

# Jogos Mágicos

Luigi Soares (luigi.domenico@dcc.ufmg.br)  
Roberto Rosmaninho (TODO)

# Quadrado Mágico

---



# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
  - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz  $3 \times 3$  e atribui à Alice



# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
  - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz  $3 \times 3$  e atribui à Alice
  - 2 Alice preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $+1$

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
  - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz  $3 \times 3$  e atribui à Alice
  - 2 Alice preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $+1$
  - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
  - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz  $3 \times 3$  e atribui à Alice
  - 2 Alice preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $+1$
  - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  - 4 Bob preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $-1$

# Introdução ao Jogo

- ▶ Jogo cooperativo não-local
- ▶ Dois jogadores: Alice e Bob
- ▶ Um árbitro: Charlie
- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- ▶ A cada rodada:
  - 1 Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz  $3 \times 3$  e atribui à Alice
  - 2 Alice preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $+1$
  - 3 Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  - 4 Bob preenche as três células com  $+1$  ou  $-1$ , de forma que o produto seja  $-1$
  - 5 Alice e Bob vencem se respeitaram e concordaram no valor da interseção

## Exemplo 1 (Vitória)

Alice  $\leftarrow 0$

+1	-1	-1

$$\prod = +1$$

Bob  $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

## Exemplo 2 (Derrota, Interseção)

Alice  $\leftarrow 1$

+1	-1	-1

$$\prod = +1$$

Bob  $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

### Exemplo 3 (Derrota, Produto)

Alice  $\leftarrow 1$

+1	+1	-1	$\prod = -1$

Bob  $\leftarrow 1$

	-1	
	+1	
	+1	

$$\prod = -1$$

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*



## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1		
-1		
-1		

Bob

-1		
-1		
-1		

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	- 1	+ 1
-1	- 1	+ 1
-1	- 1	+ 1

Bob

-1		
-1		
-1		

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	+1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

Bob

-1	-1	
-1	-1	
-1	-1	

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	+1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

Bob

-1	-1	-1
-1	-1	+1
-1	-1	+1

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

$$m_{0,0} \ m_{0,1} \ m_{0,2} = +1$$

$$m_{1,0} \ m_{1,1} \ m_{1,2} = +1$$

$$m_{2,0} \ m_{2,1} \ m_{2,2} = +1$$

$$m_{0,0} \ m_{1,0} \ m_{2,0} = -1$$

$$m_{0,1} \ m_{1,1} \ m_{2,1} = -1$$

$$m_{0,2} \ m_{1,2} \ m_{2,2} = -1$$

---

$$+1 \neq -1$$

## Estratégia Clássica (Determinística)

- ▶ Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- ▶ Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- ▶ É impossível vencer com 100% de chance toda rodada
- ▶ A melhor estratégia determinística vence com probabilidade  $\frac{8}{9}$



## Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula

## Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes

## Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- ▶ A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística

## Estratégia Clássica (Probabilística)

- ▶ Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- ▶ Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- ▶ A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística
- ▶ Ou seja, qualquer estratégia probabilística é limitada pela melhor estratégia determinística. Logo, a chance de sucesso clássico é no máximo  $8/9$



# Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?

# Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada

# Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

# Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

- ▶ Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits



# Estratégia Quântica

- ▶ E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- ▶ Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- ▶ Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B)$$

- ▶ Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits
- ▶ O resultado de cada medição é o valor de cada célula



# Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$



# Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$	$+I$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$	$+I$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$	$+I$
$-I$	$-I$	$-I$	

## Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com  $Z$ . Suponha que ela tenha observado  $+1$ . Ela atribui  $+1$  à primeira célula e o estado inicial  $|\psi\rangle$  colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

## Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com  $Z$ . Suponha que ela tenha observado  $+1$ . Ela atribui  $+1$  à primeira célula e o estado inicial  $|\psi\rangle$  colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- 2 Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com  $Z$ . Suponha que ela tenha observado  $-1$ . Ela atribui  $-1$  à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

## Exemplo 4

- 1 Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com  $Z$ . Suponha que ela tenha observado  $+1$ . Ela atribui  $+1$  à primeira célula e o estado inicial  $|\psi\rangle$  colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- 2 Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com  $Z$ . Suponha que ela tenha observado  $-1$ . Ela atribui  $-1$  à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

- 3 Para a terceira célula, ela mede seus dois qubits com  $Z \otimes Z$ . O único resultado possível é  $-1$  e o estado não se altera:  $|\psi_{A3}\rangle = |\psi_{A2}\rangle$ .

## Exemplo 4

- 1 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com  $Z$ . Ele observa  $-1$  (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

## Exemplo 4

- 1 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com  $Z$ . Ele observa  $-1$  (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

- 2 Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com  $X$ . Suponha que ele observe  $+1$ . Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$



## Exemplo 4

- 1 Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com  $Z$ . Ele observa  $-1$  (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

- 2 Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com  $X$ . Suponha que ele observe  $+1$ . Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

- 3 Para a terceira célula, ele mede ambos os qubits com  $-Z \otimes X$ . O único resultado possível é  $+1$ , o que satisfaz a restrição sobre o produto da coluna.

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja  $M_{i,j}$  o observável na célula  $(i,j)$  da estratégia quântica, segue que, para toda linha  $i$ ,  $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$ , e, para toda coluna  $j$ ,  $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$ .

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja  $M_{i,j}$  o observável na célula  $(i,j)$  da estratégia quântica, segue que, para toda linha  $i$ ,  $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$ , e, para toda coluna  $j$ ,  $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$ .

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja  $M_{i,j}$  o observável na célula  $(i,j)$  da estratégia quântica, segue que, para toda linha  $i$ ,  $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$ , e, para toda coluna  $j$ ,  $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$ .

- ▶ Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- ▶ Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha  $i$  (equiv. coluna  $j$ ),

$$\begin{aligned} M_{i,0} M_{i,1} M_{i,2} &= (P_i \Lambda_{i,0} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,1} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,2} P_i^{-1}) \\ &= P_i (\Lambda_{i,0} \Lambda_{i,1} \Lambda_{i,2}) P_i^{-1} \\ &= P_i \Lambda_i P_i^{-1} \end{aligned}$$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja  $M_{i,j}$  o observável na célula  $(i,j)$  da estratégia quântica, segue que, para toda linha  $i$ ,  $\prod_j \text{Out}(M_{i,j}) = +1$ , e, para toda coluna  $j$ ,  $\prod_i \text{Out}(M_{i,j}) = -1$ .

- ▶ Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- ▶ Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha  $i$  (equiv. coluna  $j$ ),

$$\begin{aligned} M_{i,0} M_{i,1} M_{i,2} &= (P_i \Lambda_{i,0} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,1} P_i^{-1})(P_i \Lambda_{i,2} P_i^{-1}) \\ &= P_i (\Lambda_{i,0} \Lambda_{i,1} \Lambda_{i,2}) P_i^{-1} \\ &= P_i \Lambda_i P_i^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ Cada entrada de  $\Lambda_i$  é o produto dos autovalores p/ mesmo autovetor

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor  $\lambda$  e colapsa para uma combinação de dois autovetores  $|\lambda\rangle_0$  e  $|\lambda\rangle_1$



## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor  $\lambda$  e colapsa para uma combinação de dois autovetores  $|\lambda\rangle_0$  e  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$ , e fixa o estado

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor  $\lambda$  e colapsa para uma combinação de dois autovetores  $|\lambda\rangle_0$  e  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$ , e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor  $\lambda$  e colapsa para uma combinação de dois autovetores  $|\lambda\rangle_0$  e  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$ , e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ O produto das três medições é uma das entradas de  $\Lambda_i$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Os autovalores são sempre  $+1$  e  $-1$
- ▶ Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- ▶ O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor  $\lambda$  e colapsa para uma combinação de dois autovetores  $|\lambda\rangle_0$  e  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ A segunda medição, então, colapsa para  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$ , e fixa o estado
- ▶ Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a  $|\lambda\rangle_0$  ou  $|\lambda\rangle_1$
- ▶ O produto das três medições é uma das entradas de  $\Lambda_i$
- ▶ Mas, para toda linha  $i$ , temos  $P_i \Lambda_i P_i^{-1} = I$ . Logo,  $\Lambda_i = I$  e o produto das três medições é  $+1$  sempre. Para toda coluna  $j$ ,  $P_j \Lambda_j P_j^{-1} = -I$  e  $\Lambda_j = -I$



## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula  $I \otimes Z$ , temos  $|00\rangle$  e  $|10\rangle$  no autoespaço do  $+1$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula  $I \otimes Z$ , temos  $|00\rangle$  e  $|10\rangle$  no autoespaço do  $+1$
- ▶ Ao observar  $+1$ , o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula  $I \otimes Z$ , temos  $|00\rangle$  e  $|10\rangle$  no autoespaço do  $+1$
- ▶ Ao observar  $+1$ , o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- ▶ Para a segunda célula  $Z \otimes I$ , o autovalor de  $|00\rangle$  é  $+1$  e o de  $|10\rangle$  é  $-1$



## Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- ▶ Para a primeira linha, os autovetores em comum são  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$
- ▶ Para a primeira célula  $I \otimes Z$ , temos  $|00\rangle$  e  $|10\rangle$  no autoespaço do  $+1$
- ▶ Ao observar  $+1$ , o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- ▶ Para a segunda célula  $Z \otimes I$ , o autovalor de  $|00\rangle$  é  $+1$  e o de  $|10\rangle$  é  $-1$
- ▶ Ao observar  $-1$ , o estado colapsa para o autovetor  $|10\rangle$ , vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle) \mapsto |1010\rangle$$

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i, j)$  é sempre o mesmo.

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i,j)$  é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i,j)$  é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i,j)$  é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i,j)$  é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- ▶ Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém

## Lema 2: Interseção

Para qualquer linha  $i$  atribuída a Alice e coluna  $j$  atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula  $(i,j)$  é sempre o mesmo.

- ▶ Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- ▶ Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- ▶ Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- ▶ Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém
- ▶ Logo, se Bob mede os qubits dele com os mesmos observáveis que Alice, ele observa o mesmo resultado



## Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$  ou  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$



## Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$  ou  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$

## Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$  ou  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- ▶ Então, Alice recebeu  $-1$ ,  $-1$  e  $+1$

## Lema 2: Interseção

- ▶ Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ ,  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$  ou  $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- ▶ Suponha que tenha sido  $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- ▶ Então, Alice recebeu  $-1$ ,  $-1$  e  $+1$
- ▶ Após a primeira medição, o estado colapsa para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (|00\rangle - |10\rangle) |00\rangle + (|01\rangle - |11\rangle) |01\rangle + (|10\rangle - |00\rangle) |10\rangle + (|11\rangle - |01\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( |00\rangle (|00\rangle - |10\rangle) + |01\rangle (|01\rangle - |11\rangle) + |10\rangle (|10\rangle - |00\rangle) + |11\rangle (|11\rangle - |01\rangle) \right) \end{aligned}$$

## Lema 2: Interseção

- Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left( (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |01\rangle - \right. \\ & \quad \left. (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{4} \left( |00\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \right. \\ & \quad \left. |10\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \right) \end{aligned}$$

## Lema 2: Interseção

- ▶ Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left( (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |01\rangle - \right. \\ & \quad \left. (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |11\rangle \right) \\ & \equiv \frac{1}{4} \left( |00\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \right. \\ & \quad \left. |10\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \right) \end{aligned}$$

- ▶ Logo, para qualquer coluna que Bob receba, ao fazer uma medição igual a que Alice fez na interseção, ele obterá a mesma resposta que Alice

# ■ Teorema 1: O Jogo do Quadrado Mágico É Vencível

Existe uma estratégia quântica para o jogo do quadrado mágico de Mermin-Peres, que consiste em Alice e Bob compartilharem qubits emaranhados *antes* do início do jogo, que vence sistematicamente todas as rodadas.

# Caracterizando Jogos Mágicos

---

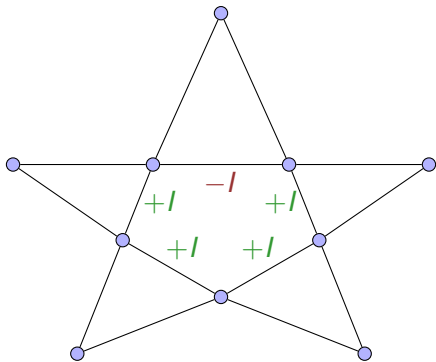
## Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?



## Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?



## Modificando o Formato

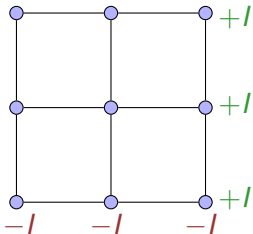
- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo

## Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também

## Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também



## Modificando o Formato

- ▶ O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- ▶ E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- ▶ Note que a representação foi em formato de grafo
- ▶ Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também
- ▶ Será que existe alguma caracterização deste tipo de jogo?

## Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto  $V$  está exatamente em duas hiperarestas do conjunto  $E$  (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação  $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$ .

## Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto  $V$  está exatamente em duas hiperarestas do conjunto  $E$  (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação  $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$ .

- O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos

## Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto  $V$  está exatamente em duas hiperarestas do conjunto  $E$  (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação  $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$ .

- ▶ O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- ▶ Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta



## Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto  $V$  está exatamente em duas hiperarestas do conjunto  $E$  (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação  $\ell: E \mapsto \{+1, -1\}$ .

- ▶ O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- ▶ Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta
- ▶ Cada linha que passa por 4 vértices do pentagrama é uma hiperaresta

## Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação dos vértices  $c: V \mapsto \{+1, -1\}$  tal que, para cada  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$ .

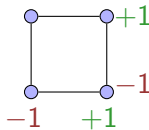
## Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação dos vértices  $c: V \mapsto \{+1, -1\}$  tal que, para cada  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$ .

► Por exemplo, considere uma versão  $2 \times 2$  do quadrado mágico, com

$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$

$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$



## Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação dos vértices  $c: V \mapsto \{+1, -1\}$  tal que, para cada  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$ .

- ▶ Por exemplo, considere uma versão  $2 \times 2$  do quadrado mágico, com

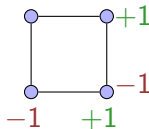
$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$

$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$

- ▶ Uma realização clássica válida é

$$c(v_{00}) = c(v_{01}) = c(v_{11}) = +1 \text{ e}$$

$$c(v_{10}) = -1$$



## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto \text{GL}(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto \text{GL}(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$

## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si

## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$



## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$

- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$

## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$
  - ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
  - ▶ Para cada hiperaresta  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$
- 
- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
  - ▶ A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica

## Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é uma rotulação de vértices  $c: V \mapsto GL(\mathcal{H})$ , que mapeia cada vértice para um observável  $M$ , tal que

- ▶  $M = M^*$  e  $M^2 = I$ , ou equivalentemente,  $M$  possui autovalores  $+1$  e  $-1$
- ▶ Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- ▶ Para cada hiperaresta  $e \in E$ ,  $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)I$

- ▶ Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- ▶ A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica
- ▶ Se existe uma realização quântica em que todos os observáveis comutam, então existe uma realização clássica

## Definição 3 (Paridade)

A paridade  $p(\ell)$  de uma rotulação  $\ell$  de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

## Definição 3 (Paridade)

A paridade  $p(\ell)$  de uma rotulação  $\ell$  de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é  $-1$  se o número de rótulos  $-1$  é ímpar ou  $1$  caso contrário

## Definição 3 (Paridade)

A paridade  $p(\ell)$  de uma rotulação  $\ell$  de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é  $-1$  se o número de rótulos  $-1$  é ímpar ou  $1$  caso contrário
- ▶ A realização de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  depende apenas de  $p(\ell)$ . Isto é, para um outro arranjo  $A' = (V, E, \ell')$ , se  $p(\ell) = p(\ell')$ , é possível construir uma realização para  $A'$  a partir da realização de  $A$

## Definição 3 (Paridade)

A paridade  $p(\ell)$  de uma rotulação  $\ell$  de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(e).$$

- ▶ A paridade é  $-1$  se o número de rótulos  $-1$  é ímpar ou  $+1$  caso contrário
- ▶ A realização de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  depende apenas de  $p(\ell)$ . Isto é, para um outro arranjo  $A' = (V, E, \ell')$ , se  $p(\ell) = p(\ell')$ , é possível construir uma realização para  $A'$  a partir da realização de  $A$
- ▶ Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é realizável classicamente se, e somente se,  $p(\ell) = +1$

## Definição 4 (Arranjo Mágico)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é mágico se  $p(\ell) = -1$  e é realizável quanticamente.



## Definição 4 (Arranjo Mágico)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é mágico se  $p(\ell) = -1$  e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente

## Definição 4 (Arranjo Mágico)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é mágico se  $p(\ell) = -1$  e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- ▶ O quadrado  $3 \times 3$  e o pentagrama são arranjos mágicos

## Definição 4 (Arranjo Mágico)

Um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é mágico se  $p(\ell) = -1$  e é realizável quanticamente.

- ▶ Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- ▶ O quadrado  $3 \times 3$  e o pentagrama são arranjos mágicos
- ▶ O quadrado  $2 \times 2$ , com  $p(\ell) = -1$ , não é realizável de nenhuma forma

## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona  $u \in V$  e uma das duas hiperarestas  $e$  que contém  $u$

## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona  $u \in V$  e uma das duas hiperarestas  $e$  que contém  $u$
- 2 Charlie envia  $u$  para Alice e  $e$  para Bob

## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona  $u \in V$  e uma das duas hiperarestas  $e$  que contém  $u$
- 2 Charlie envia  $u$  para Alice e  $e$  para Bob
- 3 Alice rotula  $a(u) = \pm 1$  e envia para Charlie

## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona  $u \in V$  e uma das duas hiperarestas  $e$  que contém  $u$
- 2 Charlie envia  $u$  para Alice e  $e$  para Bob
- 3 Alice rotula  $a(u) = \pm 1$  e envia para Charlie
- 4 Bob rotula cada vértice  $v \in e$  com  $b(v) = \pm 1$  e envia para Charlie



## Definição 5 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

- 1 Charlie seleciona  $u \in V$  e uma das duas hiperarestas  $e$  que contém  $u$
- 2 Charlie envia  $u$  para Alice e  $e$  para Bob
- 3 Alice rotula  $a(u) = \pm 1$  e envia para Charlie
- 4 Bob rotula cada vértice  $v \in e$  com  $b(v) = \pm 1$  e envia para Charlie
- 5 Alice e Bob vencem se  $a(u) = b(u)$  e  $\prod_{v \in e} b(v) = \ell(e)$

## Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

## Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja  $c$  a realização quântica em um espaço  $\mathcal{H}$  de dimensão  $n$

## Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja  $c$  a realização quântica em um espaço  $\mathcal{H}$  de dimensão  $n$
- ▶ Para uma base  $|1\rangle, \dots, |n\rangle$ , Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^n |i\rangle |i\rangle$$

## Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- ▶ Seja  $c$  a realização quântica em um espaço  $\mathcal{H}$  de dimensão  $n$
- ▶ Para uma base  $|1\rangle, \dots, |n\rangle$ , Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^n |i\rangle |i\rangle$$

- ▶ A prova segue pela diagonalização simultânea dos observáveis e simetria

## Definição 6 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é o grafo não-direcionado  $G = (V', E', \ell')$  tal que  $V' = E$  e existe uma aresta entre  $e_0, e_1 \in V'$  para cada vértice na interseção  $e_0 \cap e_1$  das hiperarestas. A rotulação  $\ell': V' \mapsto \{+1, -1\}$  é a mesma do arranjo  $A$ , isto é,  $\ell(e) = \ell'(e)$ .

## Definição 6 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é o grafo não-direcionado  $G = (V', E', \ell')$  tal que  $V' = E$  e existe uma aresta entre  $e_0, e_1 \in V'$  para cada vértice na interseção  $e_0 \cap e_1$  das hiperarestas. A rotulação  $\ell': V' \mapsto \{+1, -1\}$  é a mesma do arranjo  $A$ , isto é,  $\ell(e) = \ell'(e)$ .

- O grafo de interseção do quadrado  $3 \times 3$  é o  $K_{3,3}$

## Definição 6 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo  $A = (V, E, \ell)$  é o grafo não-direcionado  $G = (V', E', \ell')$  tal que  $V' = E$  e existe uma aresta entre  $e_0, e_1 \in V'$  para cada vértice na interseção  $e_0 \cap e_1$  das hiperarestas. A rotulação  $\ell': V' \mapsto \{+1, -1\}$  é a mesma do arranjo  $A$ , isto é,  $\ell(e) = \ell'(e)$ .

- ▶ O grafo de interseção do quadrado  $3 \times 3$  é o  $K_{3,3}$
- ▶ O grafo de interseção do pentagrama é o  $K_5$