Lógica Informática

Ejercicios sobre sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas proposicionales bien formadas:

   a) p

   b) (p)

   c) $(p \lor \neg q)$

   d) $p \lor \neg q$

   e) $\neg(p \lor p)$

   f) $((p \to q) \lor (q \to p))$

   g) $(p \lor \land q)$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas,

   a) $\neg q \land q \land p \to r$

   b) $p \to q \to \neg r \lor s \lor p$

   escribirla con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

3. Demostrar que para toda fórmula, F, y para todo par de interpretaciones I_1, I_2, si $I_1(p) = I_2(p)$ para todas las variables proposicionales p que aparecen en F entonces $I_1(F) = I_2(F)$.

4. ¿Es cierto que si $F \to G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una demostración formal. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

5. Determinar si las siguientes fórmulas son satisfacibles o insatisfacibles.

   a) $(p \to q) \land (q \to r)$

   b) $p \land \neg p$

6. En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

   a) $p \lor \neg p$

   b) $p \land \neg p$

   c) $(p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$

   d) $(p \leftrightarrow q) \land (p \to \neg q) \land p$

   e) $(p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \neg q$

7. Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿cuáles son insatisfacibles?

8. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   a) Si F es tautología, entonces F es satisfacible.

   b) Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.

   c) Si F es satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.

   d) Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.

9. Demostrar que las fórmulas siguientes (la selección de tautologías que aparece en la presentación) son, efectivamente, tautologías.
   - $F \to F$ (ley de identidad).
   - $F \lor \neg F$ (ley del tercio excluido).
   - $\neg(F \land \neg F)$ (principio de no contradicción).
   - $(\neg F \to F) \to F$ (ley de Clavius).
   - $\neg F \to (F \to G)$ (ley de Duns Scoto).
   - $((F \to G) \to F) \to F$ (ley de Peirce).
   - $(F \to G) \land F \to G$ (modus ponens).
   - $(F \to G) \land \neg G \to \neg F$ (modus tollens).

10. Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son o no equivalentes:

    a) $F \to G \to H$ y $F \land G \to H$
    b) $F \to (G \land \neg H)$ y $F \to G \to H$
    c) $\neg(F \leftrightarrow G)$ y $F \leftrightarrow \neg G$

11. Demostrar que las equivalencias notables que aparecen en la presentación son, efectivamente, equivalencias.

Idempotencia	$F \lor F \equiv F$	$F \land F \equiv F$
Conmutatividad	$F \lor G \equiv G \lor F$	$F \land G \equiv G \land F$
Asociatividad	$F \lor (G \lor H) \equiv (F \lor G) \lor H$ $F \land (G \land H) \equiv (F \land G) \land H$	
Absorción	$F \land (F \lor G) \equiv F$	$F \lor (F \land G) \equiv F$
Distributividad	$F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$ $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$	
Doble negación	$\neg\neg F \equiv F$	
Leyes de *De Morgan*	$\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$	$\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$
Leyes de tautología (F tautología)	$F \land G \equiv G$	$F \lor G \equiv F$
Leyes de contradicciones (F contradicción)	$F \land G \equiv F$	$F \lor G \equiv G$

12. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

    a) Para todo conjunto de fórmulas S, $S \models S$
    b) Para todo par de conjuntos de fórmulas S_1, S_2, y toda fórmula F, si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_2 \models F$
    c) Para todo conjunto de fórmulas S_1 y todo par de fórmulas F, G, si $S \models F$ y $\{F\} \models G$ entonces $S \models G$
    d) Para todo conjunto de fórmulas S y para toda fórmula F se verifica que, si $S \models F$ entonces $S \models \neg F$

13. ¿Existe un conjunto S de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de S sólo uno es consistente?

14. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

    a) Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.

15. Decidir si la consecuencia lógica es o no cierta.

    a) $\{p \vee q\} \models p \to q$

    b) $\{p \to q, q \to p \wedge r\} \models p \to (p \to q) \to r$

16. Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre hambriento o un tesoro. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva al tesoro (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

    - en esta habitación hay un tesoro y en la otra un tigre.
    - en una de estas habitaciones hay un tesoro y en una de estas habitaciones hay un tigre.

    Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar la puerta que debe de elegir el prisionero.

Ejercicios de examen

1. Se considera una fila de cinco asientos. Usando las variables p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 (representando p_i que el asiento i está ocupado) escribe una fórmula proposicional que corresponda al hecho: "Ni todos los asientos están ocupados ni todos los asientos están libres"

2. Contestar **argumentando razonadamente** la respuesta:

    Para todo conjunto de fórmulas S y para toda fórmula F, si S es consistente y F es satisfacible entonces el conjunto $S \cup \{F\}$ es consistente: ¿nunca?, ¿siempre?, ¿puede ser? (y ¿en qué casos lo sería?).

3. ¿Es correcta la siguiente argumentación?

    "Si una asignatura es de tercero requiere mucho trabajo aprobarla. Las asignaturas de primero apenas requieren esfuerzo para aprobarlas. Las asignaturas que son fundamentales son de primero. Por tanto, las asignaturas de tercero no son fundamentales."

    Usar como variables proposicionales: at asignatura de tercero, mt asignatura que requiere mucho trabajo aprobarla, ap asignatura de primero, af asignatura fundamental.

4. Sean F_1, F_2, F_3, F_4 fórmulas proposicionales de las que se conoce lo siguiente: F_1 es una tautología; F_2 es insatisfacible; F_3 es satisfacible; F_4 es verdadera para la interpretación I.

    Para cada una de las siguientes afirmaciones, decidir razonadamente si es verdadera, falsa o imposible de saber con la información proporcionada:

    - $F_2 \vee F_4$ es insatisfacible.
    - $F_3 \to F_1$ es verdadera para I.
    - $F_3 \wedge F_4$ es falsa para I.
    - $F_1 \to F_2 \wedge F_4$ es satisfacible.
    - $F_2 \vee F_4 \to F_1 \wedge F_3$ es verdadera para I.

- $F_1 \wedge F_4 \rightarrow F_2$ es satisfacible.
- $F_1 \vee F_4 \rightarrow F_2$ es satisfacible.
- $F_3 \wedge F_4$ es insatisfacible.
- $F_3 \rightarrow F_4$ es falsa para I.
- $F_2 \vee F_4 \rightarrow F_1 \wedge F_3$ es verdadera para I.
- $F_3 \rightarrow F_1$ es satisfacible.
- $\neg F_4 \rightarrow F_2$ es insatisfacible.
- $\neg F_1 \vee F_3$ es falsa para I.
- $F_2 \leftrightarrow F_4$ es satisfacible.
- $F_1 \wedge F_2 \rightarrow F_3 \vee \neg F_4$ es insatisfacible.