4 Normas vectoriales.

Objetivo.

Revisar e ilustrar los conceptos de normas vectoriales usando la biblioteca `numpy` .

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101922

```
# Importamos las bibliotecas requeridas
import numpy as np
import ipywidgets as widgets
import macti.visual as mvis
```

5 Definición.

Una función $||\cdot||$ de vectores se denomina norma vectorial si para cualesquiera dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ se satisfacen los siguiente axiomas:

1. $||\vec{x}|| \geq 0$
2. $||\vec{x}|| = 0 \iff \vec{x} = 0$
3. $||a\vec{x}|| = |a| \; ||\vec{x}||$
4. $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ (desigualdad triangular)

5.1 Tipos de normas.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Norma 1} & \rightarrow & ||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\
\text{Norma 2 (Euclideana)} & \rightarrow & ||\vec{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} = (\vec{x}^T \cdot \vec{x})^{1/2} \text{Norma 1} \quad \rightarrow \quad ||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\
\text{Norma Infinito} & \rightarrow & ||\vec{x}||_\infty = \max_{i \leq 1 \leq n} |x_i|
\end{array}
$$

5.2 Ejemplo 1.

Para los vectores $\vec{x} = (2, 3, -4, 5)$ y $\vec{y} = (3.0, -1.45, 8.5, 2.1)$ en $\mathbb{R}^4$ probar que se cumplen las propiedades de la norma para los tres tipos de norma antes definidos.

Primero definimos los vectores

```
x = np.array([2, 3, -4, 5])
y = np.array([3.0, -1.45, 8.5, 2.1])

# Imprimimos los vectores
print('x = {}'.format(x))
print('y = {}'.format(y))
```

```
x = [ 2  3 -4  5]
y = [ 3.   -1.45  8.5   2.1 ]
```

Podemos calcular los diferentes tipos de norma para estos vectores usando la función `np.linalg.norm()` :

```
x_n1 = np.linalg.norm(x, 1)
y_n1 = np.linalg.norm(y, 1)
print('\nNorma 1 \n ‖x‖₁ = {} \n ‖y‖₁ = {}'.format(x_n1, y_n1))

x_n2 = np.linalg.norm(x, 2)
y_n2 = np.linalg.norm(y, 2)
print('\nNorma 2 \n ‖x‖₂ = {} \n ‖y‖₂ = {}'.format(x_n2, y_n2))

x_nI = np.linalg.norm(x, np.infty)
y_nI = np.linalg.norm(y, np.infty)
print('\nNorma infinito \n ‖x‖∞ = {} \n ‖y‖∞ = {}'.format(x_nI, y_nI))
```

```
Norma 1
 ‖x‖₁ = 14.0
 ‖y‖₁ = 15.049999999999999

Norma 2
 ‖x‖₂ = 7.3484692283495345
 ‖y‖₂ = 9.368164174479437

Norma infinito
 ‖x‖∞ = 5.0
 ‖y‖∞ = 8.5
```

Propiedad 1: Del resultado observamos que en todos los casos la norma es mayor que 0.

Propiedad 2: En ningún caso la norma es igual a 0, pues tanto $\vec{x}$ como $\vec{y}$ son diferentes de cero. La norma solo será igual a 0 si el vector es idénticamente 0:

```
z = np.zeros(4)
print('z = {}'.format(z))

z_n1 = np.linalg.norm(z, 1)
print('\nNorma 1 \n ‖z‖₁ = {}'.format(z_n1))

z_n2 = np.linalg.norm(z, 2)
print('\nNorma 2 \n ‖z‖₂ = {}'.format(z_n2))

z_nI = np.linalg.norm(z, np.infty)
print('\nNorma infinito \n ‖z‖∞ = {}'.format(z_nI))
```

```
z = [0. 0. 0. 0.]

Norma 1
 ‖z‖₁ = 0.0

Norma 2
 ‖z‖₂ = 0.0

Norma infinito
 ‖z‖∞ = 0.0
```

Propiedad 3: definimos un escalar $a = -3.5$ entonces:

```
a = -3.5
print('a = {}, \t x = {}'.format(a, x))

a_x_n1 = np.linalg.norm(a * x, 1)
a_x_n2 = np.linalg.norm(a * x, 2)
a_x_nI = np.linalg.norm(a * x, np.infty)

print('\n ‖a x‖₁ = {} \n |a| ‖x‖₁ = {}'.format(a_x_n1, np.abs(a) * x_n1))
print('\n ‖a x‖₂ = {} \n |a| ‖x‖₂ = {}'.format(a_x_n2, np.abs(a) * x_n2))
print('\n ‖a x‖∞ = {} \n |a| ‖x‖∞ = {}'.format(a_x_nI, np.abs(a) * x_nI))
```

```
a = -3.5,     x = [ 2  3 -4  5]

 ‖a x‖₁ = 49.0
 |a| ‖x‖₁ = 49.0

 ‖a x‖₂ = 25.71964229922337
 |a| ‖x‖₂ = 25.71964229922337

 ‖a x‖∞ = 17.5
 |a| ‖x‖∞ = 17.5
```

Propiedad 4:

```
x_p_y_n1 = np.linalg.norm(x+y, 1)
print('\nNorma 1:')
print(' ‖x + y‖₁ = {}'.format(x_p_y_n1))
print(' ‖x‖₁ + ‖y‖₁ = {}'.format(x_n1 + y_n1))
print(' ¿ ‖x + y‖₁ ≤ ‖x‖₁ + ‖y‖₁ ? : {}'.format(x_p_y_n1 <= x_n1 + y_n1))
```

```
Norma 1:
 ‖x + y‖₁ = 18.15
 ‖x‖₁ + ‖y‖₁ = 29.049999999999997
 ¿ ‖x + y‖₁ ≤ ‖x‖₁ + ‖y‖₁ ? : True
```

5.3 Ejercicio 1.

Verifica que la propiedad 4 se cumple para las normas 2 e infinito para los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ antes defnidos.

El resultado debería ser:

```
Norma 2:
 ‖x + y‖₂ = 9.90265116016918
 ‖x‖₂ + ‖y‖₂ = 16.716633402828972
 ¿ ‖x + y‖₂ ≤ ‖x‖₂ + ‖y‖₂ ? : True

Norma Infinito:
 ‖x + y‖∞ = 7.1
 ‖x‖∞ + ‖y‖∞ = 13.5
 ¿ ‖x + y‖∞ ≤ ‖x‖∞ + ‖y‖∞ ? : True
```

```
        ### BEGIN SOLUTION
        x_p_y_n2 = np.linalg.norm(x+y, 2)
        print('\nNorma 2:')
        print(' ‖x + y‖₂ = {}'.format(x_p_y_n2))
        print(' ‖x‖₂ + ‖y‖₂ = {}'.format(x_n2 + y_n2))
        print(' ¿ ‖x + y‖₂ ≤ ‖x‖₂ + ‖y‖₂ ? : {}'.format(x_p_y_n2 <= x_n2 + y_n2))


        x_p_y_nI = np.linalg.norm(x+y, np.infty)
        print('\nNorma Infinito:')
        print(' ‖x + y‖∞ = {}'.format(x_p_y_nI))
        print(' ‖x‖∞ + ‖y‖∞ = {}'.format(x_nI + y_nI))
        print(' ¿ ‖x + y‖∞ ≤ ‖x‖∞ + ‖y‖∞ ? : {}'.format(x_p_y_nI <= x_nI + y_nI))
        ### END SOLUTION
```

```
Norma 2:
 ‖x + y‖₂ = 9.90265116016918
 ‖x‖₂ + ‖y‖₂ = 16.716633402828972
 ¿ ‖x + y‖₂ ≤ ‖x‖₂ + ‖y‖₂ ? : True

Norma Infinito:
 ‖x + y‖∞ = 7.1
 ‖x‖∞ + ‖y‖∞ = 13.5
 ¿ ‖x + y‖∞ ≤ ‖x‖∞ + ‖y‖∞ ? : True
```

5.4 Desigualdad de Holder.

Para cualesquiera dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ se cumple:

$$|\vec{x}^T \cdot \vec{y}| \leq ||\vec{x}||_p||\vec{y}||_q, \;\; \text{donde} \;\; p > 1, q > 1 \;\; \text{y} \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(Cuando $p = q = 2$ se obtiene la desigualdad de Schwarz)

5.5 Ejercicio 2.

Verifica que se cumple la desigualdad de Schwarz para los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ antes definidos.

El resultado debería ser:

```
Desigualdad de Holder
 |<x, y>| = 21.85
 ‖x‖p * ‖y‖q = 68.84166616228866
 ¿ |<x, y>| ≤ ‖x‖p * ‖y‖q ? : True
```

```
        ### BEGIN SOLUTION
        print('\nDesigualdad de Holder')
        x_dot_y = np.abs(np.dot(x, y))
```

```
        print(' |<x, y>| = {}'.format(x_dot_y))
        print(' ‖x‖p * ‖y‖q = {}'.format(x_n2 * y_n2))
        print(' ¿ |<x, y>| ≤ ‖x‖p * ‖y‖q ? : {}'.format(x_dot_y <= x_n2 * y_n2))
        ### END SOLUTION
```

```
Desigualdad de Holder
 |<x, y>| = 21.85
 ‖x‖p * ‖y‖q = 68.84166616228866
 ¿ |<x, y>| ≤ ‖x‖p * ‖y‖q ? : True
```

5.6 Equivalencia de normas.

En un espacio $\mathbb{R}^n$ de dimensi'on finita, cualquiera dos normas arbitrarias son equivalentes:

$$
\begin{aligned}
||\vec{x}||_2 \leq & ||\vec{x}||_1 \ \leq \sqrt{n}||x||_2 \\
||\vec{x}||_\infty \leq & ||\vec{x}||_2 \ \leq \sqrt{n}||x||_\infty \\
||\vec{x}||_\infty \leq & ||\vec{x}||_1 \ \leq n||x||_\infty
\end{aligned}
$$

```
        print('\nEquivalencia entre norma 1 y norma 2\n')
        print('‖x‖₂ = {}, ‖x‖₁ = {}, √4 * ‖x‖₂ = {} \n'.format(x_n2, x_n1, np.sqrt(4) * x_n2))
        print('¿ ‖x‖₂ ≤ ‖x‖₁ ≤ √4 * ‖x‖₂ ? : {}'.format(x_n2 <= x_n1 <= np.sqrt(4) * x_n2))
```

```
Equivalencia entre norma 1 y norma 2

‖x‖₂ = 7.3484692283495345, ‖x‖₁ = 14.0, √4 * ‖x‖₂ = 14.696938456699069

¿ ‖x‖₂ ≤ ‖x‖₁ ≤ √4 * ‖x‖₂ ? : True
```

5.7 Ejercicio 3.

Verificar la equivalencia entre las normas $||\cdot||_\infty$ y $||\cdot||_2$ y entre $||\cdot||_\infty$ y $||\cdot||_1$ para los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ antes definidos.

El resultado debería ser:

```
Equivalencia entre norma infinito y norma 2

‖x‖∞ = 5.0, ‖x‖₂ = 7.3484692283495345, √n * ‖x‖∞ = 10.0

¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₂ ≤ √n * ‖x‖∞ ? : True

Equivalencia entre norma infinito y norma 1

‖x‖∞ = 5.0, ‖x‖₁ = 14.0, n * ‖x‖∞ = 20.0

¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₁ ≤ n * ‖x‖∞ ? : True
```

```
        ### BEGIN SOLUTION
        n = 4
```

```
    print('\nEquivalencia entre norma infinito y norma 2\n')
    print('‖x‖∞ = {}, ‖x‖₂ = {}, √n * ‖x‖∞ = {}\n'.format(x_nI, x_n2, np.sqrt(n) * x_nI))
    print('¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₂ ≤ √n * ‖x‖∞ ? : {}'.format(x_nI <= x_n2 <= np.sqrt(n) * x_nI))

    print('\nEquivalencia entre norma infinito y norma 1\n')
    print('‖x‖∞ = {}, ‖x‖₁ = {}, n * ‖x‖∞ = {}\n'.format(x_nI, x_n1, n * x_nI))
    print('¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₁ ≤ n * ‖x‖∞ ? : {}'.format(x_nI <= x_n1 <= n * x_nI))
    ### END SOLUTION
```

```
Equivalencia entre norma infinito y norma 2

‖x‖∞ = 5.0, ‖x‖₂ = 7.3484692283495345, √n * ‖x‖∞ = 10.0

¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₂ ≤ √n * ‖x‖∞ ? : True

Equivalencia entre norma infinito y norma 1

‖x‖∞ = 5.0, ‖x‖₁ = 14.0, n * ‖x‖∞ = 20.0

¿ ‖x‖∞ ≤ ‖x‖₁ ≤ n * ‖x‖∞ ? : True
```