Lógica Informática

Resolución proposicional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Resolventes

Complementario de un literal: $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p \\ p & \text{si } L = \neg p \end{cases}$

Sean C_1 y C_2 cláusulas y L literal tales que $L \in C_1$ y $L^c \in C_2$. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es la cláusula

$$Res_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

Es decir, es la cláusula que contiene todos los literales de C_1 y C_2 , salvo el literal L de C_1 y el literal L^c de C_2.

$$\begin{array}{l}
Res_q(\{p, \underline{q}\}, \{\underline{\neg q}, r\}) = \{p, r\} \\
Res_q(\{\underline{q}, \neg p\}, \{p, \underline{\neg q}, r\}) = \{\neg p, p, r\} \\
Res_{\neg p}(\{q, \underline{\neg p}\}, \{\underline{p}, \neg q, r\}) = \{q, \neg q, r\} \\
Res_{\neg p}(\{q, \underline{\neg p}\}, \{q, \underline{p}\}) = \{q\} \\
Res_p(\{\underline{p}\}, \{\underline{\neg p}\}) = \Box
\end{array}$$

Refutación por resolución

Un conjunto de cláusulas es inconsistente si y sólo si es posible obtener $\Box$ a partir del cálculo de resolventes entre las cláusulas del conjunto.

$S = \{\{p, q\}_1, \{p, \neg q\}_2, \{\neg p, q\}_3, \{\neg p, \neg q\}_4\}$ es inconsistente:

$$\begin{aligned} Res_p(C_1, C_3) &= \{q\}_5 \\ Res_p(C_2, C_4) &= \{\neg q\}_6 \\ Res_q(C_5, C_6) &= \Box \end{aligned}$$

Ejercicio Demostrar por resolución que:

$$\{p \to q, q \to (p \wedge r)\} \models p \to ((p \to q) \to r)$$

Resolución por saturación

Dado un conjunto de cláusulas, S, el conjunto de todas las resolventes que se pueden obtener a partir de S es:

$$Res(S) = \{Res_L(C_1, C_2) | C_1, C_2 \in S, L \in C_1, L^c \in C_2\}$$

Dato de partida: conjunto de cláusulas S
Objetivo: determinar si S es consistente
Procedimiento:

1. Repetir
   1.1 Calcular $Res(S)$
   1.2 Si $\square \in Res(S)$: parar y devolver `inconsistente`.
   1.3 Si $Res(S) \subseteq S$ (es decir, si las resolventes no proporcionan cláusulas nuevas): parar y devolver `consistente`.
   1.4 $S \Leftarrow S \cup Res(S)$

Ejemplo

$S = \{\{p, q, r\}_1, \{\neg p, q\}_2, \{\neg q, r\}_3, \{\neg r\}_4, \{p, r\}_5\}$ es inconsistente

$$Res_1(S) = \begin{cases} Res_p(C_1, C_2) = \{q, r\}_6 \\ Res_q(C_1, C_3) = \{p, r\} \\ Res_r(C_1, C_4) = \{p, q\}_7 \\ Res_{\neg p}(C_2, C_5) = \{q, r\} \\ Res_q(C_2, C_3) = \{\neg p, r\}_8 \\ Res_r(C_3, C_4) = \{\neg q\}_9 \\ Res_{\neg r}(C_4, C_5) = \{p\}_{10} \end{cases}$$

$$Res_2(S) = \begin{cases} Res_p(C_1, C_8) = \{q, r\} \\ Res_q(C_1, C_9) = \{p, r\} \\ Res_{\neg p}(C_2, C_7) = \{q\}_{11} \\ Res_{\neg p}(C_2, C_{10}) = \{q\} \\ Res_q(C_2, C_9) = \{\neg p\}_{12} \\ Res_{\neg q}(C_3, C_6) = \{r\}_{13} \\ Res_{\neg q}(C_3, C_7) = \{p, r\} \\ Res_{\neg r}(C_4, C_6) = \{q\} \\ Res_{\neg r}(C_4, C_8) = \{\neg p\} \\ Res_p(C_5, C_8) = \{r\} \\ Res_q(C_6, C_9) = \{r\} \\ Res_p(C_7, C_8) = \{q, r\} \\ Res_q(C_7, C_9) = \{p\} \\ Res_{\neg p}(C_8, C_{10}) = \{r\} \end{cases}$$

$$Res_3(S) = \begin{cases} Res_p(C_1, C_{12}) = \{q, r\} \\ Res_{\neg q}(C_3, C_{11}) = \{r\} \\ Res_{\neg r}(C_4, C_{13}) = \Box \\ \ldots \end{cases}$$

Subsunción

Dados un conjunto de cláusulas, S, y $C \in S$ una tautología (una cláusula que contiene a un literal y a su complementario): S es consistente si y sólo si $S \setminus \{C\}$ es consistente.

Una cláusula, D, subsume a una cláusula, C, si $D \subsetneq C$ (es decir, $D \subseteq C$ y $D \neq C$).

Dados un conjunto de cláusulas, S, y dos cláusulas D y $C \in S$ tales que D subsume a C: S es consistente si y sólo si $S \setminus \{C\}$ es consistente.

Dado un conjunto de cláusulas, S, el simplificado de S se obtiene eliminando de S las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras.

$\mathit{simplificado}(S) = S \backslash \{C \in S | C \text{ es tautología o existe } D \in S \text{ tal que } D \subsetneq C\}$

Resolución por saturación con simplificación

Dato de partida: conjunto de cláusulas S
Objetivo: determinar si S es consistente
Procedimiento:

1. Repetir
   1.1 Calcular $Res(S)$
   1.2 Si $\square \in Res(S)$: parar y devolver `inconsistente`.
   1.3 en caso contrario, si $Res(S) \subseteq S$ (es decir, si las resolventes no proporcionan cláusulas nuevas): parar y devolver `consistente`.
   1.4 $S \Leftarrow simplificado(S \cup Res(S))$

Ejemplo

$$S = \{\cancelto{{}_1 C_6 \subsetneq C_1}{\{p, q, r\}_1}, \cancelto{{}_2 C_{11} \subsetneq C_2}{\{\neg p, q\}_2}, \cancelto{{}_1 C_9 \subsetneq C_3}{\{\neg q, r\}_3}, \{\neg r\}_4, \cancelto{{}_1 C_{10} \subsetneq C_5}{\{p, r\}_5}\} \text{ es inconsistente}$$

$$Res_1(S) = \left\{ \begin{array}{l} Res_p(C_1, C_2) = \cancelto{{}_2 C_{11} \subsetneq C_6}{\{q, r\}_6} \\ Res_q(C_1, C_3) = \{p, r\} \\ Res_r(C_1, C_4) = \cancelto{{}_1 C_{10} \subsetneq C_7}{\{p, q\}_7} \\ Res_{\neg p}(C_2, C_5) = \{q, r\} \\ Res_q(C_2, C_3) = \cancelto{{}_2 C_{12} \subsetneq C_8}{\{\neg p, r\}_8} \\ Res_r(C_3, C_4) = \{\neg q\}_9 \\ Res_{\neg r}(C_4, C_5) = \{p\}_{10} \end{array} \right.$$

$$Res_2(S) = \left\{ \begin{array}{l} Res_{\neg p}(C_2, C_{10}) = \{q\}_{11} \\ Res_q(C_2, C_9) = \{\neg p\}_{12} \\ Res_{\neg r}(C_4, C_6) = \{q\} \\ Res_{\neg r}(C_4, C_8) = \{\neg p\} \\ Res_q(C_6, C_9) = \{r\}_{13} \\ Res_{\neg p}(C_8, C_{10}) = \{r\} \end{array} \right.$$

$$Res_3(S) = \left\{ \begin{array}{l} Res_{\neg r}(C_4, C_{13}) = \square \\ \ldots \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$S=\{\cancel{\{p,q\}_1}\xrightarrow{{}_1C_9\subsetneq C_1},\ \cancel{\{\neg p,\neg q\}_2}\xrightarrow{{}_1C_{10}\subsetneq C_2},\ \cancel{\{p,\neg q\}_3}\xrightarrow{{}_1C_9\subsetneq C_3},\ \cancel{\{\neg p,q,r\}_4}\xrightarrow{{}_1C_7\subsetneq C_4},\ \cancel{\{\neg r,s\}_5}\xrightarrow{{}_3C_{16}\subsetneq C_5}\}\text{ es consistente}$$

$$Res_1(S)=\begin{cases} Res_p(C_1,C_2)=\cancel{\{q,\neg q\}_6}\xrightarrow{Taut.} \\ Res_p(C_1,C_4)=\cancel{\{q,r\}_7}\xrightarrow{{}_2C_{15}\subsetneq C_{14}} \\ Res_q(C_1,C_2)=\cancel{\{p,\neg p\}_8}\xrightarrow{Taut.} \\ Res_q(C_1,C_3)=\{p\}_9 \\ Res_{\neg p}(C_2,C_3)=\{\neg q\}_{10} \\ Res_{\neg q}(C_2,C_4)=\cancel{\{\neg p,r\}_{11}}\xrightarrow{{}_2C_{15}\subsetneq C_{11}} \\ Res_p(C_3,C4)=\cancel{\{\neg q,q,r\}}\xrightarrow{Taut.} \\ Res_{\neg q}(C_3,C4)=\cancel{\{p,\neg p,r\}}\xrightarrow{Taut.} \\ Res_r(C_4,C_5)=\cancel{\{\neg p,q,s\}_{12}}\xrightarrow{{}_2C_{13}\subsetneq C_{12}} \end{cases}$$

$$Res_2(S)=\begin{cases} Res_{\neg r}(C_5,C_7)=\cancel{\{q,s\}_{13}}\xrightarrow{C_{16}\subsetneq C_{13}} \\ Res_{\neg r}(C_5,C_{11})=\cancel{\{\neg p,s\}_{14}}\xrightarrow{C_{16}\subsetneq C_{14}} \\ Res_q(C_7,C_{10})=\{r\}_{15} \\ Res_p(C_9,C_{11})=\{r\} \\ Res_p(C_9,C_{12})=\{q,s\} \\ Res_{\neg q}(C_{10},C_{12})=\{\neg p,s\} \end{cases}$$

$$Res_3(S)=\begin{cases} Res_{\neg r}(C_5,C_{15})=\{s\}_{16} \\ Res_p(C_9,C_{14})=\{s\} \\ Res_{\neg q}(C_{10},C_{13})=\{s\} \end{cases}$$

Modelo: $I(p)=1, I(q)=0, I(r)=I(s)=1$

Ejercicios

1. Indicar en cuáles de los siguientes casos se ha aplicado correctamente la regla de resolución proposicional. En los que no, escribir resolventes correctas (de existir).
    - $\{p, q, r, s\}$ es una resolvente de $\{p, q, r\}$ y $\{p, q, s\}$.
    - $\{p\}$ es una resolvente de $\{p, q\}$ y $\{p, \neg q\}$.
    - $\square$ es una resolvente de $\{p, \neg q\}$ y $\{\neg p, q\}$.
    - $\{r, \neg r\}$ es una resolvente de $\{r, \neg r\}$ y $\{r, \neg r\}$.
2. Demostrar que $S = \{\{p, q, r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg r, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
3. Dado $S = \{\{p, r, \neg s\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p, \neg r, \neg s\}, \{\neg p, q, s\}, \{p, q, s\}, \{\neg q, \neg r\}, \{p, \neg r, \neg s\}\}$, demostrar que es consistente y obtener un modelo a partir de la resolución.
4. Demostrar que $\{r \leftrightarrow p \vee q, s \rightarrow p, \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t\} \models \neg p \rightarrow q \vee t$.
5. Demostrar que $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$ es tautología.

Ejercicios

1. Juan está matriculado en tres asignaturas: Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que
    - Le gusta al menos una de las tres asignaturas.
    - Si le gustase el Álgebra (pero no el Dibujo), entonces le gustaría la Lógica.
    - O le gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos.
    - Si le gustase el Dibujo, entonces le gustaría el Álgebra.

    Decidir, mediante resolución, si los comentarios son consistentes y, en ese caso, determinar qué asignaturas le gustan.
2. En una isla habitan dos tribus, A y B. Todos los miembros de la tribu A siempre dicen la verdad, mientras que todos los de la tribu B siempre mienten. Llegamos y le preguntamos a un habitante si allí hay oro, a lo que responde: Hay oro en la isla si y sólo si yo siempre digo la verdad. ¿Hay oro en la isla? ¿Podemos determinar a qué tribu pertenece el que nos respondió?
3. Consideremos la expresión: Cara, yo gano; cruz, tú pierdes. Demostrar que yo gano.