Diagramas de Decisão Binários (DDBs)

Luiz Carlos Vieira

24 de Setembro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

conteúdo

- Representação de Funções Booleanas
  - fórmulas proposicionais e tabelas-verdade
  - diagramas de decisão binários (DDBs)
  - diagramas de decisão binários ordenados (DDBOs)
- Algoritmos para DDBOs Reduzidos
  - algoritmo `reduzir`
  - algoritmo `aplicar`
  - algoritmo `restringir`
  - algoritmo `existe`

Representação de Funções Booleanas

funções booleanas

- Parte do formalismo descritivo de sistemas de *hardware* e *software*
- Que precisa ser representado computacionalmente de forma eficiente

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, $\cdots$, e x, y e z, $\cdots$

definição: funções booleanas

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

funções e variáveis booleanas

- Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0, 1\}^n$ para $\{0, 1\}$.

- Escreve-se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em $\mathcal{V}$.

alguns exemplos de funções booleanas

1. $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$
2. $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$
3. $h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$
4. $k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$

wffs e tabelas-verdade

As fórmulas proposicionais bem-formadas (*wffs*) e as tabelas-verdade são duas formas de se representar funções booleanas

- **fórmulas proposicionais**:
  - $\wedge$ denota $\cdot$
  - $\vee$ denota $+$
  - $\neg$ denota $\overline{}$
  - e $\top$ e $\perp$ denotam, respectivamente, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$
- **tabelas-verdade**: representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela-verdade da função booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tabela-verdade da fórmula proposicional $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

p	q	ϕ
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

vantagens e desvantagens

Há vantagens e desvantagens no uso de tabelas-verdade e fórmulas proposicionais para representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	**Fórmulas Proposicionais**
Vantagens	• operações[1] simples	• representação compacta
Desvantagens	• ineficientes em espaço • computacionalmente intratável	• operações[1] difíceis • computacionalmente intratável

[1] verificação de satisfação e validade, e comparação de duas funções booleanas

operações sobre funções booleanas

As operações $\cdot$, $+$, $\oplus$ e $^{-}$ sobre duas funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ são realizadas de forma simples:

- Com tabelas-verdade
  - operação diretamente aplicada a cada linha, adicionando variáveis se necessário
  - mas computacionalmente intratável ($\boldsymbol{2^n}$ linhas)

- Com fórmulas proposicionais
  - manipulação sintática da Lógica Proposicional
  - por exemplo: $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{f} \oplus \boldsymbol{g}$ são respectivamente $\phi \wedge \psi$ e $(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$

utilizando formas normais

- As formas normais facilitam em alguns aspectos
    - e dificultam em outros
- Podem ser mais longas do que as fórmulas originais equivalentes não-normalizadas

forma normal conjuntiva (CNF)

- Facilita o teste de validade
  - busca de cláusula disjuntiva sem preposições complementares
  - teste de satisfação não é igualmente fácil
- Facilita a operação de conjunção ($\cdot$)
  - se f e g são CNFs, o resultado de $f \cdot g$ é CNF
- Dificulta as demais operações ($+$, $\oplus$ e $\bar{\ }$)
  - distributividade recursiva para manter CNF

A forma normal disjuntiva (DNF) – disjunção de conjunções – é dual com a CNF em relação a essas propriedades

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de satisfação	teste de validade	operações booleanas $\cdot$	operações booleanas $+$	operações booleanas $\bar{\ }$
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
DDBOs reduzidos[2]	muitas vezes	fácil	fácil	mais ou menos	mais ou menos	fácil

[2] que ainda serão explorados nessa aula

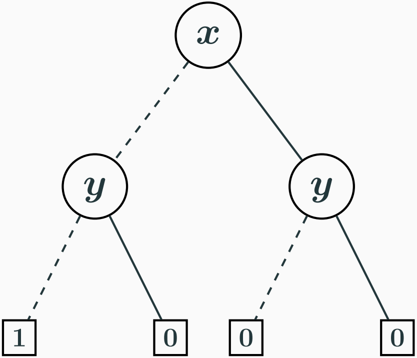
definição: árvore de decisão binária finita

Definição 6.3

Seja T uma árvore de decisão binária finita. Então T determina *uma única* função booleana das variáveis nos nós não-terminais da seguinte maneira:

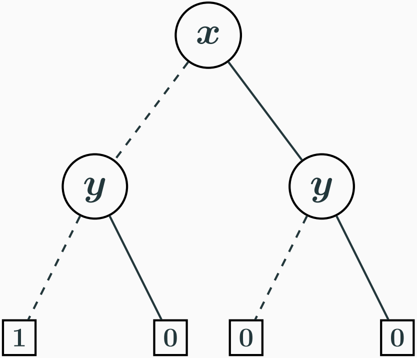
> *Dada uma atribuição de* 0*'s e* 1*'s às variáveis booleanas que ocorrem em* T*, começamos pela raiz de* T *e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é* 0*; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.*

por exemplo



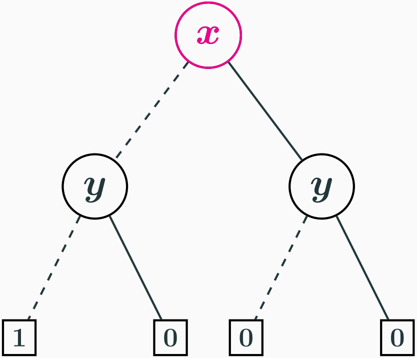
- Árvore da função: $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$

por exemplo



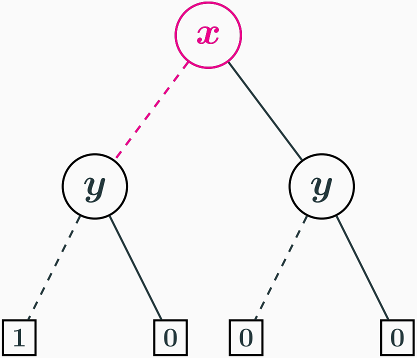
- Árvore da função: $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$
- Para encontrar $f(0,1)$:

por exemplo



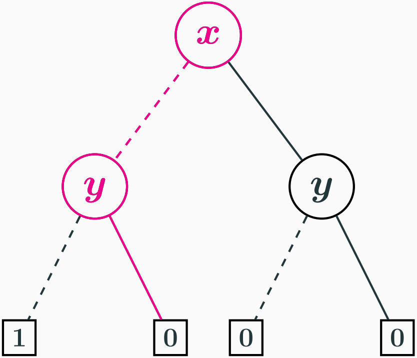
- Árvore da função: $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$
- Para encontrar $f(0,1)$:
    1. inicia-se pela raiz

por exemplo



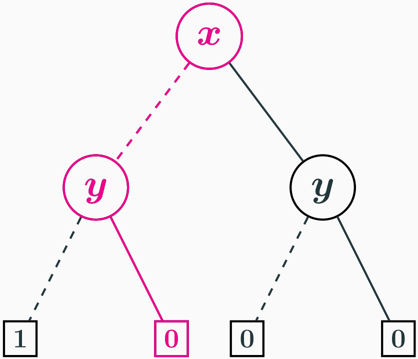
- Árvore da função:
  $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada

por exemplo



- Árvore da função:
  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida

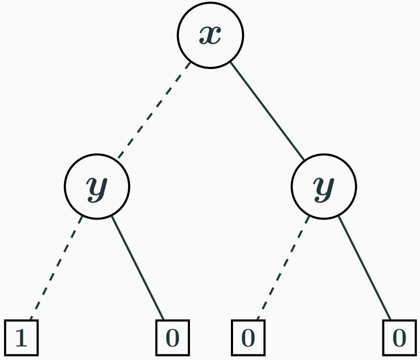
por exemplo



- Árvore da função: $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida
  4. chega-se à folha 0; logo $f(0, 1) = 0$

junto com a tabela-verdade

Para a função booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$:

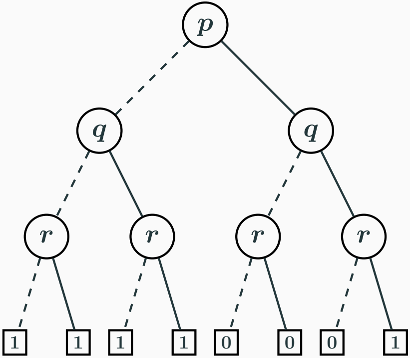


x	y	$f(x, y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

outro exemplo

Para a função booleana $f(p,q,r) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{p} + (q \cdot r)$:

equivalente à fórmula proposicional $\phi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$



p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

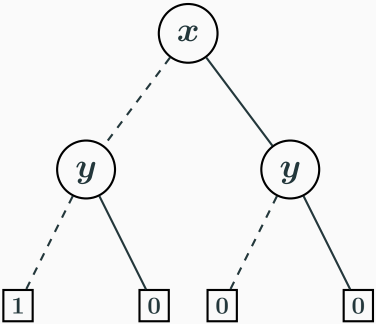
semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
  - se f depender de n variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $2^{n+1} - 1$ nós (contra as 2^n linhas da tabela verdade)

- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

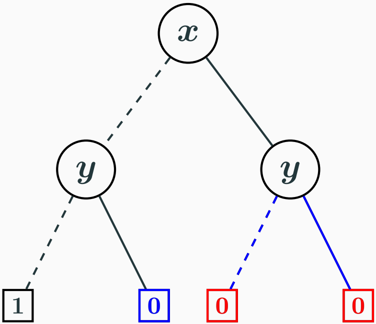
> A exploração de redundâncias em Árvores de Decisão Binárias faz com que deixem de ser árvores e se tornem grafos. Assim, passam a ser chamados de Diagramas de Decisão Binários (BDDs).

remoção de nós terminais duplicados



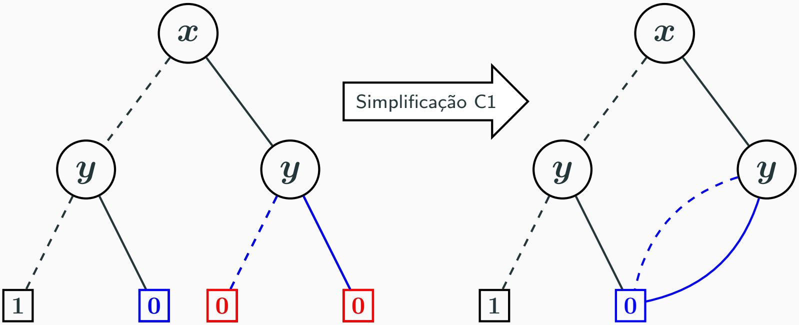
Se um DDB contém mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com* $\mathbf{1}$

remoção de nós terminais duplicados



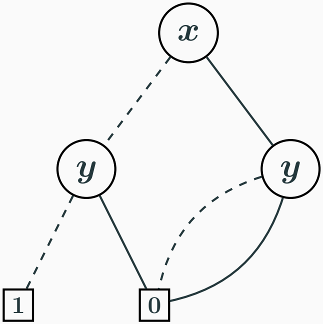
Se um DDB contém mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com* $\mathbf{1}$

remoção de nós terminais duplicados



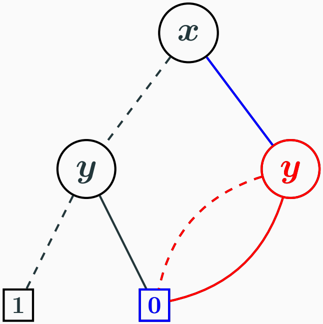
Se um DDB contém mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com* $\mathbf{1}$

remoção de testes redundantes



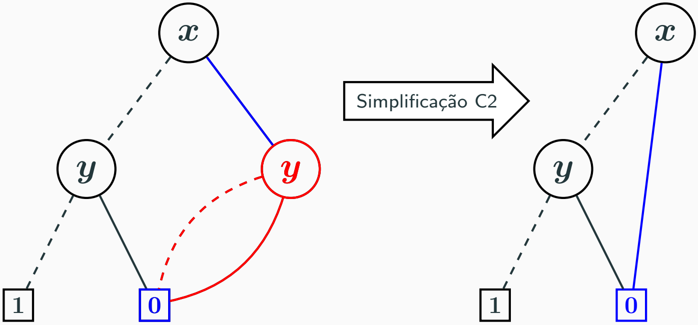
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, elimina-se o nó n, enviando todas as arestas que nele chegavam para m.

remoção de testes redundantes



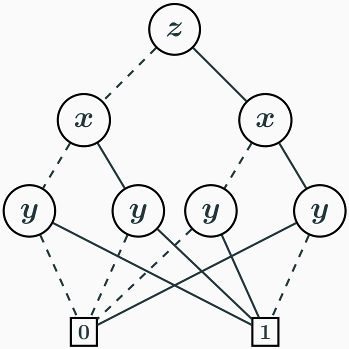
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, elimina-se o nó n, enviando todas as arestas que nele chegavam para m.

remoção de testes redundantes



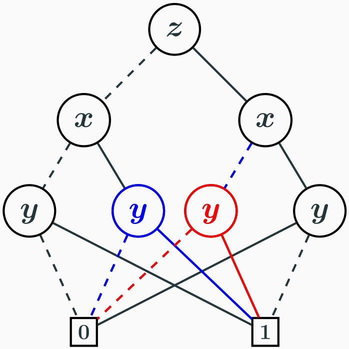
Se ambas as arestas de um nó $\boldsymbol{n}$ apontam para o mesmo nó $\boldsymbol{m}$, elimina-se o nó $\boldsymbol{n}$, enviando todas as arestas que nele chegavam para $\boldsymbol{m}$.

remoção de nós não-terminais duplicados



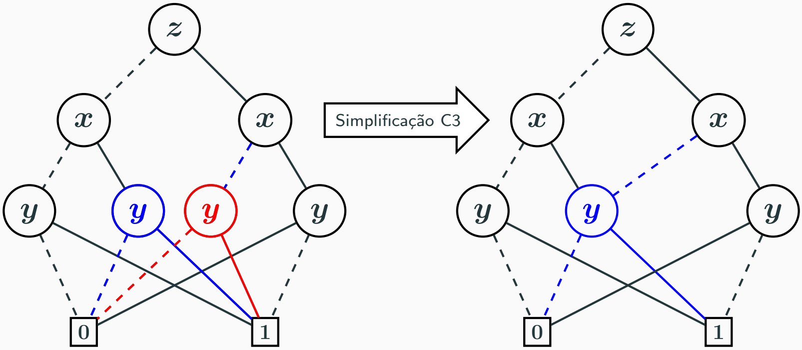
Se dois nós distintos n *e* m *são raizes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro*

remoção de nós não-terminais duplicados



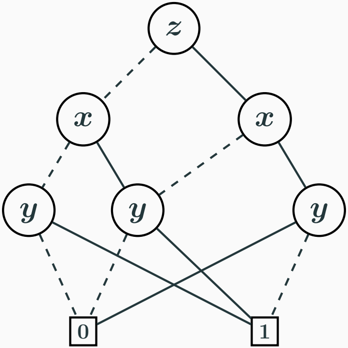
Se dois nós distintos n e m são raizes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

remoção de nós não-terminais duplicados



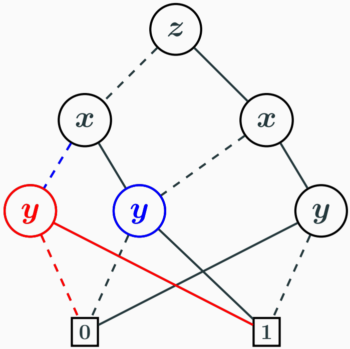
Se dois nós distintos n e m são raizes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

simplificações encadeadas



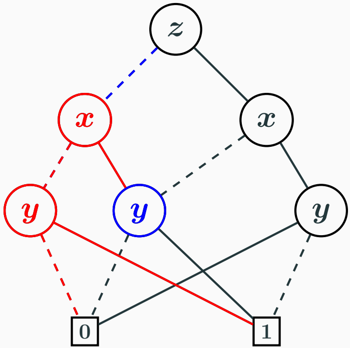
As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y *duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão* x *redundante (C2)*

simplificações encadeadas



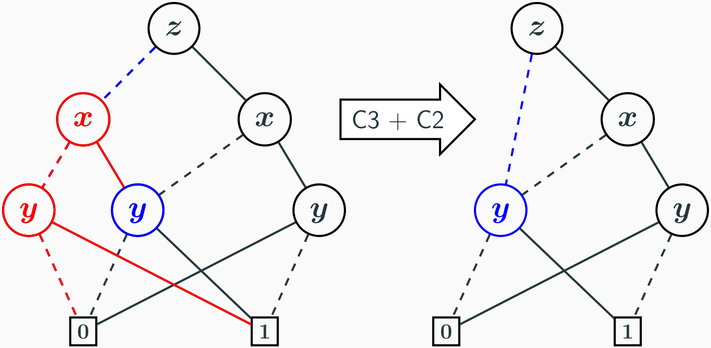
As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão x redundante (C2)

simplificações encadeadas



As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y *duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão* x *redundante (C2)*

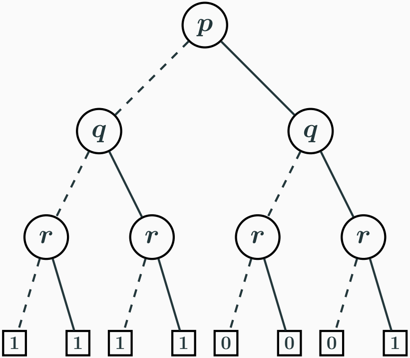
simplificações encadeadas



As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão x redundante (C2)

exercício 1

Reduza a árvore de decisão binária da função $f(p, q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{p} + (q \cdot r)$ apresentada anteriormente:



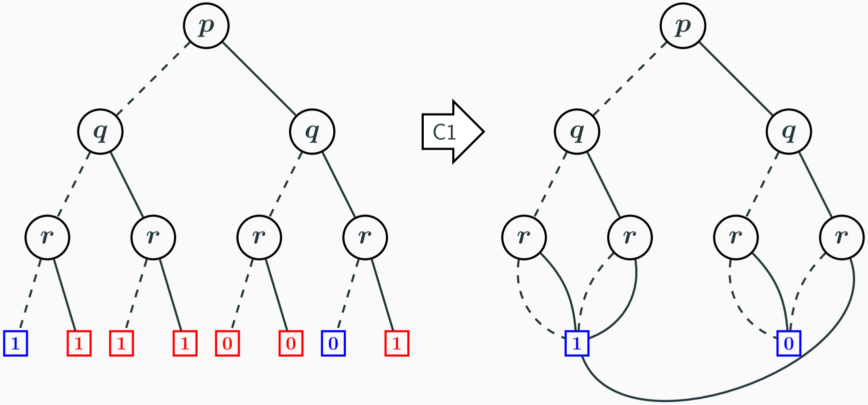
Simplificações:

C1. Remoção de nós terminais duplicados

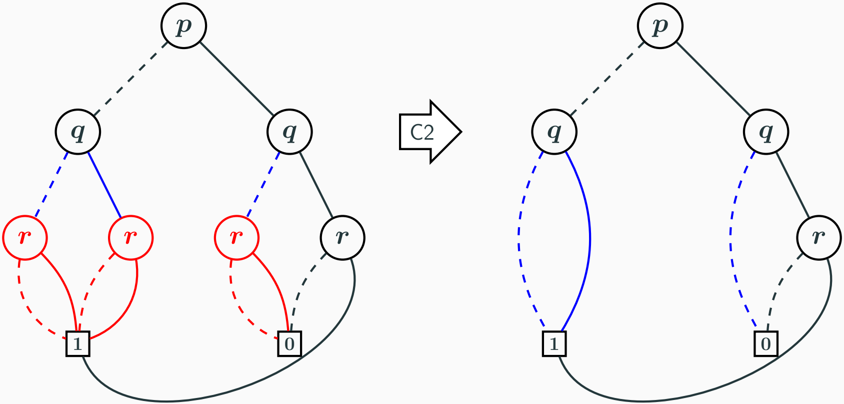
C2. Remoção de testes redundantes

C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

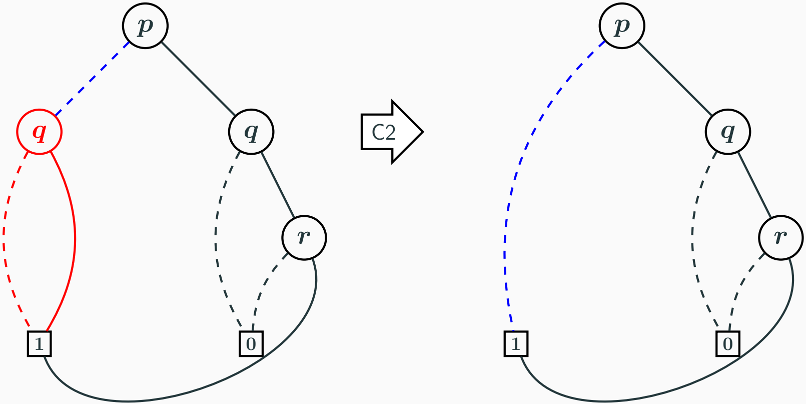
solução – 1º passo



solução – 2º passo

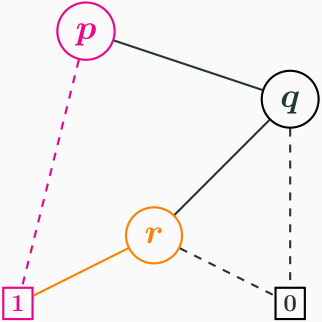


solução – 3º passo



DDB reduzido × tabela-verdade

Função booleana: $f(p,q,r) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{p} + (q \cdot r)$:



p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1