Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$ Matrice 2·2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 3\cdot5-(-2)\cdot4 =$$

$$= 15+8 = 23 \neq 0$$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 1\cdot5-(-2)\cdot6 =$$

$$= 5+12 = 17$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 3\cdot6-1\cdot4 =$$

$$= 18-4 = 14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{17}{23}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{23}$$

M. Riduzione

$$6\cdot\begin{cases} 2x+7y=3 \\ 12x+15y=1 \end{cases}$$

m.c.m $(2,12)=12$

$$\begin{cases} 12x+42y=18 \\ 12x+15=1 \end{cases}$$ $-$

$$27y=17$$

$$y=\frac{17}{27}$$

M. Cramer

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2\cdot & a_1x+b_1y=c_1 \\ b_1\cdot & a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1b_2x+\underline{b_1b_2y}=b_2c_1 \\ a_2b_1x+\underline{b_1b_2y}=b_1c_2 \end{cases}$$

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1-b_1c_2$$

$$x(a_1b_2-a_2b_1) = b_2c_1-b_1c_2$$

Se $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ allora

$$x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$D = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

$$\frac{D_x}{D}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix} \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \end{cases}$$

$$a_2 b_1 y - a_1 b_2 y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$y (a_2 b_1 - a_1 b_2) = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{-(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

Importante!! TUTTO VALE se $D \neq 0$

Sistema indeterminato

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{3}{2} x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$0x + 0y = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

sistema impossibile

$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ \frac{3}{2}x+y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+2y=14 \end{cases}$

$0x+0y=-13$

Se $D=0$ allora il sistema può essere sia indeterminato sia impossibile

Se $D=0$ e almeno uno tra D_x e $D_y \neq 0$ allora il sistema è impossibile

Se $D=0$ e tutti e due D_x e $D_y=0$ allora il sistema è indeterminato

Se $D_x=D_y=0$ e $D=0$

$D_x=c_1b_2-b_1c_2=0 \quad c_1b_2=b_1c_2 \rightarrow \frac{c_1\cancel{b_2}}{\cancel{b_2}c_2}=\frac{b_1\cancel{c_2}}{b_2\cancel{c_2}} \quad \frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}$

$D_y=a_1c_2-a_2c_1=0 \quad a_1c_2=a_2c_1 \rightarrow \frac{a_1\cancel{c_2}}{a_2\cancel{c_2}}=\frac{\cancel{a_2}c_1}{\cancel{a_2}c_2} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$D=a_1b_2-a_2b_1=0 \quad a_1b_2=a_2b_1 \rightarrow \frac{a_1\cancel{b_2}}{a_2\cancel{b_2}}=\frac{\cancel{a_2}b_1}{\cancel{a_2}b_2} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad D=0 \iff \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

Se e solo se $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ sistema indeterminato

Se e solo se $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ sistema impossibile

es.

$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$ indeterminato

es.

$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$ impossibile

Es.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{27}{2}x + 9y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

indeterminato

Es.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ \frac{27}{2}x + 9y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Determinato

Es.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 8x + 4y = 6 \end{cases}$$

Indeterminato (Rette coincidenti)

Impossibile (Rette parallele)

Determinato (Rette incidenti)

Es.

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

$$3x - 1 = \frac{2}{3}x - 1$$

$$-3x - \frac{2}{3}x = 0$$

$$x = 0$$