

Diagramas de Decisão Binários (BDDs)

Luiz Carlos Vieira

1 de Outubro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

- Representação de Funções Booleanas
 - fórmulas proposicionais e tabelas-verdade
 - diagramas de decisão binários (BDDs)
 - diagramas de decisão binários ordenados (OBDDs)
- Algoritmos para OBDDs Reduzidos
 - algoritmo reduzir
 - algoritmo aplicar
 - algoritmo restringir
 - algoritmo existe

funções booleanas

- Parte fundamental do formalismo descritivo de sistemas de *hardware* e *software*
- Que precisa ser computacionalmente representado de forma eficiente

definição: variáveis booleanas

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, \dots , e x, y e z, \dots .

definição: funções booleanas

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

funções e variáveis booleanas

- Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0, 1\}^n$ para $\{0, 1\}$.
- Escreve-se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em \mathcal{V} .

alguns exemplos de funções booleanas

$$1. \ f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$$

$$2. \ g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$$

$$3. \ h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$$

$$4. \ k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$$

wffs e tabelas-verdade

As fórmulas proposicionais bem-formadas (*wffs*) e as tabelas-verdade são duas representações de funções booleanas

- **fórmulas proposicionais:**

- $p \wedge q$ denota $p \cdot q$
- $p \vee q$ denota $p + q$
- $\neg p$ denota \bar{p}
- e \top e \perp denotam, respectivamente, 1 e 0

- **tabelas-verdade:** representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela-verdade da função
booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabela-verdade da fórmula
proposicional $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

p	q	ϕ
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	F

sobre a notação utilizada...

- No contexto desta aula, tabelas-verdade, fórmulas proposicionais e BDDs (em estudo) são diferentes formas de representação computacional de funções booleanas
- Uma vez que tais representações são facilmente traduzíveis entre si, os símbolos da lógica proposicional serão utilizados com o objetivo de facilitar o entendimento
 - a única distinção será a utilização de **0** e **1** no lugar de ***F*** e ***V*** nas representações de tabelas-verdade e diagramas

vantagens e desvantagens

Há vantagens e desvantagens no uso de tabelas-verdade e fórmulas proposicionais para representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	Fórmulas Proposicionais
Vantagens	verificações ¹ simples	representação compacta
Desvantagens	ineficientes em espaço	verificações ¹ não tão simples

Ambas são computacionalmente caras para muitas variáveis

¹satisfação, validade e equivalência

também nas operações booleanas

As operações booleanas (\wedge , \vee e \neg) entre duas funções ϕ e ψ também são simples:

- Com tabelas-verdade
 - operação diretamente aplicada a cada linha
 - acrescentando variáveis inexistentes, se necessário
 - mas computacionalmente caro (2^n linhas)
- Com fórmulas proposicionais
 - manipulação sintática da Lógica Proposicional
 - de realização imediata

por exemplo: disjunção

$$\phi \equiv \neg p \wedge q$$

p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\psi \equiv r$$

r	ψ
0	0
1	1

por exemplo: disjunção

$$\phi \equiv \neg p \wedge q$$

$$\psi \equiv r$$

$$\omega \equiv \phi \vee \psi$$

p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

r	ψ
0	0
1	1

por exemplo: disjunção

$$\phi \equiv \neg p \wedge q$$

$$\psi \equiv r$$

$$\omega \equiv \phi \vee \psi$$

p	q	r	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

p	q	r	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

por exemplo: disjunção

$$\phi \equiv \neg p \wedge q$$

p	q	r	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\psi \equiv r$$

p	q	r	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\omega \equiv \phi \vee \psi$$

p	q	r	ω
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

utilizando formas normais

- A representação de fórmulas proposicionais em formas normais é facilitada em alguns aspectos
 - mas é dificultada em outros
- De forma geral, elas podem ser muito longas no pior caso

forma normal conjuntiva (CNF)

- Facilita o teste de validade
 - cláusula disjuntiva sem preposições complementares
 - teste de satisfação não é igualmente fácil
- Facilita a operação de conjunção (\wedge)
 - se ϕ e ψ são CNFs, o resultado de $\phi \wedge \psi$ é CNF
- Dificulta as demais operações (\vee e \neg)
 - aplicação de distributividade para manter CNF

A forma normal disjuntiva (DNF) – disjunção de conjunções – é dual com a CNF em relação a essas propriedades

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de		operações booleanas		
		satisfação	validade	·	+	-
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de		operações booleanas		
		satisfação	validade	·	+	-
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
OBDDs² reduzidos	muitas vezes	fácil	fácil	mais ou menos	mais ou menos	fácil

²Diagramas de Decisão Binários Ordenados – que serão explorados a seguir

definição: árvore de decisão binária finita

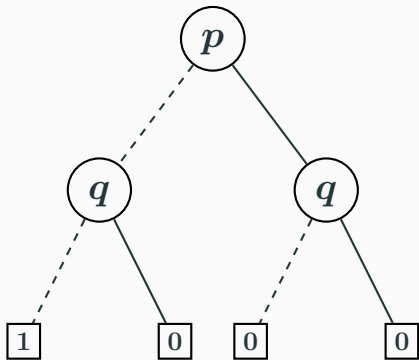
Definição 6.3

Seja T uma árvore binária cujos nós não-terminais (nós de teste) contêm variáveis booleanas e cujos nós terminais contêm os valores 0 ou 1. Então T é uma árvore de decisão binária finita e determina uma única função booleana f da seguinte forma:

Dada uma atribuição de 0's e 1's às variáveis booleanas que ocorrem em f , começamos pela raiz de T e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é 0; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.

por exemplo

- Árvore da função:
 $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

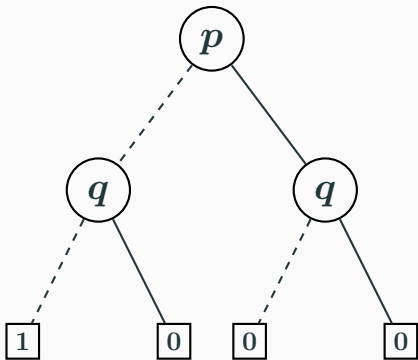


por exemplo

- Árvore da função:

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

- Para encontrar $\llbracket \phi \rrbracket_{v_{(0,1)}}$:



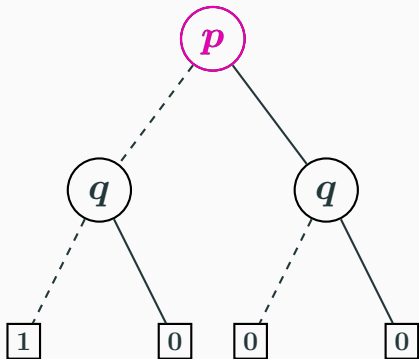
por exemplo

- Árvore da função:

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

- Para encontrar $\llbracket \phi \rrbracket_{v_{(0,1)}}$:

1. inicia-se pela raiz

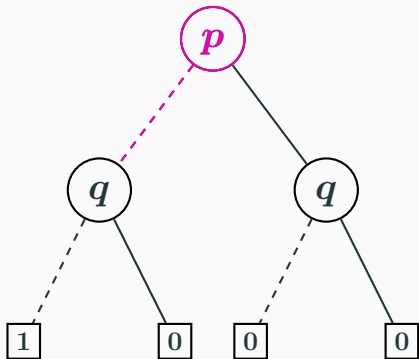


por exemplo

- Árvore da função:

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

- Para encontrar $\llbracket \phi \rrbracket_{v_{(0,1)}}$:
 - inicia-se pela raiz
 - como p é 0, segue-se pela linha pontilhada



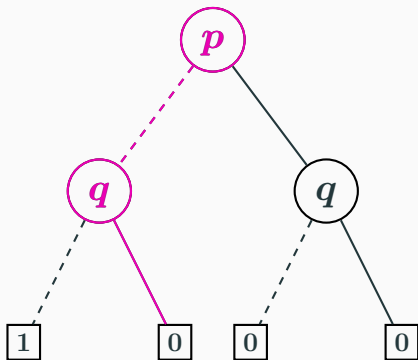
por exemplo

- Árvore da função:

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

- Para encontrar $\llbracket \phi \rrbracket_{v_{(0,1)}}$:

1. inicia-se pela raiz
2. como p é 0, segue-se pela linha pontilhada
3. como q é 1, segue-se pela linha sólida



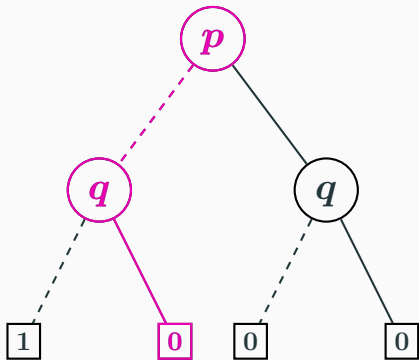
por exemplo

- Árvore da função:

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

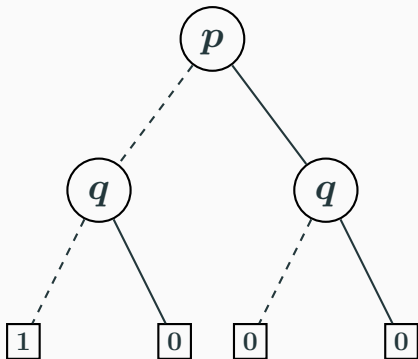
- Para encontrar $\llbracket \phi \rrbracket_{v(0,1)}$:

1. inicia-se pela raiz
2. como p é 0, segue-se pela linha pontilhada
3. como q é 1, segue-se pela linha sólida
4. chega-se à folha 0; logo $\llbracket \phi \rrbracket_{v(0,1)} = 0$



comparando com a tabela-verdade

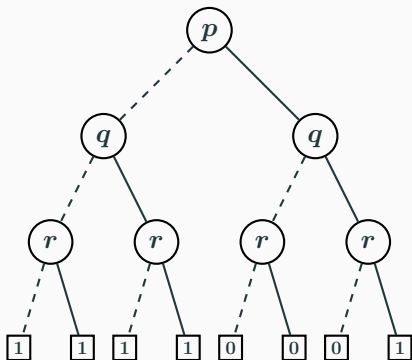
Função booleana: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$:



p	q	ϕ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

outro exemplo comparativo

Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:

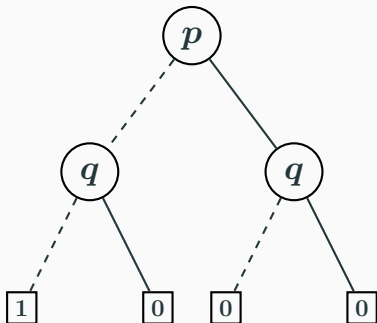


p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
 - se f depender de n variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $2^{n+1} - 1$ nós (contra as 2^n linhas da tabela verdade)
- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

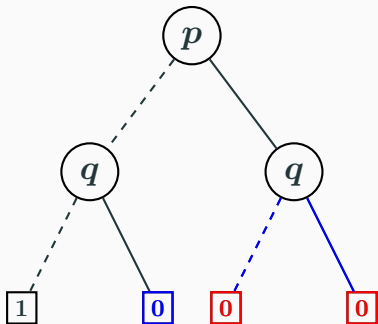
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal 0, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais 1

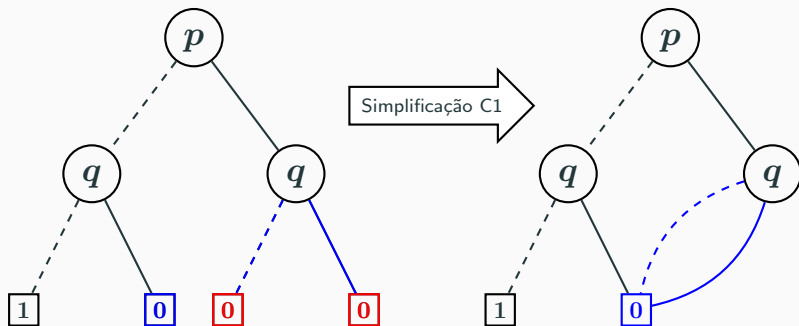
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal 0, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais 1

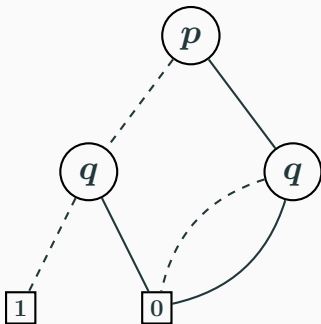
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal 0, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais 1

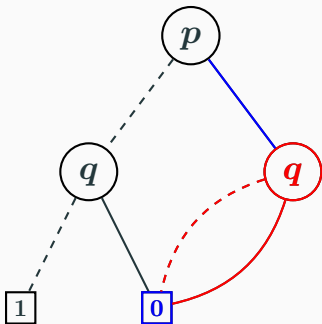
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m .

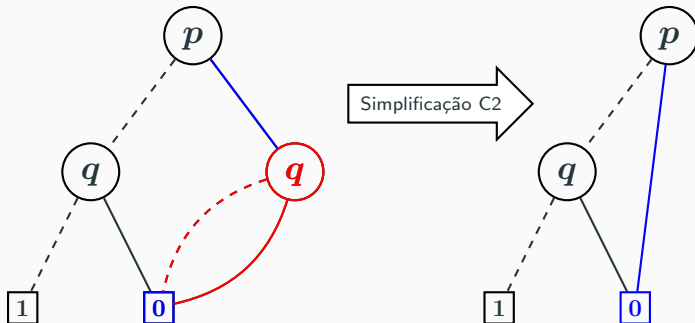
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m .

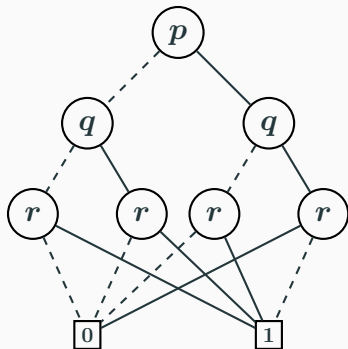
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m .

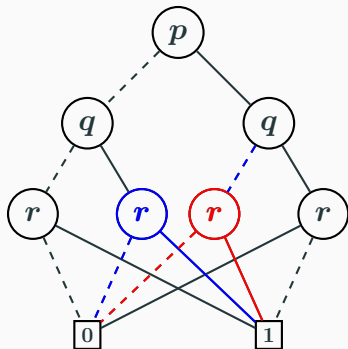
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

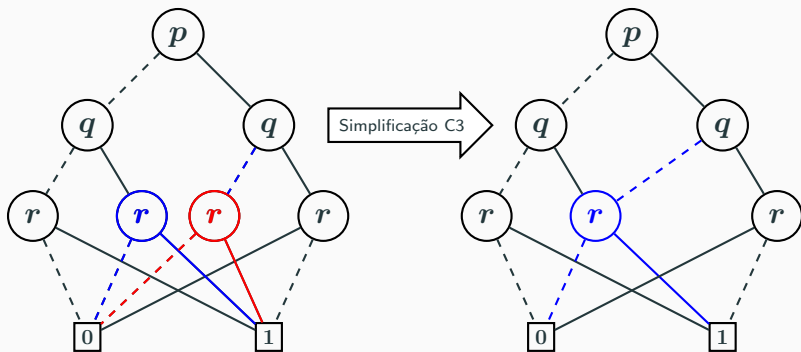
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

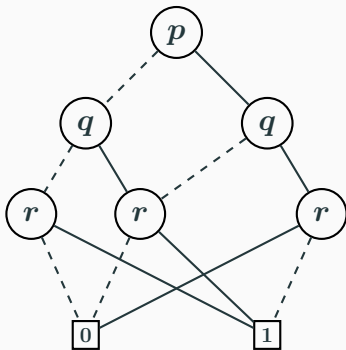
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

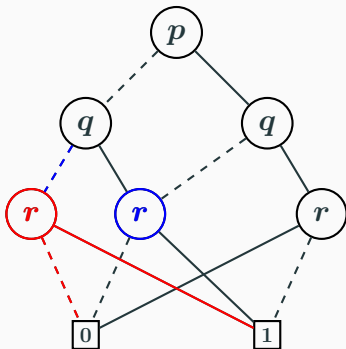
Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

processo de redução



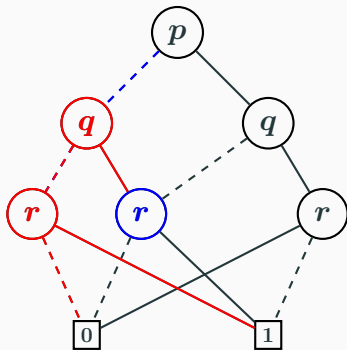
As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós r duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão q redundante (C2)

processo de redução



As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós r duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão q redundante (C2)

processo de redução

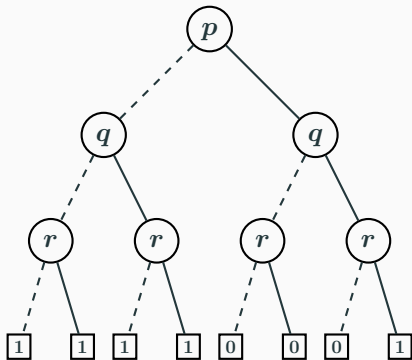


*As simplificações são encadeadas até não mais ser possível.
O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós r duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão q redundante (C2)*

exercício 1

Reduza a árvore de decisão binária da função

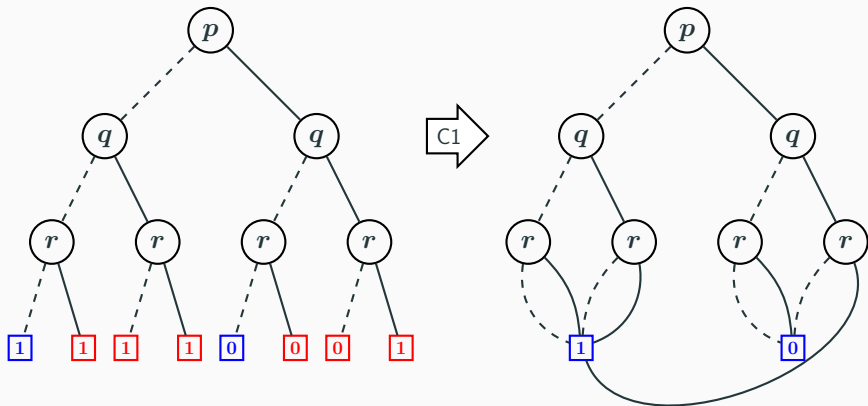
$\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ apresentada anteriormente:



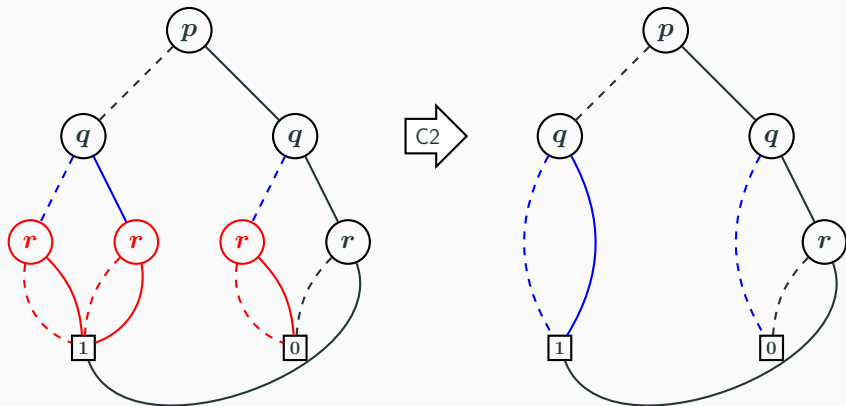
Resumo das simplificações:

- C1.** Remoção de nós terminais duplicados
- C2.** Remoção de testes redundantes
- C3.** Remoção de nós não-terminais duplicados

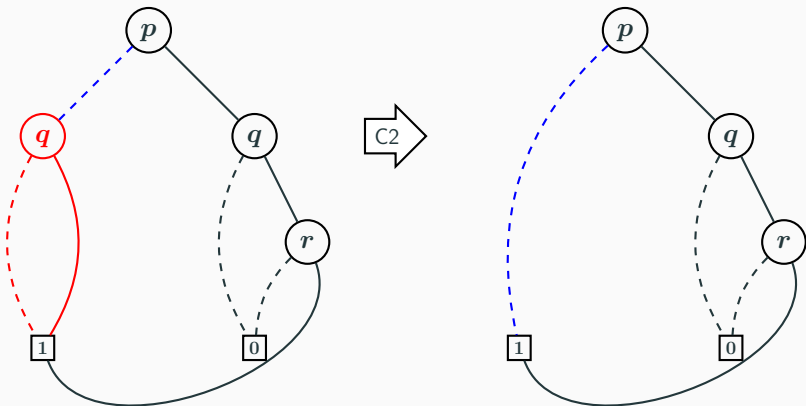
solução – 1º passo



solução – 2º passo

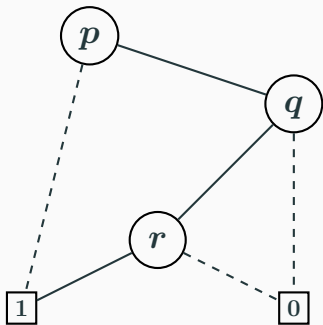


solução – 3º passo



comparando com a tabela-verdade

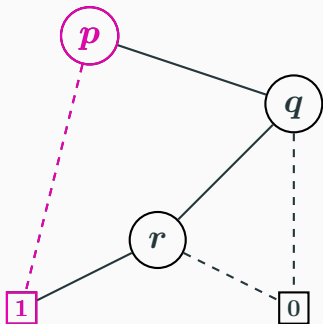
Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

comparando com a tabela-verdade

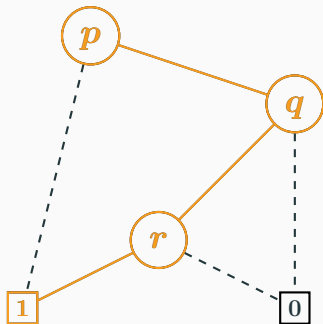
Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

comparando com a tabela-verdade

Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

BDDs

A redução faz com que as árvores se tornem grafos. Por isso, passam a ser chamados de **Diagramas de Decisão Binários (BDDs)**.

definição: dag

Definição 6.4

Um grafo direcionado é um conjunto G e uma relação binária \rightarrow em $G : \rightarrow \subseteq G \times G$. Um ciclo em um grafo direcionado é um caminho finito no grafo que começa e termina no mesmo nó, isto é, um caminho da forma $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$. Um grafo direcionado acíclico (dag) é um grafo direcionado que não contém nenhum ciclo. Um nó em um dag é dito inicial se não há arestas apontando para ele. Um nó é dito terminal se não há arestas saindo dele.

definição: BDDs

Definição 6.5

Um diagrama de decisão binário (BDD) é um dag finito com um único nó inicial, onde todos os nós terminais são marcados com **0** ou **1** e todos os nós não-terminais são marcados com uma variável booleana. Cada nó não-terminal tem exatamente duas arestas saindo dele, uma marcada com **0** e outra com **1** (representadas como uma linha pontilhada e uma linha sólida, respectivamente).

BDD como dag

- Por convenção, as linhas sólidas ou pontilhadas de um BDD são sempre consideradas como indo para baixo
 - por isso eles são grafos direcionados
- Os BDDs são acíclicos (dag) e têm um único nó inicial
- As simplificações C1–C3 preservam essas propriedades
 - BDDs totalmente reduzidos têm 1 ou 2 nós terminais

BDDs elementares

- O BDD B_0 representa a função booleana constante 0
- O BDD B_1 representa a função booleana constante 1
- O BDD B_p representa a variável booleana p

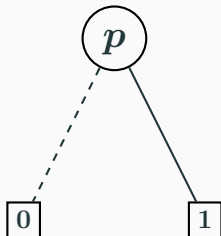
B_0
($\phi \equiv \perp$)

0

B_1
($\phi \equiv \top$)

1

B_p
($\phi \equiv p$)

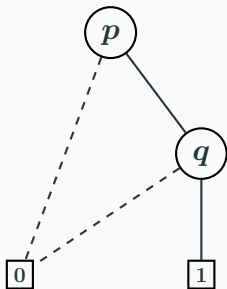


verificações sobre BDDs

- **Satisfação.** Um BDD representa uma função que pode ser satisfeita se um nó terminal **1** pode ser acessado da raiz por meio de um caminho consistente
- **Validade.** Um BDD representa uma função válida se nenhum ponto terminal **0** é acessível por um caminho consistente

exemplos óbvios

$$\phi \equiv p \wedge q$$



$$\psi \equiv p \vee \neg p$$



$$\omega \equiv q \wedge \neg q$$

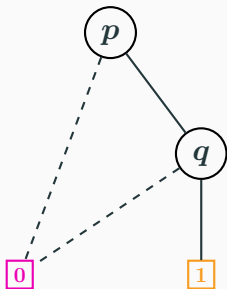


operações sobre BDDs

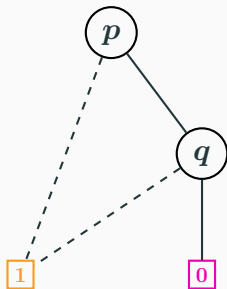
- **Operação de negação (\neg).** Obtem-se um BDD que representa $\neg\phi$ substituindo todos os terminais 0 em B_ϕ por terminais 1 e vice-versa
- **Operação de conjunção (\wedge).** Obtem-se um BDD que representa $\phi \wedge \psi$ substituindo todos os nós terminais 1 em B_ϕ diretamente por B_ψ
- **Operação de disjunção (\vee).** Obtem-se um BDD que representa $\phi \vee \psi$ substituindo todos os nós terminais 0 em B_ϕ diretamente por B_ψ

exemplo da negação

$$\phi \equiv p \wedge q$$

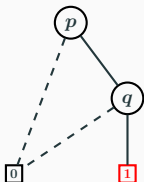


$$\neg\phi \equiv \neg(p \wedge q)$$

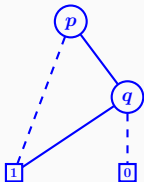


exemplo da conjunção

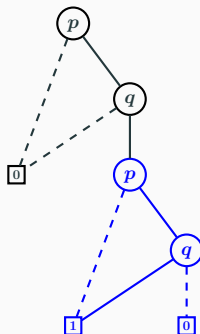
$$\phi \equiv p \wedge q$$



$$\psi \equiv \neg p \vee q$$

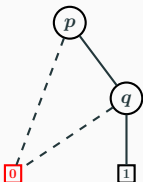


$$\phi \wedge \psi \equiv (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$$

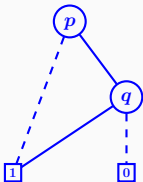


exemplo da disjunção

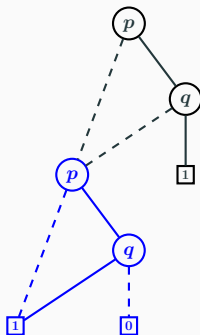
$$\phi \equiv p \wedge q$$



$$\psi \equiv \neg p \vee q$$



$$\phi \vee \psi \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

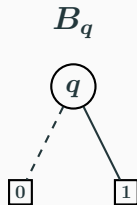
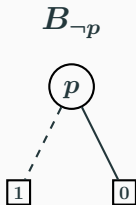
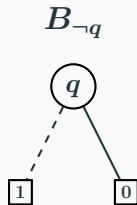
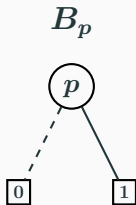


forma “inocente” de construir BDDs

1. Para cada variável booleana em uma função, um BDD de variável (B_{p_i}) é criado
2. Tais BDDs são então unidos conforme as operações booleanas na função
3. Por fim, o BDD resultante é reduzido com as simplificações C1-C3

exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

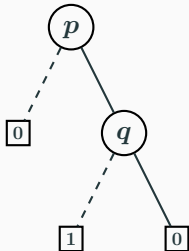
Passo 1: criação de B_{p_i}



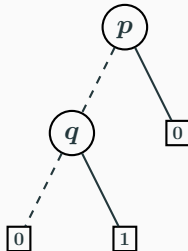
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 2a: união dos BDDs conforme as operações

$B_p \wedge B_{\neg q}$



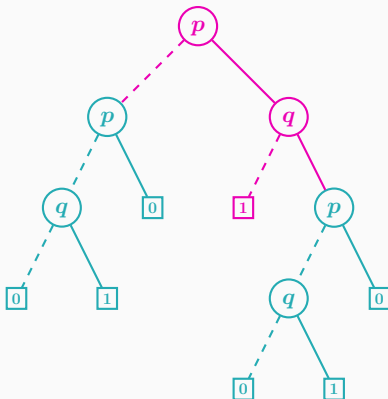
$B_{\neg p} \wedge B_q$



exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

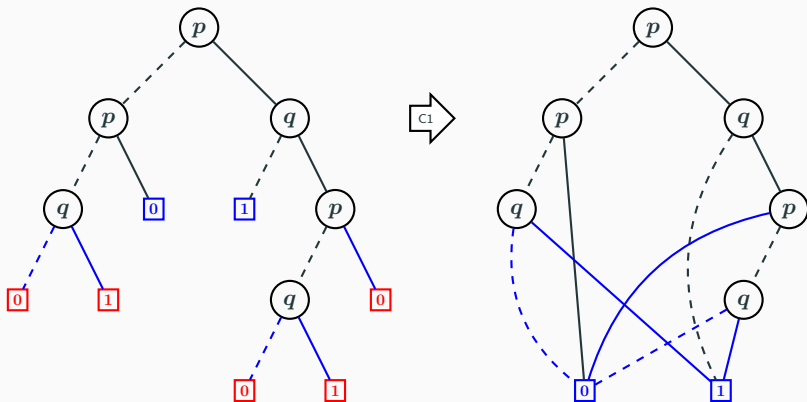
Passo 2b: união dos BDDs conforme as operações

$$(B_p \wedge B_{\neg q}) \vee (B_{\neg p} \wedge B_q)$$



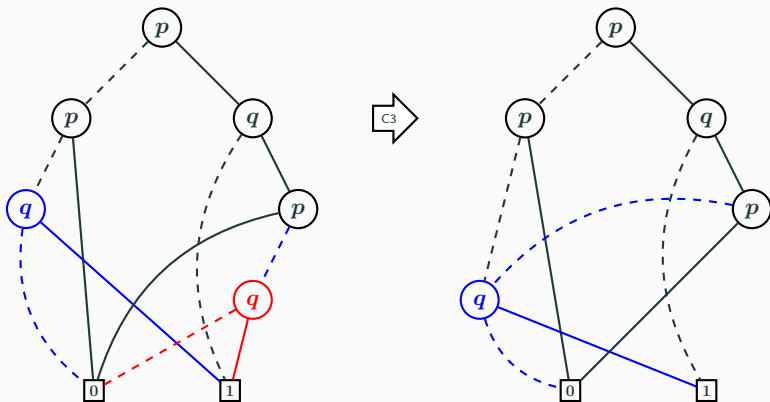
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 3a: redução do BDD gerado



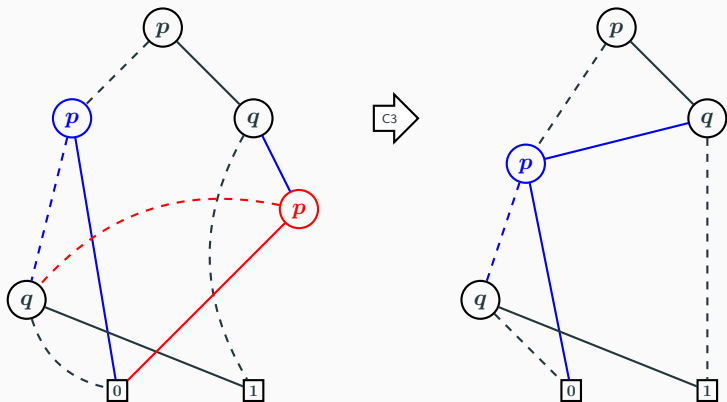
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 3b: redução do BDD gerado



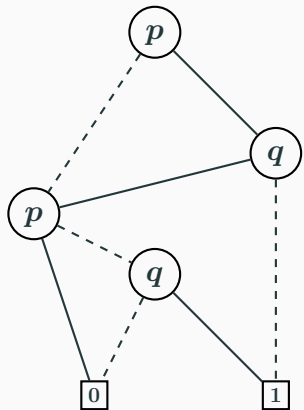
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 3c: redução do BDD gerado



comparação com a tabela-verdade

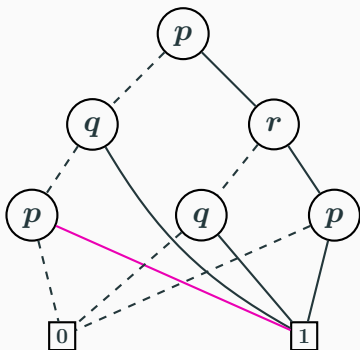
$$\phi \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$



p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

múltiplas ocorrências de mesma variável

- A definição não impede uma variável de ocorrer mais de uma vez em um caminho
- Mas tal representação pode incorrer em desperdícios
 - linha sólida do p à esquerda (colorida) jamais será percorrida

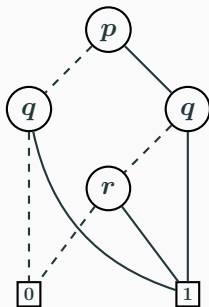
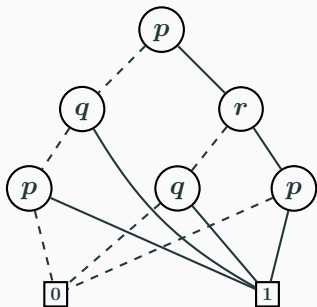


Esse é um resultado comum após as operações discutidas anteriormente – algoritmos melhores serão discutidos mais à frente

comparação de BDDs

Além de tornar um BDD menos eficiente, ocorrências múltiplas de uma variável também dificultam a comparação de BDDs

Exercício: Os BDDs abaixo são equivalentes?



BDDs ordenados

- Quando a ordem das variáveis de teste nos caminhos que levam da raiz até uma folha é sempre a mesma, o BDD é dito *ordenado*
 - e passa a ser chamado Diagrama de Busca Binária Ordenado (OBDD)
- Esse compromisso com a ordem dá uma representação única de funções booleanas com OBDDs

teorema: obdds reduzidos são únicos

Teorema 6.7

A representação em OBDD reduzido de uma função dada f é única. Isto é, sejam B e B' dois OBDDs reduzidos com ordens compatíveis. Se B e B' representam a mesma função booleana, então eles têm estruturas idênticas.

características de OBDDs

- As simplificações C1-C3 em um OBDD produzem sempre o mesmo OBDD reduzido
 - chamado então de *forma canônica*
- ODDBs permitem representações compactas de certas classes de funções booleanas
 - que seriam exponenciais em outros formatos/representações
- Por outro lado, as operações \cdot e $+$ apresentadas anteriormente não funcionam
 - pois podem introduzir ocorrências múltiplas de uma mesma variável

importância da representação canônica

- **Ausência de variáveis redundantes.** Se o valor de uma função booleana não depende de uma variável, então nenhum ODDB reduzido que a represente contém tal variável;
- **Teste de equivalência semântica.** Se duas funções são representadas por ODDBs com ordem compatível, é possível decidir eficientemente se são equivalentes reduzindo seus ODDBs e comparando sua estrutura;
- **Teste de validade.** Se uma função booleana é válida, seu ODDB reduzido é igual a B_1 ;
- **Teste de implicação.** Pode-se testar se uma função f implica em outra g calculando o ODDB para $f \cdot g$ e verificando que ele é igual a B_0 ;
- **Teste de satisfação.** Se uma função booleana é satisfeita, então seu ODDB reduzido não é igual a B_0 .

algoritmo reduzir

algoritmo aplicar

algoritmo restringir

algoritmo esiste