7 Conducción de calor 1D: condiciones de tipo Neumann

Objetivo.

Resolver numéricamente el siguiente problema usando diferencias finitas.

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2u(x)}{dx^2} &= -e^x \quad x \in [0,1] \\
\frac{du}{dn}(0) &= 0 \\
u(1) &= 3
\end{aligned}
$$

cuya solución analítica es: $u(x) = e^x - x - e + 4 $

Observa que en este caso se proporciona una condición de tipo **Neumann** en la frontera izquierda del dominio ($x = 0$).

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019, PE101922

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import macti.visual as mvis
from macti.evaluation import *
```

```
quizz = Quizz('q02', 'notebooks',  'local')
```

7.1 Definición de funciones.

```
def buildMatrix(N, d):
    """
    Construye la matriz del sistema.
    """
    # Matriz de ceros
    A = np.zeros((N,N))

    # Primer renglón
    A[0,0] = d
    A[0,1] = -1

    # Renglones interiores
    for i in range(1,N-1):
        A[i,i] = d
        A[i,i+1] = -1
```

```
        A[i,i-1] = -1

    # Último renglón
    A[N-1,N-2] = -1
    A[N-1,N-1] = d

    return A

def solExact(x):
    return np.exp(x) - x - np.e + 4
```

7.2 Definición de parámetros del problema físico y numérico.

```
# Parámetros físicos
L = 1.0
f_A = 0.0  # Flujo en A (Neumman)
b_B = 3.0  # Valor de u en B (Dirichlet)
k = 1.0

# Parámetros numéricos
N = 4 # Número de incógnitas
h = L / (N+1)

# Coordenadas de los nodos
x = np.linspace(0, L, N+2)

# Solución exacta en los nodos
sol_e = solExact(x)

# Construcción de la matriz
A = buildMatrix(N+1, 2)

# Lado derecho del sistema
b = np.zeros(N+1)

# Fuente o sumidero
b[1:] = -np.exp(x[1:-1])*h**2

# Condición de frontera en B
b[-1] += b_B
```

```
print(A)
print(b)
```

```
[[ 2. -1.  0.  0.  0.]
 [-1.  2. -1.  0.  0.]
 [ 0. -1.  2. -1.  0.]
 [ 0.  0. -1.  2. -1.]
```

```
 [ 0.   0.   0. -1.   2.]]
[ 0.         -0.04885611 -0.05967299 -0.07288475  2.91097836]
```

7.3 Ejercicio 1.

Definir lo siguiente:

- La función `Neumann_I(A, b, bcond)` que implemente la aproximación I de la presentación "Problemas de Calibración" (página 12).
- Llamada a la función `Neumann_I(A, b, bcond)` con los parámetros adecuados.

```
### BEGIN SOLUTION
def Neumann_I(A, b, bcond):
    A[0][0] = 1
    A[0][1] = -1
    A[0][2] = 0
    b[0] = bcond

# Corrección de la matriz y el RHS, orden lineal
Neumann_I(A, b, h * f_A)
### END SOLUTION

# Arreglo para almacenar la solución
u1 = np.zeros(N+2)

# Condición de frontera del lado derecho: Dirichlet
u1[-1] = b_B

# Solución del sistema lineal
u1[:N+1] = np.linalg.solve(A,b)

file_answer = FileAnswer()
file_answer.write('1', u1, 'La solución no es correcta, checa tu implementación c

print('Solución numérica: {}'.format(u1))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Solución numérica: [2.39076545 2.39076545 2.43962156 2.54815066 2.72956451 3.        ]
```

```
quizz.eval_numeric('1', u1)
```

```
----------------------------------------
1 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

7.4 Ejercicio 2.

- Calcular el error de la solución numérica `u1` con respecto a la solución exacta `sol_e` usando la definición **Grid norm 2** descrita en la "Problemas de Calibración" (página 20).

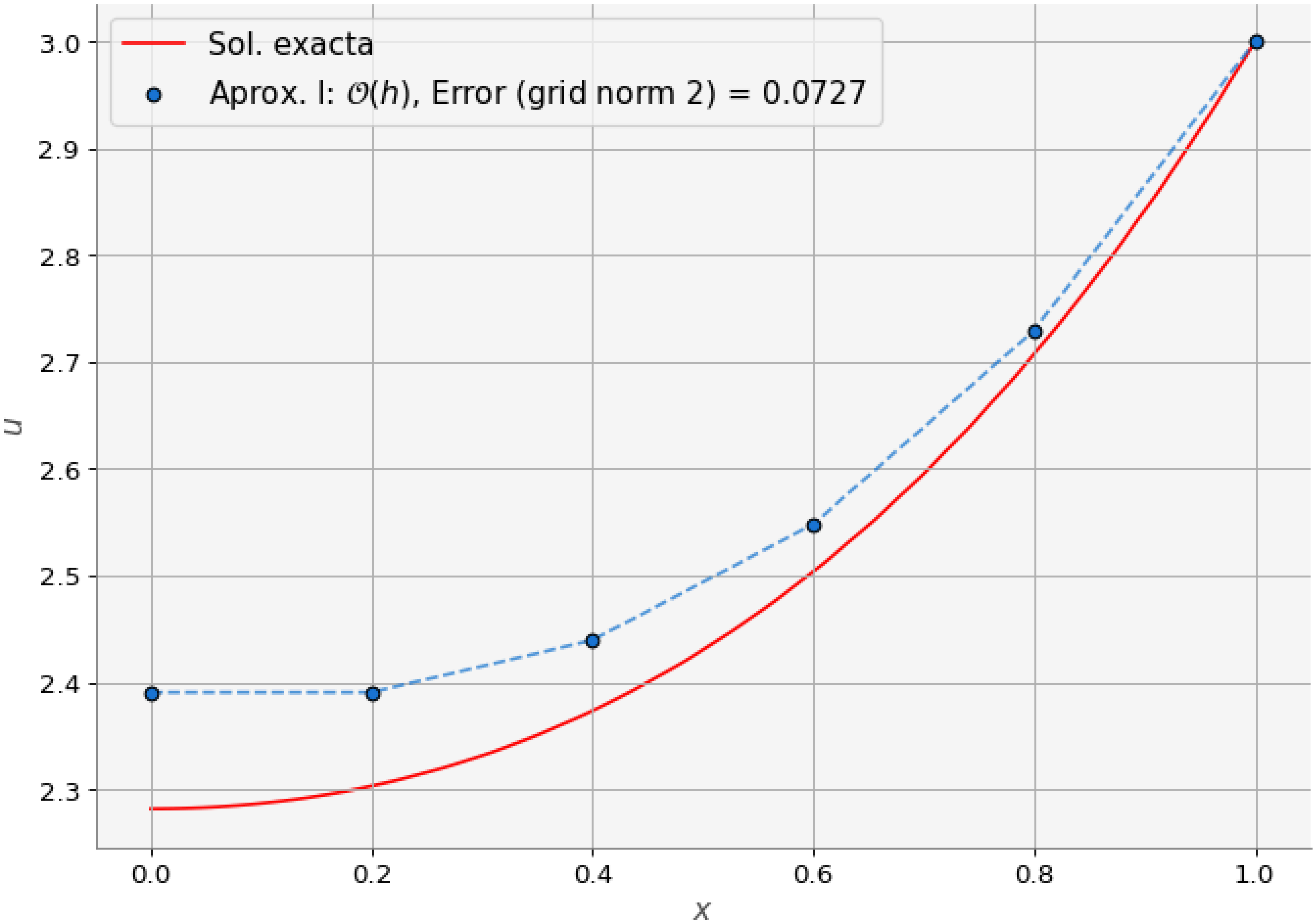
```
### BEGIN SOLUTION
# Cálculo del error
e1 = np.sqrt(h) * np.linalg.norm(sol_e - u1, 2)

file_answer.write('2', e1, 'La implementación del error Grid norm 2 parece no ser
### END SOLUTION

print('Error: {}'.format(e1))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Error: 0.07266429782458109
```

```
quizz.eval_numeric('2', e1)
```

```
----------------------------------------
2 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

```
# Graficación de la solución y el error
error_label_1 = 'Error (grid norm {}) = {:0.4f}'.format(2, e1)

plt.figure(figsize=(10,7))

# Graficación de la solución exacta
xsol = np.linspace(0,1,100)
plt.plot(xsol, solExact(xsol),'r-', label='Sol. exacta', zorder=0)

# Graficación de la solución numérica
plt.scatter(x, u1, marker='o', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. I: $\mathcal{O}(h)$, ' + error_label_1)
plt.plot(x, u1, '--', lw=1.5, alpha=0.75)

# Decoración de la gráfica
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$u$')
plt.legend(loc='upper left', fontsize=14)
plt.grid()
plt.show()
```



7.5 Ejercicio 3.

Definir lo siguiente:

- La función `Neumann_II(A, b, bcond)` que implemente la aproximación II de la presentación "Problemas de Calibración" (página 15).
- Llamada a la función `Neumann_II(A, b, bcond)` con los parámetros adecuados.

```
### BEGIN SOLUTION
def Neumann_II(A, b, bcond):
    A[0][0] = 3
    A[0][1] = -4
    A[0][2] = 1
    b[0] = bcond

# Corrección de la matriz y el RHS, orden lineal
Neumann_II(A, b, 2 * h * f_A)
### END SOLUTION

# Arreglo para almacenar la solución
```

```
u2 = np.zeros(N+2)

# Condición de frontera del lado derecho: Dirichlet
u2[-1] = b_B

# Solución del sistema lineal
u2[:N+1] = np.linalg.solve(A,b)

file_answer.write('3', u2, 'La solución no es correcta, checa tu implementación c
file_answer.to_file('q02')

print('Solución numérica: {}'.format(u2))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Solución numérica: [2.26862518 2.29305323 2.3663374  2.49929455 2.70513646 3.        ]
```

```
quizz.eval_numeric('3', u2)
```

```
----------------------------------------
3 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

7.6 Ejercicio 4.

- Calcular el error de la solución numérica `u2` con respecto a la solución exacta `sol_e` usando la definición **Grid norm 2** descrita en la "Problemas de Calibración" (página 20).

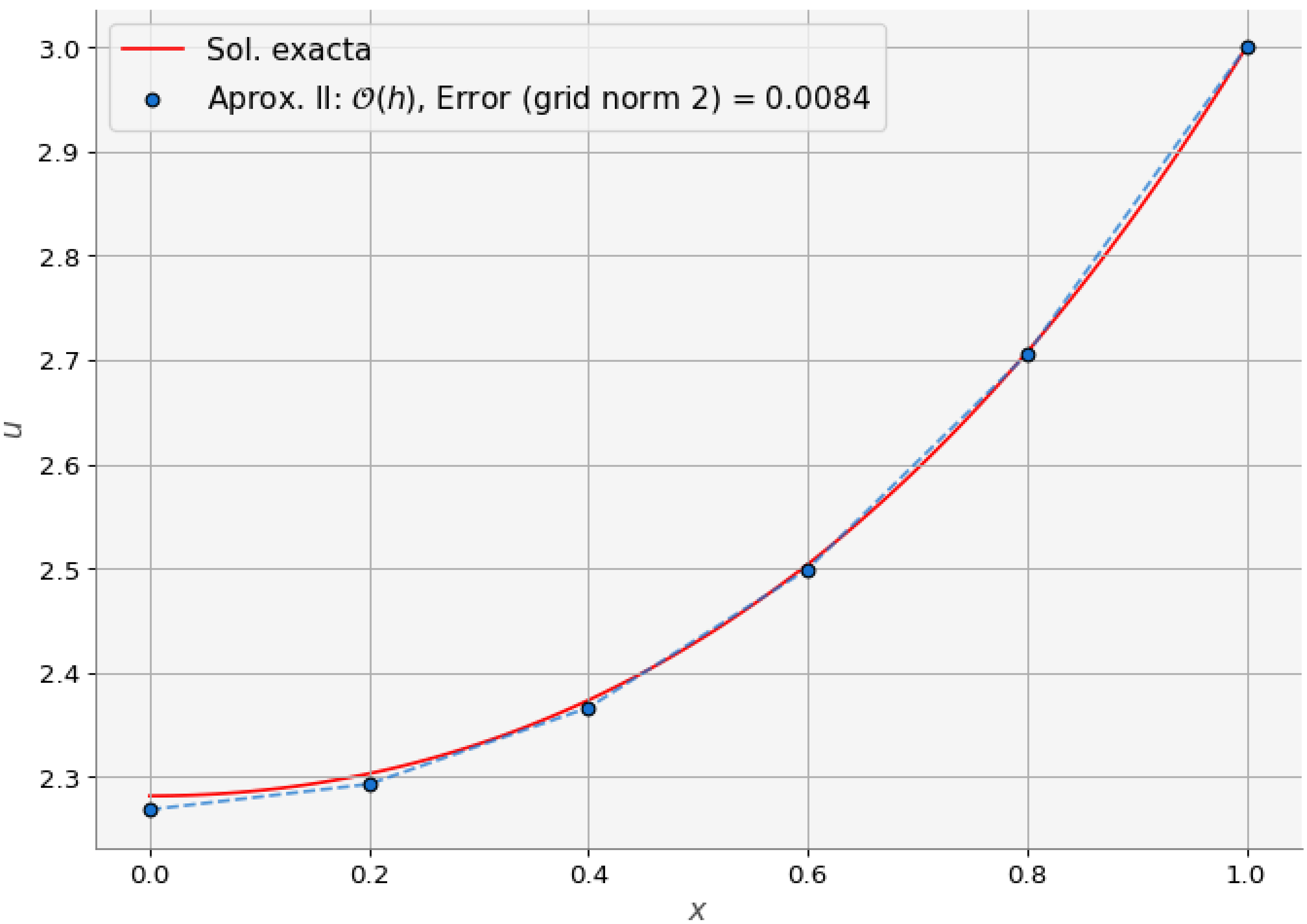
```
### BEGIN SOLUTION
# Cálculo del error
e2 = np.sqrt(h) * np.linalg.norm(sol_e - u2, 2)

file_answer.write('4', e2, 'La implementación del error Grid norm 2 parece no ser
### END SOLUTION
file_answer.to_file('q02')

print(e2)
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
0.008364723421555469
```

```
quizz.eval_numeric('4', e2)
```

```
----------------------------------------
4 | Tu resultado es correcto.
```

```
# Graficación de la solución y el error
error_label_2 = 'Error (grid norm {}) = {:0.4f}'.format(2, e2)

plt.figure(figsize=(10,7))

# Graficación de la solución exacta
plt.plot(xsol, solExact(xsol),'r-', label='Sol. exacta', zorder=0)

# Graficación de la solución numérica
plt.scatter(x, u2, marker='o', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. II: $\mathcal{O}(h)$, ' + error_label_2)
plt.plot(x, u2, '--', lw=1.5, alpha=0.75)

# Decoración de la gráfica
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$u$')
plt.legend(loc='upper left', fontsize=14)
plt.grid()
plt.show()
```



7.7 Ejercicio 5.

Definir lo siguiente:

- La función `Neumann_III(A, b, bcond)` que implemente la aproximación II de la presentación "Problemas de Calibración" (página 18).
- Llamada a la función `Neumann_III(A, b, bcond)` con los parámetros adecuados.

```
### BEGIN SOLUTION
def Neumann_III(A, b, bcond):
    A[0][0] = 2
    A[0][1] = -2
    A[0][2] = 0
    b[0] = bcond

# Corrección de la matriz y el RHS, orden lineal
Neumann_III(A, b, -np.exp(x[0]) * h**2 + 2 * h * f_A)
### END SOLUTION

# Arreglo para almacenar la solución
u3 = np.zeros(N+2)

# Condición de frontera del lado derecho: Dirichlet
u3[-1] = b_B

# Solución del sistema lineal
u3[:N+1] = np.linalg.solve(A,b)

file_answer.write('5', u3, 'La solución no es correcta, checa tu implementación c

print('Solución numérica: {}'.format(u3))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Solución numérica: [2.29076545 2.31076545 2.37962156 2.50815066 2.70956451 3.        ]
```

```
quizz.eval_numeric('5', u3)
```

```
----------------------------------------
5 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

7.8 Ejercicio 6.

- Calcular el error de la solución numérica `u3` con respecto a la solución exacta `sol_e` usando la definición **Grid norm 2** descrita en la "Problemas de Calibración" (página 20).

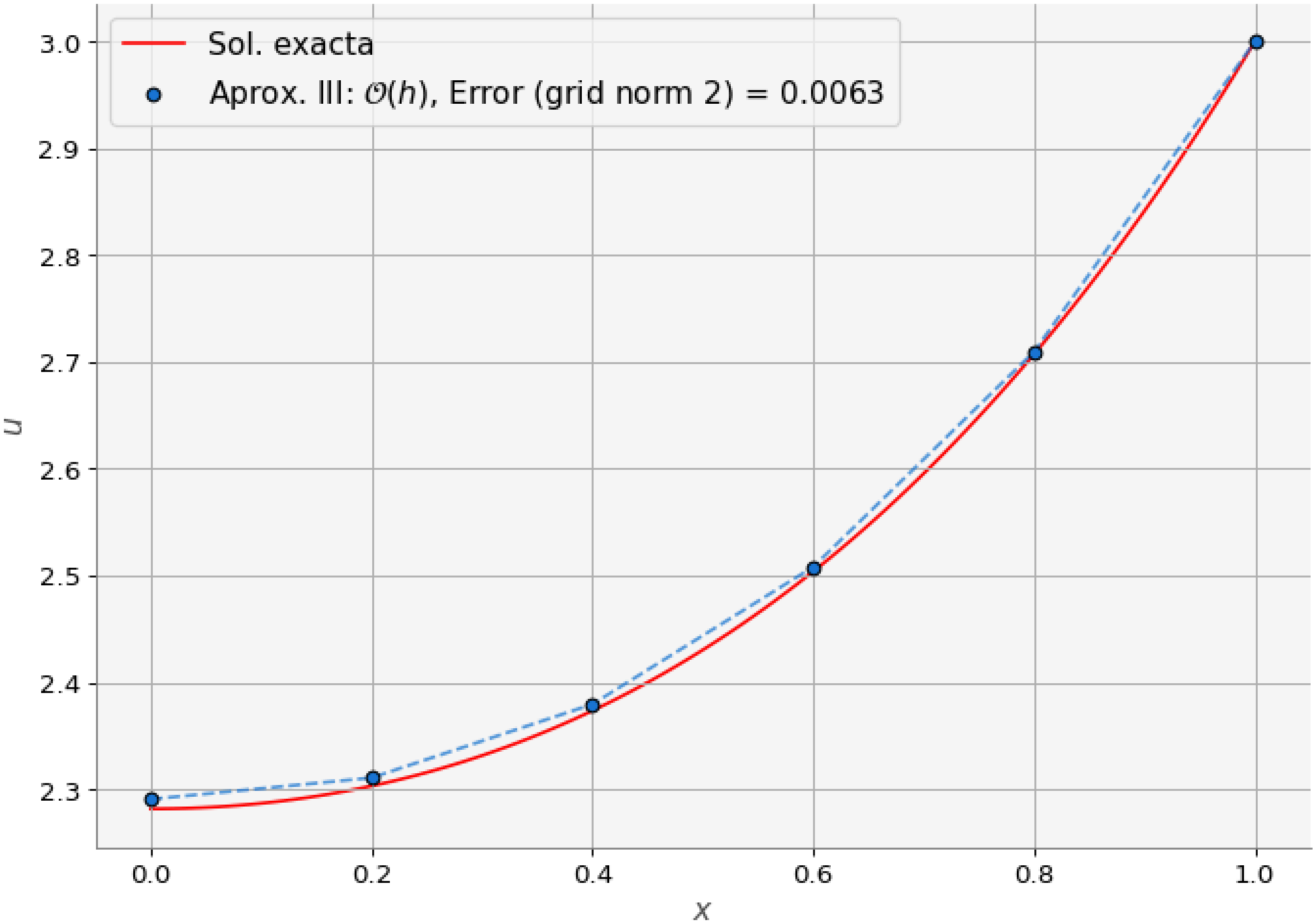
```
### BEGIN SOLUTION
# Cálculo del error
e3 = np.sqrt(h) * np.linalg.norm(sol_e - u3, 2)

file_answer.write('6', e3, 'La implementación del error Grid norm 2 parece no ser
### END SOLUTION

print('Error: {}'.format(e3))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Error: 0.006342955932511579
```

```
quizz.eval_numeric('6', e3)
```

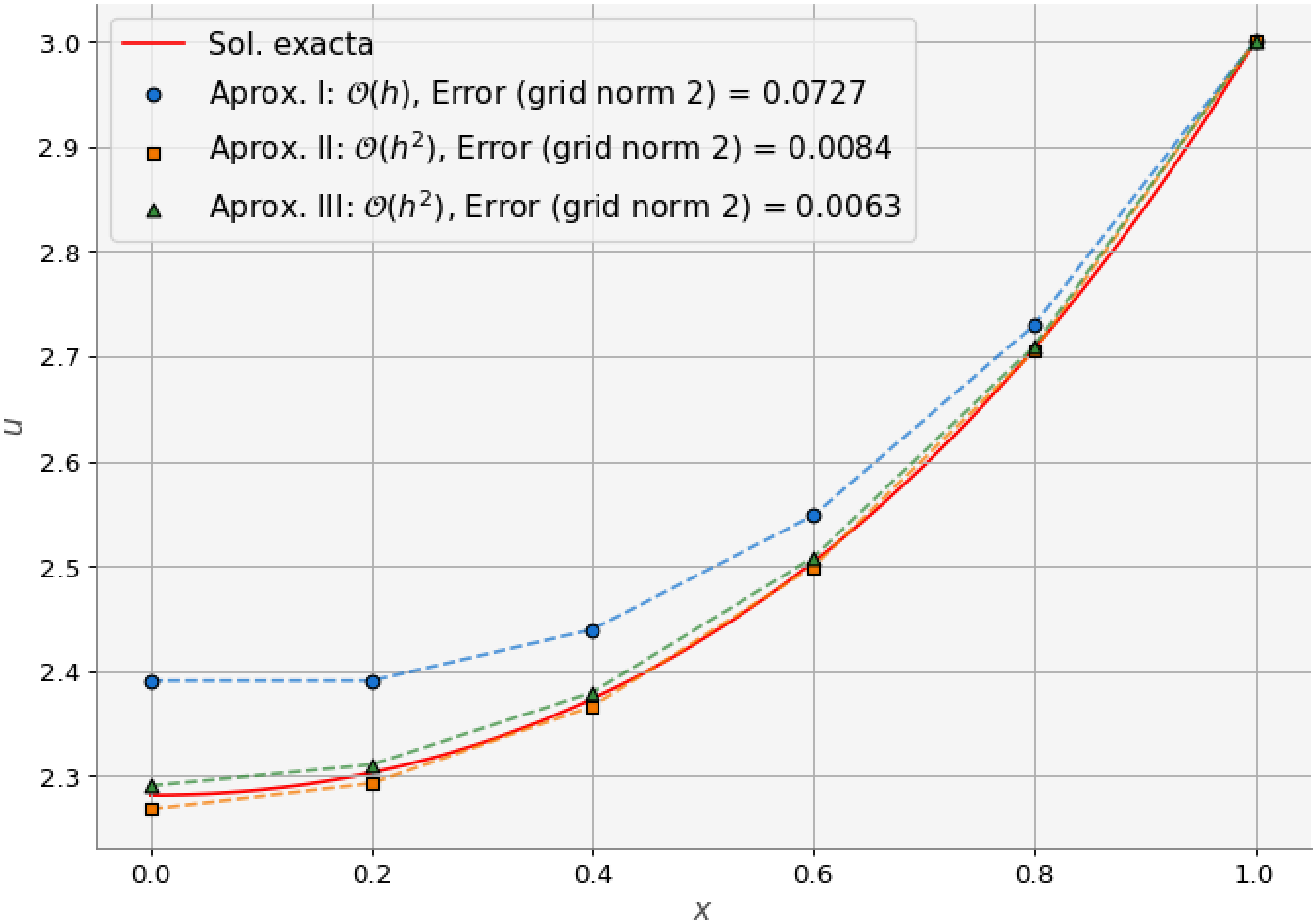
```
----------------------------------------
6 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

```
# Graficación de la solución y el error
error_label_3 = 'Error (grid norm {}) = {:0.4f}'.format(2, e3)

plt.figure(figsize=(10,7))

# Graficación de la solución exacta
plt.plot(xsol, solExact(xsol),'r-', label='Sol. exacta', zorder=0)

# Graficación de la solución numérica
plt.scatter(x, u3, marker='o', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. III: $\mathcal{O}(h)$, ' + error_label_3)
plt.plot(x, u3, '--', lw=1.5, alpha=0.75)

# Decoración de la gráfica
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$u$')
plt.legend(loc='upper left', fontsize=14)
plt.grid()
plt.show()
```



7.9 Graficación de las tres aproximaciones.

```
plt.figure(figsize=(10,7))
xsol = np.linspace(0,1,100)
plt.plot(xsol, solExact(xsol),'r-', label='Sol. exacta', zorder=0)
plt.scatter(x, u1, marker='o', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. I: $\mathcal{O}(h)$, ' + error_label_1)
plt.plot(x, u1, '--', lw=1.5, alpha=0.75)
plt.scatter(x, u2, marker='s', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. II: $\mathcal{O}(h^2)$, ' + error_label_2)
plt.plot(x, u2, '--', lw=1.5, alpha=0.75)
plt.scatter(x, u3, marker='^', edgecolor='k', zorder=5,
            label='Aprox. III: $\mathcal{O}(h^2)$, ' + error_label_3)
plt.plot(x, u3, '--', lw=1.5, alpha=0.75)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$u$')
plt.legend(loc='upper left', fontsize=14)
plt.grid()
plt.show()
```



7.10 Estudio de refinamiento de malla.

La función `meshRefining(...)` realiza un estudio de refinamiento de malla para determinar la mejor aproximación de las condiciones de frontera de tipo Neumann.

```
def meshRefining(fcond, nodos, norma):
    """
    Función que permite realizar un estudio de
    refinamiento de malla.

    Parameters:
    -----------
    fcondNeumman: function
    función que establece la aproximación para la condición
    de frontera de tipo Neumman.

    nodes: list
    Lista de número de nodos que se usarán para el estudio
    de refinamiento de malla.

    norma:
    Define el tipo de grid norm que se usará para calcular el
```

```
    error con respecto a la solución exacta.

    Returns:
    --------
    e_lista: list
    Lista con los errores calculados para los diferentes números
    de nodos.
    """
    e_lista = []
    for N in nodos:
        h = L / (N+1)
        r = k / h**2

        # Coordenadas de los nodos
        x = np.linspace(0, L, N+2)

        sole = solExact(x)

        A = buildMatrix(N+1, 2)      # Construcción de la matriz
        b = np.zeros(N+1)            # Lado derecho del sistema
        b[1:] = -np.exp(x[1:-1]) / r # Fuente o sumidero
        b[-1] += b_B                 # Condición de frontera en B

        if fcond.__name__ == 'Neumann_I':
            bcond = h * f_A
        elif fcond.__name__ == 'Neumann_II':
            bcond = 2 * h * f_A
        elif fcond.__name__ == 'Neumann_III':
            bcond = -1/r +  2 * h * f_A

        fcond(A, b, bcond) # Corrección de la matriz y el RHS

        u = np.zeros(N+2) # Arreglo para almacenar la solución
        u[-1] = b_B       # Frontera derecha Dirichlet
        u[:N+1] = np.linalg.solve(A,b)       # Sol. del sist. lineal
        e_lista.append(np.linalg.norm(sole - u, norma)) # Cálculo del error

    return e_lista
```

7.11 Ejercicio 7.

Usando la función `meshRefining(...)` realiza un estudio de refinamiento de malla para determinar la mejor aproximación de las condiciones de frontera de tipo Neumann para el problema planteado en esta notebook.

- Definir un arreglo con el número de nodos como sigue: $nodos = \{2^i | \forall i \in [2, 3, \dots 8]\}$
- Calcular las $h´$s correspondientes a estos nodos y almacenarlas en el arreglo: `h_lista`.

```
### BEGIN SOLUTION
nodos = [2**i for i in range(2,8)]
h_lista = [L/(n+1) for n in nodos]

file_answer.write('7', h_lista, 'Checa la lista de nodos y el cálculo de las h´s.
### END SOLUTION

print('Nodos: {}'.format(nodos))
print('h: {}'.format(h_lista))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Nodos: [4, 8, 16, 32, 64, 128]
h: [0.2, 0.1111111111111111, 0.058823529411764705, 0.030303030303030304,
0.015384615384615385, 0.007751937984496124]
```

```
quizz.eval_numeric('7', h_lista)
```

```
----------------------------------------
7 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

7.12 Ejercicio 8.

Usando los arreglos `nodos`, `h_lista`, las funciones `Neumann_I()`, `Neumann_II()`, `Neumann_III()` y `meshRefining()` realiza un estudio de refinamiento de malla para determinar la mejor aproximación de las condiciones de frontera de tipo Neumann para el problema planteado en esta notebook.

```
### BEGIN SOLUTION
norma = np.inf
e1m = meshRefining(Neumann_I, nodos, norma)
e2m = meshRefining(Neumann_II, nodos, norma)
e3m = meshRefining(Neumann_III, nodos, norma)

file_answer.write('8', e1m, 'La implementación de la llamada a meshRefining() par
file_answer.write('9', e2m, 'La implementación de la llamada a meshRefining() par
file_answer.write('10', e3m, 'La implementación de la llamada a meshRefining() pa
### END SOLUTION

print('Errores para Neumann_I: {}'.format(e1m))
print('Errores para Neumann_II: {}'.format(e2m))
print('Errores para Neumann_III: {}'.format(e3m))
```

```
El directorio :/home/jovyan/macti/notebooks/.ans/Diferencias_finitas_01/ ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.
Errores para Neumann_I: [0.10904728226552596, 0.05835083948479003, 0.030195480658391283,
```

```
0.01535951849054662, 0.007745922239629444, 0.0038895813335773077]
Errores para Neumann_II: [0.013092993550491094, 0.003733553223093544,
0.000998285860006387, 0.00025816090671559877, 6.564366654870923e-05, 1.6550689755145953e-
05]
Errores para Neumann_III: [0.009047282265525869, 0.002795283929234227,
0.0007837159525103665, 0.00020800333903103763, 5.361454732044635e-05,
1.3612341328350652e-05]
```

```python
quizz.eval_numeric('8', e1m)
```

```
----------------------------------------
8 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

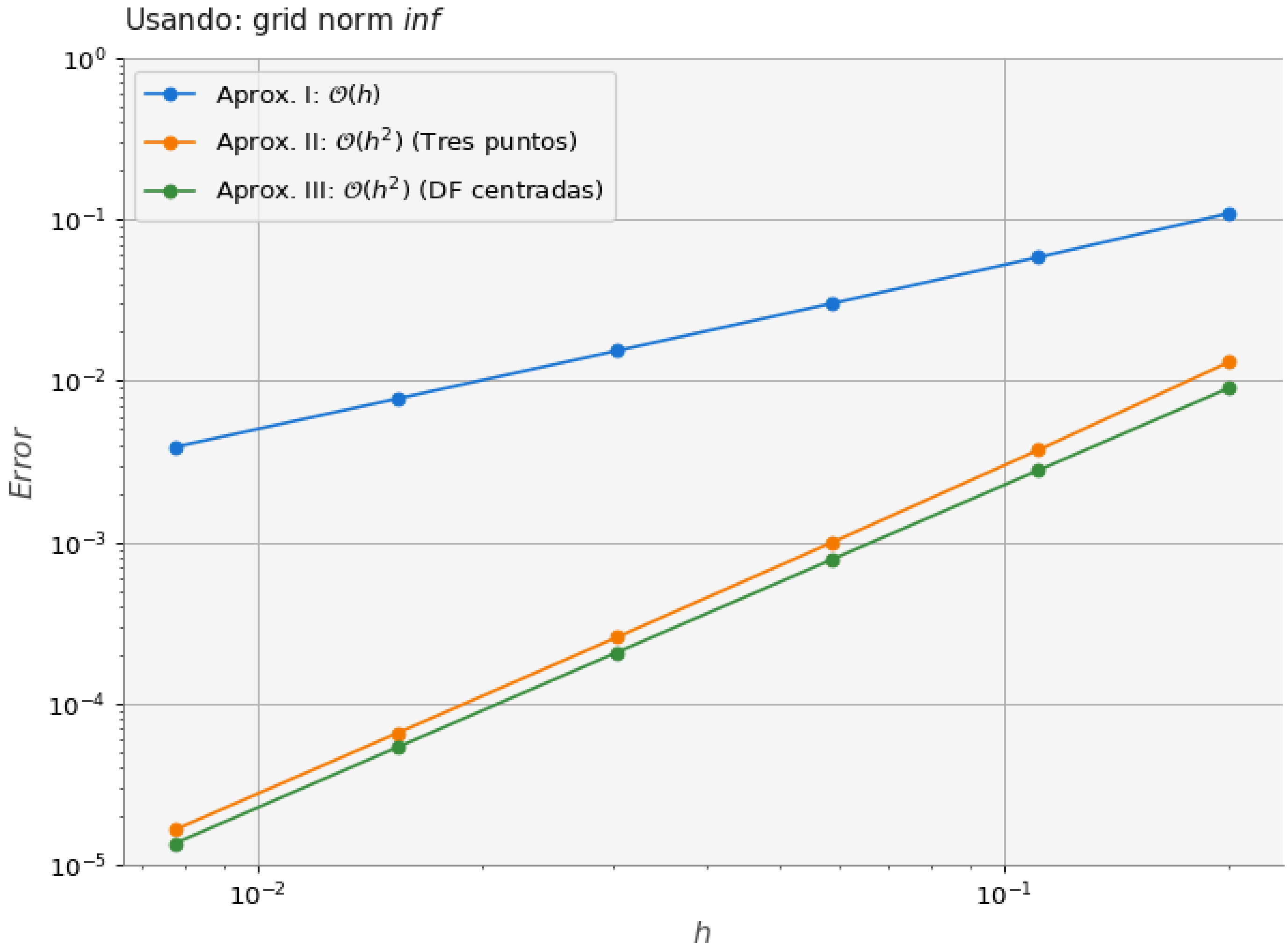
```python
quizz.eval_numeric('9', e2m)
```

```
----------------------------------------
9 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

```python
quizz.eval_numeric('10', e3m)
```

```
----------------------------------------
10 | Tu resultado es correcto.
----------------------------------------
```

```python
#
# El siguiente código genera las gráficas usando los resultados anteriores:
#
plt.figure(figsize=(10,7))
plt.plot(h_lista, e1m, 'o-', label='Aprox. I: $\mathcal{O}(h)$')
plt.plot(h_lista, e2m, 'o-', label='Aprox. II: $\mathcal{O}(h^2)$ (Tres puntos)')
plt.plot(h_lista, e3m, 'o-', label='Aprox. III: $\mathcal{O}(h^2)$ (DF centradas)
plt.yscale('log')
plt.xscale('log')
plt.legend(fontsize=12)
plt.ylim(1e-5,1)
plt.ylabel('$Error$')
plt.xlabel('$h$')
plt.title('Usando: grid norm ${}$'.format(norma))
plt.grid()
plt.show()
```


Usando: grid norm *inf*
Aprox. I: $\mathcal{O}(h)$
Aprox. II: $\mathcal{O}(h^2)$ (Tres puntos)
Aprox. III: $\mathcal{O}(h^2)$ (DF centradas)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
Error
10^{-2}
10^{-1}
h