2 Métodos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Objetivo.

Describir e implementar los algoritmos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

MACTI-Algebra_Lineal_01 by Luis M. de la Cruz is licensed under Attribution-ShareAlike 4.0 International

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

```python
import numpy as np
import ipywidgets as widgets
import macti.visual as mvis
```

3 Cruce de dos rectas.

Las siguientes dos rectas se cruzan en algún punto.

$$
\begin{array}{rcl}
3x + 2y & = & 2 \\
2x + 6y & = & -8
\end{array}
$$

Las ecuaciones de las rectas se pueden escribir como:

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{3}{2}x + y & = & 1 \\
\dfrac{2}{6}x + y & = & -\dfrac{8}{6}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c}
y = m_1 x + b_1 \\
y = m_2 x + b_2
\end{array}
\text{donde}
\begin{array}{cc}
m_1 = -\dfrac{3}{2} & b_1 = 1 \\
m_2 = -\dfrac{2}{6} & b_2 = -\dfrac{8}{6}
\end{array}
$$

Ahora realizaremos la gráfica de las rectas:

3.1 Definición y gráfica de las rectas

3.2 Ejercicio 1.

En la siguiente celda se define el domino x para las líneas rectas, los parámetros para construir la línea recta 1 y su construcción. De la misma manera define los parámetros y construye la recta 2. Si todo lo hiciste correctamente, la celda de graficación mostrará las gráficas de las líneas rectas.

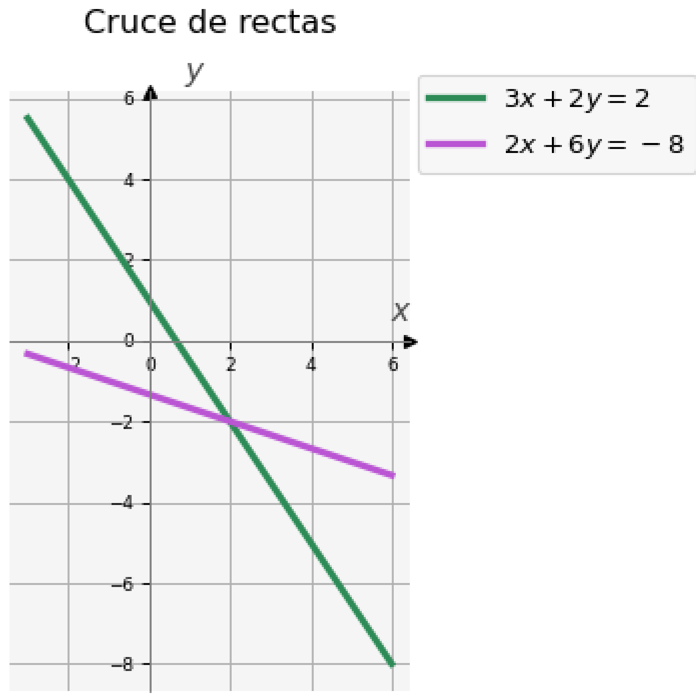
```
from macti.evaluation import FileAnswer, Quizz
#file_anser = FileAnswer()
#quizz = Quizz()
```

```
# Dominio
x = np.linspace(-3,6,10)

# Línea recta 1
m1 = -3/2
b1 = 1
y1 = m1 * x + b1

# Línea recta 2
# m2 = ...
# b2 = ...
# y2 = ...

### BEGIN SOLUTION
m2 = -2/6
b2 = -8/6
y2 = m2 * x + b2

#file_answer('1', m2, 'm2 incorrecta revisa el valor del parámetro.')
#file_answer('2', b2, 'b2 incorrecta revisa el valor del parámetro.')
#file_answer('3', y2, 'y2 no está definida correctamente.')
### END SOLUTION
```

```
#quizz.eval_numeric('1', m2)
#quizz.eval_numeric('2', b2)
#quizz.eval_numeric('3', y2)
```

Gráfica de las líneas rectas.

```
v = mvis.Plotter(1,1,[dict(aspect='equal')],title='Cruce de rectas')
v.set_coordsys(1)
v.plot(1, x, y1, lw = 3, c = 'seagreen', label = '$3x+2y=2$') # Línea recta 1
v.plot(1, x, y2, lw = 3, c = 'mediumorchid',label = '$2x+6y=-8$') # Línea recta 2
v.legend(ncol = 1, frameon=True, loc='best', bbox_to_anchor=(1.75, 1.05))
v.grid()
v.show()
```



3.3 Sistemas lineales.

Las ecuaciones de las rectas se pueden escribir en forma de un sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Podemos calcular el cruce de las rectas resolviendo el sistema lineal:

3.4 Ejemplo 1.

Definir el sistema lineal y resolverlo. Posteriomente graficar las rectas y el punto solución.

El sistema lineal se puede resolver directamente con la función `np.linalg.solve()` como sigue:

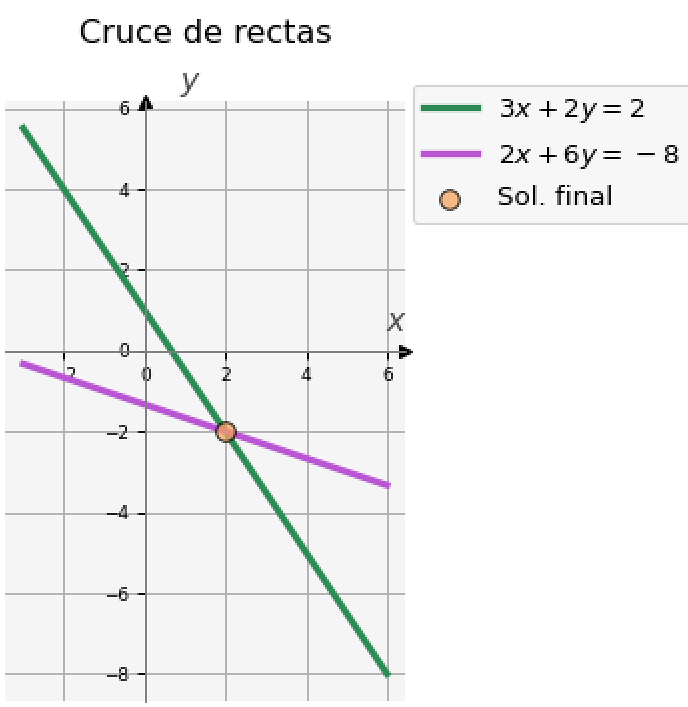
```
A = np.array([[3, 2],[2,6]] )
b = np.array([[2,-8]])
print("Matriz A : \n",A)
print("Vector b : \n", b)

sol = np.linalg.solve(A,b[0]) # Función del módulo linalg para resolver el sistem
print("Solución del sistema: ", sol)
```

```
Matriz A :
 [[3 2]
```

```
 [2 6]]
Vector b :
 [[ 2 -8]]
Solución del sistema:  [ 2. -2.]
```

Gráfica de las líneas rectas y el punto de cruce (solución).

```
v = mvis.Plotter(1,1,[dict(aspect='equal')],title='Cruce de rectas')
v.set_coordsys(1)
v.plot(1, x, y1, lw = 3, c = 'seagreen', label = '$3x+2y=2$') # Línea recta 1
v.plot(1, x, y2, lw = 3, c = 'mediumorchid', label = '$2x+6y=-8$') # Línea recta
v.scatter(1, sol[0], sol[1], fc='sandybrown', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=
v.legend(ncol = 1, frameon=True, loc='best', bbox_to_anchor=(1.75, 1.05))
v.grid()
v.show()
```



En general, un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ se escribe como sigue:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & +\cdots+ & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Es posible usar diferentes métodos para resolver este tipo de sistemas. Veamos tres de ellos.

4 Método de Jacobi

- En este método, de la primera ecuación se despeja x_1; de la segunda ecuación se despeja x_2; y a sí sucesivamente, de tal manera que obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n))/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n))/a_{22} \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_i &= (b_i - (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n))/a_{ii} \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_n &= (b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}))/a_{nn}
\end{aligned}
$$

- Suponemos ahora que tenemos una solución inicial aproximada $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$. Usando esta solución inicial, es posible hacer una nueva aproximación para obtener $\mathbf{x}^1 = [x_1^1, \dots, x_n^1]$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= \left(b_1 - (a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0)\right)/a_{11} \\
x_2^1 &= \left(b_2 - (a_{21}x_1^0 + \dots + a_{2n}x_n^0)\right)/a_{22} \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_i^1 &= \left(b_i - (a_{i1}x_1^0 + \dots + a_{in}x_n^0)\right)/a_{ii} \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_n^1 &= \left(b_n - (a_{n1}x_1^0 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^0)\right)/a_{nn}
\end{aligned}
$$

- En general para $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, 2, \dots$ tenemos:

$$
x_i^k = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{k-1}\right)
$$

- En términos de matrices, la **iteración de Jacobi** se escribe:

$$
\mathbf{x}^k = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}
$$

donde $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal y $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$.

- El cálculo de cada componente x_i^k es independiente de las otras componentes, por lo que este método se conoce también como de *desplazamientos simultáneos*.

4.1 Algoritmo Jacobi.

En general, podemos definir el siguiente algoritmo para el método de Jacobi.

Observa que en este algoritmo hay un ciclo `while` el cual termina cuando el error es menor o igual que una tolerancia `tol` o se ha alcanzado un número máximo de iteraciones `kmax`. En la línea **11** se calcula el error, que en términos matemáticos se define como $error = ||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}||$ donde $\mathbf{x}^k$ es la aproximación de la iteración k-ésima y $\mathbf{x}$ es la solución exacta. En muchas ocasiones no se tiene acceso a la solución exacta por lo que se compara con la solución de la iteración anterior, es decir $error = ||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}||$. En los ejemplos que siguen si tenemos la solución exacta, por lo que haremos la comparación con ella.

4.2 Implementación.

```
def jacobi(A,b,tol,kmax,xi, yi):
    N = len(b[0])
    xnew = np.zeros(N)
    xold = np.zeros(N)
    x = np.array([2, -2]) # Solución exacta

    # Solución inicial
    xold[0] = xi
    xold[1] = yi

    xs = [xi]
    ys = [yi]

    e = 10
    error = []

    k = 0
    print('{:^2} {:^10} {:^12} {:^12}'.format(' i ', 'Error', 'x0', 'x1'))
    while(e > tol and k < kmax) :
        for i in range(0,N): # se puede hacer en paralelo
            xnew[i] = 0
            for j in range(0,i):
                xnew[i] += A[i,j] * xold[j]
            for j in range(i+1,N):
                xnew[i] += A[i,j] * xold[j]
            xnew[i] = (b[0,i] - xnew[i]) / A[i,i]

        # Almacenamos la solución actual
        xs.append(xnew[0])
        ys.append(xnew[1])

        e = np.linalg.norm(xnew-x, 2) # Cálculo del error
        error.append(e)
        k += 1
        xold[:] = xnew[:]
        print('{:2d} {:10.9f} ({:10.9f}, {:10.9f})'.format(k, e, xnew[0], xnew[1]
    return xnew, np.array(xs), np.array(ys), error, k
```

4.3 Ejemplo 3. Aplicación del método de Jacobi.

Haciendo uso de la función `jacobi` definida en la celda anterior, aproxima la solución del sistema de ecuaciones (1). Utiliza la solución inicial `(xi, yi)` = $(-2, 2)$, una tolerancia `tol` = 1×10^{-5} y `kmax` = 50 iteraciones.

```
# Solución inicial
(xi, yi) = (-2, 2)
tol = 1e-5
kmax = 50

# Ejecución del método de Jacobi
solJ, xs, ys, eJ, itJ = jacobi(A, b, tol, kmax, xi, yi)
```

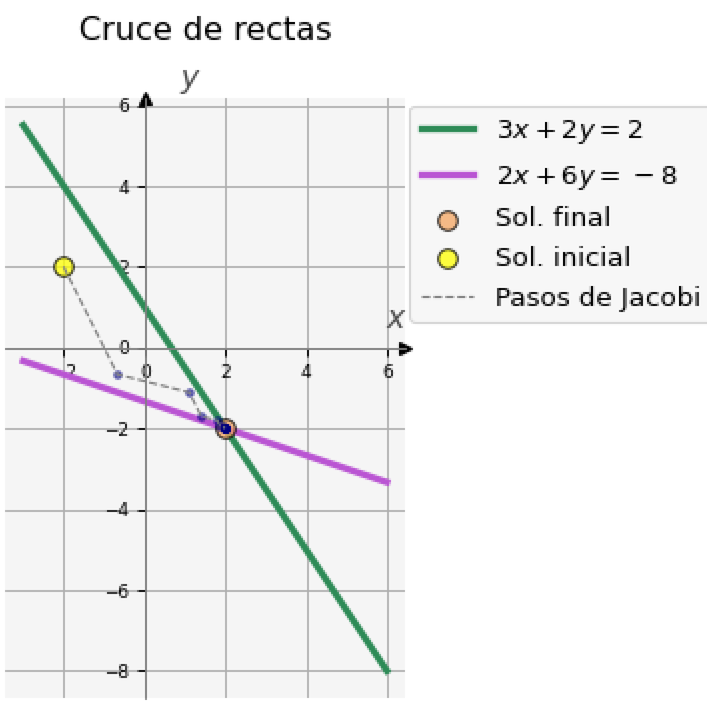
```
 i    Error          x0           x1
 1 2.981423970 (-0.666666667, -0.666666667)
 2 1.257078722 (1.111111111, -1.111111111)
 3 0.662538660 (1.407407407, -1.703703704)
 4 0.279350827 (1.802469136, -1.802469136)
 5 0.147230813 (1.868312757, -1.934156379)
 6 0.062077962 (1.956104252, -1.956104252)
 7 0.032717959 (1.970736168, -1.985368084)
 8 0.013795103 (1.990245389, -1.990245389)
 9 0.007270657 (1.993496926, -1.996748463)
10 0.003065578 (1.997832309, -1.997832309)
11 0.001615702 (1.998554873, -1.999277436)
12 0.000681240 (1.999518291, -1.999518291)
13 0.000359045 (1.999678861, -1.999839430)
14 0.000151387 (1.999892954, -1.999892954)
15 0.000079788 (1.999928636, -1.999964318)
16 0.000033641 (1.999976212, -1.999976212)
17 0.000017731 (1.999984141, -1.999992071)
18 0.000007476 (1.999994714, -1.999994714)
```

Observa que la función `jacobi()` regresa 5 valores: * `solJ` la solución obtenida, * `xs` y `ys` componentes de las soluciones aproximadas en cada paso, * `eJ` el error con respecto a la solución exacta e * `itJ` el número de iteraciones realizadas.

A continuación graficamos como es que la solución se va aproximando con este método.

```
v = mvis.Plotter(1,1,[dict(aspect='equal')],title='Cruce de rectas')
v.set_coordsys(1)
v.plot(1, x, y1, lw = 3, c = 'seagreen', label = '$3x+2y=2$') # Línea recta 1
v.plot(1, x, y2, lw = 3, c = 'mediumorchid', label = '$2x+6y=-8$') # Línea recta
v.scatter(1, sol[0], sol[1], fc='sandybrown', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=

# Graficamos los pasos
```

```
        v.scatter(1, xs[0], ys[0], fc='yellow', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=8, lab
        v.scatter(1, xs[1:], ys[1:], c='navy', s = 10, alpha=0.5, zorder=8)
        v.plot(1, xs, ys, c='grey', ls = '--', lw=1.0, zorder=8, label='Pasos de Jacobi')

        v.legend(ncol = 1, frameon=True, loc='best', bbox_to_anchor=(1.80, 1.01))
        v.grid()
        v.show()
```



4.4 Cálculo del error

- Definimos $e_i^k = x_i^k - x_i$ como la diferencia entre la i-ésima componente de la solución exacta y la i-ésima componente de la k-ésima iteración, de tal manera que $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n]^T$ es el vector error.

- Aplicando una vez la iteración de Jacobi para x_i y x_i^{k+1} podemos escribir la diferencia como sigue:

$$
\begin{aligned}
\left|e_i^{k+1}\right| &= \left|x_i^{k+1} - x_i\right| \\
\left|e_i^{k+1}\right| &= \left|\frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j^k\right) - \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j\right)\right| \\
\left|e_i^{k+1}\right| &= \left|-\sum_{j\neq i}\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}(x_j^k - x_j)\right| \\
\left|e_i^{k+1}\right| &= \left|-\sum_{j\neq i}\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}e_j^k\right| \leq \sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right| ||\mathbf{e}^k||_\infty, \qquad \forall i, k.
\end{aligned}
$$

- En particular:

$$
\max_{1\leq i\leq n}\left(\left|e_i^{k+1}\right|\right) = ||\mathbf{e}^{k+1}||_\infty \leq \sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right| ||\mathbf{e}^k||_\infty
$$

- Definimos $K = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j\neq i}\left|\dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right|$ entonces:

$$
\begin{aligned}
&||\mathbf{e}^{k+1}||_\infty \leq K||\mathbf{e}^k||_\infty \leq K\left(K||\mathbf{e}^{k-1}||_\infty\right) \leq \dots \leq K^k||\mathbf{e}^1||_\infty \\
&||\mathbf{e}^{k+1}||_\infty \leq K^k||\mathbf{e}^1||_\infty
\end{aligned}
$$

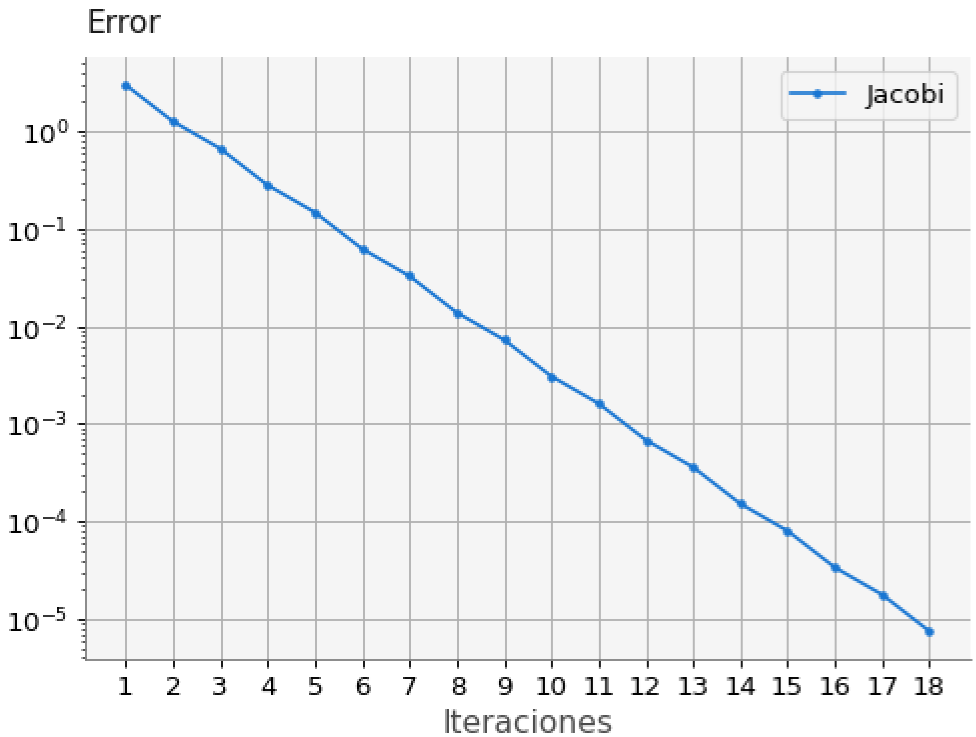
- Si $K < 1$ entonces $\mathbf{e}^k \to 0$ cuando $k \to \infty$

- La condición $K < 1$ implica:

$$
\sum_{j\neq i}|a_{i,j}| < |a_{i,i}|, \forall i
$$

A continuación graficamos el error que se va obteniendo en cada paso del método:

```python
# Lista con el número de las iteraciones
l_itJ = list(range(1,itJ+1))

# Parámetros para los ejes
a_p = dict(yscale='log', xlabel='Iteraciones', xticks = l_itJ)

# Gráfica del error
v = mvis.Plotter(1,1,[a_p])
v.axes(1).set_title('Error', loc='left')
v.plot(1, l_itJ, eJ, marker='.', label='Jacobi') # Error eJ
v.legend()
v.grid()
```



5 Método de Gauss-Seidel

- La principal diferencia con el método de Jacobi es que las ecuaciones se analizan en un orden determinado.
- Por ejemplo, si realizamos el cálculo en orden ascendente y ya hemos evaluado x_1 y x_2, para evaluar x_3 haríamos lo siguiente:}

$$
\begin{aligned}
\underline{x_1^1} &= \left(b_1 - (a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + \dots + a_{1n}x_n^0)\right)/a_{11} \\
\underline{x_2^1} &= \left(b_2 - (a_{21}\underline{x_1^1} + a_{23}x_3^0 + \dots + a_{2n}x_n^0)\right)/a_{22} \\
x_3 &= \left(b_3 - (a_{31}\underline{x_1^1} + a_{32}\underline{x_2^1} + \dots + a_{3n}x_n^0)\right)/a_{22}
\end{aligned}
$$

- En general la fórmula del método es como sigue: $$ x_i^k = (b_i - *{j < i}* a{i,j}
- *{j > i}* a{i,j} x_j^{k-1}) $$
- Este algoritmo es serial dado que cada componente depende de que las componentes previas se hayan calculado (*desplazamientos sucesivos*).
- El valor de la nueva iteración $\mathbf{x}^k$ depende del orden en que se examinan las componentes. Si se cambia el orden, el valor de $\mathbf{x}^k$ cambia.

5.1 Algoritmo Gauss-Seidel.

En general, podemos definir el siguiente algoritmo para el método de Gauss-Seidel.

Se aplican los mismo comentarios que para el algoritmo de Jacobi.

5.2 Implementación.

```
def gauss_seidel(A,b,tol,kmax,xi,yi):
    N = len(b[0])
    xnew = np.zeros(N)
    xold = np.zeros(N)
    x = np.array([2, -2]) # Solución exacta

    # Solución inicial
    xold[0] = xi
    xold[1] = yi

    xs = [xi]
    ys = [yi]

    e = 10
    error = []

    k = 0
    print('{:^2} {:^10} {:^12} {:^12}'.format(' i ', 'Error', 'x0', 'x1'))
    while(e > tol and k < kmax) :
        for i in range(0,N): # se puede hacer en paralelo
            xnew[i] = 0
            for j in range(0,i):
                xnew[i] += A[i,j] * xnew[j]
            for j in range(i+1,N):
                xnew[i] += A[i,j] * xold[j]
            xnew[i] = (b[0,i] - xnew[i]) / A[i,i]

        # Almacenamos la solución actual
        xs.append(xnew[0])
        ys.append(xnew[1])

        e = np.linalg.norm(xnew-x,2) # Cálculo del error
        error.append(e)
        k += 1
        xold[:] = xnew[:]
        print('{:2d} {:10.9f} ({:10.9f}, {:10.9f})'.format(k, e, xnew[0], xnew[1]
    return xnew, np.array(xs), np.array(ys), error, k
```

5.3 Ejercicio 2.

Haciendo uso de la función `gauss_seidel()` definida en la celda anterior, aproxima la solución del sistema de ecuaciones del Ejemplo 1. Utiliza la solución inicial `(xi, yi) =` $(-2, 2)$, una tolerancia `tol` = 1×10^{-5} y `kmax` = 50 iteraciones. Utiliza las variables `solG`, `xs`, `ys`, `eG` e `itG` para almacenar la salida de la función `gauss_seidel()`. Posteriormente grafica las rectas y cómo se va calculando la solución con este método (puedes usar el mismo código que en el caso de Jacobi). Grafica también los errores para el método de Jacobi y para el de Gauss-Seidel, deberías obtener una imagen como la siguiente:

Cálculo de la solución con Gauss-Seidel

```
# Solución inicial
# xi, yi =
# tol =
# kmax =

# Método de Gauss-Seidel
# ...

### BEGIN SOLUTION
# Solución inicial
xi, yi = -2, 2
tol = 1e-5
kmax = 50

# Método de Gauss-Seidel
solG, xs, ys, eG, itG = gauss_seidel(A, b, tol, kmax, xi, yi)

#file_answer.write('4', solG, 'solG es incorrecta: revisa la llamada y ejecución
#file_answer.write('5', eG[-1], 'eG[-1] es incorrecto: revisa la llamada y ejecuc
#file_answer.write('6', itG, 'itG es incorrector: revisa la llamada y ejecución c

### END SOLUTION
```

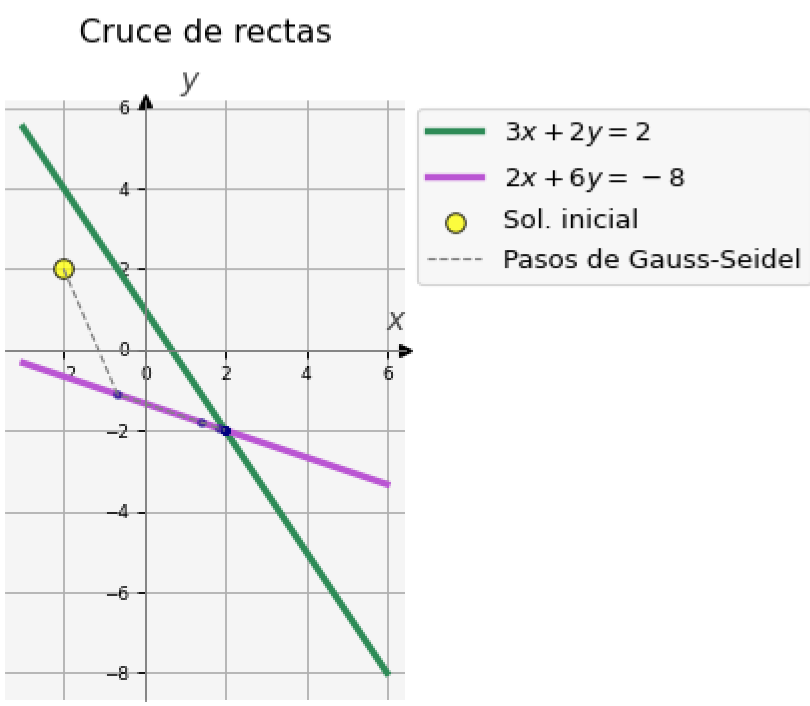
```
i    Error         x0            x1
1 2.810913476 (-0.666666667, -1.111111111)
2 0.624647439 (1.407407407, -1.802469136)
3 0.138810542 (1.868312757, -1.956104252)
4 0.030846787 (1.970736168, -1.990245389)
5 0.006854842 (1.993496926, -1.997832309)
6 0.001523298 (1.998554873, -1.999518291)
7 0.000338511 (1.999678861, -1.999892954)
8 0.000075225 (1.999928636, -1.999976212)
```

```
 9 0.000016717 (1.999984141, -1.999994714)
10 0.000003715 (1.999996476, -1.999998825)
```

```
#quizz.eval_numeric('4', solG)
#quizz.eval_numeric('5', eG[-1])
#quizz.eval_numeric('6', itG)
```

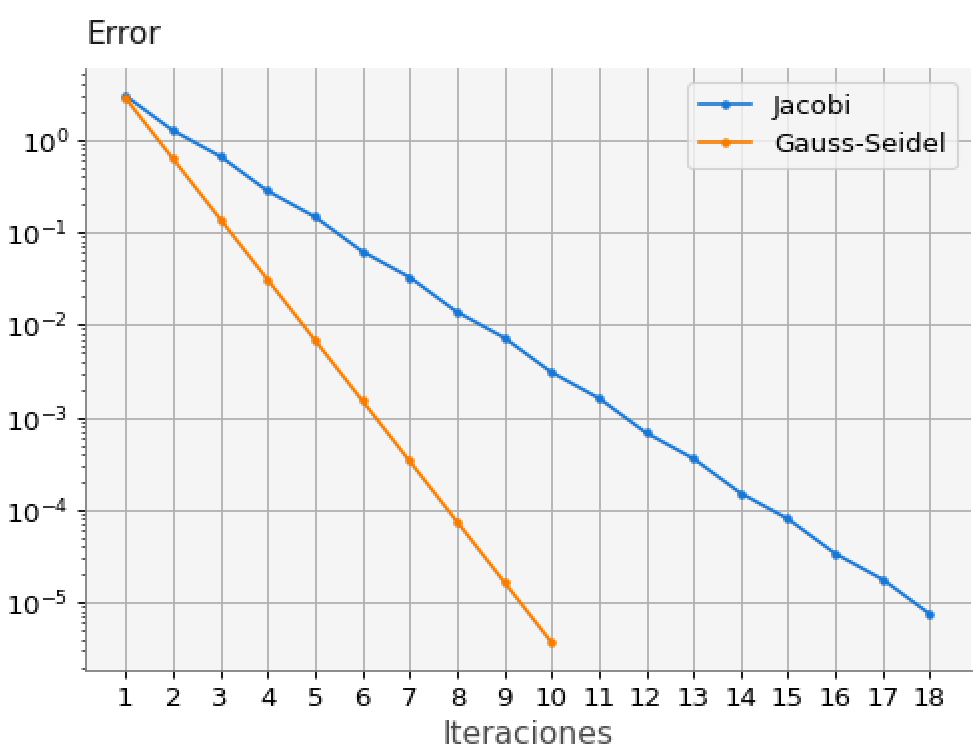
Gráfica de las rectas, la solución y los pasos realizados

```
# Puedes usar el mismo código que en el caso anterior.

### BEGIN SOLUTION
v = mvis.Plotter(1,1,[dict(aspect='equal')],title='Cruce de rectas')
v.set_coordsys(1)
v.plot(1, x, y1, lw = 3, c = 'seagreen', label = '$3x+2y=2$') # Línea recta 1
v.plot(1, x, y2, lw = 3, c = 'mediumorchid', label = '$2x+6y=-8$') # Línea recta

# Graficamos los pasos
v.scatter(1, xs[0], ys[0], fc='yellow', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=8, lab
v.scatter(1, xs[1:], ys[1:], c='navy', s = 10, alpha=0.5, zorder=8)
v.plot(1, xs, ys, c='grey', ls = '--', lw=1.0, zorder=8, label='Pasos de Gauss-Se

v.legend(ncol = 1, frameon=True, loc='best', bbox_to_anchor=(2.05, 1.01))
v.grid()
v.show()
### END SOLUTION
```



Graficación de los errores de Jacobi y Gauss-Seidel

```
# Utiliza el código del caso anterior adaptado para que pueda graficar ambos erro

### BEGIN SOLUTION
# Lista con el número de las iteraciones máxima
it_max = max(itJ, itG)+1
l_it_max = list(range(1,it_max))

# Listas con el número de las iteraciones para cada algoritmo
l_itJ = list(range(1,itJ+1))
l_itG = list(range(1,itG+1))

# Parámetros para los ejes
a_p = dict(yscale='log', xlabel='Iteraciones', xticks = l_it_max)

# Gráficas del error
v = mvis.Plotter(1,1,[a_p])
v.axes(1).set_title('Error', loc='left')
v.plot(1, l_itJ, eJ, marker='.', label='Jacobi')
v.plot(1, l_itG, eG, marker='.', label='Gauss-Seidel')
v.legend()
v.grid()
### END SOLUTION
```



6 Método de Sobrerrelajación sucesiva (*Successive Overrelaxation*, SOR)

- Se obtiene apicando una extrapolación a la iteración de Gauss-Seidel.
- Esta extrapolación es un promedio pesado entre la iteración actual y la anterior:

$$x_i^k = \omega \bar{x}_i^k + (1 - \omega) x_i^{k-1}$$

donde $\bar{x}$ denota una iteración de Gauss-Seidel y ω es el factor de extrapolación.

- En términos de matrices tenemos: $$ ^k = (-)^{-1}(+ (1 -))^{k-1}
- (-)^{-1} $$
- Elegir la ω óptima no es simple, aunque se sabe que si ω está fuera del intervalo $(0, 2)$ el método falla.

6.1 Implementación 3.

```
def sor(A,b,tol,kmax,w,xi,yi):
    N = len(b[0])
    xnew = np.zeros(N)
    xold = np.zeros(N)
    x = np.array([2, -2]) # Solución exacta

    # Solución inicial
    xold[0] = xi
    xold[1] = yi

    xs = [xi]
    ys = [yi]

    e = 10
    error = []

    k = 0
    while(e > tol and k < kmax) :
        for i in range(0,N): # se puede hacer en paralelo
            sigma = 0
            for j in range(0,i):
                sigma += A[i,j] * xnew[j]
            for j in range(i+1,N):
                sigma += A[i,j] * xold[j]
            sigma = (b[0,i] - sigma) / A[i,i]
            xnew[i] = xold[i] + w * (sigma -xold[i])

        # Almacenamos la solución actual
        xs.append(xnew[0])
        ys.append(xnew[1])

        e = np.linalg.norm(xnew-x, 2) # Cálculo del error
        error.append(e)
        k += 1
```

```
            xold[:] = xnew[:]
            print('{:2d} {:10.9f} ({:10.9f}, {:10.9f})'.format(k, e, xnew[0], xnew[1]
        return xnew, np.array(xs), np.array(ys), error, k
```

6.2 Ejercicio 3.

Haciendo uso de la función `sor()` definida en la celda anterior, aproxima la solución del sistema de ecuaciones del Ejercicio 1. Utiliza la solución inicial `(xi, yi) =` $(-2, 2)$, una tolerancia `tol` = 1×10^{-5} y `kmax` = 50 iteraciones. Elije el valor de $\omega = 1.09$. Utiliza las variables `solSOR`, `xs`, `ys`, `eSOR` e `itSOR` para almacenar la salida de la función `gauss_seidel()`. Posteriormente grafica las rectas y cómo se va calculando la solución con este método (puedes usar el mismo código que en el caso de Jacobi). Grafica también los errores para los tres métodos (Jacobi, Gauss-Seidel y SOR).

Cálculo de la solución con SOR

```
# Solución inicial
# xi, yi =
# tol =
# kmax =

# Método de SOR, probar con w = 1.09, 1.8, 1.99, 2.0
# w = ...
# ...

### BEGIN SOLUTION
# Solución inicial
xi, yi = -2, 2
tol = 1e-5
kmax = 50

# Método de SOR, probar con w = 1.09, 1.8, 1.99, 2.0
w = 1.09
solSOR, xs, ys, eSOR, itSOR = sor(A, b, tol, kmax, w, xi, yi)

#file_answer.write('7', solSOR, 'solSOR es incorrecta: revisa la llamada y ejecuc
#file_answer.write('8', eSOR[-1], 'eSOR[-1] es incorrecto: revisa la llamada y ej
#file_answer.write('9', itSOR, 'itSOR es incorrector: revisa la llamada y ejecuci

### END SOLUTION
```

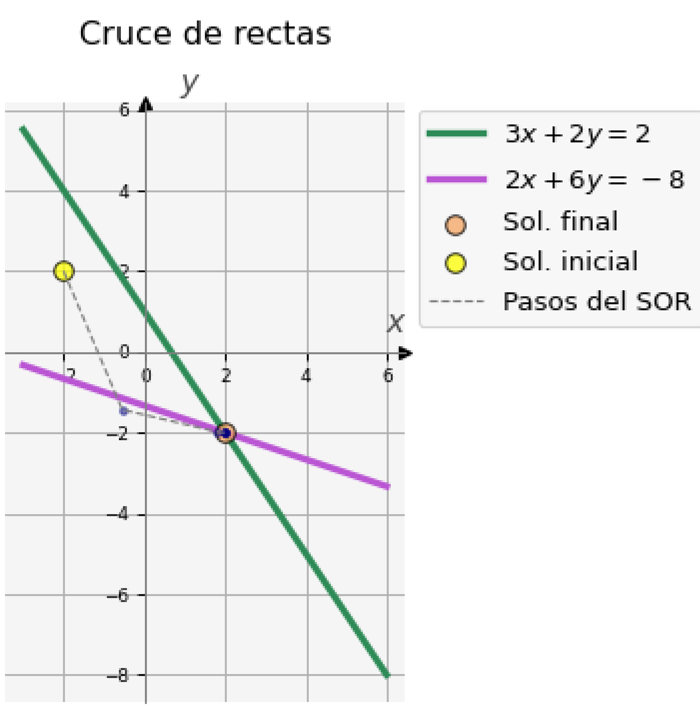
```
1 2.608651498 (-0.546666667, -1.434711111)
2 0.182203110 (1.818423407, -1.984903171)
3 0.006309667 (2.005371531, -2.003310371)
4 0.001963366 (2.001922098, -2.000400429)
```

```
5 0.000118187 (2.000117990, -2.000006831)
6 0.000006254 (1.999994345, -1.999997330)
```

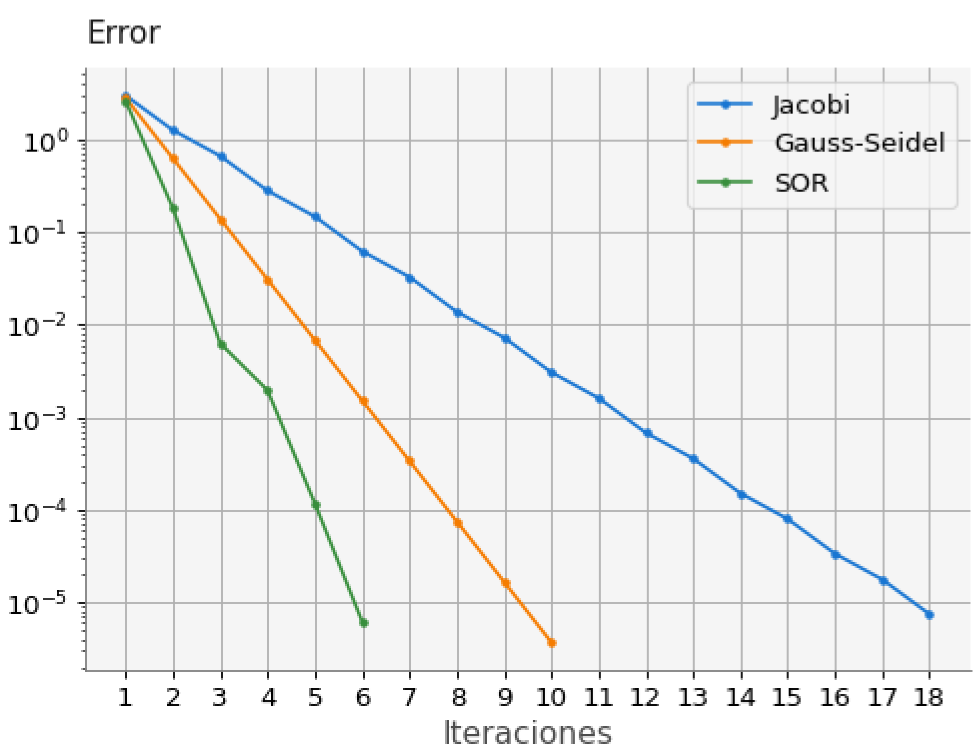
```
#quizz.eval_numeric('7', solSOR)
#quizz.eval_numeric('8', eSOR[-1])
#quizz.eval_numeric('9', itSOR)
```

Gráfica de las rectas, la solución y los pasos realizados

```
# Puedes usar el mismo código que en el caso anterior.

### BEGIN SOLUTION
v = mvis.Plotter(1,1,[dict(aspect='equal')],title='Cruce de rectas')
v.set_coordsys(1)
v.plot(1, x, y1, lw = 3, c = 'seagreen', label = '$3x+2y=2$') # Línea recta 1
v.plot(1, x, y2, lw = 3, c = 'mediumorchid', label = '$2x+6y=-8$') # Línea recta
v.scatter(1, sol[0], sol[1], fc='sandybrown', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=

# Graficamos los pasos
v.scatter(1, xs[0], ys[0], fc='yellow', ec='k', s = 75, alpha=0.75, zorder=8, lab
v.scatter(1, xs[1:], ys[1:], c='navy', s = 10, alpha=0.5, zorder=8)
v.plot(1, xs, ys, c='grey', ls = '--', lw=1.0, zorder=8, label='Pasos del SOR')

v.legend(ncol = 1, frameon=True, loc='best', bbox_to_anchor=(1.78, 1.01))
v.grid()
v.show()
### END SOLUTION
```



```
# Utiliza el código del caso anterior adaptado para que pueda graficar los tres e

### BEGIN SOLUTION
# Lista con el número de las iteraciones máxima
it_max = max(itJ, itG, itSOR)+1
l_it_max = list(range(1,it_max))

# Listas con el número de las iteraciones para cada algoritmo
l_itJ = list(range(1,itJ+1))
l_itG = list(range(1,itG+1))
l_itSOR = list(range(1,itSOR+1))

# Parámetros para los ejes
a_p = dict(yscale='log', xlabel='Iteraciones', xticks = l_it_max)

# Gráficas del error
v = mvis.Plotter(1,1,[a_p])
v.axes(1).set_title('Error', loc='left')
v.plot(1, l_itJ, eJ, marker='.', label='Jacobi')
v.plot(1, l_itG, eG, marker='.', label='Gauss-Seidel')
v.plot(1, l_itSOR, eSOR, marker='.', label='SOR')
v.legend()
v.grid()
### END SOLUTION
```



6.3 Ejercicio 4.

Almacena los errores de los tres métodos en los archivos: `errorJacobi.npy`, `errorGaussSeidel.npy` y `errorSOR.npy` usando la función `np.save()`, checa la documentación aquí.

Prueba que tu código funciona usando:

```
print('Error Jacobi = \n{}\n'.format(np.load('errorJacobi.npy')))
print('Error Gauss-Seidel = \n{}\n'.format(np.load('errorGaussSeidel.npy')))
print('Error SOR = \n{}\n'.format(np.load('errorSOR.npy')))
```

La salida debería ser:

```
Error Jacobi =
[2.98142397e+00 1.25707872e+00 ...]

Error Gauss-Seidel =
[2.81091348e+00 6.24647439e-01 ...]

Error SOR =
[2.60865150e+00 1.82203110e-01 ...]
```

```
# np.save( ... )
#

### BEGIN SOLUTION
np.save('errorJacobi.npy',eJ)
np.save('errorGaussSeidel.npy', eG)
np.save('errorSOR.npy', eSOR)
### END SOLUTION
```

```
print('Error Jacobi = \n{}\n'.format(np.load('errorJacobi.npy')))
print('Error Gauss-Seidel = \n{}\n'.format(np.load('errorGaussSeidel.npy')))
print('Error SOR = \n{}\n'.format(np.load('errorSOR.npy')))
```

```
Error Jacobi =
[2.98142397e+00 1.25707872e+00 6.62538660e-01 2.79350827e-01
 1.47230813e-01 6.20779616e-02 3.27179585e-02 1.37951026e-02
 7.27065745e-03 3.06557835e-03 1.61570166e-03 6.81239633e-04
 3.59044812e-04 1.51386585e-04 7.97877361e-05 3.36414634e-05
 1.77306080e-05 7.47588075e-06]

Error Gauss-Seidel =
[2.81091348e+00 6.24647439e-01 1.38810542e-01 3.08467871e-02
 6.85484158e-03 1.52329813e-03 3.38510695e-04 7.52245990e-05
 1.67165775e-05 3.71479501e-06]
```

```
Error SOR =
[2.60865150e+00 1.82203110e-01 6.30966741e-03 1.96336589e-03
 1.18187146e-04 6.25365681e-06]
```