Iperbole

Definizione: *luogo geometrico di punti per cui la differenza tra le distanze di due punti fissi, detti fuochi, è costante*

Equazione

- Siano $F_1 = \left(x_1\, y_1\right), F_2 = \left(x_2\, y_2\right)$ i fuochi, allora $\forall P = (x\, y)$ abbiamo: $d\left(P, F_1\right) - d\left(P, F_2\right) = k$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x - x_1\right) + \left(y - y_1\right)} - \sqrt{\left(x - x_2\right) + \left(y - y_2\right)} = k$$

Se $y_1 = y_2 = 0$ e $x_1 = - x_2$:

- Ip: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$

- $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$

- Vertici: $V_1 = (- a, 0), V_2 = (a, 0)$

- Asse trasverso: $d\left(V_1, V_2\right) = 2a$

- Asse non trasverso: $2b$

- Se $F_1 = (c, 0), F_2(-c, 0)$ allora l'asse focale: $2c, \quad c > 0$

- $c^2 = a^2 + b^2$

- Eccentricità: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$

Se $y_1 = -y_2$ e $x_1 = x_2 = 0$:

- Ip: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a, b > 0$

- $x = 0 \Longrightarrow y = \pm b$

- Vertici: $V_1 = (0, b), V_2 = (0, -b)$

- Asse trasverso: $d\left(V_1, V_2\right) = 2b$

- Asse non trasverso: $d\left(V_1, V_2\right) = 2a$

- Se $F_1 = (0\ c), F_2(0\ -c)$ allora l'asse focale: $2c, \quad c > 0$

- $c^2 = a^2 + b^2$

- Eccentricità: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} > 1$

Asintoti

Se $y_1 = y_2 = 0$ e $x_1 = -x_2$:

- $y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \approx_{x\to\infty} \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} = \pm\frac{b}{a}|x|$

- Asintoti: $y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$

Se $y_1 = -y_2$ e $x_1 = x_2 = 0$:

- $y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} \approx_{x\to\infty} \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} = \pm\frac{b}{a}|x|$

- Asintoti: $y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$

Iperbole equilatera

- $b = a$

- Asintoti: $y = x \qquad y = -x$

- Asintoti perpendicolari tra loro

Iperbole traslata

- Vettore spostamento: $\vec{v} = \left(x_c, y_c\right)$

- Equazione:

  - Se inizialmente $y_1 = y_2 = 0$ e $x_1 = -x_2$

$$\frac{\left(x-x_c\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-y_c\right)^2}{b^2} = 1$$

  - Se inizialmente $y_1 = -y_2$ e $x_1 = x_2 = 0$

$$\frac{\left(x-x_c\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-y_c\right)^2}{b^2} = -1$$

Distinguere tra iperbole ed ellisse

- L'iperbole ha segni di x^2 e y^2 discordi, mentre nell'ellisse hanno segni concordi

- $\frac{(x-x_c)^2}{f_1(k)} + \frac{(y-y_c)^2}{f_2(k)} = \pm\ 1$ è iperbole $\Leftrightarrow f_1(k) f_2(k) < 0$

- $\frac{(x-x_c)^2}{f_1(k)} + \frac{(y-y_c)^2}{f_2(k)} = \pm\ 1$ è ellisse $\Leftrightarrow f_1(k) f_2(k) > 0$

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

- Rotazione di 45^o

- I fuochi si trovano sulla retta $y = x \Longrightarrow F_1 = - F_2 = (k\ k)$
- $a = b \Longrightarrow c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \Longrightarrow k = a$

- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Longrightarrow xy = \frac{a^2}{2} = h$

- $V_1 = - V_2 = (t\ t) \Longrightarrow t^2 = \frac{a^2}{2} \Longrightarrow t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{h}$

- Rotazione di $-45^{o} \Rightarrow h < 0 \wedge V_1 = -V_2 = (t \ \ -t\ )$

Funzione omografica

- Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti spostata di $\vec{v} = \left(x_c\, y_c\right)$

Equazione:

- $y - y_c = \frac{h}{x-x_c} \Rightarrow y = \frac{h+y_c x - y_c x_c}{x-x_c}$

- Moltiplico sopra e sotto per una costante $c \neq 0$ e chiamo $cy_c = a; c\left(h - x_c\right) = b; -cx_c = d \Rightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d}$

- $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ è funzione omografica $\Leftrightarrow \{c \neq 0\ ad - bc \neq 0$

Asintoti:

- Verticale: $x = -\frac{d}{c}$

- Orizzontale: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \ \ = \frac{a}{c}$