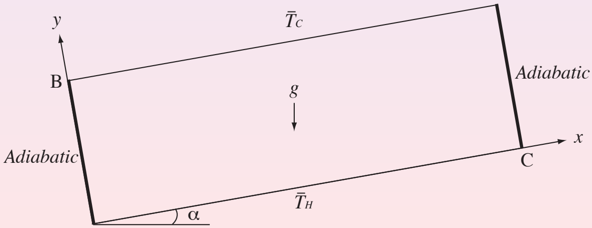
Convección natural en medios porosos

Dr. Fernando J. Guerrero Martínez

Instituto de Goefísica UNAM

Abril, 2018

1. Plantemiento: Medio poroso rectangular de altura B y ancho C calentado por la base y enfriado por la tapa. Las paredes laterales son aislantes y se ecuentra inclinado un ángulo α.
2. Suposiciones:
   - Medio poroso homogéneo y totalmente saturado de fluido
   - Equilibrio térmico local
   - Flujo governado por la ley de Darcy
   - Las variaciones en la densidad son consideradas solo para los efectos de flotación (aproximación de Boussinesq)



Ecuaciones de gobierno: ecuación de momento

1. Ley de Darcy

$$\bar{u} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}, \qquad \bar{v} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \rho g\right).$$

   Dado que la gravedad g puede tener componentes en x y y se define un vector $\mathbf{e} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$. En forma vectorial esto es

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k}{\mu}\left(\bar{\nabla}\bar{P} - \rho g \mathbf{e}\right)$$

2. Para definir la fuerza de cuerpo ρg, la densidad se aproxima

$$\rho(\bar{T}) = \rho_0 - \rho_0\beta_0(\bar{T} - \bar{T}_0)$$

3. Sustituyendo y redefiniendo el gradiente de presión vertical

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k}{\mu}\left(\bar{\nabla}\bar{P} - \rho_0 g\beta_0(\bar{T} - \bar{T}_0)\mathbf{e}\right)$$

Ecuaciones de gobierno: masa y calor

1. Se establece la condición de incompresibilidad

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

2. La ecuación de transferencia de calor para un medio poroso saturado de fluido

$$\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} = \bar{\nabla} \cdot (\eta \bar{\nabla} \bar{T}).$$

Problema adimensional

El problema se adimesionaliza usando las siguientes variables adimensionales:

$$x = \frac{\bar{x}}{B}, \quad y = \frac{\bar{y}}{B}, \quad z = \frac{\bar{z}}{B}, \quad P = \frac{k}{\mu\eta}\bar{P},$$

$$\mathbf{u} = \frac{B}{\eta}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), \quad \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0 - \bar{T}_c}, \quad t = \frac{\bar{t}\eta}{\sigma B^2},$$

$$Ra = \frac{Bgk\beta\rho_0}{\eta\mu}(\bar{T}_0 - \bar{T}_c),$$

Problema adimensional

Las ecuaciones adimensionales resultantes son

1. Ecuación de momento

$$\mathbf{u} + \nabla P = Ra\theta\mathbf{e}$$

2. Ecuación de transferencia de calor

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \nabla^2\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = 0$$

3. Condición de incompresibilidad

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

4. Número de Nusselt local

$$Nu_l = \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=0}$$

Condiciones de frontera para la ecuación de calor

Las condiciones de frontera para la temperatura son

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = D,$$

donde D es la relción de aspecto, $D = \frac{C}{B}$, y

$$\theta = 1, \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{y} \quad t > 0,$$
$$\theta = 0, \quad \text{para} \quad y = 1 \quad \text{y} \quad t > 0.$$

Solución en Variables Primitivas

1. Se parte de tomar la divergencia de la ecuación de momento

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} + \nabla P = Ra\theta\mathbf{e}),$$

esto conduce a una ecuación de Poisson para la presión P

$$\nabla^2 P = Ra\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\alpha\right)$$

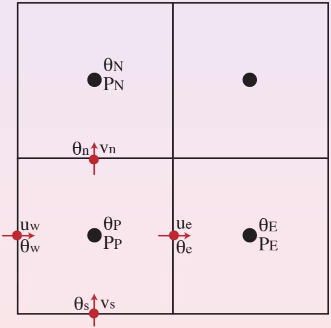
2. Condiciones de frontera: de la ecuación de momento se observa que el gradiente de presión normal a la frontera Ω debe satisfacer

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Omega} = \mathbf{n} \cdot (Ra\theta\mathbf{e} - \mathbf{u})|_{\Omega}.$$

La única condición que se establece para $\mathbf{u}$ es que el fluido no atraviesa la frontera, sin embargo la velocidad tangencial a la frontera puede ser distinta de cero.

Se lleva a cabo la siguiente integral en un volumen de control CV

$$\int_{CV}\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}-\nabla^2\theta+\mathbf{u}\cdot\nabla\theta\right)dtdV=0$$



Integración en el tiempo: esquema implícito

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) dt = 0$$

$$\theta^{t+\Delta t} - \theta^t - \int_t^{t+\Delta t} \nabla^2 \theta dt + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta) dt = 0,$$

$$\theta^{t+\Delta t} - \theta^t - \nabla^2 \theta^{t+\Delta t} \Delta t + (\mathbf{u}^{t+\Delta t} \cdot \nabla \theta^{t+\Delta t}) \Delta t = 0$$

Se renombran los índices, $\theta = \theta^{t+\Delta t}$, para el paso de tiempo actual y $\theta^0 = \theta^t$ para el paso de tiempo anterior y se dividiende por Δt. Se integra en el espacio

$$\int_{CV} \left(\frac{\theta - \theta^0}{\Delta t} - \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) dV = 0$$

Forma discreta de la ecuación de transferencia de calor

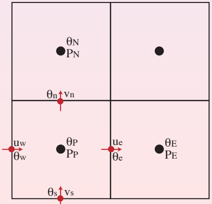
Aplicando diferencias centradas en el término advectivo se obtienen los coeficientes

$$a_P\theta_P = a_E\theta_E + a_W\theta_W + a_N\theta_N + a_S\theta_S + s_P,$$

$$a_E = \frac{A_e}{\delta x} - \frac{u_e A_e}{2}, \quad a_W = \frac{A_w}{\delta x} + \frac{u_w A_w}{2},$$

$$a_N = \frac{A_n}{\delta y} - \frac{v_n A_n}{2}, \quad a_S = \frac{A_s}{\delta y} + \frac{v_s A_s}{2},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad s_P = \theta^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$



Forma discreta de la ecuación de la presión

Se lleva a cabo la siguiente integral en el mismo volumen de control CV

$$\int_{CV} (\Gamma \nabla^2 P - s) dV = 0$$

En donde s es el término fuente de la ecuación

$$s = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \alpha \right)$$

Al desarrollar la integral se obtiene

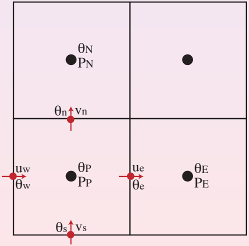
$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - s_P,$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x}, \quad a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y}, \quad a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S.$$

Integración del término fuente s

$$
\begin{aligned}
s_P &= \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin\alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos\alpha \right) dxdy \\
&= \int_s^n \sin\alpha(\theta_e - \theta_w) dy + \int_w^e \cos\alpha(\theta_n - \theta_s) dx \\
&= \sin\alpha(\theta_e - \theta_w)\delta y + \cos\alpha(\theta_n - \theta_s)\delta x.
\end{aligned}
$$



Algoritmo de solución

El problema transitorio se resuelve hasta que se alcance un estado estacionario

1. Resuelve la ecuación de transferencia de calor

$$a_P\theta_P = a_E\theta_E + a_W\theta_W + a_N\theta_N + a_S\theta_S + s_P$$

2. Resuelve la ecuación para la presión

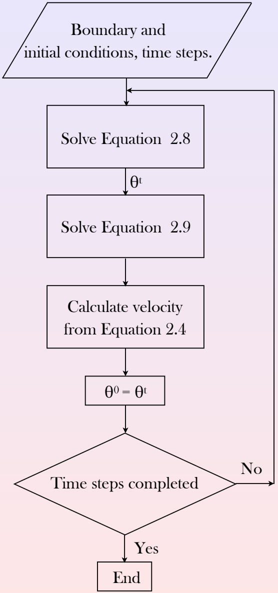
$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - s_P$$

3. Calcula las velocidades en la ecuación de momento

$$u_e = Ra\theta_e \sin\alpha - \frac{P_E - P_P}{\delta x}, ..., v_s = Ra\theta_s \cos\alpha - \frac{P_P - P_S}{\delta y}$$

4. Evaluar la convergencia y en su caso volver al paso 1

Algoritmo de solución



Estado estacionario

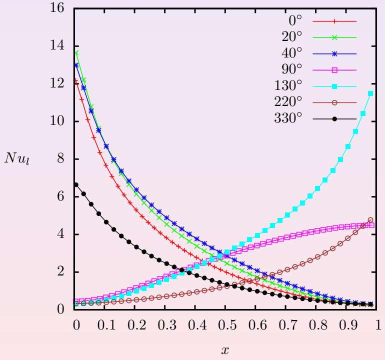
Soluciones en estado estacionario se obtienen a partir de la evaluación de la convergenica de la matriz de temperatura. La norma infinito de la diferencia

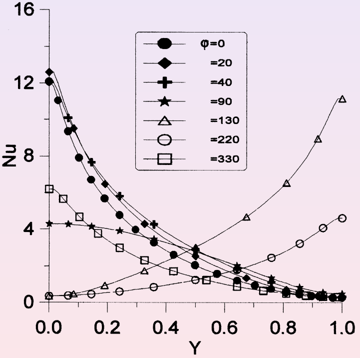
$$L_\infty = |\theta^t - \theta^{t-1}|_\infty$$

se calculo en pasos de tiempo sucesivos sobre un intervalo de tiempo que resultó ser suficiente después de realizar varias pruebas (2.2×10^4 pasos de tiempo). El criterio de paro se definió de acuerdo con la condición $\langle L_\infty \rangle_{t_{int}} < 5 \times 10^{-7}$, donde $\langle L_\infty \rangle_{t_{int}}$ es la norma infinito promedio sobre el intervalo de tiempo t_{int}.

Validación

Comparación de Nu_l entre el modelo en variables primitivas y los resultados reportados por Baytas (2000). El número de Rayleigh es constante $Ra = 100$ con relación de aspecto $D = 1$.





Método de función de corriente

1. La velocidad se escribe en términos de la función de corriente, la cual satisface la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

2. Al tomar el rotacional de la ecuación de momento $\nabla \times (\mathbf{u} + \nabla P = Ra\theta \mathbf{e})$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = Ra \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \alpha \right)$$

3. Se sustituye con la definición de la función de corriente

$$\Gamma \nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \text{cos} \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial y} \text{sin} \alpha \right)$$

Problema matemático en términos de la función de corriente

$$\Gamma\nabla^2\psi = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\theta}{\partial y}\sin\alpha\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \nabla^2\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = 0$$

Condiciones de forntera:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \quad \text{for} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = D,$$

$$\theta = 1, \quad \text{for} \quad y = 0 \quad \text{and} \quad t > 0,$$

$$\theta = 0, \quad \text{for} \quad y = 1 \quad \text{and} \quad t > 0,$$

$$\psi = 0, \quad \text{for} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = D,$$

$$\psi = 0, \quad \text{for} \quad y = 0 \quad \text{and} \quad y = 1.$$

Iteración de punto fijo

1. Se parte de la ecuación de calor discretizada en el tiempo

$$\frac{\theta - \theta^0}{\Delta t} - \nabla^2\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = 0$$

2. Se renombra esta ecuación como $\Upsilon(\theta, \psi)$

$$\Upsilon(\theta, \psi) = \frac{1}{\Delta t}\theta - \nabla^2\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta - \frac{1}{\Delta t}\theta^0.$$

Iteración de punto fijo

Se asume que los términos lineales de la ecuación, $\frac{1}{\Delta t}\theta - \nabla^2\theta$, en la iteración $m+1$ son iguales a los términos lineales de la iteración m menos una corrección $\lambda\Upsilon(\theta^m, \psi^m)$, con $0 < \lambda < 1$

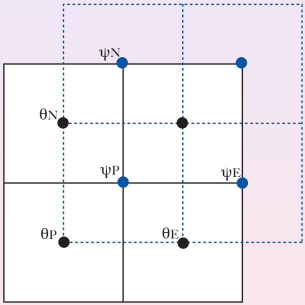
$$\frac{1}{\Delta t}\theta^{m+1} - \nabla^2\theta^{m+1} = \frac{1}{\Delta t}\theta^m - \nabla^2\theta^m - \lambda\Upsilon(\theta^m, \psi^m),$$

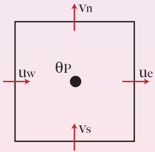
$$\Gamma\nabla^2\psi^{m+1} = \left(\frac{\partial\theta^{m+1}}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\theta^{m+1}}{\partial y}\sin\alpha\right).$$

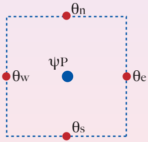
Este problema se puede discretizar con cualquier método numérico, como diferencias finitas, volumen finito o elemento finito.

Discretización en Volumen Finito

- La discretización se realiza en mallas desplazadas. Esto facilita el cálculo de las velocidades y las temperaturas en las caras.







Discretización en Volumen Finito

- Discretización de la ecuación de transferencia de calor: término lineal $L\theta^{m+1} = \frac{1}{\Delta t}\theta^{m+1} - \nabla^2\theta^{m+1}$

$$\int_{CV} L\theta^{m+1} dV \simeq a_P\theta_P^{m+1} - a_E\theta_E^{m+1} - a_W\theta_W^{m+1} - a_N\theta_N^{m+1} - a_S\theta_S^{m+1}$$

con

$$a_E = \frac{A_e}{\delta x}, \quad a_W = \frac{A_w}{\delta x}, \quad a_N = \frac{A_n}{\delta y}, \quad a_S = \frac{A_s}{\delta y},$$

y

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

- Lo mismo ocurre para el término lineal en la iteración m

$$\int_{CV} L\theta^m dV$$

- Integración del término $\Upsilon(\theta^m, \psi^m)$

$$\int_{CV} \Upsilon(\theta^m, \psi^m) dV \simeq b_P \theta_P^m - b_E \theta_E^m - b_W \theta_W^m - b_N \theta_N^m - b_S \theta_S^m + s_P,$$

$$b_E = \frac{A_e}{\delta x} - \frac{u_e^m A_e}{2}, \quad b_W = \frac{A_w}{\delta x} + \frac{u_w^m A_w}{2},$$

$$b_N = \frac{A_n}{\delta y} - \frac{v_n^m A_n}{2}, \quad b_S = \frac{A_s}{\delta y} + \frac{v_s^m A_s}{2},$$

$$b_P = b_E + b_W + b_N + b_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad s_P = -\theta^0 \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

$$u_e^m = \left(\frac{\partial \psi^m}{\partial y}\right)_e, \ldots, \; v_s^m = \left(-\frac{\partial \psi^m}{\partial x}\right)_s.$$

- Frontera oeste: Condición Neumann.

$$b_W = 0$$

- Frontera este: Condición Neumann.

$$b_E = 0$$

- Frontera sur: Condición Dirichlet, $\theta = \theta_H$.

$$\int_{BCV} \Upsilon(\theta^m, \psi^m) dV \simeq b_P\theta_P^m - b_E\theta_E^m - b_W\theta_W^m - b_N\theta_N^m - 2b_S\theta_H + s_P,$$

$$b_P = b_E + b_W + b_N + 2b_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

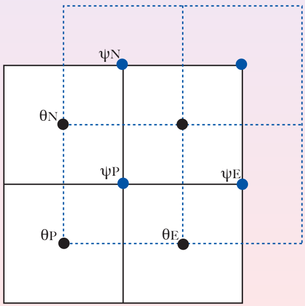
- Frontera norte: Condición Dirichlet, $\theta = \theta_C$.

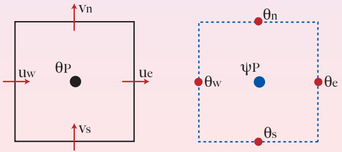
$$\int_{BCV} \Upsilon(\theta^m, \psi^m) dV \simeq b_P\theta_P^m - b_E\theta_E^m - b_W\theta_W^m - b_S\theta_S^m - 2b_N\theta_C + s_P,$$

$$b_P = b_E + b_W + 2b_N + b_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

En resumen la ecuación de transferencia de calor discretizada es

$$a_P\theta_P^{m+1} - a_E\theta_E^{m+1} - a_W\theta_W^{m+1} - a_N\theta_N^{m+1} - a_S\theta_S^{m+1} =$$
$$a_P\theta_P^{m} - a_E\theta_E^{m} - a_W\theta_W^{m} - a_N\theta_N^{m} - a_S\theta_S^{m}$$
$$-\lambda(b_P\theta_P^{m} - b_E\theta_E^{m} - b_W\theta_W^{m} - b_N\theta_N^{m} - b_S\theta_S^{m} + s_P).$$





Discretización en Volumen Finito

La ecuación de momento discretizada en la iteración $m+1$ es

$$a_P \psi_P^{m+1} = a_E \psi_E^{m+1} + a_W \psi_W^{m+1} + a_N \psi_N^{m+1} + a_S \psi_S^{m+1} - s_P,$$

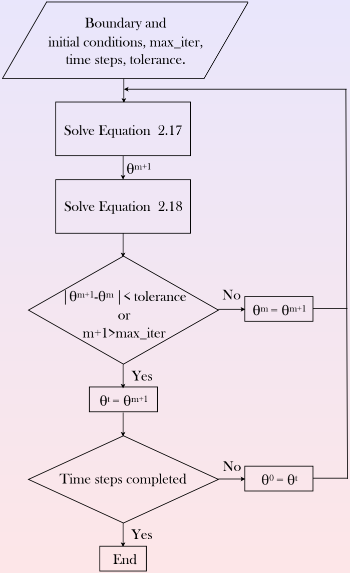
con

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x}, \quad a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y}, \quad a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S.$$

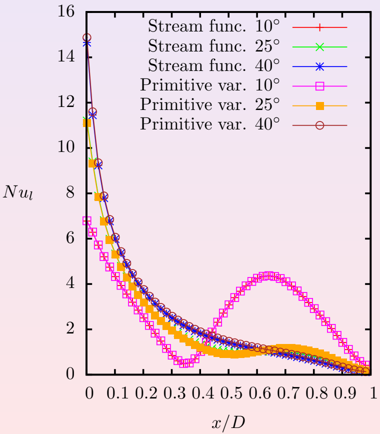
$$s_P = \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial x} \cos\alpha - \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial y} \sin\alpha \right) dxdy =$$
$$= \cos\alpha(\theta_e^{m+1} - \theta_w^{m+1})\delta y - \sin\alpha(\theta_n^{m+1} - \theta_s^{m+1})\delta x,$$

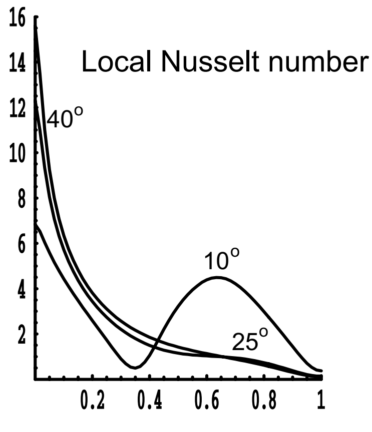
Iteración de punto fijo



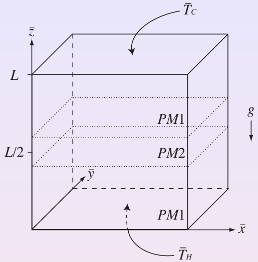
Validación

Comparación de Nu_l entre el modelo en variables primitivas y función de corriente y los resultados reportados por Báez y Nicolás (2006). El número de Rayleigh es constante $Ra = 100$ con relación de aspecto $D = 3$.





Medio poroso estratificado



- Ecuación de momento:

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k(z)}{\mu}\left(\bar{\nabla}\bar{P} - \rho_0 g \beta (\bar{T} - \bar{T}_0)\hat{\mathbf{k}}\right)$$

- Ecuación de transferencia de calor:

$$\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla}\bar{T} = \bar{\nabla} \cdot (\eta(z)\bar{\nabla}\bar{T})$$

Medio poroso estratificado

- La permeabilidad y la difusividad térmica se definen como sigue

$$k(z) = f(z)k_1, \qquad \eta(z) = g(z)\eta_1$$

con k_1 y η_1 referidos al medio poroso $PM1$. Con esto se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \qquad y = \frac{\bar{y}}{L}, \qquad z = \frac{\bar{z}}{L}, \qquad P = \frac{k_1}{\mu\eta_1}\bar{P},$$

$$\mathbf{u} = \frac{L}{\eta_1}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), \qquad \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0 - \bar{T}_c}, \qquad t = \frac{\bar{t}\eta_1}{\sigma L^2},$$

$$Ra = \frac{Lk_1 g\beta\rho_0}{\eta_1\mu}(\bar{T}_0 - \bar{T}_c),$$

Medio poroso estratificado: problema adimensional

Las ecuaciones adimensionales resultantes son

1. Ecuación de momento

$$\frac{1}{f(z)}\mathbf{u} + \nabla P = Ra\theta\hat{\mathbf{k}}$$

2. Ecuación de transferencia de calor

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \nabla\cdot(g(z)\nabla\theta)$$

que puede escribirse

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = g(z)\nabla^2\theta + g'(z)\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

3. Condición de incompresibilidad

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

Solución: Método de vector potencial

- Se toma el rotacional de la ecuación de momento

$$\nabla \times \left(\frac{1}{f(z)} \mathbf{u} \right) = Ra \nabla \times \theta \hat{\mathbf{k}}.$$

- Se define un vector potencial $\boldsymbol{\psi}$, tal que $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$
- Se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\Gamma \nabla^2 \psi_1 = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} v,$$

$$\Gamma \nabla^2 \psi_2 = Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{f'(z)}{f^2(z)} u,$$

$$\Gamma \nabla^2 \psi_3 = 0.$$

Solución: Método de vector potencial

- Las condiciones de frontera son las siguientes

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \psi_2 = \psi_3 = 0, \quad \text{for} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = 1,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \text{for} \quad y = 0 \quad \text{and} \quad y = 1,$$

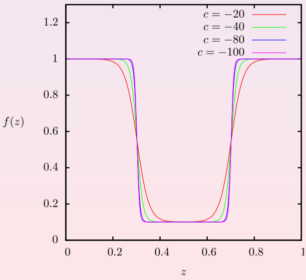
$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z} = \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \text{for} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad z = 1.$$

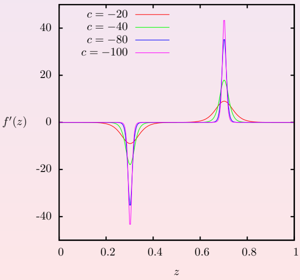
Las funciones $f(z)$ y $g(z)$

- Las funciones para modelar las capas se define de la siguiente manera

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)(\tanh[c(z - 1/3)] + 1),$$

$$f'(z) = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)\operatorname{sech}[c(z - 1/3)]^2.$$





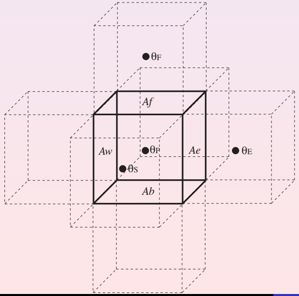
Discretización: Malla desplazada

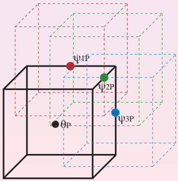
- El problema se escribe de acuerdo con la iteración de punto fijo

$$L\theta^{m+1} = L\theta^{m} - \lambda\Upsilon(\theta^{m}, \psi^{m}), \tag{1}$$

$$\Gamma\nabla^2\psi_1^{m+1} = -Ra\frac{\partial\theta^{m+1}}{\partial y} - \frac{f'(z)}{f^2(z)}v^{m+1}, \tag{2}$$

$$\Gamma\nabla^2\psi_2^{m+1} = Ra\frac{\partial\theta^{m+1}}{\partial x} + \frac{f'(z)}{f^2(z)}u^{m+1}. \tag{3}$$





Discretización: Malla desplazada

- En este caso sin embargo, la ecuación de transferencia de calor integrada en el tiempo (Υ) toma la forma:

$$\Upsilon(\theta,\psi) = \frac{1}{\Delta t}\theta - g(z)\nabla^2\theta - g'(z)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta - \frac{1}{\Delta t}\theta^0.$$

Y el operador lineal L se define como $L = (\frac{1}{\Delta t} - g(z)\nabla^2)$