

Lógica Informática

Ejercicios sobre formas normales en lógica proposicional

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, determinar si están en FNC, en FND, en ambas o en ninguna de las dos.

a) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

b) $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$

c) $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

d) $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$

2. Calcular, utilizando las reglas de normalización, una forma normal conjuntiva de cada una de las siguientes fórmulas

a) $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$

b) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

3. Calcular, utilizando las reglas de normalización, una forma normal disjuntiva de la siguiente fórmula

$$\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

4. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ es una tautología si, y sólo si, F_1, \dots, F_n lo son.

b) $L_1 \vee \dots \vee L_n$ es una tautología si, y sólo si, el conjunto $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i y j tales que $L_i = L_j^c$).

5. Decidir, mediante una forma normal conjuntiva, si la siguiente fórmula es una tautología. En el caso de que no lo sea calcular sus contramodelos a partir de dicha FNC.

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

6. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones

a) $F_1 \vee \dots \vee F_n$ es satisfacible si, y sólo si, alguna de las fórmulas F_1, \dots, F_n lo es.

b) $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ es satisfacible si, y sólo si, $\{L_1, \dots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios (i.e. no existen i y j tales que $L_i = L_j^c$).

7. Decidir, mediante forma normal disyuntiva, si la siguiente fórmula es satisfacible. En el caso de que lo sea calcular sus modelos a partir de la FND.

$$\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

8. Para cada una de las siguientes fórmulas:

■ $\neg(p \leftrightarrow q \rightarrow r)$

■ $\neg(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \vee r)$

■ $(p \rightarrow r \vee s) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(p \rightarrow s)$

- a) Calcular una FNC, utilizando las reglas de normalización, y decidir si es o no una tautología; determinar, en su caso, todos sus contramodelos.
- b) Calcular una FND, utilizando las reglas de normalización, y decidir si es o no satisfacible; determinar, en su caso, todos sus modelos.

9. Empleando una FNC o bien una FND, según lo que se considere más adecuado, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- a) $\{p \leftrightarrow q, q \vee s\} \models s \rightarrow p$
- b) $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

10. Determinar una FNC y una FND de una fórmula F cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

11. Probar, mediante forma normal conjuntiva, que

$$\models (p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

12. Utilizando una forma normal, probar que la siguiente fórmula es satisfacible:

$$\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

13. Probar, usando formas normales, que

$$\models (p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

14. Sea la fórmula $F = p \vee q \leftrightarrow \neg r$. Calcular una forma normal conjuntiva de F y, a partir de ella, determinar los contramodelos de F y decidir si F es una tautología.

15. Calcular una forma normal conjuntiva de una fórmula F sabiendo que está compuesta con las tres variables p , q y r ; y que, para toda interpretación I , se tiene que

$$I(F) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(p) = I(\neg q \vee r) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

16. Calcular una forma normal disyuntiva de F y una forma normal conjuntiva de $\neg F$ siendo F una fórmula cuya tabla de verdad es:

p	q	r	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

17. Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

- a) Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2 . Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son la misma fórmula.
- b) Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F , entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.

18. Dada la siguiente tabla de verdad de las fórmulas proposicionales F_1 y F_2 , en las que solo ocurren las variables proposicionales p , q y r ,

$I_1(p) = 0$	$I_1(q) = 0$	$I_1(r) = 0$	$I_1(F_1) = 0$	$I_1(F_2) = 0$
$I_2(p) = 0$	$I_2(q) = 0$	$I_2(r) = 1$	$I_2(F_1) = 1$	$I_2(F_2) = 1$
$I_3(p) = 0$	$I_3(q) = 1$	$I_3(r) = 0$	$I_3(F_1) = 0$	$I_3(F_2) = 1$
$I_4(p) = 0$	$I_4(q) = 1$	$I_4(r) = 1$	$I_4(F_1) = 0$	$I_4(F_2) = 0$
$I_5(p) = 1$	$I_5(q) = 0$	$I_5(r) = 0$	$I_5(F_1) = 1$	$I_5(F_2) = 1$
$I_6(p) = 1$	$I_6(q) = 0$	$I_6(r) = 1$	$I_6(F_1) = 0$	$I_6(F_2) = 0$
$I_7(p) = 1$	$I_7(q) = 1$	$I_7(r) = 0$	$I_7(F_1) = 1$	$I_7(F_2) = 0$
$I_8(p) = 1$	$I_8(q) = 1$	$I_8(r) = 1$	$I_8(F_1) = 0$	$I_8(F_2) = 1$

se pide razonar directamente a partir de ella para:

- Obtener una FND de F_1 y una FNC de F_2 .
- Decidir si $\{F_1\} \models s \rightarrow F_2$

19. Dada la siguiente tabla de verdad de las fórmulas proposicionales F_1 y F_2 , en las que solo ocurren las variables proposicionales p , q y r ,

$I_1(p) = 0$	$I_1(q) = 0$	$I_1(r) = 0$	$I_1(F_1) = 0$	$I_1(F_2) = 1$
$I_2(p) = 0$	$I_2(q) = 0$	$I_2(r) = 1$	$I_2(F_1) = 1$	$I_2(F_2) = 0$
$I_3(p) = 0$	$I_3(q) = 1$	$I_3(r) = 0$	$I_3(F_1) = 0$	$I_3(F_2) = 0$
$I_4(p) = 0$	$I_4(q) = 1$	$I_4(r) = 1$	$I_4(F_1) = 1$	$I_4(F_2) = 1$
$I_5(p) = 1$	$I_5(q) = 0$	$I_5(r) = 0$	$I_5(F_1) = 0$	$I_5(F_2) = 0$
$I_6(p) = 1$	$I_6(q) = 0$	$I_6(r) = 1$	$I_6(F_1) = 0$	$I_6(F_2) = 1$
$I_7(p) = 1$	$I_7(q) = 1$	$I_7(r) = 0$	$I_7(F_1) = 0$	$I_7(F_2) = 1$
$I_8(p) = 1$	$I_8(q) = 1$	$I_8(r) = 1$	$I_8(F_1) = 1$	$I_8(F_2) = 1$

se pide razonar directamente a partir de ella para:

- Obtener una FND de F_1 y una FNC de F_2 .
- Decidir si $\{F_1\} \models F_2 \rightarrow q \wedge r$