Jogos Mágicos

Luigi Soares (luigi.domenico@dcc.ufmg.br)
Roberto Rosmaninho (robertogomes@dcc.ufmg.br)

Quadrado Mágico

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  4. Bob preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja -1

Introdução ao Jogo

- Jogo cooperativo não-local
- Dois jogadores: Alice e Bob
- Um árbitro: Charlie
- Alice e Bob não podem se comunicar após o início
- A cada rodada:
  1. Charlie sorteia uma linha 0, 1 ou 2 de uma matriz 3×3 e atribui à Alice
  2. Alice preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja $+1$
  3. Charlie sorteia uma coluna 0, 1 ou 2 da matriz e atribui ao Bob
  4. Bob preenche as três células com $+1$ ou -1, de forma que o produto seja -1
  5. Alice e Bob vencem se respeitaram e concordaram no valor da interseção

Exemplo 1 (Vitória)

Alice $\leftarrow 0$

$+1$	-1	-1	$\prod = +1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Exemplo 2 (Derrota, Interseção)

Alice $\leftarrow 1$

$+1$	-1	-1

$\prod = +1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Exemplo 3 (Derrota, Produto)

Alice $\leftarrow 1$

$+1$	$+1$	-1	$\prod = -1$

Bob $\leftarrow 1$

	-1	
	$+1$	
	$+1$	

$\prod = -1$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1		
-1		
-1		

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1		
-1		
-1		

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1	-1	
-1	-1	
-1	-1	

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas

Alice

-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Bob

-1	-1	-1
-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada

$$
\begin{array}{r}
m_{0,0}\, m_{0,1}\, m_{0,2} = +1 \\
m_{1,0}\, m_{1,1}\, m_{1,2} = +1 \\
m_{2,0}\, m_{2,1}\, m_{2,2} = +1 \\
m_{0,0}\, m_{1,0}\, m_{2,0} = -1 \\
m_{0,1}\, m_{1,1}\, m_{2,1} = -1 \\
m_{0,2}\, m_{1,2}\, m_{2,2} = -1 \\
\hline
+1 \neq -1
\end{array}
$$

Estratégia Clássica (Determinística)

- Alice e Bob não podem se comunicar *durante* o jogo, mas podem *antes*
- Uma estratégia determinística consiste em preparar matrizes pré-definidas
- É impossível vencer com 100% de chance toda rodada
- A melhor estratégia determinística vence com probabilidade $8/9$

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística

Estratégia Clássica (Probabilística)

- Alice e Bob jogam uma moeda para decidir o valor de cada célula
- Isto é equivalente a cada um deles sortear uma dentre todas as possíveis matrizes
- A combinação das duas matrizes sorteadas é uma estratégia determinística
- Ou seja, qualquer estratégia probabilística é limitada pela melhor estratégia determinística. Logo, a chance de sucesso clássico é no máximo $8/9$

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

- Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits

Estratégia Quântica

- E se Alice e Bob puderem carregar qubits?
- Existe uma estratégia quântica que os permite vencer qualquer rodada
- Alice e Bob compartilham qubits emaranhados

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle_A \otimes |00\rangle_B + |01\rangle_A \otimes |01\rangle_B + |10\rangle_A \otimes |10\rangle_B + |11\rangle_A \otimes |11\rangle_B\right)$$

- Ao receber uma linha/coluna, eles medem seus qubits
- O resultado de cada medição é o valor de cada célula

Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$

Estratégia Quântica

$+I \otimes Z$	$+Z \otimes I$	$+Z \otimes Z$	$+\,I$
$+X \otimes I$	$+I \otimes X$	$+X \otimes X$	$+\,I$
$-X \otimes Z$	$-Z \otimes X$	$+Y \otimes Y$	$+\,I$
$-\,I$	$-\,I$	$-\,I$	

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

2. Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z. Suponha que ela tenha observado -1. Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

1. Alice recebe a linha 0 e mede seu segundo qubit com Z. Suponha que ela tenha observado $+1$. Ela atribui $+1$ à primeira celula e o estado inicial $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_{A1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

2. Em seguida, Alice mede seu primeiro qubit com Z. Suponha que ela tenha observado -1. Ela atribui -1 à segunda célula e o estado colapsa para

$$|\psi_{A2}\rangle = |1010\rangle$$

3. Para a terceira célula, ela mede seus dois qubits com $Z \otimes Z$. O único resultado possível é -1 e o estado não se altera: $|\psi_{A3}\rangle = |\psi_{A2}\rangle$.

Exemplo 4

4. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

Exemplo 4

4. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

5. Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X. Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

Exemplo 4

4. Suponha que Bob tenha recebido a coluna 1. Para a primeira célula, ele mede seu primeiro qubit com Z. Ele observa -1 (igual Alice) com probabilidade 1, e

$$|\psi_{B1}\rangle = |\psi_{A3}\rangle = |1010\rangle$$

5. Em seguida, Bob mede seu segundo qubit com X. Suponha que ele observe $+1$. Então, o estado colapsa para

$$|\psi_{B2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |1011\rangle)$$

6. Para a terceira célula, ele mede ambos os qubits com $-Z \otimes X$. O único resultado possível é $+1$, o que satisfaz a restrição sobre o produto da coluna.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i, j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned}
M_{i,0}M_{i,1}M_{i,2} &= (P_i\Lambda_{i,0}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,1}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,2}P_i^{-1}) \\
&= P_i(\Lambda_{i,0}\Lambda_{i,1}\Lambda_{i,2})P_i^{-1} \\
&= P_i\Lambda_iP_i^{-1}
\end{aligned}$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

Seja $M_{i,j}$ o observável na célula (i,j) da estratégia quântica, segue que, para toda linha i, $\prod_j \mathrm{Out}(M_{i,j}) = +1$, e, para toda coluna j, $\prod_i \mathrm{Out}(M_{i,j}) = -1$.

- Note que, em qualquer linha e coluna, os três observáveis comutam entre si
- Ou seja, é possível encontrar uma base de autovetores em comum, que diagonaliza os três. Para toda linha i (equiv. coluna j),

$$\begin{aligned} M_{i,0}M_{i,1}M_{i,2} &= (P_i\Lambda_{i,0}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,1}P^{-1})(P_i\Lambda_{i,2}P_i^{-1}) \\ &= P_i(\Lambda_{i,0}\Lambda_{i,1}\Lambda_{i,2})P_i^{-1} \\ &= P_i\Lambda_iP_i^{-1} \end{aligned}$$

- Cada entrada de Λ_i é o produto dos autovalores p/ mesmo autovetor

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Os autovalores são sempre $+1$ e -1
- Tem sempre dois autovetores em comum para cada autoespaço
- O que isso significa é que a primeira medição de qualquer linha/coluna resulta em um autovalor λ e colapsa para uma combinação de dois autovetores $|\lambda\rangle_0$ e $|\lambda\rangle_1$
- A segunda medição, então, colapsa para $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$, e fixa o estado
- Logo, as medições irão resultar nos autovalores correspondentes a $|\lambda\rangle_0$ ou $|\lambda\rangle_1$
- O produto das três medições é uma das entradas de Λ_i
- Mas, para toda linha i, temos $P_i \Lambda_i P_i^{-1} = I$. Logo, $\Lambda_i = I$ e o produto das três medições é $+1$ sempre. Para toda coluna j, $P_j \Lambda_j P_j^{-1} = -I$ e $\Lambda_j = -I$

$\square$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1

Lema 1: Produto das Linhas e Colunas

- Para a primeira linha, os autovetores em comum são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$
- Para a primeira célula $I \otimes Z$, temos $|00\rangle$ e $|10\rangle$ no autoespaço do $+1$
- Ao observar $+1$, o estado colapsa para uma combinação dos dois, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle)$$

- Para a segunda célula $Z \otimes I$, o autovalor de $|00\rangle$ é $+1$ e o de $|10\rangle$ é -1
- Ao observar -1, o estado colapsa para o autovetor $|10\rangle$, vide Exemplo 4:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1010\rangle) \mapsto |1010\rangle$$

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém

Lema 2: Interseção

Para qualquer linha i atribuída a Alice e coluna j atribuída ao Bob, o valor assinalado por ambos à célula (i, j) é sempre o mesmo.

- Independente da linha atribuída a Alice, o estado final dos qubits dela é sempre um dos autovetores em comum para aquela linha
- Se Alice repetir qualquer medição, o resultado é o mesmo que o anterior
- Mas, este estado é uma combinação de um dos autoespaços de Bob na interseção
- Além disso, o estado inicial é simétrico e, a cada medição, a simetria se mantém
- Logo, se Bob mede os qubits dele com os mesmos observáveis que Alice, ele observa o mesmo resultado

□

Lema 2: Interseção

- Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$

Lema 2: Interseção

- Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$

Lema 2: Interseção

- Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- Então, Alice recebeu -1, -1 e $+1$

Lema 2: Interseção

- Para a segunda linha, o estado de Alice colapsa para $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$, $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ ou $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
- Suponha que tenha sido $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- Então, Alice recebeu -1, -1 e $+1$
- Após a primeira medição, o estado colapsa para

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((|00\rangle - |10\rangle)\,|00\rangle + (|01\rangle - |11\rangle)\,|01\rangle + (|10\rangle - |00\rangle)\,|10\rangle + (|11\rangle - |01\rangle)\,|11\rangle\Big)$$

$$\equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|00\rangle\,(|00\rangle - |10\rangle) + |01\rangle\,(|01\rangle - |11\rangle) + |10\rangle\,(|10\rangle - |00\rangle) + |11\rangle\,(|11\rangle - |01\rangle)\Big)$$

Lema 2: Interseção

- Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big((|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|01\rangle - \\
&\quad (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|11\rangle\Big) \\
\equiv &\frac{1}{4}\Big(\,|00\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \\
&\quad |10\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\Big)
\end{aligned}
$$

Lema 2: Interseção

- Após a segunda medição, o estado colapsa (e fixa) para

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big((|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|00\rangle - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|01\rangle - \\
&\quad (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|10\rangle + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\,|11\rangle \Big) \\
\equiv\, &\frac{1}{4}\Big(|00\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - |01\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) - \\
&\quad |10\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) + |11\rangle\,(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \Big)
\end{aligned}
$$

- Logo, para qualquer coluna que Bob receba, ao fazer uma medição igual a que Alice fez na interseção, ele obterá a mesma resposta que Alice

Teorema 1: O Jogo do Quadrado Mágico É Vencível

Existe uma estratégia quântica para o jogo do quadrado mágico de Mermin-Peres, que consiste em Alice e Bob compartilharem qubits emaranhados *antes* do início do jogo, que vence sistematicamente todos as rodadas.

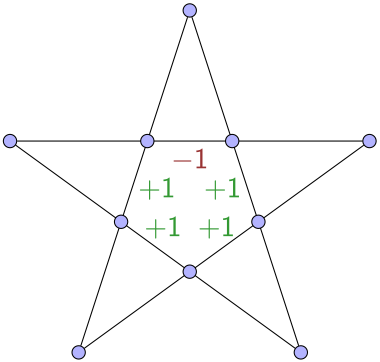
Caracterizando Jogos Mágicos

Modificando o Formato

- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?

Modificando o Formato

- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?



Modificando o Formato

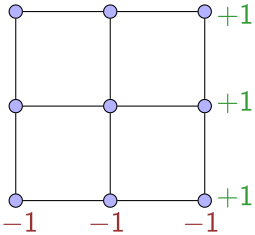
- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- Note que a representação foi em formato de grafo

Modificando o Formato

- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- Note que a representação foi em formato de grafo
- Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também

Modificando o Formato

- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- Note que a representação foi em formato de grafo
- Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também



Modificando o Formato

- O que será que acontece se mudarmos o formato do jogo?
- E se, ao invés de um quadrado, fosse um pentagrama?
- Note que a representação foi em formato de grafo
- Podemos redesenhar o quadrado mágico como um grafo também
- Será que existe alguma caracterização deste tipo de jogo?

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell \colon E \mapsto \{+1, -1\}$.

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell \colon E \mapsto \{+1, -1\}$.

- O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell \colon E \mapsto \{+1, -1\}$.

- O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta

Definição 1 (Arranjo)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um hipergrafo conexo tal que cada vértice do conjunto V está exatamente em duas hiperarestas do conjunto E (*conexo* significa que o hipergrafo não pode ser dividido em dois sub-hipergrafos disjuntos). O arranjo também inclui uma rotulação $\ell \colon E \mapsto \{+1, -1\}$.

- O quadrado mágico e o pentagrama são exemplos de arranjos
- Cada linha que passa por 3 vértices do quadrado é uma hiperaresta
- Cada linha que passa por 4 vértices do pentragrama é uma hiperaresta

Definição 2 (Realização Clássica)

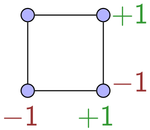
Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c\colon V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

Definição 2 (Realização Clássica)

Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c\colon V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

- Por exemplo, considere uma versão 2×2 do quadrado mágico, com

$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$
$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$



Definição 2 (Realização Clássica)

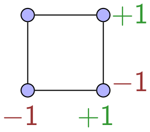
Uma realização clássica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação dos vértices $c\colon V \mapsto \{+1, -1\}$ tal que, para cada $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e)$.

- Por exemplo, considere uma versão 2×2 do quadrado mágico, com

$$\ell(e_t) = \ell(e_r) = +1 \text{ e}$$
$$\ell(e_b) = \ell(e_l) = -1$$

- Uma realização clássica válida é

$$c(v_{00}) = c(v_{01}) = c(v_{11}) = +1 \text{ e}$$
$$c(v_{10}) = -1$$



Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e) I$

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e) I$

- Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c\colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e) I$

- Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica

Definição 3 (Realização Quântica)

Uma realização quântica de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é uma rotulação de vértices $c \colon V \mapsto \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, que mapeia cada vértice para um observável M, tal que

- $M = M^*$ e $M^2 = I$, ou equivalentemente, M possui autovalores $+1$ e -1
- Observáveis assinalados aos vértices de uma hiperaresta comutam entre si
- Para cada hiperaresta $e \in E$, $\prod_{v \in e} c(v) = \ell(e) I$

- Uma realização clássica é simplesmente uma realização quântica com $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- A solução que vimos para o jogo do quadrado mágico é uma realização quântica
- Se existe uma realização quântica em que todos os observáveis comutam, então existe uma realização clássica

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(E).$$

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(E).$$

- A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(E).$$

- A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário
- A realização de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ depende apenas de $p(\ell)$. Isto é, para um outro arranjo $A' = (V, E, \ell')$, se $p(\ell) = p(\ell')$, é possível construir uma realização para A' a partir da realização de A

Definição 4 (Paridade)

A paridade $p(\ell)$ de uma rotulação ℓ de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é

$$p(\ell) = \prod_{e \in E} \ell(E).$$

- A paridade é -1 se o número de rótulos -1 é ímpar ou $+1$ caso contrário
- A realização de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ depende apenas de $p(\ell)$. Isto é, para um outro arranjo $A' = (V, E, \ell')$, se $p(\ell) = p(\ell')$, é possível construir uma realização para A' a partir da realização de A
- Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é realizável classicamente se, e somente se, $p(\ell) = +1$

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- O quadrado 3×3 e o pentagrama são arranjos mágicos

Definição 5 (Arranjo Mágico)

Um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é mágico se $p(\ell) = -1$ e é realizável quanticamente.

- Arranjos mágicos não são realizáveis classicamente
- O quadrado 3×3 e o pentagrama são arranjos mágicos
- O quadrado 2×2, com $p(\ell) = -1$, não é realizável de nenhuma forma

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

1. Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

1. Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
2. Charlie envia u para Alice e e para Bob

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

1. Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
2. Charlie envia u para Alice e e para Bob
3. Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

1. Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
2. Charlie envia u para Alice e e para Bob
3. Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie
4. Bob rotula cada vértice $v \in e$ com $b(v) = \pm 1$ e envia para Charlie

Definição 6 (Jogos de Paridade Pseudotelepáticos)

Um jogo de paridade pseudotelepático em um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é um jogo cooperativo de dois jogadores (Alice e Bob) e um árbitro (Charlie). Alice e Bob podem se comunicar antes do jogo, mas não após o início. A cada rodada,

1. Charlie seleciona $u \in V$ e uma das duas hiperarestas e que contém u
2. Charlie envia u para Alice e e para Bob
3. Alice rotula $a(u) = \pm 1$ e envia para Charlie
4. Bob rotula cada vértice $v \in e$ com $b(v) = \pm 1$ e envia para Charlie
5. Alice e Bob vencem se $a(u) = b(u)$ e $\prod_{v \in e} b(v) = \ell(e)$

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- Seja c a realização quântica em um espaço $\mathcal{H}$ de dimensão n

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- Seja c a realização quântica em um espaço $\mathcal{H}$ de dimensão n
- Para uma base $|1\rangle, \ldots, |n\rangle$, Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\,|i\rangle$$

Teorema 2 (Existência de Estratégia Vencedora)

Em qualquer arranjo que possui uma realização quântica em que todos os observáveis possuem autovalores reais, se Alice e Bob podem compartilhar emaranhamento, então existe uma estratégia vencedora.

- Seja c a realização quântica em um espaço $\mathcal{H}$ de dimensão n
- Para uma base $|1\rangle, \ldots, |n\rangle$, Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\, |i\rangle$$

- A prova segue pela diagonalização simultânea dos observáveis e simetria

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

- O grafo de interseção do quadrado 3×3 é o $K_{3,3}$

Definição 7 (Grafo de Interseção)

O grafo de interseção de um arranjo $A = (V, E, \ell)$ é o grafo não-direcionado $G = (V', E')$ tal que $V' = E$ e existe uma aresta entre $e_0, e_1 \in V'$ para cada vértice na interseção $e_0 \cap e_1$ das hiperarestas.

- O grafo de interseção do quadrado 3×3 é o $K_{3,3}$
- O grafo de interseção do pentagrama é o K_5

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\Longrightarrow$ arranjo não mágico:

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
  - Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
  - Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
  - As arestas que apontavam para v e w, apontam para o novo vértice u

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
  - Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
  - As arestas que apontavam para v e w, apontam para o novo vértice u
  - A aresta *entre* v e w se torna dois laços

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
  - Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
  - As arestas que apontavam para v e w, apontam para o novo vértice u
  - A aresta *entre* v e w se torna dois laços
  - Propriedade 1: o grafo, após a contração da aresta, continua planar

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

Um arranjo é magico se, e somente se, o seu grafo de interseção não é planar.

- Grafo de interseção planar $\implies$ arranjo não mágico:
  - O objetivo é mostrar que, se o grafo de interseção é planar, a paridade é $+1$
  - A estratégia é contrair arestas do grafo de interseção e mostrar propriedades
  - Contrair uma aresta é unir os dois vértices v e w em cada ponta
  - As arestas que apontavam para v e w, apontam para o novo vértice u
  - A aresta *entre* v e w se torna dois laços
  - Propriedade 1: o grafo, após a contração da aresta, continua planar
  - Propriedade 2: a paridade (produto dos rótulos dos vértices) continua a mesma

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo signal do vértice

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo signal do vértice
  - Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k, $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1) I (M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo signal do vértice
  - Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k, $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1) I (M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

  - Seja X o observável na aresta a ser contraída, $M_1, \dots, M_m X$ os observáveis ao redor de v e $XN_1, \dots, N_n$ os observáveis ao redor de w. Temos

$$M_1 \dots M_m X = \ell(v) I \text{ e } XN_1 \dots N_n = \ell(w) I$$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Propriedade 3: o produto dos observáveis nas arestas ao redor do vértice, em sentido anti-horário, é igual a identidade multiplicada pelo signal do vértice
  - Se $M_1 \dots M_n = I$, com $M^2 = I$ (similar para $-I$), então, para qualquer ponto de início k, $M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 \dots M_{k-1} = I$, pois

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} \dots M_n M_1 M_{k-1} &= (M_{k-1} \dots M_1)(M_1 \dots M_n)(M_1 \dots M_{k-1}) \\ &= (M_{k-1} \dots M_1) I (M_1 \dots M_{k-1}) = I \end{aligned}$$

  - Seja X o observável na aresta a ser contraída, $M_1, \dots, M_m X$ os observáveis ao redor de v e $XN_1, \dots, N_n$ os observáveis ao redor de w. Temos

$$M_1 \dots M_m X = \ell(v) I \text{ e } XN_1 \dots N_n = \ell(w) I$$

  - Multiplicando, temos $M_1 \dots M_m N_1 \dots N_n = \ell(v)\ell(w) I = \ell(u) I$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade
- Cada laço contribui com $+I$. Logo, o rótulo do vértice final é $+1$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Eventualmente, o grafo vai ser reduzido a um único vértice, com vários laços
- O rótulo deste vértice é o produto dos rótulos dos vértices originais, i.e. a paridade
- Cada laço contribui com $+I$. Logo, o rótulo do vértice final é $+1$
- Consequentemente, a paridade do arranjo é $+1$ e ele não é mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Grafo de interseção não-planar $\implies$ arranjo mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Grafo de interseção não-planar $\implies$ arranjo mágico
  - A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Grafo de interseção não-planar $\implies$ arranjo mágico
  - A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico
  - Qualquer grafo não-planar contém o grafo $K_{3,3}$ ou o K_5 como um menor topológico (Pontyagin e Kuratowski)

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Grafo de interseção não-planar $\Longrightarrow$ arranjo mágico
  - A estratégia é mostrar que se o grafo de interseção G contém um grafo de interseção mágico H como um menor topológico, então G é mágico
  - Qualquer grafo não-planar contém o grafo $K_{3,3}$ ou o K_5 como um menor topológico (Pontyagin e Kuratowski)
  - Tanto o $K_{3,3}$ (quadrado 3×3) quanto o K_5 (pentagrama) são mágicos

Definição 8 (Menor Topológico)

Um grafo H é um menor topológico de G se G contém um subgrafo isomórfico a uma subdivisão de H. Equivalentemente, existe um mapeamento ϕ injetivo de cada vértice $v \in H$ para um vértice $\phi(v) \in G$, e de cada aresta $(u, v) \in H$ para um caminho simples entre $\phi(u) e \phi(v)$ em G, tal que os caminhos são disjuntos (com exceção das extremidades u e v).

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
  4. Rotule as demais arestas de G com $+I$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
  4. Rotule as demais arestas de G com $+I$
- Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
  4. Rotule as demais arestas de G com $+I$
- Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmo observáveis tocados por $v \in H$, mais I's $\implies$ os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$

□

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
  4. Rotule as demais arestas de G com $+I$
- Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmo observáveis tocados por $v \in H$, mais I's $\implies$ os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$
- Cada vértice de G em um caminho entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$ toca dois vértices rotulados com o mesmo observável, e cópias de $I \implies$ comutam e multiplicam para $+I$

$\square$

Teorema 3 (Caracterização por Grafo Planar)

- Vamos construir uma realização quântica de G a partir da realização de H
  1. Para cada $v \in H$, assuma $\ell_G(\phi(v)) = \ell_H(v)$
  2. Assuma que os vértices restantes de G são rotulados com $+1$
  3. Para cada aresta $e \in H$ tal que $c_H(e) = M$, rotule cada aresta e_i no caminho correspondente em G com o mesmo observável M; i.e. $c_G(e_i) = c_H(e)$
  4. Rotule as demais arestas de G com $+I$
- Cada medição M em G ou está em H ou $M = I \implies M = M^*$ e $M^2 = M$
- Cada vértice de $\phi(v) \in G$ toca os mesmo observáveis tocados por $v \in H$, mais I's $\implies$ os observáveis comutam e multiplicam para $\ell_H(v)I = \ell_G(\phi(v))I$
- Cada vértice de G em um caminho entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$ toca dois vértices rotulados com o mesmo observável, e cópias de $I \implies$ comutam e multiplicam para $+I$
- Os vértices restantes tocam apenas I's $\implies$ comutam e multiplicam para $+I$

$\square$