Ingeniería de Organización

Grado en Ingeniería de la Tecnologías de Telecomunicación.

Dr. Pedro L. González-R

Bloque I: Métodos Cuantitativos

Contenido

Tema 1: Introducción a la IO

1. Origen y Evolución de la IO
2. Campos de Aplicación
3. Conceptos Básicos

1. Origen y evolución de la IO

- Como mucho de los grandes avances científicos tuvo su origen en el ámbito militar
- De ahí su nombre
- Estudio sobre el uso de un radar en la 2ª Guerra Mundial desencadenó el desarrollo de lo que hoy se conoce como IO.
- Se atribuye el éxito de la fuerza aérea inglesa

1. Origen y evolución de la IO

- Estos desarrollos → inmediatamente aplicados a problemas estratégicos y tácticos en el ámbito bélico.
  - Inmediata aplicación a casos de asignación de recursos escasos en operaciones militares
- En el ámbito empresarial…
  - No fueron ajenos a estos desarrollos y comenzaron a aplicar las técnicas de IO para aumentar los beneficios.
  - Hay que tener en cuenta el contexto donde se desarrolló la aplicación de la IO:
    - Plena revolución industrial (expansión)
    - Pasó de producción artesanal a producción en masa → la **asignación de recursos** (administración de recursos escasos) juega un papel muy importante en los resultados empresariales.
    - Ejemplos

1. Origen y evolución de la IO

- Objetivos:
  - Producción de información sobre los sistemas que permita mejorar la efectividad de la organización.
    - Los métodos empleados tienen carácter objetivo y están basados en el método científico
    - Basados en medidas, análisis y validación y no en gustos o intuiciones
- Definición de IO:
  - *Aplicación del método científico a la mejora de la eficiencia de las operaciones, las decisiones y la gestión.*

1. Origen y evolución de la IO

- Otras denominaciones:
  - Operations Research
  - Management Science
  - Decision Technology
  - Decision Support
  - Police Science
  - System Analysis
  - Management Technology
  - Management Analitics

1. Origen y evolución de la IO

- Herramientas de la IO:
  - Programación Lineal, PMO
  - Programación No Lineal, PLE, MIP
  - Programación Dinámica
  - Tª de redes y grafos
  - Cadenas de Markov
  - Tª de colas
  - Modelos de Gestión de inventarios
  - Tª de Decisión y juegos
  - Gestión de Proyectos
  - Fiabilidad, mantenimiento y renovación de equipos

2. Campos de Aplicación

- **Aplicaciones de la PL, Redes, PNL y PMO:**
  - Diseño de nuevos productos
  - Localización de servicios públicos
  - Asignación de medios (recursos) de producción
  - Logística, Distribución y Transporte
  - Planificación del mto de instalaciones
  - Planificación de la agricultura

  - Selección de inversiones (carteras eficientes)

  - Construcción
  - Planificación, programación y control de proyectos

  - Estudios grupos sociales
  - Mezclas de materiales y Enlaces químicos

  - Planificación cirugía compleja
  - Planificación de RR en los Hospitales
  - Programación de medios de publicidad

2. Campos de Aplicación

- **Aplicaciones de otras técnicas como:**
  - Tª colas
  - Tª de inventarios
  - Tª de juegos
  - Simulación
  - …

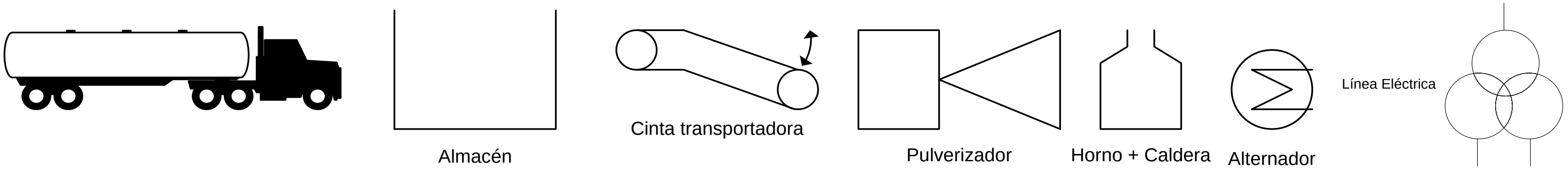
  - En una gran variedad de contextos

3. Conceptos Básicos

- **3.1. Ejemplo "Producción en una planta de generación de energía"**
  - Supongamos una planta termoeléctrica que emplea carbón como combustible.
  - Según leyes de contaminación ('ficticias') → cumplimiento de tasas de emisión máxima permitida

3. Conceptos Básicos

3.1. **Ejemplo: Datos**



- Tasas de emisión máxima permitida:
  - Máx. emisión de Óxido de Azufre: 3000 ppm
  - Máx. emisión de partículas (humo): 12 kg/h
- 2 Tipos de Carbón:
  - Tipo A → C. Duro
    - Quema limpia (0.5 kg/ton)
    - Bajo contenido en S (1800 ppm)
    - Valor térmico, prop. a ud de vapor: 24000 lb/ton
  - Tipo B → C. Blando
    - Produce + humo: 1.0 kg/ton
    - Mayor contenido en S: 3800 ppm
    - Valor térmico: 20000 lb/ton

3. Conceptos Básicos

3.1. **Ejemplo: Datos**

- Sistema de carga (cinta transportadora):
  - Capacidad de:
    - 20 ton/h independiente del tipo de Carbón

- Pulverizadora:
  - Puede manejar a lo sumo:
    - 16 ton/h de C tipo A
    - 24 ton/h de C tipo B
      - … Carbón A es más duro que el B

- Objetivo:
  - *¿Cuál es la máxima producción de energía que puedo conseguir estando dentro de los límites de emisión medio ambientales?*

3. Conceptos Básicos

3.2. El modelo. Variables

- A corto plazo las instalaciones de la planta son fijas
- Lo único que puede controlarse es la cantidad de C que se puede quemar de cada tipo:
  - x_1 cantidad de C de tipo A [ton/h]
  - x_2 cantidad de C de tipo B [ton/h]
- Usualmente las variables de decisión: **actividades**
- El valor que alcanzan x_1 y x_2: **niveles** de las actividades

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Variables → hipótesis 1 y 2**

- **H1: Divisibilidad** "todas las variables pueden asumir cualquier <u>valor real</u>"
  - Generalmente válido para multitud de situaciones reales
    - Ejemplo:
      - Kg/h Carbón tipo A y B
  - Otros casos sólo admiten valores enteros:
    - Programación entera…
    - Ejemplos:
      - Nº de viajes que ha de hacer un camión para trasladar cierta carga de un sitio a otro
      - Nº de equipos informáticos que ha de adquirir una empresa
      - Nº vigilantes

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Variables → hipótesis 1 y 2**

- **H2: No negatividad** "todas las variables son no negativas"
  - Los niveles negativos de actividad rara vez tienen sentido en mundo real.
  - Un nº 'libre' puede expresarse como diferencia de 2 nos positivos:
    - Ejemplo:
      - Compra/venta de bonos: $x = x^{+} - x^{-}$

3. Conceptos Básicos

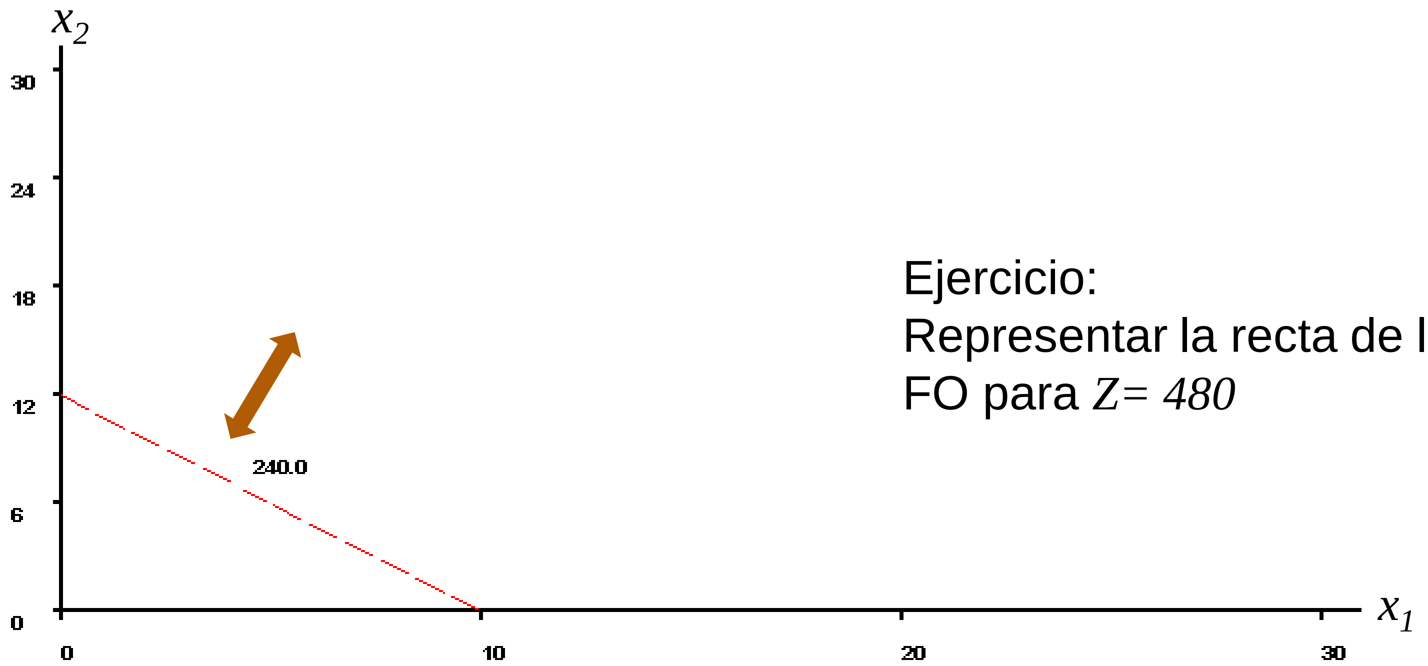
3.2. **Modelo. FO**

- **Objetivo de la gerencia:**
  - Maximizar producción de energía eléctrica
  - Hemos considerado proporcional a producción de vapor
  - → Equivale a encontrar la combinación de combustible que maximice la producción de vapor (respetando límites)
    - Expresión matemática:
      - FO: $\text{Max } Z = 24000\, x_1 + 20000\, x_2$
      - Expresado en [miles de lb/h]: FO: $\text{Max } Z = 24\, x_1 + 20\, x_2$
  - Como vemos la FO es lineal

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. FO**

- **La FO forma una familia de rectas (isoproducción o isocoste) :**



Ejercicio:
Representar la recta de la FO para $Z= 480$

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. FO y Restricciones → hipótesis 3**

- **H3: Linealidad** "todas las relaciones entre variables son lineales"
  - Esto implica:
    - **Proporcionalidad** de las contribuciones de las variables (en el rango de funcionamiento).
    - **Aditividad** de las contribuciones: la contribución total a la FO es la suma de las contribuciones individuales.

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Restricciones**

- Además de las hipótesis anteriores, los niveles de actividad deben cumplir ciertas restricciones.
- **R1: Restricción en la emisión de partículas (humo)**
  - Limitada a 12 [kg/h]:
    - $0.5\,[\text{kg/ton}] \cdot x_1\,[\text{ton/h}] + 1.0\,[\text{kg/ton}] \cdot x_2\,[\text{ton/h}] \leq 12\,[\text{kg/h}]$

-Término independiente
- Coeficiente del 2º miembro
- RHS (Right Hand Side)

- **R2: Restricción en las instalaciones de carga**
  - Limitada a 20 [ton/h]:
    - $x_1\,[\text{ton/h}] + x_2\,[\text{ton/h}] \leq 20\,[\text{ton/h}]$

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Restricciones**

- **R3: Restricción de la capacidad del pulverizador**
  - Es capaz de pulverizar:
    - 16 ton de A en 1 hora ó
    - 24 ton de B en 1 hora
  - Por tanto en 1 h, para x_1 [ton/h] y x_2 [ton/h] se debe cumplir que:
    - $1/16\ [\text{h/ton}] \cdot x_1\ [\text{ton/h}] \cdot 1\ [\text{h}] + 1/24\ [\text{h/ton}] \cdot x_2\ [\text{ton/h}] \cdot 1\ [\text{h}] \leq 1\ [\text{h}]$
  - Es decir ($\cdot$ 24):
    - $1.5 \cdot x_1 + x_2 \leq 24$

3. Conceptos Básicos

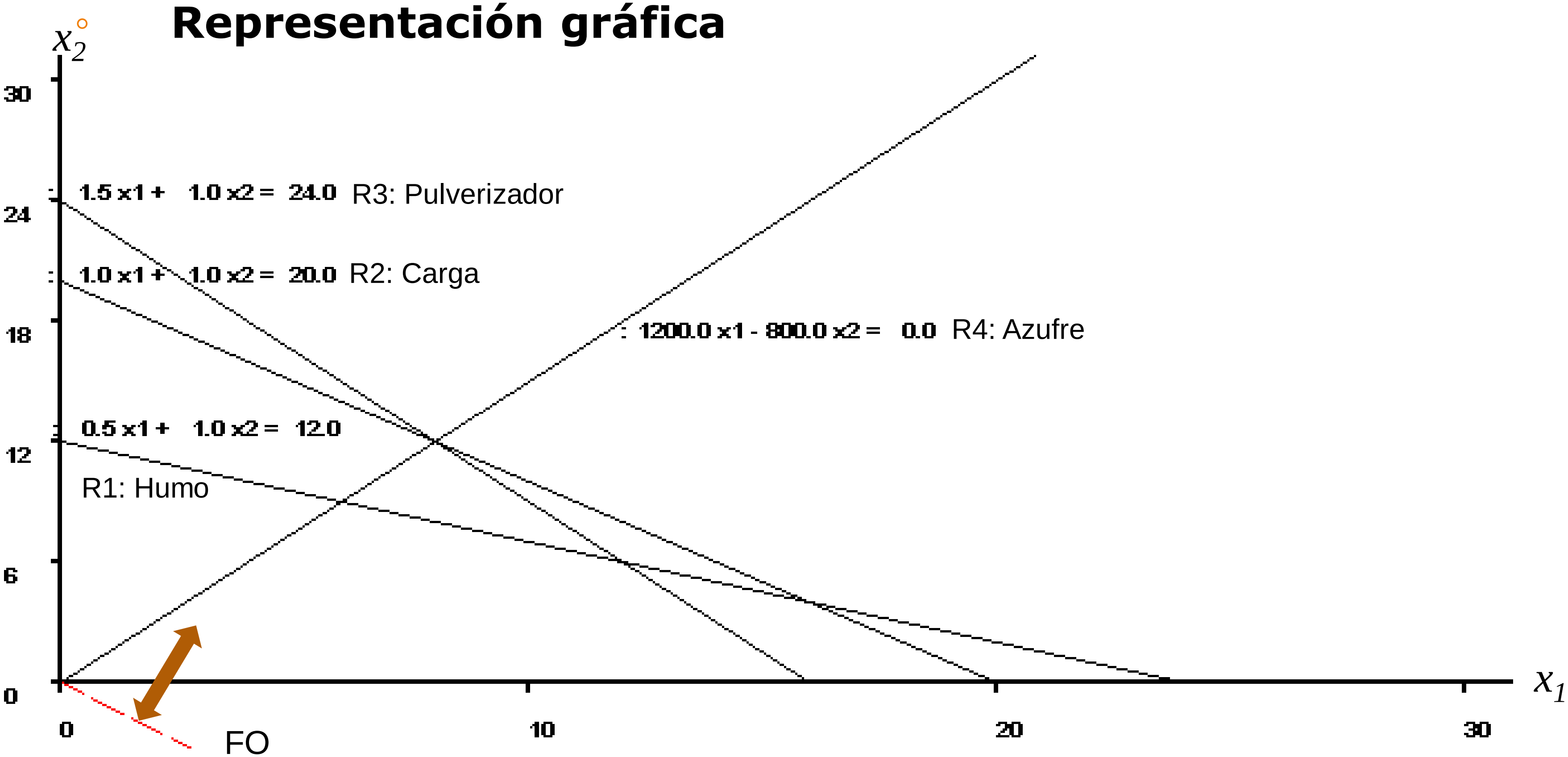
3.2. **Modelo. Restricciones**

- **R4: Restricción en la emisión de dióxido de azufre**
  - Limitada a 3000 ppm
  - Como la combustión es simultánea en cada momento hay una <u>mezcla</u> homogénea de A y B.
  - ¿Qué parte es de cada?
    - $x_1 / (x_1 + x_2)$ es Carbón de tipo A, con una emisión de:
      - $1800 \cdot x_1/(x_1 + x_2)$
    - $x_2 / (x_1 + x_2)$ es Carbón de tipo B, con una emisión de:
      - $3800 \cdot x_2/(x_1 + x_2)$
    - Por tanto: $1800 \cdot x_1/(x_1 + x_2) + 3800 \cdot x_2/(x_1 + x_2) \leq 3000$
    - Despejando: $1200 \cdot x_1 - 800 \cdot x_2 \geq 0$

3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Restricciones**

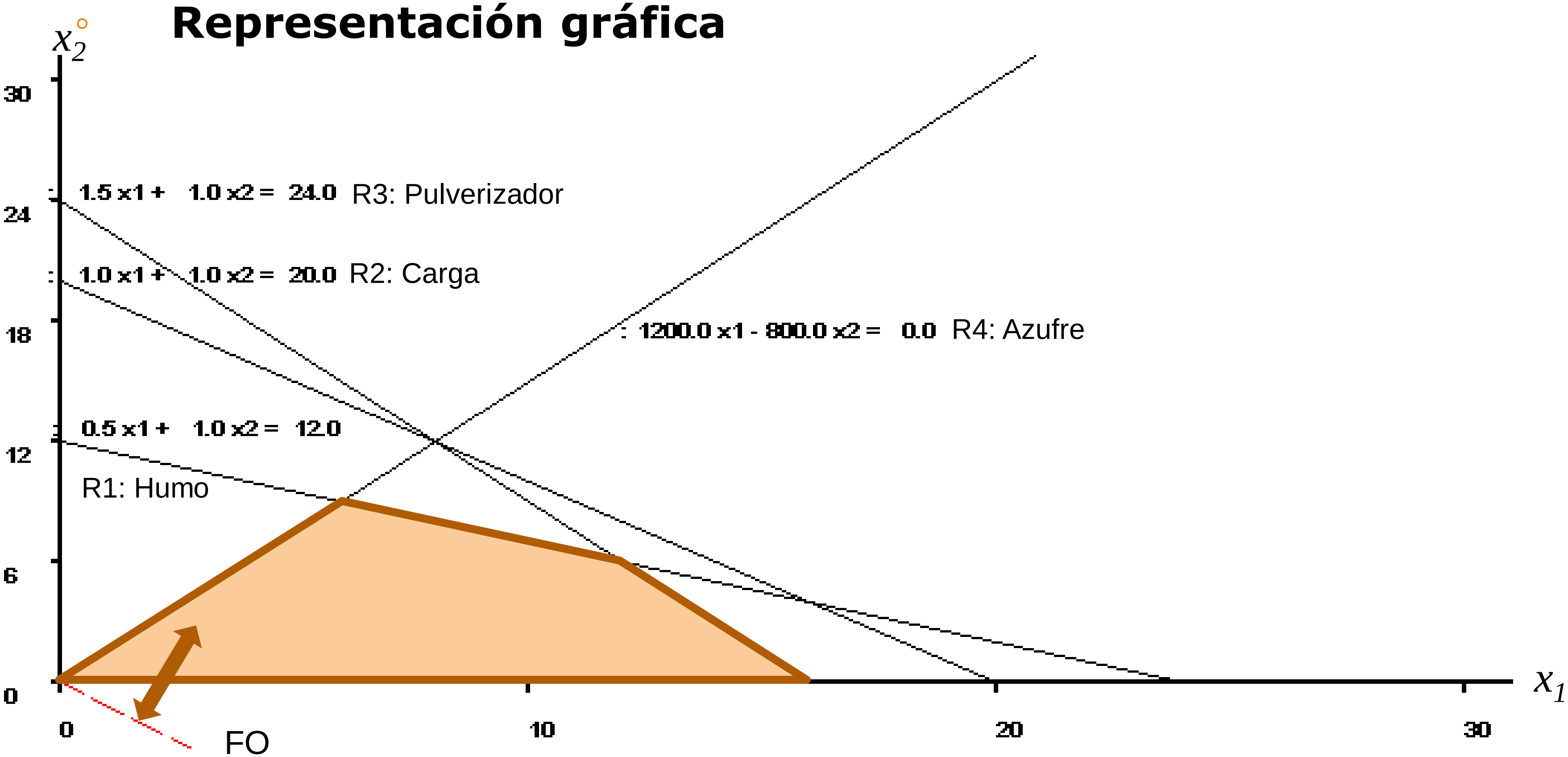
Representación gráfica



3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Restricciones**

Representación gráfica



3. Conceptos Básicos

3.2. **Modelo. Formulación → hipótesis 4**

Ejemplo

$$Max: 24x_1 + 20x_2$$

s.a.

$$0.5x_1 + 1x_2 \leq 12 \quad [\text{Humo}]$$

$$1.0x_1 + 1.0x_2 \leq 20 \quad [\text{Carga}]$$

$$1.5x_1 + 1x_2 \leq 24 \quad [\text{Pulver.}]$$

$$1200x_1 - 800x_2 \geq 0 \quad [\text{Azufre}]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulación General del problema

$$Max: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\text{Parámetros:} \{c_j, a_{ij}, b_i\}$$

- **H4: Certidumbre:** "Se asume que todos los parámetros del modelo son constantes conocidas"

3. Conceptos Básicos

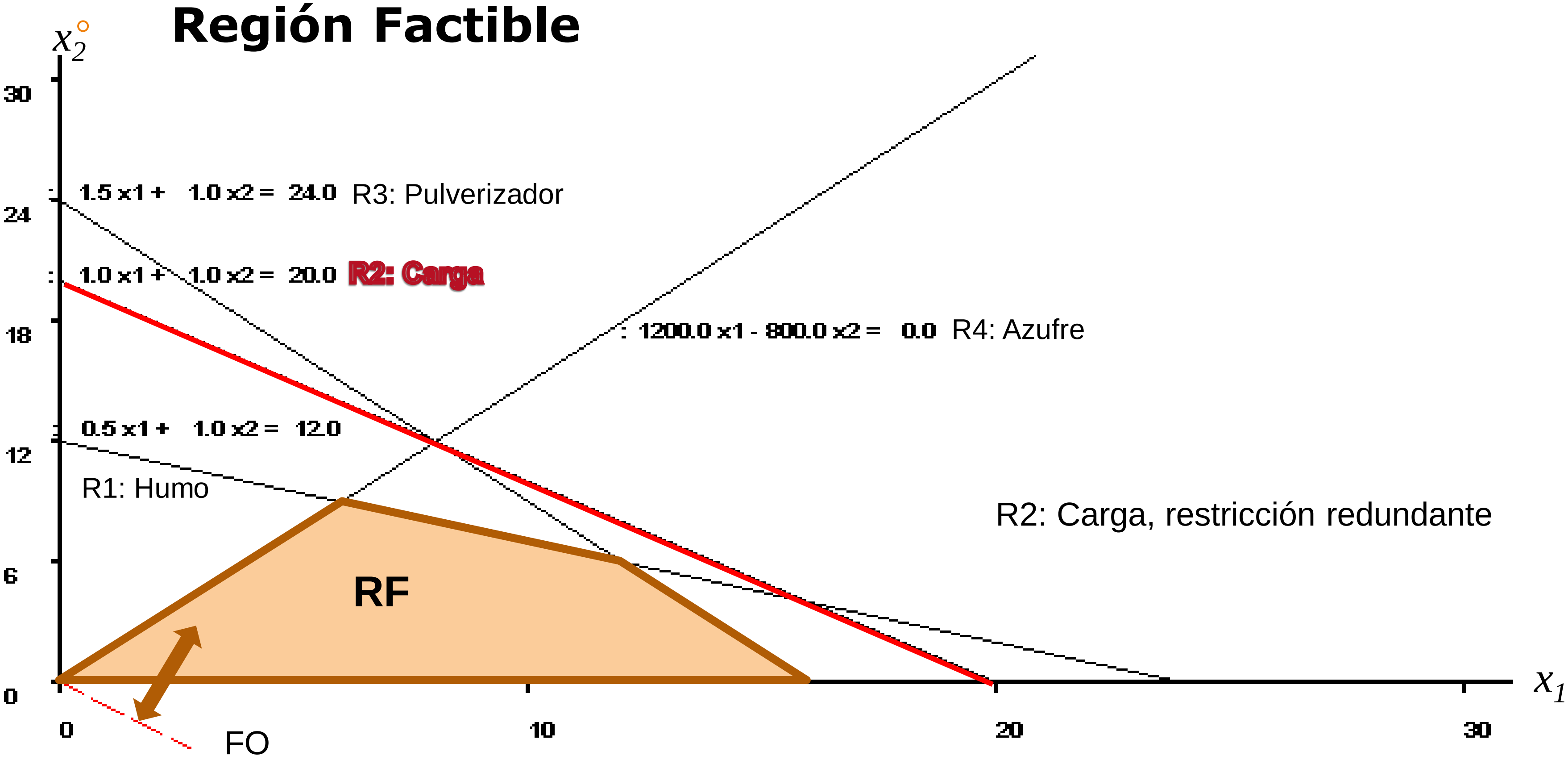
3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

- ### **Región Factible (RF)**
  - Una **solución** es **admisible** (<u>factible</u>) si la combinación de niveles de actividad satisface de forma simultánea todas las restricciones (incluyendo la de no negatividad)
  - El **conjunto** de todas las soluciones factibles forma la <u>región factible</u>
  - Observaciones:
    - La RF **no depende de la FO**
    - Si la frontera de una restricción no tiene puntos en común con la región factible → **restricción redundante**, se puede eliminar

3. Conceptos Básicos

3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

Región Factible



3. Conceptos Básicos

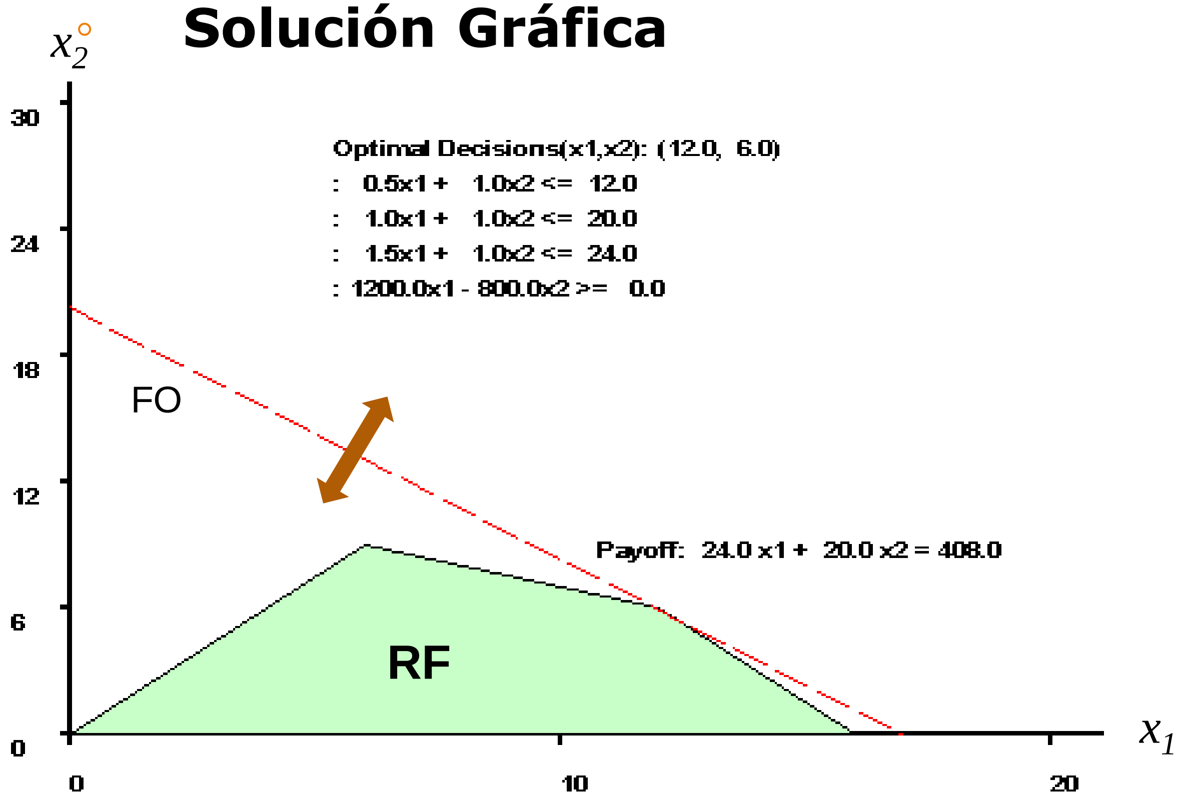
3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

- **Solución Gráfica**
  - Consiste en determinar la recta de la FO más 'alta' que contenga al menos una solución factible.
  - En nuestro ejemplo viene determinado por las rectas de las restricciones R1 y R3 (humo y pulverizador)
    - $0.5 \cdot x_1 + x_2 \leq 12$
    - $1.5 \cdot x_1 + x_2 \leq 24$
  - Ejercicio:
    - Determinar los niveles de actividad en el óptimo: $x^* = x_1^*,\ x_2^*$
    - Determinar el valor óptimo de la FO: Z^*

3. Conceptos Básicos

3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

Solución Gráfica



$x_1^* = 12$
$x_2^* = 6$
$Z^* = 408$

3. Conceptos Básicos

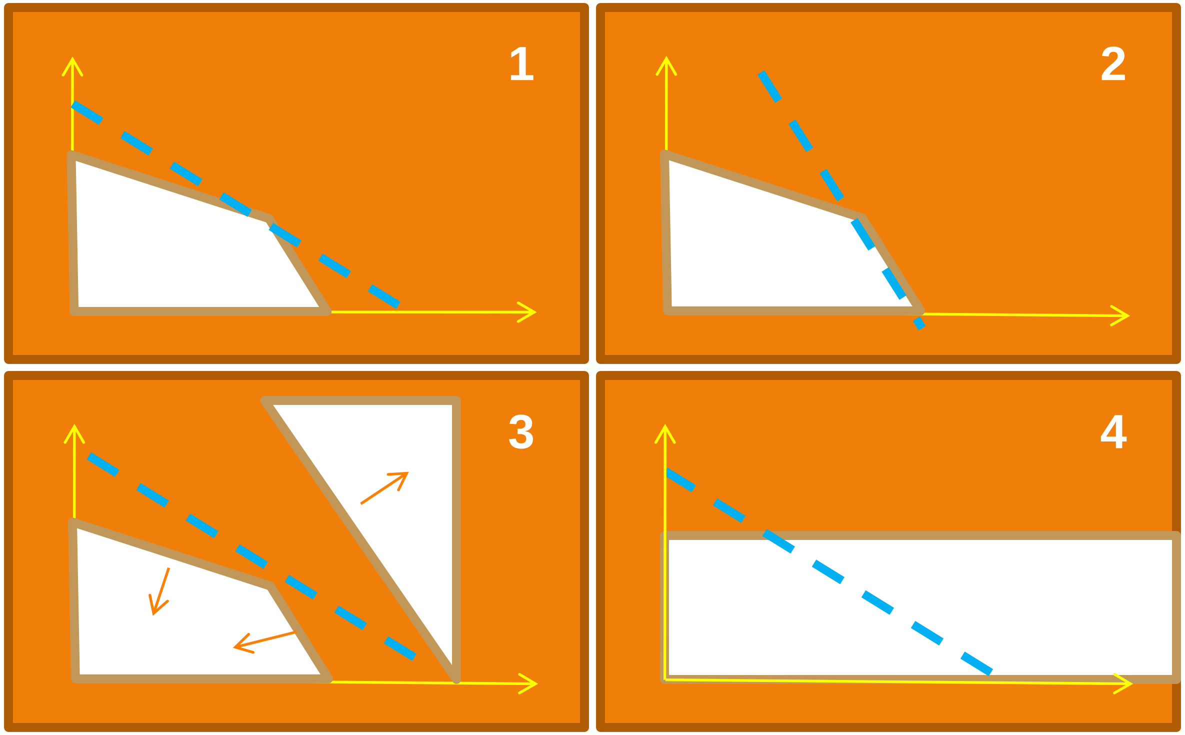
3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

- **Solución Gráfica**
  - Observaciones:
    - Desde punto de vista intuitivo parece lógico que el óptimo esté situado en
      - un punto extremo
      - Lado o arista del polígono (sol. ópt. alternativas)
- **Casos:**
  - **1. Solución única**
  - **2. Soluciones alternativas (infinitas)**
  - **3. No hay solución**
  - **4. Solución no acotada**

3. Conceptos Básicos

3.3. **Región Factible y Solución Gráfica**

- **Casos:**



3. Conceptos Básicos

3.4. **Variables de Holgura**

- Para cualquier solución factible hay una diferencia entre el valor que toma la restricción (para dicha solución) y el coeficiente b_i del segundo miembro.
- En el ejemplo:
  - Las restricciones R1 y R3 se cumplen para la igualdad, ya que la solución es óptima es la intersección de ambas rectas.
  - Veamos R2 y R4 para $x^* = (12, 6)$:
    - R2: $x_1 + x_2 \leq 20 \rightarrow 12 + 6 = 18 \leq 20 \rightarrow$ Holgura de 2 unidades de carga medida en [ton/h].
    - R4: $1200\, x_1 - 800\, x_2 \geq 0 \rightarrow 1200 \cdot 12 - 800 \cdot 6 = 14400 - 4800 = 9600 \geq 0 \rightarrow$ Holgura de 9600 unidades (difícil interpretación física)

3. Conceptos Básicos

3.4. **Variables de Holgura**

- A menudo es útil mostrar explícitamente esa diferencia, mediante una variable adicional en cada restricción → Holgura.
  - (+) Holgura: para desigualdades del tipo ≤
  - (-) Exceso: para desigualdades del tipo ≥
- En nuestro ejemplo:

$$Max: 24x_1 + 20x_1$$

s.a.

$$0.5x_1 + 1x_2 + h_1 = 12 \quad \text{[Humo]}$$

$$1.0x_1 + 1.0x_2 + h_2 = 20 \quad \text{[Carga]}$$

$$1.5x_1 + 1x_2 + h_3 = 24 \quad \text{[Pulver.]}$$

$$1200x_1 - 800x_2 - h_4 = 0 \quad \text{[Azufre]}$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0$$

3. Conceptos Básicos

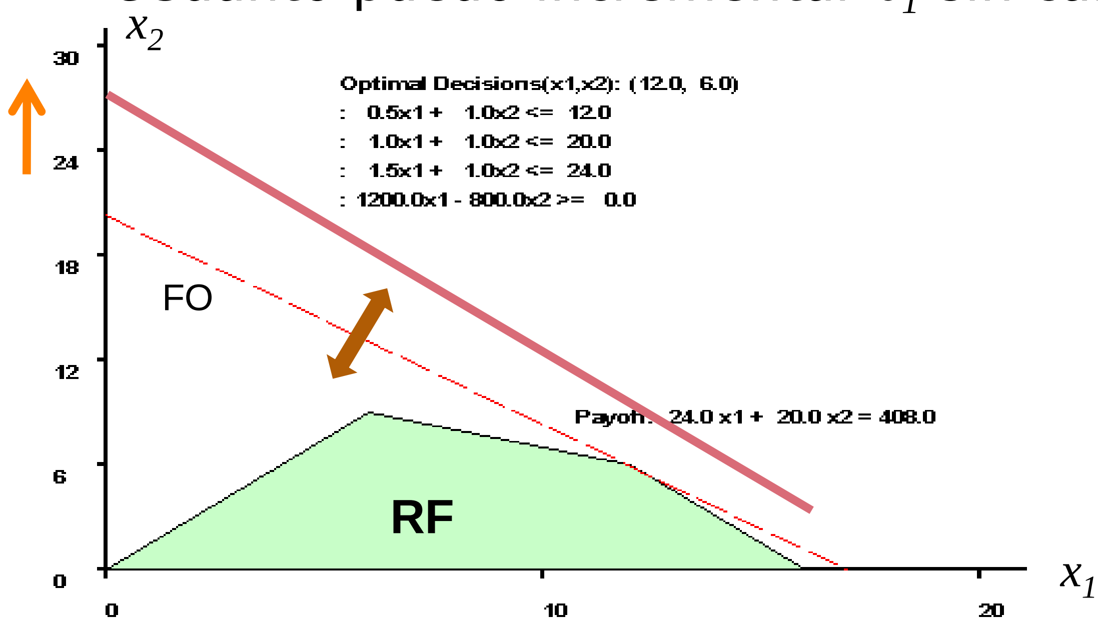
3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS)**

- ¿Cuánto se pueden variar los parámetros del modelo sin que varíe la solución?
- ¿Cómo responde el modelo al variar los coeficientes?
- Tipos de análisis:
  - AS de los coeficiente de la FO (c_i ‘s)
  - AS de los 2^os^ miembros de las restricciones (b_i ‘s)
- <u>AS de los coeficientes de la FO (c_i ‘s)</u>
- Al variar los c_i ‘s varía la pendiente de la recta de la FO.
- ¿Cuánto puede variar un coeficiente $\underline{c_i}$ sin que varíe la solución?

3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (c_i ‘s)

- En nuestro ejemplo:
- Recordemos que los $\underline{c_j}$ representaban las lb de vapor producidas en [lb/ton]
- Si c_1 = 24 (·1000) para el C tipo A
- ¿Cuánto puedo incrementar c_1 sin cambiar de solución?



$x_1{}^* = 12$
$x_2{}^* = 6$
$Z^* = 408$

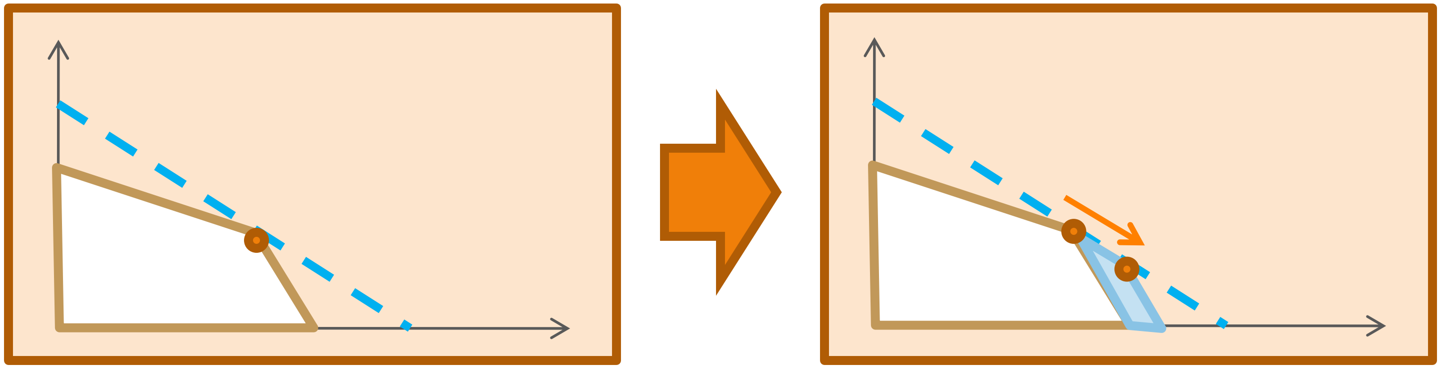
→ Hasta que FO sea paralela a R3 pulverizador

3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (b_i 's)

- <u>AS de los 2os miembros de las restricciones (b_i 's)</u>

- ¿Qué ocurre con la solución óptima cuando se varía el 2º miembro en una restricción?
- Las restricciones vienen determinadas por rectas
- Al variar un b_i la recta se desplaza de forma paralela

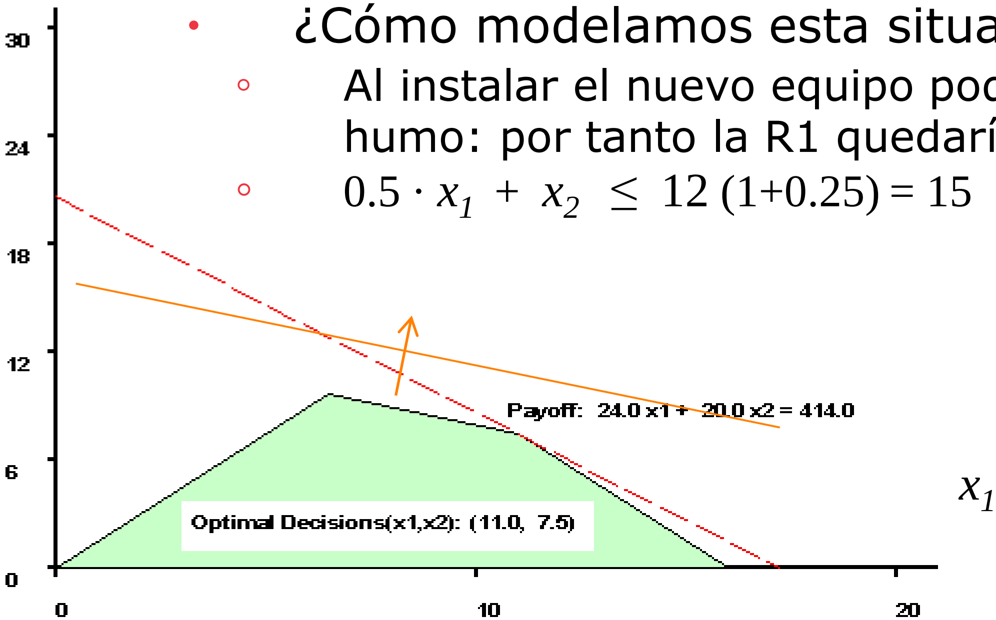


3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (b_i 's)

- <u>AS de los 2^os^ miembros de las restricciones (b_i 's)</u>

- En el ejemplo:
  - Supongamos que la gerencia instala un equipo que puede reducir emisión de humos un 25%.
  - ¿Cómo modelamos esta situación?
    - Al instalar el nuevo equipo podemos producir un 25% más de humo: por tanto la R1 quedaría:
    - $0.5 \cdot x_1 + x_2 \leq 12\,(1+0.25) = 15 \rightarrow 0.5 \cdot x_1 + x_2 \leq 15$



Vamos a estudiar el **incremento unitario** de 12 a 13

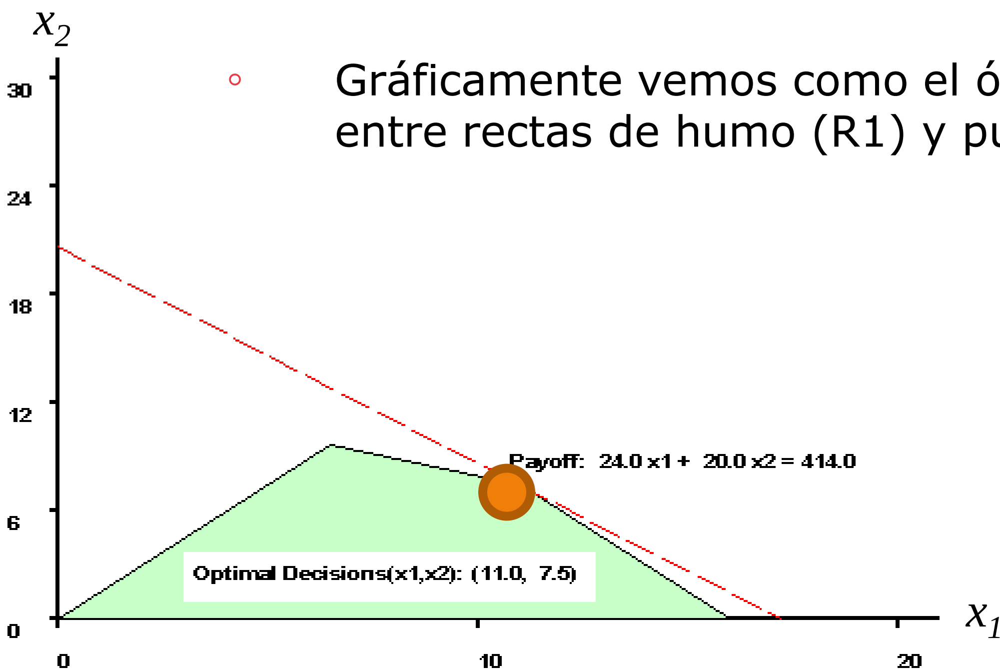
3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (b_i ‘s)

- AS de los 2os miembros de las restricciones (b_i ‘s)

- En el ejemplo:

  - Gráficamente vemos como el óptimo sigue en las intersección entre rectas de humo (R1) y pulverizador (R3)



$$\text{de R1'}: 0.5x_1 + x_2 = 13$$

$$\text{de R3}: 1.5x_1 + x_2 = 24$$

$$x_1^* = 24 - 13 = 11$$

$$x_2^* = 13 - 0.5x_1 = 13 - 5.5 = 7.5$$

$$Z^* = 24 \cdot 11 + 20 \cdot 7.5 = 264 + 150 = 414$$

3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (b_i 's)

- AS de los 2os miembros de las restricciones (b_i 's)

- En el ejemplo:

  - Si observamos el incremento de la FO:

$$Z_0^* = 408 \Rightarrow Z_1^* = 414$$

$$\Delta Z(b_1) = 414 - 408 = 6$$

De otra manera:

$$x_1 \text{ pasa de } 12 \text{ a } 11 \Rightarrow \downarrow 1\text{ud} \Rightarrow \Delta Z(x_1) = -24$$

$$x_2 \text{ pasa de } 6 \text{ a } 7.5 \Rightarrow \uparrow 1.5\text{uds} \Rightarrow \Delta Z(x_2) = 1.5 \cdot 20 = 30$$

$$\Delta Z = \Delta Z(x_1) + \Delta Z(x_2) = -24 + 30 = 6$$

Def: la mejora en el valor óptimo de la FO debido a incremento unitario en un b_i se denomina **Coste de Oportunidad (COP)** o **Precio Sombra (PS)** o **Precio Dual** de la restricción

3. Conceptos Básicos

3.5. **Análisis de Sensibilidad (AS).** (b_i 's)

- AS de los 2os miembros de las restricciones (b_i 's)
- Observaciones/Cuestiones:
  - ¿Cuál es COP de una restricción que no se verifica estrictamente en la solución óptima?
  - Si una parte del recurso no se utiliza (h>0) → las cantidades adicionales de recurso no tienen valor, sólo incrementan h → el PS de dicha restricción es cero.
  - De la misma manera si h=0 el COP de dicha restricción es distinto de cero.

Si estamos en Z*:

•si h>0 en una restricción ←→ COP =0
•si h=0 en una restricción ←→ COP <>0

  - **¿Hasta qué punto me interesa aumentar un recurso?**
  - Los **COP** indican **información valiosa a la gerencia**

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Resolución gráfica sólo válida para 2(3?) variables
- Problemas mayores → procedimiento matemático (alg. Simplex Tema 2)
- Problemas reales → Software de optimización
  - WinQSB (Quantitative Systems for Business) Académico
  - LINGO → Modelado mediante lenguaje
  - EXCEL → Solver
  - **Libre !!:** GLPK Lab (GLPSOL)

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Ejemplo: Resolución del Ejemplo con LINGO

```
MODEL:
!EJEMPLO1: LA CAPACIDAD DE UNA PLANTA GENERADORA DE
ENERGÍA Y CONTROL DE LA CONTAMINACIÓN;
[OBJ] MAX = 24*X1 + 20*X2;
[HUMO] 0.5*X1 + X2 <= 12;
[CARGA] X1 + X2 <= 20;
[PULVERIZADOR] 1.5*X1 + X2 <= 24;
[AZUFRE] 1200*X1 - 800*X2 >=0;
END
```

- * para multiplicación
- ; para final de sentencia, comentarios, FO y restricciones
- Comentarios comienzan con !
- Identificación de FO y restricciones en []

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Ejemplo: **Resultados**

```
Global optimal solution found.
 Objective value:                              408.0000
 Total solver iterations:                             2


                      Variable           Value        Reduced Cost
                            X1        12.00000            0.000000
                            X2        6.000000            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           OBJ        408.0000            1.000000
                          HUMO        0.000000            6.000000
                         CARGA        2.000000            0.000000
                   PULVERIZADOR       0.000000            14.00000
                        AZUFRE        9600.000            0.000000
```

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Ejemplo: Información indicada
  - Variables:
    - Valor óptimo de la FO
    - Nivel de actividad de cada variable
    - **Coste reducido**, en este caso es 0 para ambas variables

Def: Coste Reducido de una variable

Representa la cantidad (incremento) que debe mejorarse la FO para que la variable tome un valor <>0 en la solución óptima

También se interpreta como el <u>coste penal</u> por introducir una variable en la solución

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Ejemplo: Información indicada
  - Variables de holgura → Slack o Surplus
  - Coste de Oportunidad (COP)→ Precio Sombra → Dual Price
  - Observar que:

Si estamos en Z*:

•si h>0 en una restricción ←→ COP =0
•si h=0 en una restricción ←→ COP <>0

3. Conceptos Básicos

3.6. **Resolución de modelos con Software de Optimización**

- Ejemplo: **Análisis de Sensibilidad**
  - De los coef. de la FO (c_i 's) → incrementos y decrementos
  - De los segundos miembros de las restricciones (b_i 's) → rango en que se mantiene constante el COP.

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	24.00000	6.000000	14.00000
X2	20.00000	28.00000	4.000000

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
HUMO	12.00000	4.000000	4.000000
CARGA	20.00000	INFINITY	2.000000
PULVERIZADOR	24.00000	4.000000	6.000000
AZUFRE	0.0	9600.000	INFINITY