Lógica Informática

Tableros semánticos proposicionales

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Literales, fórmulas α y β

Un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Fórmula tipo α	Componentes	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

Fórmula tipo β	Componentes	
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

Propiedades

Doble negación:

$$I \models \neg\neg F \qquad \Longleftrightarrow \qquad I \models F$$

Dada una fórmula, F, de tipo α con componentes F_1 y F_2:

$$I \models F \qquad \Longleftrightarrow \qquad I \models F_1 \text{ e } I \models F_2$$

Dada una fórmula, F, de tipo β con componentes F_1 y F_2:

$$I \models F \qquad \Longleftrightarrow \qquad I \models F_1 \text{ ó } I \models F_2$$

Construcción de un tablero semántico

Dato de partida: conjunto de fórmulas, S
Objetivo: determinar si S es consistente
Procedimiento:

1. Construir un árbol con S como único nodo
2. Repetir mientras haya hojas en el árbol que no estén etiquetadas
   - 2.1 Elegir una hoja, H, del árbol que no esté etiquetada
   - 2.2 Si H contiene una fórmula, F, y a su negación, $\neg F$: etiquetar H como cerrada (esto es $H_\perp$)
   - 2.3 en caso contrario, si todas las fórmulas de H o están marcadas como usadas o son literales: etiquetar H como abierta (esto es $H_{\mathtt{A}}$)
   - 2.4 en caso contrario: elegir una fórmula, F, de H que no esté marcada como usada y no sea un literal, marcarla como usada y
     - 2.4.1 Si F es de la forma $\neg\neg G$: añadir $H \cup \{G\}$ como hijo de H
     - 2.4.2 en caso contrario, si F es de tipo α con componentes F_1 y F_2: añadir $H \cup \{F_1, F_2\}$ como hijo de H
     - 2.4.3 en caso contrario, si F es de tipo β con componentes F_1 y F_2: añadir $H \cup \{F_1\}$ y $H \cup \{F_2\}$ como hijos de H

Ejemplo (notación extendida)

$$\{\underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1\}$$

α_1: $A_1 \land A_2 \Rightarrow A_1, A_2$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1, & \\ \mathbf{p} \lor \mathbf{q}_2, & \underline{\neg \mathbf{p} \land \neg \mathbf{q}}_3 \end{array} \right\}$$

α_3: $A_1 \land A_2 \Rightarrow A_1, A_2$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1, & & & \\ \underline{p \lor q}_2, & \underline{\neg p \land \neg q}_3, & \neg \mathbf{p}, & \neg \mathbf{q} \end{array} \right\}$$

β_2: $B_1 \lor B_2 \Rightarrow B_1, B_2$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1, & & & \underline{p \lor q}_2, \\ \underline{\neg p \land \neg q}_3, & \neg p, & \neg q, & \mathbf{p} \end{array} \right\}_\perp \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1, & & & \underline{p \lor q}_2, \\ \underline{\neg p \land \neg q}_3, & \neg p, & \neg q, & \mathbf{q} \end{array} \right\}_\perp$$

Ejemplo (notación reducida)

$$\{\underline{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}_1\}$$

$$\alpha_1\colon\ A_1 \land A_2 \Rightarrow A_1, A_2$$

$$\{\underline{p \lor q}_2,\quad \underline{\neg p \land \neg q}_3\}$$

$$\alpha_3\colon\ A_1 \land A_2 \Rightarrow A_1, A_2$$

$$\{\neg p,\quad \neg q\}$$

$$\beta_2\colon\ B_1 \lor B_2 \Rightarrow B_1, B_2$$

$$\{\neg p,\quad \neg q,\quad p\}_\perp \qquad\qquad \{\neg p,\quad \neg q,\quad q\}_\perp$$

Modelos por tableros

Tablero completo: Todas las hojas están etiquetadas

Tablero cerrado: Todas las hojas están etiquetadas como cerradas

Un conjunto de fórmulas, S, es inconsistente si y sólo si S tiene un tablero completo cerrado.

Un conjunto de fórmulas, S, es consistente si y sólo si S tiene un tablero (no necesariamente completo) con alguna hoja etiquetada como abierta.

Una interpretación, I, es modelo de un conjunto de fórmulas, S, si y sólo si I es modelo de los literales contenidos en alguna de las hojas de un tablero completo de S.

Ejemplo

$$\{\underline{p \vee q}_1, \quad \neg(p \wedge q)_2\}$$

β_1: $B_1 \vee B_2 \Rightarrow B_1, B_2$

- $\{p, \quad \underline{\neg(p \wedge q)}_2\}$
  - β_2: $\neg(B_1 \wedge B_2) \Rightarrow \neg B_1, \neg B_2$
  - $\{p, \neg p\}_{\perp}$
  - $\{p, \neg q\}_{\mathtt{A}_1}$
- $\{q, \quad \underline{\neg(p \wedge q)}_2\}$
  - β_2: $\neg(B_1 \wedge B_2) \Rightarrow \neg B_1, \neg B_2$
  - $\{q, \neg p\}_{\mathtt{A}_2}$
  - $\{q, \neg q\}_{\perp}$

Modelos de $\{p \vee q, \quad \neg(p \wedge q)\}$:

$$I_1(p) = 1, I_1(q) = 0$$

$$I_2(p) = 0, I_2(q) = 1$$

Ejercicio

Determinar, por tableros semánticos, si son o no ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ es tautología.
2. $\{p \to (q \leftrightarrow r), r\} \models r \to (p \land q)$
3. $\neg r \to (\neg p \land \neg q) \equiv (p \lor q) \to (r \lor s)$

Ejercicios

1. Consideremos la fórmula proposicional

$$F = \neg(p \to r) \leftrightarrow ((p \to q) \to \neg r)$$

   Demostrar, mediante tableros semánticos, que F no es tautología y obtener todos sus contramodelos a partir del tablero construido.

2. Consideremos el conjunto de fórmulas proposicionales

$$S = \{p \wedge q, q \to \neg(\neg r \to s), (\neg p \to r) \wedge s\}$$

   Demostrar, mediante tableros semánticos, que S es consistente y obtener todos sus modelos a partir del tablero construido.

3. Decidir mediante tableros semánticos si la siguiente afirmación es o no cierta. En caso negativo proporcionar un contramodelo.

$$\models (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$