Python de cero a experto

Autor: Luis Miguel de la Cruz Salas

Unirvesal Functions (*ufunc*)

Una función universal (*ufunc*) es aquella que opera sobre arreglos de numpy (´ndarrays´) elemento por elemento, soportando *broadcasting* y *casting*, entre otras características estándares.

- Se dice que una *ufunc* es un envoltorio (*wrapper*) vectorizado para una función que toma un número fijo de entradas específicas y produce un número de salidas específicas.
- En NumPy, las funciones universales son objetos de la clase ´numpy.ufunc´.
- Muchas de estas funciones están implementadas y compiladas en lenguaje C.
- Las *ufunc* básicas operan sobre escalares, pero existe también un tipo generalizado para el cual los elementos básicos son subarreglos (vectores, matrices, etc.) y se realiza un *broadcasting* sobre las otras dimensiones.

Broadcasting

La siguiente figura muestra varios tipo de *broadcasting* que se aplican en los arreglos y funciones de Numpy.

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [2]:
```
x = np.arange(3)
x
```

Out[2]:
```
array([0, 1, 2])
```

In [3]:
```
y = x + 5
y
```

Out[3]:
```
array([5, 6, 7])
```

In [4]:
```
matriz = np.ones((3,3))
matriz
```

Out[4]:
```
array([[1., 1., 1.],
       [1., 1., 1.],
       [1., 1., 1.]])
```

In [5]:
```
vector = np.arange(3)
vector
```

Out[5]:
```
array([0, 1, 2])
```

In [6]:
```
matriz + vector
```

Out[6]:
```
array([[1., 2., 3.],
       [1., 2., 3.],
       [1., 2., 3.]])
```

In [7]:
```
columna = np.arange(3).reshape(3,1)
columna
```

Out[7]:
```
array([[0],
       [1],
       [2]])
```

In [8]:
```
renglon = np.arange(3)
renglon
```

Out[8]:
```
array([0, 1, 2])
```

In [9]:
```
columna + renglon
```

Out[9]:
```
array([[0, 1, 2],
       [1, 2, 3],
       [2, 3, 4]])
```

In [10]:
```
columna * renglon
```

Out[10]:
```
array([[0, 0, 0],
       [0, 1, 2],
       [0, 2, 4]])
```

Reglas del broadcasting

Para determinar la interacción entre dos arreglos, en Numpy se siguen las siguientes reglas:

- **Regla 1**. Si dos arreglos difieren en sus dimensiones, el *shape* del que tiene menos dimensiones es completado con unos sobre su lado izquierdo
- **Regla 2**. Si el *shape* de los dos arreglos no coincide en alguna dimensión, el arreglo con el *shape* igual a 1 se completa para que coincida con el *shape* del otro arreglo.
- **Regla 3**. Si el *shape* de los dos arreglos no coincide en alguna dimensión, pero ninguna de las dos es igual a 1 entonces se tendrá un error del estilo:

```
ValueError: operands could not be broadcast together with shapes
(4,3) (4,)
```

Ejemplo 1.

In [11]:
```
Mat = np.ones((3,2))
b = np.arange(2)
print(Mat.shape)
print(b.shape)
```

```
(3, 2)
(2,)
```

Cuando se vaya a realizar una operación con estos dos arreglos, por la **Regla 1** lo que Numpy hará internamente es:

```
Mat.shape <--- (3,2)
b.shape   <--- (1,2)
```

Luego, por la **Regla 2** se completa la dimensión del *shape* del arreglo `b` que sea igual 1:

```
Mat.shape <--- (3,2)
b.shape   <--- (2,2)
```

De esta manera es posible realizar operaciones entre ambos arreglos:

In [12]:
```
Mat + b
```

Out[12]:
```
array([[1., 2.],
       [1., 2.],
       [1., 2.]])
```

In [13]:
```
Mat * b
```

Out[13]:
```
array([[0., 1.],
       [0., 1.],
       [0., 1.]])
```

Ejemplo 2.

In [14]:
```
Mat = np.ones((3,1))
b = np.arange(4)
print(Mat.shape)
print(b.shape)
```

```
(3, 1)
(4,)
```

Por la **Regla 1** lo que Numpy hará internamente es:

```
Mat.shape <--- (3,1)
b.shape   <--- (1,4)
```

Por la **Regla 2** se completan las dimensiones de los arreglos que sean igual 1:

```
Mat.shape <--- (3,4)
b.shape   <--- (3,4)
```

De esta manera es posible realizar operaciones entre ambos arreglos:

In [15]:
```
Mat + b
```

Out[15]:
```
array([[1., 2., 3., 4.],
       [1., 2., 3., 4.],
       [1., 2., 3., 4.]])
```

Ejemplo 3.

In [16]:
```
Mat = np.ones((4,3))
b = np.arange(4)
print(Mat.shape)
print(b.shape)
```

```
(4, 3)
(4,)
```

Por la **Regla 1** lo que Numpy hará internamente es:

```
Mat.shape <--- (4,3)
b.shape   <--- (1,4)
```

Por la **Regla 2** se completan las dimensiones de los arreglos que sean igual 1:

```
Mat.shape <--- (4,3)
b.shape   <--- (4,4)
```

Observe que en este caso los shapes de los arreglos no coinciden, por lo que no será posible operar con ellos juntos.

In [17]:
```python
Mat + b
```

```
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-17-ebdc92daa858> in <module>
----> 1 Mat + b

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (4,3) (4,)
```

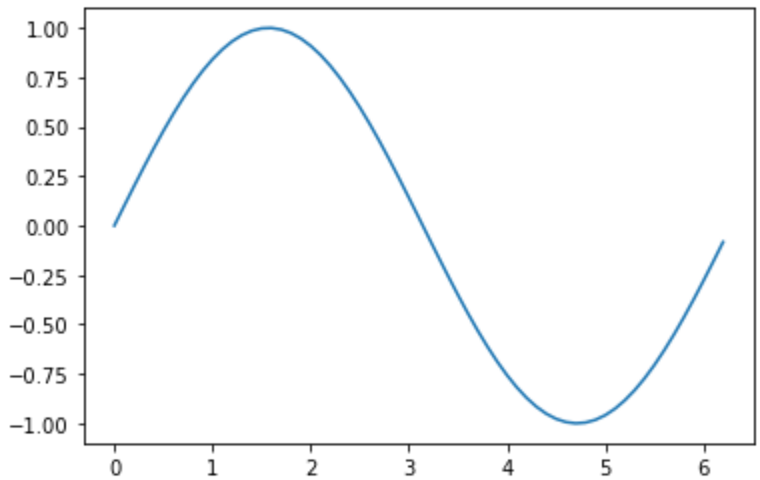
Ufunc disponibles en Numpy

Para una lista completa de todas las funciones universales disponibles en Numpy refierase al siguiente sitio: https://numpy.org/doc/stable/reference/ufuncs.html#available-ufuncs .

Ejemplo 4.

In [18]:
```python
x = np.arange(0, 2*np.pi, 0.1)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,y)
```

Out[18]: `[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f36c89f09d0>]`



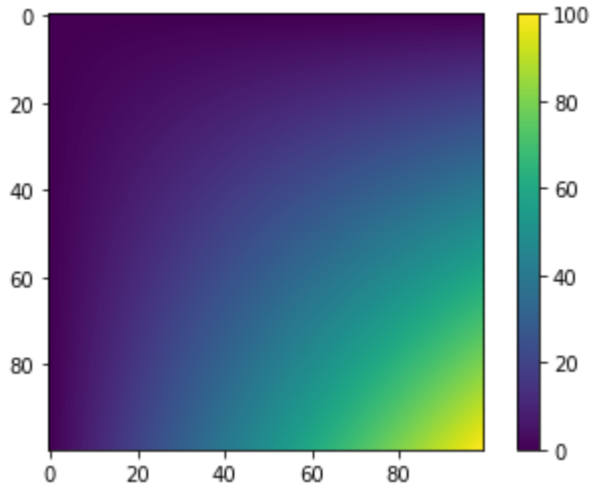
Ejemplo 5.

In [19]:
```python
x = np.linspace(0, 10, 100)                 # Vector renglón
y = np.linspace(0, 10, 100)[:, np.newaxis] # Vector columna
z = x * y
print(f' x.shape = {x.shape} \n y.shape = {y.shape} \n z.shape = {z.shape}')
```

```
x.shape = (100,)
y.shape = (100, 1)
z.shape = (100, 100)
```

In [20]:
```
i = plt.imshow(z)
plt.colorbar(i)
```

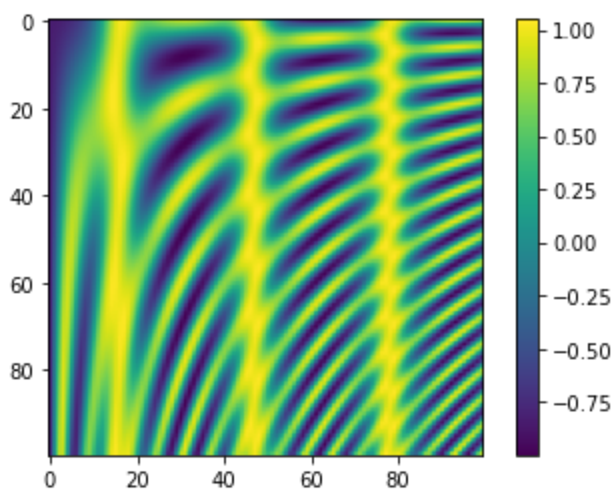
Out[20]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x7f36c8175160>



In [21]:
```
z = np.sin(x) ** 10 + np.cos(10 + y * x) * np.cos(x)
print(f' x.shape = {x.shape} \n y.shape = {y.shape} \n z.shape = {z.shape}')
i = plt.imshow(z)
plt.colorbar(i)
```

```
 x.shape = (100,)
 y.shape = (100, 1)
 z.shape = (100, 100)
```

Out[21]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x7f36c80ba1c0>



Álgebra lineal

In [22]:
```
A = np.linspace(1,9,9).reshape(3,3)
B = np.linspace(1,9,9).reshape(3,3)
a = np.linspace(1,3,3)
b = np.linspace(1,3,3)
print(A)
print(B)
print(a)
print(b)
```

```
[[1. 2. 3.]
 [4. 5. 6.]
 [7. 8. 9.]]
[[1. 2. 3.]
 [4. 5. 6.]
 [7. 8. 9.]]
[1. 2. 3.]
[1. 2. 3.]
```

In [23]:
```
A.T # Transpuesta de la matriz
```

Out[23]:
```
array([[1., 4., 7.],
       [2., 5., 8.],
       [3., 6., 9.]])
```

In [24]:
```
a * b # Producto de dos vectores elemento por elemento
```

Out[24]:
```
array([1., 4., 9.])
```

In [25]:
```
A * B # Producto de dos matrices elemento por elemento
```

Out[25]:
```
array([[ 1.,  4.,  9.],
       [16., 25., 36.],
       [49., 64., 81.]])
```

In [26]:
```
np.dot(a,b) # Producto punto de dos vectores
```

Out[26]:
```
14.0
```

In [27]:
```
a @ b # Producto punto de dos vectores
```

Out[27]:
```
14.0
```

In [28]:
```
np.dot(A,b) # Producto matriz - vector
```

Out[28]:
```
array([14., 32., 50.])
```

In [29]:
```
A @ b # Producto matriz - vector
```

Out[29]:
```
array([14., 32., 50.])
```

In [30]:
```
np.dot(A,B) # Producto matriz - matriz
```

Out[30]:
```
array([[ 30.,  36.,  42.],
       [ 66.,  81.,  96.],
       [102., 126., 150.]])
```

In [31]:
```
A @ B  # Producto matriz - matriz
```

Out[31]:
```
array([[ 30.,  36.,  42.],
       [ 66.,  81.,  96.],
       [102., 126., 150.]])
```

In [32]:
```
c = b[:,np.newaxis] # Agregamos una dimension al vector (vector columna)
print(c.shape)
print(c)
```

```
(3, 1)
[[1.]
 [2.]
 [3.]]
```

In [33]:
```
c * a # Producto externo: vector columna por vector renglón
```

Out[33]:
```
array([[1., 2., 3.],
       [2., 4., 6.],
       [3., 6., 9.]])
```

Paquete `linalg`

Esta biblioteca ofrece varios algorimos para aplicarlos sobre arreglos de numpy (véa aquí la referencia). Todas operaciones de álgebra lineal de Numpy se basan en las bibliotecas BLAS (Basic Linear Algebra Suprograms) y LAPACK (Linear Algebra Package) para proveer de implementaciones eficientes de bajo nivel de los algoritmos estándares.

Estas biblioteca pueden proveer de versiones altamente optimizadas para aprovechar el hardware óptimamente (multihilos y multiprocesador). En estos casos se hace uso de bibliotecas tales como OpenBLAS, MKL (TM), y/o ATLAS.

In [34]:
```
np.show_config() # Para conocer la configuración del Numpy que tengo instalad
```

```
blas_mkl_info:
    libraries = ['mkl_rt', 'pthread']
    library_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/lib']
    define_macros = [('SCIPY_MKL_H', None), ('HAVE_CBLAS', None)]
    include_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/include']
blas_opt_info:
    libraries = ['mkl_rt', 'pthread']
    library_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/lib']
    define_macros = [('SCIPY_MKL_H', None), ('HAVE_CBLAS', None)]
    include_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/include']
lapack_mkl_info:
    libraries = ['mkl_rt', 'pthread']
    library_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/lib']
    define_macros = [('SCIPY_MKL_H', None), ('HAVE_CBLAS', None)]
    include_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/include']
lapack_opt_info:
    libraries = ['mkl_rt', 'pthread']
    library_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/lib']
    define_macros = [('SCIPY_MKL_H', None), ('HAVE_CBLAS', None)]
    include_dirs = ['/home/luiggi/anaconda3/include']
```

Ejemplo 6.

Cruce de dos rectas:

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_1 &= 2 \\ 2x_0 + 6x_1 &= -8 \end{aligned}$$

En forma de sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular el cruce de las rectas resolviendo el sistema lineal:

In [35]:
```
A = np.array([[3, 2],[2,6]] )
b = np.array([2,-8])
print("Matriz A : \n",A)
print("Vector b : \n", b)
sol = np.linalg.solve(A,b) # Función del módulo linalg para resolver el siste
print("Solución del sistema: ", sol)
```

```
Matriz A :
 [[3 2]
 [2 6]]
Vector b :
 [ 2 -8]
Solución del sistema:  [ 2. -2.]
```

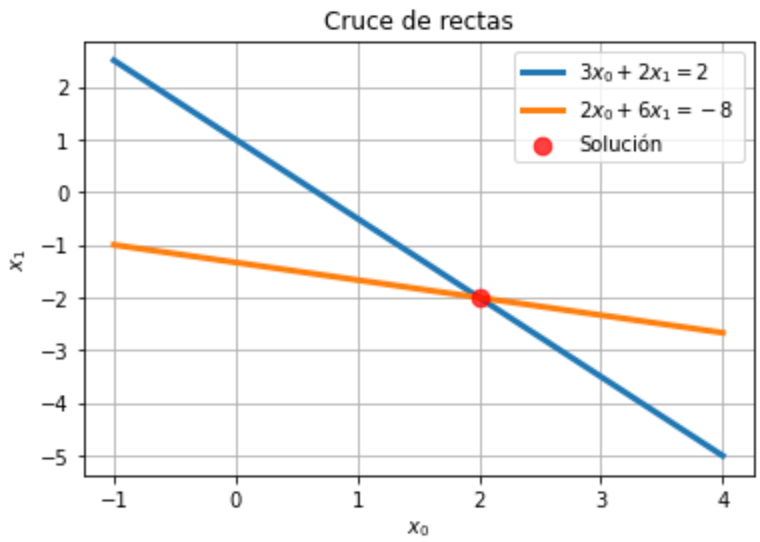
Graficamos las rectas y la solución:

Las ecuaciones de las rectas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_0 + x_1 &= \frac{2}{2} \\ \frac{2}{6}x_0 + x_1 &= -\frac{8}{6} \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} y_0 &= m_0 x + b_0 \\ y_1 &= m_1 x + b_1 \end{aligned} \text{ donde } \begin{aligned} m_0 &= -\frac{3}{2} \qquad b_0 = 1 \\ m_1 &= -\frac{2}{6} \qquad b_1 = -\frac{8}{6} \end{aligned}$$

In [36]:
```
def graficaRectas(x, y0, y1, sol):
    plt.plot(x,y0,lw=3,label = '$3x_0+2x_1=2$')
    plt.plot(x,y1,lw=3,label = '$2x_0+6x_1=-8$')
    plt.scatter(sol[0], sol[1], c='red', s = 75, alpha=0.75, zorder=5, label=
    plt.xlabel('$x_0$')
    plt.ylabel('$x_1$')
    plt.title('Cruce de rectas')
    plt.grid()
    plt.legend()
```

In [37]:
```
m0 = -3/2
b0 = 1
m1 = -2/6
b1 = -8/6
x = np.linspace(-1,4,10)
y0 = m0 * x + b0
y1 = m1 * x + b1

graficaRectas(x, y0, y1, sol)
```

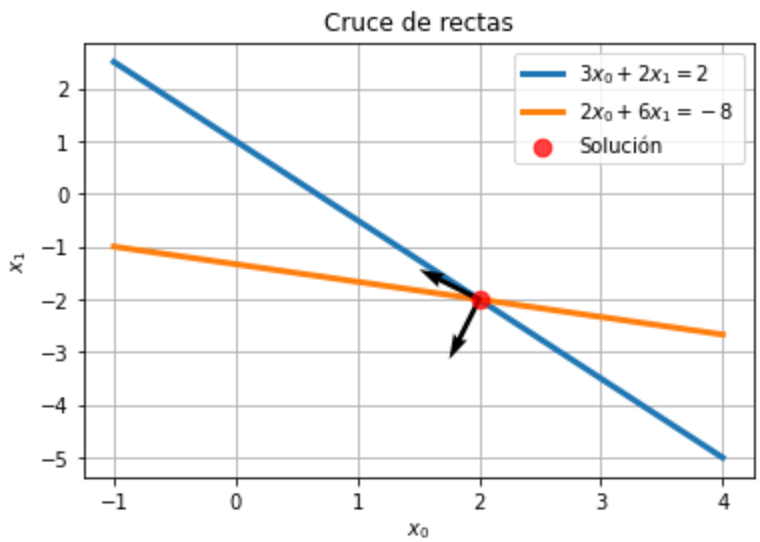


In [38]:
```
eigen = np.linalg.eig(A)
eigen
```

Out[38]:
```
(array([2., 7.]),
 array([[-0.89442719, -0.4472136 ],
        [ 0.4472136 , -0.89442719]]))
```

In [39]:
```
def dibujaEigen(eigen, sol):
    xv,yv = np.meshgrid([sol[0], sol[0]],[sol[1], sol[1]])
    u = np.hstack( (eigen[1][0], np.array([0, 0])) )
    v = np.hstack( (eigen[1][1], np.array([0, 0])) )
    vec = plt.quiver(xv,yv,u,v,scale=10, zorder=5)
```

In [40]:
```
dibujaEigen(eigen, sol)
graficaRectas(x, y0, y1, sol)
```



Forma cuadrática

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b} + c$$

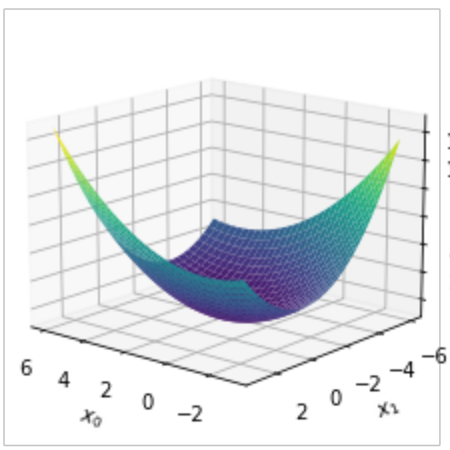
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} A^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

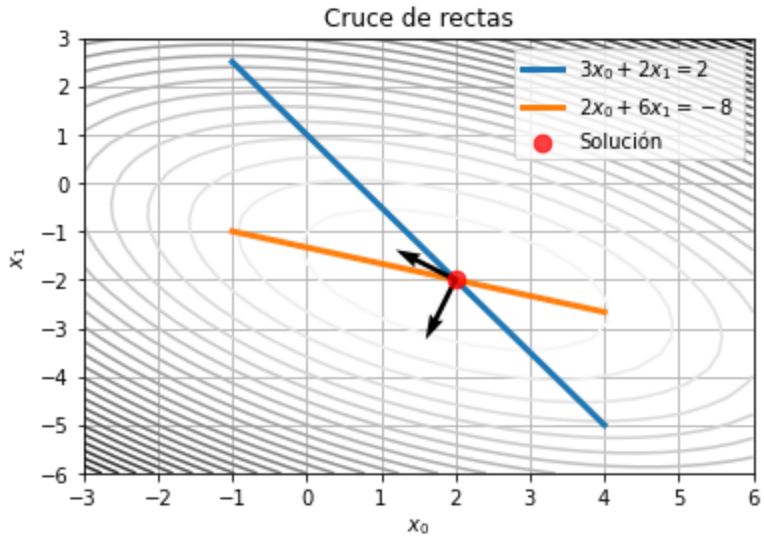
- Cuando A es simétrica: $f'(x) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$
- Entonces un punto crítico de $f(x)$ se obtiene cuando $f'(x) = A\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$, es decir cuando $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

In [41]:
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def dibujaSurf(A,b):
    def f(A,b,x,c):
        return 0.5 * (x.T * A * x) - b.T * x + c

    size_grid = 30
    x1 = np.linspace(-3,6,size_grid)
    y1 = np.linspace(-6,3,size_grid)

    xg,yg = np.meshgrid(x1,y1)
    z = np.zeros((size_grid, size_grid))

    for i in range(size_grid):
        for j in range(size_grid):
            x = np.matrix([[xg[i,j]],[yg[i,j]]])
            z[i,j] = f(A,b,x,0)

    fig = plt.figure()
    surf = fig.gca(projection='3d')
    surf.plot_surface(xg,yg,z,rstride=1,cstride=1, alpha=1.0, cmap='viridis')
    surf.view_init(15, 130)
    surf.set_xlabel('$x_0$')
    surf.set_ylabel('$x_1$')
    surf.set_zlabel('$f$')
    return xg, yg, z
```

In [42]:
```
xg,yg,z = dibujaSurf(A,b)
```



In [43]:
```
dibujaEigen(eigen, sol)
graficaRectas(x, y0, y1, sol)
cont = plt.contour(xg,yg,z,30,cmap='binary')
```



Algoritmo del descenso del gradiente

$$
\begin{aligned}
&\text{Input}: \mathbf{x}_0, tol\\
&\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0\\
&k = 0\\
&\text{WHILE}(\mathbf{r}_k > tol)\\
&\qquad \mathbf{r}_k \leftarrow \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\\
&\qquad \alpha_k \leftarrow \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k^T A \mathbf{r}_k}\\
&\qquad \mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k\\
&\qquad k \leftarrow k + 1\\
&\text{ENDWHILE}
\end{aligned}
$$

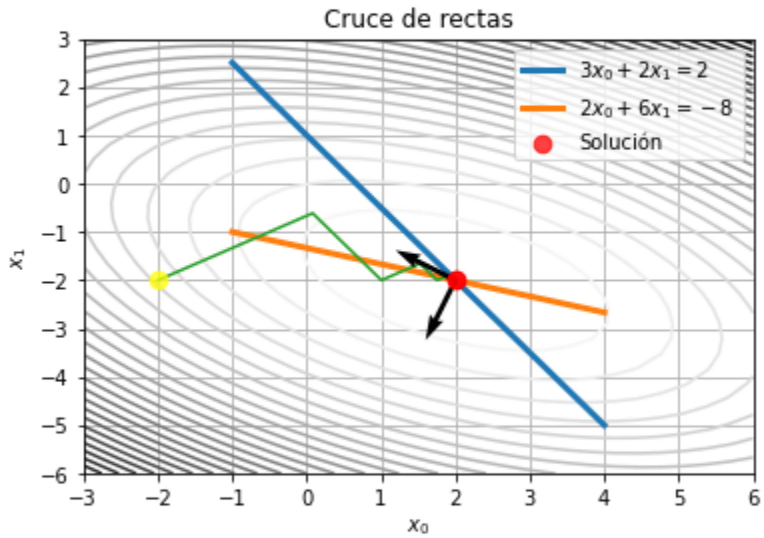
In [44]:
```
def steepest(A,b,x,tol,kmax):
    steps = [[x[0,0], x[1,0]]]
    r = b - A @ x
    res = np.linalg.norm(r)
    k = 0
    while(res > tol and k < kmax):
        alpha = r.T @ r / (r.T @ A @ r)
        x = x + r * alpha
        steps.append([x[0,0],x[1,0]])
        r = b - A @ x
        res = np.linalg.norm(r)
        k += 1
        print(k, res)
    return x, steps
```

In [45]:
```
xini = np.array([-2.0,-2.0])
tol = 0.001
kmax = 20

xs, pasos = steepest(A,b[:,np.newaxis],xini[:,np.newaxis],tol,kmax)
```

```
1 5.384289904692891
2 3.5895266031285917
3 1.3400899318346766
4 0.8933932878897847
5 0.3335334941455197
6 0.22235566276367916
7 0.08301278076510733
8 0.055341853843404884
9 0.0206609587682041
10 0.013773972512135697
11 0.00514228307119734
12 0.0034281887141298767
13 0.001279857119940566
14 0.00085323807996087
```

In [46]:
```
def dibujaPasos(xi, sol, pasos):
    pasos = np.matrix(pasos)
    plt.plot(pasos[:,0],pasos[:,1],'-')
    plt.scatter(xi[0], xi[1], c='yellow', s = 75, alpha=0.75, zorder=5, label
    plt.scatter(sol[0], sol[1], c='red', s = 75, alpha=0.75, zorder=5, label=
```

In [47]:
```
dibujaEigen(eigen, sol)
graficaRectas(x, y0, y1, sol)
cont = plt.contour(xg,yg,z,30,cmap='binary')
dibujaPasos(xini, sol, pasos)
```



In [ ]: