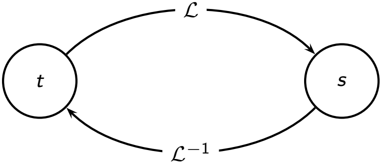
# ET 2060 - Tín hiệu và hệ thống
# Biến đổi Laplace

TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

2017-2018

# Định nghĩa




Biến đổi Laplace

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

trong đó $s$ là biến số phức: $s = \sigma + j\Omega$.

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

**Ví dụ:** Tìm biến đổi Laplace của $x(t) = e^{at}u(t)$

# Liên hệ với biến đổi Fourier

- Biến đổi Fourier là biến đổi Laplace xét trên trục ảo $s = j\Omega$.

$$X(j\Omega) = X(s)|_{s=j\Omega}$$

- Biến đổi Laplace là biến đổi Fourier của $x(t)e^{-\sigma t}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t}dt = \mathrm{FT}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

- Miền hội tụ (ROC) là những giá trị của $s$ trên mặt phẳng phức sao cho $X(s) < \infty$ (tức là tồn tại biến đổi Fourier của $x(t)e^{-\sigma t}$). Điều kiện hội tụ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty$$

# Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace và vẽ miền hội tụ cho các trường hợp sau:

(a) $x(t) = \delta(t)$

(b) $x(t) = -e^{at}u(-t)$

(c) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{3t}u(-t)$

(d) $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$

# Điểm cực và điểm không

- Điểm cực: $s = s_{pk}$ nếu $X(s_{pk}) = \infty$.
- Điểm không: $s = s_{0k}$ nếu $X(s_{0r}) = 0$.
- Nếu $X(s)$ biểu diễn bởi một hàm hữu tỉ:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

thì $s_{pk}$ là nghiệm của đa thức $D(s)$ và $s_{0r}$ là nghiệm của đa thức $N(s)$.

**Ví dụ:** Tìm biến đổi Laplace và vẽ các điểm cực, điểm không

$$x(t) = \delta(t) - 3e^{-2t}u(t) + 2e^{t}u(t)$$

# Các tính chất của ROC

(i) ROC chứa các dải song song với trục ảo trên mặt phẳng $s$.

(ii) ROC không chứa các điểm cực

(iii) Nếu $x(t)$ có chiều dài hữu hạn và $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$ thì ROC sẽ là cả mặt phẳng phức.

(iv) Nếu $x(t)$ là dãy một phía (trái hoặc phải) thì ROC?

(v) Nếu $x(t)$ là dãy hai phía thì ROC?

# Biến đổi Laplace ngược

Áp dụng biến đổi Fourier ngược:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Ta có:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

- Nếu $X(s)$ là hàm hữu tỷ thì biến đổi ngược bằng cách khai triển thành các phân thức tối giản.
- Lưu ý về ROC.

**Ví dụ:** Tìm biến đổi ngược của

$$X(s) = \frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}, \quad \mathrm{ROC}: -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

# Các tính chất

- Tuyến tính
- Dịch thời gian: $x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s)$
- Dịch trên miền $s$: $e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0)$
- Co dãn: $x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(s/a)$
- Liên hợp phức: $x^*(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X^*(s^*)$
- Chập: $x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)X_2(s)$
- Đạo hàm trên miền $t$: $\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$
- Đạo hàm trên miền $s$: $-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}$
- Tích phân trên miền $t$: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{1}{s}X(s)$
- Định lý giá trị đầu và cuối: Nếu tín hiệu nhân quả ($x(t) = 0$, $\forall t < 0$) thì

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s), \ \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

# Hàm truyền đạt $H(s)$ của hệ thống LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Hàm truyền đạt

$$H(s) \triangleq \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Hệ thống nghịch đảo: $H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)}$
- Hệ thống pha tối thiểu: $H(s)$ và $H_{inv}(s)$ đều nhân quả, ổn định.

# Hệ thống LTI nhân quả và ổn định

- Nhân quả: ROC của $H(s)$ là nửa bên phải của mặt phẳng phức
- Nhân quả, với $H(s)$ là hàm hữu tỷ: ROC là phần mặt phẳng bên phải của điểm cực ngoài cùng.
- Ổn định: ROC chứa trục ảo ($s = j\Omega$).
- Nhân quả, ổn định, $H(s)$ hữu tỷ: Tất cả các điểm cực của $H(s)$ nằm bên trái trục ảo của mặt phẳng phức.
- Hệ thống pha tối thiểu: Tất cả các điểm cực và điểm không của $H(s)$ đều nằm bên trái trục ảo.

# Tìm đáp ứng xung của hệ thống LTI

Cho hệ thống LTI được biểu diễn bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 3\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 4y(t) = 4\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 15\frac{d}{dt}x(t) + 8x(t)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(t)$ trong trường hợp hệ thống nhân quả, ổn định.

# Biến đổi Laplace một phía

$$X(s) \triangleq \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Ký hiệu:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

Các tính chất tương tự như biến đổi Laplace hai phía, ngoại trừ:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} sX(s) - x(0^-)$$

# Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Cho hệ thống LTI được biểu diễn bởi phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 6x(t)$$

Hãy tìm đầu ra $y(t)$ của hệ thống khi có đầu vào $x(t) = u(t)$ ,với các điều kiện đầu: $y(0^-) = 1$ và $y'(0^-) = 2$.

# Bài tập

1. Sử dụng hàm `roots` để tìm điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt $H(s)$.
2. Sử dụng hàm `residue` để phân tích $H(s)$ hữu tỷ thành các phân thức tối giản.
3. Tìm hiểu về cách sử dụng các hàm `tf`, `zpk`, `ss`, `pzmap`, `tzero`, `pole`, `bode` và `freqresp` để biểu diễn và phân tích hệ thống.