FUNZIONE CONTINUA IN x_0

Def "$f(x)$ è continua in $x_0 \in D_x$ se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e questo limite è uguale a $f(x_0)$

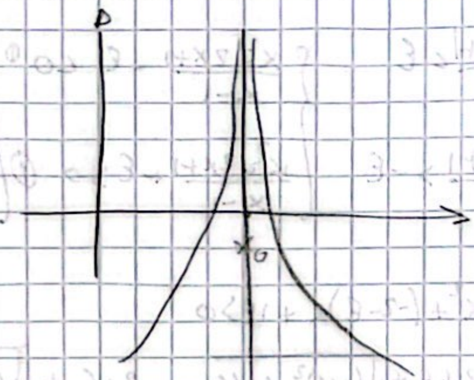
$f(x)$ def. in D_x $\quad \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

FUNZIONE CONTINUA IN I

Stessa cosa di continua in x_0

~~$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$~~ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

~~$\forall M$~~



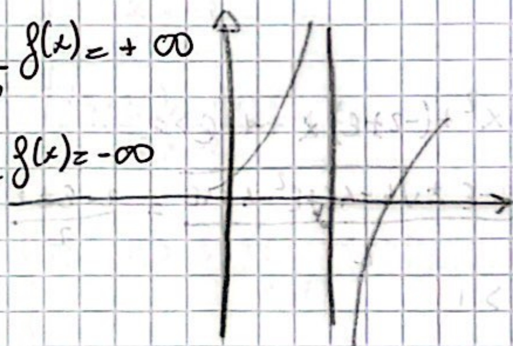
$\forall M > 0 \ \exists \delta_M : |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M : |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) < -M$ $\to$ $\forall M > 0 \ \exists \delta_M : |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow |f(x)| > M$

sx $\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \right.$

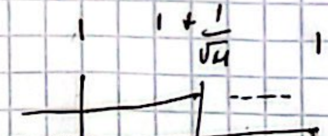
dx $\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \right.$



Def: "Gli asintoti verticali si cercano nei valori finiti esclusi dal dominio e si calcolano facendo il limite per x che tende ad x_0 da sinistra e da destra. Se questo limite tende a infinito ne segue che $x = x_0$ è asintoto verticale."

es

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$



$1 < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$

$\forall M > 0$

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M \ \to \ \frac{1 - Mx^2 - M + 2Mx}{(x-1)^2} > 0$$

$$\frac{1}{x-1} > \sqrt{M} \to \frac{1 - \sqrt{M}x + \sqrt{M}}{x-1} > 0$$

N: $-\sqrt{M}x > -\sqrt{M} - 1 \to x < \frac{\sqrt{M}+1}{\sqrt{M}} \to x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$

D: $x > 1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \forall M > 0 \ \exists \delta_M : |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow |f(x)| > M \Rightarrow f(x) > M \vee f(x) < -M$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : |x| > \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Def "l'asintoto orizzontale si trova facendo il ~~lim~~ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ allora $y = l$ è asintoto orizzontale."

Teoremi sui Limiti

Teorema di unicità del limite

$y = f(x)$ se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ l è unico

Dim.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

p.a.

$l \quad l_1 \to l_1 > l \qquad -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l$

$\varepsilon < \frac{l_1 - l}{2} \qquad -\varepsilon < f(x) - l_1 < \varepsilon \Rightarrow l_1 - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l_1$

Dato che $l_1 > l$ allora

$l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + l_1$

$l - \varepsilon < \varepsilon + l_1 \Rightarrow$

$l_1 - l < 2\varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon > l_1 - l$

$\downarrow$

$\varepsilon > \frac{l_1 - l}{2}$ stiamo dando delle limitazioni alla ε il che è assurdo $\Rightarrow l_1 = l$