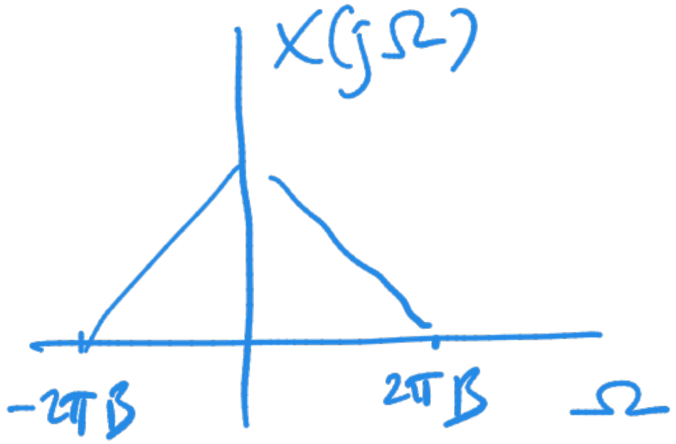
ET 2060 - Tín hiệu và hệ thống
Định lý lấy mẫu

TS. Đặng Quang Hiếu

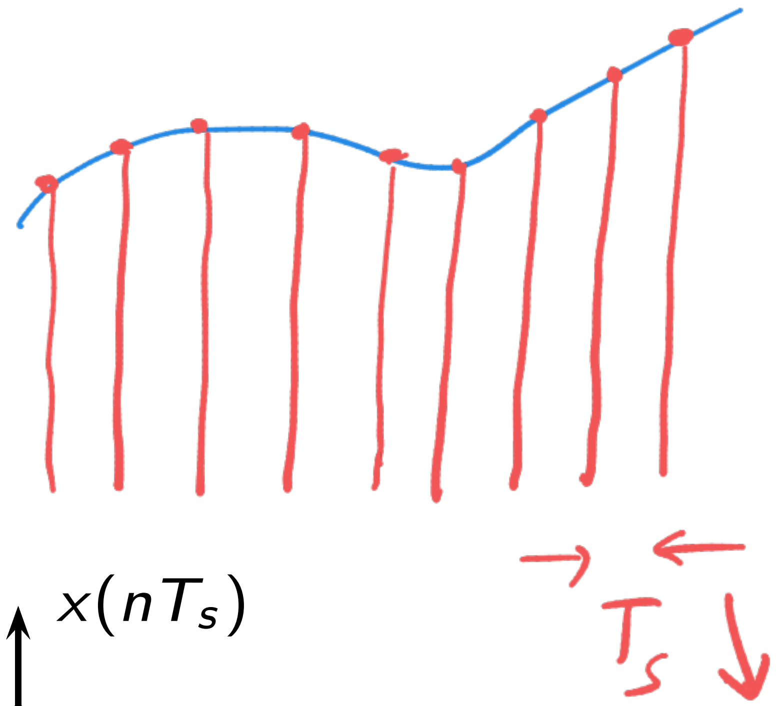
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

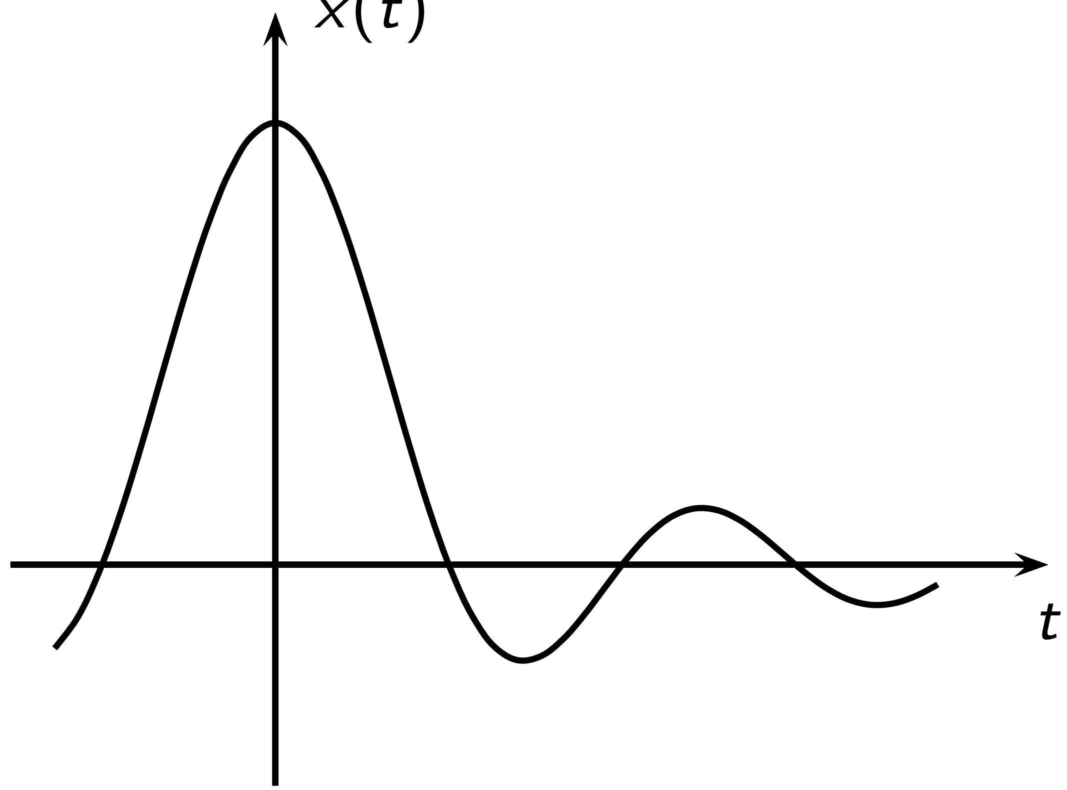
2017-2018

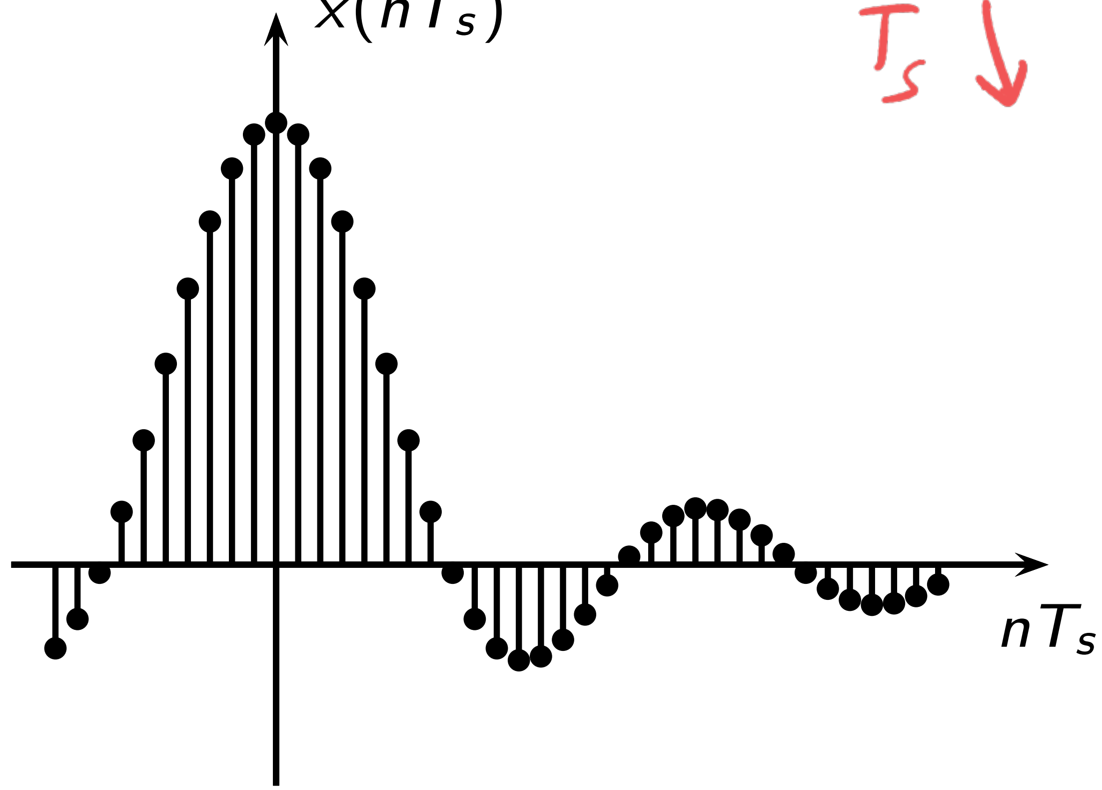
Định lý lấy mẫu



$$x(t) \xrightarrow[T_s]{\text{lấy mẫu}} x(nT_s)$$

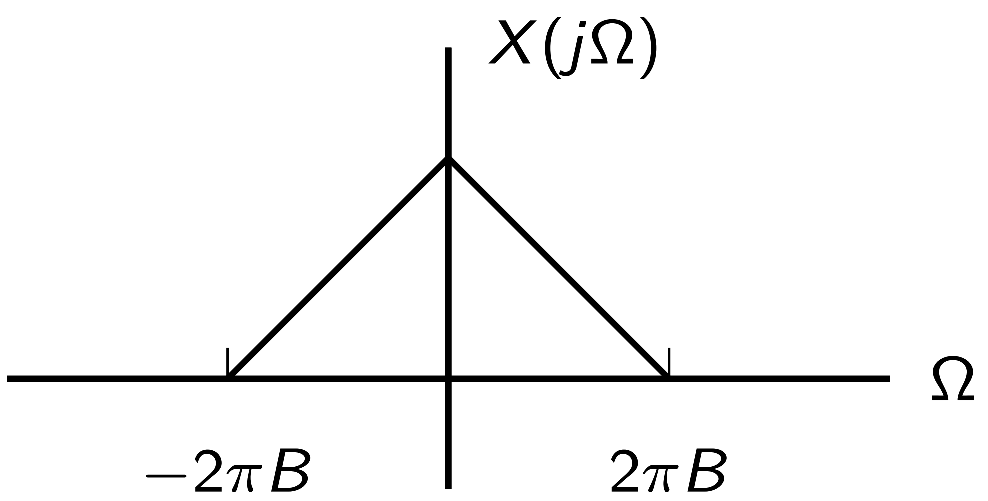






"Nếu tín hiệu $x(t)$ không có thành phần tần số nào lớn hơn B hertz thì nó được hoàn toàn xác định tại các mẫu cách nhau $\frac{1}{2B}$ giây." – Claude Shannon.

Chứng minh định lý lấy mẫu (1)



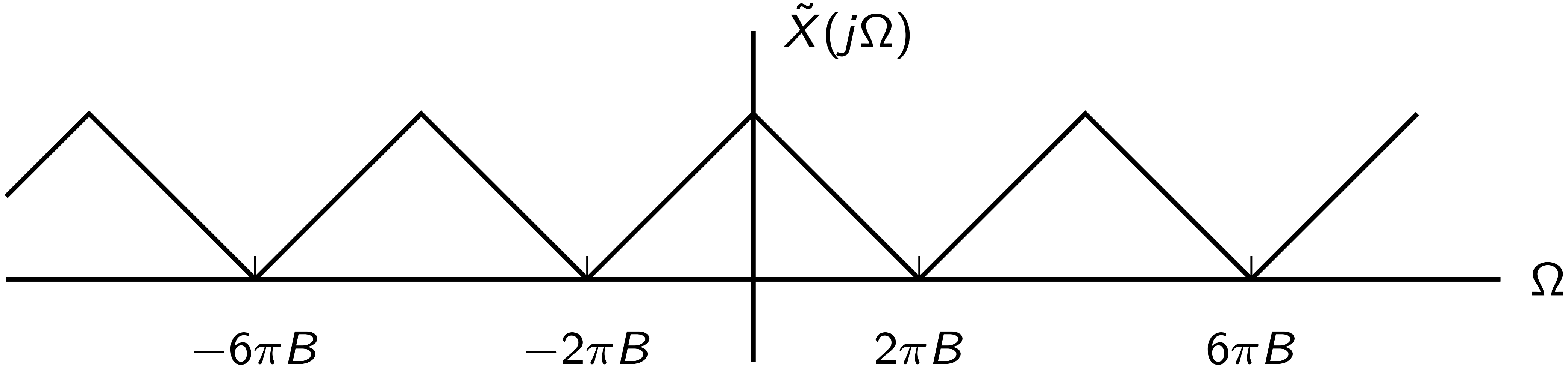
Gọi $X(j\Omega)$ là phổ của $x(t)$. Khi đó:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

Nếu thay $t = \frac{n}{2B}$ với $n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$x(n/2B) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega)e^{j\Omega \frac{n}{2B}}\,d\Omega$$

Chứng minh định lý lấy mẫu (2)



$$\tilde{X}(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{4\pi B}n\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega\frac{n}{2B}}$$

$$c_n = \frac{1}{4\pi B}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} \tilde{X}(j\Omega) e^{-j\frac{2\pi}{4\pi B}n\Omega} d\Omega = \frac{1}{4\pi B}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega) e^{-j\Omega\frac{n}{2B}} d\Omega$$

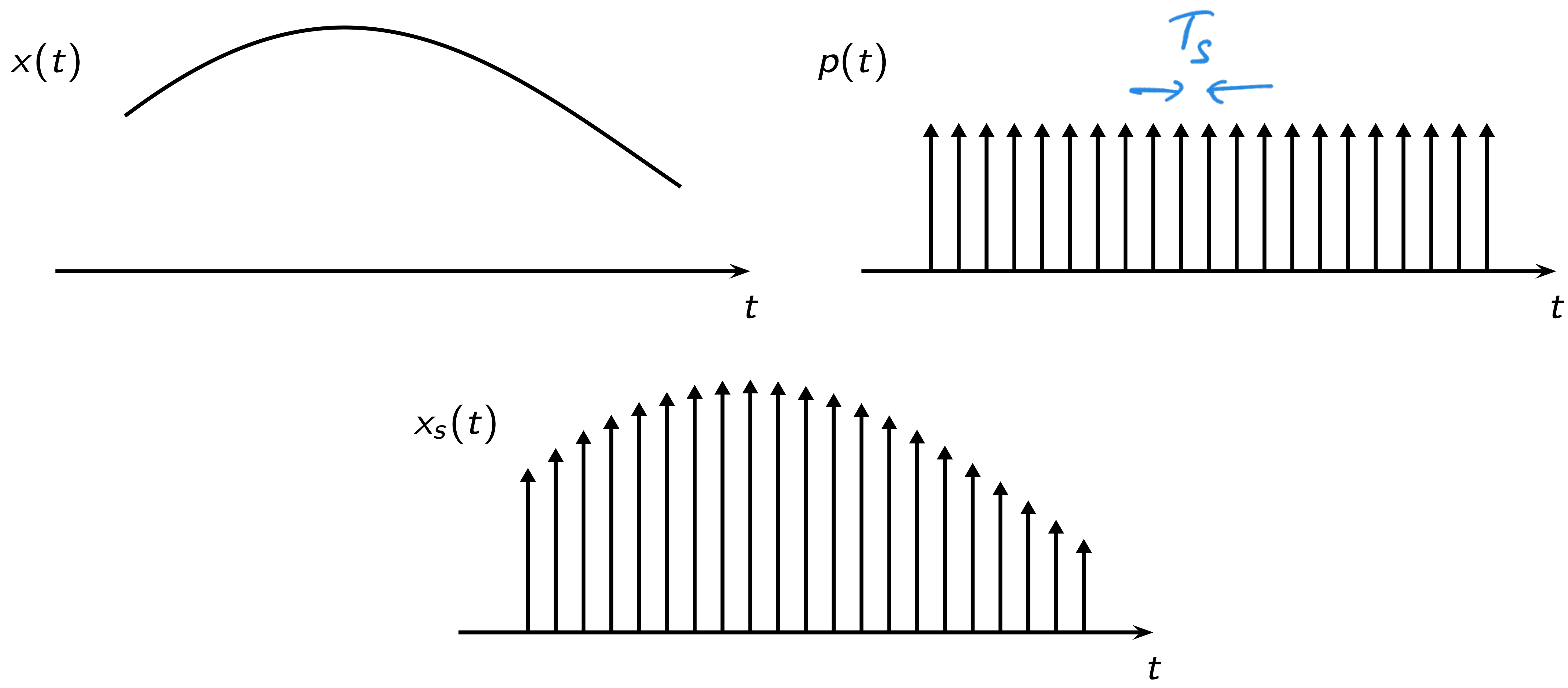
$$x(n/2B) \rightarrow c_n = \frac{1}{2B}x(-n/2B) \rightarrow \tilde{X}(j\Omega) \rightarrow X(j\Omega) \rightarrow x(t) \quad \text{QED!!!}$$

fn

Cách tiếp cận khác

Coi lấy mẫu là phép nhân của $x(t)$ với hàm xung đơn vị tuần hoàn với chu kỳ T_s.

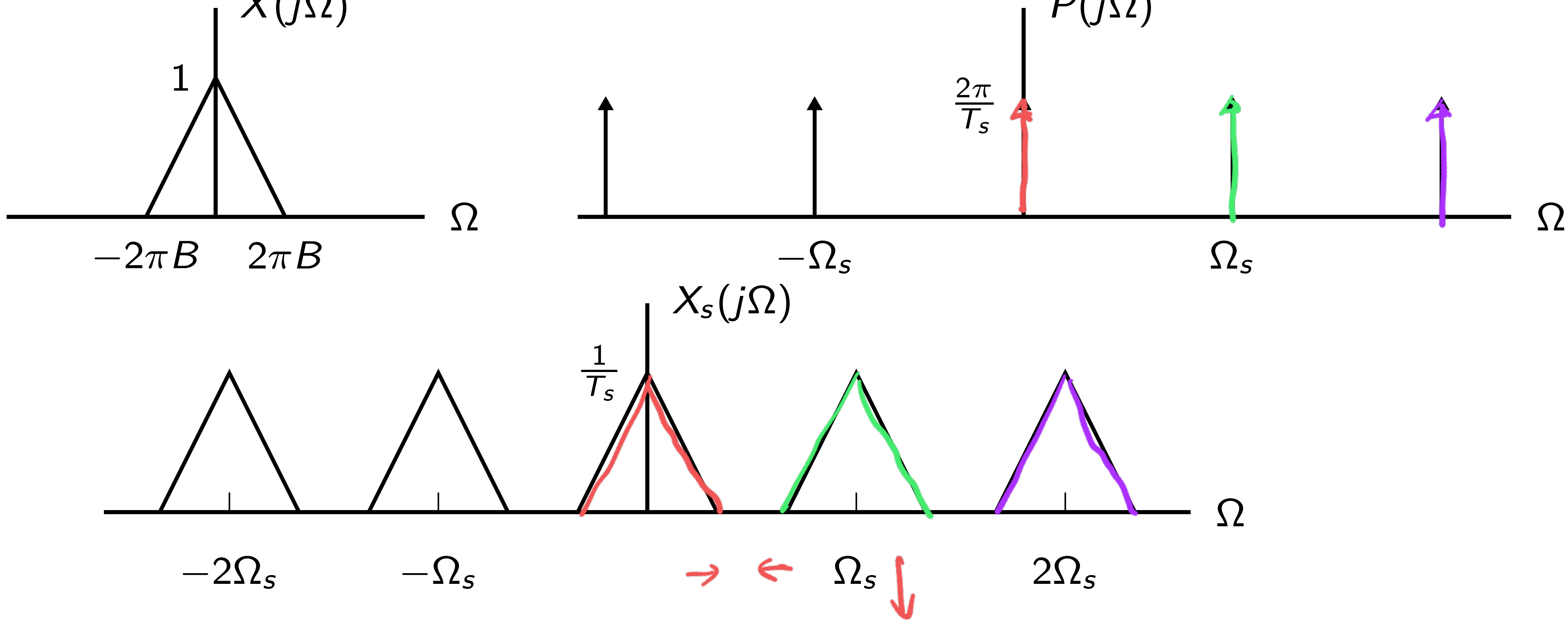
$$x_s(t) = x(t)p(t)$$



Phổ của tín hiệu sau lấy mẫu (1)

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\Omega)*P(j\Omega)], \quad \text{với} \quad P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s})$$

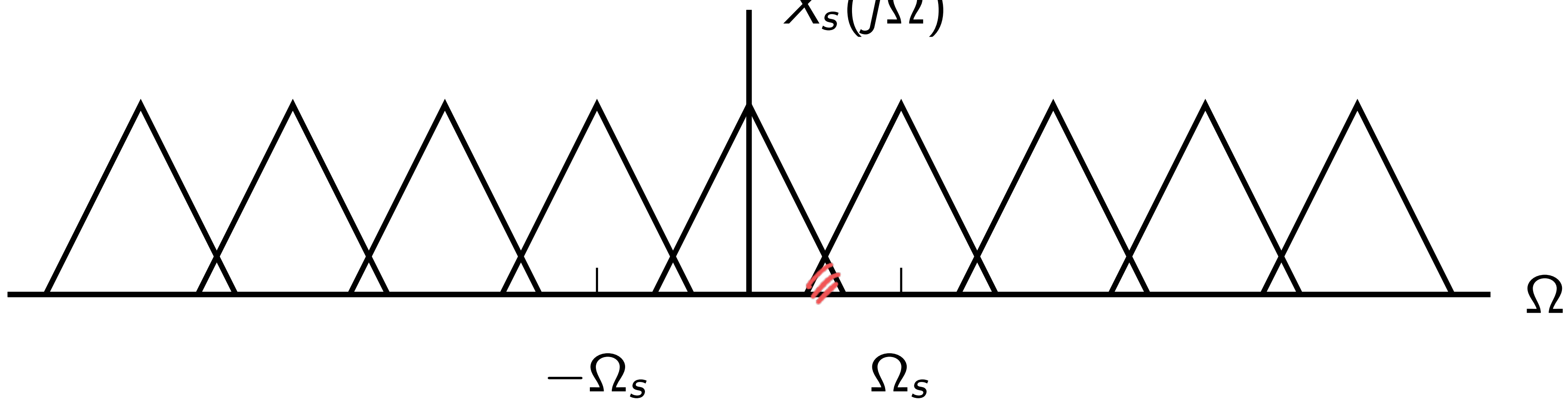
$$\Longrightarrow \boxed{X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s)), \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}}$$



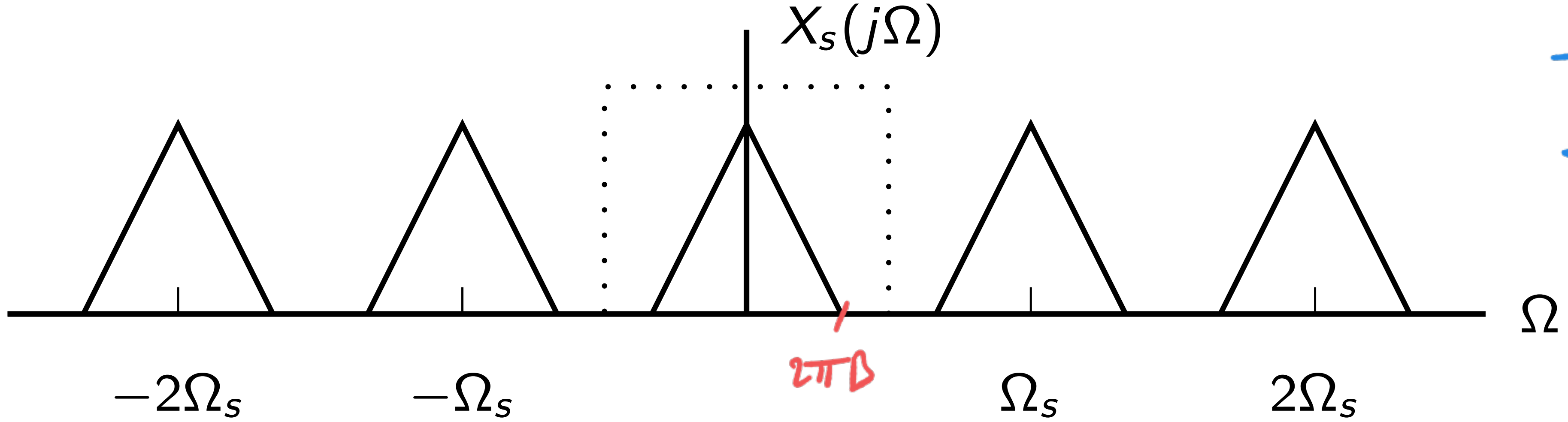
Phổ của tín hiệu sau lấy mẫu (2)

Hiện tượng chồng phổ

alias



Sử dụng bộ lọc thông thấp để khôi phục lại tín hiệu khi $\Omega_s \geq 4\pi B$



$\frac{2\pi}{T_s} \geq 4\pi B$

$\boxed{T_s \leq \frac{1}{2B}}$

Khôi phục lại tín hiệu (1)

Cho tín hiệu $x_s(t)$ qua bộ lọc thông thấp lý tưởng với $\Omega_c = \Omega_s/2 > 2\pi B$

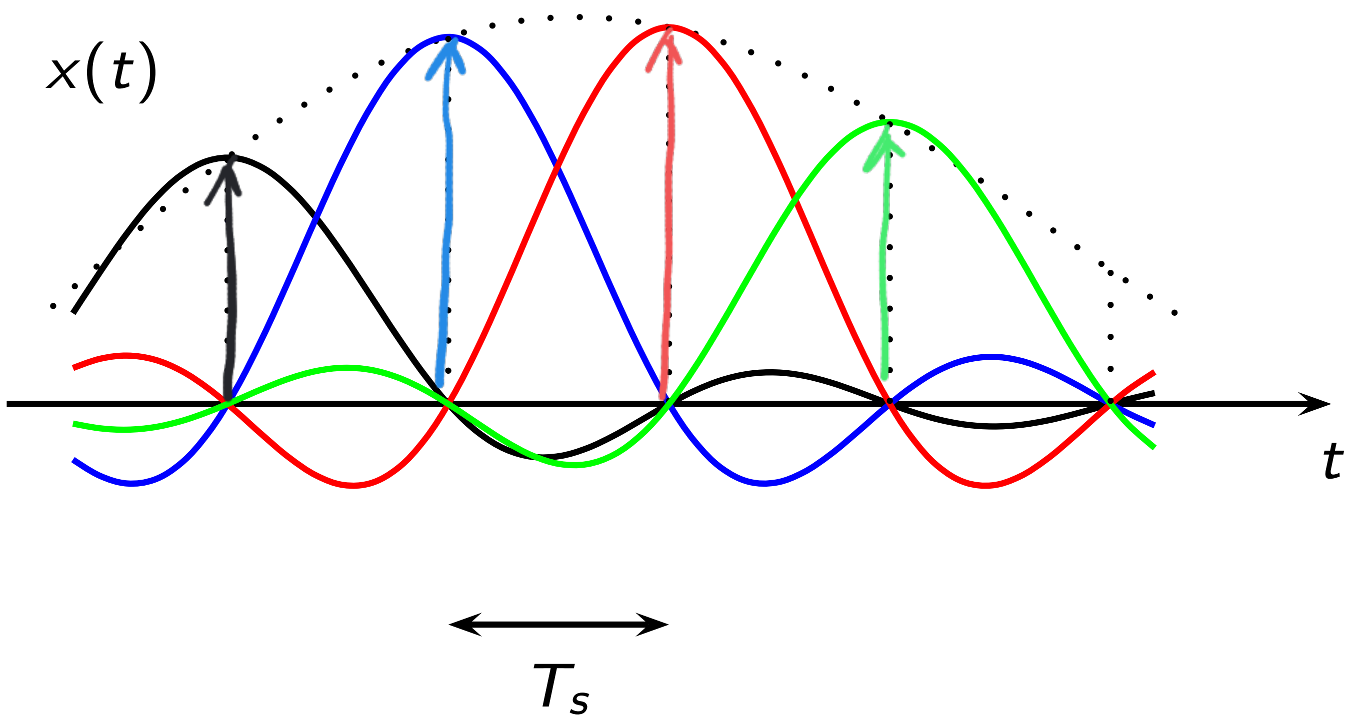
$$
\begin{aligned}
H(j\Omega) &= \begin{cases} T_s, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \\
h(t) &= \frac{T_s \sin(\Omega_c t)}{\pi t}
\end{aligned}
$$

(sinc)

Ta có:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\Omega_c T_s}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c (t - nT_s))}{\Omega_c (t - nT_s)}
\end{aligned}
$$

Khôi phục lại tín hiệu (2)

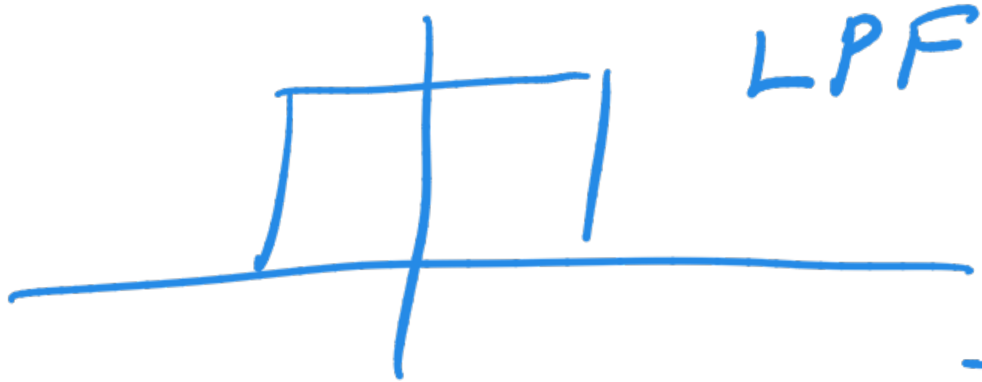


$x(t) \xrightarrow[f_s]{T_s} x[n]$ $\qquad f_s \geq 2 f_{max}$

$x(t) \longrightarrow x[nT_s]$ $\qquad$ phổ ntn?

Khôi phục $\quad x[nT_s] \rightarrow x(t)$ $\quad$ ntn?

LPF



Ω

Bài tập về nhà

Hãy viết chương trình Matlab minh hoạ cho việc lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ bất kỳ và thực hiện xấp xỉ lại tín hiệu liên tục $x(t)$ từ các mẫu $x(nT_s)$ xét trên một khoảng thời gian hữu hạn nào đó.