2 Producto escalar.

Objetivo. Revisar e ilustrar las propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, para $n >= 2$ usando la biblioteca `numpy`.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

```
# Importamos las bibliotecas requeridas
import numpy as np
import macti.visual as mvis
```

2.1 Definición y propiedades.

Producto escalar es una operación algebraica que toma dos vectores y retorna un escalar. También se conoce como producto interno o producto punto. Su definición matemática es la siguiente:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{y}^T \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1}$$

Propiedades: 1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ si y solo si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son ortogonales. 2. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, además $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ si y solo si $\vec{x} = 0$ 3. $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ 4. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ 5. $, = , $ 6. Desigualdad de Schwarz : $||\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|| \leq ||\vec{x}||||\vec{y}||$

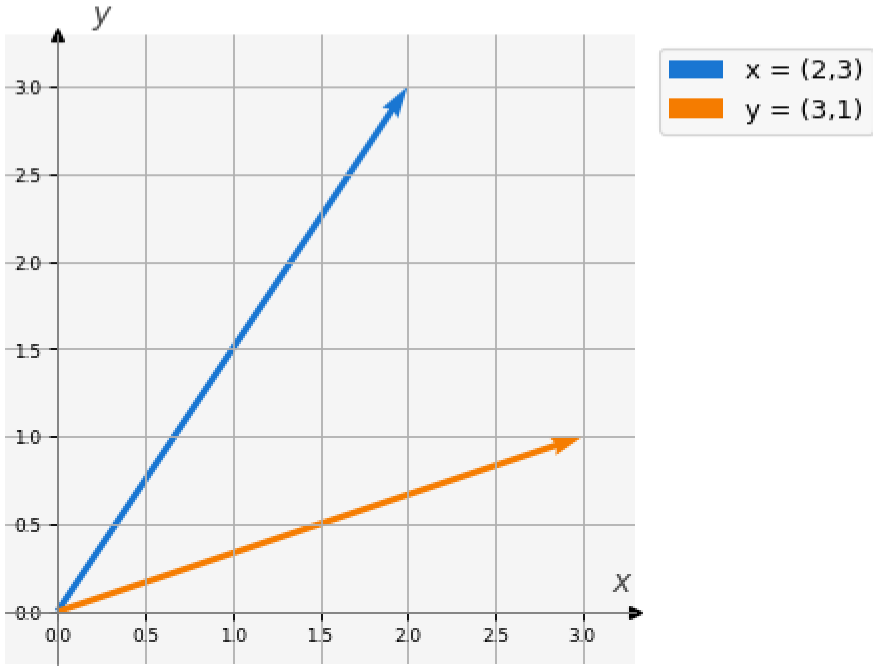
En lo que sigue realizaremos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ de las propiedades antes descritas usando vectores (arreglos) construidos con la biblioteca `numpy`.

```
# Definimos dos vectores en R^2 usando numpy
x = np.array([2, 3])
y = np.array([3, 1])

# Imprimimos los vectores
print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [2 3]
y = [3 1]
```

```
# Visualizamos los vectores.
v = mvis.Plotter()  # Definición de un objeto para crear figuras.
v.set_coordsys(1)   # Definición del sistema de coordenadas.
v.plot_vectors(1, [x, y], ['x = (2,3)', 'y = (3,1)'], ofx=-0.1) # Graficación de
v.grid()  # Muestra la rejilla del sistema de coordenadas.
```



2.2 Implementación.

En Python es posible implementar el producto escalar de varias maneras, a continuación presentamos algunas de ellas.

2.2.1 Usando el ciclo `for`.

Es posible hacer una implementación del producto escalar usando ciclos `for`. De acuerdo con la definición $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ una implementación es como sigue:

```
dot_prod = 0.0

for i in range(len(x)):
    dot_prod += x[i] * y[i]

print('for cycle →  <x, y> = {:0.2f}'.format(dot_prod))
```

```
for cycle →  <x, y> = 9.00
```

2.2.2 Usando la función `numpy.dot()`.

Esta función implementa un producto generalizado entre matrices cuyos elementos pueden ser flotantes o números complejos. Cuando se usa con arreglos de flotantes se obtiene el producto escalar. Usando esta función el ejemplo anterior se implementa cómo sigue:

```
dot_prod = np.dot(x,y)
print('np.dot → <x, y> = {:0.2f}'.format(dot_prod))
```

```
np.dot → <x, y> = 9.00
```

2.2.3 Usando la función `np.inner()`.

Esta función implementa el producto interno entre dos arreglos. Usando esta función el ejemplo anterior se implementa cómo sigue:

```
dot_prod = np.inner(x,y)
print('np.inner → <x, y> = {:0.2f}'.format(dot_prod))
```

```
np.inner → <x, y> = 9.00
```

2.2.4 Usando el operador `@`.

El operador `@`, disponible desde la versión Python 3.5, se puede usar para realizar la multiplicación de matrices convencional. Cuando se usa con arreglos de 1D se obtiene el producto escalar.

```
dot_prod = x @ y
print('Operador @ → <x, y> = {:0.2f}'.format(dot_prod))
```

```
Operador @ → <x, y> = 9.00
```

Lo conveniente es usar el operador `@` o alguna de las funciones de biblioteca que ya están implementadas, como `dot()` o `inner()` y evitar la implementación usando el ciclo `for`. La razón es que la biblioteca Linear algebra, cuando es posible utiliza la biblioteca BLAS optimizada.

En lo que sigue usaremos el operador `@` para calcular el producto escalar y probar las propiedades descritas al principio.

2.3 Propiedad 1: Ortogonalidad.

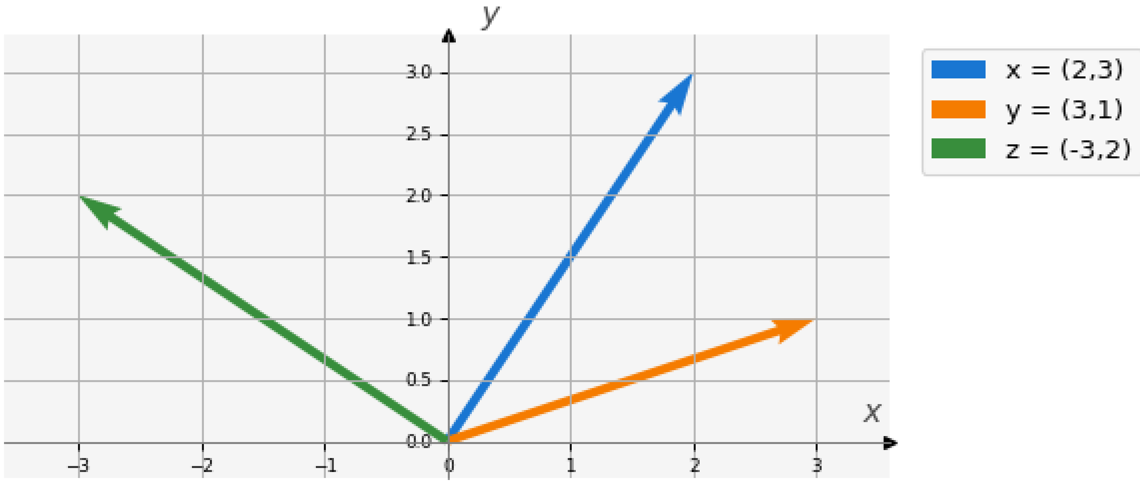
```
# Definimos otro vector en R^2
z = np.array([-3, 2])
```

```
# Calculamos el producto escalar entre los vectores x, y, z
print('<x, y> = {:>5.2f}'.format(x @ y))
print('<x, z> = {:>5.2f}'.format(x @ z))
print('<z, y> = {:>5.2f}'.format(z @ y))
```

```
<x, y> =  9.00
<x, z> =  0.00
<z, y> = -7.00
```

Como se puede observar, solo el producto $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$, lo cual significa que son ortogonales. Veamos los vectores gráficamente:

```
v = mvis.Plotter()  # Definición de un objeto para crear figuras.
v.set_coordsys(1)   # Definición del sistema de coordenadas.
v.plot_vectors(1, [x, y, z], ['x = (2,3)', 'y = (3,1)', 'z = (-3,2)'],ofx=-0.2) #
v.grid()  # Muestra la rejilla del sistema de coordenadas.
```



La función `calc_angle(a, b)`, definida en la siguiente celda, calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ utilizando la siguiente fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}|| \; ||\vec{b}||} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}|| \; ||\vec{b}||} \right)$$

Se usan las funciones `np.linalg.norm()` que calcula la norma de un vector, `np.arccos()` que es la función inversa del coseno y la constante `np.pi` que proporciona el valor de π.

```
def calc_angle(a, b):
    return np.arccos(a @ b / (np.linalg.norm(a) * np.linalg.norm(b))) * 180 / np.
```

```
# Calculamos el ángulo entre los vectores x, y, z
print('Ángulo entre x y y : {}'.format(calc_angle(x, y)))
print('Ángulo entre x y z : {}'.format(calc_angle(x, z)))
print('Ángulo entre z y y : {}'.format(calc_angle(z, y)))
```

```
Ángulo entre x y y : 37.8749836510982
Ángulo entre x y z : 90.0
Ángulo entre z y y : 127.8749836510982
```

Observamos que efectivamente el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{z}$ es de 90^o.

2.4 Propiedad 2. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$

Verficamos que se cumple para los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$:

```
print('<x, x> = {:>5.2f}'.format(x @ x))
print('<y, y> = {:>5.2f}'.format(y @ y))
print('<z, z> = {:>5.2f}'.format(z @ z))
```

```
<x, x> = 13.00
<y, y> = 10.00
<z, z> = 13.00
```

2.5 Propiedad 3. Multiplicación por un escalar.

$\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

```
# Definimos un escalar
α = 1.5

print('<α * x, y> = {}'.format((α * x) @ y))
print('α * <x, y> = {}'.format(α * x @ y))
print(' ¿ <α * x, y> == α * <x,y> ? : {}'.format(np.isclose((α * x) @ y, α * x @
```

```
<α * x, y> = 13.5
α * <x, y> = 13.5
 ¿ <α * x, y> == α * <x,y> ? : True
```

2.6 Propiedad 4. Asociatividad.

$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

```
print('     <x + y, z> = {}'.format((x + y) @ z))
print('<x, z> + <y, z> = {}'.format(x @ z + y @ z))
print(' ¿ <x + y, z> == <x, z> + <y, z>? : {}'.format(np.isclose((x + y) @ z, x @
```

```
     <x + y, z> = -7
<x, z> + <y, z> = -7
 ¿ <x + y, z> == <x, z> + <y, z>? : True
```

2.7 Propiedad 5. Conmutatividad.

$, = , $

```
print('<x, y> = {}'.format(x @ y))
print('<y, x> = {}'.format(y @ x))
print(' ¿ <x, y> == <y, x> ? : {}'.format(np.isclose(x @ y, y @ x)))
```

```
<x, y> = 9
<y, x> = 9
 ¿ <x, y> == <y, x> ? : True
```

2.8 Propiedad 6. Desigualdad de Schwarz.

$||\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|| \leq ||\vec{x}||||\vec{y}||$

```
print('||<x, y>|| = {}'.format(np.abs(z @ y)))
print('||x|| ||y||= {}'.format(np.linalg.norm(z) * np.linalg.norm(y)))
print('¿||<x, y>|| ≤ ||x|| ||y||? : {}'.format( np.abs(z @ y) <= np.linalg.norm(z
```

```
||<x, y>|| = 7
||x|| ||y||= 11.40175425099138
¿||<x, y>|| ≤ ||x|| ||y||? : True
```

2.9 Ejercicio 1.

Definimos los siguientes vectores $\vec{x} = (3.5, 0, -3.5, 0), \vec{y} = (1.5, 1.0, 2.3, -1.0)$ y $\vec{z} = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$ en $\mathbb{R}^4$ y $\alpha = 0.5$ un escalar. Verifica que se cumplen las propiedades 1 a 6.

Hint. Define los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$ usando `numpy` y posteriormente copia los códigos utilizados en el ejemplo de $\mathbb{R}^2$ para cada propiedad.

Obervación. En este caso no es posible realizar gráficas.

Definición de los vectores.

Deberías obtener un resultado como el siguiente al imprimir los tres vectores:

```
x = [ 3.5  0.  -3.5  0. ]
y = [ 1.5  1.   2.3 -1. ]
z = [1. 1. 1. 1.]
```

```
### Definición de los vectores en R^4 con numpy
### BEGIN SOLUTION
x = np.array([3.5, 0, -3.5, 0])
y = np.array([1.5, 1.0, 2.3, -1.0])
z = np.array([1.0, 1.0, 1.0, 1.0])

print('x = {}'.format(x))
```

```
print('y = {}'.format(y))
print('z = {}'.format(z))
### END SOLUTION
```

```
x = [ 3.5  0.  -3.5  0. ]
y = [ 1.5  1.   2.3 -1. ]
z = [1. 1. 1. 1.]
```

Propiedad 1.

El resultado debería ser:

```
<x, y> = -2.80
<x, z> =  0.00
<z, y> =  3.80
```

```
# Calculamos el producto escalar entre los vectores x, y, z
### BEGIN SOLUTION
print('<x, y> = {:>5.2f}'.format(x @ y))
print('<x, z> = {:>5.2f}'.format(x @ z))
print('<z, y> = {:>5.2f}'.format(z @ y))
### END SOLUTION
```

```
<x, y> = -2.80
<x, z> =  0.00
<z, y> =  3.80
```

Propiedad 2.

El resultado debería ser:

```
<x, x> = 24.50
<y, y> =  9.54
<z, z> =  4.00
```

```
### BEGIN SOLUTION
print('<x, x> = {:>5.2f}'.format(x @ x))
print('<y, y> = {:>5.2f}'.format(y @ y))
print('<z, z> = {:>5.2f}'.format(z @ z))
### END SOLUTION
```

```
<x, x> = 24.50
<y, y> =  9.54
<z, z> =  4.00
```

Propiedad 3.

El resultado debería ser:

```
<α * x, y> = -1.3999999999999997
α * <x, y> = -1.3999999999999997
 ¿ <α * x, y> == α * <x,y> ? : True
```

```
# Definimos un escalar
### BEGIN SOLUTION
α = 0.5

print('<α * x, y> = {}'.format((α * x) @ y))
print('α * <x, y> = {}'.format(α * x @ y))
print(' ¿ <α * x, y> == α * <x,y> ? : {}'.format(np.isclose((α * x) @ y, α * x @
### END SOLUTION
```

```
<α * x, y> = -1.3999999999999995
α * <x, y> = -1.3999999999999995
 ¿ <α * x, y> == α * <x,y> ? : True
```

Propiedad 4.

El resultado debería ser:

```
     <x + y, z> = 3.8
<x, z> + <y, z> = 3.8
 ¿ <x + y, z> == <x, z> + <y, z>? : True
```

```
### BEGIN SOLUTION
print('     <x + y, z> = {}'.format((x + y) @ z))
print('<x, z> + <y, z> = {}'.format(x @ z + y @ z))
print(' ¿ <x + y, z> == <x, z> + <y, z>? : {}'.format(np.isclose((x + y) @ z, x @
### END SOLUTION
```

```
     <x + y, z> = 3.8
<x, z> + <y, z> = 3.8
 ¿ <x + y, z> == <x, z> + <y, z>? : True
```

Propiedad 5.

El resultado debería ser:

```
<x, y> = -2.7999999999999994
<y, x> = -2.7999999999999994
 ¿ <x, y> == <y, x> ? : True
```

```
### BEGIN SOLUTION
print('<x, y> = {}'.format(x @ y))
print('<y, x> = {}'.format(y @ x))
print(' ¿ <x, y> == <y, x> ? : {}'.format(np.isclose(x @ y, y @ x)))
### END SOLUTION
```

```
<x, y> = -2.799999999999999
<y, x> = -2.799999999999999
 ¿ <x, y> == <y, x> ? : True
```

Propiedad 6.

El resultado debería ser:

```
||<x, y>|| = 3.8
||x|| ||y||= 6.1773780845922
¿||<x, y>|| ≤ ||x|| ||y|? : True
```

```
### BEGIN SOLUTION
print('‖<x, y>‖ = {}'.format(np.abs(z @ y)))
print('‖x‖‖y‖= {}'.format(np.linalg.norm(z) * np.linalg.norm(y)))
print('¿‖<x, y>‖ ≤ ‖x‖ ‖y‖? : {}'.format( np.abs(z @ y) <= np.linalg.norm(z) * np.l
### END SOLUTION
```

```
‖<x, y>‖ = 3.8
‖x‖‖y‖= 6.1773780845922
¿‖<x, y>‖ ≤ ‖x‖ ‖y‖? : True
```