Práctica 4

Cálculo de probabilidades y simulación

El menú *Distribuciones* de *R Commander* contiene un amplio conjunto de distribuciones de probabilidad, agrupadas en discretas y continuas. Para cada una de ellas, hay cuatro posibilidades:

- *Cuantiles.* Es el menor valor c tal que $\Pr(X \le c) \ge p$ (cola inferior o izquierda) o que $\Pr(X > c) \le p$ (cola superior o derecha).
- *Probabilidades.* En variables discretas, da los valores de la función de probabilidad, es decir, $\Pr(X = k)$ para cierto k. En variables continuas, da la probabilidad acumulada (función de distribución).
- *Probabilidades acumuladas*. Dado un valor k, calcula la probabilidad $\Pr(X \le k)$ (cola izquierda) o $\Pr(X > k)$ (cola derecha).
- *Grafica.* Dibuja la grafica de la función de densidad (para variables continuas) o de probabilidad (para discretas), o bien la función de distribución.
- *Muestra*. Permite generar un nuevo conjunto de datos aleatorio indicando los parámetros de la distribución y las cantidades de filas y columnas deseadas (*simular un muestra de la v.a.*). Según la ventana de diálogo, las filas corresponden a muestras y las columnas a observaciones. Si queremos hacerlo al revés, de forma que las filas se correspondan con los individuos de cada muestra (la interpretación habitual), introduciremos un 1 en *número de observaciones (columnas)* y el tamaño de la muestra en *número de muestras (filas)*.

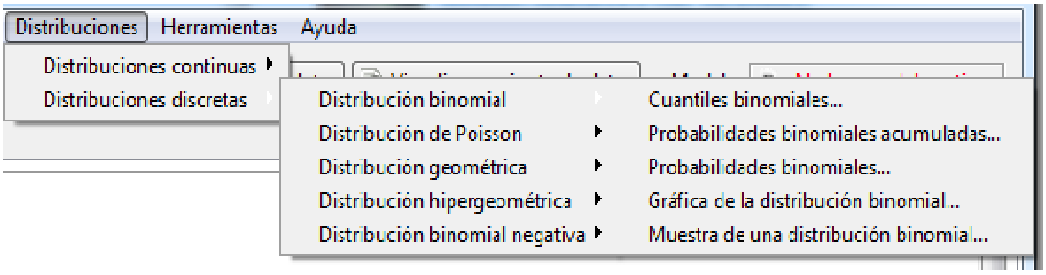
La tabla siguiente muestra los nombres en *R* de varias funciones junto con argumentos adicionales y por defecto.

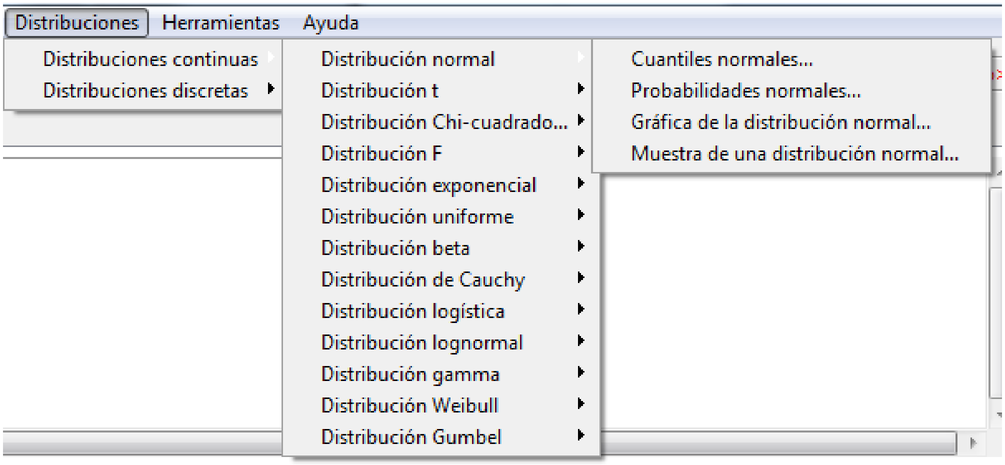
Distribución	**Nombre R**	**Argumentos adicionales**	**Argumentos por defecto**
Binomial	binom	Size (n), prob (p)	
Uniforme continua	unif	min (a), max (b)	min = 0, max = 1
Exponencial	exp	rate (λ= 1/μ)	rate = 1
Normal	norm	mean (μ), sd (σ)	mean = 0, sd = 1
Poisson	pois	lambda (λ)	
Weibull	weibull	shape (α), scale (β)	scale = 1

A cada nombre de función dado por *R* se le agrega un prefijo "d" para obtener el valor de la función de densidad (v.a. continua) o de la función de probabilidad (v.a. discreta), "p" para calcular el valor de la función de distribución, "q" para obtener los percentiles y "r" para generar variables pseudo-aleatorias. La sintaxis es la siguiente:

```
dnombre(c, ...) #  calcula  el valor de la función de probabilidad o de  la función de densidad en c
pnombre (c, ...) #  calcula el valor de  la función de distribución en c
qnombre(p, ...) # proporciona  el p-ésimo  percentil
rnombre(n, ...) # simula n observaciones
```

donde *nombre* indica el nombre de cualquiera de las distribuciones, *c* es un vector de valores de la v.a., *p* es un vector de probabilidades y *n* es un valor entero.





1. Cálculo de probabilidades

1.1. Variables aleatorias discretas

R te proporciona las probabilidades $\Pr(X \leq k)$ (cola izquierda, incluye el valor k) y $\Pr(X > k)$ (cola derecha, no incluye el valor k). Si X es una variable aleatoria discreta, para obtener las probabilidades $\Pr(X < k)$ o $\Pr(X \geq k)$ debes tener en cuenta que $\Pr(X < k) = \Pr(X \leq k\text{-}1)$ y $\Pr(X \geq k) = \Pr(X > k\text{-}1)$.

Ejemplo 4.1. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{B}(8, 0'4)$.

a) Para obtener $\Pr(X = 7)$ sigue la secuencia:
Distribuciones → ***Distribuciones discretas*** → ***Distribución binomial*** → ***Probabilidades binomiales***
y rellena la ventana emergente de la siguiente forma: *Ensayos binomiales* = 8, *Probabilidad de éxito* = 0'4 y acepta.

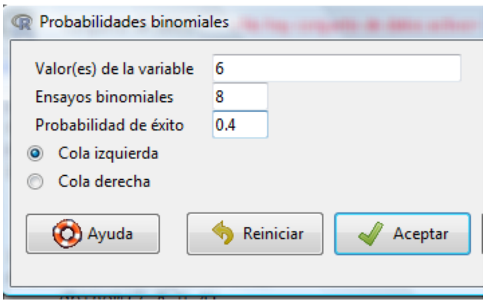
En la ventana de resultados obtienes:

	Probability	
0	0.01679616	
1	0.08957952	
2	0.20901888	
3	0.27869184	
4	0.23224320	
5	0.12386304	
6	0.04128768	
7	0.00786432	→ $\boxed{\Pr(X = 7)}$
8	0.00065536	

- También puedes obtener este resultado escribiendo en la ventana de instrucciones:

dbinom(7,size=8,prob=0.4) o   dbinom(7,8,0.4)

b) Si quieres calcular $\Pr(X \leq 6)$ sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Probabilidades binomiales acumuladas
y rellena la ventana emergente, como sigue:



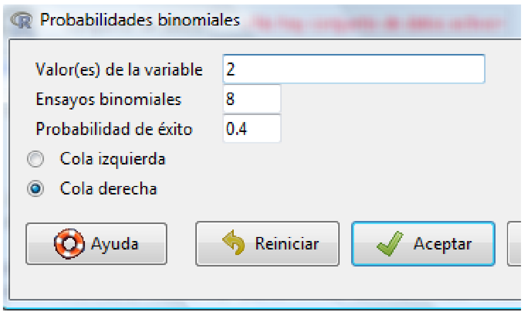
En la ventana de resultados se muestra:

> pbinom(c(6), size=8, prob=0.4, lower.tail=TRUE)

[1] 0.9914803 $\Rightarrow$ $\Pr(X \leq 6)$ = 0’9914803

c) Para calcular con *R* la probabilidad $\Pr(X \geq 3)$ tenemos que obtener la probabilidad $\Pr(X > 2)$, para ello seguimos el proceso:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Probabilidades binomiales acumuladas
y rellena la ventana emergente, como sigue:

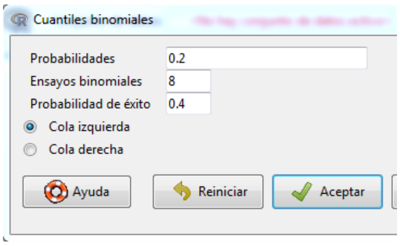


En la ventana de resultados aparece:

> pbinom(c(2), size=8, prob=0.4, lower.tail=FALSE)

[1] 0.6846054 $\Rightarrow$ $\Pr(X \geq 3)$ = 0’6846054

d) ¿Qué valor de *X* deja al menos al 20% de los valores por debajo? Nos piden el valor c tal que $\Pr(X \leq c) \geq$ 0’20 (cola inferior). Para calcular este valor sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → cuantiles
y rellena la ventana emergente, como sigue:



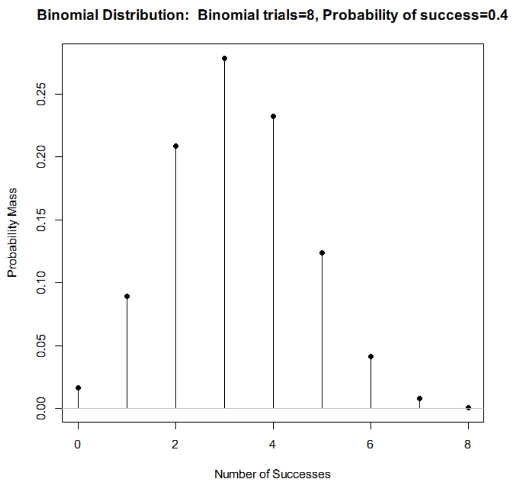
En la ventana de resultados figura:

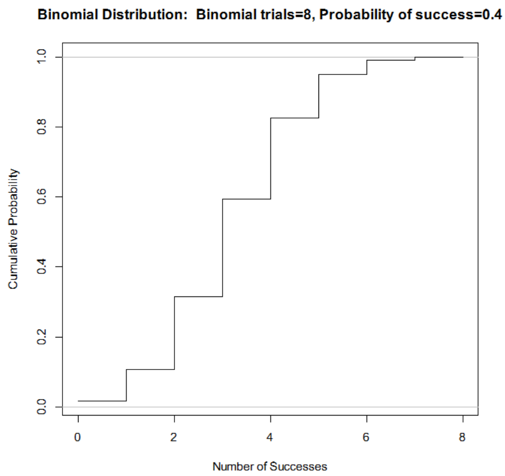
> qbinom(c(0.2), size=8, prob=0.4, lower.tail=TRUE)

[1] 2 $\Rightarrow$ *c* = 2

e) Para representar gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de *X* procede como sigue:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Grafica de la distribución binomial
rellena la ventana emergente con los valores de *n* y *p*, y selecciona la gráfica que te interesa obtener.





Ejemplo 4.2. Sea X una v.a. con distribución de Poisson de parámetro 5 ($X \equiv \mathcal{P}(5)$). Para hallar la probabilidad $\Pr(2 \le X < 7)$, en primer lugar debemos expresarla en la forma $\Pr(a < X \le b)$:

$$\Pr(2 \le X < 7) = \Pr(1 < X \le 6) = F_X(6) - F_X(1) = \Pr(X \le 6) - \Pr(X \le 1)$$

Para calcular esta probabilidad sigue la siguiente secuencia dos veces, una con *valor de la variable* = 6 y otra con *valor de la variable* = 1 y calcula la diferencia entre los resultados obtenidos:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución Poisson →Probabilidades de Poisson acumuladas

también puedes hacerlo escribiendo en la ventana de instrucciones:

probs <- ppois(c(6, 1), lambda=5, lower.tail=TRUE)

prob <- probs[1] - probs[2]; prob

o bien:

ppois(6, 5) – ppois(1,5)

En la ventana de resultados se muestra:

[1] 0.7217558 $\Rightarrow$ Pr(2 ≤ *X* < 7) = 0’7217558

1.2. Variables aleatorias continuas

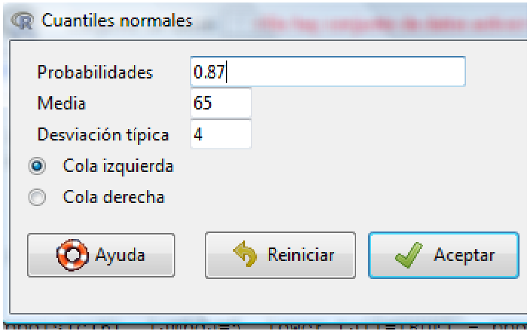
Recuerda que si *X* es una variable aleatoria continua entonces Pr(*X* = *k*) = 0.

Ejemplo 4.3. Sea *X* una v.a. con distribución N(65, 4)

a) ¿Cuál es el valor de *c* tal que Pr(*X* < *c*)=0’87?

Como *X* es una v.a. continua buscaremos el valor *c* tal que Pr(*X* ≤ *c*) = 0’87. La secuencia para calcularla es:

Distribuciones → Distribuciones continuas → Distribución normal → Cuantiles normales…



La salida de *R* es:

```
> qnorm(c(0.87), mean=65, sd=4, lower.tail=TRUE)
[1] 69.50556
```

$\Rightarrow$ *c* = 69’50556

b) Halla Pr(52 < X < 75). Ya que Pr(52 < X < 75) = Pr(52 < X ≤ 75) = Pr(*X* ≤ 75) - Pr(*X* ≤ 52)

Escribe en la ventana de instrucciones:

```
probs <- pnorm(c(75, 52), mean=65, sd=4, lower.tail=TRUE)
prob <- probs[1] - probs[2]; prob
```

o bien:

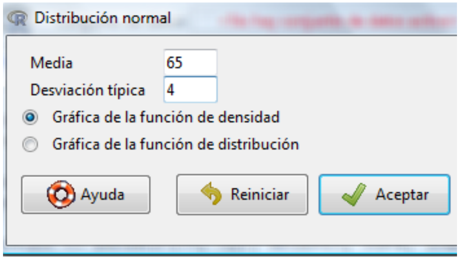
```
pnorm(75, 65, 4) - pnorm(52, 65, 4)
```

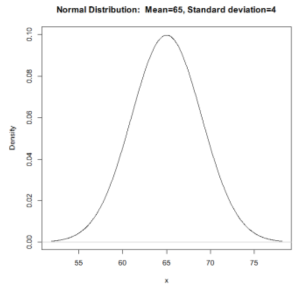
En la ventana de resultados se muestra:

[1] 0.9932133 $\Rightarrow$ Pr(52 < X < 75) = 0’9932133

c) Representa gráficamente la función de densidad de *X.* Secuencia:

Distribuciones → Distribuciones continuas → Distribución normal → Grafica de la distribución normal





2. Aproximaciones de las distribuciones $\mathcal{B}(n,p)$ y $\mathcal{P}(\lambda)$.

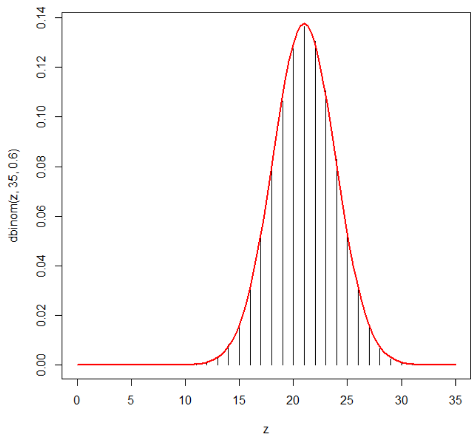
Instrucciones que podemos utilizar:

1:n   *# secuencia de 1 (primer valor) a n*
seq(1,n,i)   *# secuencia de 1 (primer valor) a n de paso i*
plot(x,y,type="h")   *# dibuja gráfico, type="h" para barras desde el eje de abscisas*
points(x,f(x),col="red")   *# dibuja gráfico de puntos*
curve(f(x),add=T,col= "red")   *# dibuja la función(x), si add=T la añade al gráfico anterior*

2.1. Aproximación de la $\mathcal{B}(n,p)$ mediante $\mathcal{N}(np,sqrt(np(1\text{-}p)))$

Ejemplo 4.4. Vamos a comprobar la bondad de la aproximación de una $\mathcal{B}$(35,0’6) por una $\mathcal{N}$(35*0’6, sqrt(35*0’6*0’4)), para ello dibujamos la función de masa de probabilidad de la binomial y sobre la misma gráfica dibujamos, en color rojo, la función de densidad de la normal:

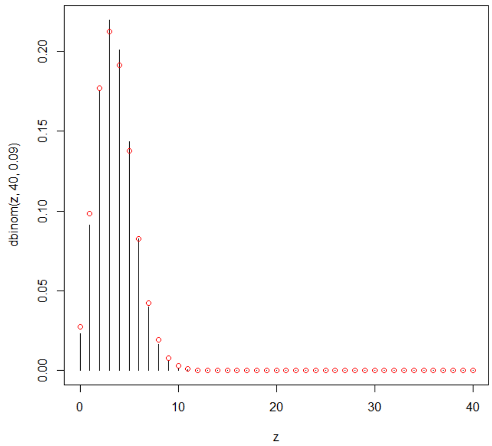
```
z <- 0:35
plot(z,dbinom(z,35,.6),type="h")
curve(dnorm(x,21,2.898),add=T,col="red",lwd=2)
```



2.2. Aproximación de la $\mathcal{B}(n,p)$ mediante $\mathcal{P}(np)$

Ejemplo 4.5. Vamos a comprobar la bondad de la aproximación de una $\mathcal{B}$(40,0’09) por una $\mathcal{P}$(3’6), para ello dibujamos la función de masa de probabilidad de la binomial y sobre la misma gráfica dibujamos, en color rojo, la función de densidad de la Poisson:

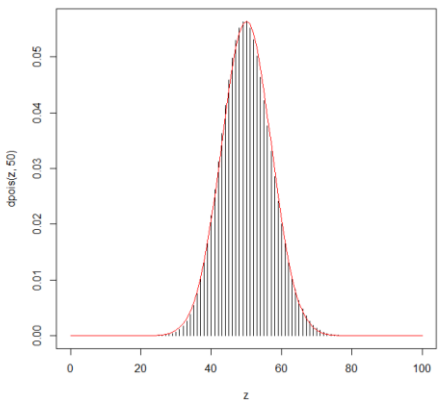
```
z <- 0:40
plot(z,dbinom(z,40,.09),type="h")
points(z,dpois(z,3.6),col="red")
```



2.3. Aproximación de la $\mathcal{P}(\lambda)$ mediante $\mathcal{N}(\lambda$,*sqrt*$(\lambda))$

Ejemplo 4.6. Comprobar la bondad de la aproximación de una $\mathcal{P}(50)$ por una $\mathcal{N}(50$, sqrt(50)), para ello dibuja la función de masa de probabilidad de la poisson y sobre la misma gráfica dibuja, en color rojo, la función de densidad de la normal

```
z <- 0:100
plot(z,dpois(z,50),type="h")
curve(dnorm(x,50,sqrt(50)),add=T,col="red")
```



3. Simulación

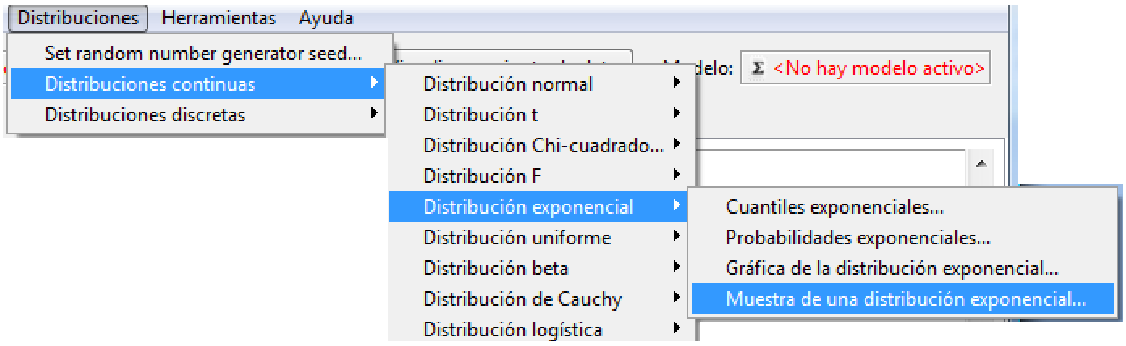
3.1. Simulación de muestras de variables aleatorias

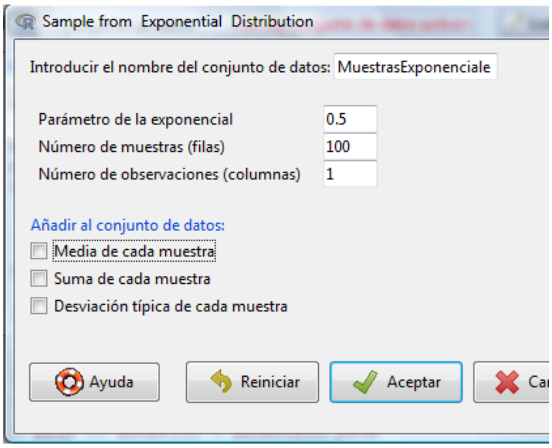
En esta sección vamos a ver cómo podemos obtener muestras de variables aleatorias mediante simulación. Pero antes veremos cuáles son las instrucciones en *R* para realizar determinadas acciones.

sample (x, tamaño, replace=TRUE,prob=NULL) *# x = población, tamaño = número de valores simulados, replace*

=TRUE (FALSE) si (no) hay reemplazamiento, probs = vector de pesos a asignar a cada uno de los posibles valores que se extraen del conjunto especificado por x. Por defecto, todos los valores resultantes de x tienen la misma probabilidad.
replicate (n, código a repetir n veces) *# devuelve un vector con n valores de código*
data.frame (A) *# hace visible desde Rcmdr el conjunto A*
set.seed (número) *# permite seleccionar la semilla para generar números pseudoaleatorios*
rbinom(m, *n,p*) *# m valores* $\mathcal{B}(n,p)$
rpois(m, λ) *# m valores* $\mathcal{P}(\lambda)$
rnorm (m, μ,σ) *# m valores* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$
rexp (m, λ) *# m valores EXP*(λ)
rweibull (m, k,λ) *# m valores de Weibull* $\mathcal{W}(k,\lambda)$
pmin (vector1, vector2) *# vector de mínimos*
pmax(vector1, vector2) *# vector de máximos*

Ejemplo 4.7. Si la distribución de la v.a. en cuestión figura entre las contenidas en el menú *Distribuciones*, el proceso es muy sencillo. Veamos el procedimiento a seguir si queremos una muestra aleatoria de una distribución exponencial de parámetro 0.5.





Las instrucciones *R* son:
MuestrasExponenciales <- as.data.frame(matrix(rexp(100*1, rate=0.5), ncol=1)) *# crea el conjunto de datos MuestrasExponenciales, éste es el nombre que asigna R por defecto en la ventana anterior*
rownames(MuestrasExponenciales) <- paste("sample", 1:100, sep="") *# denomina sample i al individuo i-ésimo de la muestra*
colnames(MuestrasExponenciales) <- "obs" *# denomina obs a la muestra*

Podemos cambiar los nombres de las filas, por ejemplo si queremos numerarlas del 1 al 100 escribimos:

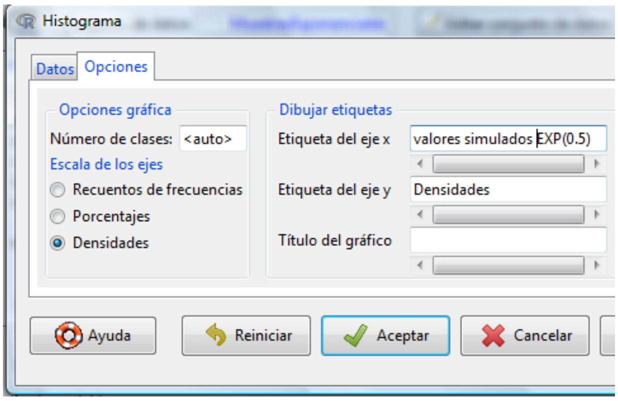
rownames(MuestrasExponenciales) <- 1:100

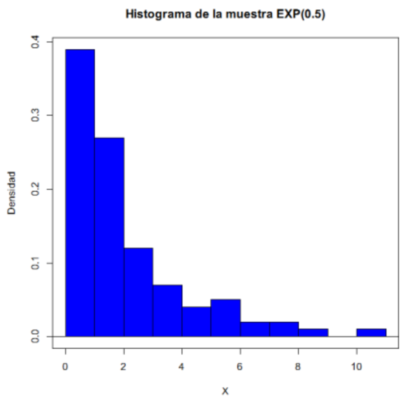
Activando el conjunto de datos *MuestrasExponenciales*, podemos obtener los resúmenes numéricos (o la distribución de frecuencias si la variables es discreta) y también las representaciones gráficas adecuadas de los datos muestrales.

Escribe en la ventana de instrucciones: print(summary(MuestrasExponenciales)), la salida es:

mean	sd	IQR	0%	25%	50%	75%	100%	n
2.019353	2.065647	2.269049	0.001240272	0.5556427	1.36122	2.824691	10.08371	100

Para obtener el histograma:





Ejemplo 4.8. Extrae con reemplazamiento una muestra aleatoria de tamaño 50 de una v.a. discreta que toma los valores 3, 4, 5 y 6 con probabilidades 0’15, 0’30, 0’20 y 0’35 respectivamente. Obtén la distribución de frecuencias y dibuja el gráfico de barras.

Solución: Escribe en la ventana de instrucciones el código siguiente

```
muestra <- sample(3:6, 50, replace = TRUE, prob = c(15,30,20,35)); muestra
frecuencia <- table(muestra); frecuencia
proporcion <- round(frecuencia/sum(frecuencia),2);proporcion
grafica <- barplot(proporcion,col="blue")
text(grafica, proporcion + 0.025, proporcion,xpd=T)
```

La salida es:
> muestra <- sample(3:6, 50, replace = TRUE, prob = c(0.15,0.30,0.20,0.35)); muestra
[1] 4 4 5 5 4 6 6 4 6 6 6 3 4 3 6 5 5 4 6 4 5 3 4 4 6 6 4 6 5 5 6 5 6 6 3 5 4 4 6 6 6 4 5 6 4 6 3 6 6 4

> frecuencia <- table(muestra); frecuencia

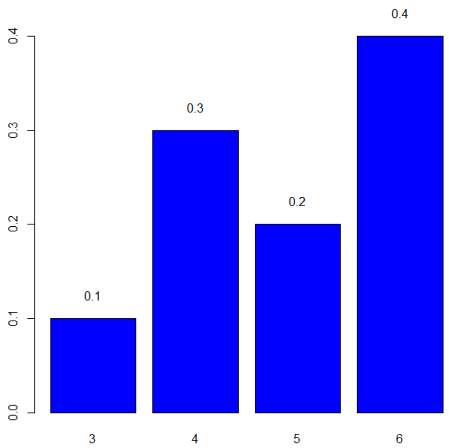
3	4	5	6
5	15	10	20

> proporcion <- round(frecuencia/sum(frecuencia),2);proporcion

3	4	5	6
0.1	0.3	0.2	0.4

> grafica <- barplot(proporcion,col="blue")

> text(grafica, proporcion + 0.025, proporcion,xpd=T)



Ejemplo 4.9. Simula el lanzamiento de 4 dados perfectos.
Solución: Escribe el siguiente código en la ventana de instrucciones:
muestra<-sample(1:6,4, r=T); muestra   # lanzamiento de cuatro dados

La salida es:
> muestra<-sample(1:6,4, r=T);muestra   # lanzamiento de cuatro dados
[1] 5 3 4 1

3.2. Simulación de sistemas

A continuación vamos a ver cómo podemos simular sistemas.

Ejemplo 4.10. Simula la distribución de la suma de los números que obtenidos al lanzar 4 dados, para ello simula 10000 valores de la suma y después representálos gráficamente y obtén la tabla de frecuencias y porcentajes y los resúmenes numéricos.
Solución: Escribe el siguiente código en la ventana de instrucciones:
sumas <- replicate(10000,sum(sample(1:6,4, r=T))) *# devuelve vector con 10000 valores resultado de*

la suma de las caras obtenidas al lanzar 10000 veces cuatro dados (sample(1:6,4, r=T))

datosSuma <- data.frame(sumas) *# para poder seleccionarlo como conjunto de datos activo y así poder representarlos gráficamente (gráfico barras) y obtener los resúmenes numéricos*

numSummary(datosSuma$sumas, statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"), quantiles=c(0,.25,.5,.75,1)) *#resúmenes numéricos*

fsumas <- datosSuma$fsumas <- as.factor(datosSuma$sumas) *#convierte sumas en factor para dibujar el diagrama de barras*

frecuencia <- table(datosSuma$fsumas); frecuencia

porcentaje <- 100*frecuencia/sum(frecuencia);porcentaje

barplot(frecuencia,xlab="suma caras 4 dados", ylab="Frecuencia", col="green")

Salida:

mean	sd	IQR	0%	25%	50%	75%	100%	n
13.9958	3.402079	4	4	12	14	16	24	10000

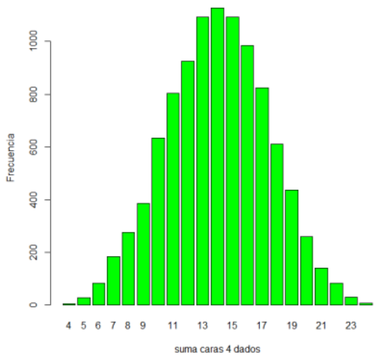
> frecuencia <- table(datosSuma$fsumas); frecuencia

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
4	26	83	183	274	386	634	803	926	1093	1127	1092	986	824	610	436	259	139	82	28	5

> porcentaje <- 100*frecuencia/sum(frecuencia);porcentaje

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0.04	0.26	0.83	1.83	2.74	3.86	6.34	8.03	9.26	10.93	11.27	10.92	9.86	8.24	6.10	4.36	2.59	1.39

22	23	24
0.82	0.28	0.05



Ejemplo 4.11. Considérese una partición de 1 GiB de tamaño. Se pretende formatear usando el sistema de ficheros SimplonFS, el cual divide la partición en bloques de tamaño TB, de forma que un fichero de tamaño TF ocupa *ceiling(TF/TB)* bloques, por lo que se desperdician *TB – TF%%TB* octetos sitos en el último bloque ocupado por el fichero. (Notación: %% *# indica el resto de la división* y ceiling *# redondea al entero superior*)

Se duda si utilizar un tamaño de bloque de 2 KiB o de 8 KiB. Con TB = 2048 se ahorraría espacio en el disco, pero los accesos serían más lentos que con TB = 8192. Para ayudar en la decisión, se pretende estimar la cantidad de espacio ahorrado suponiendo que se pretenden almacenar 1.000 ficheros cuyos tamaños en octetos siguen una distribución exponencial de esperanza 100.000.

a) ¿Cuánto espacio se ahorra usando TB=2048 frente a TB=4096?

b) ¿Qué ocurriría si hubiera que almacenar 10.000 ficheros?

Solución:

a) Escribe el siguiente código en la ventana de instrucciones:

```
t.particion <- 1024^3            # tamaño en octetos
t.bloque    <- 8192              # tamaño del bloque (octetos)
n.ficheros  <- 1000              # número de ficheros
t.medio     <- 100000            # tamaño medio del fichero (octetos)
simulacionV <- replicate (1000,      # vector con valores simulados de p.libre
                {
                       t.fichero   <- rexp (n.ficheros, 1 / t.medio)    # generamos  tamaño ficheros
                       b.ocupados  <- sum (ceiling (t.fichero / t.bloque))  # bloques ocupados
                       b.libres    <- t.particion / t.bloque - b.ocupados   # bloques libres
                       if (b.libres < 0) stop("¡No caben en el disco los ficheros!")
                       t.libre <- t.bloque * b.libres   # espacio libre en la partición
                       p.libre <- 100*(t.libre / t.particion) # porcentaje espacio libre en la partición
                })
print (summary (simulacionV))         # resumen numérico
simulacionDF <- data.frame (simulacionV)  # para acceder desde Rcmdr
```

Salida:

Si TB = 8192, la media = 90'31 $\Rightarrow$ porcentaje espacio libre = 90'31%

Si TB = 2048, la media = 90'58 $\Rightarrow$ porcentaje espacio libre = 90'58%

Se observa que casi no hay diferencia entre los 2 tamaños de bloque.

b) Si nº de ficheros = 10.000 entonces:

Si TB = 8192, la media = 2'9950 $\Rightarrow$ porcentaje espacio libre = 2'99%

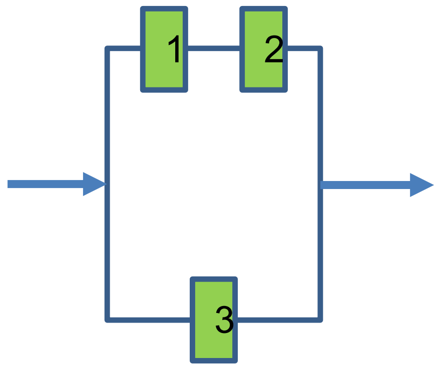
Si TB = 2048, la media = 5'877 $\Rightarrow$ porcentaje espacio libre = 5'88%

Ahora las diferencias son más notables (casi un 3%) y, de hecho, el valor de TB influye mucho en la probabilidad de que la partición se llene.

3.3. Fiabilidad

En esta sección vamos a estudiar la fiabilidad de sistemas utilizando la simulación para generar los tiempos de vida de las componentes del sistema.

Ejemplo 4.12. Estima la vida esperada del sistema siguiente en el que los tiempos de vida (en años) de las componentes se distribuyen de acuerdo a: vida1 ≡ Exp(0'1), vida2 ≡ Exp(0'15) y vida3 ≡ $\mathcal{W}$(1,0'13). Proporciona una estimación de la probabilidad de que el sistema no falle antes de 5 años.



Solución: Escribe el código siguiente:
n <- 1000
vida1 <- rexp(n, rate=0.1)   # *simulamos n valores del tiempo de vida de la componente 1*
vida2 <- rexp(n, rate=0.15) # simulamos n valores del tiempo de vida de la componente 2
vida3 <- rweibull(n, shape=1, scale=0.13) # *simulamos n valores del tiempo de vida de la componente 3*
vidaS <- pmax(vida3,pmin(vida1,vida2)) # *simulamos n valores del tiempo de vida del sistema*

vida_media <- mean(vidaS); vida_media   #*estimación puntual de la vida media del sistema*
probabilidad <- mean(vidaS >= 5); probabilidad

En lugar de escribir las dos últimas instrucciones, podríamos hacer lo siguiente:
ejecutar la instrucción
    datos.vidas <- data.frame(vidaS)
poner *datos.vidaS* como conjunto activo
obtener la media a partir de *estadísticos, resúmenes, resúmenes numéricos*
filtrar *datos.vidaS* utilizando la condición *vidaS >= 5*
y como la estimación de la probabilidad es la proporción muestral, es decir,   el número de filas del conjunto filtrado/n
ejecutamos
   probabilidad <- nfilas/n; probabilidad

Salida:
> vida_media <- mean(vidaS); vida_media
[1] 4.015712
> probabilidad <- mean(vidaS > 5); probabilidad
[1] 0.28913

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Un examen tipo test tiene 10 preguntas y cada pregunta tiene 4 respuestas, siendo correcta sólo una de ellas. Si un estudiante no conoce la respuesta correcta de ninguna cuestión y contesta aleatoriamente, queremos saber:

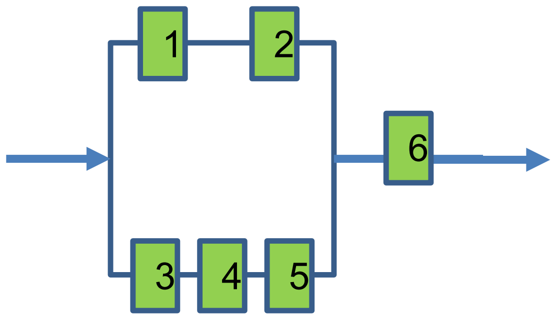
a) ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente a todas las preguntas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente como mucho a 8 preguntas?
c) Si se aprueba el examen cuando se responden correctamente al menos 5 cuestiones, ¿cuál es la probabilidad de que pase un alumno que ha contesta aleatoriamente?
d) Si cada respuesta correcta vale 1 punto ¿a partir de que puntuación está como mucho el 2% de las notas más altas?
e) Representa gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de *X*.

Ejercicio 2. El número de peticiones por minuto a un servidor horario NTP sigue un proceso de Poisson de media 2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el servidor reciba por lo menos 4 peticiones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el servidor reciba al menos una petición?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el número de peticiones recibidas sea superior a 2 e inferior a 6?

Ejercicio 3. Sabiendo que la demanda de gasolina durante un cierto período de tiempo se comporta con arreglo a la ley normal de media 150000 litros y desviación típica 10000 litros, determinar la cantidad que hay que tener dispuesta a la venta en dicho período para poder satisfacer la demanda con una probabilidad de 0.95.

Ejercicio 4. Estima la vida esperada del sistema siguiente en el que los tiempos de vida (en años) de las componentes se distribuyen de acuerdo a: vida1 ≡ Exp(1/30), vida2 ≡ $\mathcal{W}$(0'5,14), vida3 ≡ $\mathcal{W}$(0'25,1), vida4 ≡ Exp(1/35), vida5 ≡ Exp(1/32) y vida6 ≡ $\mathcal{W}$(10,30). Estima la probabilidad de que el sistema falle antes de 3 años.



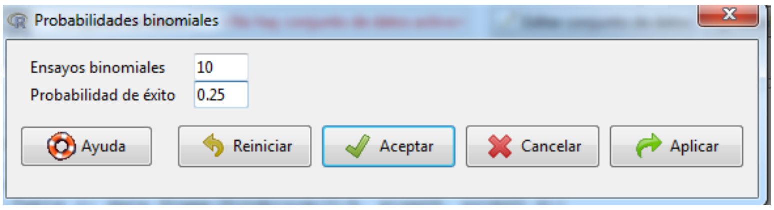
Soluciones

Ejercicio 1.

Define la v.a. X = *nº de respuestas correctas en el test*. Como sólo es correcta una de las cuatro posibles respuestas, la probabilidad de responder correctamente a una pregunta es 0'25. Por tanto la v.a. X sigue una distribución binomial, $X \equiv \mathcal{B}(10, 0'25)$.

a) *¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente a todas las preguntas?* Nos piden Pr(X = 10). Para calcular esta probabilidad sigue la secuencia:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Probabilidades binomiales
y rellena la ventana emergente, como sigue:



En la ventana de resultados obtienes:

> .Table <- data.frame(Pr=dbinom(0:10, size=10, prob=0.25))
> rownames(.Table) <- 0:10
> .Table

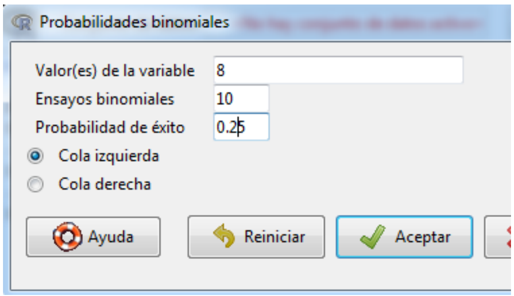
	Pr
0	5.631351e-02
1	1.877117e-01
2	2.815676e-01
3	2.502823e-01
4	1.459980e-01
5	5.839920e-02
6	1.622200e-02
7	3.089905e-03
8	3.862381e-04
9	2.861023e-05
10	**9.536743e-07** → Pr(X = 10)

> remove(.Table)

- También puedes obtener este resultado escribiendo en la ventana de instrucciones:

  dbinom(10,size=10,prob=0.25) o dbinom(10,10,0.25)

b) *¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente como mucho a 8 preguntas?* Nos piden Pr($X \leq$ 8). Para calcular esta probabilidad sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Probabilidades binomiales acumuladas
y rellena la ventana emergente, como sigue:



En la ventana de resultados obtienes:

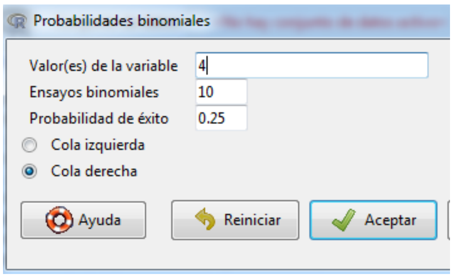
> pbinom(c(8), size=10, prob=0.25, lower.tail=TRUE)

[1] 0.9999704

c) *Si se aprueba el examen cuando se responden correctamente al menos 5 cuestiones, ¿cuál es la probabilidad de que pase un alumno que ha probado suerte?* Nos piden Pr($X \geq$ 5), pero esta probabilidad es igual a Pr($X >$ 4). Para calcular esta probabilidad sigue la secuencia:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Probabilidades binomiales acumuladas

y rellena la ventana emergente, como sigue:



En la ventana de resultados obtienes:

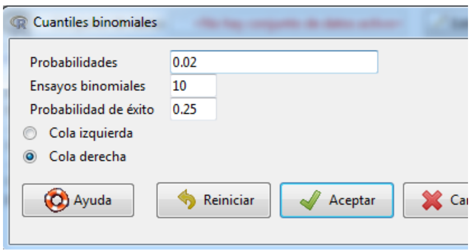
> pbinom(c(4), size=10, prob=0.25, lower.tail=FALSE)

[1] 0.07812691

d) *Si cada respuesta correcta vale 1 punto ¿a partir de que puntuación está como mucho el 2% de las notas más altas?* Nos piden la puntuación *c* que deja por encima el 2% de las notas más altas, Pr[$X > c$] ≤ 0'02 (cola superior o derecha). Para calcular esta puntuación sigue la secuencia:

Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → cuantiles

y rellena la ventana emergente, como sigue:

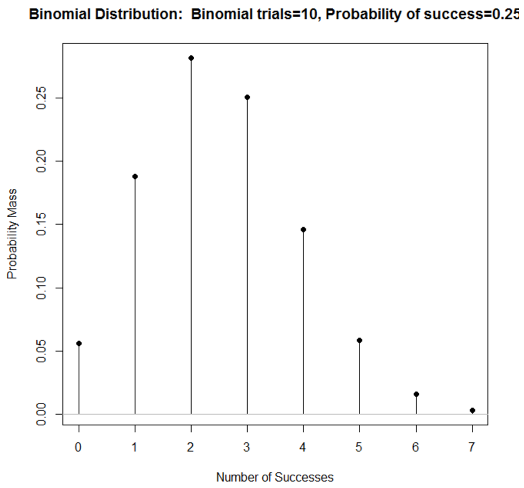


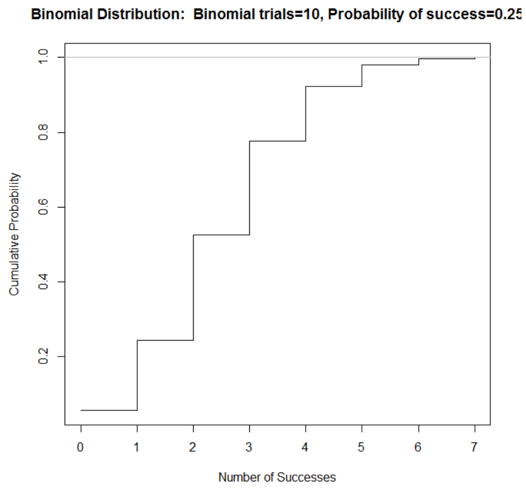
En la ventana de resultados obtienes:

> qbinom(c(0.02), size=10, prob=0.25, lower.tail=FALSE)

[1] 5 $\Rightarrow c = 5$

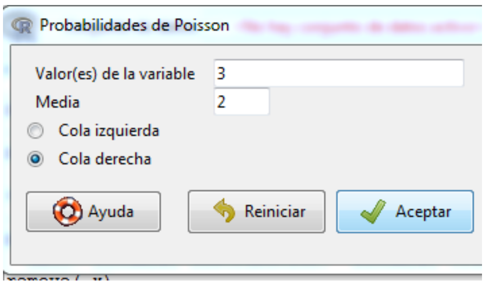
e) *Representa gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de X.* sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución binomial → Grafica de la distribución binomial
y rellena la ventana emergente con los valores de n y p, y selecciona la gráfica que te interesa obtener.





Ejercicio 2. Define la v.a. X = *nº de peticiones por minuto a un servidor horario NTP*. Sabemos que X sigue una distribución de Poisson de media 2, es decir $X \equiv \mathcal{P}(2)$.

a) *¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el servidor reciba por lo menos 4 peticiones?*
Nos piden $\Pr(X \geq 4)$. Para calcular esta probabilidad sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución Poisson → Probabilidades de Poisson acumuladas
Como la cola superior nos proporciona $\Pr(X > k)$ debes tomar $k = 3$ y rellenar la ventana emergente como sigue:



En la ventana de resultados obtienes:

> ppois(c(3), lambda=2, lower.tail=FALSE)

[1] 0.1428765

b) *¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el servidor* reciba al menos una petición? Nos piden $\Pr(X \geq 1) = \Pr(X > 0)$. Para calcular esta probabilidad sigue la secuencia:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución Poisson → Probabilidades de Poisson acumuladas

y rellena la ventana emergente tomando como *valor(es) de la variable* : 0, *Media*:2 , marca *Cola derecha*. En la ventana de resultados obtienes:

> ppois(c(0), lambda=2, lower.tail=FALSE)
[1] 0.8646647

Otra forma de hacerlo: $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0)$. En este caso la secuencia es:
Distribuciones → Distribuciones discretas→ Distribución Poisson →Probabilidades de Poisson
Rellena la ventana emergente con Media = 2. El resultado es:

> .Table <- data.frame(Pr=dpois(0:8 , lambda = 2))
> rownames(.Table) <- 0:8
> .Table

	Pr	
0	0.1353352832	$\Pr(X = 0)$
1	0.2706705665	
2	0.2706705665	
3	0.1804470443	
4	0.0902235222	
5	0.0360894089	
6	0.0120298030	
7	0.0034370866	
8	0.0008592716	

> remove(.Table)

Entonces $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0)$

> 1- 0.1353352832
[1] 0.8646647

- También puedes obtener este resultado escribiendo en la ventana de instrucciones:
  1 - dpois(0,lambda=2) o 1 - dpois(0,2)

c) *¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera el número de peticiones recibidas sea superior a 2 e inferior a 6?* Nos piden $\Pr(2 < X < 6) = \Pr(X < 6) – \Pr(X \leq 2) = \Pr(X \leq 5) – \Pr(X \leq 2)$.
Escribe en la ventana de instrucciones:

probs <- ppois(c(5, 2), lambda=5, lower.tail=TRUE)

prob <- probs[1] - probs[2]; prob

[1] 0.30676

Ejercicio 3. Sabiendo que la demanda de gasolina durante un cierto período de tiempo se comporta con arreglo a la ley normal de media 150.000 litros y desviación típica 10.000 litros, determinar la cantidad que hay que tener dispuesta a la venta en dicho período para poder satisfacer la demanda con una probabilidad de 0'95. Sea X = *demanda de gasolina durante un cierto período de tiempo*, $X \equiv \mathcal{N}(150000{,}10000)$. Nos piden el valor c tal $\Pr(X \leq c) = 0'95$.
> qnorm(c(0.95), mean=150000, sd=10000, lower.tail=TRUE)

[1] 166448.5

Ejercicio 4. Escribe en la ventana de instrucciones el código siguiente:

```
n <- 100000
vida1 <- rexp(n, rate=1/30)
vida2 <- rweibull(n, shape=0.5, scale=14)
vida3 <- rweibull(n, shape=0.25, scale=1)
vida4 <- rexp(n, rate=1/35)
vida5 <- rexp(n, rate=1/32)
vida6 <- rweibull(n, shape=10, scale=30)
vidaS <- pmin(vida6, pmax(pmin(vida1,vida2), pmin (vida3,vida4,vida5)))
vida_media <- mean(vidaS); vida_media
probabilidad <- mean(vidaS < 3); probabilidad
```

Salida:

```
> vida_media <- mean(vidaS); vida_media
[1] 9.69932
> probabilidad <- mean(vidaS < 3); probabilidad
[1] 0.33371
```