

ET 2060 - Tín hiệu và hệ thống Định lý lấy mẫu

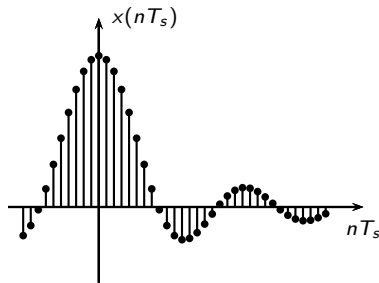
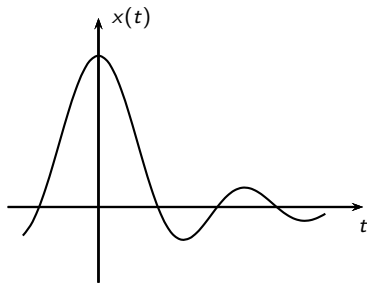
TS. Đặng Quang Hiếu

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Điện tử - Viễn thông

2017-2018

Định lý lấy mẫu

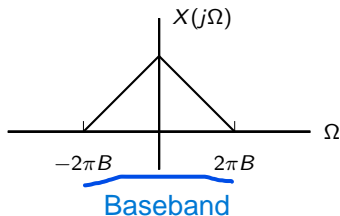
$$x(t) \xrightarrow[T_s]{\text{lấy mẫu}} x(nT_s)$$



“Nếu tín hiệu $x(t)$ không có thành phần tần số nào lớn hơn B hertz thì nó được hoàn toàn xác định tại các mẫu cách nhau $\frac{1}{2B}$ giây.” – Claude Shannon.

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

Chứng minh định lý lấy mẫu (1)



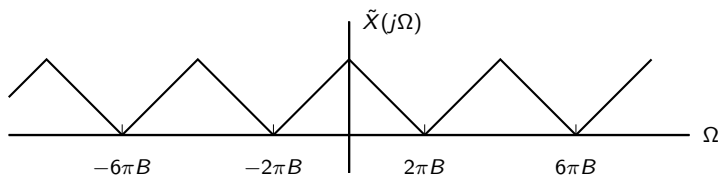
Gọi $X(j\Omega)$ là phổ của $x(t)$. Khi đó:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Nếu thay $t = \frac{n}{2B}$ với $n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$x(n/2B) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega) e^{j\Omega \frac{n}{2B}} d\Omega$$

Chứng minh định lý lấy mẫu (2)



$$\tilde{X}(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{4\pi B} n\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega \frac{n}{2B}}$$

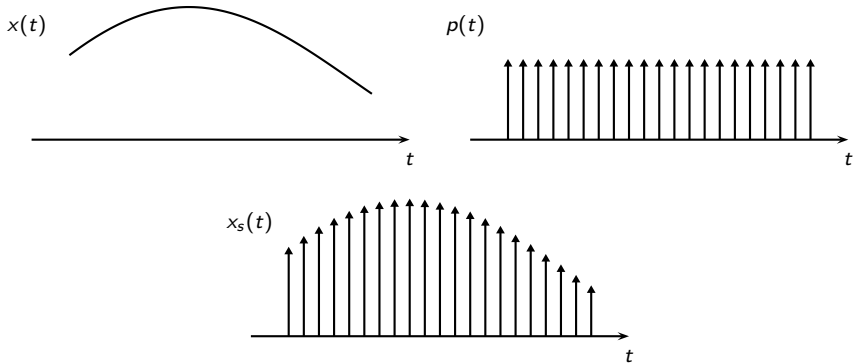
$$c_n = \frac{1}{4\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \tilde{X}(j\Omega) e^{-j\frac{2\pi}{4\pi B} n\Omega} d\Omega = \frac{1}{4\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} X(j\Omega) e^{-j\Omega \frac{n}{2B}} d\Omega$$

$$x(n/2B) \rightarrow c_n = \frac{1}{2B} x(-n/2B) \rightarrow \tilde{X}(j\Omega) \rightarrow X(j\Omega) \rightarrow x(t) \quad \text{QED!!!}$$

Cách tiếp cận khác

Coi lấy mẫu là phép nhân của $x(t)$ với hàm xung đơn vị tuần hoàn với chu kỳ T_s .

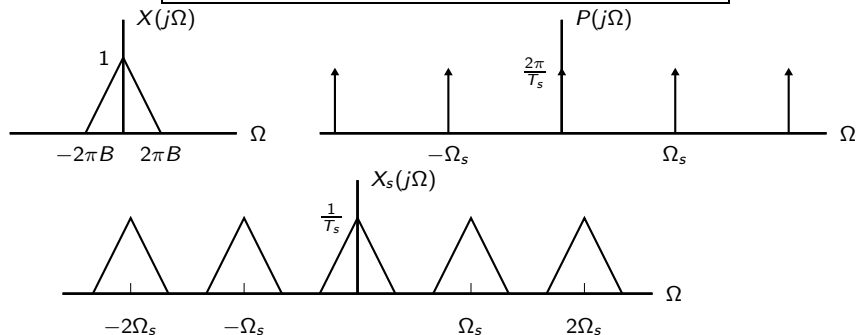
$$x_s(t) = x(t)p(t)$$



Phổ của tín hiệu sau lấy mẫu (1)

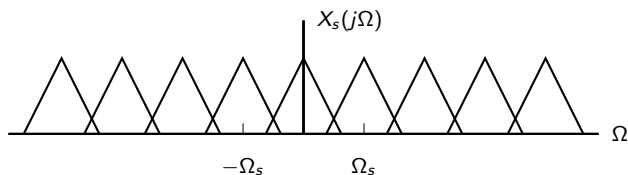
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\Omega) * P(j\Omega)], \quad \text{với} \quad P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$

$$\Rightarrow X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s)), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

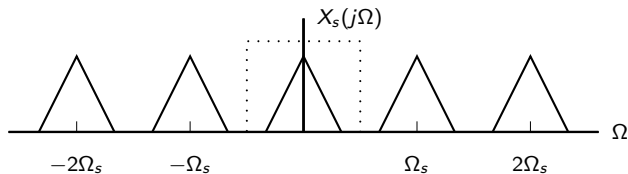


Phổ của tín hiệu sau lấy mẫu (2)

Hiện tượng chồng phổ



Sử dụng bộ lọc thông thấp để khôi phục lại tín hiệu khi $\Omega_s \geq 4\pi B$



Khôi phục lại tín hiệu (1)

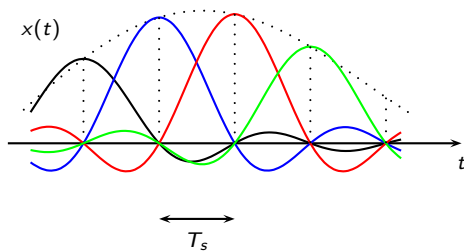
Cho tín hiệu $x_s(t)$ qua bộ lọc thông thấp lý tưởng với $\Omega_c = \Omega_s/2 > 2\pi B$

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \begin{cases} T_s, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \\ h(t) &= \frac{T_s \sin(\Omega_c t)}{\pi t} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\Omega_c T_s}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c(t - nT_s))}{\Omega_c(t - nT_s)} \end{aligned}$$

Khôi phục lại tín hiệu (2)



Bài tập về nhà

Hãy viết chương trình Matlab minh hoạ cho việc lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ bất kỳ và thực hiện xấp xỉ lại tín hiệu liên tục $x(t)$ từ các mẫu $x(nT_s)$ xét trên một khoảng thời gian hữu hạn nào đó.