

Geofísica Matemática y Computacional

Luis Miguel de la Cruz Salas

2023-01-12

Table of contents

Introducción

Cuadernos interactivos para la asignatura de Geofísica Matemática y Computacional.

Los Jupyter Notebooks de este curso se pueden obtener en <https://github.com/repomacti/macti/notebooks/>.

1 Repaso de cálculo: derivadas

Objetivo general - Realizar ejercicios de derivadas en una variable.

MACTI-Analisis_Numerico_01 by Luis M. de la Cruz is licensed under Attribution-ShareAlike 4.0 International

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

```
# Importamos todas las bibliotecas a usar
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import sympy as sym
import macti.visual
from macti.evaluation import *
```

```
quizz = Quizz('q1', 'notebooks', 'local')
```

1.1 Ejercicios.

Calcula las derivadas de las funciones descritas siguiendo las reglas del apartado Reglas de derivación. Deberás escribir tu respuesta matemáticamente usando notación de Python en la variable `respuesta`.

Por ejemplo la para escribir $4x^{m-1} + \cos^2(x)$ deberás escribir:

```
respuesta = 4 * x**(m-1) + sym.cos(x)**2
```

1.1.1 1. Potencias:

1. a. $f(x) = x^5, f'(x) = ?$

```
# Definimos el símbolo x
x = sym.symbols('x')

# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 5*x**4

file_answer = FileAnswer()
file_answer.write('1a', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
 Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$5x^4$

```
quizz.eval_expression('1a', respuesta)
```

```
-----
1a | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$5x^4$

1. b. $f(x) = x^m, f'(x) = ?$

```
# Definimos el símbolo m
m = sym.symbols('m')

# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = m * x**(m-1)
```

```
file_answer.write('1b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

mx^{m-1}

```
quizz.eval_expression('1b', respuesta)
```

```
-----
1b | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

mx^{m-1}

2. Constantes

2. a. $f(x) = \pi^{435}$, $f'(x) = j$?

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 0

file_answer.write('2a', str(respuesta))
### END SOLUTION
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

0

```
quizz.eval_expression('2a', respuesta)
```

```
-----
2a | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

0

2. b. $f(x) = e^\pi, f'(x) = i$?

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 0

file_answer.write('2b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

0

```
quizz.eval_expression('2b', respuesta)
```

2b | Tu respuesta:
es correcta.

0

3. Multiplicación por una constante

3. a. $f(x) = 10x^4, f'(x) = i$?

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 40 * x ** 3

file_answer.write('3a', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$40x^3$$

```
quizz.eval_expression('3a', respuesta)
```

3a | Tu respuesta:
es correcta.

$$40x^3$$

3. b. $f(x) = Ax^n, f'(x) = ?$

```
# Definimos los símbolos A y n
A, n = sy.symbols('A n')

# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = A * n * x ** (n-1)

file_answer.write('3b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$Anx^{n-1}$$

```
quizz.eval_expression('3b', respuesta)
```

3b | Tu respuesta:
es correcta.

$$Anx^{n-1}$$

4. Suma y Diferencia

4. a. $f(x) = x^2 + x + 1, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 2*x + 1

file_answer.write('4a', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$2x + 1$$

```
quizz.eval_expression('4a', respuesta)
```

```
-----
4a | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$2x + 1$$

4. b. $f(x) = \sin(x) - \cos(x), f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = sy.cos(x) + sy.sin(x)

file_answer.write('4b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$\sin(x) + \cos(x)$$

```
quizz.eval_expression('4b', respuesta)
```

```
-----  
4b | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

$$\sin(x) + \cos(x)$$

4. c. $f(x) = Ax^m - Bx^n + C, f'(x) = ?$

```
# Definimos los símbolos B y C  
B, C = sy.symbols('B C')  
  
# Escribe tu respuesta como sigue  
# respuesta = ...  
  
### BEGIN SOLUTION  
respuesta = A * m * x ** (m-1) - B * n * x ** (n-1)  
  
file_answer.write('4c', str(respuesta))  
### END SOLUTION  
  
display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$Amx^{m-1} - Bnx^{n-1}$$

```
quizz.eval_expression('4c', respuesta)
```

```
-----  
4c | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

$$Amx^{m-1} - Bnx^{n-1}$$

5. Producto de funciones

NOTA: Reduce la solución a su mínima expresión

5. a. $f(x) = (x^4)(x^{-2})$, $f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 2 * x

file_answer.write('5a', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$2x$

```
quizz.eval_expression('5a', respuesta)
```

```
-----
5a | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$2x$

5. b. $f(x) = \sin(x) \cos(x)$, $f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = -sy.sin(x)**2 + sy.cos(x)**2

file_answer.write('5b', str(respuesta))
```

```
### END SOLUTION
```

```
display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$-\sin^2(x) + \cos^2(x)$$

```
quizz.eval_expression('5b', respuesta)
```

5b | Tu respuesta:
es correcta.

$$-\sin^2(x) + \cos^2(x)$$

6. Cociente de funciones

Nota: Reduce la expresión del numerador

Formato: $(f(x))/(g(x))$

6. a. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, f'(x) = i?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue  
# respuesta = ...
```

```
### BEGIN SOLUTION
```

```
respuesta = sy.cos(x) / x - sy.sin(x) / x**2
```

```
file_answer.write('6a', str(respuesta))
```

```
### END SOLUTION
```

```
display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

```
quizz.eval_expression('6a', respuesta)
```

 6a | Tu respuesta:
 es correcta.

$$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

6. b. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = (-2*x-1) / (x**2 + x + 1) ** 2

file_answer.write('6b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
 Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$\frac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

```
quizz.eval_expression('6b', respuesta)
```

 6b | Tu respuesta:
 es correcta.

$$\frac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

7. Regla de la Cadena

7. a. $f(x) = (5x^2 + 2x)^2, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = (20*x+4)*(5*x**2+2*x)

file_answer.write('7a', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$(20x + 4)(5x^2 + 2x)$$

```
quizz.eval_expression('7a', respuesta)
```

```
-----
7a | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$(20x + 4)(5x^2 + 2x)$$

7. b. $f(x) = \cos(x^2 + 3), f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = -2*x*sy.sin(x**2+3)

file_answer.write('7b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$-2x \sin(x^2 + 3)$$

```
quizz.eval_expression('7b', respuesta)
```

```
-----  
7b | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

$$-2x \sin(x^2 + 3)$$

8. Derivadas de alto orden

Calcular la primera, segunda, tercera y cuarta derivada de $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 20$.

8. a. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 20, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue  
# respuesta = ...  
  
### BEGIN SOLUTION  
respuesta = 12 * x**3 + 4*x  
  
file_answer.write('8a', str(respuesta))  
### END SOLUTION  
  
display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$12x^3 + 4x$$

```
quizz.eval_expression('8a', respuesta)
```

```
-----  
8a | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

$$12x^3 + 4x$$

8. b. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 20, f''(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 36 * x**2 + 4

file_answer.write('8b', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$36x^2 + 4$$

```
quizz.eval_expression('8b', respuesta)
```

```
-----
8b | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$36x^2 + 4$$

8. c. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 20, f'''(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 72 * x

file_answer.write('8c', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```


El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

72x

```
quizz.eval_expression('8c', respuesta)
```

```
-----  
8c | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

72x

8. d. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 20$, $f'''(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue  
# respuesta = ...  
  
### BEGIN SOLUTION  
respuesta = 72  
  
file_answer.write('8d', str(respuesta))  
### END SOLUTION  
  
display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

72

```
quizz.eval_expression('8d', respuesta)
```

```
-----  
8d | Tu respuesta:  
es correcta.  
-----
```

72

Realiza las gráficas de las cuatro derivadas y observa su comportamiento.

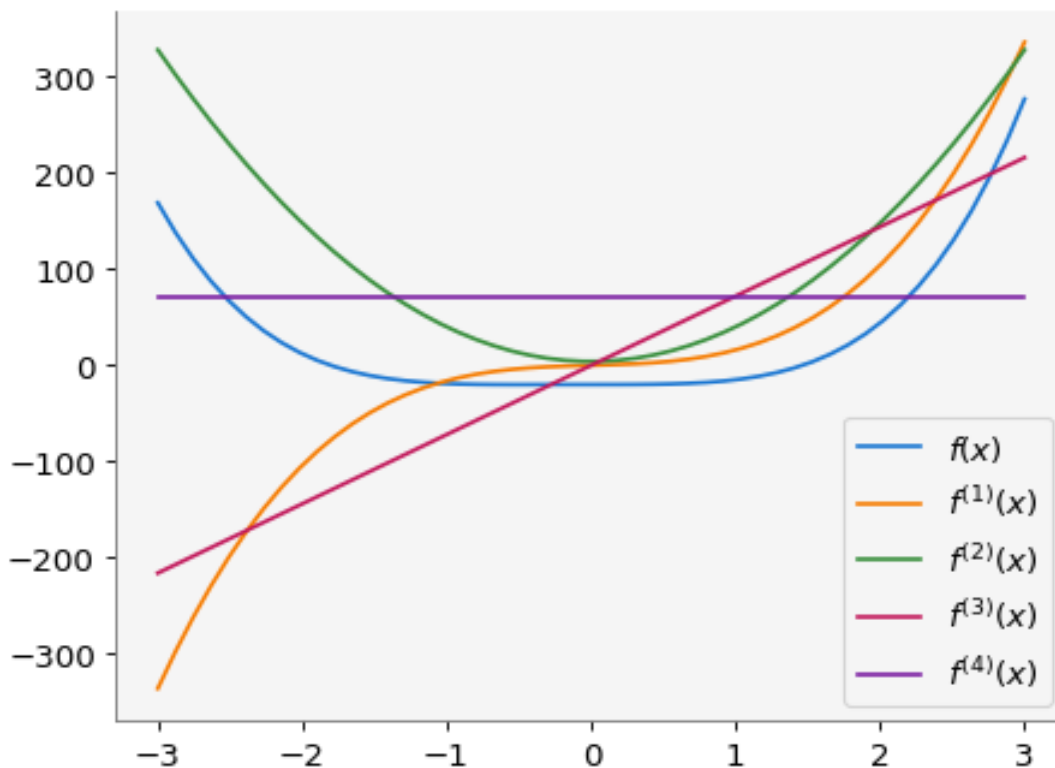
```
# Definimos la función y sus cuatro derivadas
f = lambda x: 3*x**4 + 2*x**3 -20

### BEGIN SOLUTION
f1 = lambda x: 12*x**3 + 4*x
f2 = lambda x: 36*x**2 + 4
f3 = lambda x: 72*x
f4 = lambda x: 72*np.ones(len(x))
### END SOLUTION
# f1 = lambda x: ...
# f2 = lambda x: ...
# f3 = lambda x: ...
# f4 = lambda x: ...

xc = np.linspace(-3, 3, 50) # Codominio de la función

# Graficamos la función y sus derivadas
plt.title('$f(x)=3x^4 + 2x^3 -20$ y sus derivadas')
plt.plot(xc, f(xc), label='$f(x)$')
plt.plot(xc, f1(xc), label='$f^{(1)}(x)$')
plt.plot(xc, f2(xc), label='$f^{(2)}(x)$')
plt.plot(xc, f3(xc), label='$f^{(3)}(x)$')
plt.plot(xc, f4(xc), label='$f^{(4)}(x)$')
plt.legend()
plt.show()
```

$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 20$ y sus derivadas



Encuentra la primera y segunda derivada de la siguientes funciones: - a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$
- b) $f(x) = 4 \cos x^2$

8. e. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 5*x**4-6*x**2+1

file_answer.write('8e', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$5x^4 - 6x^2 + 1$$

```
quizz.eval_expression('8e', respuesta)
```

```
-----
8e | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$5x^4 - 6x^2 + 1$$

8. f. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x, f''(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = 20*x**3-12*x

file_answer.write('8f', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$20x^3 - 12x$$

```
quizz.eval_expression('8f', respuesta)
```

```
-----
8f | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$20x^3 - 12x$$

8. g. $f(x) = 4 \cos x^2, f'(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = -8 * x * sy.sin(x**2)

file_answer.write('8g', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$-8x \sin(x^2)$$

```
quizz.eval_expression('8g', respuesta)
```

```
-----
8g | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$-8x \sin(x^2)$$

8. h. $f(x) = 4 \cos x^2, f''(x) = ?$

```
# Escribe tu respuesta como sigue
# respuesta = ...

### BEGIN SOLUTION
respuesta = -8*sy.sin(x**2) - 16*x**2*sy.cos(x**2)

file_answer.write('8h', str(respuesta))
### END SOLUTION

display(respuesta)
```

El directorio `:/home/jovyan/macti_notes/notebooks/.ans/Derivada/` ya existe
Respuestas y retroalimentación almacenadas.

$$-16x^2 \cos(x^2) - 8 \sin(x^2)$$

```
quizz.eval_expression('8h', respuesta)
```

```
-----
8h | Tu respuesta:
es correcta.
-----
```

$$-16x^2 \cos(x^2) - 8 \sin(x^2)$$

Realiza las gráficas de las dos funciones y de su primera y segunda derivadas.

```
f = lambda x: x**5 - 2*x**3 + x

### BEGIN SOLUTION
f1 = lambda x: 5*x**4 - 6*x**2 + 1
f2 = lambda x: 20*x**3 - 12*x
### END SOLUTION
# f1 = lambda x: ...
# f2 = lambda x: ...

# Definimos la segunda función y sus derivadas
g = lambda x: 4*np.cos(x**2)

### BEGIN SOLUTION
g1 = lambda x: -8*x*np.sin(x**2)
g2 = lambda x: -8*np.sin(x**2) - 16*x**2*np.cos(x**2)
### END SOLUTION
# g1 = lambda x: ...
# g2 = lambda x: ...

xc = np.linspace(-3, 3, 50) # Codominio de las funciones

# Graficamos las funciones y sus derivadas
plt.figure(figsize=(16,6))
ax1 = plt.subplot(1,2,1)
ax2 = plt.subplot(1,2,2)

ax1.plot(xc, f(xc), label='$f(x)$',lw=3)
ax1.plot(xc, f1(xc), label='$f^{(1)}(x)$',lw=3)
ax1.plot(xc, f2(xc), label='$f^{(2)}(x)$',lw=3)
```

```

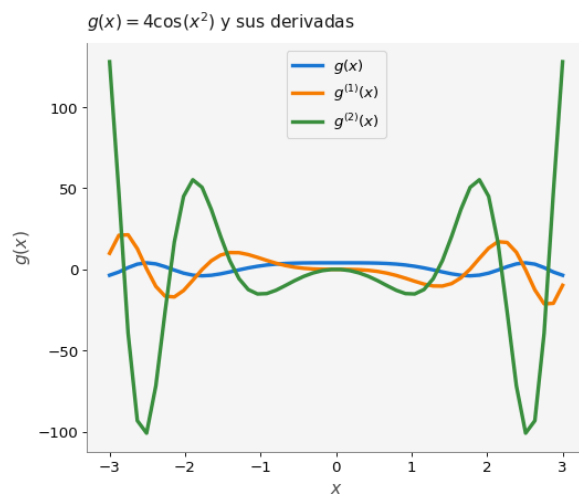
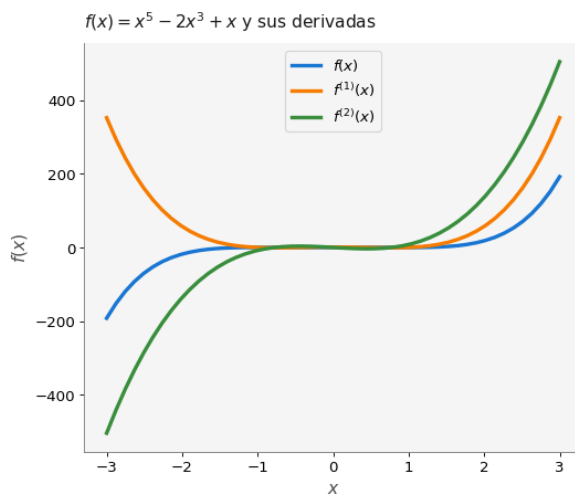
ax1.legend(loc='upper center')
ax1.set_title('$f(x)=x^5 - 2x^3 + x$ y sus derivadas')
ax1.set_xlabel

ax2.plot(xc, g(xc), label='$g(x)$',lw=3)
ax2.plot(xc, g1(xc), label='$g^{(1)}(x)$',lw=3)
ax2.plot(xc, g2(xc), label='$g^{(2)}(x)$',lw=3)
ax2.legend(loc='upper center')
ax2.set_title('$g(x)=4\cos(x^2)$ y sus derivadas')

ax1.set_xlabel("$x$")
ax1.set_ylabel("$f(x)$")
ax2.set_xlabel("$x$")
ax2.set_ylabel("$g(x)$")

plt.show()

```



9. Aplicación de la regla de L'Hopital

Utilizando la regla de L'Hopital encuentra el límite de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ cuando x tiende a cero.

Solución.

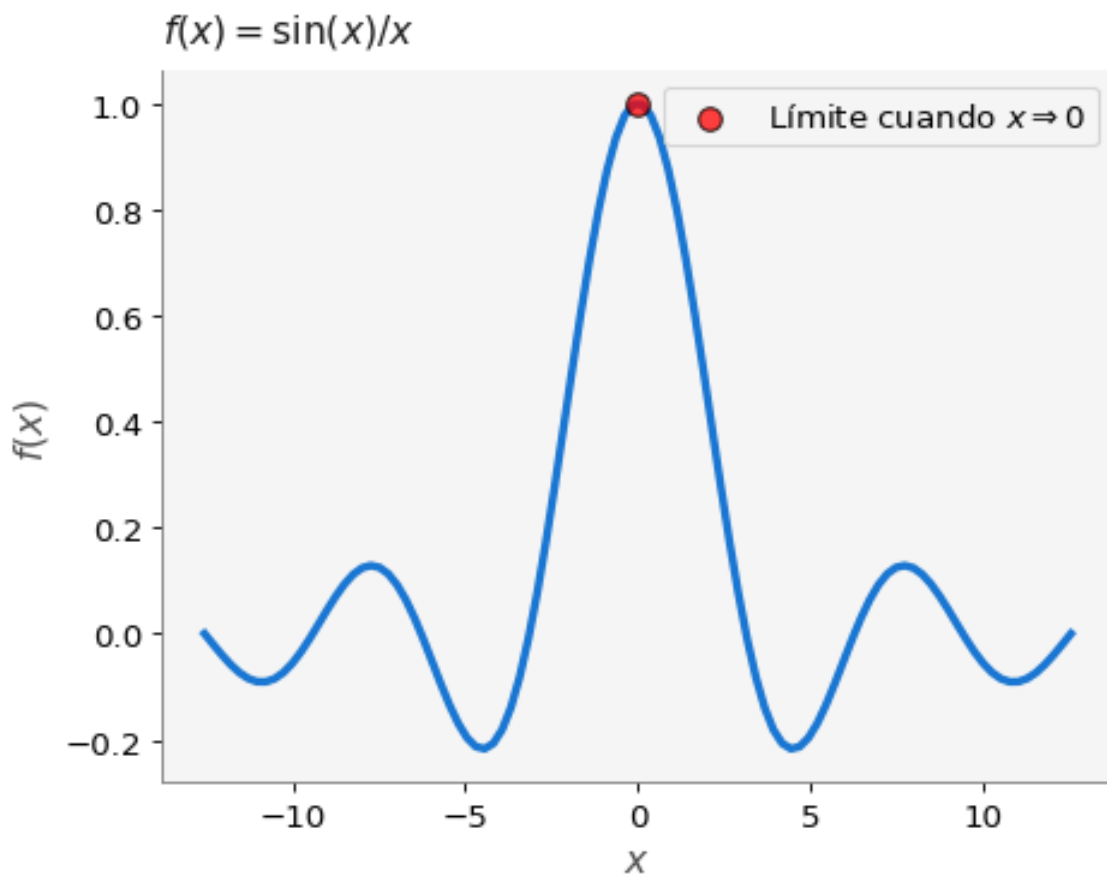
Al cumplirse las condiciones de la regla podemos asegurar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

```
f = lambda x: np.sin(x) / x

x = np.linspace(-4*np.pi, 4*np.pi, num=100) # Codominio de la función

# Graficamos la función y el punto (0, f(0))
plt.title('$f(x)=\sin(x) / x$')
plt.ylabel("$f(x)$")
plt.xlabel("$x$")
plt.plot(x, f(x), lw=3)
plt.scatter(0, 1, label='Límite cuando $x \rightarrow 0$', fc='red', ec='black', alpha=0.75,
plt.legend()
plt.show()
```



10. Ejemplo del teorema de Rolle. Considere la función $f(x) = x^2 + 5$, la cual es continua en todo \mathbb{R} . Tomemos el intervalo $[-5, 5]$ y hagamos la gráfica de esta función. Observe en la gráfica que sigue, que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle y por lo tanto es

posible encontrar un punto c , punto rojo, donde la derivada es cero (línea roja).

```
# Dominio e imagen de la gráfica
xc = np.linspace(-10,10,200)
f = lambda i: i**2 + 5

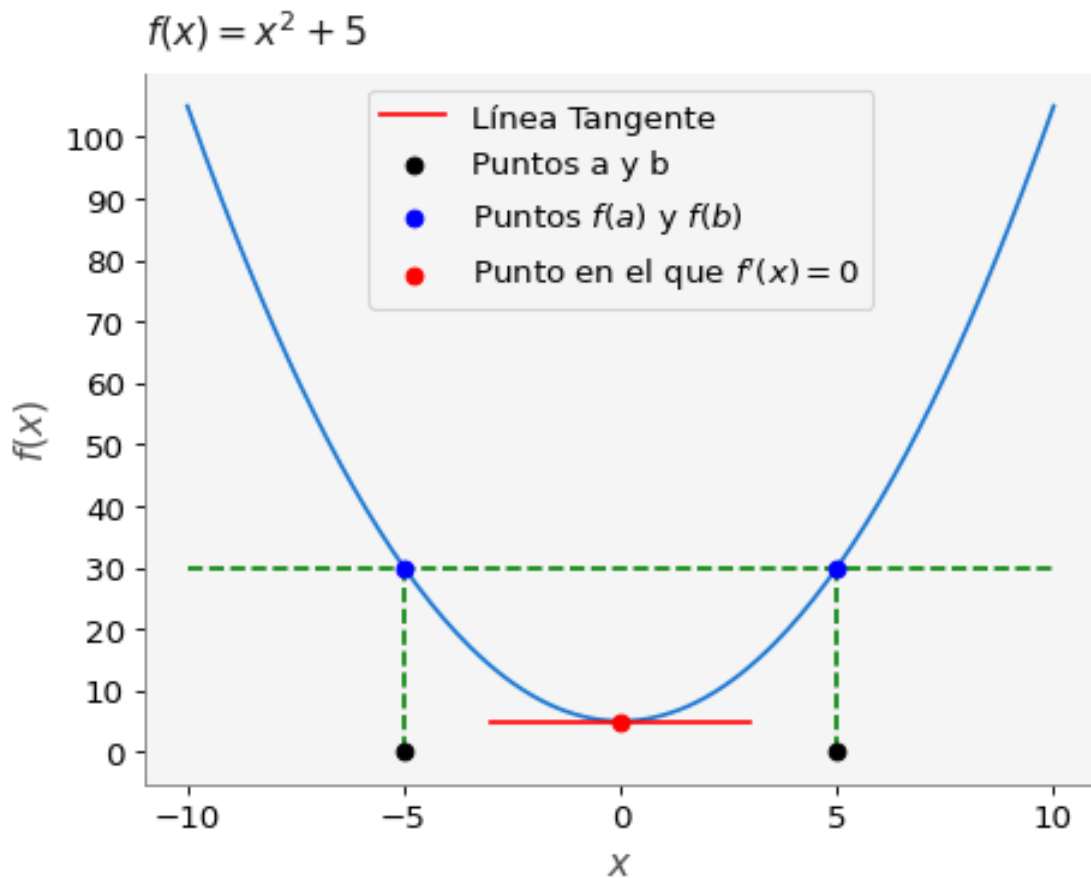
# Configuración de la grafica
plt.xticks(range(-10,11,5))
plt.yticks(range(-10,110,10))
plt.xlabel("$x$",)
plt.ylabel("$f(x)$")
plt.title("$f(x)=x^{2}+5$")

# Función
plt.plot(xc,f(xc))

# Dibujamos algunas líneas en la gráfica
plt.plot(np.linspace(-10,10,2),[f(5)]*2,ls="dashed",color="green")
plt.plot((5,5),(0,f(5)),ls="dashed",color="green")
plt.plot((-5,-5),(0,f(5)),ls="dashed",color="green")
plt.plot((-3,3),(5,5),color="red",label="Línea Tangente")

# Dibujamos algunos puntos en la gráfica
plt.scatter((-5,5),(0,0),color="black",label="Puntos a y b",zorder=5)
plt.scatter((-5,5),(f(-5),f(5)),color="blue",label="Puntos $f(a)$ y $f(b)$",zorder=5)
plt.scatter(0,f(0),color="red",label="Punto en el que $f'(x)=0$",zorder=5)

plt.legend(loc="upper center")
plt.show()
```



Reglas de derivación

En general no es complicado calcular la derivada de cualquier función y existen reglas para hacerlo más fácil.

Regla de potencias

Para cualquier número real n si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces

$$f'(x) = 0$$

Regla de la multiplicación por constante