

Lógica Informática

Algoritmos de búsqueda de modelos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica clausal proposicional

Un literal es una fórmula atómica (literal positivo) o la negación de una fórmula atómica (literal negativo)

Una cláusula es un conjunto de literales (si está vacía la representaremos por \square)

El significado de una cláusula, C , depende del contexto/interpretación que se considere $I : VP \longrightarrow \mathbb{B}$

$$I(C) = \begin{cases} 1 & \text{si existe algún literal } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En cualquier interpretación $I(\square) = 0$

Significado de un conjunto de cláusulas, S :

$$I(S) = \begin{cases} 1 & \text{si para toda } C \in S \text{ se tiene que } I(C) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para un conjunto vacío de cláusulas, $S = \emptyset$, $I(\emptyset) = 1$

Conjuntos de cláusulas y fórmulas

Un cláusula (o conjunto de cláusulas) y una fórmula (o conjunto de fórmulas) son equivalentes si tienen los mismos modelos.

La cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee \dots \vee L_n$.

El conjunto de cláusulas $\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)$.

Una forma clausal de una fórmula, F , es un conjunto de cláusulas equivalente a F .

Si S_1, \dots, S_n son formas clausulas de F_1, \dots, F_n , entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$

Algoritmo DPLL

Davis, Putnam, Logemann y Loveland

- El algoritmo busca un modelo para un conjunto de cláusulas recorriendo todas las posibles interpretaciones
- Construye interpretaciones parciales eligiendo qué valor de verdad asignar a cada variable proposicional.
 - Si detecta que la interpretación parcial construida no será modelo del conjunto, vuelve atrás para analizar nuevas opciones
- Dada una interpretación parcial:
 - Cláusula satisfecha: Hace verdadero a un literal de la cláusula
 - Cláusula contradicha: Hace falso a todos los literales de la cláusula
 - Cláusula unitaria: Hace falso a todos los literales de una cláusula, salvo a uno, al que no le ha asignado ningún valor.

Pseudocódigo de DPLL

Dato de partida: conjunto de cláusulas, S (sin tautologías)

Objetivo: determinar si S es consistente

1. $nd \leftarrow 0$ no marcado : $I \leftarrow$ interpretación vacía
2. **Repetir**
3. **Repetir**
4. Determinar las cláusulas de S satisfechas, contradichas y unitarias por I
5. **Caso** Todas las cláusulas de S son satisfechas por I :
6. **Devolver** S es consistente
7. **Caso** Alguna cláusula de S es contradicha por I :
8. Realizar el procedimiento de vuelta atrás
9. **Si** $nd = 0$: **Devolver** S es inconsistente
10. **Caso** S contiene cláusulas unitarias por I :
11. Propagar restricción booleana
12. **Ningún caso anterior** : **Interrumpir** el bucle de la línea 3
13. $nd \leftarrow nd + 1$
14. Elegir de las cláusulas no satisfechas un literal L que no tenga valor asignado
15. Establecer $I(L) = 1$ y L literal de decisión del nivel nd

Vuelta atrás

1. **Mientras** nd esté marcado **hacer**
2. Eliminar toda la información de ese nivel
3. $nd \leftarrow nd - 1$
4. **Si** $nd > 0$:
5. $L \leftarrow$ literal de decisión del nivel nd
6. Eliminar toda la información de ese nivel
7. Establecer $I(L^c) = 1$ y L^c literal de decisión del nivel nd
8. Marcar nd

Propagar restricción booleana

1. Elegir C cláusula unitaria por I
2. $L \leftarrow$ sin valor asignado de C
3. Establecer $I(L) = 1$

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel	Literal	/	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					6

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel decisión	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0		$I(s) = 1$	1, 6		6 3

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					\emptyset
		$I(s) = 1$	1, 6		\emptyset
		$I(r) = 0$	3		4, 5

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					6
		$I(s) = 1$	1, 6		3
		$I(r) = 0$	3		4, 5
		$I(p) = 0$	4		2

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					\emptyset
		$I(s) = 1$	1, 6		3
		$I(r) = 0$	3		4, 5
		$I(p) = 0$	4		2
		$I(q) = 1$	2, 5		

Ejemplo 1

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Nivel decisión	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					6
	$I(s) = 1$		1, 6		3
	$I(r) = 0$		3		4, 5
	$I(p) = 0$		4		2
	$I(q) = 1$		2, 5		

Modelo: $I(s) = 1, I(r) = 0, I(p) = 0$ e $I(q) = 1$

Ejemplo 1 (Esq.)

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \{s\}_6\}$$

Ejemplo 1 (Esq.)

$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \underline{\{s\}_6}\}$

$I(s) = 1 \mid$

$\{\{\cancel{s}, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\cancel{s}, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\cancel{s}, q, r\}_5, \cancel{\{s\}_6}\}$

Ejemplo 1 (Esq.)

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \underline{\{s\}_6}\}$$

$$I(s) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{s}, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \underline{\{\cancel{s}, \neg r\}_3}, \{r, \neg p\}_4, \{\cancel{s}, q, r\}_5, \{\cancel{s}\}_6\}$$

$$I(r) = 0 \mid$$

$$\{\{q, p, \cancel{r}\}_2, \{\cancel{r}, \neg p\}_4, \{q, \cancel{r}\}_5\}$$

Ejemplo 1 (Esq.)

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \underline{\{s\}_6}\}$$

$$I(s) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{s}, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \underline{\{\cancel{s}, \neg r\}_3}, \{r, \neg p\}_4, \{\cancel{s}, q, r\}_5, \{\cancel{s}\}_6\}$$

$$I(r) = 0 \mid$$

$$\{\{q, p, \cancel{r}\}_2, \{\cancel{\neg r}\}_3, \underline{\{\cancel{r}, \neg p\}_4}, \{q, \cancel{r}\}_5\}$$

$$I(p) = 0 \mid$$

$$\{\{q, \cancel{p}\}_2, \{\cancel{\neg p}\}_4, \{q\}_5\}$$

Ejemplo 1 (Esq.)

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \underline{\{s\}_6}\}$$

$$I(s) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{s}, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \underline{\{\cancel{s}, \neg r\}_3}, \{r, \neg p\}_4, \{\cancel{s}, q, r\}_5, \{\cancel{s}\}_6\}$$

$$I(r) = 0 \mid$$

$$\{\{q, p, \cancel{r}\}_2, \{\cancel{\neg r}\}_3, \underline{\{\cancel{r}, \neg p\}_4}, \{q, \cancel{r}\}_5\}$$

$$I(p) = 0 \mid$$

$$\{\underline{\{q, \cancel{p}\}_2}, \{\cancel{\neg p}\}_4, \{q\}_5\}$$

$$I(q) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{q}\}_2, \{\cancel{q}\}_5\} = \emptyset$$

Ejemplo 1 (Esq.)

$$\{\{s, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \{\neg s, \neg r\}_3, \{r, \neg p\}_4, \{\neg s, q, r\}_5, \underline{\{s\}_6}\}$$

$$I(s) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{s}, \neg r, p\}_1, \{q, p, r\}_2, \underline{\{\cancel{s}, \neg r\}_3}, \{r, \neg p\}_4, \{\cancel{s}, q, r\}_5, \{\cancel{s}\}_6\}$$

$$I(r) = 0 \mid$$

$$\{\{q, p, \cancel{r}\}_2, \{\cancel{\neg r}\}_3, \underline{\{\cancel{r}, \neg p\}_4}, \{q, \cancel{r}\}_5\}$$

$$I(p) = 0 \mid$$

$$\{\{q, \cancel{p}\}_2, \{\cancel{\neg p}\}_4, \{q\}_5\}$$

$$I(q) = 1 \mid$$

$$\{\{\cancel{q}\}_2, \{\cancel{q}\}_5\} = \emptyset$$

Modelo: $I(s) = 1, I(r) = 0, I(p) = 0$ e $I(q) = 1$

Ejemplo 2

$\{\{p, q\}_1, \{\neg p, q\}_2, \{p, \neg q\}_3, \{p, \neg s\}_4, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_5, \{q, \neg r\}_6, \{r, \neg t\}_7, \{t\}_8\}$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					8
		$I(t) = 1$	8		7
		$I(r) = 1$	7		6
		$I(q) = 1$	1, 2, 6		<u>3</u> , 5
		$I(p) = 1$	3, 4	5	

Ejemplo 2 (Esq.)

$$\begin{aligned}
 & \{ \{p, q\}_1, \{\neg p, q\}_2, \{p, \neg q\}_3, \{p, \neg s\}_4, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_5, \{q, \neg r\}_6, \{r, \neg t\}_7, \underline{\{t\}_8} \} \\
 & \quad S|t| \\
 & \{ \{p, q\}_1, \{\neg p, q\}_2, \{p, \neg q\}_3, \{p, \neg s\}_4, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_5, \{q, \neg r\}_6, \underline{\{r, \neg t\}_7}, \cancel{\{t\}_8} \} \\
 & \quad S|r| \\
 & \{ \{p, q\}_1, \{\neg p, q\}_2, \{p, \neg q\}_3, \{p, \neg s\}_4, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_5, \underline{\{q, \neg r\}_6}, \cancel{\{r\}_7} \} \\
 & \quad S|q| \\
 & \{ \cancel{\{p, q\}_1}, \cancel{\{\neg p, q\}_2}, \underline{\{p, \neg q\}_3}, \{p, \neg s\}_4, \{\neg p, \neg q\}_5, \cancel{\{q\}_6} \} \\
 & \quad S|p| \\
 & \{ \cancel{\{p\}_3}, \cancel{\{p, \neg s\}_4}, \cancel{\{\neg p\}_5} = \square_5 \}
 \end{aligned}$$

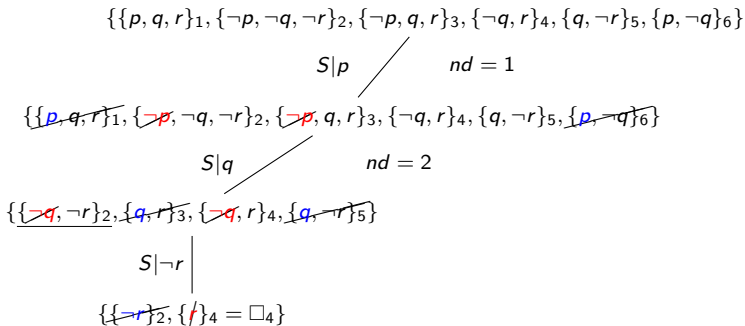
Inconsistente

Ejemplo 3

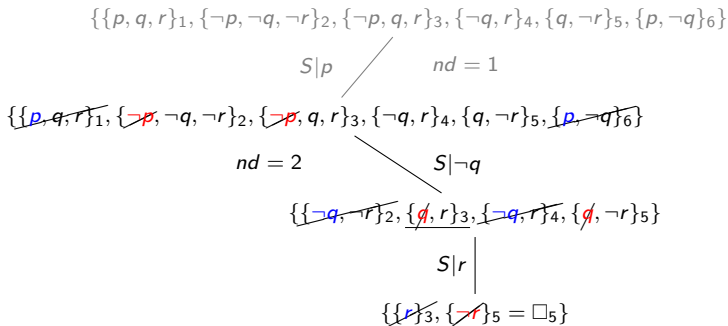
$$\{\{p, q, r\}_1, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_2, \{\neg p, q, r\}_3, \{\neg q, r\}_4, \{q, \neg r\}_5, \{p, \neg q\}_6\}$$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					
1	p	$I(p) = 1$	1, 6		
2	q	$I(q) = 1$	3, 5		<u>2</u> , 4
		$I(r) = 0$	2	4	
0					
1	p	$I(p) = 1$	1, 6		
2 ✓	$\neg q$	$I(q) = 0$	2, 4		<u>3</u> , 5
		$I(r) = 1$	3	5	
0					
1 ✓	$\neg p$	$I(p) = 0$	2, 3		6
		$I(q) = 0$	4, 6		<u>1</u> , 5
		$I(r) = 1$	1	5	

Ejemplo 3 (Esq. I)



Ejemplo 3 (Esq. II)



Ejemplo 3 (Esq. III)

$\{\{p, q, r\}_1, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_2, \{\neg p, q, r\}_3, \{\neg q, r\}_4, \{q, \neg r\}_5, \{p, \neg q\}_6\}$

$nd = 1$

$S|\neg p$

$\{\{\cancel{p}, q, r\}_1, \{\cancel{\neg p}, \neg q, \neg r\}_2, \{\cancel{\neg p}, q, r\}_3, \{\neg q, r\}_4, \{q, \neg r\}_5, \{\cancel{p}, \neg q\}_6\}$

$S|\neg q$

$\{\{\cancel{q}, r\}_1, \{\cancel{\neg q}, r\}_4, \{\cancel{q}, \neg r\}_5, \{\cancel{\neg q}\}_6\}$

$S|r$

$\{\{\cancel{r}\}_1, \{\cancel{\neg r}\}_5 = \Box_5\}$

Inconsistente

Ejercicios

- 1 Demostrar la consistencia del siguiente conjunto de cláusulas, y proporcionar un modelo del mismo:
 $\{\{\neg p, r\}, \{s, r, q\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg p\}, \{\neg s, p, \neg q\}, \{s\}\}$
- 2 Demostrar la inconsistencia del conjunto de cláusulas
 $\{\{\neg q, r\}, \{\neg r, p\}, \{\neg r, q\}, \{\neg p, q, r\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- 3 Obtener todos los modelos de $\{\{p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$
- 4 Obtener todos los modelos de
 $\{\{p, q\}, \{\neg r, \neg s\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{r, s\}, \{\neg u, s\}\}$
- 5 Decidir, mediante DPLL, si $\{p \rightarrow q, q \rightarrow (p \wedge q), p \rightarrow r\} \models q \rightarrow r$
- 6 Dada la fórmula $\neg(p \leftrightarrow (q \rightarrow r))$ decidir, mediante DPLL, si
 - es satisfacible; proporcionando en su caso un modelo.
 - es tautología; proporcionando en caso contrario un contramodelo.

Heurísticas

- Voraz: Elige el literal con mayor número de ocurrencias en las cláusulas del conjunto.
- MOMS (máximas ocurrencias en cláusulas de mínimo tamaño): $f(l)$ es el número de veces que el literal l ocurre en las cláusulas de menor tamaño. Elige el literal, x , con el que se obtenga el mayor valor: $f(x) + f(x^c) + f(x) \cdot f(x^c)$

Ejemplo (orden alfabético)

$$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4, \\ \{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					
1	p	$I(p) = 1$	2, 6, 7		
2	q	$I(q) = 1$	8		
3	r	$I(r) = 1$	1, 4		<u>3</u> , 5
		$I(s) = 0$	3	5	
0					
1	p	$I(p) = 1$	2, 6, 7		
2	q	$I(q) = 1$	8		
3 ✓	$\neg r$	$I(r) = 0$	3, 5		<u>1</u> , 4
		$I(s) = 1$	1, 4		

Ejemplo (Esq. orden alfabético I)

$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$
 $\{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$

$S|p/$ $nd = 1$

$\{\{s, r\}_1, \{\cancel{p}, \neg r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$
 $\{s, \neg r\}_5, \{\cancel{p}, r, q, \neg s\}_6, \{s, \cancel{p}, \neg q\}_7, \{\cancel{\neg p}, s, q, \neg r\}_8\}$

$S|q/$ $nd = 2$

$\{\{s, r\}_1, \{\cancel{\neg q}, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \cancel{\neg q}\}_4, \{s, \neg r\}_5, \{\cancel{s}, \cancel{q}, \neg r\}_8\}$

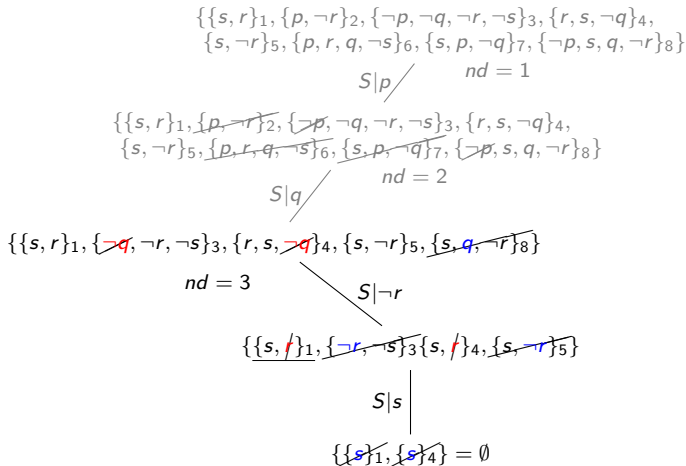
$S|r$ $nd = 3$

$\{\{\cancel{s}, \cancel{r}\}_1, \{\cancel{\neg r}, \neg s\}_3, \{\cancel{r}, s\}_4, \{s, \cancel{\neg r}\}_5\}$

$S|\neg s$

$\{\{\cancel{\neg s}\}_3, \{\cancel{s}\}_5 = \square_5\}$

Ejemplo (Esq. orden alfabético II)



Consistente. Modelo: $I(p) = I(q) = 1$, $I(r) = 0$ e $I(s) = 1$

Ejemplo (voraz)

$$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4, \\ \{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$$

Nivel	Literal decisión	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias	Ocurrencias
0						
1	s	$I(s) = 1$	1, 4, 5, 7, 8			p 3 $\neg p$ 2 q 2 $\neg q$ 3 r 3 $\neg r$ 4 s 5 $\neg s$ 2
2	p	$I(p) = 1$	2, 6			p 2 $\neg p$ 1 q 1 $\neg q$ 1 r 1 $\neg r$ 2
3	$\neg q$	$I(q) = 0$	3			q 0 $\neg q$ 1 r 0 $\neg r$ 1

Ejemplo (Esq. voraz)

$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$ $\{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$		Ocorrencias	
$S s / \quad nd = 1$		$p \quad 3$	$\neg p \quad 2$
$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$ $\{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$		$q \quad 2$	$\neg q \quad 3$
$S p / \quad nd = 2$		$r \quad 3$	$\neg r \quad 4$
$\{\{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r\}_3, \{p, r, q\}_6\}$		$s \quad 5$	$\neg s \quad 2$
$S \neg q / \quad nd = 3$		$p \quad 2$	$\neg p \quad 1$
$\{\{\neg q, \neg r\}_3\} = \emptyset$		$q \quad 1$	$\neg q \quad 1$
		$r \quad 1$	$\neg r \quad 2$
		$q \quad 0$	$\neg q \quad 1$
		$r \quad 0$	$\neg r \quad 1$

Consistente. Modelos: $l_1(s) = l_1(p) = 1$ e $l_1(q) = l_1(r) = 0$
 $l_2(s) = l_2(p) = 1, l_2(q) = 0$ e $l_2(r) = 1$

Ejemplo (MOMS)

$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$
 $\{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$

Nivel	Literal decisión	I	Cláusulas			Ocurrencias
			Satisfechas	Contradichas	Unitarias	
0						
1	r	$I(r) = 1$	1, 4, 6		2 , 5	p 1 $\neg p$ 0 1 r 1 $\neg r$ 2 5 s 2 $\neg s$ 0 1
		$I(p) = 1$	2, 7		5	
		$I(s) = 1$	5		3	
		$I(q) = 0$	3			

Ejemplo (Esq. MOMS)

$\{\{s, r\}_1, \{p, \neg r\}_2, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}_3, \{r, s, \neg q\}_4,$
 $\{s, \neg r\}_5, \{p, r, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q, \neg r\}_8\}$

$S|r \quad nd = 1$

$\{\{\cancel{s}, \cancel{r}\}_1, \{\cancel{p}, \cancel{r}\}_2, \{\neg p, \neg q, \cancel{r}, \neg s\}_3, \{\cancel{r}, s, \neg q\}_4,$
 $\{s, \cancel{r}\}_5, \{\cancel{p}, \cancel{r}, q, \neg s\}_6, \{s, p, \neg q\}_7, \{\neg p, s, q\}_8\}$

$S|p$

$\{\{\cancel{p}\}_2, \{\cancel{p}, \neg q, \neg s\}_3, \{s\}_5, \{\cancel{s}, \cancel{p}, \neg q\}_7, \{\cancel{p}, s, q\}_8\}$

$S|s$

$\{\{\neg q, \cancel{s}\}_3, \{\cancel{s}\}_5\}$

$S|\neg q$

$\{\{\cancel{\neg q}\}_3\} = \emptyset$

Ocurrencias

p	1	$\neg p$	0	1
r	1	$\neg r$	2	5
s	2	$\neg s$	0	1

Consistente. Modelo: $I(r) = I(p) = I(s) = 1$ e $I(q) = 0$

Ejercicios

Determinar si los siguientes conjuntos de cláusulas son consistentes, en cuyo caso obtener un modelo. Comprobar la eficacia de las distintas heurísticas.

- ① $\{\{q, \neg r, p\}, \{q, \neg s\}, \{s, q\}, \{\neg q, s, p, r\}, \{\neg q, p, \neg s\},$
 $\{\neg q, \neg p, r\}, \{q, \neg p\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg p, \neg s\},$
 $\{\neg q, s, \neg p, \neg r\}, \{s, \neg p, r\}, \{\neg q, s, \neg r\}, \{s, q, \neg p, \neg r\}, \{s, p, q\}\}$
- ② $\{\{\neg q, \neg t, p, \neg s, r\}, \{p, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg t, q, s\}, \{\neg q, \neg s, r\},$
 $\{\neg p, t\}, \{\neg s, p, \neg r\}, \{\neg q, t\}, \{\neg t, \neg p, s, q, r\}, \{\neg q, \neg t, \neg p, s, \neg r\},$
 $\{\neg q, p, s, t\}, \{t, \neg p, \neg s, q, r\}, \{p, r, s\}, \{t, p, s, q, r\},$
 $\{\neg s, q\}, \{\neg p, \neg t, \neg r\}\}$

Algoritmo CDCL

Conflict-Driven Clause Learning

Dato de partida: conjunto de cláusulas, S (sin tautologías)

Objetivo: determinar si S es consistente

1. $nd \leftarrow 0$: $I \leftarrow$ interpretación vacía : $S_I \leftarrow \emptyset$
2. **Repetir**
3. **Repetir**
4. Determinar las cláusulas de $S \cup S_I$ satisfechas, contradichas y unitarias por I
5. **Caso** Todas las cláusulas de $S \cup S_I$ son satisfechas por I :
6. **Devolver** S es consistente
7. **Caso** Alguna cláusula de $C \in S \cup S_I$ es contradicha por I :
8. **Si** $nd = 0$: **Devolver** S es inconsistente
9. Incluir \square en el nivel nd del grafo de implicación
10. Para cada $L \in C$ incluir un arco de L^c a \square
11. Inferir una cláusula C_I a partir del grafo de implicación y añadirla a S_I
12. Realizar el procedimiento de vuelta atrás no cronológico
13. **Caso** $S \cup S_I$ contiene cláusulas unitarias por I :
14. Propagar restricción booleana
15. **Ningún caso anterior** : **Interrumpir** el bucle de la línea 3
16. $nd \leftarrow nd + 1$
17. Elegir de las cláusulas no satisfechas un literal L que no tenga valor asignado
18. Añadir el nodo L al grafo de implicación
19. Establecer $I(L) = 1$ y L literal de decisión del nivel nd

Inferencia de cláusulas

1. Recorrer el grafo de implicación, desde \square hasta los literales de decisión
2. Recopilar los literales de decisión L_1, \dots, L_n del recorrido
3. Inferir la cláusula $C_I = \{L_1^c, \dots, L_n^c\}$

Vuelta atrás no cronológico

1. Si C_I es unitaria :
2. $nd_{objetivo} \leftarrow 0$
3. **en caso contrario**
4. $nd_{objetivo} \leftarrow$ máximo de los niveles de los literales recopilados del grafo, distinto del actual
5. **Para todo** $nd > nd_{objetivo}$:
6. Eliminar toda la información del nivel nd

Propagar restricción booleana

1. Elegir C cláusula unitaria por I
2. $L \leftarrow$ sin valor asignado de C
3. Añadir el nodo L al grafo de implicación
4. Para cada literal $L' \in C$ distinto de L incluir un arco de L'^c a L
5. Establecer $I(L^c) = 1$

Ejemplo (DPLL vs CDCL - I)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					
1	p	$I(p) = 1$	1		
2	q	$I(q) = 1$	2		
3	s	$I(s) = 1$	4, 6		3
		$I(t) = 1$	3		<u>5</u> , 7
		$I(u) = 1$	5	7	
0					
1	p	$I(p) = 1$	1		
2	q	$I(q) = 1$	2		
3 ✓	$\neg s$	$I(s) = 0$	3		<u>4</u> , 6
		$I(u) = 1$	4, 5	6	7
0					
1	p	$I(p) = 1$	1		
2 ✓	$\neg q$	$I(q) = 0$			2
		$I(r) = 1$	2		
3	s	$I(s) = 1$	4, 6		3
		$I(t) = 1$	3		<u>5</u> , 7
		$I(u) = 1$	5	7	

Ejemplo (**DPLL** vs CDCL - II)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias
0					
1	p	$I(p) = 1$	1		
2 ✓	$\neg q$	$I(q) = 0$			2
		$I(r) = 1$	2		
3 ✓	$\neg s$	$I(s) = 0$	3		<u>4</u> , 6
		$I(u) = 1$	4, 5	6	7
0					
1 ✓	$\neg p$	$I(p) = 0$	3, 4, 5, 6, 7		1
		$I(q) = 1$	1, 2		

Ejemplo (Esq. DPLL vs CDCL - I)

$$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \\ \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|p \quad nd = 1$$

$$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg s, t\}_3, \{\cancel{\neg p}, s, u\}_4, \\ \{\cancel{\neg p}, \neg t, u\}_5, \{\cancel{\neg p}, s, \neg u\}_6, \{\cancel{\neg p}, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|q \quad nd = 2$$

$$\{\{\cancel{q}, r\}_2, \{\neg s, t\}_3, \{s, u\}_4, \\ \{\neg t, u\}_5, \{s, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|s \quad nd = 3$$

$$\{\{\cancel{\neg s}, t\}_3, \{\cancel{s}, u\}_4, \{\neg t, u\}_5, \\ \{\cancel{s}, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|t$$

$$\{\{\cancel{t}\}_3, \{\cancel{\neg t}, u\}_5, \{\cancel{\neg t}, \neg u\}_7\}$$

$$S|u$$

$$\{\{\cancel{u}\}_5, \{\cancel{\neg u}\}_7 = \square_7\}$$

Ejemplo (Esq. **DPLL** vs CDCL - II)

$$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \\ \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|p \quad nd = 1$$

$$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg s, t\}_3, \{\cancel{\neg p}, s, u\}_4, \\ \{\cancel{\neg p}, \neg t, u\}_5, \{\cancel{\neg p}, s, \neg u\}_6, \{\cancel{\neg p}, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|q \quad nd = 2$$

$$\boxed{\{\{\cancel{q}, r\}_2, \{\neg s, t\}_3, \{s, u\}_4, \\ \{\neg t, u\}_5, \{s, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}}$$

$$nd = 3$$

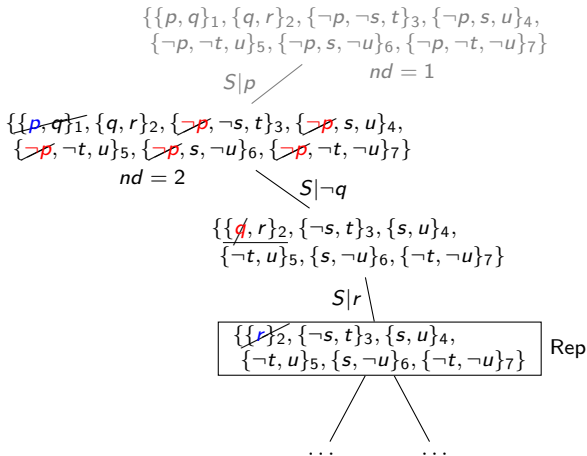
$$S|\neg s$$

$$\{\{\cancel{\neg s}, t\}_3, \{\cancel{s}, u\}_4, \{\neg t, u\}_5, \\ \{\cancel{s}, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|u$$

$$\{\{\cancel{u}\}_4, \{\cancel{\neg t}, \cancel{u}\}_5, \\ \{\cancel{\neg s}, \cancel{u}\}_6 = \square_6, \{\neg t, \cancel{u}\}_7\}$$

Ejemplo (Esq. **DPLL** vs CDCL - III)



Ejemplo (Esq. **DPLL** vs CDCL - IV)

$$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \\ \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$nd = 1$$

$$S|\neg p$$

$$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg s, t\}_3, \{\cancel{\neg p}, s, u\}_4, \\ \{\cancel{\neg p}, \neg t, u\}_5, \{\cancel{\neg p}, s, \neg u\}_6, \{\cancel{\neg p}, \neg t, \neg u\}_7\}$$

$$S|q$$

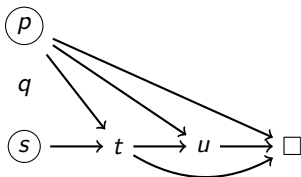
$$\{\{\cancel{q}\}_1, \{\cancel{q}, r\}_2\} = \emptyset$$

Consistente

Ejemplo (DPLL vs **CDCL** - I)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

Nivel decisión	Literal	I	Cláusulas			
			Satisfechas	Contradichas	Unitarias	Inferidas
0						
1	p	$I(p) = 1$	1			
2	q	$I(q) = 1$	2			
3	s	$I(s) = 1$	4, 6		3	
		$I(t) = 1$	3		<u>5</u> , 7	
		$I(u) = 1$	5	7		$\{\neg p, \neg s\}_8$

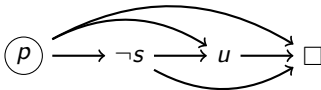


Ejemplo (DPLL vs CDCL - II)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

$\{\neg p, \neg s\}_8$

Nivel	Literal	I	Cláusulas			
decisión			Satisfechas	Contradichas	Unitarias	Inferidas
0						
1	p	$I(p) = 1$	1		8	
		$I(s) = 0$	3, 8		<u>4</u> , 6	
		$I(u) = 1$	4, 5	6	7	$\{\neg p\}_9$



Ejemplo (DPLL vs CDCL - III)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

$\{\neg p, \neg s\}_8 \quad \{\neg p\}_9$

Nivel	Literal	I	Satisfechas	Cláusulas Contradichas	Unitarias	Inferidas
0					9	
		$I(p) = 0$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9		1	
		$I(q) = 1$	1, 2			

$\neg p \longrightarrow q$

Ejemplo (Esq. DPLL vs CDCL - I)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4,$
 $\{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

$S|p \quad nd = 1$

$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg s, t\}_3, \{\cancel{\neg p}, s, u\}_4,$
 $\{\cancel{\neg p}, \neg t, u\}_5, \{\cancel{\neg p}, s, \neg u\}_6, \{\cancel{\neg p}, \neg t, \neg u\}_7\}$

$S|q \quad nd = 2$

$\{\{\cancel{q}, r\}_2, \{\neg s, t\}_3, \{s, u\}_4, \{\neg t, u\}_5,$
 $\{s, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$

$S|s \quad nd = 3$

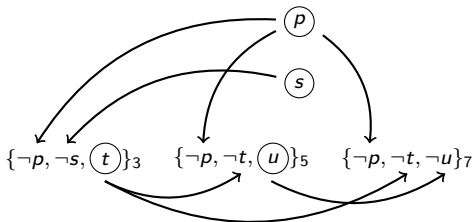
$\{\{\cancel{\neg s}, t\}_3, \{\cancel{s}, u\}_4, \{\neg t, u\}_5,$
 $\{\cancel{s}, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$

$S|t$

$\{\{\cancel{t}\}_3, \{\cancel{\neg t}, u\}_5, \{\cancel{\neg t}, \neg u\}_7\}$

$S|u$

$\{\{\cancel{u}\}_5, \{\cancel{\neg u}\}_7 = \square\}_7\}$



Cláusula inferida: $\{\neg p, \neg s\}_8$

Ejemplo (Esq. DPLL vs CDCL - II)

$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4,$
 $\{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\}$

$S|p/ \quad nd = 1$

$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg \cancel{p}, \neg s, t\}_3, \{\neg \cancel{p}, s, u\}_4, \{\neg \cancel{p}, \neg t, u\}_5,$

$\{\neg \cancel{p}, s, \neg u\}_6, \{\neg \cancel{p}, \neg t, \neg u\}_7\} \quad \{\neg \cancel{p}, \neg s\}_8$

$S|\neg s|$

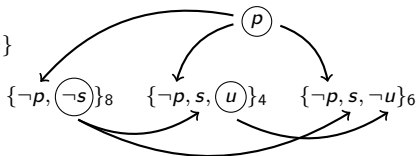
$\{\{q, r\}_2, \{\cancel{\neg s}, t\}_3, \{\cancel{s}, u\}_4, \{\neg t, u\}_5, \{\cancel{s}, \neg u\}_6, \{\neg t, \neg u\}_7\}$

$\{\cancel{\neg s}\}_8$

$S|u|$

$\{\{q, r\}_2, \{\cancel{u}\}_4, \{\neg t, \cancel{u}\}_5, \{\neg \cancel{u}\}_6 = \square_6, \{\neg t, \neg \cancel{u}\}_7\}$

Cláusula inferida: $\{\neg p\}_9$



Ejemplo (Esq. DPLL vs **CDCL** - III)

$$\{\{p, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\neg p, \neg s, t\}_3, \{\neg p, s, u\}_4, \\ \{\neg p, \neg t, u\}_5, \{\neg p, s, \neg u\}_6, \{\neg p, \neg t, \neg u\}_7\} \\ \{\neg p, \neg s\}_8 \quad \{\neg p\}_9$$

$$S|\neg p|$$

$$\{\{\cancel{p}, q\}_1, \{q, r\}_2, \{\cancel{\neg p}, \neg s, t\}_3, \{\cancel{\neg p}, s, u\}_4, \\ \{\cancel{\neg p}, \neg t, u\}_5, \{\cancel{\neg p}, s, \neg u\}_6, \{\cancel{\neg p}, \neg t, \neg u\}_7\} \\ \{\cancel{\neg p}, \neg s\}_8 \quad \{\cancel{\neg p}\}_9$$

$$S|q|$$

$$\{\{\cancel{q}\}_1, \{\cancel{q}, r\}_2\} = \emptyset$$

Consistente

Ejercicios

- ① Demostrar, aplicando CDCL, la inconsistencia del siguiente conjunto de cláusulas. Usar la heurística del orden alfabético para elegir los literales de decisión.

$$\{\{\neg t, \neg q, \neg p\}, \{t, s\}, \{\neg q, s\}, \{\neg t, s, \neg r\}, \{r\}, \{\neg t, \neg s\}, \\ \{\neg t, p, s\}, \{t, \neg s, \neg r\}, \{\neg t, \neg s, r\}, \{\neg q, \neg p\}\}$$

- ② Demostrar, aplicando CDCL, la inconsistencia del siguiente conjunto de cláusulas. Usar la heurística MOMS para elegir los literales de decisión.

$$\{\{\neg p, \neg q, \neg t\}, \{q, \neg s, r\}, \{s, \neg p, r\}, \{q, s, \neg r\}, \{\neg s, p, \neg q\}, \{\neg s, \neg q, r, \neg p\}, \\ \{s, p, r\}, \{q, \neg s, \neg r, \neg p\}, \{q, \neg p, \neg t\}, \{\neg p, \neg s, \neg r, t\}, \{\neg s, q, p\}, \{s, \neg q, \neg r\}\}$$

- ③ Proporcionar todos los modelos del siguiente conjunto de cláusulas, aplicando CDCL. Usa la heurística voraz para elegir los literales de decisión.

$$\{\{\neg s, \neg t\}, \{t, \neg p, \neg s, \neg r\}, \{\neg s, q, r\}, \{\neg s, r, p, \neg q\}, \{t, \neg s, \neg q, p\}, \{t, \neg p, \neg r, s\}, \\ \{r, q, \neg t\}, \{\neg t, \neg r, \neg q\}, \{\neg t, r, \neg q\}, \{\neg p, \neg t\}, \{t, r, p\}, \{q, s, p\}\}$$