Lógica Informática

Ejercicios sobre tableros semánticos en lógica proposicional

1. Calcular, mediante tableros semánticos, los modelos de las siguientes fórmulas:

   a) $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$
   b) $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$

2. Demostrar, o refutar, las siguientes propiedades (mediante propiedades de los tableros semánticos):

   a) $I \models F \land G$ si, y sólo si, $I \models F$ e $I \models G$
   b) $I \models F \lor G$ si, y sólo si, $I \models F$ ó $I \models G$
   c) $F \land G$ es satisfacible si, y sólo si, F es satisfacible y G es satisfacible.
   d) $F \lor G$ es satisfacible si, y sólo si, F es satisfacible o G es satisfacible.
   e) $F \land G$ es válida si, y sólo si, F es válida y G es válida.
   f) $F \lor G$ es válida si, y sólo si, F es válida ó G es válida.

3. Demostrar mediante tableros semánticos las siguientes equivalencias:

   a) $\neg\neg F \equiv F$
   b) $\neg(F \to G) \equiv F \land \neg G$
   c) $\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$
   d) $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F)$
   e) $F \to G \equiv \neg F \lor G$
   f) $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$
   g) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv \neg(F \to G) \lor \neg(G \to F)$

4. Construir dos tableros completos distintos de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$

5. Decidir, mediante tableros semánticos, si

   a) $\models \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$
   b) $\models \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$
   c) $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$

6. Sea la fórmula proposicional $F = p \land q \leftrightarrow \neg p \lor r$

   a) Construir un tablero completo de $\{F\}$ y otro de $\{\neg F\}$
   b) Proporcionar todos los modelos y contramodelos de fórmula F.

7. Decidir, mediante tableros semánticos, si $(p \to q \to r) \leftrightarrow (p \land q \to r)$ es una tautología.

8. Demostrar, mediante tableros semánticos, la corrección del siguiente argumento:

   Se sabe que

   a*) Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.*

   b*) Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*

   c*) Los ungulados de cuello largo son jirafas.*

   d*) Los ungulados con rayas negras son cebras.*

   Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Se deduce que el animal es una cebra.

9. Demostrar, mediante tableros semánticos, la corrección de los siguientes argumentos.

   a) Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.
   b) Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
   c) En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha me- jorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha emplea- do el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

10. Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

    - puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
    - puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

    Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar mediante tableros semánticos que la dama está en la segunda puerta.

11. Probar, usando tableros semánticos, que

$$\models (p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r))$$

12. Decidir, usando tableros semánticos, si la fórmula $(p \wedge q \leftrightarrow p \vee q) \to (p \to q)$ es insatisfactible o una tautología.

13. Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \vee q \to r \vee s, r \wedge t \to s, r \wedge \neg t \to \neg u\} \models p \to s \vee \neg u$$

14. Probar, mediante tableros semánticos, que

$$\models (p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r))$$

15. Demostrar por el método de tableros semánticos que

$$\{(p \lor q \leftrightarrow \neg r) \land (\neg p \to s) \land (\neg t \to q) \land (s \land t \to u)\} \models r \to u$$

16. Probar, mediante tableros semánticos, que

$$\models (r \to p) \land (\neg r \to q \lor s) \to p \lor q \lor s$$

17. Sean las fórmulas
$F = \neg r \to s \land \neg u$ y
$G = (r \lor s) \land (u \to r)$
Probar, mediante tableros semánticos, que F y G son equivalentes.

18. Se considera el conjunto de fórmulas

$$S = \{p \to q, q \leftrightarrow r \land s, \neg s \land r \to q, \neg q\}$$

   a) Probar, mediante tableros semánticos, que S es consistente.
   b) Obtener todos los modelos de S.

19. Dadas las fórmulas
$F = (s \to p) \lor (t \to q)$ y
$G = (s \to q) \lor (t \to p)$
se pide

   a) Probar que $\{F\} \models G$, mediante tableros semánticos.
   b) Proporcionar todos los modelos de F y probar nuevamente que $F \models G$ utilizando la definición de consecuencia lógica.

20. Probar mediante un tablero semántico que

$$\models (p \to q) \land ((r \to \neg t) \land (q \to r)) \to (p \to \neg t)$$

21. Este ejercicio tiene tres apartados.

   a) Probar que $\{E \to (F \to G)\} \not\models (E \to F) \to G$ mediante tableros semánticos.
   b) Proporcionar todos los modelos de $E \to (F \to G)$ que no son modelos de $(E \to F) \to G$
   c) La fórmula $E \to (F \to G) \to (E \to F) \to G$ ¿es una tautología? Razonar la respuesta.

22. Probar por tableros semánticos que

$$\models (E \to (F \land G)) \to (E \to F) \lor (E \to G)$$

23. Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \to r, q \to r\} \models p \lor q \to r$$

24. En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

    a) Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
    b) Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

    El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez.

    Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

25. Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{(p \to q) \lor (p \to r)\} \models p \to (q \land r)$$

26. Decidir, mediante tablero semántico, si

$$\{\neg p \to (q \land r)\} \models q \to p$$

    En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

27. Decidir, mediante tablero semántico, si

    a) $\{r \to \neg(p \land \neg q), ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \models q$
    b) $\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$

    En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

28. Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y calcular los contramodelos de las que no lo sean.

    a) $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to (\neg r \to (p \lor q))$
    b) $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to ((\neg p \lor \neg q) \to r)$

29. Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\models p \land (q \lor s) \to (p \leftrightarrow q) \lor (p \leftrightarrow r)$$

    En el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir del tablero.

30. Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\models (p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$$

    En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos.

31. Sea la fórmula $F = (p \to q) \to \neg(q \lor r) \land \neg p$.

    a) Decidir, mediante tablero semántico, si F es una tautología.
    b) Si F no es una tautología, calcular, a partir del tablero anterior, los contramodelos de F.

32. Demostrar o refutar la siguiente proposición:

> *Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas, entonces el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β tiene menos nodos que el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α*

33. Sea la fórmula

$$F = ((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \to \neg((q \land r) \to \neg p)) \land (r \to \neg(q \lor p)))$$

Decidir, mediante tablero semántico, si F es satisfacible. En el caso de que lo sea, calcular un modelo I de F a partir del tablero. Comprobar que, efectivamente, I es modelo de F.