ET 2060 - Tín hiệu và hệ thống
Hệ thống LTI

TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

2017-2018

Outline

Phép chập

Các tính chất của phép chập trong hệ thống LTI

Biểu diễn hệ thống LTI

Phép chập (1)

Xét hệ thống LTI rời rạc

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]; \quad y[n] = T\{x[n]\}$$

Biểu diễn đầu vào $x[n]$ theo hàm xung đơn vị

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

và áp dụng tính chất tuyến tính, ta có:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

Phép chập (2)

Với $h[n]$ là đáp ứng của hệ thống T khi đầu vào là hàm xung đơn vị, $h[n] = T\{\delta[n]\}$ ($h[n]$ gọi là *đáp ứng xung* của hệ thống)

$$\xrightarrow{\delta[n]} \boxed{T} \xrightarrow{h[n]}$$

và áp dụng tính chất bất biến theo thời gian, ta có:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] := x[n] * h[n]}$$

Đầu ra $y[n]$ được tính bằng phép chập (convolution sum) của đầu vào $x[n]$ và đáp ứng xung $h[n]$ của hệ thống.

Các bước để tính phép chập

Cách tính $y[n_0]$

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0 - k]$$

Thực hiện trên đồ thị!

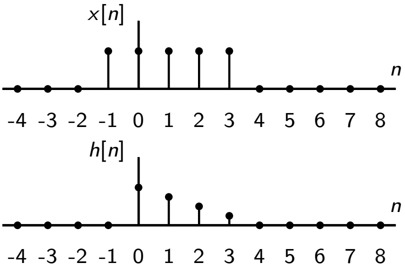
1. Vẽ $x[k]$ và $h[k]$ trên đồ thị
2. Lấy đối xứng qua trục tung: $h[k] \to h[-k]$
3. Dịch theo trục hoành: Dịch $h[-k]$ đi n_0 để được dãy $h[n_0 - k]$, trái / phải?
4. Nhân hai dãy: $v_{n_0}[k] = x[k]h[n_0 - k]$
5. Tính tổng: Cộng tất cả các phần tử (khác không) của dãy $v_{n_0}[k]$ thì được $y[n_0]$

Tính phép chập bằng đồ thị (1)

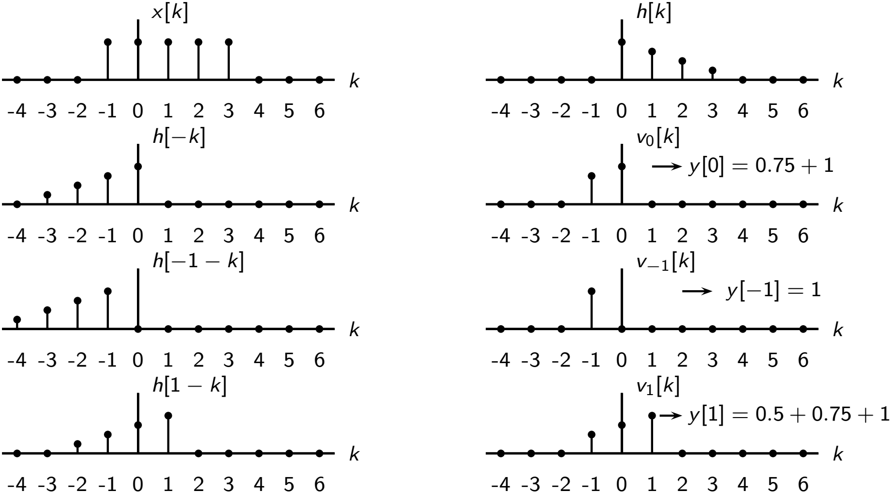
Ví dụ: Hãy tính $y[n]$ khi

$$x[n] = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$$

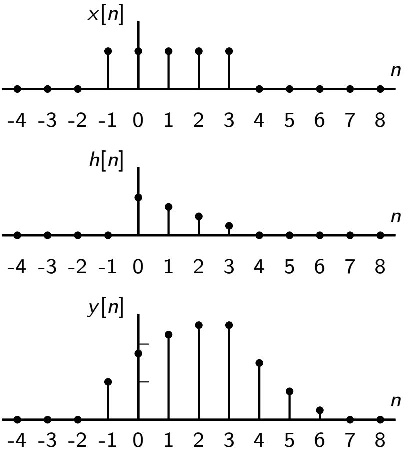
$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0.75, 0.5, 0.25\}$$



Tính phép chập bằng đồ thị (2)



Tính phép chập bằng đồ thị (3)



Một số nhận xét về $y[n]$

- Khi $x[n]$ và $h[n]$ có chiều dài hữu hạn?
- Nếu $x[n]$ hoặc $h[n]$ dịch đi một đoạn?
- Khi $x[n]$ hoặc $h[n]$ là hàm xung đơn vị?
- Các phương pháp khác để tính chập?
- Tính trên Matlab?

Phép chập cho tín hiệu liên tục (1)

Biểu diễn đầu vào theo hàm xung đơn vị

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Gọi $h(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống, áp dụng tính chất tuyến tính + bất biến theo thời gian, ta có thể tính được đầu ra là phép chập (convolution integral) giữa đầu vào và đáp ứng xung:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau := x(t) * h(t)}$$

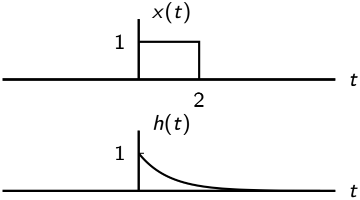
Phép chập cho tín hiệu liên tục (2)

Ví dụ: Cho mạch điện RC nối tiếp với $RC = 1$[s], hãy tính điện áp $y(t)$ trên tụ khi điện áp giữa hai đầu mạch điện là xung vuông:

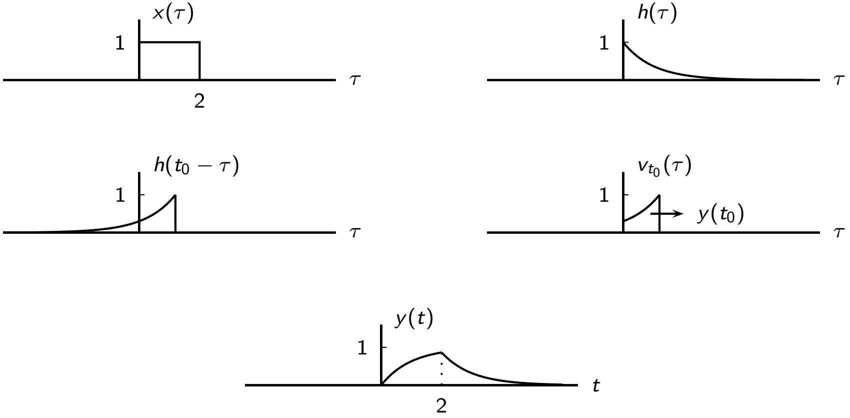
$$x(t) = u(t) - u(t-2)$$

Đáp ứng xung của hệ thống là $h(t) = e^{-t}u(t)$.

Vẽ $x(t), h(t)$ trên đồ thị:



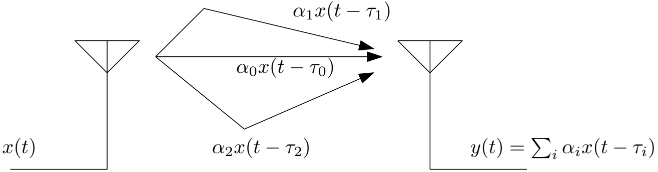
Phép chập cho tín hiệu liên tục (3)



Một số nhận xét về $y(t)$

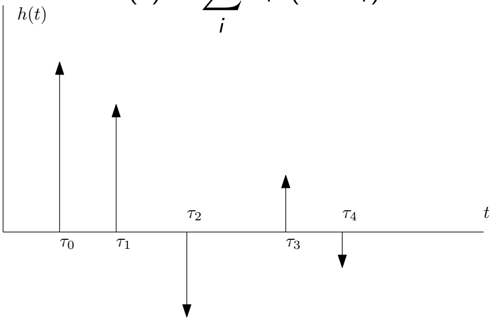
- Chia khoảng trước khi tính tích phân
- Tính trên Matlab?
- Có thể sử dụng phép chập rời rạc

Ví dụ: Kênh đa đường



Đáp ứng xung của kênh

$$h(t) = \sum_i \alpha_i \delta(t-\tau_i)$$



Outline

Phép chập

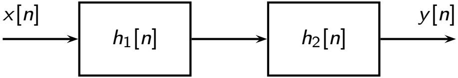
Các tính chất của phép chập trong hệ thống LTI

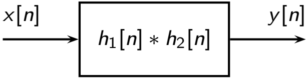
Biểu diễn hệ thống LTI

Tính chất kết hợp

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

Ghép nối tiếp các hệ thống LTI:

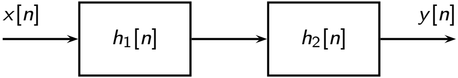


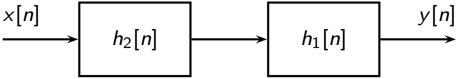


Tính chất giao hoán

$$h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$$

Đổi thứ tự các hệ thống ghép nối tiếp:

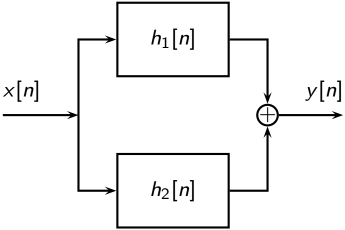


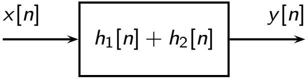


Tính chất phân phối

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$$

Ghép song song các hệ thống LTI:





Hệ thống LTI không có nhớ

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Áp dụng tính chất giao hoán, ta có:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

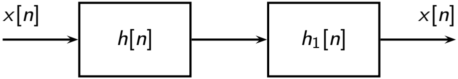
Hệ thống không có nhớ: $y[n]$ chỉ phụ thuộc vào $x[n]$, do đó:

$$h[k] = 0, \quad \forall k \neq 0$$

tức là $h[n] = C\delta[n]$, trong đó C là hằng số. Khi đó, ta có hệ thống:

$$y[n] = x[n] * C\delta[n] = Cx[n]$$

Nghịch đảo một hệ thống LTI



Điều kiện:

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

Ví dụ: Xét nghịch đảo của các hệ thống LTI sau:

(a) $h[n] = \delta[n - n_0]$

(b) $h[n] = u[n]$

Hệ thống LTI nhân quả

Áp dụng tính chất giao hoán, ta có:

$$y[n] = \cdots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + \\ + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots$$

Do vậy, hệ thống nhân quả khi và chỉ khi

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

Hệ thống LTI ổn định

Điều kiện cần và đủ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Chứng minh điều kiện đủ: dễ dàng
Chứng minh điều kiện cần: $a \to b \equiv \bar{b} \to \bar{a}$

- Chỉ ra nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$ thì có ít nhất một trường hợp hệ thống có đầu vào bị chặn mà đầu ra không bị chặn.
- Chọn đầu vào như sau:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|} & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases}$$

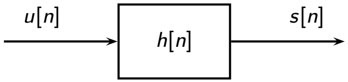
- Đầu ra tại $n = 0$?

Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống $h[n] = a^n u[n]$.

Đáp ứng nhảy của hệ thống LTI

Xét hệ thống LTI với đầu vào là hàm nhảy đơn vị, khi đó đầu ra được gọi là đáp ứng nhảy (step response) của hệ thống

$$s[n] = u[n] * h[n]$$



Áp dụng tính chất giao hoán,

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

Ngược lại, ta có: $h[n] = s[n] - s[n-1]$

Bài tập về nhà (1)

1. Viết lại các tính chất của hệ thống LTI cho trường hợp tín hiệu liên tục
2. Làm các bài tập chương 2
3. Viết chương trình Matlab `myconv` để tính chập giữa hai tín hiệu rời rạc. So sánh tốc độ với hàm có sẵn `conv` bằng lệnh `profile`
4. Dùng Matlab để vẽ đáp ứng nhảy $s[n]$ của hệ thống LTI nếu biết trước đáp ứng xung $h[n]$.
5. Viết chương trình Matlab để vẽ chập giữa hai tín hiệu liên tục. Có thể sử dụng hàm `myconv` đã viết không? So sánh kết quả trên cùng một đồ thị.

Outline

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

- Tìm $y_h(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0 \Longrightarrow y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t}$$

  Phương trình đặc trưng: $\sum_{k=0}^{N} a_k r^k = 0$
- Tìm nghiệm riêng $y_p(t)$ có dạng tương tự như $x(t)$.
- Tìm các hệ số của nghiệm tổng quát sao cho nghiệm $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ thỏa mãn các điều kiện đầu.

Ví dụ: Xét mạch điện RC: $y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$. Tìm $y(t)$ $(t > 0)$ khi $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$ và $y(0) = 2$ [V], $R = 1$ [Ω], $C = 1$ [F].

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Cách giải tương tự!

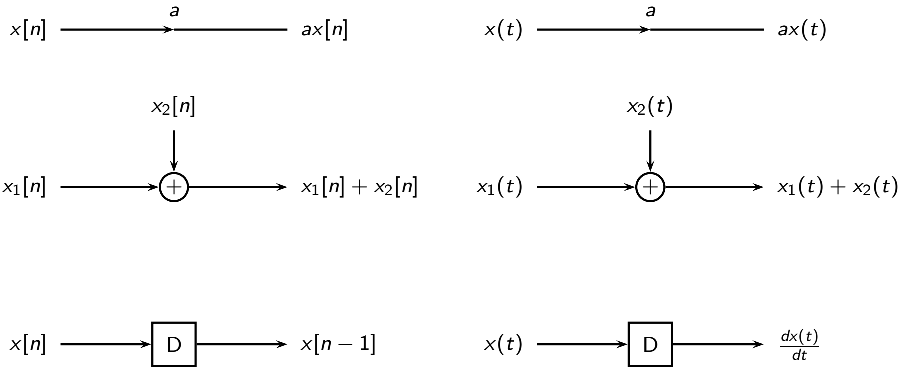
- Nghiệm tổng quát

$$y_h[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n$$

- Phương trình đặc trưng

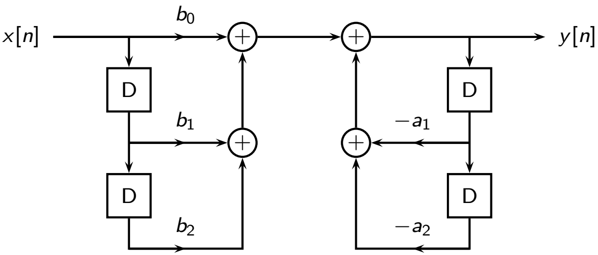
$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k} = 0$$

Thực hiện hệ thống LTI: Các phần tử cơ bản

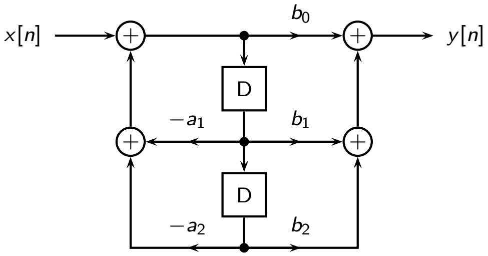


Thực hiện hệ thống LTI: Sơ đồ loại I

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$



Thực hiện hệ thống LTI: Sơ đồ loại II



Phép tương quan

So sánh mức độ giống nhau giữa hai dãy (tín hiệu).
Tương quan chéo:

$$r_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[m-n]$$

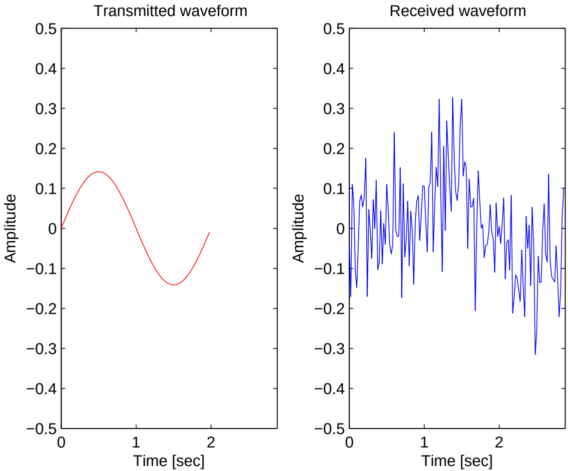
Tự tương quan:

$$r_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m-n]$$

- So sánh với phép chập? Cách tính tương quan?
- Tính chất của phép tương quan?

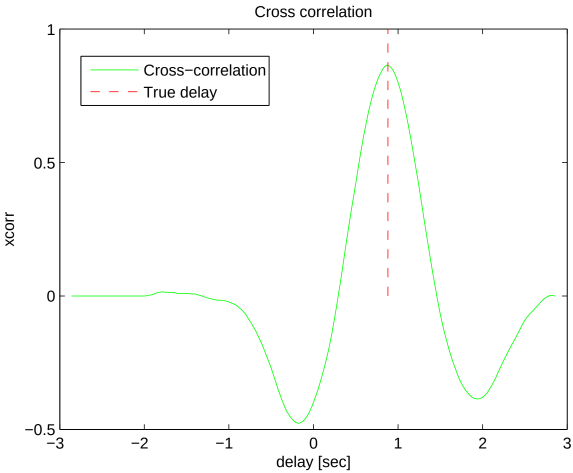
Ứng dụng: Radar (1)

Phát đi tín hiệu qua kênh truyền có nhiễu trắng và trễ một khoảng thời gian τ không biết trước.



Ứng dụng: Radar (2)

So sánh vị trí tại đó hàm tương quan chéo nhận giá trị lớn nhất và $\tau = 0.88$ s (trong trường hợp SNR = 20 dB)



Bài tập về nhà (2)

1. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng trên Matlab.
2. Viết lại chương trình Matlab minh họa ứng dụng radar.