

Jogos Mágicos Quânticos

Luigi Soares (luigi.domenico@dcc.ufmg.br)

Roberto Rosmaninho (robertogomes@dcc.ufmg.br)

Quadrado Mágico

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
 - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
 - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
 - 2 Alice preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja $+1$

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
 - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
 - 2 Alice preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja $+1$
 - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
 - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
 - 2 Alice preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja $+1$
 - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
 - 4 Bob preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja -1

Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
 - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
 - 2 Alice preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja $+1$
 - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
 - 4 Bob preenche as três células com $+1$ ou -1 , de forma que o produto seja -1
 - 5 Alice e Bob vencem se respeitaram e concordaram no valor da interseção

Exemplo 1 (Vitória)

Alice $\leftarrow 0$

+1	-1	-1

$$\prod = +1$$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

Exemplo 2 (Derrota, Interseção)

Alice $\leftarrow 1$

+1	-1	-1

$$\prod = +1$$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

Exemplo 3 (Derrota, Produto)

Alice $\leftarrow 1$

+1	+1	-1	$\prod = -1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1		
-1		
-1		

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	- 1	+ 1
-1	- 1	+ 1
-1	- 1	+ 1

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	+1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

Bob

-1	-1	
-1	-1	
-1	-1	

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	+1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

Bob

-1	-1	-1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

$$m_{0,0} \ m_{0,1} \ m_{0,2} = +1$$

$$m_{1,0} \ m_{1,1} \ m_{1,2} = +1$$

$$m_{2,0} \ m_{2,1} \ m_{2,2} = +1$$

$$m_{0,0} \ m_{1,0} \ m_{2,0} = -1$$

$$m_{0,1} \ m_{1,1} \ m_{2,1} = -1$$

$$m_{0,2} \ m_{1,2} \ m_{2,2} = -1$$

$$+1 \neq -1$$

Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada
- ▶ A melhor estratégia determinística vence com probabilidade $\frac{8}{9}$

Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula

Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes

Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- ▶ A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística

Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- ▶ A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística
- ▶ Ou seja, qualquer estratégia probabilística é limitada pela melhor estratégia determinística. Logo, a chance de sucesso clássico é no máximo $8/9$



Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?

Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada

Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

- ▶ Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits

Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

- ▶ Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits
- ▶ O resultado de cada medição é o valor de cada célula



Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$



Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$	$+I$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$	$+I$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$	$+I$
$-I$	$-I$	$-I$	

Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z . Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira célula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z . Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira célula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- 2 Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z . Suponha que ela tenha observado -1 . Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z . Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira célula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- 2 Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z . Suponha que ela tenha observado -1 . Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

- 3 Para a terceira célula, ela mede seus dois qubits com $Z \otimes Z$. O único resultado possível é -1 e o estado não se altera: $|\psi_{A3}\rangle = |\psi_{A2}\rangle$.

Exemplo 4

- 4 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z . Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

- 4 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z . Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

- 5 Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X . Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

Exemplo 4

- 4 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z . Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

- 5 Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X . Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

- 6 Para a terceira célula, ele mede ambos os qubits com $-Z \otimes X$. O único resultado possível é $+1$, o que satisfaz a restrição sobre o produto da coluna.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i , $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j , $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i , $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j , $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i , $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j , $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned} M_{i,0} M_{i,1} M_{i,2} &= (P_i \Lambda_{i,0} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,1} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,2} P_i^{-1}) \\ &= P_i (\Lambda_{i,0} \Lambda_{i,1} \Lambda_{i,2}) P_i^{-1} \\ &= P_i \Lambda_i P_i^{-1} \end{aligned}$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i , $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j , $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- ▶ Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- ▶ Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned} M_{i,0} M_{i,1} M_{i,2} &= (P_i \Lambda_{i,0} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,1} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,2} P_i^{-1}) \\ &= P_i (\Lambda_{i,0} \Lambda_{i,1} \Lambda_{i,2}) P_i^{-1} \\ &= P_i \Lambda_i P_i^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ Cada entrada de Λ_i é o produto dos autovalores p/ mesmo autovetor

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- ▶ O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- ▶ O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i
- ▶ Mas, para toda linha i , temos $P_i \Lambda_i P_i^{-1} = I$. Logo, $\Lambda_i = I$ e o produto das três medições é $+1$ sempre. Para toda coluna j , $P_j \Lambda_j P_j^{-1} = -I$ e $\Lambda_j = -I$



Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- ▶ Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- ▶ Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- ▶ Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- ▶ Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- ▶ Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1
- ▶ Ao observar -1 , o estado colapsa para o autovetor $|10\rangle$, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle) \mapsto |1010\rangle$$

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i,j) é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i,j) é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i,j) é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i,j) é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- ▶ Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- ▶ Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém
- ▶ Logo, se Bob mede os qubits dele com os mesmos observáveis que Alice, ele observa o mesmo resultado



Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$

Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$

Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- ▶ Então, Alice recebeu -1 , -1 e $+1$

Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- ▶ Então, Alice recebeu -1 , -1 e $+1$
- ▶ Após a primeira medição, o estado colapsa para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((|00\rangle - |10\rangle) |00\rangle + (|01\rangle - |11\rangle) |01\rangle + (|10\rangle - |00\rangle) |10\rangle + (|11\rangle - |01\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(|00\rangle (|00\rangle - |10\rangle) + |01\rangle (|01\rangle - |11\rangle) + |10\rangle (|10\rangle - |00\rangle) + |11\rangle (|11\rangle - |01\rangle) \right) \end{aligned}$$

Lema 2: Interseção

- Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left((|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |01\rangle - \right. \\ & \quad \left. (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{4} \left(|00\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \right. \\ & \quad \left. |10\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \right) \end{aligned}$$

Lema 2: Interseção

- ▶ Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left((|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |01\rangle - \right. \\ & \quad \left. (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{4} \left(|00\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \right. \\ & \quad \left. |10\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \right) \end{aligned}$$

- ▶ Logo, para qualquer coluna que Bob receba, ao fazer uma medição igual a que Alice fez na interseção, ele obterá a mesma resposta que Alice

Teorema 1: O Jogo do Quadrado Mágico É Vencível

Existe uma estratégia quântica para o jogo do quadrado mágico de Mermin-Peres, que consiste em Alice e Bob compartilharem qubits emaranhados *antes* do início do jogo, que vence sistematicamente todas as rodadas.

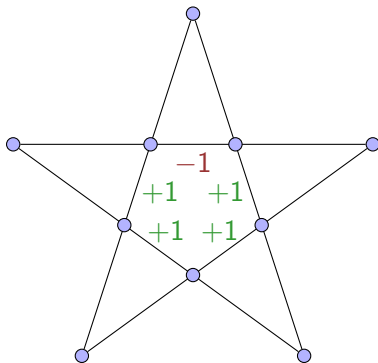
Caracterizando Jogos Mágicos

Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?

Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?



Modificando o Formato

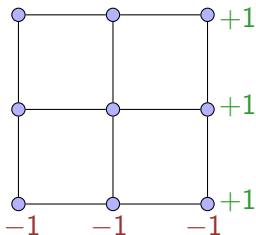
- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo

Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também

Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também



Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também
- ▶ Será que existe alguma caracterização deste tipo de jogo?

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$.

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$.

- O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$.

- ▶ O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- ▶ Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$.

- ▶ O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- ▶ Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta
- ▶ Cada linha que passa por 4 vértices do pentagrama é uma hiperaresta

Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c: V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

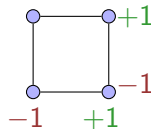
Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c: V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

► Por exemplo, considere uma versão 2×2 do quadrado mágico, com

$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$

$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$



Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c: V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

- ▶ Por exemplo, considere uma versão 2×2 do quadrado mágico, com

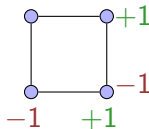
$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$

$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$

- ▶ Uma realização clássica válida é

$$c(v_{00}) = c(v_{01}) = c(v_{11}) = +1 \text{ e}$$

$$c(v_{10}) = -1$$



Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto \text{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto \text{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$

- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$

- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- ▶ A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M , tal que

- ▶ $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
 - ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
 - ▶ Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$
-
- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
 - ▶ A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica
 - ▶ Se existe uma realização quântica em que todos os observáveis comutam, então existe uma realização clássica

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário
- ▶ A realização de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ depende apenas de $p(\ell)$. Isto é, para um outro arranjo $A' = (V, E, \ell')$, se $p(\ell) = p(\ell')$, é possível construir uma realização para A' a partir da realização de A

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário
- ▶ A realização de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ depende apenas de $p(\ell)$. Isto é, para um outro arranjo $A' = (V, E, \ell')$, se $p(\ell) = p(\ell')$, é possível construir uma realização para A' a partir da realização de A
- ▶ Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é realizável classicamente se, e somente se, $p(\ell) = +1$

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- ▶ O quadrado 3×3 e o pentagrama são arranjos mágicos

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- ▶ O quadrado 3×3 e o pentagrama são arranjos mágicos
- ▶ O quadrado 2×2 , com $p(\ell) = -1$, não é realizável de nenhuma forma

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
- 2 Charlie envia o vértice u para Alice e a aresta e para Bob

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
- 2 Charlie envia o vértice u para Alice e a aresta e para Bob
- 3 Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
- 2 Charlie envia o vértice u para Alice e a aresta e para Bob
- 3 Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie
- 4 Bob rotula cada vértice $v \in e$ com $b(v) = \pm 1$ e envia para Charlie

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
- 2 Charlie envia o vértice u para Alice e a aresta e para Bob
- 3 Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie
- 4 Bob rotula cada vértice $v \in e$ com $b(v) = \pm 1$ e envia para Charlie
- 5 Alice e Bob vencem se $a(u) = b(u)$ e $\prod_{v \in e} b(v) = \ell(e)$

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja c a realização quântica em um espaço \mathcal{H} de dimensão n

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja c a realização quântica em um espaço \mathcal{H} de dimensão n
- ▶ Para uma base $|1\rangle, \dots, |n\rangle$, Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^n |i\rangle |i\rangle$$

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja c a realização quântica em um espaço \mathcal{H} de dimensão n
- ▶ Para uma base $|1\rangle, \dots, |n\rangle$, Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^n |i\rangle |i\rangle$$

- ▶ A prova segue pela diagonalização simultânea dos observáveis e simetria

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

- O grafo de interseção do quadrado 3×3 é o $K_{3,3}$

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

- ▶ O grafo de interseção do quadrado 3×3 é o $K_{3,3}$
- ▶ O grafo de interseção do pentagrama é o K_5

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

► Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
 - ▶ As arestas que apontavam para v e w , apontam para o novo vértice u

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
 - ▶ As arestas que apontavam para v e w , apontam para o novo vértice u
 - ▶ A aresta *entre* v e w se torna dois laços

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
 - ▶ As arestas que apontavam para v e w , apontam para o novo vértice u
 - ▶ A aresta *entre* v e w se torna dois laços
 - ▶ O rótulo de u é o produto dos rótulos de v e w

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
 - ▶ As arestas que apontavam para v e w , apontam para o novo vértice u
 - ▶ A aresta *entre* v e w se torna dois laços
 - ▶ O rótulo de u é o produto dos rótulos de v e w
 - ▶ Propriedade 1: o grafo, após a contração da aresta, continua planar

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é mágico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- ▶ Grafo de interseção planar \implies arranjo não mágico:
 - ▶ O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
 - ▶ A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
 - ▶ Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
 - ▶ As arestas que apontavam para v e w , apontam para o novo vértice u
 - ▶ A aresta *entre* v e w se torna dois laços
 - ▶ O rótulo de u é o produto dos rótulos de v e w
 - ▶ Propriedade 1: o grafo, após a contração da aresta, continua planar
 - ▶ Propriedade 2: a paridade (produto dos rótulos dos vértices) continua a mesma

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo sinal do vértice

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo sinal do vértice
 - ▶ Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k , $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1)I(M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo sinal do vértice
 - ▶ Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k , $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1)I(M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

- ▶ Seja X o observável na aresta a ser contraída, $M_1, \dots, M_m X$ os observáveis ao redor de v e $X N_1, \dots, N_n$ os observáveis ao redor de w . Temos

$$M_1 \dots M_m X = \ell(v)I \text{ e } X N_1 \dots N_n = \ell(w)I$$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo sinal do vértice
 - ▶ Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k , $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1)I(M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

- ▶ Seja X o observável na aresta a ser contraída, $M_1, \dots, M_m X$ os observáveis ao redor de v e $X N_1, \dots, N_n$ os observáveis ao redor de w . Temos

$$M_1 \dots M_m X = \ell(v)I \text{ e } X N_1 \dots N_n = \ell(w)I$$

- ▶ Multiplicando, temos $M_1 \dots M_m N_1 \dots N_n = \ell(v)\ell(w)I = \ell(u)I$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- ▶ O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- ▶ O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade
- ▶ Cada laço contribui com $+1$. Logo, o rótulo do vértice final é $+1$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- ▶ O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade
- ▶ Cada laço contribui com $+1$. Logo, o rótulo do vértice final é $+1$
- ▶ Consequentemente, a paridade do arranjo é $+1$ e ele não é mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Grafo de interseção não-planar \implies arranjo mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Grafo de interseção não-planar \implies arranjo mágico
 - ▶ A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Grafo de interseção não-planar \implies arranjo mágico
 - ▶ A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico
 - ▶ Qualquer grafo não-planar contém o grafo $K_{3,3}$ ou o K_5 como um menor topológico (Pontyagin e Kuratowski)

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Grafo de interseção não-planar \implies arranjo mágico
 - ▶ A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico
 - ▶ Qualquer grafo não-planar contém o grafo $K_{3,3}$ ou o K_5 como um menor topológico (Pontyagin e Kuratowski)
 - ▶ Tanto o $K_{3,3}$ (quadrado 3×3) quanto o K_5 (pentagrama) são mágicos

Definição 8 (Menor Topológico)

Um grafo H é um menor topológico de G se G contém um subgrafo isomórfico a uma subdivisão de H . Equivalentemente, existe um mapeamento ϕ injetivo de cada vértice $v \in H$ para um vértice $\phi(v) \in G$, e de cada aresta $(u, v) \in H$ para um caminho simples entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$ em G , tal que os caminhos são disjuntos (com exceção das extremidades u e v).

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

► Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H

1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
- 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
 - 4 Rotulemos as demais arestas de G com $+I$



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
 - 4 Rotulemos as demais arestas de G com $+1$
- ▶ Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$



Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
 - 4 Rotulemos as demais arestas de G com $+1$
- ▶ Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- ▶ Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmos observáveis tocados por $v \in H$, mais I 's \implies os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$

□

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
 - 4 Rotulemos as demais arestas de G com $+1$
- ▶ Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- ▶ Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmos observáveis tocados por $v \in H$, mais I 's \implies os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$
- ▶ Cada vértice de G em um caminho entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$ toca dois vértices rotulados com o mesmo observável, e cópias de $I \implies$ comutam e multiplicam para $+1$

□

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- ▶ Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
 - 1 Para cada $v \in H$, assumamos $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
 - 2 Assumamos que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
 - 3 Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotulemos cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M ; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
 - 4 Rotulemos as demais arestas de G com $+1$
- ▶ Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- ▶ Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmos observáveis tocados por $v \in H$, mais I 's \implies os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$
- ▶ Cada vértice de G em um caminho entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$ toca dois vértices rotulados com o mesmo observável, e cópias de $I \implies$ comutam e multiplicam para $+I$
- ▶ Os vértices restantes tocam apenas I 's \implies comutam e multiplicam para $+I$

□