Lógica Informática

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Contenidos

Lógica informática

Lógica matemática aplicada a la informática

Objetivos:

- Construcción de sistemas formales
- Estudio del proceso de inferencia: extraer conclusiones a partir de premisas.

$$\boxed{\text{Representación del conocimiento} + \text{Razonamiento}}$$

Algunos sistemas lógicos

- Lógica proposicional
  $\{\mathit{llueve} \to \mathit{sueloMojado}, \mathit{llueve}\} \models \mathit{sueloMojado}$
- Lógica de primer orden
  $\{\forall x\, \mathit{despierto}(x)\} \models \mathit{despierto}(a)$
- Lógicas de orden superior (segundo orden, . . .)
  $\{\forall P\, \exists x\, P(x), \forall x\, (x = a)\} \models \mathit{despierto}(a) \land \mathit{dormido}(a)$
- Lógicas modales: necesariamente/posiblemente cierto (temporales: siempre/a veces cierto, . . .)
- Lógicas descriptivas
- . . .

Aplicaciones (a la informática)

Probando ejemplos es posible demostrar que un programa no es correcto, pero en general es imposible demostrar que un programa es correcto.

- Programación lógica
- Verificación y síntesis automática de programas
- Análisis de algoritmos
- Verificación de circuitos electrónicos.
- Modelización y razonamiento sobre sistemas
- ...

Argumentos y formalización

1. **Si** el tren llega a las 7 **y no** hay taxis en la estación, **entonces** Juan llega tarde a la reunión. Juan **no** llega tarde a la reunión. El tren llega a las 7. **De lo anterior se deduce** que hay taxis en la estación.

2. **Si** hay corriente **y** la lámpara **no** está fundida, **entonces** la lámpara está encendida. La lámpara **no** está encendida. Hay corriente. **De lo anterior se deduce** que la lámpara está fundida.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2
p	el tren llega a las 7	hay corriente
q	hay taxis en la estación	la lámpara está fundida
r	Juan llega tarde a la reunión	la lámpara está encendida

Si p **y no** q, **entonces** r. **No** r. p. **De lo anterior se deduce** q.

$$\{(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p\} \models q$$

Sintaxis de la lógica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional

Árboles de análisis o formación. Subfórmulas

Criterios de reducción de paréntesis

El lenguaje de la lógica proposicional

Elementos del lenguaje:

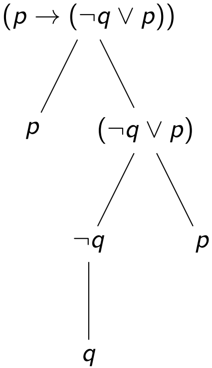
- Variables proposicionales: $VP = \{p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots\}$
- Conectivas lógicas: negación $\neg$, conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, condicional $\rightarrow$, bicondicional $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y).

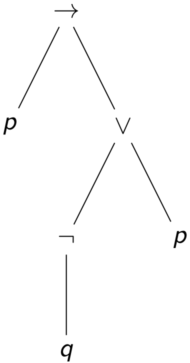
Fórmulas proposicionales: *Prop*

- Las variables proposicionales son fórmulas (llamadas fórmulas atómicas): $VP \subseteq Prop$
- Dada una fórmula, $F \in Prop$, se tiene que: $\neg F \in Prop$
- Dadas dos fórmulas, F y $G \in Prop$, se tiene que:

$$(F \wedge G) \in Prop \qquad (F \vee G) \in Prop$$
$$(F \rightarrow G) \in Prop \qquad (F \leftrightarrow G) \in Prop$$

Árbol de análisis o formación
Subfórmulas





Subfórmulas (nodos del árbol/subárbol):

$$(p \to (\neg q \vee p)) \qquad (\neg q \vee p) \qquad \neg q \qquad p \qquad q$$

Ejercicio

Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas proposicionales, construir el árbol de formación y proporcionar el conjunto de subfórmulas de las que lo sean:

1. $(\neg(p \to \neg q)$
2. $(p \to q) \vee \neg p \to q$
3. $\neg(s \to (p \wedge q\neg))$
4. $(((q \to (r \vee \neg s)) \to (\neg\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg r)$
5. $\neg(p \to (\neg q \to \neg(r \to (\neg s \to t))))$
6. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$
7. $((\neg q \vee (r \to (\neg p \leftrightarrow q))) \leftrightarrow (q \to (\neg r \vee (p \leftrightarrow \neg q))))$

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos:

Fórmula	Simplificación
$(p \wedge (q \vee r))$	$p \wedge (q \vee r)$
$(p \vee ((q \leftrightarrow s) \rightarrow p))$	$p \vee ((q \leftrightarrow s) \rightarrow p)$

- Orden de precedencia entre las conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Fórmula	Simplificación
$(((p \rightarrow q) \vee \neg p) \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \vee \neg p \rightarrow q$
$((p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee q))$	$p \wedge q \rightarrow \neg p \vee q$

- Asociatividad por la derecha:

Fórmula	Simplificación
$(p \vee (q \vee r))$	$p \vee q \vee r$
$\neg(p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(r \rightarrow (\neg s \rightarrow t))))$	$\neg(p \rightarrow \neg q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s \rightarrow t))$

Ejercicios

- Eliminar todos los paréntesis posibles de las siguientes fórmulas:
  1. $(((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg p))$
  2. $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r))$
  3. $((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (\neg\neg p \wedge q))$
  4. $\neg((p \wedge p) \wedge (p \wedge p))$
  5. $(((p \vee q) \vee (r \vee s)) \rightarrow \neg p)$
  6. $(p \rightarrow ((q \leftrightarrow s) \rightarrow p))$
- Escribir con paréntesis las siguientes fórmulas:
  1. $p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s$
  2. $q \rightarrow \neg p \vee r \vee s$
  3. $p \vee q \leftrightarrow \neg r \vee s$
  4. $q \wedge \neg q \vee p \rightarrow r$

Semántica de la lógica proposicional

Valores de verdad e interpretaciones

Modelos y satisfacibilidad

Equivalencia

Conjuntos de fórmulas: modelos, consistencia y consecuencia lógica

Demostración de propiedades

Valores de verdad e interpretaciones

Existen, únicamente, dos posibles significados o valores de verdad, $\mathbb{B}$:

- Verdadero: V, True, T, 1
- Falso: F, False, 0

El significado o valor de verdad de una fórmula depende del contexto/interpretación que se considere $I : VP \longrightarrow \mathbb{B}$

$$I(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(F) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$I(F \wedge G) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(F) = I(G) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad I(F \to G) = \begin{cases} 0 & \text{si } I(F) = 1 \text{ e } I(G) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$I(F \vee G) = \begin{cases} 0 & \text{si } I(F) = I(G) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad I(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(F) = I(G) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tabla de verdad

$$F = (p \vee q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$$

	p	q	r	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \rightarrow r$	F
I_1	0	0	0	1	0	0	0
I_2	0	0	1	1	0	1	0
I_3	0	1	0	0	1	1	1
I_4	0	1	1	0	1	1	1
I_5	1	0	0	1	1	0	0
I_6	1	0	1	1	1	1	1
I_7	1	1	0	0	1	1	1
I_8	1	1	1	0	1	1	1

Tabla de verdad simplificada

$$F = (p \vee q) \wedge (\neg q \to r)$$

	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(\neg q$	$\to$	$r)$
I_1	0	0	0	0	1 0	0	0
I_2	0	0	0	0	1 0	1	1
I_3	0	1	1	1	0 1	1	0
I_4	0	1	1	1	0 1	1	1
I_5	1	1	0	0	1 0	0	0
I_6	1	1	0	1	1 0	1	1
I_7	1	1	1	1	0 1	1	0
I_8	1	1	1	1	0 1	1	1

Modelos y satisfacibilidad

Una interpretación, I, es modelo de una fórmula, F, (y se denota $I \models F$) si $I(F) = 1$. En caso contrario, si $I(F) = 0$, I es un contramodelo de F (y se denota $I \not\models F$).

Clasificación de fórmulas:

- Satisfacible: tiene, al menos, un modelo
- Insatisfacible/contradicción: no tiene ningún modelo
- Tautología/válida: no tiene contramodelos (y se denota $\models F$)
- Contingente: no es insatisfacible, ni tautología

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Prop</td></tr>
<tr><td align="center">Tautologías/Válidas
$p \vee \neg p$</td><td align="center">Contingentes
p</td><td align="center">Contradicciones
$\neg p \wedge p$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Satisfacibles</td><td align="center">Insatisfacibles</td></tr>
</table>

Ejercicios

- Sea $F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$. Calcular el valor de verdad de F para las interpretaciones:

  1. $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
  2. $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

- Demostrar, a partir de su tabla de verdad, que:

  1. $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
  2. $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

Ejercicios

- Obtener todos los modelos y clasificar:

  1. $p \to q$
  2. $\neg(p \to q)$
  3. $(p \to q) \vee (q \to p)$
  4. $(p \to q) \wedge \neg(p \to q)$
  5. $p \to (q \to r \wedge q)$
  6. $q \to (p \wedge \neg p) \to r$

- Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 fórmulas proposicionales y J una interpretación. Sabemos que: F_1 es una tautología, F_2 es insatisfacible, F_3 es satisfacible y J es contramodelo de F_4. Para cada uno de los siguientes enunciados, decidir razonadamente si es verdadero, falso o imposible de saber con la información proporcionada:

  1. $F_2 \to F_3$ es tautología.
  2. $F_1 \to F_4$ es tautología.
  3. J es modelo de $F_3 \wedge \neg F_4$.
  4. $F_2 \vee F_4$ es satisfacible.
  5. J es contramodelo de $F_1 \vee F_2 \to F_3 \wedge F_4$.

Selección de tautologías

- $F \to F$ (ley de identidad).
- $F \vee \neg F$ (ley del tercio excluido).
- $\neg(F \wedge \neg F)$ (principio de no contradicción).
- $(\neg F \to F) \to F$ (ley de Clavius).
- $\neg F \to (F \to G)$ (ley de Duns Scoto).
- $((F \to G) \to F) \to F$ (ley de Peirce).
- $(F \to G) \wedge F \to G$ (modus ponens).
- $(F \to G) \wedge \neg G \to \neg F$ (modus tollens).

Satisfacibilidad y tautologicidad

Problema SAT: Dada una fórmula determinar si es satisfacible

Problema TAUT: Dada una fórmula determinar si es tautología

$$F \text{ es una tautología} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg F \text{ es insatisfacible}$$

Equivalencia

Dos fórmulas, F y G, son equivalentes si tienen los mismos modelos (y se denota $F \equiv G$).

$$F \equiv G \quad \Longleftrightarrow \quad \models F \leftrightarrow G$$

Propiedades básicas

- Reflexiva: $F \equiv F$
- Simétrica: $F \equiv G \Longleftrightarrow G \equiv F$
- Transitiva: $F \equiv G$ y $G \equiv H \Longrightarrow F \equiv H$

Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: si en una fórmula, F, se sustituye una de sus subfórmulas, G, por una fórmula equivalente, G', entonces la fórmula resultante, F', es equivalente a F.

$G = \neg(p \wedge q)$	$F = \neg(p \wedge q) \to \neg(p \wedge \neg\neg r)$
$G' = (\neg p \vee \neg q)$	$F' = (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge \neg\neg r)$

Equivalencias notables

Idempotencia	$F \vee F \equiv F$	$F \wedge F \equiv F$
Conmutatividad	$F \vee G \equiv G \vee F$	$F \wedge G \equiv G \wedge F$
Asociatividad	$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$ $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$	
Absorción	$F \wedge (F \vee G) \equiv F$	$F \vee (F \wedge G) \equiv F$
Distributividad	$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	
Doble negación	$\neg\neg F \equiv F$	
Leyes de *De Morgan*	$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$	$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
Leyes de tautología (F tautología)	$F \wedge G \equiv G$	$F \vee G \equiv F$
Leyes de contradicciones (F contradicción)	$F \wedge G \equiv F$	$F \vee G \equiv G$

Conjuntos de fórmulas: modelos, consistencia y consecuencia lógica

Una interpretación, I, es modelo de un conjunto de fórmulas, S, (y se denota $I \models S$) si para toda fórmula, F, tal que $F \in S$, se tiene que $I \models F$.

Clasificación de conjuntos:

- Consistente: tiene, al menos, un modelo
- Inconsistente: no tiene ningún modelo

Una fórmula, F, es consecuencia lógica de una conjunto de fórmulas, S, (y se denota $S \models F$) si para toda interpretación I, tal que $I \models S$ se tiene que $I \models F$.

Propiedades de la consecuencia

- Reflexividad: $F \in S \Longrightarrow S \models F$
- Monotonía: $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2 \Longrightarrow S_2 \models F$
- Transitividad: $S \models F$ y $\{F\} \models G \Longrightarrow S \models G$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

$$
\begin{array}{ccc}
\{F_1, \dots, F_n\} \models G & \Longleftrightarrow & \models F_1 \land \dots \land F_n \to G \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\neg(F_1 \land \dots \land F_n \to G) \text{ es insatisfacible} & \Longleftrightarrow & \{F_1, \dots, F_n, \neg G\} \text{ es inconsistente}
\end{array}
$$

Ejercicios

- Determinar si las siguientes interpretaciones son modelo del conjunto $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \rightarrow r\}$

  1. $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
  2. $I_2(p) = I_2(r) = 0, I_2(q) = 1$

- Determinar, utilizando tablas de verdad, si los siguientes conjuntos son consistentes. En caso afirmativo, proporcionar todos los modelos.

  1. $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$
  2. $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r, \neg r\}$

- Decidir si la consecuencia lógica es o no cierta.

  1. $\{p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q\} \models p \rightarrow r$
  2. $\{p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q\} \models \neg p \rightarrow \neg r$
  3. $\{p \wedge \neg p\} \models r \leftrightarrow r \vee q$
  4. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
  5. $\{p\} \models p \wedge q$

Ejercicio

Formalizar, y verificar, las siguientes argumentaciones:

1. Se sabe que:
   - Los animales con pelo que dan leche son mamíferos
   - Los mamíferos que tienen pezuñas, o que rumian, son ungulados.
   - Los ungulados de cuello largo son jirafas.
   - Los ungulados con rayas negras son cebras.

   Se observa un animal que tiene pelo, pezuñas y rayas negras, y se concluye que el animal es una cebra.

2. En una isla hay dos tribus, los veraces (siempre dicen la verdad) y los mentirosos (siempre mienten). Un viajero se encuentra a con tres isleños, A, B y C, que le dicen:

   A B y C son veraces si, y sólo si, C es veraz.
   B Si A y C son veraces entonces, A es mentiroso y B y C son veraces
   C B es mentiroso si, y sólo si, A o B es veraz

   ¿a qué tribu pertenece cada isleño?

Ejercicio

Tres niños, Manolito, Juanito y Pepito, son sorprendidos después de haberse roto el cristal de una ventana cerca de donde ellos estaban jugando al fútbol. Al preguntarles si alguno de ellos lo había roto, respondieron lo siguiente:

- Manolito dijo: "Juanito lo hizo, Pepito es inocente"
- Juanito dijo: "Si Manolito lo rompió, entonces Pepito es inocente"
- Pepito dijo: "Yo no lo hice, pero uno de los otros dos sí lo rompió"

1. Formalizar lo que dijo cada niño
2. ¿Son consistentes las afirmaciones anteriores?
3. Si se comprueba que ninguno de los tres niños rompió el cristal, ¿quiénes han mentido?
4. Si se asume que todos dicen la verdad, ¿quién rompió el cristal?

Ejercicio

Formalizar los siguientes argumentos:

1. Si Juan es andaluz, entonces Juan es europeo. Juan es andaluz. Por lo tanto, Juan es europeo.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. Por lo tanto, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. Por lo tanto, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.
4. Si Dios fuera capaz de evitar el mal y quisiera hacerlo, lo haría. Si Dios fuera incapaz de evitar el mal, no sería omnipotente; si no quisiera evitar el mal sería malévolo. Dios no evita el mal. Si Dios existe, es omnipotente y no es malévolo. Por lo tanto, Dios no existe.

Demostración de propiedades

Demostración por inducción

Para demostrar que para todas las fórmulas proposicionales se cumple una determinada propiedad, P, hay que:

1. Demostrar que todas las fórmulas atómicas verifican P
2. Suponer que una fórmula, F, verifica P; y demostrar que $\neg F$ también verifica P.
3. Suponer que dos fórmulas, F y G, verifican P; y demostrar que:
   - $F \wedge G$ verifica P
   - $F \vee G$ verifica P
   - $F \rightarrow G$ verifica P
   - $F \leftrightarrow G$ verifica P

Esquema general de demostración

1. Decidir si todos los objetos de un determinado tipo verifican una cierta propiedad:
   - Falso: proporcionar un objeto del tipo determinado que no verifique la propiedad.
   - Verdadero: realizar un razonamiento formal, considerar un objeto cualquiera del tipo determinado y demostrar que verifica la propiedad.
2. Decidir si existe un objeto de un determinado tipo que verifica una cierta propiedad:
   - Verdadero: proporcionar un objeto del tipo determinado que verifique la propiedad.
   - Falso: realizar un razonamiento formal, considerar un objeto cualquiera del tipo determinado y demostrar que no verifica la propiedad.

Ejercicio

Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son o no ciertas:

1. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.
2. Si $\{F \to G, F\}$ es consistente, entonces G es satisfacible.
3. Existen tautologías tales que todas sus subfórmulas son tautologías.
4. Existen un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tales que $S \models F$ y $S \models \neg F$.
5. Existen un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tales que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.