9 Conducción de Calor estaionaria en 2D.

Objetivo General - Resolver numérica y computacionalmente la ecuación de conducción de calor estacionaria en dos dimensiones usando un método implícito.

Objetivos particulares - Definir los parámetros físicos y numéricos. - Definir la malla del dominio. - Definir la temperatura inicial junto con sus condiciones de frontera y graficarla sobre la malla. - Definir el sistema lineal y resolverlo. - Graficar la solución.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

9.1 Introducción.

Jean-Baptiste Joseph Fourier fue un matemático y físico francés que ejerció una fuerte influencia en la ciencia a través de su trabajo *Théorie analytique de la chaleur*. En este trabajo mostró que es posible analizar la conducción de calor en cuerpos sólidos en términos de series matemáticas infinitas, las cuales ahora llevan su nombre: *Series de Fourier*. Fourier comenzó su trabajo en 1807, en Grenoble, y lo completó en París en 1822. Su trabajo le permitió expresar la conducción de calor en objetos bidimensionales (hojas muy delgadas de algún material) en términos de una ecuación diferencial:

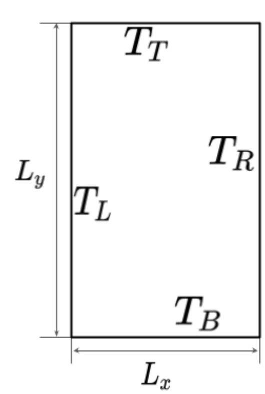
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S$$

donde u representa la temperatura en un instante de tiempo t y en un punto (x, y) del plano Cartesiano, κ es la conductividad del material y S una fuente de calor.

9.2 Conducción estacionaria en 2D.

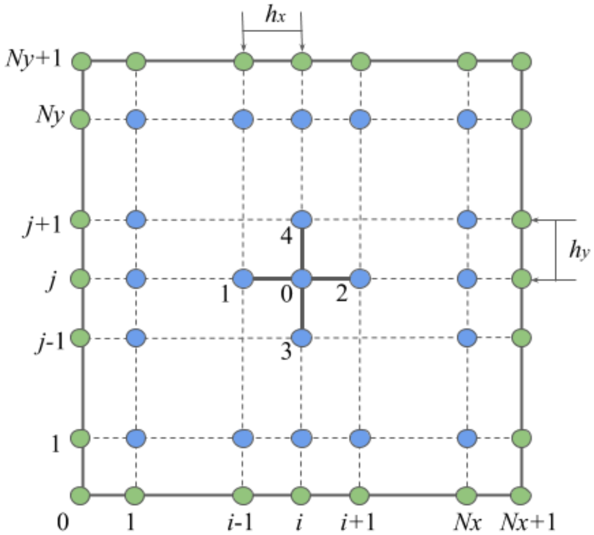
Cuando el problema es estacionario, es decir no hay cambios en el tiempo, y el dominio de estudio es una placa en dos dimensiones, como la que se muestra en la figura, podemos escribir el problema como sigue:

$$-\kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = S \qquad (1)$$



Podemos aplicar condiciones de frontera son de tipo Dirichlet o Neumann en las paredes de la placa. En la figura se distingue T_L, T_R, T_T y T_B que corresponden a las temperaturas dadas en las paredes izquierda (LEFT), derecha (RIGHT), arriba (TOP) y abajo (BOTTOM), respectivamente.

A la ecuación (1) le podemos aplicar el método de diferencias finitas:



$$
\Longrightarrow \begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \dfrac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_x^2}; \\ \left.\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} \approx \dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2}. \end{array}
$$

de tal manera que obtendríamos un sistema de ecuaciones lineales como el siguiente:

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ \hline u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \\ \hline u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ \vdots
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{4,1} \\ \hline f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ f_{4,2} \\ \hline f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \\ \vdots
\end{array}\right]
$$

En general un sistema de ecuaciones lineales puede contener n ecuaciones con n incógnitas y se ve como sigue:

$$
A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

El sistema se puede resolver usando diferentes tipos de métodos.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import macti.visual as mvis
```

9.3 Parámetros físicos y numéricos

```python
# Tamaño del dominio
Lx = 1.0
Ly = 1.0
k = 1.0
# Número de nodos en cada eje
Nx = 4
```

```
Ny = 4

# Número total de nodos en cada eje incluyendo las fronteras
NxT = Nx + 2
NyT = Ny + 2

# Número total de nodos
NT = NxT * NyT

# Número total de incógnitas
N = Nx * Ny

# Tamaño de la malla en cada dirección
hx = Lx / (Nx+1)
hy = Ly / (Ny+1)

# Coordenadas de la malla
xn = np.linspace(0,Lx,NxT)
yn = np.linspace(0,Ly,NyT)

# Generación de una rejilla
xg, yg = np.meshgrid(xn, yn, indexing='ij')
```

```
print('Total de nodos en x = {}, en y = {}'.format(NxT, NyT))
print('Total de incógnitas = {}'.format(N))
print('Coordenadas en x : {}'.format(xn))
print('Coordenadas en y : {}'.format(yn))
print('hx = {}, hy = {}'.format(hx, hy))
```

```
Total de nodos en x = 6, en y = 6
Total de incógnitas = 16
Coordenadas en x : [0.  0.2 0.4 0.6 0.8 1. ]
Coordenadas en y : [0.  0.2 0.4 0.6 0.8 1. ]
hx = 0.2, hy = 0.2
```

9.3.1 Graficación de la malla del dominio

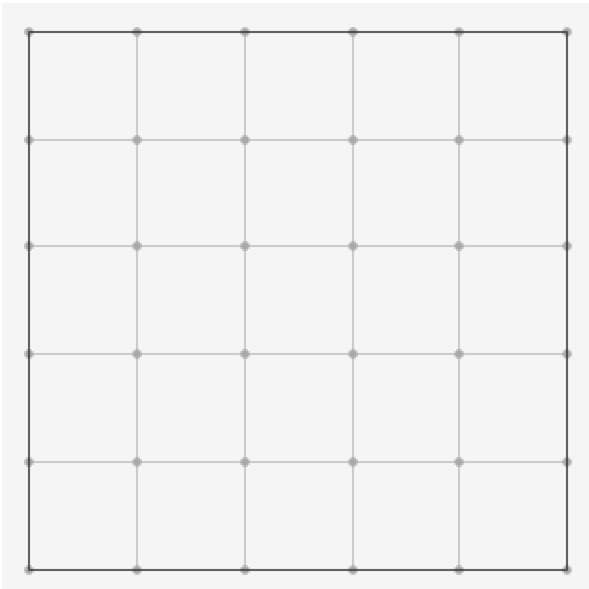
```
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
def set_axes(ax):
    """
    Configura la razón de aspecto, quita las marcas de los ejes y el marco.

    Parameters
    ----------
    ax: axis
    Ejes que se van a configurar.
    """
    ax.set_aspect('equal')
    ax.set_xticks([])
```

```
        ax.set_yticks([])
        ax.spines['bottom'].set_visible(False)
        ax.spines['left'].set_visible(False)

    def plot_mesh(ax, xg, yg):
        """
        Dibuja la malla del dominio.

        Paramters
        ---------
        ax: axis
        Son los ejes donde se dibujará la malla.

        xn: np.array
        Coordenadas en x de la malla.

        yn: np.array
        Coordenadas en y de la malla.
        """
        set_axes(ax)

        xn = xg[:,0]
        yn = yg[0,:]

        for xi in xn:
            ax.vlines(xi, ymin=yn[0], ymax=yn[-1], lw=0.5, color='darkgray')

        for yi in yn:
            ax.hlines(yi, xmin=xn[0], xmax=xn[-1], lw=0.5, color='darkgray')

        ax.scatter(xg,yg, marker='.', color='darkgray')

    def plot_frame(ax, xn, yn, lw = 0.5, color = 'k'):
        """
        Dibuja el recuadro de la malla.

        Paramters
        ---------
        ax: axis
        Son los ejes donde se dibujará la malla.

        xn: np.array
        Coordenadas en x de la malla.

        yn: np.array
        Coordenadas en y de la malla.
        """
        set_axes(ax)

        # Dibujamos dos líneas verticales
        ax.vlines(xn[0], ymin=yn[0], ymax=yn[-1], lw = lw, color=color)
```

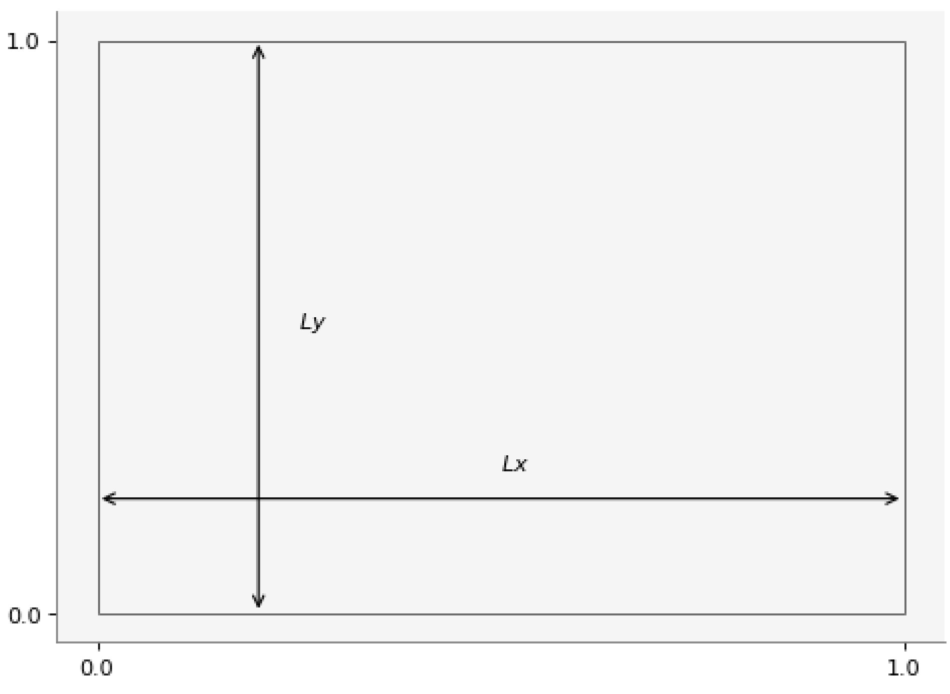
```
    ax.vlines(xn[-1], ymin=yn[0], ymax=yn[-1], lw = lw, color=color)

    # Dibujamos dos líneas horizontales
    ax.hlines(yn[0], xmin=xn[0], xmax=xn[-1], lw = lw, color=color)
    ax.hlines(yn[-1], xmin=xn[0], xmax=xn[-1], lw = lw, color=color)

def set_canvas(ax, Lx, Ly):
    """
    Configura un lienzo para hacer las gráficas más estéticas.

    Parameters
    ----------
    ax: axis
    Son los ejes que se van a configurar.

    Lx: float
    Tamaño del dominio en dirección x.

    Ly: float
    Tamaño del dominio en dirección y.

    Returns
    -------
    cax: axis
    Eje donde se dibuja el mapa de color.
    """
    set_axes(ax)

    lmax = max(Lx,Ly)
    offx = lmax * 0.01
    offy = lmax * 0.01
    ax.set_xlim(-offx, Lx+offx)
    ax.set_ylim(-offy, Ly+offy)
    ax.grid(False)

    ax.set_aspect('equal')
    divider = make_axes_locatable(ax)
    cax = divider.append_axes("right", "5%", pad="3%")
    cax.set_xticks([])
    cax.set_yticks([])
    cax.spines['bottom'].set_visible(False)
    cax.spines['left'].set_visible(False)

    return cax
```

```
fig = plt.figure()
ax = plt.gca()

# Ejecutamos la función plot_mesh(...)
plot_mesh(ax, xg, yg)
```

```
# Dibujamos el recuadro con la función plot_fame(...)
plot_frame(ax, xn, yn)
```

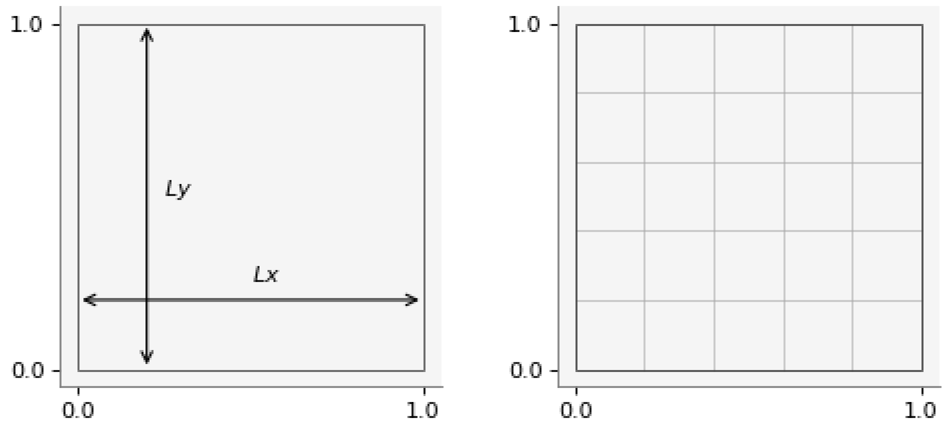


```
vis = mvis.Plotter(1,1)

vis.draw_domain(1, xg, yg)
```




```
vis = mvis.Plotter(1,2,[dict(aspect='equal'), dict(aspect='equal')])

vis.draw_domain(1, xg, yg)
```

```
vis.plot_mesh2D(2, xg, yg)
vis.plot_frame(2, xg, yg)
```



9.4 Campo de temperaturas y sus condiciones de frontera

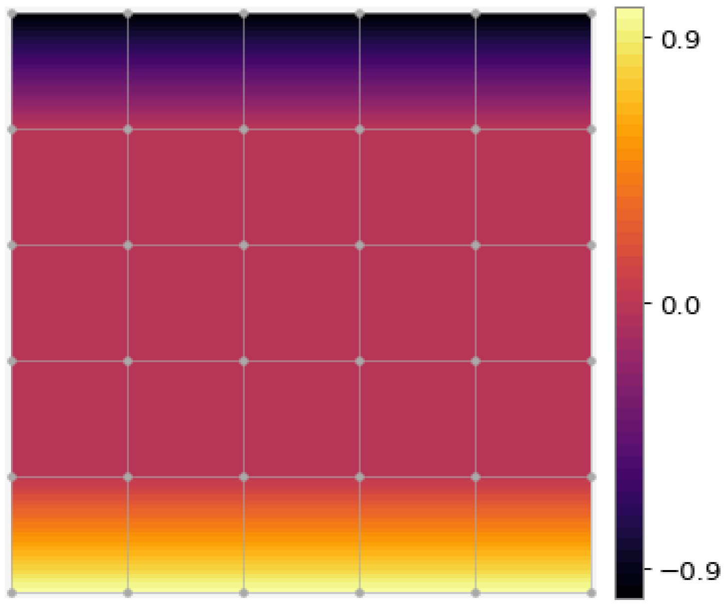
```
# Definición de un campo escalar en cada punto de la malla
T = np.zeros((NxT, NyT))

# Condiciones de frontera
TB = 1.0
TT = -1.0

T[0 , :] = 0.0 # LEFT
T[-1, :] = 0.0 # RIGHT
T[: , 0] = TB  # BOTTOM
T[: ,-1] = TT  # TOP

print('Campo escalar T ({}):\n {}'.format(T.shape, T))
```

```
Campo escalar T ((6, 6)):
 [[ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [ 1.  0.  0.  0.  0. -1.]]
```

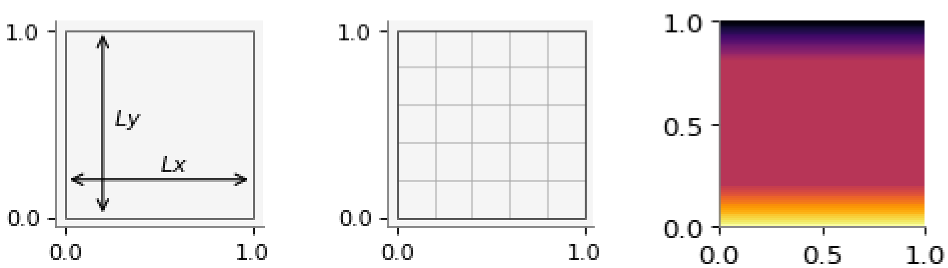
9.4.1 Graficación del campo escalar sobre la malla

```
fig = plt.figure()
ax = plt.gca()
cax = set_canvas(ax, Lx, Ly)

c = ax.contourf(xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
```

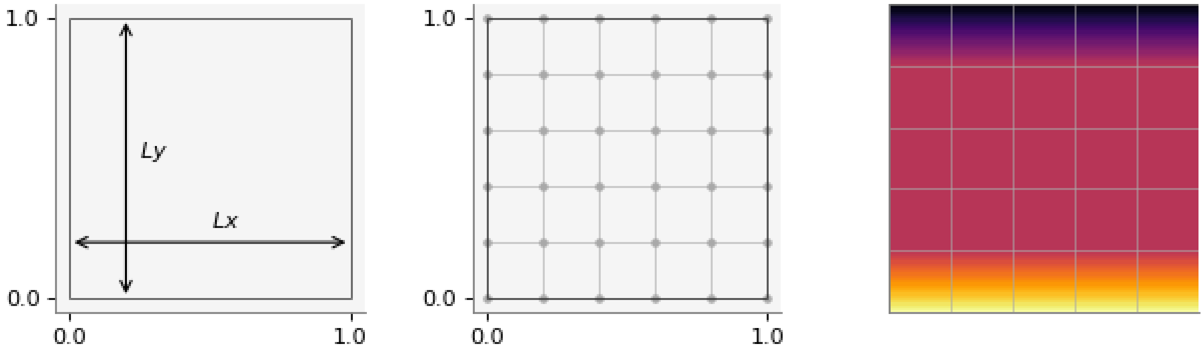
```
    plot_mesh(ax, xg, yg)
    fig.colorbar(c, cax=cax, ticks=[-0.9, 0.0, 0.9])
    plt.show()
```




```
    vis = mvis.Plotter(1,3,[dict(aspect='equal'), dict(aspect='equal'), dict(aspect='

    vis.draw_domain(1, xg, yg)
    vis.plot_mesh2D(2, xg, yg)
    vis.plot_frame(2, xg, yg)
    vis.contourf(3, xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
    vis.show()
```




```
    vis = mvis.Plotter(1,3,[dict(aspect='equal'), dict(aspect='equal'), dict(aspect='
                    dict(figsize=(8,16)))

    vis.draw_domain(1, xg, yg)
    vis.plot_mesh2D(2, xg, yg, nodeson=True)
    vis.plot_frame(2, xg, yg)
    vis.contourf(3, xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
    vis.plot_mesh2D(3,xg, yg)
    vis.show()
```



9.5 Flujo de calor

Fourier también estableció una ley para el flujo de calor que se escribe como:

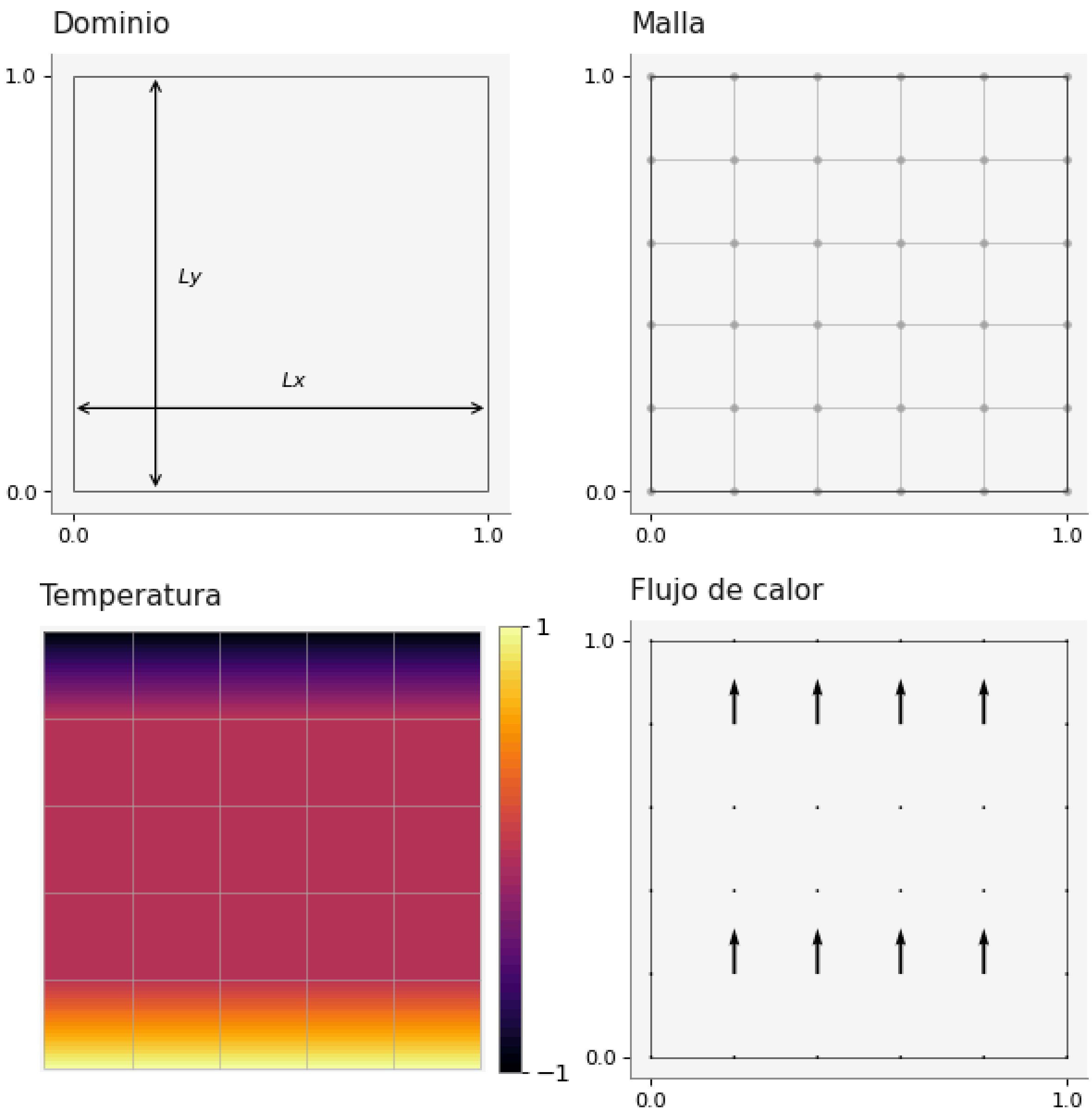
$$\vec{q} = -\kappa \nabla u = -\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

```
def heat_flux(T, hx, hy):
    NxT, NyT = T.shape
    qx = np.zeros(T.shape)
    qy = qx.copy()

    for i in range(1,NxT-1):
        for j in range(1,NyT-1):
            qx[i,j] = -k * (T[i+1,j] - T[i-1,j]) / 2 * hx
            qy[i,j] = -k * (T[i,j+1] - T[i,j-1]) / 2 * hy
    return qx, qy
```

```
qx, qy = heat_flux(T, hx, hy)
```

```
ax1 = dict(aspect='equal', title='Dominio')
ax2 = dict(aspect='equal', title='Malla')
ax3 = dict(aspect='equal', title='Temperatura')
ax4 = dict(aspect='equal', title='Flujo de calor')

vis = mvis.Plotter(2,2,[ax1, ax2, ax3, ax4],
                  dict(figsize=(8,8)))

vis.draw_domain(1, xg, yg)
vis.plot_mesh2D(2, xg, yg, nodeson=True)
vis.plot_frame(2, xg, yg)

cax3 = vis.set_canvas(3,Lx,Ly)
c = vis.contourf(3, xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
vis.fig.colorbar(c, cax=cax3, ticks = [T.min(), T.max()], shrink=0.5, orientatio
vis.plot_mesh2D(3, xg, yg)
```

```
vis.plot_frame(4, xg, yg)
vis.quiver(4, xg, yg, qx, qy, scale=1)
vis.show()
```



9.6 Sistema lineal

```
import FDM
# La matriz del sistema. Usamos la función predefinida buildMatrix2D()
A = FDM.buildMatrix2D(Nx,Ny,-4)
A
```

```
array([[-4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
         0.,  0.,  0.],
       [ 1., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
```

```
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  1., -4.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  0.,  0.,  0., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0., -4.,  1.,  0.,  0.,  1.,
        0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  1.,  0.,  0.,
        1.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  1.,  0.,
        0.,  1.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1., -4.,  0.,
        0.,  0.,  1.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  0., -4.,
        1.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,  1.,
       -4.,  1.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,  0.,
        1., -4.,  1.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  1.,  0.,
        0.,  1., -4.]])
```

```
# RHS
b = np.zeros((Nx,Ny))
b[:, 0] -= TB  # BOTTOM
b[:,-1] -= TT  # TOP
b
```

```
array([[-1.,  0.,  0.,  1.],
       [-1.,  0.,  0.,  1.],
       [-1.,  0.,  0.,  1.],
       [-1.,  0.,  0.,  1.]])
```

9.7 Solución del sistema

Revisamos el formato del vector b

```
b.shape
```

```
(4, 4)
```

El vector debe ser de una sola dimensión:

```
b.flatten()
```

```
array([-1.,  0.,  0.,  1., -1.,  0.,  0.,  1., -1.,  0.,  0.,  1., -1.,
        0.,  0.,  1.])
```

```
# Calculamos la solución.
T_temp = np.linalg.solve(A, b.flatten())
T_temp
```

```
array([ 0.40909091,  0.11363636, -0.11363636, -0.40909091,  0.52272727,
        0.15909091, -0.15909091, -0.52272727,  0.52272727,  0.15909091,
       -0.15909091, -0.52272727,  0.40909091,  0.11363636, -0.11363636,
       -0.40909091])
```

```
T_temp.shape
```

```
(16,)
```

Colocamos la solución en el campo escalar T de manera adecuada

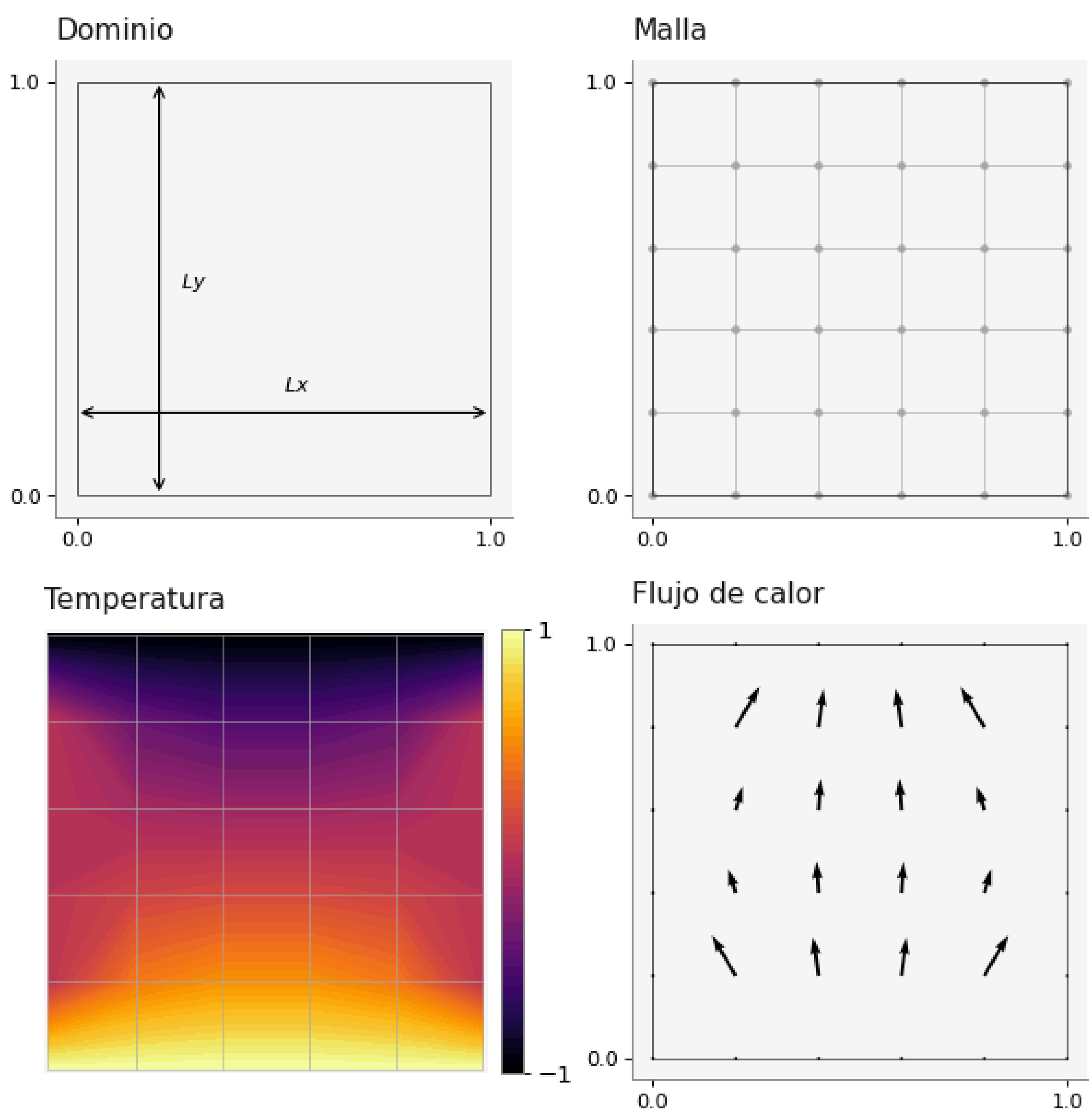
```
T[1:-1,1:-1] = T_temp.reshape(Nx,Ny)
T
```

```
array([[ 1.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,
        -1.        ],
       [ 1.        ,  0.40909091,  0.11363636, -0.11363636, -0.40909091,
        -1.        ],
       [ 1.        ,  0.52272727,  0.15909091, -0.15909091, -0.52272727,
        -1.        ],
       [ 1.        ,  0.52272727,  0.15909091, -0.15909091, -0.52272727,
        -1.        ],
       [ 1.        ,  0.40909091,  0.11363636, -0.11363636, -0.40909091,
        -1.        ],
       [ 1.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,
        -1.        ]])
```

```
qx, qy = heat_flux(T, hx, hy)
```

9.7.1 Gráfica de la solución

```
vis = mvis.Plotter(2,2,[ax1, ax2, ax3, ax4],
                   dict(figsize=(8,8)))

vis.draw_domain(1, xg, yg)
vis.plot_mesh2D(2, xg, yg, nodeson=True)
vis.plot_frame(2, xg, yg)

cax3 = vis.set_canvas(3,Lx,Ly)
c = vis.contourf(3, xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
vis.fig.colorbar(c, cax=cax3, ticks = [T.min(), T.max()], shrink=0.5, orientatior
vis.plot_mesh2D(3, xg, yg)

vis.plot_frame(4, xg, yg)
vis.quiver(4, xg, yg, qx, qy, scale=1)
vis.show()
```

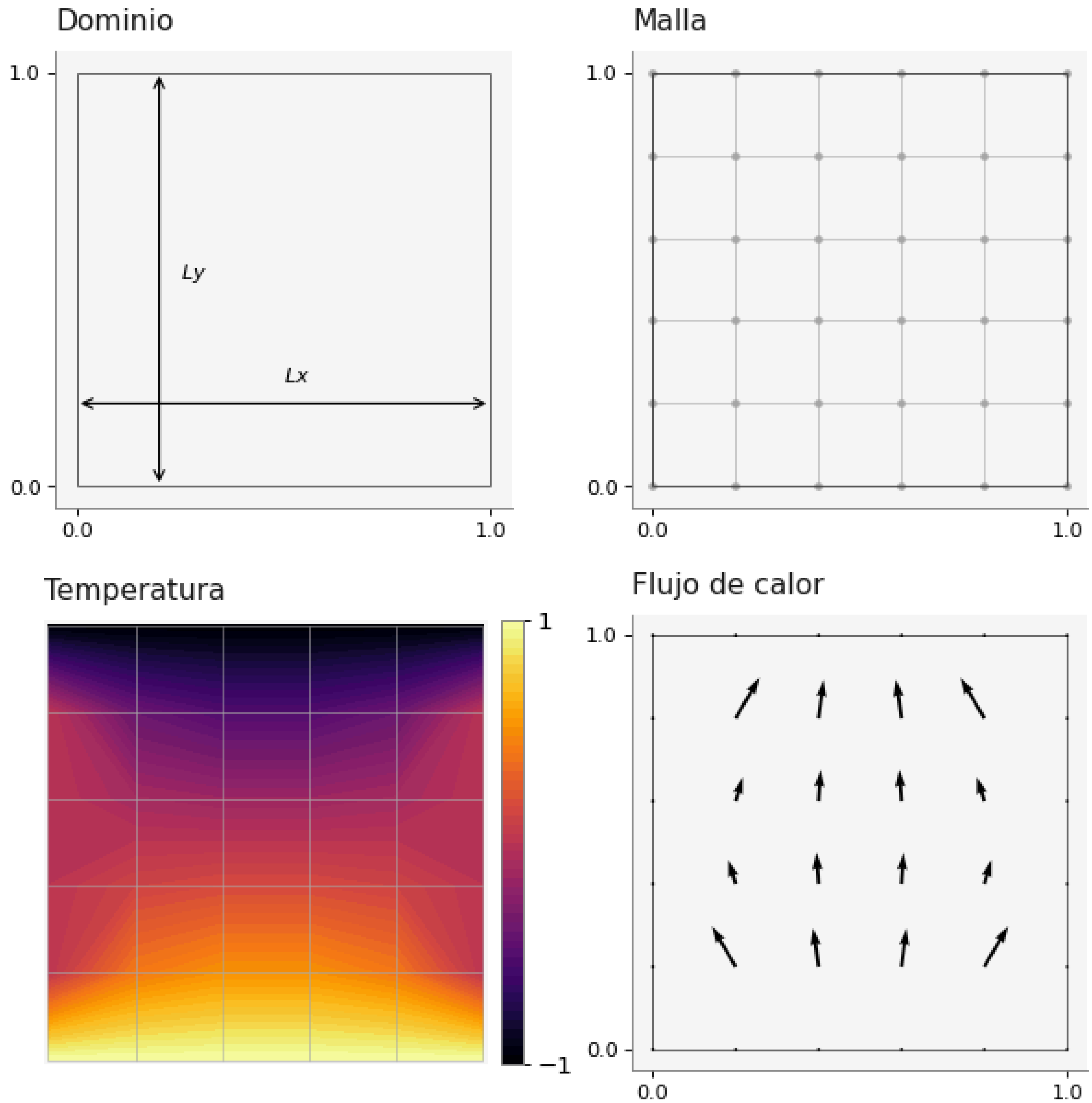


9.7.2 Interactivo

```
def heat_cond(Lx, Ly, Nx, Ny):
    # Número total de nodos en cada eje incluyendo las fronteras
    NxT = Nx + 2
    NyT = Ny + 2

    # Número total de nodos
    NT = NxT * NyT

    # Número total de incógnitas
    N = Nx * Ny

    # Tamaño de la malla en cada dirección
    hx = Lx / (Nx+1)
    hy = Ly / (Ny+1)

    # Coordenadas de la malla
    xn = np.linspace(0,Lx,NxT)
    yn = np.linspace(0,Ly,NyT)

    # Generación de una rejilla
    xg, yg = np.meshgrid(xn, yn, indexing='ij')

    # Definición de un campo escalar en cada punto de la malla
    T = np.zeros((NxT, NyT))

    # Condiciones de frontera
    TB = 1.0
    TT = -1.0

    T[0 , :] = 0.0 # LEFT
    T[-1, :] = 0.0 # RIGHT
    T[: , 0] = TB  # BOTTOM
    T[: ,-1] = TT  # TOP

    # La matriz del sistema. Usamos la función predefinida buildMatrix2D()
    A = FDM.buildMatrix2D(Nx,Ny,-4)

    # RHS
    b = np.zeros((Nx,Ny))
    b[:, 0] -= TB  # BOTTOM
    b[:,-1] -= TT  # TOP

    # Calculamos la solución.
    T[1:-1,1:-1] = np.linalg.solve(A, b.flatten()).reshape(Nx,Ny)

    # Calculamos el flujo de calor
    qx, qy = heat_flux(T, hx, hy)
```

```
        ax1 = dict(aspect='equal', title='Dominio')
        ax2 = dict(aspect='equal', title='Malla')
        ax3 = dict(aspect='equal', title='Temperatura')
        ax4 = dict(aspect='equal', title='Flujo de calor')

        vis = mvis.Plotter(2,2,[ax1, ax2, ax3, ax4],
                          dict(figsize=(8,8)))

        vis.draw_domain(1, xg, yg)
        vis.plot_mesh2D(2, xg, yg, nodeson=True)
        vis.plot_frame(2, xg, yg)

        cax3 = vis.set_canvas(3,Lx,Ly)
        c = vis.contourf(3, xg, yg, T, levels=50, cmap='inferno')
        vis.fig.colorbar(c, cax=cax3, ticks = [T.min(), T.max()], shrink=0.5, orienta
        vis.plot_mesh2D(3, xg, yg)

        vis.plot_frame(4, xg, yg)
        vis.quiver(4, xg, yg, qx, qy, scale=1)
        vis.show()
```

```
heat_cond(Lx=1, Ly=1, Nx=4, Ny=4)
```




```
import ipywidgets as widgets
```

```
widgets.interact(heat_cond, Lx = (1,3,1), Ly = (1,3,1), Nx = (4, 8, 1), Ny = (4,
```

```
<function __main__.heat_cond(Lx, Ly, Nx, Ny)>
```