ET 2060 - Tín hiệu và hệ thống
Những khái niệm cơ bản

TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

2019-2020

Tín hiệu liên tục / rời rạc theo thời gian

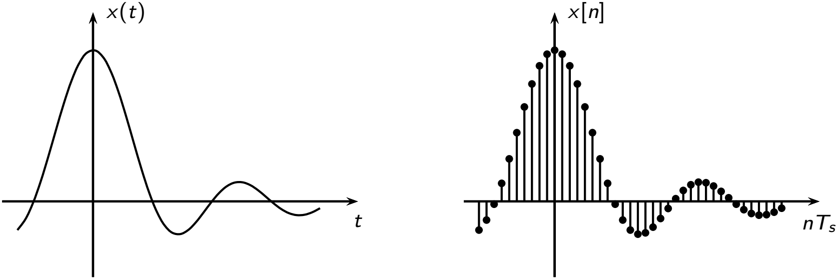
"Phạm vi môn học: Chỉ xét tín hiệu là một hàm của một biến độc lập - thời gian."

- Biến số thời gian liên tục $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ tín hiệu liên tục theo thời gian $x(t)$.
- Biến số thời gian rời rạc $n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ tín hiệu rời rạc theo thời gian $x[n]$.

Ví dụ?

Tín hiệu liên tục / rời rạc theo thời gian: Lấy mẫu

$$x(t) \xrightarrow[T_s]{\text{lấy mẫu}} x(nT_s) \xrightarrow{\text{chuẩn hóa}} x[n]$$



Hình: Tín hiệu liên tục $x(t)$ và tín hiệu rời rạc $x[n]$

Biểu diễn tín hiệu trên miền thời gian

- Đồ thị
- Công thức

$$x(t) = 10\sin(100\pi t + \pi/3), \quad x[n] = 0.5e^{j20\pi n}$$

- Liệt kê

$$x[n] = \{1, 0.5, \underset{\uparrow}{-2}, 0, 3, -1\}$$

Năng lượng và công suất của tín hiệu (1)

Tín hiệu liên tục $x(t)$:

- Công suất tức thời $p_x(t) = |x(t)|^2$
- Tổng năng lượng

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Công suất trung bình

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Năng lượng và công suất của tín hiệu (2)

Tín hiệu rời rạc $x[n]$:

- Tổng năng lượng

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

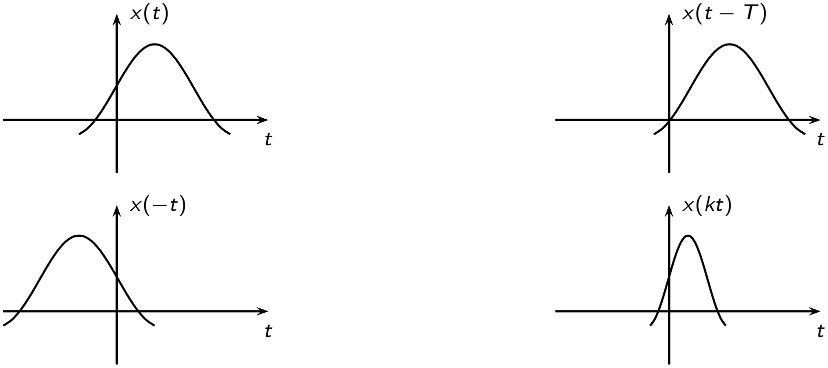
- Công suất trung bình

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Khi $E_x < \infty \to x(t), x[n]$ - tín hiệu năng lượng.
- Khi $0 < P_x < \infty \to x(t), x[n]$ - tín hiệu công suất.

Các phép toán thực hiện trên biến thời gian (1)

- Dịch (shift) $x(t) \rightarrow x(t - T)$
- Lấy đối xứng $x(t) \rightarrow x(-t)$
- Co dãn (scale) $x(t) \rightarrow x(kt)$



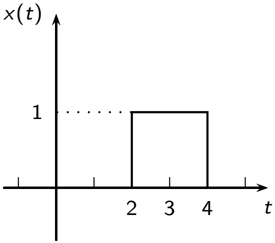
Các phép toán thực hiện trên biến thời gian (2)

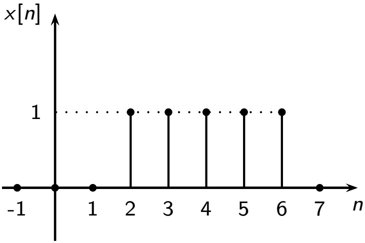
- Vẽ dạng của $x(kt+T)$? Phân biệt với $x(k(t+T))$?
- Trường hợp tín hiệu rời rạc?

Ví dụ: Cho tín hiệu $x(t)$ và $x[n]$ như hình vẽ dưới đây.

(a) Hãy vẽ dạng của $x(2t+1)$ và $x(2(t+1))$.

(b) Hãy vẽ dạng của $x[2n+1]$ và $x[2(n+1)]$.

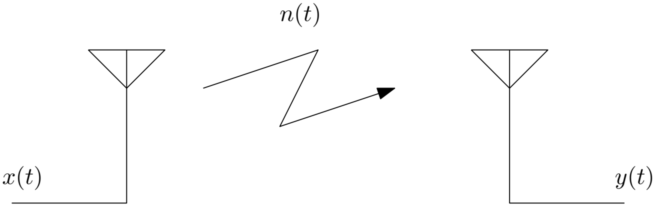




Các phép toán thực hiện trên biên độ tín hiệu

- Phép cộng: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
- Phép nhân với hằng số: $y(t) = ax(t)$
- Nhân hai tín hiệu với nhau: $y(t) = x_1(t)x_2(t)$

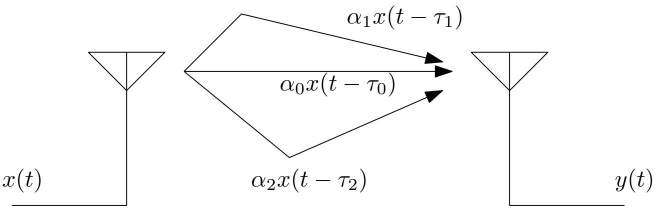
Ví dụ: Truyền tín hiệu



$$y(t) = \alpha x(t - \tau) + n(t)$$

trong đó $x(t)$ là tín hiệu phát đi, $y(t)$ là tín hiệu thu được, $n(t)$ là nhiễu cộng (quá trình ngẫu nhiên), α là suy hao do truyền dẫn, τ là thời gian truyền (độ trễ truyền dẫn).

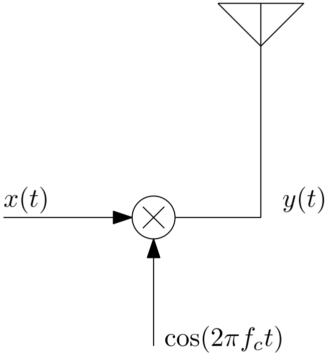
Ví dụ: Kênh đa đường



$$
\begin{aligned}
y(t) &= \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \alpha_2 x(t-\tau_2) + \cdots + n(t) \\
&= \sum_i \alpha_i x(t-\tau_i) + n(t)
\end{aligned}
$$

trong đó α_i, τ_i tương ứng là suy hao và trễ truyền dẫn của đường thứ i.

Ví dụ: Điều chế biên độ (AM)



$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t)$$

Tín hiệu tuần hoàn

- Tín hiệu liên tục

$$x(t) = x(t+T), \quad \forall t$$

- Tín hiệu rời rạc

$$x[n] = x[n+N], \quad \forall n$$

  với N là số nguyên dương.
- Giá trị T, N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản (fundamental period).

Tín hiệu tuần hoàn

- Tín hiệu liên tục

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t$$

- Tín hiệu rời rạc

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n$$

với N là số nguyên dương.

- Giá trị T, N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản (fundamental period).

Ví dụ: Xác định xem các tín hiệu dưới đây có phải là tuần hoàn không? Nếu tuần hoàn thì hãy tính chu kỳ cơ bản.

(a) $\cos^2(2\pi t + \pi/4)$

(b) $\sin(2n)$

Tín hiệu chẵn / lẻ. Tín hiệu xác định / ngẫu nhiên

- Chẵn: $x(t) = x(-t)$; $x[n] = x[-n]$
- Lẻ: $x(t) = -x(-t)$; $x[n] = -x[-n]$
- Tín hiệu xác định (deterministic signal): Giá trị xác định, biểu diễn bởi một hàm của biến thời gian
- Tín hiệu ngẫu nhiên (random signal): Giá trị ngẫu nhiên $\rightarrow$ biến ngẫu nhiên, hàm mật độ xác xuất (pdf) và quá trình ngẫu nhiên

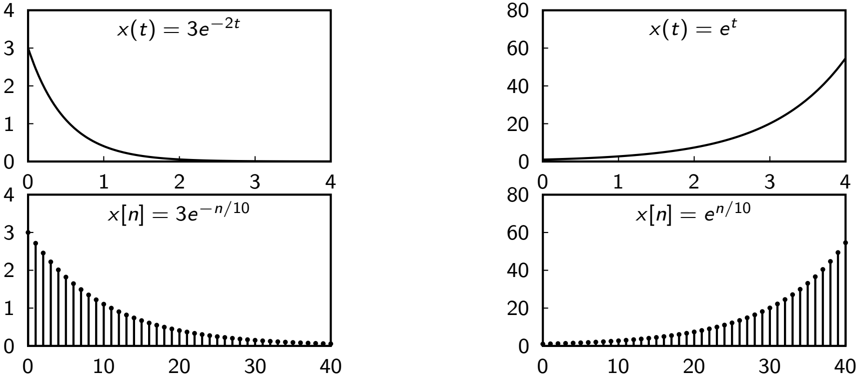
Tín hiệu chẵn / lẻ. Tín hiệu xác định / ngẫu nhiên

- Chẵn: $x(t) = x(-t)$; $x[n] = x[-n]$
- Lẻ: $x(t) = -x(-t)$; $x[n] = -x[-n]$
- Tín hiệu xác định (deterministic signal): Giá trị xác định, biểu diễn bởi một hàm của biến thời gian
- Tín hiệu ngẫu nhiên (random signal): Giá trị ngẫu nhiên $\rightarrow$ biến ngẫu nhiên, hàm mật độ xác xuất (pdf) và quá trình ngẫu nhiên

Ví dụ: Một tín hiệu $x(t)$ bất kỳ đều có thể được phân tích thành 2 thành phần chẵn, lẻ: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$. Hãy tìm $x_e(t)$ và $x_o(t)$ theo $x(t)$.

Tín hiệu hàm mũ thực

$$x(t) = Ce^{at}, x[n] = Ce^{an}, \qquad C, a \in \mathbb{R}$$



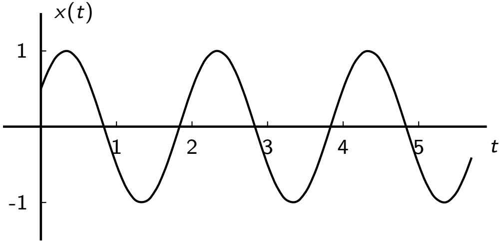
Ví dụ: Xét mạch điện có tụ C và điện trở R mắc nối tiếp. Vẽ điện áp $v(t)$ trên tụ C, nếu ban đầu $(t = 0)$ tụ được nạp điện V_0.

Tín hiệu hình sin

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\rightarrow$ Tín hiệu rời rạc?

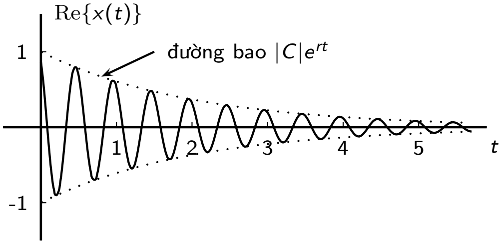


Ví dụ: Cho mạch điện gồm tụ C và cuộn cảm L mắc nối tiếp. Vẽ điện áp $v(t)$ trên tụ C, nếu ban đầu $(t = 0)$ tụ được nạp điện V_0.

Tín hiệu hàm mũ phức (liên tục)

Với C và a là số phức: $C = |C|e^{j\theta}$ và $a = r + j\omega_0$, ta có:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)} \\
&= |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta)
\end{aligned}
$$



Ví dụ trong mạch điện?

Tín hiệu hàm mũ phức (rời rạc)

Với C và a là số phức: $C = |C|e^{j\theta}$ và $a = r + j\omega_0$, ta có:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= |C|e^{rn}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= |C|e^{rn}\cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|e^{rn}\sin(\omega_0 n + \theta)
\end{aligned}
$$

Nhận xét về thành phần $e^{j(\omega_0 n+\theta)}$:

- Không phải lúc nào cũng tuần hoàn (tùy theo giá trị của ω_0), nếu tuần hoàn thì chu kỳ xác định như thế nào?

Tín hiệu hàm mũ phức (rời rạc)

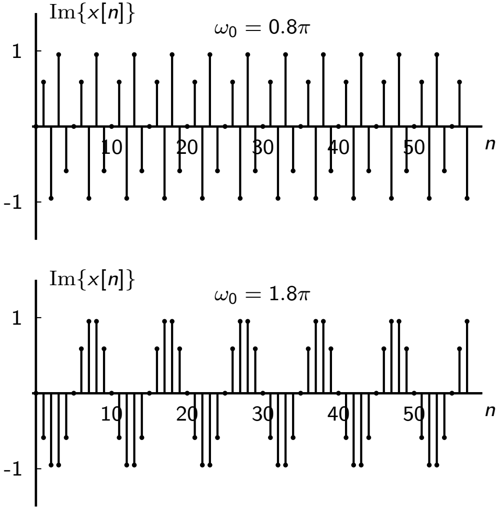
Với C và a là số phức: $C = |C|e^{j\theta}$ và $a = r + j\omega_0$, ta có:

$$\begin{aligned} x[n] &= |C|e^{rn}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= |C|e^{rn}\cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|e^{rn}\sin(\omega_0 n + \theta) \end{aligned}$$

Nhận xét về thành phần $e^{j(\omega_0 n+\theta)}$:

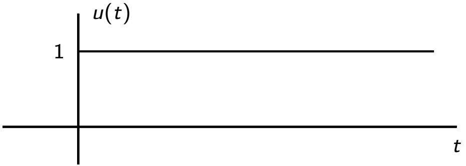
- Không phải lúc nào cũng tuần hoàn (tùy theo giá trị của ω_0), nếu tuần hoàn thì chu kỳ xác định như thế nào?
- Xét ω_0 trong đoạn $[0, 2\pi]$, khi nào tần số thấp / cao?

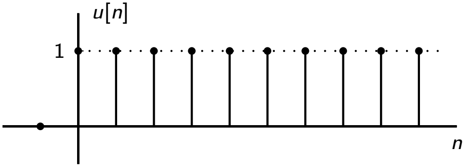
Minh họa $x[n] = e^{j(\omega_0 n)}$



Hàm nhảy đơn vị

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t \quad \text{còn lại} \end{cases} \qquad u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$

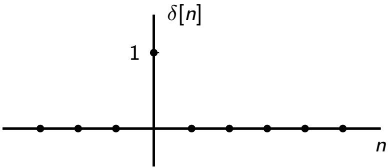




Ví dụ trong mạch điện?

Hàm xung đơn vị (rời rạc)

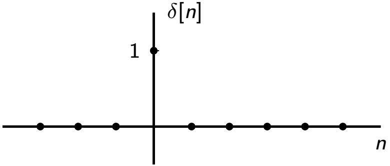
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$



Quan hệ với hàm nhảy đơn vị?

Hàm xung đơn vị (rời rạc)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$



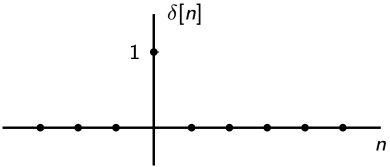
Quan hệ với hàm nhảy đơn vị?

$$\begin{aligned} \delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\ u[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \end{aligned}$$

Với tín hiệu $x[n]$ bất kỳ?

Hàm xung đơn vị (rời rạc)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$



Quan hệ với hàm nhảy đơn vị?

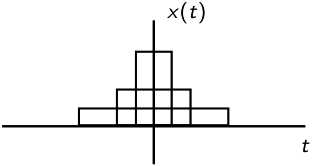
$$\begin{aligned} \delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\ u[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \end{aligned}$$

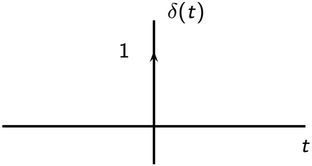
Với tín hiệu $x[n]$ bất kỳ?

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Hàm delta Dirac (liên tục)

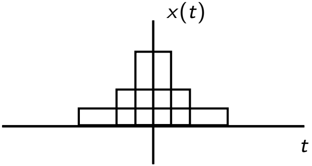
$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1 \end{aligned}$$

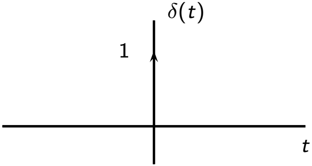




Hàm delta Dirac (liên tục)

$$
\begin{aligned}
\delta(t) &= 0, \quad \forall t \neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1
\end{aligned}
$$





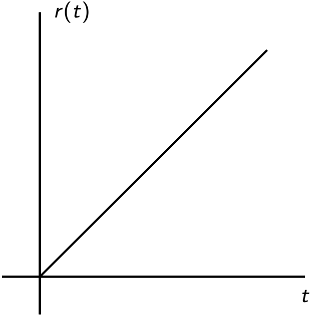
Một số tính chất:

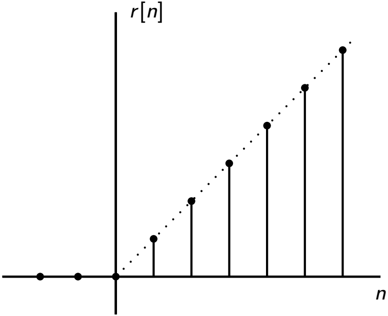
$$
\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \\
x(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt \\
\delta(at) &= \frac{1}{a}\delta(t)
\end{aligned}
$$

Hàm dốc đơn vị (ramp)

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t \quad \text{còn lại} \end{cases}$$

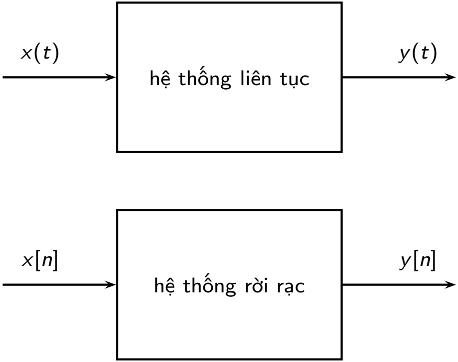
$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n \quad \text{còn lại} \end{cases}$$



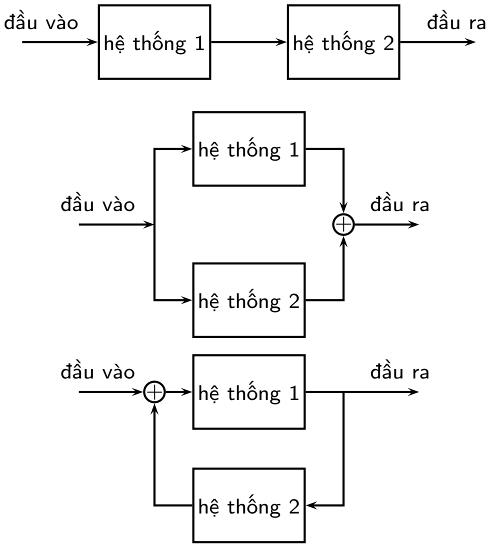


Hệ thống

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t), \quad x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$



Ghép nối các hệ thống



Tính ổn định của hệ thống

Một hệ thống T ổn định (BIBO stable) nếu mọi đầu vào bị chặn

$$|x(t)| < \infty, \quad \forall t$$

đều khiến cho đầu ra tương ứng bị chặn

$$|y(t)| < \infty, \quad \forall t$$

Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống

$$y[n] = r^n x[n]$$

với $|r| > 1$.

Thuộc tính nhớ

- Hệ thống gọi là không có nhớ (memoryless) nếu đầu ra chỉ phụ thuộc vào đầu vào ở thời điểm hiện tại.
- Hệ thống gọi là có nhớ nếu đầu ra phụ thuộc vào đầu vào ở thời điểm quá khứ hoặc tương lai.

Ví dụ: Xét thuộc tính nhớ của các hệ thống

(a) $y[n] = x[n] - x[n-1] + 2x[n+2]$

(b) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$

Tính nhân quả

Hệ thống gọi là nhân quả (causal) nếu như đầu ra tại thời điểm n bất kỳ chỉ phụ thuộc đầu vào thời điểm hiện tại hoặc quá khứ.

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]$$

Ví dụ: Xét tính nhân quả của các hệ thống

(a) $y[n] = x[n] - x[n-1] + 2x[n+2]$

(b) $i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$

Tính bất biến theo thời gian

Một hệ thống T bất biến theo thời gian khi và chỉ khi

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \quad \text{thì} \quad x[n-n_0] \xrightarrow{T} y[n-n_0] \quad \forall n$$

với mọi đầu vào $x[n]$ và với mọi khoảng dịch thời gian n_0.

Ví dụ: Hệ thống sau có bất biến theo thời gian không?

$$y[n] = nx[n]$$

Tính tuyến tính

Hệ thống T gọi là tuyến tính khi và chỉ khi

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

với mọi đầu vào $x_1[n], x_2[n]$ và với mọi hằng số a_1, a_2.

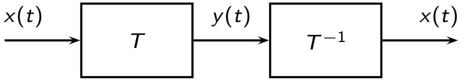
Ví dụ: Các hệ thống sau có tuyến tính không?

(a) $y(t) = tx(t)$

(b) $y(t) = x^2(t)$

Tính khả nghịch

Một hệ thống gọi là khả nghịch (invertible) nếu như có thể khôi phục được đầu vào từ đầu ra của nó (các đầu vào phân biệt sẽ có các đầu ra phân biệt).



Ví dụ: Các hệ thống sau có khả nghịch không, nếu có, tìm hệ thống nghịch đảo

(a) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(b) $y(t) = x^2(t)$

Bài tập về nhà

- Làm các bài tập cuối chương 1
- Viết chương trình Matlab để vẽ các dạng tín hiệu cơ bản