Programación Avanzada

Luis Miguel de la Cruz Salas

2023-01-12

Table of contents

Introducción

Cuadernos interactivos para la asignatura de Programación Avanzada.

Los Jupyter Notebooks de este curso se pueden obtener en https://github.com/repomacti/macti/notebooks/.

1 Espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Objetivo. Revisar e ilustrar las propiedades del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ usando la biblioteca `numpy`.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

1.1 Vectores en $\mathbb{R}^2$.

Usando la biblioteca `numpy` podemos definir vectores en varias dimensiones. Para ejemplificar definiremos vectores en $\mathbb{R}^2$ y haremos algunas operaciones en este espacio vectorial.

```
# Importamos las bibliotecas requeridas
import numpy as np
import macti.visual as mvis
```

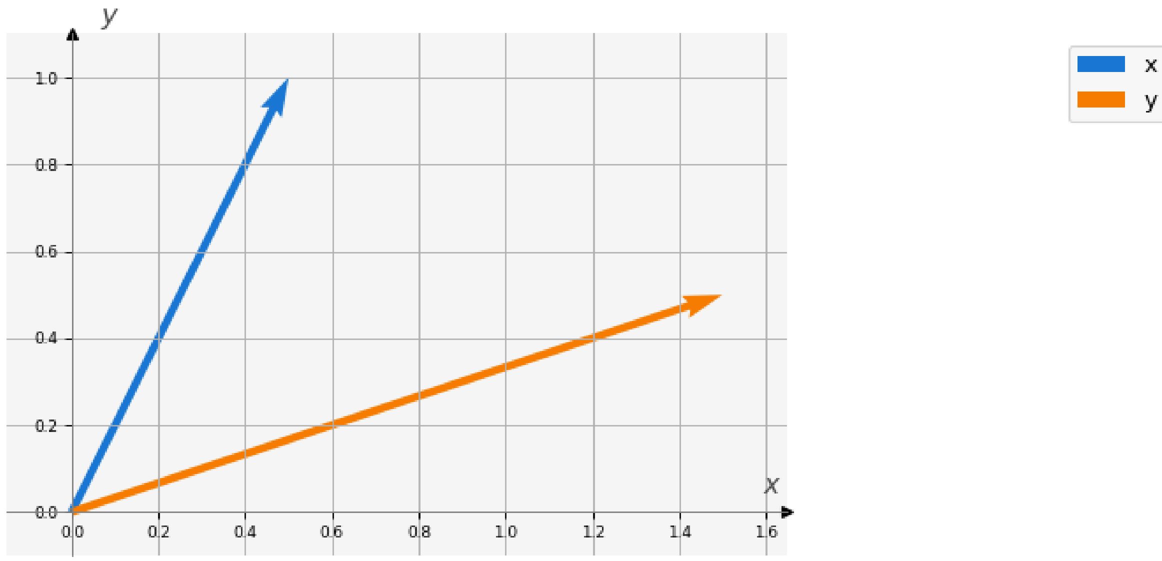
```
# Definimos dos vectores en R^2 (arreglos 1D de numpy de longitud 2).
x = np.array([0.5, 1.0])
y = np.array([1.5, 0.5])

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [0.5 1. ]
y = [1.5 0.5]
```

La biblioteca `macti.visual` permite graficar los vectores en $\mathbb{R}^2$ como sigue:

```
v = mvis.Plotter()  # Definición de un objeto para crear figuras.
v.set_coordsys(1)   # Definición del sistema de coordenadas.
v.plot_vectors(1, [x, y], ['x', 'y']) # Graficación de los vectores 'x' y 'y'.
v.grid()  # Muestra la rejilla del sistema de coordenadas.
```



1.2 Propiedades de un espacio vectorial.

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3. $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
4. Existe el vector neutro $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.
5. Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existe el opuesto $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
6. $\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.
8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.
9. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$.
10. Existe el elemento neutro $\mathbf{1} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{1}\vec{x} = \vec{x}$.

1.2.1 Propiedad 1: la suma es una operación interna.

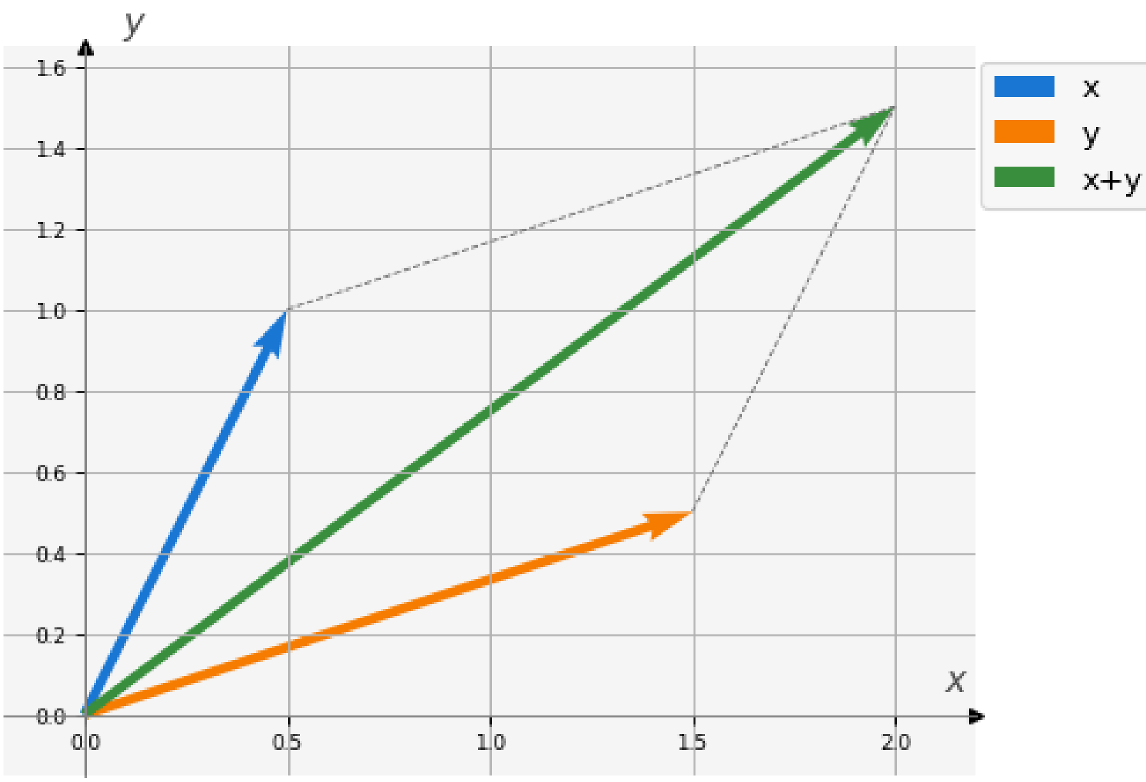
$\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

```
# Suma de dos vectores
z = x + y

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
print('z = x + y = {}'.format(z))
```

```
# Graficamos los vectores y su suma
v = mvis.Plotter()
v.set_coordsys()
v.plot_vectors_sum(1, [x, y], ['x', 'y'], ofx=-0.3) # Grafica los vectores y el resultado de
v.grid()
```

```
x = [0.5 1. ]
y = [1.5 0.5]
z = x + y = [2.  1.5]
```



Observa que la función `plot_vectors_sum()` muestra los vectores originales y la suma de ellos. El nuevo vector $\vec{z}$ está en $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Propiedad 2: la suma es conmutativa.

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

```
xpy = x + y
ypx = y + x
print(' x + y = {} \t y + x = {}'.format(xpy, ypx))
print('\n ¿ x + y == y + x ? : {}'.format(np.isclose(xpy, ypx)))
```

```
 x + y = [2.  1.5]   y + x = [2.  1.5]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True]
```

Observa que la operación suma `+` se realiza componente a componente.

La función `np.isclose()` compara cada componente de los arreglos y determina que tan "parecidas" son hasta una tolerancia absoluta de 10^{-8}. Esta forma de comparación es la más conveniente cuando se comparan números reales (punto flotante, floating point).

1.2.3 Propiedad 3: la suma es asociativa.

$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.

```
print(' x = {} \t y = {} \t z = {}'.format(x, y, z))
print(' x + (y + z)= {} \t (x + y) + z = {}'.format(x + (y + z), (x + y) + z))
print('\n ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : {}'.format(np.isclose(x + (y + z), (x + y) + z)))
```

```
 x = [0.5 1. ]   y = [1.5 0.5]   z = [2.  1.5]
 x + (y + z)= [4. 3.]    (x + y) + z = [4. 3.]

 ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True]
```

1.2.4 Propiedad 4: elemento neutro de la suma.

Existe el vector neutro $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

```
# Definimos el vector neutro.
cero = np.zeros(2)

print(' x = {} \t cero = {}'.format(x, cero))
print(' x + cero = {}'.format(x + cero))
```

```
 x = [0.5 1. ]   cero = [0. 0.]
 x + cero = [0.5 1. ]
```

1.2.5 Propiedad 5: elemento inverso en la suma.

Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existe el inverso $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

```
print(' x = {} \t -x = {}'.format(x, -x))
print(' x + (-x) = {}'.format(x + (-x)))
```

```
x = [0.5 1. ]   -x = [-0.5 -1. ]
x + (-x) = [0. 0.]
```

1.2.6 Propiedad 6: la multiplicación de un vector por un escalar produce un vector.

$\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

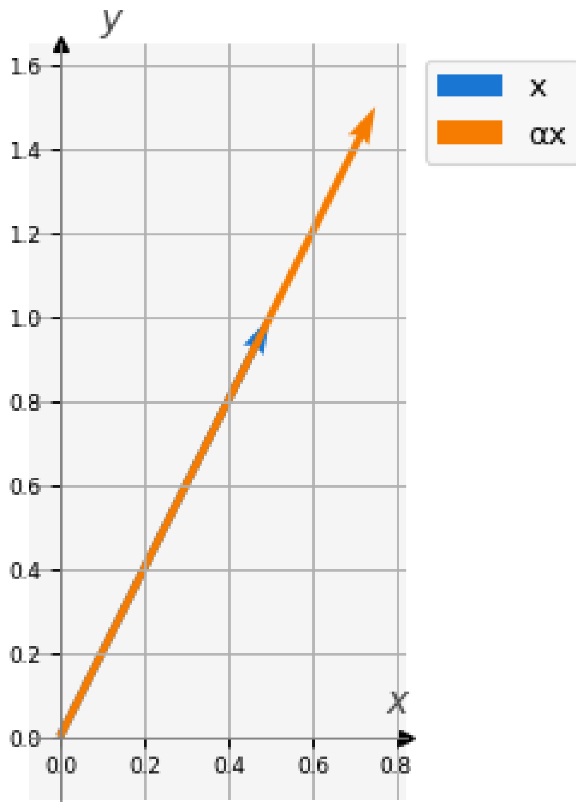
```
# Definimos un escalar
 = 1.5

# Realizamos la multiplicación de x por el escalar
x =   * x

# Mostramos el resultado
print('   = {} \t x = {} \n   * x = {}  \n '.format( , x,  x))

# Graficamos el vector original y el resultado.
v = mvis.Plotter()
v.set_coordsys()
v.plot_vectors(1, [x,  x], ['x', ' x'], w=0.020)
v.grid()
```

```
 = 1.5     x = [0.5 1. ]
* x = [0.75 1.5 ]
```



Observa que el vector original $\vec{x} = (0.5, 1.0)$, representado por la flecha azul, es más pequeño que el vector resultante $\alpha\vec{x} = (0.75, 1.5)$, representado por la flecha naranja. α multiplica a cada componente del vector $\vec{x}$. Cuando multiplicamos un vector por un escalar, puede ocurrir que su longitud se agrande, se reduzca y/o que cambie de sentido. Intenta modificar el valor de α a 0.5 y luego a -0.5, observa que sucede.

1.2.7 Propiedad 7: distributividad I.

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

```
print('   = {}'.format( ))
print(' x = {} \t y = {}'.format(x, y))
print('   * (x + y) = {}'.format(  * (x + y)))
print('   * x +   * y = {}'.format(  * x +   * y))
print(' ¿   * (x + y) ==   * x +   * y ? : {}'.format(np.isclose(  * (x + y),   * x +   * y)))
```

```
   = 1.5
 x = [0.5 1. ]    y = [1.5 0.5]
```

```
  * (x + y) = [3.   2.25]
  * x +   * y = [3.   2.25]
¿   * (x + y) ==   * x +   * y ? : [ True  True]
```

1.2.8 Propiedad 8: distributividad II.

$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

```
# Definimos dos escalares
  = 2.0
  = 1.5

print('   = {} \t   = {} \t   +   = {}'.format( ,  ,   + ))
print(' x = {}'.format(x))
print(' (  +  ) * x = {}'.format((  +  ) * x))
print('   * x +   * x = {}'.format(  * x +   * x))
print(' ¿ (  +  ) * x ==   * x +   * x ? : {}'.format(np.isclose((  +  ) * x,   * x +   * x)))
```

```
  = 2.0       = 1.5       +   = 3.5
 x = [0.5 1. ]
 (  +  ) * x = [1.75 3.5 ]
  * x +   * x = [1.75 3.5 ]
¿ (  +  ) * x ==   * x +   * x ? : [ True  True]
```

1.2.9 Propiedad 9. asociatividad.

$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$.

```
# Definimos dos escalares
  = 2.0
  = 1.5

print('   = {} \t   = {} \t x = {}'.format( ,  , x))
print('   * (  * x) = {}'.format(  * (  * x)))
print(' (  *  ) * x = {}'.format((  *  ) * x))
print(' ¿   * (  * x) == (  *  ) * x ? : {}'.format(np.isclose(  * (  * x), (  *  ) * x)))
```

```
  = 2.0       = 1.5     x = [0.5 1. ]
  * (  * x) = [1.5 3. ]
 (  *  ) * x = [1.5 3. ]
¿   * (  * x) == (  *  ) * x ? : [ True  True]
```

1.2.10 Propiedad 10.

Existe el elemento neutro $\mathbf{1} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{1}\vec{x} = \vec{x}$.

```
 = 1.0

print('  = {} \t x = {}'.format( , x))
print('  * x = {}'.format( * x))
print(' ¿  * x == x ? : {}'.format(np.isclose( * x, x)))
```

```
  = 1.0     x = [0.5 1. ]
  * x = [0.5 1. ]
 ¿  * x == x ? : [ True  True]
```

1.3 Ejercicio 1.

Definimos los siguientes vectores $\vec{x} = (1.2, 3.4, 5.2, -6.7)$ y $\vec{y} = (4.4, -2.3, 5.3, 8.9)$ ambos en $\mathbb{R}^4$. Usando $\alpha = 0.5$ y $\beta = 3.5$, verifica que se cumplen las propiedades 1 a 10 para $\vec{x}$ y $\vec{y}$. Hint. Define los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ usando `numpy` y posteriormente copia los códigos utilizados en el ejemplo de $\mathbb{R}^2$ para cada propiedad. En algunos casos debes ajustar el código para este ejercicio. Obervación. En este caso no es posible realizar gráficas.

```
### Definición de los vectores en R^4 con numpy
x = np.array([1.2, 3.4, 5.2, -6.7])
y = np.array([4.4, -2.3, 5.3, 8.9])

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
```

Propiedad 1.

El resultado debería ser:

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
z = x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
```

```
### Propiedad 1.

### BEGIN SOLUTION
z = x + y

print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
print('z = x + y = {}'.format(z))
### END SOLUTION
```

```
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
z = x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
```

Propiedad 2.

El resultado debería ser:

```
 x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]   y + x = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 2.

### BEGIN SOLUTION
xpy = x + y
ypx = y + x
print(' x + y = {} \t y + x = {}'.format(xpy, ypx))
print('\n ¿ x + y == y + x ? : {}'.format(xpy == ypx))
### END SOLUTION
```

```
 x + y = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]   y + x = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]

 ¿ x + y == y + x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 3.

El resultado debería ser:

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]   z = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
 x + (y + z)= [11.2  2.2 21.   4.4]      (x + y) + z = [11.2  2.2 21.   4.4]

 ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True  True  True]
```

```python
### Propiedad 3.

### BEGIN SOLUTION
print(' x = {} \t y = {} \t z = {}'.format(x, y, z))
print(' x + (y + z)= {} \t (x + y) + z = {}'.format(x + (y + z), (x + y) + z))
print('\n ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : {}'.format(np.isclose(x + (y + z), (x + y) + z)))
### END SOLUTION
```

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]   z = [ 5.6  1.1 10.5  2.2]
 x + (y + z)= [11.2  2.2 21.   4.4]      (x + y) + z = [11.2  2.2 21.   4.4]

 ¿ x + (y + z) == (x + y) + z : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 4.

El resultado debería ser:

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   cero = [0. 0. 0. 0.]
 x + cero = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
```

```python
### Propiedad 4.

### BEGIN SOLUTION
cero = np.zeros(4)
print(' x = {} \t cero = {}'.format(x, cero))
print(' x + cero = {}'.format(x + cero))
### END SOLUTION
```

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   cero = [0. 0. 0. 0.]
 x + cero = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
```

Propiedad 5.

El resultado debería ser:

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   -x = [-1.2 -3.4 -5.2  6.7]
 x + (-x) = [0. 0. 0. 0.]
```

```
### Propiedad 5.

### BEGIN SOLUTION
print(' x = {} \t -x = {}'.format(x, -x))
print(' x + (-x) = {}'.format(x + (-x)))
### END SOLUTION
```

```
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   -x = [-1.2 -3.4 -5.2  6.7]
 x + (-x) = [0. 0. 0. 0.]
```

Propiedad 6.

El resultado debería ser:

```
   = 1.5      x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
   * x = [  1.8    5.1    7.8  -10.05]
```

```
### Propiedad 6.

### BEGIN SOLUTION
  = 1.5
 x =   * x
print('   = {} \t x = {} \n   * x = {}  \n '.format( , x,  x))
### END SOLUTION
```

```
   = 1.5      x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
   * x = [  1.8    5.1    7.8  -10.05]
```

Propiedad 7.

El resultado debería ser:

```
   = 1.5
 x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
   * (x + y) = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
   * x +   * y = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
 ¿  * (x + y) ==   * x +   * y ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 7.

### BEGIN SOLUTION
print('   = {}'.format( ))
print(' x = {} \t y = {}'.format(x, y))
print('   * (x + y) = {}'.format( * (x + y)))
print('   * x +   * y = {}'.format( * x +   * y))
print(' ¿   * (x + y) ==   * x +   * y ? : {}'.format(np.isclose( * (x + y),   * x +   * y)))
### END SOLUTION
```

```
  = 1.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]   y = [ 4.4 -2.3  5.3  8.9]
  * (x + y) = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
  * x +   * y = [ 8.4   1.65 15.75  3.3 ]
¿   * (x + y) ==   * x +   * y ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 8.

El resultado debería ser:

```
  = 2.0       = 1.5       +   = 3.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
(  +  ) * x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
  * x +   * x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
¿ (  +  ) * x ==   * x +   * x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 8.

### BEGIN SOLUTION
  = 2.0
  = 1.5

print('   = {} \t   = {} \t   +   = {}'.format( ,  ,   +  ))
print(' x = {}'.format(x))
print(' (  +  ) * x = {}'.format((  +  ) * x))
print('   * x +   * x = {}'.format( * x +   * x))
print(' ¿ (  +  ) * x ==   * x +   * x ? : {}'.format(np.isclose((  +  ) * x,   * x +   * x)))
### END SOLUTION
```

```
  = 2.0       = 1.5       +   = 3.5
x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
```

```
 (  +  ) * x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
   * x +   * x = [  4.2   11.9   18.2  -23.45]
 ¿ (  +  ) * x ==   * x +   * x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 9.

El resultado debería ser:

```
   = 2.0       = 1.5     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
   * (  * x) = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
 (  *  ) * x = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
 ¿   * (  * x) == (  *  ) * x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 9.

### BEGIN SOLUTION
  = 2.0
  = 1.5

print('   = {} \t   = {} \t x = {}'.format( ,  , x))
print('   * (  * x) = {}'.format(  * (   * x)))
print(' (  *  ) * x = {}'.format((  *  ) * x))
print(' ¿   * (  * x) == (  *  ) * x ? : {}'.format(np.isclose(  * (  * x), (  *  ) * x)))
### END SOLUTION
```

```
   = 2.0       = 1.5     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
   * (  * x) = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
 (  *  ) * x = [  3.6  10.2  15.6 -20.1]
 ¿   * (  * x) == (  *  ) * x ? : [ True  True  True  True]
```

Propiedad 10.

El resultado debería ser:

```
   = 1.0     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
   * x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
 ¿   * x == x ? : [ True  True  True  True]
```

```
### Propiedad 10.

### BEGIN SOLUTION
 = 1.0

print('   = {} \t x = {}'.format( , x))
print('   * x = {}'.format(  * x))
print(' ¿   * x == x ? : {}'.format(np.isclose(  * x, x)))
### END SOLUTION
```

```
  = 1.0     x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
  * x = [ 1.2  3.4  5.2 -6.7]
 ¿   * x == x ? : [ True  True  True  True]
```

1.4 Ejercicio 2.

Definimos dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2)$ ambos en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Al ejecutar la siguiente celda, se presenta un simulador interactivo en el cual se implementa la operación conocida como SAXPY que se define como: $\alpha\vec{x}+\vec{y}$. Modifica el valor de α y de las componentes de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$, y observa lo que sucede cuando:

- $\alpha = 1.0$, $\alpha > 1.0$, $\alpha < 1.0$, $\alpha = 0.0$, $\alpha < 0.0$.
- $\vec{y} = (0, 0)$.

NOTA: para ejecutar el simulador haz clic en el botón de play

```
%run ./vecspace.py
```

```
HBox(children=(VBox(children=(FloatSlider(value=1.0, description=' ', layout=Layout(width='25

Output()
```