Equazioni in C

Definizione: *equazione in cui l'incognita è un numero complesso*

Teorema fondamentale dell'algebra

Enunciato:

- Un'equazione di grado n come $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ ha esattamente n soluzioni nei numeri complessi, contate le molteplicità.

Conseguenze:

- SI può sempre riscrivere un'equazione come: $\left(x - c_0\right)^{k_0} \cdot ... \cdot \left(x - c_m\right)^{k_m} = 0$ con $m \le n$
- La molteplicità di una soluzione si riferisce all'esponente k_i

Radici dell'unità

Risoluzione:

- $x^n = 1$
- $1 = e^{(0+2k\pi)i} = e^{2k\pi i}$

- $x = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^{2k\pi i}} = e^{2\frac{k}{n}\pi i}$

- Quindi le soluzioni sono quello che otteniamo quando facciamo variare k tra 0 e $n - 1$ poiché dopo n volte si torna al punto iniziale: $\left(e^{2\frac{k}{n}\pi i}\right)^n = e^{2k\pi i} = 1$ (ricordare che le soluzioni successive [ex: $k = n$] rientrano nella periodicità)

- Graficamente equivale a suddividere una circonferenza di raggio 1 in n angoli uguali a partendo dall'asse x.

Equazioni del tipo $x^n = c$ con $c \in C$

Risoluzione:

- $c = a + ib = r[\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)] = re^{i(\vartheta + 2k\pi)}$

- $x^n = re^{i(\vartheta+2k\pi)} \implies x = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\vartheta}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

- Graficamente equivale a suddividere una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$ in n parti uguali a partire dall'angolo $\frac{\vartheta}{n}$.