Pseudotelepatia Quântica (TODO)

Luigi Soares (luigi.domenico@dcc.ufmg.br)
Roberto Rosmaninho (TODO)

Quadrado Mágico

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  4. Bob preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja -1

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  4. Bob preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja -1
  5. Alice e Bob vencem se respeitaram e concordaram no valor da interseção

Exemplo 1 (Vitória)

Alice $\leftarrow 0$

$+1$	-1	-1

$\prod = +1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Exemplo 2 (Derrota, Interseção)

Alice $\leftarrow 1$

$+1$	-1	-1

$\prod = +1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Exemplo 3 (Derrota, Produto)

Alice $\leftarrow 1$

$+1$	$+1$	-1	$\prod = -1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas

Alice

-1		
-1		
-1		

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1	-1	
-1	-1	
-1	-1	

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1	-1	-1
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

$$
\begin{array}{r}
m_{0,0}\, m_{0,1}\, m_{0,2} = +1 \\
m_{1,0}\, m_{1,1}\, m_{1,2} = +1 \\
m_{2,0}\, m_{2,1}\, m_{2,2} = +1 \\
m_{0,0}\, m_{1,0}\, m_{2,0} = -1 \\
m_{0,1}\, m_{1,1}\, m_{2,1} = -1 \\
\underline{m_{0,2}\, m_{1,2}\, m_{2,2} = -1} \\
+1 \neq -1
\end{array}
$$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em prepar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada
- A melhor estratégia determinística vence com probabilidade $8/9$

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística
- Ou seja, qualquer estratégia probabilística é limitada pela melhor estratégia determinística. Logo, a chance de sucesso clássico é no máximo $^8/_9$

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados (um par para cada rodada):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados (um par para cada rodada):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

- Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados (um par para cada rodada):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

- Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits
- O resultado de cada medição é o valor de cada célula

Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$

Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$	$+I$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$	$+I$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$	$+I$
$-I$	$-I$	$-I$	

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

2. Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z. Suponha que ela tenha observado -1. Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

2. Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z. Suponha que ela tenha observado -1. Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

3. Para a terceira célula, ela mede seus dois qubits com $Z \otimes Z$. O único resultado possível é -1 e o estado não se altera: $|\psi_{A3}\rangle = |\psi_{A2}\rangle$.

Exemplo 4

1. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 com (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

1. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 com (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

2. Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X. Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

Exemplo 4

1. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 com (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

2. Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X. Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

3. Para a terceira célula, ele mede ambos os qubits com $-Z \otimes X$. O único resultado possível é $+1$, o que satisfaz a restrição sobre o produto da coluna.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i, j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned}
M_{i,0}M_{i,1}M_{i,2} &= (P_i\Lambda_{i,0}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,1}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,2}P_i^{-1}) \\
&= P_i(\Lambda_{i,0}\Lambda_{i,1}\Lambda_{i,2})P_i^{-1} \\
&= P_i\Lambda_iP_i^{-1}
\end{aligned}$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned} M_{i,0}M_{i,1}M_{i,2} &= (P_i\Lambda_{i,0}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,1}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,2}P_i^{-1}) \\ &= P_i(\Lambda_{i,0}\Lambda_{i,1}\Lambda_{i,2})P_i^{-1} \\ &= P_i\Lambda_i P_i^{-1} \end{aligned}$$

- Cada entrada de Λ_i é o produto dos autovalores p/ mesmo autovetor

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda_1\rangle$, e fixa o estado

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda_1\rangle$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda_1\rangle$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda_1\rangle$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i
- Mas, para toda linha i, temos $P_i \Lambda_i P_i^{-1} = I$. Logo, $\Lambda_i = I$ e o produto das três medições é $+1$ sempre. Para toda coluna j, $P_j \Lambda_j P_j^{-1} = -I$ e $\Lambda_j = -I$

$\square$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1
- Ao observar -1, o estado colapsa para o autovetor $|10\rangle$, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle) \mapsto |1010\rangle$$