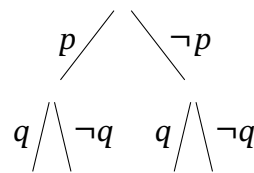


# Algoritmos de búsqueda de modelos

## Algoritmo DPLL

El algoritmo DPLL (el nombre proviene de los apellidos de sus autores: Martin Davis, Hilary Putnam, George Logemann y Donald Loveland) es un algoritmo para decidir la consistencia de un conjunto de cláusulas. Las principales características del algoritmo son:

- Por definición, un conjunto de cláusulas es consistente si tiene un modelo. Entonces, el algoritmo busca ese modelo recorriendo las distintas ramas del árbol de todas las posibles interpretaciones. Este árbol se obtiene al considerar cada variable proposicional que ocurre en el conjunto, junto con los dos posibles valores de verdad que pueden tomar esas variables.



- La exploración de una rama del árbol de interpretaciones implica que el algoritmo toma decisiones acerca de qué valores de verdad se asignan a las variables proposicionales. Cuando el algoritmo detecta que el camino recorrido no conduce a ningún modelo, realiza una vuelta atrás en la búsqueda para explorar una nueva rama.
- A medida que el algoritmo explora una rama del árbol de interpretaciones, va construyendo una interpretación parcial que asigna un valor de verdad únicamente a aquellas variables proposicionales consideradas hasta ese momento. Para cada cláusula del conjunto se puede tener entonces una de las siguientes situaciones:
  - La interpretación parcial hace verdadero alguno de los literales de la cláusula. Es decir, la cláusula es *satisfecha por la interpretación*. Nótese que no es necesario que todos los literales de la cláusula tengan un valor de verdad asignado. Por ejemplo, la cláusula  $\{p, \neg q\}$  es satisfecha por cualquier interpretación parcial tal que  $I(p) = 1$  y por cualquier interpretación parcial tal que  $I(q) = 0$ .
  - La interpretación parcial hace falsos todos los literales de la cláusula. Es decir, la cláusula es *contradicha por la interpretación*. Por ejemplo, la cláusula  $\{p, \neg q\}$  es contradicha por cualquier interpretación parcial tal que  $I(p) = 0$  e  $I(q) = 1$ .

- La interpretación parcial hace falsos todos los literales de la cláusula, salvo uno, al que no le ha asignado ningún valor de verdad y que llamaremos literal libre de la cláusula. Es decir, la cláusula es *unitaria por la interpretación*. Por ejemplo, la cláusula  $\{p, \neg q\}$  es unitaria por cualquier interpretación parcial tal que  $I(p) = 0$  y no le asigne ningún valor de verdad a  $q$  (en este caso,  $\neg q$  sería el literal libre de la cláusula) y por cualquier interpretación parcial tal que  $I(q) = 1$  y no le asigne ningún valor de verdad a  $p$  (en este caso,  $p$  sería el literal libre de la cláusula).
- Cada literal de la cláusula es, o bien falso, o bien sin valor asignado, habiendo dos o más de estos últimos. Por ejemplo, para cualquier interpretación que no le asigne ningún valor de verdad ni a  $p$  ni a  $q$ , la cláusula  $\{p, \neg q\}$  no sería ni satisfecha, ni contradicha ni unitaria por esa interpretación.

Como quiera que el número de posibles interpretaciones (y, en consecuencia, de ramas a explorar) crece de manera exponencial con el número de variables, el algoritmo realiza un procedimiento de *propagación de restricciones booleanas* para acelerar la búsqueda. Este procedimiento se apoya en la siguiente propiedad:

**Proposición** Sean  $S$  un conjunto de cláusulas,  $I$  una interpretación parcial de las variables proposicionales de  $S$ ,  $C \in S$  una cláusula unitaria por  $I$  con  $L$  su literal libre e  $I'$  un modelo de  $S$  que extiende a  $I$ . Entonces necesariamente  $I'$  debe hacer verdadero a  $L$ , es decir:

- Si  $L$  es de la forma  $v$ , entonces necesariamente debe ser  $I'(v) = 1$ .
- Si  $L$  es de la forma  $\neg v$ , entonces necesariamente debe ser  $I'(v) = 0$ .

donde  $v$  es una variable proposicional.

Por ejemplo, si  $\{p, \neg q\} \in S$ ,  $I$  es una interpretación parcial tal que  $I(p) = 0$  y no le asigna ningún valor de verdad a  $q$  e  $I'$  es un modelo de  $S$  que extiende a  $I$ , entonces necesariamente debe ser  $I'(q) = 0$  ya que:

- $I'$  hace verdadera a la cláusula  $\{p, \neg q\}$ , por ser un modelo de  $S$ .
- $I'(p) = 0$ , por extender a la interpretación parcial  $I$ .

La propagación de restricciones booleanas lleva al algoritmo a explorar directamente las ramas en las que los literales libres de las cláusulas unitarias toman el valor verdadero, ignorando aquellas en las que esos literales toman el valor falso.

En la página 3 se encuentra una descripción en pseudocódigo del algoritmo. Nótese que, por claridad en la descripción, en ese pseudocódigo se abusa del concepto de interpretación, entendiendo que estas asignan también de forma natural valores de verdad a los literales. Por ejemplo, establecer  $I(\neg q) = 1$  quiere decir realmente establecer  $I(q) = 0$ . También se hace uso del concepto de literal complementario,  $L^c$ , de un literal  $L$ , que es el literal obtenido al cambiar el signo de  $L$ . Por ejemplo, el literal complementario de  $q$  es  $\neg q$ , mientras que el literal complementario de  $\neg q$  es  $q$ . Finalmente, llamaremos dominio de un conjunto de cláusulas al conjunto de literales  $L$  tales que, o bien  $L$ , o bien  $L^c$  (o ambos) ocurren en alguna de esas cláusulas. Por ejemplo, el dominio de  $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q, r\}\}$  es  $\{p, \neg p, q, \neg q, r, \neg r\}$ .

---

**Algoritmo DPLL**


---

**Entrada:** conjunto de cláusulas  $S$ **Salida:**  $S$  es consistente o  $S$  es inconsistente

```

1  Quitar las tautologías de  $S$ 
2   $nd \leftarrow 0$ 
   Nivel de decisión inicial, no marcado
3   $I \leftarrow$  interpretación vacía
   No asigna valor de verdad a ninguna variable proposicional
4  Repetir
5      Repetir
6          Determinar en el nivel  $nd$  las cláusulas de  $S$  satisfechas,
           contradichas y unitarias por  $I$ 
7          Caso Todas las cláusulas de  $S$  son satisfechas por  $I$  entonces
8              Devolver  $S$  es consistente
9          Caso Alguna cláusula de  $S$  es contradicha por  $I$  entonces
10             Realizar el procedimiento de vuelta atrás
11             Si  $nd = 0$  entonces
12                 Devolver  $S$  es inconsistente
13             Caso  $S$  contiene cláusulas unitarias por  $I$  entonces
14                 Propagar restricción booleana
15             Ningún caso anterior
16                 Interrumpir el bucle de la línea 5
17          $nd \leftarrow nd + 1$ 
18         Elegir del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  un literal  $L$  que no
           tenga valor asignado por  $I$ 
19         Establecer  $I(L) = 1$  y  $L$  como literal de decisión del nivel  $nd$ 

```

Procedimiento de vuelta atrás:

```

1  Mientras  $nd$  esté marcado como probado con ambos valores hacer
2      Eliminar toda la información del nivel  $nd$ 
3       $nd \leftarrow nd - 1$ 
4  Si  $nd > 0$  entonces
5       $L \leftarrow$  literal de decisión del nivel  $nd$ 
6      Eliminar toda la información del nivel  $nd$ 
7      Establecer  $I(L^c) = 1$  y  $L^c$  como literal de decisión del nivel  $nd$ 
8      Marcar  $nd$  como probado con ambos valores

```

Propagación de restricción booleana:

```

1  Elegir  $C$  una cláusula unitaria por  $I$ 
2   $L \leftarrow$  literal libre de  $C$ 
3  Establecer  $I(L) = 1$  y  $L$  como literal implicado del nivel  $nd$ 

```

---

**Ejemplo 1:**

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{s, \neg r, p\}, \{q, p, r\}, \{\neg s, \neg r\}, \{r, \neg p\}, \{\neg s, q, r\}, \{s\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			$\{s\}$
Resto de cláusulas			
$\{s, \neg r, p\}, \{q, p, r\}, \{\neg s, \neg r\}, \{r, \neg p\}, \{\neg s, q, r\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{s\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $s$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$s$
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{s\}, \{s, \neg r, p\}$		$\{\neg s, \neg r\}$
Resto de cláusulas			
	$\{q, p, r\}, \{r, \neg p\}, \{\neg s, q, r\}$		

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg s, \neg r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$s, \neg r$
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1, I(r) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{s\}, \{s, \neg r, p\}, \{\neg s, \neg r\}$		$\{r, \neg p\}, \{\neg s, q, r\}$
Resto de cláusulas			
	$\{q, p, r\}$		

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{r, \neg p\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg p$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$s, \neg r, \neg p$
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1, I(r) = 0, I(p) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{s\}, \{s, \neg r, p\}, \{\neg s, \neg r\}, \{r, \neg p\}$		$\{\neg s, q, r\}, \{q, p, r\}$
Resto de cláusulas			

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg s, q, r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$s, \neg r, \neg p, q$
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1, I(r) = 0, I(p) = 0, I(q) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{s\}, \{s, \neg r, p\}, \{\neg s, \neg r\}, \{r, \neg p\}, \{\neg s, q, r\}, \{q, p, r\}$		
Resto de cláusulas			

6. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente. Además, como  $I$  asigna un valor de verdad a cada variable proposicional que ocurre en  $S$ , se trata de un modelo de  $S$  (en este caso, el único modelo que tiene  $S$ ).

## Ejemplo 2:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{ \{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, \neg s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{q, \neg r\}, \{r, \neg t\}, \{t\} \}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			$\{t\}$
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, \neg s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{q, \neg r\}, \{r, \neg t\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{t\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $t$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$t$
Interpretación parcial $I$			
$I(t) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{t\}$		$\{r, \neg t\}$
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, \neg s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{q, \neg r\}$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{r, \neg t\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$t, r$
Interpretación parcial $I$			
$I(t) = 1, I(r) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{t\}, \{r, \neg t\}$		$\{q, \neg r\}$
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, \neg s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$			

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{q, \neg r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$t, r, q$
Interpretación parcial $I$			
$I(t) = 1, I(r) = 1, I(q) = 1$			



por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{t\}, \{r, \neg t\}, \{q, \neg r\},$ $\{p, q\}, \{\neg p, q\}$		$\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$
Resto de cláusulas			
	$\{p, \neg s\}$		

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{p, \neg q\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $p$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		$t, r, q, p$
Interpretación parcial $I$			
$I(t) = 1, I(r) = 1, I(q) = 1, I(p) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{t\}, \{r, \neg t\}, \{q, \neg r\},$ $\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\},$ $\{p, \neg s\}$	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}$	
Resto de cláusulas			

6. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo trata de realizar el procedimiento de vuelta atrás, pero no es posible por encontrarse en el nivel de decisión 0, por lo que termina concluyendo que el conjunto  $S$  es inconsistente.

**Ejemplo 3:**

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{p, q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg r\}, \{p, \neg q\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{p, q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg r\}, \{p, \neg q\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , por ejemplo  $p$ .

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q, r\}, \{p, \neg q\}$		
Resto de cláusulas			
	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg r\}$		

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , por ejemplo  $q$ .

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q, r\}, \{p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, q, r\}, \{q, \neg r\}$		$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg q, r\}$
Resto de cláusulas			

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	$\neg r$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q, r\}, \{p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, q, r\}, \{q, \neg r\},$ $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$	$\{\neg q, r\}$	
Resto de cláusulas			

5. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$  y  $q$  sean ambos verdaderos y realiza por tanto el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 2 no está marcado como probado con ambos valores, simplemente se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q, r\}, \{p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg q, r\}$		$\{\neg p, q, r\}, \{q, \neg r\}$
Resto de cláusulas			

6. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, q, r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q, r\}, \{p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg q, r\},$ $\{\neg p, q, r\}$	$\{q, \neg r\}$	
Resto de cláusulas			

7. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  tampoco tiene ningún modelo en el que  $p$  sea verdadero y  $q$  falso (en este punto se puede concluir, por tanto, que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$  sea verdadero) y realiza el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 2 está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda la información de ese

nivel. Como el nivel de decisión 1 no está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Sí	1	$\neg p$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}$		$\{p, \neg q\}$
Resto de cláusulas			
$\{p, q, r\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg r\}$			

8. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{p, \neg q\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Sí	1	$\neg p$	$\neg q$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 0, I(q) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\},$ $\{p, \neg q\}, \{\neg q, r\}$		$\{p, q, r\}, \{q, \neg r\}$
Resto de cláusulas			

9. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{p, q, r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Sí	1	$\neg p$	$\neg q, r$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 0, I(q) = 0, I(r) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}, \{q, \neg r\}$ $\{p, \neg q\}, \{\neg q, r\},$ $\{p, q, r\}$		
Resto de cláusulas			

10. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$  sea falso y realiza el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 1 está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda la información de ese nivel, volviendo entonces al nivel 0 inicial, por lo que el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es inconsistente (en efecto, ya habíamos concluido que  $S$  no tenía modelos con  $p$  verdadero y ahora hemos

concluido que tampoco los tiene con  $p$  falso, por lo que  $S$  no puede tener modelos).

## Heurísticas para elegir los literales de decisión

En los ejemplos anteriores, los literales de decisión se han elegido por orden alfabético de entre las **variables** no asignadas que ocurren en el conjunto de cláusulas no satisfechas, probando primero con el valor verdadero de esa variable y después con el valor falso. Esta es una heurística arbitraria de elección de literales de decisión que, en general, no favorecerá el que el algoritmo encuentre rápidamente la respuesta.

### Ejemplo 4:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente, usando la heurística del orden alfabético para los literales de decisión.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1. Las variables que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  y que no tienen un valor asignado por  $I$  son  $p, q, r$  y  $s$ , por lo que la heurística del orden alfabético elige  $p$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces



Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
Resto de cláusulas			
$\{s, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2. Las variables que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  y que no tienen un valor asignado por  $I$  son  $q, r$  y  $s$ , por lo que la heurística del orden alfabético elige  $q$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
Resto de cláusulas			
	$\{s, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}$		

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 3. Las variables que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  y que no tienen un valor asignado por  $I$  son  $r$  y  $s$ , por lo que la heurística del orden alfabético elige  $r$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
No	3	$r$	
Interpretación parcial $I$			
			$I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 1$

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
3	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\}$		$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\},$ $\{s, \neg r\}$
Resto de cláusulas			

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg s$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
No	3	$r$	$\neg s$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 1, I(s) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
3	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$	$\{s, \neg r\}$	
Resto de cláusulas			

6. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$ ,  $q$  y  $r$  sean todos verdaderos y realiza por tanto el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 3 no está marcado como probado con ambos valores, simplemente se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Sí	3	$\neg r$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
3	$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\},$ $\{s, \neg r\}$		$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\}$
Resto de cláusulas			

7. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{s, r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $s$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Sí	3	$\neg r$	$s$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0, I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		
2	$\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
3	$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{s, \neg r\},$ $\{s, r\}, \{r, s, \neg q\}$		
Resto de cláusulas			

8. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente. Como  $I$  le asigna un valor de verdad a cada variable proposicional que ocurre en  $S$ , se tiene que  $I$  es un modelo de  $S$  (¿es el único modelo?).

En la literatura del algoritmo DPLL se han considerado muchas otras heurísticas que intentan guiar al algoritmo rápidamente a una respuesta. Por ejemplo, la *heurística voraz* elige en cada nivel de decisión el **literal** no asignado con mayor número de ocurrencias en el conjunto de cláusulas no satisfechas (para desempatar se puede utilizar, por ejemplo, el orden alfabético, teniendo en cuenta que los literales positivos se consideran anteriores a los literales negativos). Esta heurística intenta elegir un literal que satisfaga la mayor cantidad posible de cláusulas aún no satisfechas.

### Ejemplo 5:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente, usando la heurística voraz para los literales de decisión.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1. Los literales que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas y que no tienen un valor asignado por  $I$  son, por orden de ocurrencia,  $s$  (5 ocurrencias),  $\neg r$  (4 ocurrencias),  $p$  (3 ocurrencias),  $r$  (3 ocurrencias),  $\neg q$  (3 ocurrencias),  $q$  (2 ocurrencias),  $\neg p$  (2 ocurrencias) y  $\neg s$  (2 ocurrencias). Por tanto, la heurística voraz elige  $s$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$s$	
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{s, \neg r\}, \{s, p, \neg q\},$ $\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
Resto de cláusulas			
$\{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{p, r, q, \neg s\},$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2. Los literales que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas y que no tienen un valor asignado por

$I$  son, por orden de ocurrencia,  $p$  (2 ocurrencias),  $\neg r$  (2 ocurrencias),  $q$  (1 ocurrencia),  $r$  (1 ocurrencia),  $\neg p$  (1 ocurrencia) y  $\neg q$  (1 ocurrencia). Por tanto, la heurística voraz elige  $p$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$s$	
No	2	$p$	

Interpretación parcial  $I$

$$I(s) = 1, I(p) = 1$$

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{s, \neg r\}, \{s, p, \neg q\},$ $\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
2	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}$		

Resto de cláusulas

$$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\},$$

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2. Los literales que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas y que no tienen un valor asignado por  $I$  son, por orden de ocurrencia,  $\neg q$  (1 ocurrencia) y  $\neg r$  (1 ocurrencia). Por tanto, la heurística voraz elige  $\neg q$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$s$	
No	2	$p$	
No	3	$\neg q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(s) = 1, I(p) = 1, I(q) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{s, \neg r\}, \{s, p, \neg q\},$ $\{\neg p, s, q, \neg r\}$		
2	$\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}$		
3	$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$		
Resto de cláusulas			

5. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente. Como  $I$  no le asigna un valor de verdad a la variable proposicional  $r$ , se obtienen los dos siguientes modelos de  $S$ :

$$\begin{array}{llll} I_1(p) = 1 & I_1(q) = 0 & I_1(r) = 0 & I_1(s) = 1 \\ I_2(p) = 1 & I_2(q) = 0 & I_2(r) = 1 & I_2(s) = 1 \end{array}$$

Otra heurística usada muy habitualmente es la *heurística MOMS* (máximas ocurrencias en cláusulas de mínimo tamaño). Esta heurística intenta elegir un literal de decisión que maximice el efecto de la propagación de restricciones booleanas. Para ello, busca la variable que, junto con su complementario, ocurra más veces en las cláusulas de menor tamaño. Así, si  $f$  es la función que cuenta el número de ocurrencias de cada literal en las cláusulas no satisfechas de mínimo tamaño (donde aquí el tamaño de una cláusula es la cantidad de literales no asignados que contiene), pretendemos que la heurística le asocie a cada **variable** no asignada el valor

$$h(x) = f(x) + f(\neg x)$$

Pero, por otra parte, también es conveniente que la ramificación producida por el literal de decisión esté equilibrada. Por ejemplo, si el número de ocurrencias de  $p$  y  $\neg p$  es,



respectivamente, 1 y 7 y el número de ocurrencias de  $q$  y  $\neg q$  es, respectivamente, 4 y 4, entonces preferimos la variable  $q$  a la variable  $p$ . Así, el valor que la heurística le asocia realmente a cada variable no asignada es

$$h(x) = f(x) + f(\neg x) + f(x) \times f(\neg x)$$

(para desempatar se puede utilizar, por ejemplo, el orden alfabético).

### Ejemplo 6:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente, usando la heurística MOMS para los literales de decisión.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{s, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{r, s, \neg q\}, \{s, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1. Las variables que aparecen en el dominio de las cláusulas no satisfechas y que no tienen un valor asignado por  $I$  son, por orden de heurística,  $r$  ( $h = 5$ ),  $s$  ( $h = 2$ ),  $p$  ( $h = 1$ ) y  $q$  ( $h = 0$ ). Por tanto, la heurística voraz elige  $r$  como literal de decisión de ese nivel.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$r$	
Interpretación parcial $I$			
$I(r) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\}$		$\{p, \neg r\}, \{s, \neg r\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{p, r, q, \neg s\}, \{s, p, \neg q\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{p, \neg r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $p$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$r$	$p$
Interpretación parcial $I$			
$I(r) = 1, I(p) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}$		$\{s, \neg r\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}, \{\neg p, s, q, \neg r\}$			

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{s, \neg r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $s$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$r$	$p, s$
Interpretación parcial $I$			
$I(r) = 1, I(p) = 1, I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}, \{s, \neg r\},$ $\{\neg p, s, q, \neg r\}$		$\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\},$
Resto de cláusulas			

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$r$	$p, s, \neg q$
Interpretación parcial $I$			
$I(r) = 1, I(p) = 1, I(s) = 1, I(q) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{s, r\}, \{r, s, \neg q\},$ $\{p, \neg r\}, \{p, r, q, \neg s\},$ $\{s, p, \neg q\}, \{s, \neg r\},$ $\{\neg p, s, q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$		p
Resto de cláusulas			

6. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente. Como  $I$  le asigna un valor de verdad a cada variable proposicional que ocurre en  $S$ , se tiene que  $I$  es un modelo de  $S$

## Algoritmo CDCL

El algoritmo DPLL es un algoritmo sin memoria que no detecta la posible repetición de situaciones que conducen al mismo conflicto. En consecuencia, repite innecesariamente el mismo trabajo una y otra vez para llegar a la conclusión de que la rama del árbol de interpretaciones que está explorando no proporciona ningún modelo del conjunto de cláusulas.

### Ejemplo 7:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}\}$$

y apliquemos el algoritmo DPLL para decidir si  $S$  es o no consistente. Usaremos la heurística del orden alfabético para elegir los literales de decisión.

1. Inicialmente se tiene

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Interpretación parcial $I$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $p$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $q$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 3, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $s$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
No	3	$s$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$		$\{\neg p, \neg s, t\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p, \neg s, t\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $t$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
No	3	$s$	$t$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg s, t\}$		$\{\neg p, \neg t, u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$
Resto de cláusulas			

6. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, \neg t, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
No	3	$s$	$t, u$

Interpretación parcial  $I$

$$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1, I(u) = 1$$

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$ $\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, \neg t, u\}$		

Resto de cláusulas

7. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p, q$  y  $s$  sean los tres verdaderos y realiza por tanto el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 3 no está marcado como probado con ambos valores, simplemente se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Sí	3	$\neg s$	

Interpretación parcial  $I$

$$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 0$$



por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\},$		$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$
Resto de cláusulas			
	$\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$		

8. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, s, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
No	2	$q$	
Sí	3	$\neg s$	$u$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 0, I(u) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}$	$\{\neg p, s, \neg u\}$	$\{\neg p, \neg t, \neg u\}$
Resto de cláusulas			

9. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  tampoco tiene ningún modelo en el que  $p$  y  $q$  sean ambos verdaderos y  $s$  sea

falso y realiza el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 3 está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda la información de ese nivel. Como el nivel de decisión 2 no está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2			$\{q, r\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

10. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{q, r\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $r$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

11. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 3, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $s$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
No	3	$s$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1, I(s) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$		$\{\neg p, \neg s, t\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

12. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una

restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p, \neg s, t\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $t$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
No	3	$s$	$t$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, s, \neg u\}$		$\{\neg p, \neg t, u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$
Resto de cláusulas			

13. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, \neg t, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
No	3	$s$	$t, u$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1, I(u) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$		
Resto de cláusulas			

14. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$  sea verdadero,  $q$  sea falso y  $s$  sea verdadero y realiza por tanto el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del árbol de posibles interpretaciones. Como el nivel de decisión 3 no está marcado como probado con ambos valores, simplemente se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
Sí	3	$\neg s$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1, I(s) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\}$		$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$
Resto de cláusulas			
	$\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$		

15. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, s, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
No	1	$p$	
Sí	2	$\neg q$	$r$
Sí	3	$\neg s$	$u$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1, I(s) = 0, I(u) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}$	$\{\neg p, s, \neg u\}$	$\{\neg p, \neg t, \neg u\}$
Resto de cláusulas			

16. Puesto que hay una cláusula contradicha por  $I$ , el algoritmo deduce que  $S$  no tiene ningún modelo en el que  $p$  sea verdadero y  $q$  y  $s$  sean ambos falsos y realiza por tanto el procedimiento de vuelta atrás para explorar otra rama del

árbol de posibles interpretaciones. Como los niveles de decisión 2 y 3 están marcados como probados con ambos valores, se elimina toda la información de esos niveles. Como el nivel de decisión 1 no está marcado como probado con ambos valores, se elimina toda su información, se establece como nuevo literal de decisión de ese nivel el complementario de su literal de decisión actual y se marca el nivel como probado con ambos valores.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Sí	1	$\neg p$	
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 0$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$		$\{p, q\}$
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}$			

17. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{p, q\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Nivel marcado	Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
No	0		
Sí	1	$\neg p$	$q$
Interpretación parcial $I$			
$I(p) = 0, I(q) = 1$			

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}, \{q, r\},$ $\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$		
Resto de cláusulas			

18. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente.

Al realizar los pasos 4 a 6 el algoritmo determina que, habiéndose establecido  $p$  a verdadero, entonces el conjunto de cláusulas

$$\{\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}\}$$

es inconsistente. Obsérvese que, tras realizar el paso 10, el algoritmo se encuentra de nuevo en la misma situación de, habiéndose establecido  $p$  a verdadero, determinar la consistencia de ese conjunto de cláusulas. Sin embargo, al ser un algoritmo sin memoria, vuelve a realizar el trabajo de deducir que es inconsistente.

El algoritmo CDCL es capaz de extraer información a partir de los conflictos, infiriendo nuevas cláusulas a partir de ellos que le permiten descartar aquellas ramas del árbol de interpretaciones que llevarían a conflictos considerados previamente. Para ello construye iterativamente un *grafo de implicación* tal que:

- Los nodos del grafo son los literales de decisión, los literales implicados y  $\square$ .
- Para cada literal implicado por la propagación de restricciones booleanas, se conectan con él todos los literales que lo han implicado.
- Cuando se obtiene una contradicción, se conectan con  $\square$  todos los literales que la han provocado.

A partir del grafo de implicación, el algoritmo CDCL determina qué literales de decisión son incompatibles entre sí. Además, cada vez que detecta un conflicto el grafo también le permite realizar una vuelta atrás no cronológica, descartando niveles de decisión que no han intervenido en el conflicto, en lugar de simplemente volver al nivel de decisión anterior.



## Algoritmo CDCL

**Entrada:** conjunto de cláusulas  $S$

**Salida:**  $S$  es consistente o  $S$  es inconsistente

```

1  Quitar las tautologías de  $S$ 
2   $S_I \leftarrow \emptyset$ 
3   $nd \leftarrow 0$ 
4   $I \leftarrow$  interpretación vacía
5  Repetir
6      Repetir
7          Determinar en el nivel  $nd$  las cláusulas de  $S \cup S_I$  satisfechas,
            contradichas y unitarias por  $I$ 
8          Caso Todas las cláusulas de  $S \cup S_I$  son satisfechas por  $I$  entonces
9              Devolver  $S$  es consistente
10         Caso Alguna cláusula  $C$  de  $S \cup S_I$  es contradicha por  $I$  entonces
11             Si  $nd = 0$  entonces
12                 Devolver  $S$  es inconsistente
13                 Incluir un nodo  $\square$  en el nivel  $nd$  del grafo de implicación
14                 Para cada literal  $L \in C$  incluir en el grafo de implicación un arco
                    de  $L^c$  a  $\square$ 
15                 Inferir una nueva cláusula  $C_I$  a partir del grafo de implicación
16                 Añadir  $C_I$  a  $S_I$ 
17                 Realizar el procedimiento de vuelta atrás no cronológico
18             Caso  $S \cup S_I$  contiene cláusulas unitarias por  $I$  entonces
19                 Propagar restricción booleana
20             Ningún caso anterior
21                 Interrumpir el bucle de la línea 6
22          $nd \leftarrow nd + 1$ 
23         Elegir del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  un literal  $L$  que no
            tenga valor asignado por  $I$ 
24         Incluir un nodo  $L$  como literal de decisión en el nivel  $nd$  del grafo
            de implicación
25         Establecer  $I(L) = 1$ 

```

Procedimiento de inferencia de cláusulas:

- 1 Recorrer hacia atrás el grafo de implicación, desde el nodo  $\square$  hasta los literales de decisión
- 2 Recopilar los literales de decisión  $L_1, \dots, L_n$  a los que se termine llegando
- 3 Inferir la cláusula  $C_I = \{L_1^c, \dots, L_n^c\}$

Procedimiento de vuelta atrás no cronológico:

- 1 **Si**  $C_1$  es unitaria **entonces**
- 2      $nd\_objetivo \leftarrow 0$
- 3 **Si no entonces**
- 4      $nd\_objetivo \leftarrow$  máximo de los niveles de decisión, distintos del actual, de los complementarios de los literales de  $C_1$
- 5 **Para todo**  $nd > nd\_objetivo$  **hacer**
- 6     Eliminar toda la información del nivel  $nd$

Propagación de restricción booleana:

- 1 Elegir  $C$  una cláusula unitaria por  $I$
- 2  $L \leftarrow$  literal libre de  $C$
- 3 Incluir un nodo  $L$  como literal de implicación en el nivel  $nd$  del grafo de implicación
- 4 Para cada literal  $L' \in C$  distinto de  $L$  incluir en el grafo de implicación un arco de  $L'^c$  a  $L$
- 5 Establecer  $I(L) = 1$

### Ejemplo 8:

Consideremos el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}\}$$

y apliquemos el algoritmo CDCL para decidir si  $S$  es o no consistente. Usaremos la heurística del orden alfabético para elegir los literales de decisión.

1. Inicialmente se tiene

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
Interpretación parcial $I$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

2. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 1, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $p$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

3. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 2, eligiendo como literal de decisión

de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $q$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	
2	$q$	
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1, I(q) = 1$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

4. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$  y no hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo pasa al siguiente nivel de decisión, en este caso el nivel 3, eligiendo como literal de decisión de ese nivel un literal del dominio de las cláusulas no satisfechas por  $I$  que no tenga un valor asignado por  $I$ , en este caso  $s$ , aplicando la heurística del orden alfabético.

Se tiene entonces

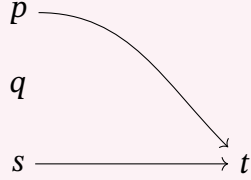
Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	
2	$q$	
3	$s$	
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$		$\{\neg p, \neg s, t\}$
Resto de cláusulas			
$\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

5. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p, \neg s, t\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $t$ , a verdadero.

Se tiene entonces

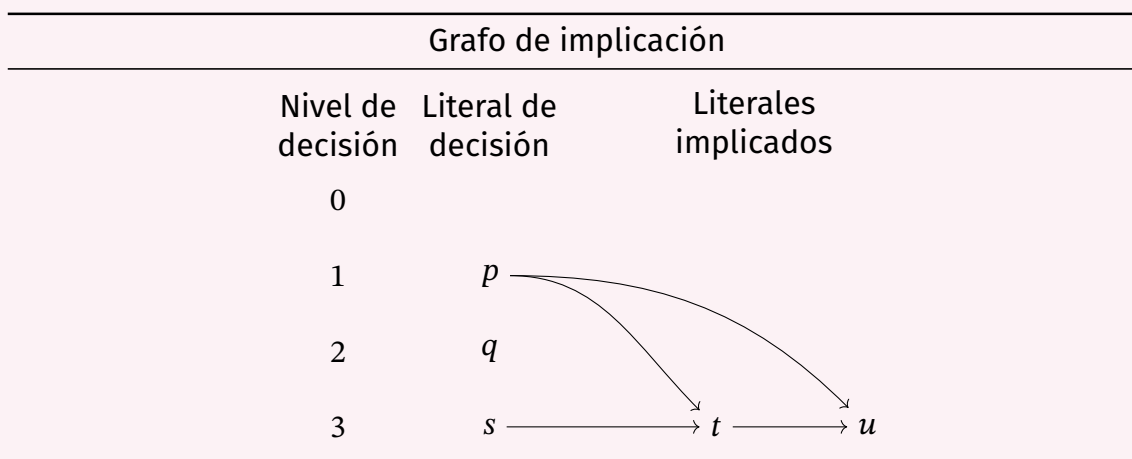
Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	
2	$q$	
3	$s$	
		$t$
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg s, t\}$		$\{\neg p, \neg t, u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$
Resto de cláusulas			

6. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, \neg t, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces



Interpretación parcial $I$
$I(p) = 1, I(q) = 1, I(s) = 1, I(t) = 1, I(u) = 1$
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas

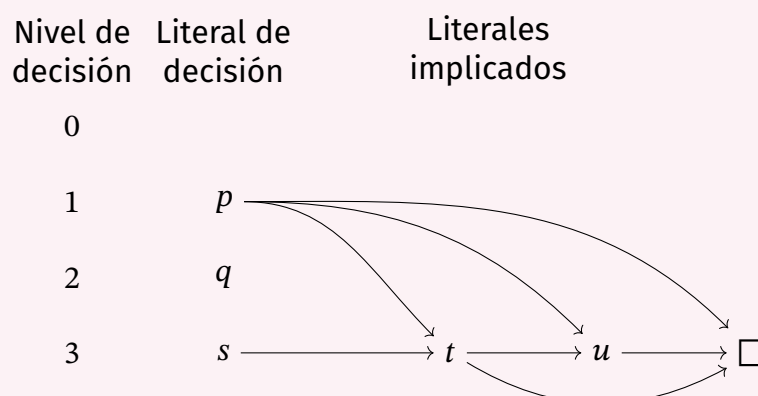
por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		
2	$\{q, r\}$		
3	$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, \neg t, u\}$	$\{\neg p, \neg t, \neg u\}$	

Resto de cláusulas

7. Puesto que la cláusula  $\{\neg p, \neg t, \neg u\}$  es contradicha por  $I$  y no nos encontramos en el nivel de decisión 0, se completa el grafo de implicación como sigue:

## Grafo de implicación



Recorriendo hacia atrás el grafo desde el nodo  $\square$  se llega a los literales de decisión  $p$  y  $s$ , lo que permite al algoritmo inferir la cláusula  $\{\neg p, \neg s\}$ , es decir, deducir que  $S$  no tiene modelos en los que las variables  $p$  y  $s$  sean verdaderas a la vez.

Como la cláusula inferida no es unitaria, el algoritmo realiza una vuelta atrás al nivel 1 (el nivel de decisión de  $p$ , ya que  $s$  es el literal de decisión del nivel actual), eliminando toda la información de los niveles 2 y 3.

Se tiene entonces

## Grafo de implicación

Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	

Interpretación parcial  $I$ 

$$I(p) = 1$$

Conjunto  $S_I$  de cláusulas inferidas

$$\{\neg p, \neg s\}$$

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:



Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}$		$\{\neg p, \neg s\}$
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

8. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p, \neg s\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg s$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	$\neg s$
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1, I(s) = 0$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		
$\{\neg p, \neg s\}$		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, \neg s\}$		$\{\neg p, s, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}$
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}$			

9. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una

restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , por ejemplo  $\{\neg p, s, u\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $u$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	$\neg s \rightarrow u$

Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 1, I(s) = 0, I(u) = 1$		

Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		
$\{\neg p, \neg s\}$		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			
1	$\{p, q\}, \{\neg p, \neg s, t\},$ $\{\neg p, \neg s\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}$	$\{\neg p, s, \neg u\}$	$\{\neg p, \neg t, \neg u\}$

Resto de cláusulas		
$\{q, r\},$		

10. Puesto que la cláusula  $\{\neg p, s, \neg u\}$  es contradicha por  $I$  y no nos encontramos en el nivel de decisión 0, se completa el grafo de implicación como sigue:

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
1	$p$	$\neg s \rightarrow u \rightarrow \square$

Recorriendo hacia atrás el grafo desde el nodo  $\square$  se llega al literal de decisión  $p$ , lo que permite al algoritmo inferir la cláusula  $\{\neg p\}$ , es decir, deducir que  $S$  no tiene modelos en los que la variable  $p$  sea verdadera.

Como la cláusula inferida es unitaria, el algoritmo realiza una vuelta atrás al nivel 0, eliminando toda la información del resto de niveles.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		
Interpretación parcial $I$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		
$\{\neg p, \neg s\}, \{\neg p\}$		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0			$\{\neg p\}$
Resto de cláusulas			
$\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\}, \{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\}, \{\neg p, \neg t, \neg u\}, \{\neg p, \neg s\}$			

11. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{\neg p\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $\neg p$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		$\neg p$
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 0$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		
$\{\neg p, \neg s\}, \{\neg p\}$		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}, \{\neg p, \neg s\},$ $\{\neg p\}$		$\{p, q\}$
Resto de cláusulas			
$\{q, r\}$			

12. Puesto que no todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , no hay cláusulas contradichas por  $I$ , pero sí hay cláusulas unitarias por  $I$ , el algoritmo propaga una restricción booleana. Para ello elige una cláusula unitaria por  $I$ , en este caso  $\{p, q\}$ , y establece su literal libre, en este caso  $q$ , a verdadero.

Se tiene entonces

Grafo de implicación		
Nivel de decisión	Literal de decisión	Literales implicados
0		$\neg p \longrightarrow q$
Interpretación parcial $I$		
$I(p) = 0, I(q) = 1$		
Conjunto $S_I$ de cláusulas inferidas		
$\{\neg p, \neg s\}, \{\neg p\}$		

por lo que el algoritmo clasifica las cláusulas como sigue:

Nivel de decisión	Satisfechas por $I$	Contradichas por $I$	Unitarias por $I$
0	$\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg p, s, u\},$ $\{\neg p, \neg t, u\}, \{\neg p, s, \neg u\},$ $\{\neg p, \neg t, \neg u\}, \{\neg p, \neg s\},$ $\{\neg p\}, \{p, q\}$ $\{q, r\}$		
Resto de cláusulas			

13. Puesto que todas las cláusulas son satisfechas por  $I$ , el algoritmo concluye que el conjunto  $S$  es consistente.

Como la interpretación parcial obtenida solo asigna un valor de verdad a las variables proposicionales  $p$  y  $q$ , para obtener un modelo de  $S$  hay que extender esa interpretación al resto de variables que ocurren en  $S$ , asignándoles valores arbitrarios. Se pueden obtener, por tanto, 16 modelos de  $S$  (que, en este caso, son los únicos que tiene).