Serie

Definizione: *la somma di n elementi di una successione si indica con s_n. La somma di tutti gli elementi della successione è invece S.*

Notazione

- $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n$

Numeri triangolari

- $T_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ è la somma dei primi n-numeri, o alternativamente l'n-esimo numero triangolare

Carattere di una serie

Casi

- Se S è un numero finito, si dice che S è una serie convergente

- Se S tende a $+\infty$, si dice che S è una serie divergente positivamente

- Se S tende a $-\infty$, si dice che S è una serie divergente negativamente

- Se s_n non esiste, si dice che S è una serie indeterminata

Calcolo

- Deve valere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Se conosciamo una formula per $s_n = f(n)$ possiamo calcolare $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} f(n)$

Proprietà e criteri di convergenza

Proprietà di base

- Se $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$ converge

- Se $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)$ converge

Confronti

- Date due successioni $a_n \leq b_n$ i cui termini siano tutti positivi:
  - Se $s_b = \sum b_n$ converge, allora anche $s_a = \sum a_n$ converge
  - Se $s_a = \sum a_n$ non converge, allora anche $s_b = \sum b_n$ non converge

- Date due successioni $a_n,\ b_n$ i cui termini siano tutti positivi
  - Se $\frac{a_n}{b_n} \neq 0$ è finito, allora entrambe le serie hanno stesso carattere
  - Se $\frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge allora anche $\sum a_n$ converge
  - Se $\frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge allora anche $\sum a_n$ diverge

Moltiplicare per una potenza

- Sia a_n una successione, prendiamo $L = \lim_{n\to\infty} n^p a_n$ allora:

- $L \in R\backslash\{0\} \wedge p > 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $L \in R\backslash\{0\} \wedge p \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $L = 0 \wedge p > 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $L = 0 \wedge p \leq 1$ non implica niente
- $L = +\infty \wedge p \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Criterio della radice

- Sia a_n una successione, prendiamo $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora:
  - Se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge
  - Se $L > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
  - $L = 1$ non implica niente

Criterio del rapporto

- Sia a_n una successione, prendiamo $\lim_{n\to\infty} L = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, allora:
  - Se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge

- Se $L > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- $L = 1$ non implica niente

Moduli

- Sia a_n una successione i cui termini hanno segno alternato, se $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ e $a_n = 0$ allora $\sum a_n$ converge

Serie notevoli

Serie armonica

- Sia $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{(n+1)^p}\right\}$, allora:
  - Se $p \leq 1$ allora $\sum a_n$ diverge
  - Se $p > 1$ allora $\sum a_n$ converge

Serie geometrica

- Sia $\{a_n\} = \{p^n\}$, allora:
  - Se $|p| \leq 1$ allora $\sum a_n$ converge
  - Se $p > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
  - Se $p <- 1$ allora $\sum a_n$ è indeterminata