Lógica Informática

Formas normales proposicionales

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Formas normales

Una fórmula atómica es una variable proposicional

Un literal es una fórmula atómica (literal positivo) o la negación de una fórmula atómica (literal negativo)

Complementario de un literal: $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p \\ p & \text{si } L = \neg p \end{cases}$

Una fórmula está en forma normal conjuntiva, FNC, si es una conjunción de disyunciones de literales: $(L_1^1 \vee \cdots \vee L_{n_1}^1) \wedge \cdots \wedge (L_1^m \vee \cdots \vee L_{n_m}^m)$ (siendo m, n_1, ..., $n_m \geq 1$)

Ejemplo: $(p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)$

Una fórmula está en forma normal disyuntiva, FND, si es una disyunción de conjunciones de literales: $(L_1^1 \wedge \cdots \wedge L_{n_1}^1) \vee \cdots \vee (L_1^m \wedge \cdots \wedge L_{n_m}^m)$ (siendo m, n_1, ..., $n_m \geq 1$)

Ejemplo: $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg r \wedge p) \vee (q \wedge p)$

Ejercicio

Determinar si las siguientes fórmulas están o no en FNC, o en FND.

- $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge s$
- $p \vee q \vee s$
- $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow s)$
- $t \vee q \vee (r \wedge s)$

Equivalencias

Una FNC (respectivamente, FND) de una fórmula, F es una fórmula equivalente a F que está en FNC (respectivamente, FND). No son únicas.

Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: si en una fórmula, F, se sustituye una de sus subfórmulas, G, por una fórmula equivalente, G', entonces la fórmula resultante, F', es equivalente a F.

Equivalencias aplicables para la obtención de formas normales:

- Eliminación del bicondicional:
  $F \leftrightarrow G \equiv_1 (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
  $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv_2 \neg(F \rightarrow G) \vee \neg(G \rightarrow F)$
- Eliminación del condicional:
  $F \rightarrow G \equiv_3 \neg F \vee G$
  $\neg(F \rightarrow G) \equiv_4 F \wedge \neg G$
- Eliminación de la doble negación:
  $\neg\neg F \equiv_5 F$
- Leyes de De Morgan:
  $\neg(F \wedge G) \equiv_6 \neg F \vee \neg G$
  $\neg(F \vee G) \equiv_7 \neg F \wedge \neg G$
- Propiedad distributiva:
  $F \wedge (G \vee H) \equiv_8 (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
  $F \vee (G \wedge H) \equiv_9 (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
  $(G \vee H) \wedge F \equiv_{10} (G \wedge F) \vee (H \wedge F)$
  $(G \wedge H) \vee F \equiv_{11} (G \vee F) \wedge (H \vee F)$

Satisfacibilidad y validez

Una fórmula, F, es satisfacible si en cualquier FND de F hay al menos una conjunción de literales que no contiene un literal y su complementario. Cada conjunción de literales de la FND proporciona modelos de la fórmula.

Una fórmula, F, es tautología si en cualquier FNC de F todas las disyunciones de literales contienen un literal y su complementario. Cada disyunción de literales de la FNC que no sea de esa forma proporciona contramodelos de la fórmula.

Ejemplo

Cálculo de una FND y una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \\
\equiv_1 & (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p) \rightarrow r \\
\equiv_3 & \neg((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)) \lor r \\
\equiv_3 & \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) \lor r \\
\equiv_6 & (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p)) \lor r \\
\equiv_7 & ((\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg p)) \lor r \\
\equiv_5 & ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)) \lor r \qquad \Longrightarrow \qquad \text{FND} \\
\equiv_9 & (((p \land \neg q) \lor q) \land ((p \land \neg q) \lor \neg p)) \lor r \\
\equiv_{11} & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \land ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p))) \lor r \\
\equiv_{11} & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor r) \land (((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor r) \\
\equiv_{11} & (((p \lor q) \lor r) \land ((\neg q \lor q) \lor r)) \land (((p \lor \neg p) \lor r) \land ((\neg q \lor \neg p) \lor r)) \\
\equiv_{11} & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor q \lor r) \land (p \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{FNC}
\end{array}
$$

Modelos (FND):

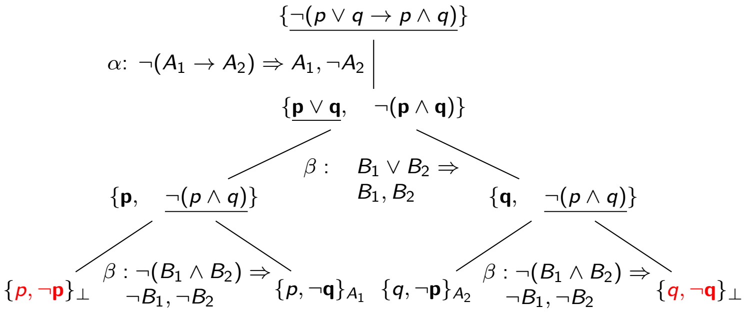
$I_1(p) = 1, I_1(q) = I_1(r) = 0$
$I_2(p) = 1, I_2(q) = 0$ e $I_2(r) = 1$
$I_3(p) = 0, I_3(q) = 1$ e $I_3(r) = 0$
$I_4(p) = 0, I_4(q) = 1 = I_4(r) = 1$
$I_5(p) = I_5(q) = 0$ e $I_5(r) = 1$
$I_6(p) = I_6(q) = I_6(r) = 1$

Contramodelos (FNC):

$I_7(p) = I_7(q) = I_7(r) = 0$
$I_8(p) = I_8(q) = 1$ e $I_8(r) = 0$

Tableros y formas normales

FNC de $F = p \lor q \to p \land q$ (y FND de $\neg F$)



FNC de F: $(\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$ (FND de $\neg F$: $(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$)

Contramodelos de F (modelos de $\neg F$):

$$I_1(p) = 1 \text{ e } I_1(q) = 0$$
$$I_2(p) = 0 \text{ e } I_2(q) = 1$$

Ejercicios

1. Dada la fórmula $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$
   1.1 decidir si es o no satisfacible, proporcionando, en su caso, todos los modelos de la misma.
   1.2 decidir si es o no tautología, proporcionando, en su caso, todos los contramodelos de la misma.
2. Dada la fórmula $(p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q)$
   2.1 Obtener, usando tableros semánticos, una FND y una FNC
   2.2 Decidir, utilizando formas normales, si es insatisfacible o una tautología.

Ejercicios

Dada la siguiente tabla de verdad de las fórmulas proposicionales F_1 y F_2, en las que solo ocurren las variables proposicionales p, q y r,

$$
\begin{array}{lll|l|l}
I_1(p)=0 & I_1(q)=0 & I_1(r)=0 & I_1(F_1)=0 & I_1(F_2)=0 \\
I_2(p)=0 & I_2(q)=0 & I_2(r)=1 & I_2(F_1)=1 & I_2(F_2)=0 \\
I_3(p)=0 & I_3(q)=1 & I_3(r)=0 & I_3(F_1)=1 & I_3(F_2)=1 \\
I_4(p)=0 & I_4(q)=1 & I_4(r)=1 & I_4(F_1)=1 & I_4(F_2)=1 \\
I_5(p)=1 & I_5(q)=0 & I_5(r)=0 & I_5(F_1)=1 & I_5(F_2)=1 \\
I_6(p)=1 & I_6(q)=0 & I_6(r)=1 & I_6(F_1)=0 & I_6(F_2)=0 \\
I_7(p)=1 & I_7(q)=1 & I_7(r)=0 & I_7(F_1)=0 & I_7(F_2)=1 \\
I_8(p)=1 & I_8(q)=1 & I_8(r)=1 & I_8(F_1)=1 & I_8(F_2)=1
\end{array}
$$

se pide razonar directamente a partir de ella para:

- Obtener una FND de F_1 y una FNC de F_2.
- Decidir si $\{F_1\} \models F_2 \to q \vee r$