1 Espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Objetivo. Revisar e ilustrar las propiedades del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ usando la biblioteca `numpy`.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

1.1 Vectores en $\mathbb{R}^2$.

Usando la biblioteca `numpy` podemos definir vectores en varias dimensiones. Para ejemplificar definiremos vectores en $\mathbb{R}^2$ y haremos algunas operaciones en este espacio vectorial.

```python
# Importamos las bibliotecas requeridas
import numpy as np
import macti.visual as mvis
```

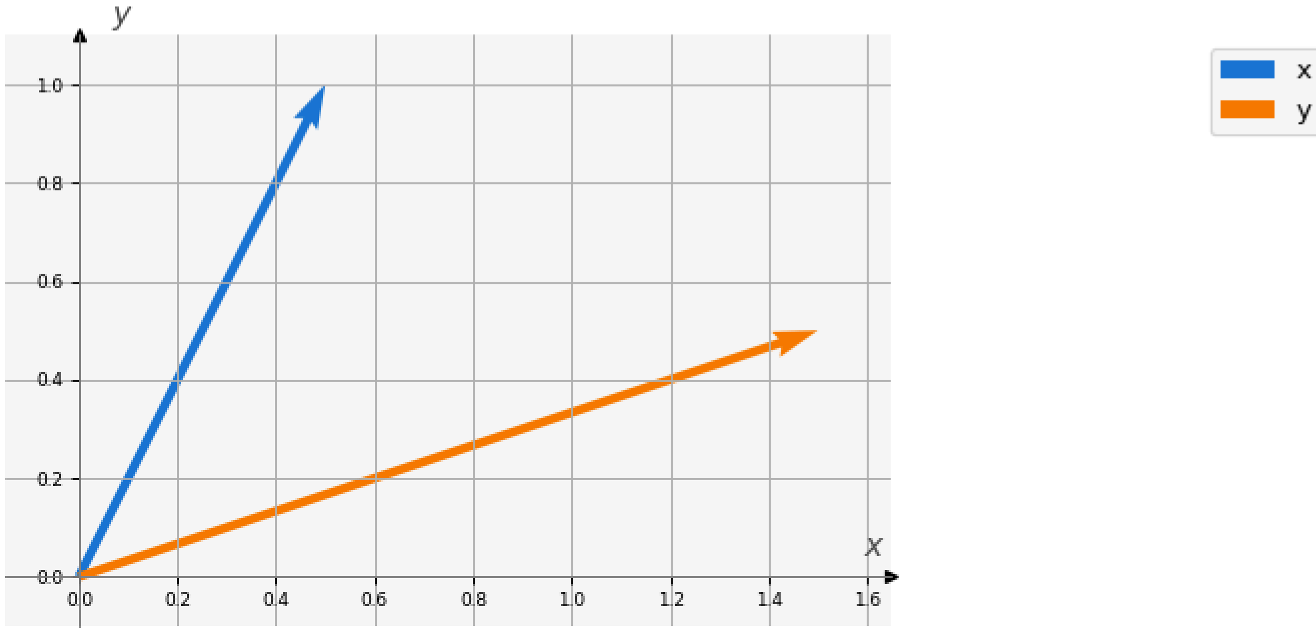
```python
# Definimos dos vectores en R^2 (arreglos 1D de numpy de longitud 2).
x = np.array([0.5, 1.0])
y = np.array([1.5, 0.5])

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [0.5 1. ]
y = [1.5 0.5]
```

La biblioteca `macti.visual` permite graficar los vectores en $\mathbb{R}^2$ como sigue:

```python
v = mvis.Plotter()  # Definición de un objeto para crear figuras.
v.set_coordsys(1)   # Definición del sistema de coordenadas.
v.plot_vectors(1, [x, y], ['x', 'y']) # Graficación de los vectores 'x' y 'y'.
v.grid()  # Muestra la rejilla del sistema de coordenadas.
```



1.2 Propiedades de un espacio vectorial.

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3. $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
4. Existe el vector neutro $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.
5. Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existe el opuesto $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
6. $\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.
8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.
9. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$.
10. Existe el elemento neutro $\mathbf{1} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{1}\vec{x} = \vec{x}$.

1.2.1 Propiedad 1: la suma es una operación interna.

$\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

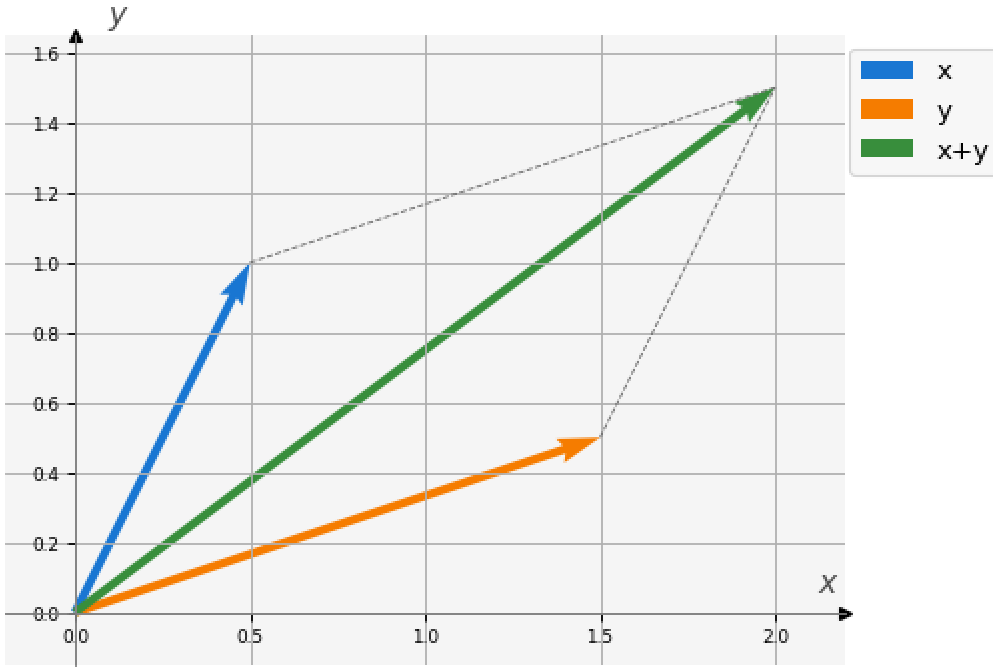
```
# Suma de dos vectores
z = x + y

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
print('z = x + y = {}'.format(z))

# Graficamos los vectores y su suma
v = mvis.Plotter()
v.set_coordsys()
```

```
v.plot_vectors_sum(1, [x, y], ['x', 'y'], ofx=-0.3) # Grafica los vectores y el r
v.grid()
```

```
x = [0.5 1. ]
y = [1.5 0.5]
z = x + y = [2.  1.5]
```



Observa que la función `plot_vectors_sum()` muestra los vectores originales y la suma de ellos. El nuevo vector $\vec{z}$ está en $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Propiedad 2: la suma es conmutativa.

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

```
xpy = x + y
ypx = y + x
print(' x + y = {} \t y + x = {}'.format(xpy, ypx))
print('\n ¿ x + y == y + x ? : {}'.format(np.isclose(xpy, ypx)))
```

```
 x + y = [2.  1.5]   y + x = [2.  1.5]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True]
```

Observa que la operación suma `+` se realiza componente a componente.

La función `np.isclose()` compara cada componente de los arreglos y determina que tan "parecidas" son hasta una tolerancia absoluta de 10^{-8}. Esta forma de comparación es la más conveniente cuando se comparan números reales (punto flotante, *floating point*).

1.2.3 Propiedad 3: la suma es asociativa.

$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.

```
print(' x = {} \t y = {} \t z = {}'.format(x, y, z))
print(' x + (y + z)= {} \t (x + y) + z = {}'.format(x + (y + z), (x + y) + z))
print('\n ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : {}'.format(np.isclose(x + (y + z), (x +
```

```
x = [0.5 1. ]    y = [1.5 0.5]    z = [2.  1.5]
x + (y + z)= [4. 3.]    (x + y) + z = [4. 3.]

¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True]
```

1.2.4 Propiedad 4: elemento neutro de la suma.

Existe el vector neutro $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

```
# Definimos el vector neutro.
cero = np.zeros(2)

print(' x = {} \t cero = {}'.format(x, cero))
print(' x + cero = {}'.format(x + cero))
```

```
x = [0.5 1. ]    cero = [0. 0.]
x + cero = [0.5 1. ]
```

1.2.5 Propiedad 5: elemento inverso en la suma.

Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existe el inverso $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

```
print(' x = {} \t -x = {}'.format(x, -x))
print(' x + (-x) = {}'.format(x + (-x)))
```

```
x = [0.5 1. ]    -x = [-0.5 -1. ]
x + (-x) = [0. 0.]
```

1.2.6 Propiedad 6: la multiplicación de un vector por un escalar produce un vector.

$\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

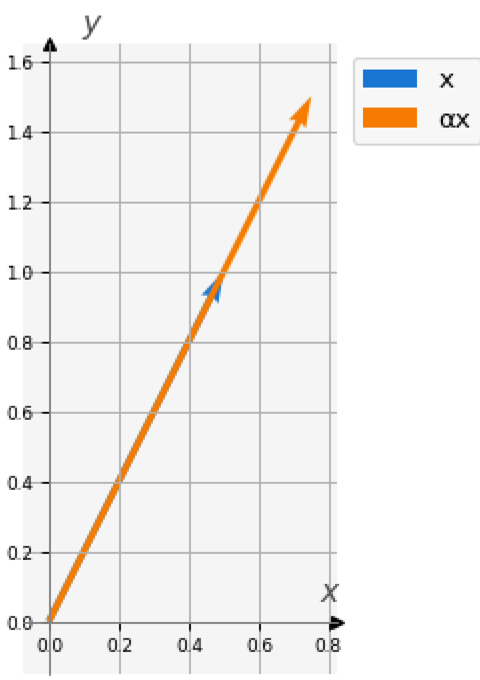
```
# Definimos un escalar
α = 1.5

# Realizamos la multiplicación de x por el escalar
αx = α * x

# Mostramos el resultado
print(' α = {} \t x = {} \n α * x = {}  \n '.format(α, x, αx))

# Graficamos el vector original y el resultado.
v = mvis.Plotter()
v.set_coordsys()
v.plot_vectors(1, [x, αx], ['x', 'αx'], w=0.020)
v.grid()
```

```
α = 1.5     x = [0.5 1. ]
α * x = [0.75 1.5 ]
```



Observa que el vector original $\vec{x} = (0.5, 1.0)$, representado por la flecha azul, es más pequeño que el vector resultante $\alpha\vec{x} = (0.75, 1.5)$, representado por la flecha naranja. α multiplica a cada componente del vector $\vec{x}$.

Cuando multiplicamos un vector por un escalar, puede ocurrir que su longitud se agrande, se reduzca y/o que cambie de sentido.

Intenta modificar el valor de α a 0.5 y luego a -0.5, observa que sucede.

1.2.7 Propiedad 7: distributividad I.

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

```
        print(' α = {}'.format(α))
        print(' x = {} \t y = {}'.format(x, y))
        print(' α ∗ (x + y) = {}'.format(α ∗ (x + y)))
        print(' α ∗ x + α ∗ y = {}'.format(α ∗ x + α ∗ y))
        print(' ¿ α ∗ (x + y) == α ∗ x + α ∗ y ? : {}'.format(np.isclose(α ∗ (x + y), α ∗
```

```
α = 1.5
x = [0.5 1. ]   y = [1.5 0.5]
α ∗ (x + y) = [3.   2.25]
α ∗ x + α ∗ y = [3.   2.25]
¿ α ∗ (x + y) == α ∗ x + α ∗ y ? : [ True  True]
```

1.2.8 Propiedad 8: distributividad II.

$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

```
        # Definimos dos escalares
        α = 2.0
        β = 1.5

        print(' α = {} \t β = {} \t α + β = {}'.format(α, β, α + β))
        print(' x = {}'.format(x))
        print(' (α + β) ∗ x = {}'.format((α + β) ∗ x))
        print(' α ∗ x + β ∗ x = {}'.format(α ∗ x + β ∗ x))
        print(' ¿ (α + β) ∗ x == α ∗ x + β ∗ x ? : {}'.format(np.isclose((α + β) ∗ x, α ∗
```

```
α = 2.0     β = 1.5     α + β = 3.5
x = [0.5 1. ]
(α + β) ∗ x = [1.75 3.5 ]
α ∗ x + β ∗ x = [1.75 3.5 ]
¿ (α + β) ∗ x == α ∗ x + β ∗ x ? : [ True  True]
```

1.2.9 Propiedad 9. asociatividad.

$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}.$

```
        # Definimos dos escalares
        α = 2.0
        β = 1.5

        print(' α = {} \t β = {} \t x = {}'.format(α, β, x))
        print(' α ∗ (β ∗ x) = {}'.format(α ∗ ( β ∗ x)))
        print(' (α ∗ β) ∗ x = {}'.format((α ∗ β) ∗ x))
        print(' ¿ α ∗ (β ∗ x) == (α ∗ β) ∗ x ? : {}'.format(np.isclose(α ∗ (β ∗ x), (α ∗
```

```
α = 2.0     β = 1.5     x = [0.5 1. ]
α ∗ (β ∗ x) = [1.5 3. ]
(α ∗ β) ∗ x = [1.5 3. ]
¿ α ∗ (β ∗ x) == (α ∗ β) ∗ x ? : [ True  True]
```

1.2.10 Propiedad 10.

Existe el elemento neutro $\mathbf{1} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{1}\vec{x} = \vec{x}$.

```
α = 1.0

print(' α = {} \t x = {}'.format(α, x))
print(' α * x = {}'.format(α * x))
print(' ¿ α * x == x ? : {}'.format(np.isclose(α * x, x)))
```

```
α = 1.0     x = [0.5 1. ]
α * x = [0.5 1. ]
¿ α * x == x ? : [ True  True]
```

1.3 Ejercicio 1.

Definimos los siguientes vectores $\vec{x} = (1.2, 3.4, 5.2, -6.7)$ y $\vec{y} = (4.4, -2.3, 5.3, 8.9)$ ambos en $\mathbb{R}^4$.

Usando $\alpha = 0.5$ y $\beta = 3.5$, verifica que se cumplen las propiedades 1 a 10 para $\vec{x}$ y $\vec{y}$.

Hint. Define los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ usando `numpy` y posteriormente copia los códigos utilizados en el ejemplo de $\mathbb{R}^2$ para cada propiedad. En algunos casos debes ajustar el código para este ejercicio.

Obervación. En este caso no es posible realizar gráficas.

```
### Definición de los vectores en R^4 con numpy
x = np.array([1.2, 3.4, 5.2, -6.7])
y = np.array([4.4, -2.3, 5.3, 8.9])

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
```

Propiedad 1.

El resultado debería ser:

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
z = x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
```

```
### Propiedad 1.

### BEGIN SOLUTION
z = x + y

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
print('z = x + y = {}'.format(z))
### END SOLUTION
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
z = x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
```

Propiedad 2.

El resultado debería ser:

```
 x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]    y + x = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 2.

### BEGIN SOLUTION
xpy = x + y
ypx = y + x
print(' x + y = {} \t y + x = {}'.format(xpy, ypx))
print('\n ¿ x + y == y + x ? : {}'.format(xpy == ypx))
### END SOLUTION
```

```
 x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]    y + x = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 3.

El resultado debería ser:

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]    y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]    z = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
 x + (y + z)= [11.2  2.2 21.   4.4]      (x + y) + z = [11.2  2.2 21.   4.4]

 ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 3.

### BEGIN SOLUTION
print(' x = {} \t y = {} \t z = {}'.format(x, y, z))
print(' x + (y + z)= {} \t (x + y) + z = {}'.format(x + (y + z), (x + y) + z))
print('\n ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : {}'.format(np.isclose(x + (y + z), (x +
### END SOLUTION
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]    y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]    z = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
x + (y + z)= [11.2  2.2 21.   4.4]      (x + y) + z = [11.2  2.2 21.   4.4]

¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 4.

El resultado debería ser:

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]    cero = [0. 0. 0. 0.]
x + cero = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
```

```
### Propiedad 4.

### BEGIN SOLUTION
cero = np.zeros(4)
print(' x = {} \t cero = {}'.format(x, cero))
print(' x + cero = {}'.format(x + cero))
### END SOLUTION
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]    cero = [0. 0. 0. 0.]
x + cero = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
```

Propiedad 5.

El resultado debería ser:

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]    -x = [-1.2 -3.4 -5.2  6.7]
x + (-x) = [0. 0. 0. 0.]
```

```
### Propiedad 5.

### BEGIN SOLUTION
print(' x = {} \t -x = {}'.format(x, -x))
print(' x + (-x) = {}'.format(x + (-x)))
### END SOLUTION
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   -x = [-1.2 -3.4 -5.2  6.7]
x + (-x) = [0. 0. 0. 0.]
```

Propiedad 6.

El resultado debería ser:

```
α = 1.5     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α * x = [  1.8    5.1    7.8  -10.05]
```

```
### Propiedad 6.

### BEGIN SOLUTION
α = 1.5
αx = α * x
print(' α = {} \t x = {} \n α * x = {}  \n '.format(α, x, αx))
### END SOLUTION
```

```
α = 1.5     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α * x = [  1.8    5.1    7.8  -10.05]
```

Propiedad 7.

El resultado debería ser:

```
α = 1.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
α * (x + y) = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
α * x + α * y = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
¿ α * (x + y) == α * x + α * y ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 7.

### BEGIN SOLUTION
print(' α = {}'.format(α))
print(' x = {} \t y = {}'.format(x, y))
print(' α * (x + y) = {}'.format(α * (x + y)))
print(' α * x + α * y = {}'.format(α * x + α * y))
print(' ¿ α * (x + y) == α * x + α * y ? : {}'.format(np.isclose(α * (x + y), α *
### END SOLUTION
```

```
α = 1.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
α * (x + y) = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
```

```
α ∗ x + α ∗ y = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
¿ α ∗ (x + y) == α ∗ x + α ∗ y ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 8.

El resultado debería ser:

```
α = 2.0      β = 1.5      α + β = 3.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
(α + β) ∗ x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
α ∗ x + β ∗ x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
¿ (α + β) ∗ x == α ∗ x + β ∗ x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 8.

### BEGIN SOLUTION
α = 2.0
β = 1.5

print(' α = {} \t β = {} \t α + β = {}'.format(α, β, α + β))
print(' x = {}'.format(x))
print(' (α + β) ∗ x = {}'.format((α + β) ∗ x))
print(' α ∗ x + β ∗ x = {}'.format(α ∗ x + β ∗ x))
print(' ¿ (α + β) ∗ x == α ∗ x + β ∗ x ? : {}'.format(np.isclose((α + β) ∗ x, α ∗
### END SOLUTION
```

```
α = 2.0      β = 1.5      α + β = 3.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
(α + β) ∗ x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
α ∗ x + β ∗ x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
¿ (α + β) ∗ x == α ∗ x + β ∗ x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 9.

El resultado debería ser:

```
α = 2.0      β = 1.5      x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α ∗ (β ∗ x) = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
(α ∗ β) ∗ x = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
¿ α ∗ (β ∗ x) == (α ∗ β) ∗ x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 9.

### BEGIN SOLUTION
α = 2.0
β = 1.5
```

```
        print(' α = {} \t β = {} \t x = {}'.format(α, β, x))
        print(' α * (β * x) = {}'.format(α * ( β * x)))
        print(' (α * β) * x = {}'.format((α * β) * x))
        print(' ¿ α * (β * x) == (α * β) * x ? : {}'.format(np.isclose(α * (β * x), (α *
        ### END SOLUTION
```

```
α = 2.0     β = 1.5     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α * (β * x) = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
(α * β) * x = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
¿ α * (β * x) == (α * β) * x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 10.

El resultado debería ser:

```
α = 1.0     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α * x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
¿ α * x == x ? : [ True  True  True  True]
```

```
        ### Propiedad 10.

        ### BEGIN SOLUTION
        α = 1.0

        print(' α = {} \t x = {}'.format(α, x))
        print(' α * x = {}'.format(α * x))
        print(' ¿ α * x == x ? : {}'.format(np.isclose(α * x, x)))
        ### END SOLUTION
```

```
α = 1.0     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
α * x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
¿ α * x == x ? : [ True  True  True  True]
```

1.4 Ejercicio 2.

Definimos dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2)$ ambos en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Al ejecutar la siguiente celda, se presenta un simulador interactivo en el cual se implementa la operación conocida como SAXPY que se define como: $\alpha\vec{x} + \vec{y}$.

Modifica el valor de α y de las componentes de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$, y observa lo que sucede cuando:

- $\alpha = 1.0, \alpha > 1.0, \alpha < 1.0, \alpha = 0.0, \alpha < 0.0.$
- $\vec{y} = (0, 0).$

NOTA: para ejecutar el simulador haz clic en el botón de *play* ▶

```
%run ./vecspace.py
```