Diagramas de Decisão Binários (BDDs)

Luiz Carlos Vieira

28 de Setembro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

conteúdo

- Representação de Funções Booleanas
  - fórmulas proposicionais e tabelas-verdade
  - diagramas de decisão binários (BDDs)
  - diagramas de decisão binários ordenados (OBDDs)
- Algoritmos para OBDDs Reduzidos
  - algoritmo `reduzir`
  - algoritmo `aplicar`
  - algoritmo `restringir`
  - algoritmo `existe`

funções booleanas

- Parte fundamental do formalismo descritivo de sistemas de *hardware* e *software*
- Que precisa ser computacionalmente representado de forma eficiente

definição: variáveis booleanas

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, ..., e x, y e z, ...

definição: funções booleanas

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

funções e variáveis booleanas

- Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0,1\}^n$ para $\{0,1\}$.
- Escreve-se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em $\mathcal{V}$.

alguns exemplos de funções booleanas

1. $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$
2. $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$
3. $h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$
4. $k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$

wffs e tabelas-verdade

As fórmulas proposicionais bem-formadas (*wffs*) e as tabelas-verdade são duas representações de funções booleanas

- **fórmulas proposicionais**:
  - $\wedge$ denota $\cdot$
  - $\vee$ denota $+$
  - $\neg$ denota $\bar{\ }$
  - e $\top$ e $\bot$ denotam, respectivamente, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$
- **tabelas-verdade**: representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela-verdade da função booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tabela-verdade da fórmula proposicional $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

p	q	ϕ
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

vantagens e desvantagens

Há vantagens e desvantagens no uso de tabelas-verdade e fórmulas proposicionais para representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	**Fórmulas Proposicionais**
Vantagens	verificações[1] simples	representação compacta
Desvantagens	ineficientes em espaço	verificações[1] não tão simples

Ambas são computacionalmente caras para muitas variáveis

[1] satisfação, validade e equivalência

também nas operações booleanas

As operações booleanas ($\cdot$, $+$, $\oplus$ e $^{-}$) entre duas funções f e g também são simples:

- Com tabelas-verdade
  - operação diretamente aplicada a cada linha
  - acrescentando variáveis inexistentes, se necessário
- Com fórmulas proposicionais
  - manipulação sintática da Lógica Proposicional

Computacionalmente caro com tabelas-verdade (2^n linhas) e imediata com fórmulas proposicionais (por exemplo, $f \cdot g$ e $f \oplus g$ são respectivamente $\phi \wedge \psi$ e $(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$)

utilizando formas normais

- A representação de fórmulas proposicionais em formas normais é facilitada em alguns aspectos
    - mas é dificultada em outros

- De forma geral, elas podem ser muito longas no pior caso

forma normal conjuntiva (CNF)

- Facilita o teste de validade
  - cláusula disjuntiva sem preposições complementares
  - teste de satisfação não é semelhante
- Facilita a operação de conjunção ($\wedge$)
  - se ϕ e ψ são CNFs, o resultado de $\phi \wedge \psi$ é CNF
- Dificulta as demais operações ($\vee$ e $\neg$)
  - aplicação de distributividade para manter CNF

A forma normal disjuntiva (DNF) – disjunção de conjunções – é dual com a CNF em relação a essas propriedades

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de satisfação	teste de validade	operações booleanas $\cdot$	operações booleanas $+$	operações booleanas $\bar{\ }$
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
OBDDs[2] reduzidos	muitas vezes	fácil	fácil	mais ou menos	mais ou menos	fácil

[2]Diagramas de Decisão Binários Ordenados – que serão explorados a seguir

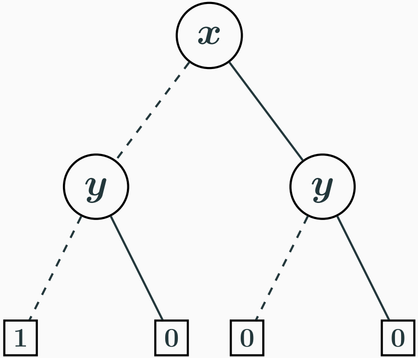
definição: árvore de decisão binária finita

Definição 6.3

Seja T uma árvore de decisão binária finita. Então T determina *uma única* função booleana das variáveis nos nós não-terminais da seguinte maneira:

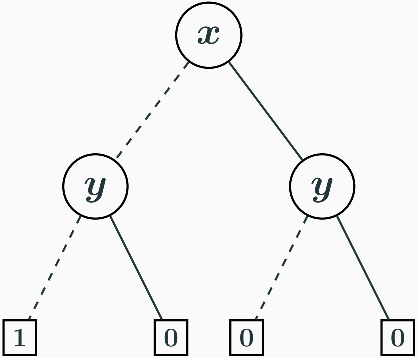
> *Dada uma atribuição de* 0*'s e* 1*'s às variáveis booleanas que ocorrem em* T*, começamos pela raiz de* T *e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é* 0*; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.*

por exemplo



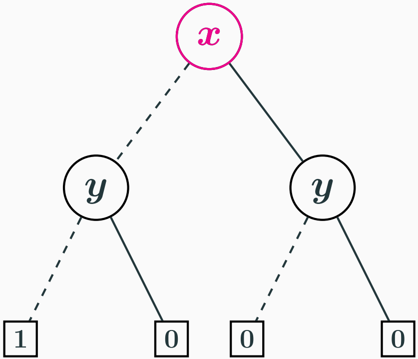
- Árvore da função:
  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

por exemplo



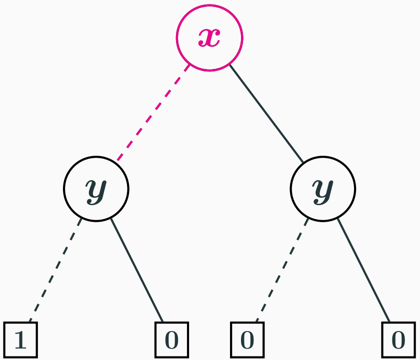
- Árvore da função: $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$
- Para encontrar $f(0,1)$:

por exemplo



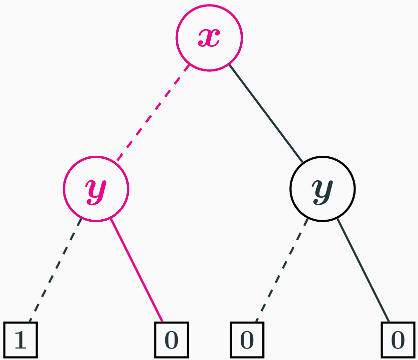
- Árvore da função:
  $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz

por exemplo



- Árvore da função:
  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada

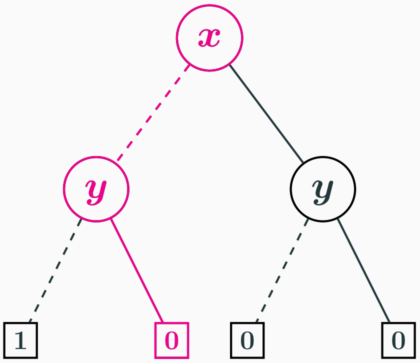
por exemplo



- Árvore da função:
  $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida

por exemplo

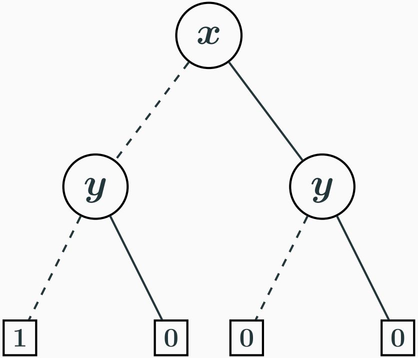


- Árvore da função: $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida
  4. chega-se à folha 0; logo $f(0, 1) = 0$

comparando com a tabela-verdade

Para a função booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$:

equivalente à fórmula proposicional $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

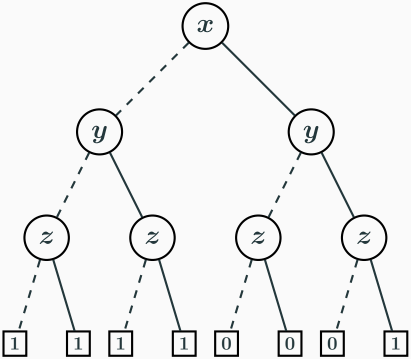


x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

outro exemplo comparativo

Para a função booleana $f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} + (y \cdot z)$:

equivalente à fórmula proposicional $\phi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

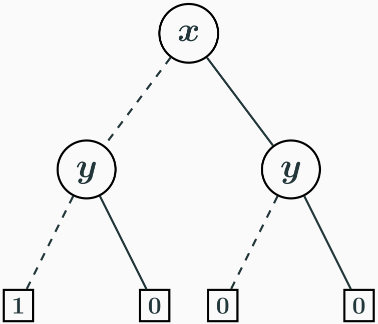


x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
  - se f depender de n variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $2^{n+1} - 1$ nós (contra as 2^n linhas da tabela verdade)
- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

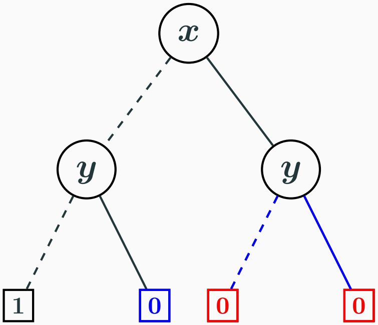
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

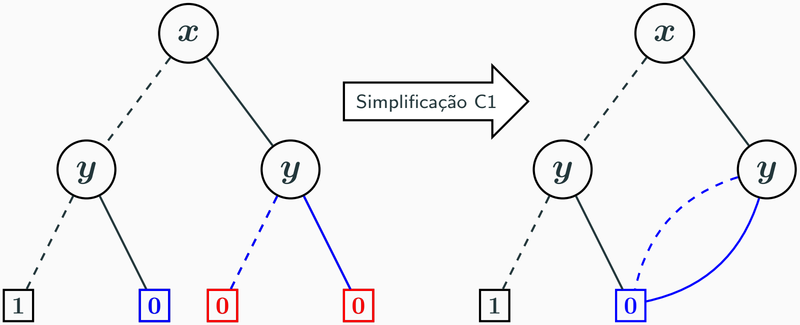
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

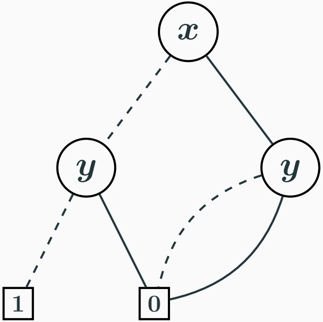
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

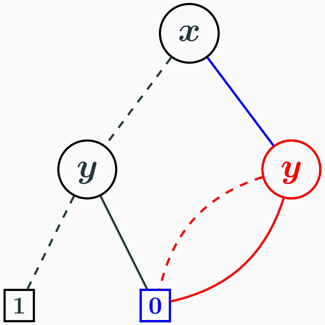
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

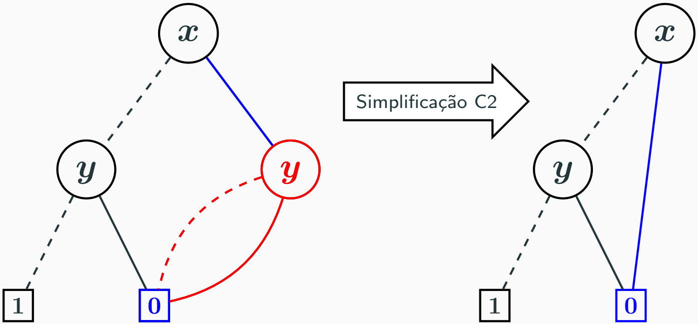
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

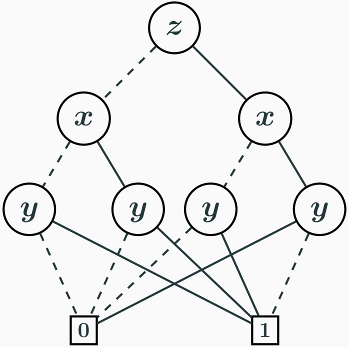
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

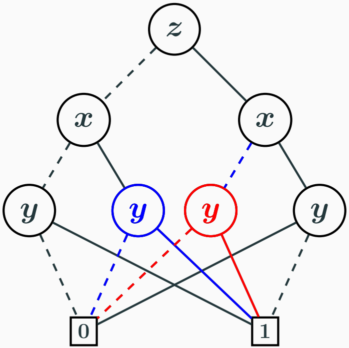
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

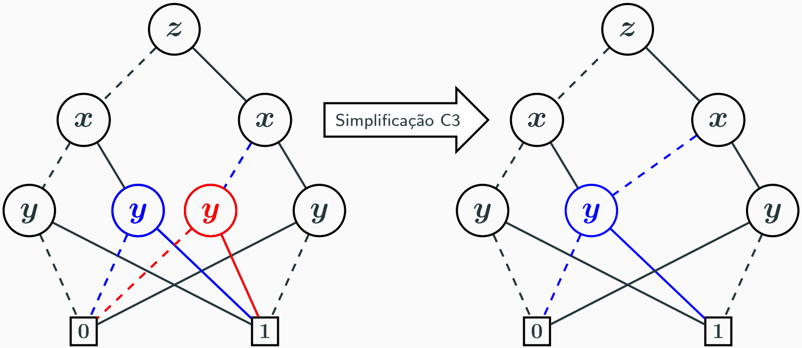
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

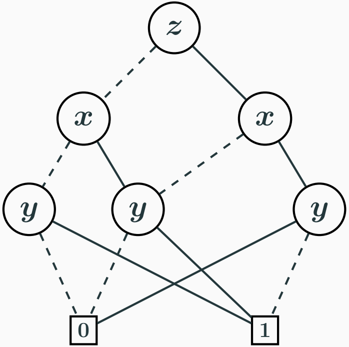
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

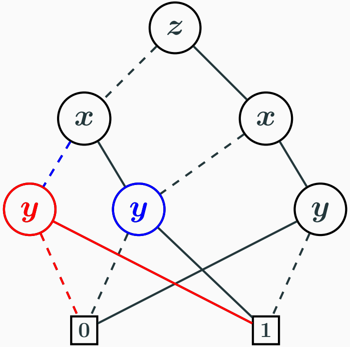
Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

processo de redução



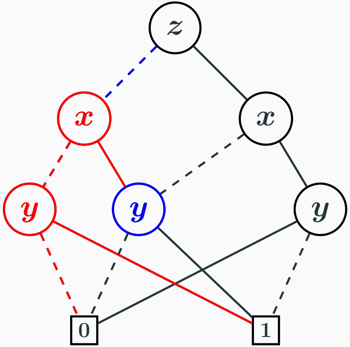
As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós $\boldsymbol{y}$ *duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão* $\boldsymbol{x}$ *redundante (C2)*

processo de redução



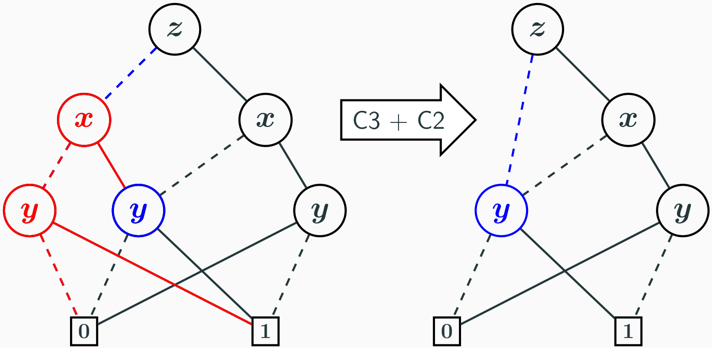
As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós $\boldsymbol{y}$ *duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão* $\boldsymbol{x}$ *redundante (C2)*

processo de redução



As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós y *duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão* x *redundante (C2)*

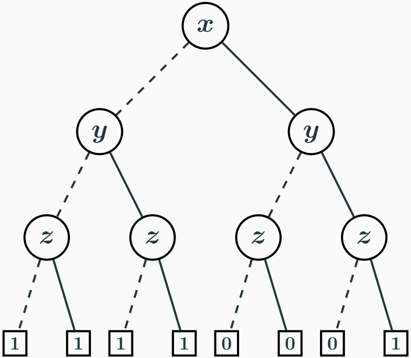
processo de redução



As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós y duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão x redundante (C2)

exercício 1

Reduza a árvore de decisão binária da função $f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} + (y \cdot z)$ apresentada anteriormente:



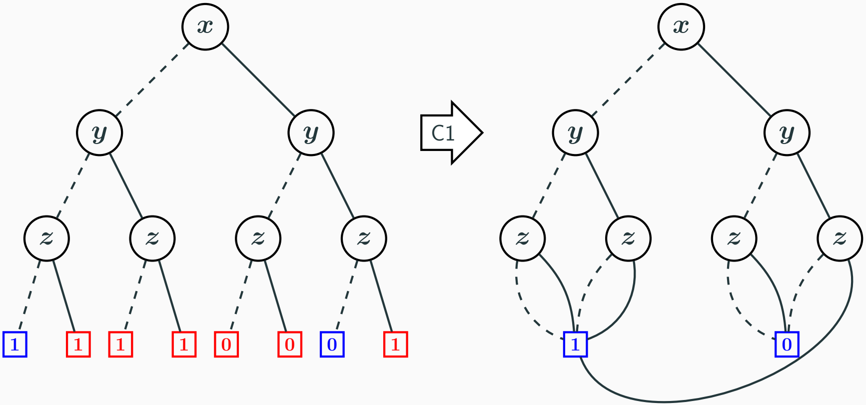
Resumo das simplificações:

C1. Remoção de nós terminais duplicados

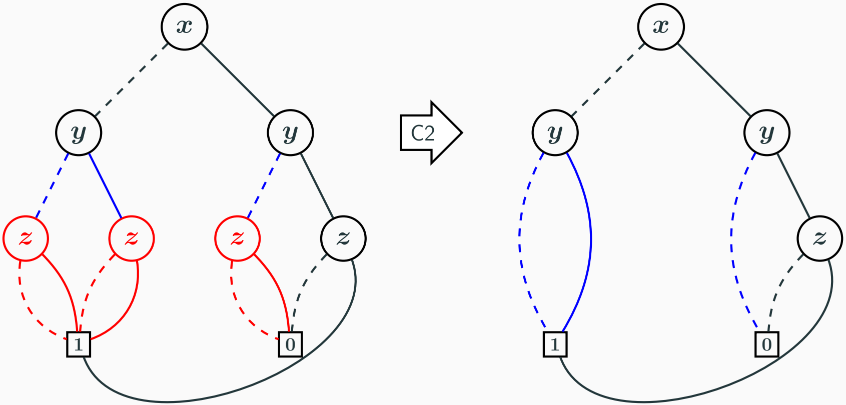
C2. Remoção de testes redundantes

C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

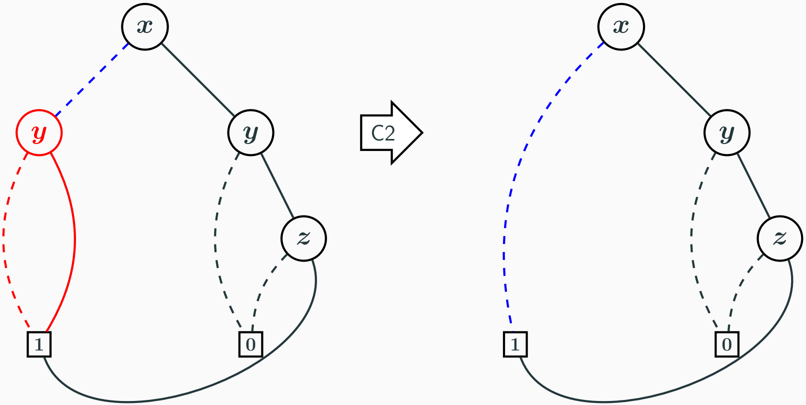
solução – 1º passo



solução – 2º passo

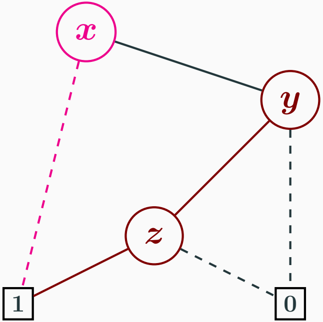


solução – 3º passo



comparando com a tabela-verdade

Função booleana: $f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} + (y \cdot z)$:



x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

BDDs

A redução faz com que as árvores se tornem grafos. Por isso, passam a ser chamados de **Diagramas de Decisão Binários (BDDs)**.

definição: gda

Definição 6.4

Um grafo direcionado é um conjunto G e uma relação binária $\rightarrow$ em G : $\rightarrow \subseteq G \times G$. Um ciclo em um grafo direcionado é um caminho finito no grafo que começa e termina no mesmo nó, isto é, um caminho da forma $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$. Um grafo direcionado acíclico (gda) é um grafo direcionado que não contém nenhum ciclo. Um nó em um gda é dito inicial se não há arestas apontando para ele. Um nó é dito terminal se não há arestas saindo dele.

definição: BDDs

Definição 6.5

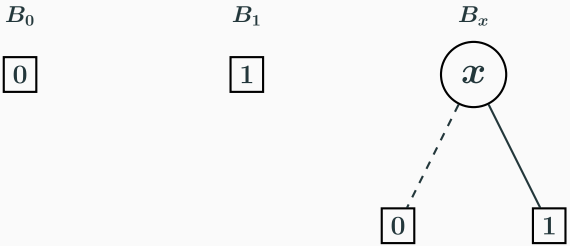
Um diagrama de decisão binário (BDD) é um gda finito com um único nó inicial, onde todos os nós terminais são marcados com $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$ e todos os nós não-terminais são marcados com uma variável booleana. Cada nó não-terminal tem exatamente duas arestas saindo dele, uma marcada com $\mathbf{0}$ e outra com $\mathbf{1}$ (representadas como uma linha pontilhada e uma linha sólida, respectivamente).

BDD como gda

- Por convenção, as linhas sólidas ou pontilhadas de um BDD são sempre consideradas como indo para baixo
  - por isso eles são grafos direcionados
- Os BDDs são acíclicos (gda) e têm um único nó inicial
- As simplificações C1–C3 preservam essas propriedades
  - BDDs totalmente reduzidos têm 1 ou 2 nós terminais

BDDs elementares

O BDD $\boldsymbol{B_0}$ representa a função booleana constante $\mathbf{0}$; analogamente, o BDD $\boldsymbol{B_1}$ representa a função booleana constante $\mathbf{1}$; e, finalmente, o BDD $\boldsymbol{B_x}$ representa a variável booleana $\boldsymbol{x}$



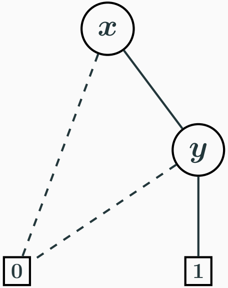
verificações sobre BDDs

- **Satisfação**. Um BDD representa uma função que pode ser satisfeita se um nó terminal $\mathbf{1}$ pode ser acessado da raiz por meio de um caminho consistente

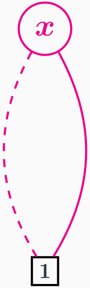
- **Validade**. Um BDD representa uma função válida se nenhum ponto terminal $\mathbf{0}$ é acessível por um caminho consistente

exemplos óbvios

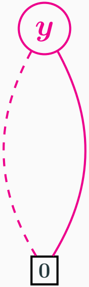
$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y$



$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \overline{x}$



$h(y) \stackrel{\text{def}}{=} y \cdot \overline{y}$



operações sobre BDDs

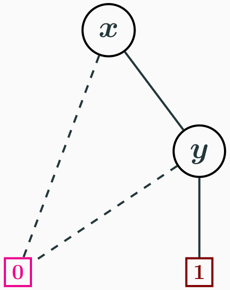
- **Operação de negação ($\overline{}$).** Obtem-se um BDD que representa $\overline{f}$ substituindo todos os terminais $\mathbf{0}$ em B_f por terminais $\mathbf{1}$ e vice-versa

- **Operação de conjunção ($\cdot$).** Obtem-se um BDD que representa $f \cdot g$ substituindo todos os nós terminais $\mathbf{1}$ em B_f diretamente por uma cópia de B_g

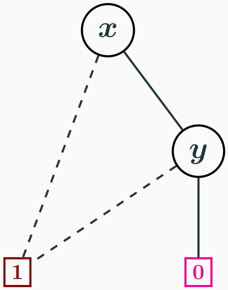
- **Operação de disjunção ($+$).** Obtem-se um BDD que representa $f + g$ substituindo todos os nós terminais $\mathbf{0}$ em B_f diretamente por uma cópia de B_g

exemplo da negação

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y$$

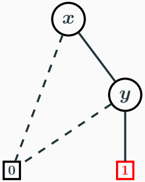


$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x \cdot y}$$

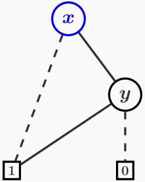


exemplo da conjunção

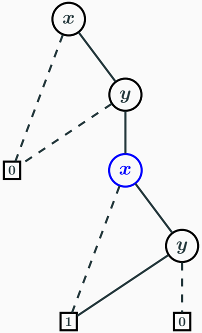
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y$$



$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} + y$$

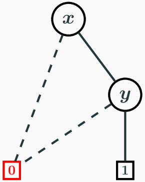


$$h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot y) \cdot (\overline{x} + y)$$

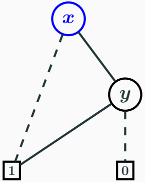


exemplo da disjunção

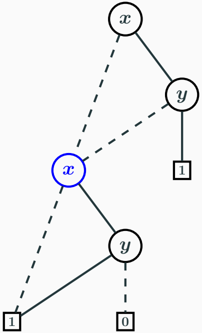
$$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y$$



$$g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} + y$$



$$h(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot y) + (\overline{x} + y)$$



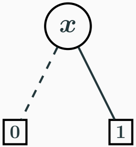
forma “inocente” de construir BDDs

1. Para cada variável booleana em uma função, um BDD de variável ($\boldsymbol{B_{x_i}}$) é criado
2. Tais BDDs são então unidos conforme as operações booleanas constantes na função
3. Por fim, o BDD resultante é reduzido com as simplificações C1-C3

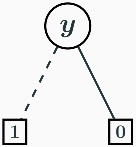
exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

Passo 1: criação de B_{x_i}

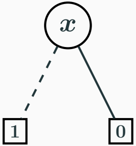
B_x



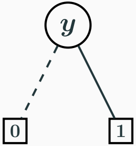
$B_{\overline{y}}$



$B_{\overline{x}}$



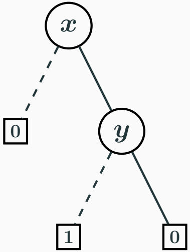
B_y



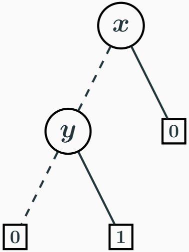
exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

Passo 2a: união dos BDDs conforme as operações

$\boldsymbol{B_x \cdot B_{\overline{y}}}$



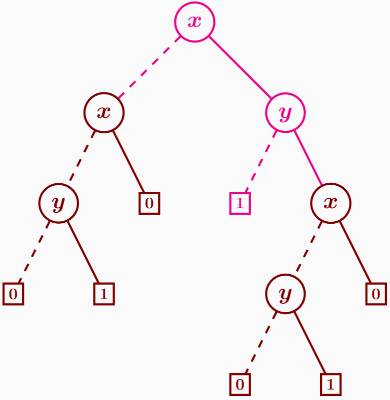
$\boldsymbol{B_{\overline{x}} \cdot B_y}$



exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

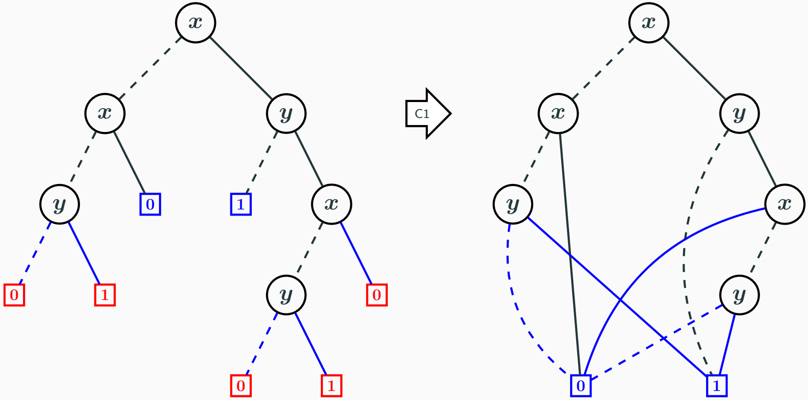
Passo 2b: união dos BDDs conforme as operações

$(B_x \cdot B_{\overline{y}}) + (B_{\overline{x}} \cdot B_y)$



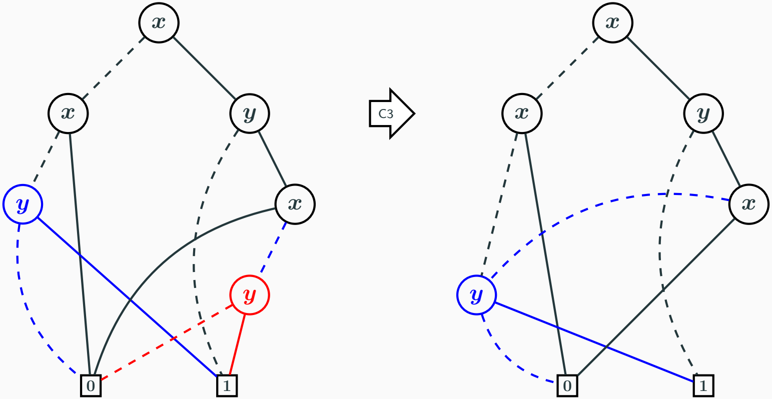
exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

Passo 3a: redução do BDD gerado



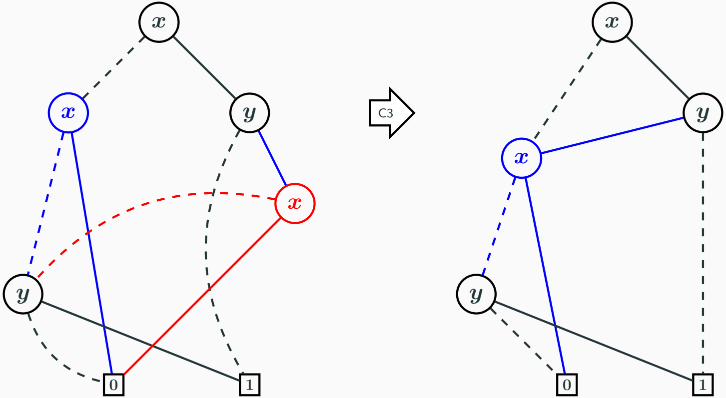
exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

Passo 3b: redução do BDD gerado



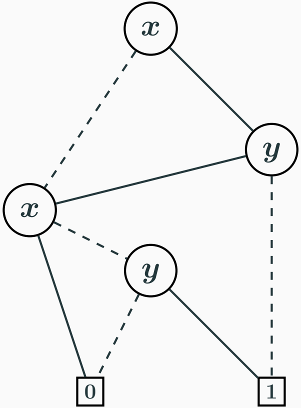
exemplo: $(x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$

Passo 3c: redução do BDD gerado



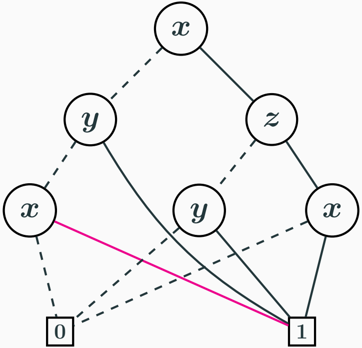
comparação com a tabela-verdade

$$f(x, y) \overset{\text{def}}{=} (x \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y)$$



x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

múltiplas ocorrências de mesma variável

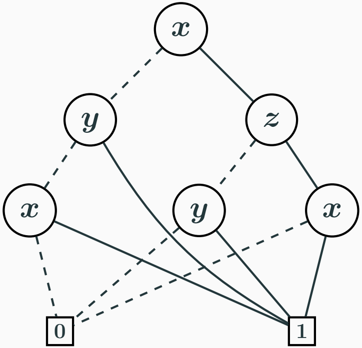


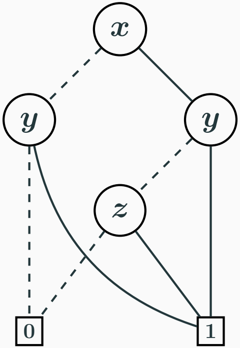
- A definição não impede uma variável de ocorrer mais de uma vez em um caminho
- Mas tal representação pode incorrer em desperdícios
  - linha sólida do x à esquerda (colorida) jamais será percorrida

Comum após as operações de conjunção e disjunção discutidas anteriormente (algoritmos melhores serão discutidos à frente)

comparação de BDDs

Além de tornar um BDD ineficiente, ocorrências múltiplas de uma variável também dificultam a comparação de BDDs





BDDs ordenados

- Quando a ordem das variáveis de teste nos caminhos que levam da raiz até uma folha é sempre a mesma, o BDD é dito *ordenado*
  - e passa a ser chamado Diagrama de Busca Binária Ordenado (OBDD)
- Esse compromisso com a ordem dá uma representação única de funções booleanas com OBDDs

teorema: obdds reduzidos são únicos

Teorema 6.7

A representação em OBDD reduzido de uma função dada f é unica. Isto é, sejam B e B' dois OBDDs reduzidos com ordens compatíveis. Se B e B' representam a mesma função booleana, então eles têm estruturas idênticas.

características de OBDDs

- As simplificações C1-C3 em um OBDD produzem sempre o mesmo OBDD reduzido
  - chamado então de *forma canônica*
- ODDBs permitem representações compactas de certas classes de funções booleanas
  - que seriam exponenciais em outros formatos/representações
- Por outro lado, as operações $\cdot$ e $+$ apresentadas anteriormente não funcionam
  - pois podem introduzir ocorrÊncias múltiplas de uma mesma variável

importância da representação canônica

- **Ausência de variáveis redundantes**. Se o valor de uma função booleana não depende de uma variável, então nenhum ODDB reduzido que a represente contém tal variável;

- **Teste de equivalência semântica**. Se duas funções são representadas por ODDBs com ordem compatível, é possível decidir eficientemente se são equivalentes reduzindo seus ODDBs e comparando sua estrutura;

- **Teste de validade**. Se uma função booleana é válida, seu ODDB reduzido é igual a B_1;

- **Teste de implicação**. Pode-se testar se uma função f implica em outra g calculando o ODDB para $f \cdot g$ e verificando que ele é igual a B_0;

- **Teste de satisfação**. Se uma função booleana é satisfeita, então seu ODDB reduzido não é igual a B_0.

algoritmo `reduzir`

algoritmo `aplicar`

algoritmo `restringir`

algoritmo `existe`