 星期四 上午9:05

约束优化问题 (原问题)
Primal Problem

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x) \\ s.t.\ m_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m \\ \quad\ \ n_j(x)=0,\ j=1,\cdots,N \end{cases}$$

将带约束优化问题写成拉格朗日乘子法的形式

拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\eta)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i m_i+\sum_{j=1}^{N}\eta_j n_j$$

$\lambda_i\ge 0$，η_j 没有限制

原问题的无约束形式:

$$\begin{cases} \min\limits_{x}\max\limits_{\lambda,\eta} \mathcal{L}(x,\lambda,\eta) \\ s.t.\ \lambda_i\ge 0 \end{cases}$$

原问题是关于 x 的函数

从逻辑上思考:

$$\begin{cases} \text{如果 } x \text{ 违反了约束 } m_i(x),\ m_i(x)>0,\ \max\limits_{\lambda}\mathcal{L}\to\infty \\ \text{如果 } x \text{ 符合 } m_i(x)\le 0,\ \max\limits_{\lambda}\mathcal{L}\ne+\infty,\ \lambda_i \text{ 会等于 } 0 \end{cases}$$

$$\min_{x}\max_{\lambda}\mathcal{L}=\min_{x}\left\{\max\mathcal{L},+\infty\right\}=\min_{x}\max_{\lambda}\mathcal{L}$$

$\therefore$ x 只会取 x 符合约束的值

对偶性

对偶问题:

$$\begin{cases} \max\limits_{\lambda,\eta}\min\limits_{x}\mathcal{L}(x,\lambda,\eta) \\ s.t.\ \lambda_i\ge 0 \end{cases}$$

对偶问题是关于 λ,η 的函数

弱对偶性：对偶问题 $\le$ 原问题

$d \le p$

证明：max min $\mathcal{L}$ $\le$ min max $\mathcal{L}$

$$\max_{\lambda,\eta} \min_{x} \mathcal{L}(x,\lambda,\eta) \le \min_{x} \max_{\lambda,\eta} \mathcal{L}(x,\lambda,\eta)$$

证：$\underbrace{\min_{x} \mathcal{L}(x,\lambda,\eta)}_{A(\lambda,\eta)} \le \mathcal{L}(x,\lambda,\eta) \le \underbrace{\max_{\lambda,\eta} \mathcal{L}(x,\lambda,\eta)}_{B(x)}$

$$A(\lambda,\eta) \le B(x)$$

$$\Rightarrow A(\lambda,\eta) \le \min B(x)$$

$$\Rightarrow \max A(\lambda,\eta) \le \min B(x)$$

$$\therefore \max_{\lambda,\eta} \min_{x} \mathcal{L} \le \min_{x} \max_{\lambda,\eta} \mathcal{L}$$