

Lógica Informática

Tableros semánticos proposicionales

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Literales, fórmulas α y β

Un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Fórmula tipo α	Componentes	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

Fórmula tipo β	Componentes	
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

Propiedades

Doble negación:

$$I \models \neg\neg F \quad \Longleftrightarrow \quad I \models F$$

Dada una fórmula, F , de tipo α con componentes F_1 y F_2 :

$$I \models F \quad \Longleftrightarrow \quad I \models F_1 \text{ e } I \models F_2$$

Dada una fórmula, F , de tipo β con componentes F_1 y F_2 :

$$I \models F \quad \Longleftrightarrow \quad I \models F_1 \text{ ó } I \models F_2$$

Construcción de un tablero semántico

Dato de partida: conjunto de fórmulas, S

Objetivo: determinar si S es consistente

Procedimiento:

1. Construir un árbol con S como único nodo
2. Repetir mientras haya hojas en el árbol que no estén etiquetadas
 - 2.1 Elegir una hoja, H , del árbol que no esté etiquetada
 - 2.2 Si H contiene una fórmula, F , y a su negación, $\neg F$: etiquetar H como cerrada (esto es H_{\perp})
 - 2.3 en caso contrario, si todas las fórmulas de H o están marcadas como usadas o son literales: etiquetar H como abierta (esto es H_A)
 - 2.4 en caso contrario: elegir una fórmula, F , de H que no esté marcada como usada y no sea un literal, marcarla como usada y
 - 2.4.1 Si F es de la forma $\neg\neg G$: añadir $H \cup \{G\}$ como hijo de H
 - 2.4.2 en caso contrario, si F es de tipo α con componentes F_1 y F_2 : añadir $H \cup \{F_1, F_2\}$ como hijo de H
 - 2.4.3 en caso contrario, si F es de tipo β con componentes F_1 y F_2 : añadir $H \cup \{F_1\}$ y $H \cup \{F_2\}$ como hijos de H

Ejemplo (notación extendida)

$$\frac{\{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)_1\}}{\alpha_1: A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_1, A_2} \left| \right. \frac{\left\{ \frac{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)_1}{p \vee q_2}, \frac{\neg p \wedge \neg q_3}{\neg p \wedge \neg q_3} \right\}}$$

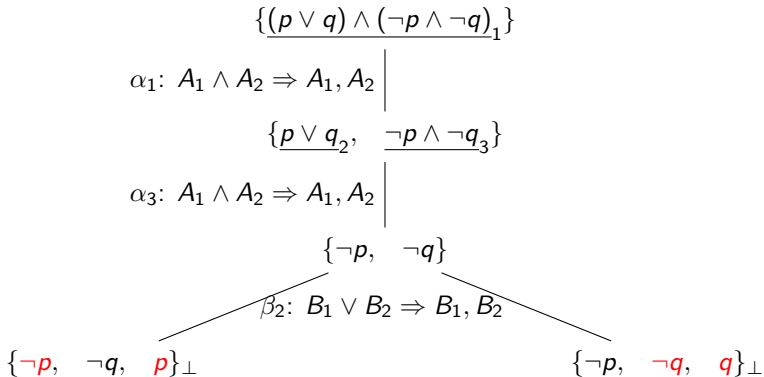
$$\alpha_3: A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_1, A_2 \left| \right. \left\{ \frac{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)_1}{p \vee q_2}, \frac{\neg p \wedge \neg q_3}{\neg p \wedge \neg q_3}, \neg p, \neg q \right\}$$

$$\beta_2: B_1 \vee B_2 \Rightarrow B_1, B_2$$

$$\left\{ \frac{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)_1}{\neg p \wedge \neg q_3}, \neg p, \neg q, \frac{p \vee q_2}{p} \right\}_{\perp}$$

$$\left\{ \frac{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)_1}{\neg p \wedge \neg q_3}, \neg p, \neg q, \frac{p \vee q_2}{q} \right\}_{\perp}$$

Ejemplo (notación reducida)



Modelos por tableros

Tablero completo: Todas las hojas están etiquetadas

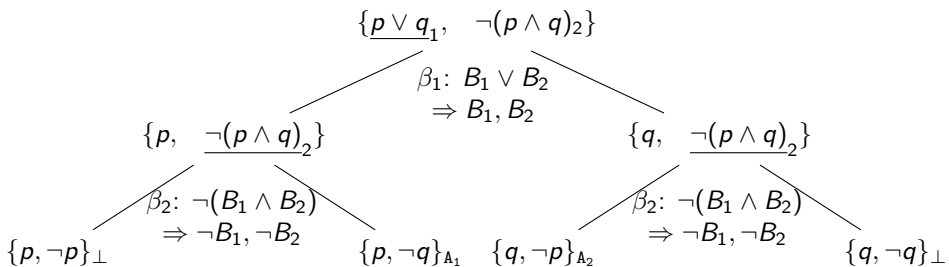
Tablero cerrado: Todas las hojas están etiquetadas como cerradas

Un conjunto de fórmulas, S , es inconsistente si y sólo si S tiene un tablero completo cerrado.

Un conjunto de fórmulas, S , es consistente si y sólo si S tiene un tablero (no necesariamente completo) con alguna hoja etiquetada como abierta.

Una interpretación, I , es modelo de un conjunto de fórmulas, S , si y sólo si I es modelo de los literales contenidos en alguna de las hojas de un tablero completo de S .

Ejemplo



Modelos de $\{p \vee q, \neg(p \wedge q)\}$:

$$I_1(p) = 1, I_1(q) = 0$$

$$I_2(p) = 0, I_2(q) = 1$$

Ejercicio

Determinar, por tableros semánticos, si son o no ciertas las siguientes afirmaciones:

- 1 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ es tautología.
- 2 $\{p \rightarrow (q \leftrightarrow r), r\} \models r \rightarrow (p \wedge q)$
- 3 $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$

Ejercicios

- 1 Consideremos la fórmula proposicional

$$F = \neg(p \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg r)$$

Demostrar, mediante tableros semánticos, que F no es tautología y obtener todos sus contramodelos a partir del tablero construido.

- 2 Consideremos el conjunto de fórmulas proposicionales

$$S = \{p \wedge q, q \rightarrow \neg(\neg r \rightarrow s), (\neg p \rightarrow r) \wedge s\}$$

Demostrar, mediante tableros semánticos, que S es consistente y obtener todos sus modelos a partir del tablero construido.

- 3 Decidir mediante tableros semánticos si la siguiente afirmación es o no cierta. En caso negativo proporcionar un contramodelo.

$$\models (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$