Diagramas de Decisão Binária (BDDs)

Luiz Carlos Vieira

4 de Outubro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

conteúdo

- Representação de Funções Booleanas
  - fórmulas proposicionais e tabelas-verdade
  - diagramas de decisão binária (BDDs)
  - diagramas de decisão binária ordenados (OBDDs)
- Algoritmos para OBDDs Reduzidos
  - algoritmo `reduzir`
  - algoritmo `aplicar`
  - algoritmo `restringir`
  - algoritmo `existe`

funções booleanas

- Parte fundamental do formalismo descritivo de sistemas de *hardware* e *software*
- Que precisa ser computacionalmente representado de forma eficiente

definição: variáveis booleanas

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, ..., e x, y e z, ...

definição: funções booleanas

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

funções e variáveis booleanas

- Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0, 1\}^n$ para $\{0, 1\}$.
- Escreve-se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em $\mathcal{V}$.

alguns exemplos de funções booleanas

1. $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$
2. $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$
3. $h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$
4. $k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$

wffs e tabelas-verdade

As fórmulas proposicionais bem-formadas (*wffs*) e as tabelas-verdade são duas representações de funções booleanas

- **fórmulas proposicionais**:
  - $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ denota $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$
  - $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ denota $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$
  - $\neg \boldsymbol{p}$ denota $\overline{\boldsymbol{p}}$
  - e $\top$ e $\perp$ denotam, respectivamente, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$
- **tabelas-verdade**: representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela-verdade da função booleana $\boldsymbol{f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{f(x,y)}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Tabela-verdade da fórmula proposicional $\boldsymbol{\phi \equiv \neg(p \vee q)}$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\phi}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$

sobre o sistema utilizado...

- No contexto desta aula, tabelas-verdade, fórmulas proposicionais e BDDs (em estudo) são diferentes formas de representação computacional de funções booleanas

- Uma vez que tais representações são facilmente traduzíveis entre si, os símbolos da lógica proposicional serão utilizados com o objetivo de facilitar o entendimento
    - a única distinção será a utilização de $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ no lugar de $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{V}$ nas representações de tabelas-verdade e diagramas

vantagens e desvantagens

Há vantagens e desvantagens no uso de tabelas-verdade e fórmulas proposicionais para representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	**Fórmulas Proposicionais**
Vantagens	verificações[1] simples	representação compacta
Desvantagens	ineficientes em espaço	verificações[1] não tão simples

Ambas são computacionalmente caras para muitas variáveis

[1] satisfação, validade e equivalência

também nas operações booleanas

As operações booleanas ($\wedge$, $\vee$ e $\neg$) entre duas funções ϕ e ψ também são simples:

- Com tabelas-verdade
  - operação diretamente aplicada a cada linha
  - acrescentando variáveis inexistentes, se necessário
  - mas computacionamente caro (2^n linhas)
- Com fórmulas proposicionais
  - manipulação sintática da Lógica Proposicional
  - de realização imediata

por exemplo: disjunção

$\phi \equiv \neg p \wedge q$

p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$\psi \equiv r$

r	ψ
0	0
1	1

por exemplo: disjunção

$\phi \equiv \neg p \wedge q$

p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$\psi \equiv r$

r	ψ
0	0
1	1

$\omega \equiv \phi \vee \psi$

por exemplo: disjunção

$\phi \equiv \neg p \wedge q$ $\psi \equiv r$ $\omega \equiv \phi \vee \psi$

p	q	r	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

p	q	r	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

por exemplo: disjunção

$\phi \equiv \neg p \wedge q$

p	q	r	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\psi \equiv r$

p	q	r	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\omega \equiv \phi \vee \psi$

p	q	r	ω
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

utilizando formas normais

- A representação de fórmulas proposicionais em formas normais é facilitada em alguns aspectos
    - mas é dificultada em outros
- De forma geral, elas podem ser muito longas no pior caso

forma normal conjuntiva (CNF)

- Facilita o teste de validade
  - cláusula disjuntiva sem preposições complementares
  - teste de satisfação não é igualmente fácil
- Facilita a operação de conjunção ($\wedge$)
  - se ϕ e ψ são CNFs, o resultado de $\phi \wedge \psi$ é CNF
- Dificulta as demais operações ($\vee$ e $\neg$)
  - aplicação de distributividade para manter CNF

A forma normal disjuntiva (DNF) – disjunção de conjunções – é dual com a CNF em relação a essas propriedades

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de satisfação	teste de validade	operações booleanas $\cdot$	operações booleanas $+$	operações booleanas $^{-}$
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de satisfação	teste de validade	operações booleanas $\cdot$	operações booleanas $+$	operações booleanas $\bar{\ }$
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
OBDDs[2] reduzidos	muitas vezes	fácil	fácil	mais ou menos	mais ou menos	fácil

[2] Diagramas de Decisão Binária Ordenados – que serão explorados a seguir

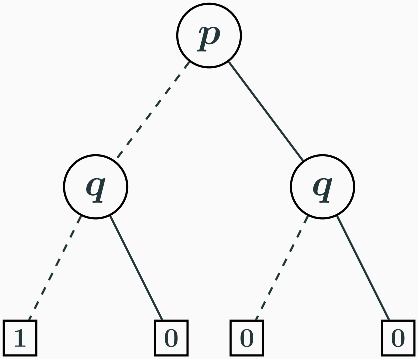
definição: árvore de decisão binária finita

Definição 6.3

Seja T uma árvore binária cujos nós não-terminais (nós de teste) contêm variáveis booleanas e cujos nós terminais contêm os valores 0 ou 1. Então T é uma árvore de decisão binária finita e determina *uma única* função booleana f da seguinte forma:

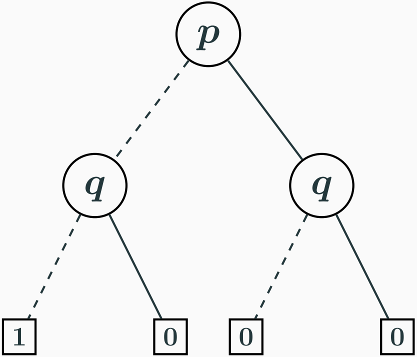
> *Dada uma atribuição de 0's e 1's às variáveis booleanas que ocorrem em f, começamos pela raiz de T e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é 0; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.*

por exemplo



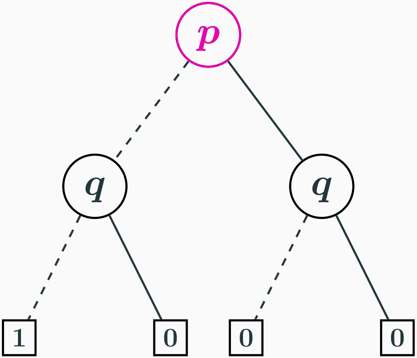
- Árvore da função: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

por exemplo



- Árvore da função: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$
- Para encontrar $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}}$:

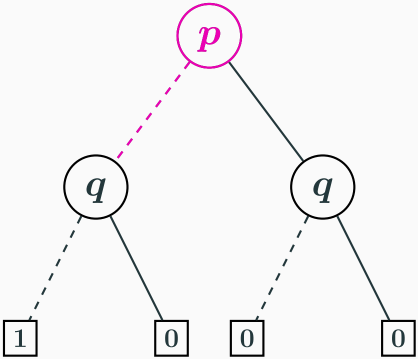
por exemplo



- Árvore da função:
  $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

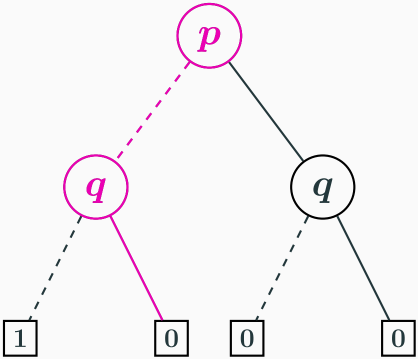
- Para encontrar $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}}$:
  1. inicia-se pela raiz

por exemplo



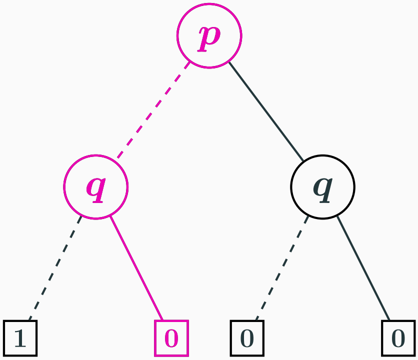
- Árvore da função: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$
- Para encontrar $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}}$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como p é $\mathbf{0}$, segue-se pela linha pontilhada

por exemplo



- Árvore da função: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$
- Para encontrar $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}}$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como p é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como q é 1, segue-se pela linha sólida

por exemplo

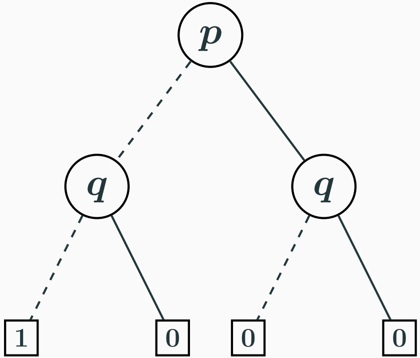


- Árvore da função:
  $\phi \equiv \neg(p \vee q)$

- Para encontrar $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}}$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como p é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como q é 1, segue-se pela linha sólida
  4. chega-se à folha 0; logo $[\![\phi]\!]_{v_{(0,1)}} = 0$

comparando com a tabela-verdade

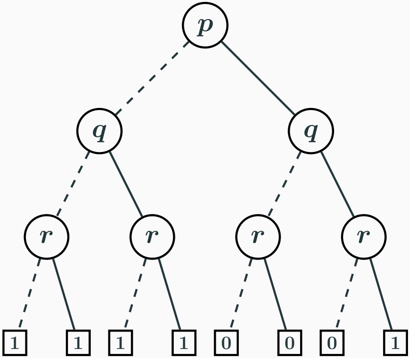
Função booleana: $\phi \equiv \neg(p \vee q)$:



p	q	ϕ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

outro exemplo comparativo

Função booleana: $\psi \equiv p \to (q \wedge r)$:

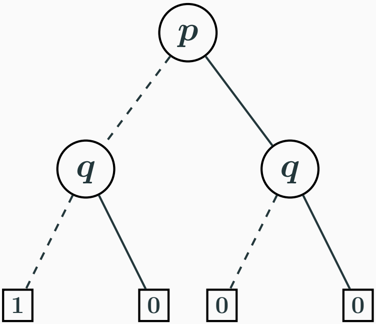


p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
  - se $\boldsymbol{f}$ depender de $\boldsymbol{n}$ variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $\mathbf{2^{n+1}-1}$ nós (contra as $\mathbf{2^{n}}$ linhas da tabela verdade)
- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

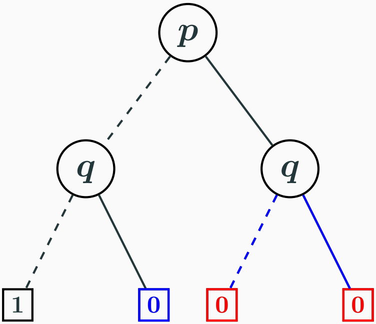
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

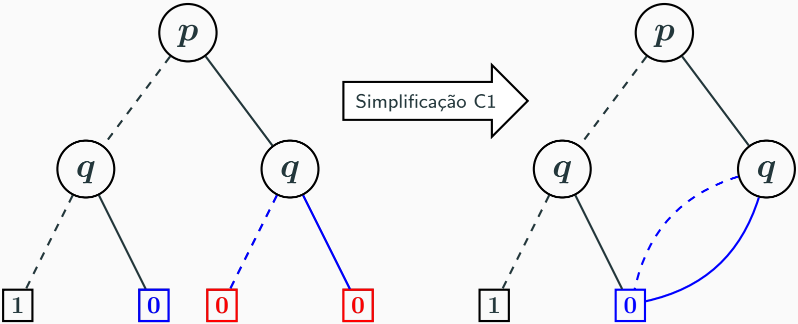
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

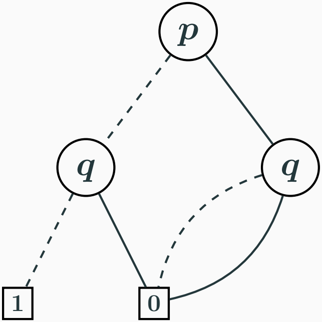
primeira simplificação



C1. Remoção de terminais duplicados

Se há mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, todas as arestas que apontam para tais nós são redirecionadas para apenas um deles. O processo é então repetido para os nós terminais* $\mathbf{1}$

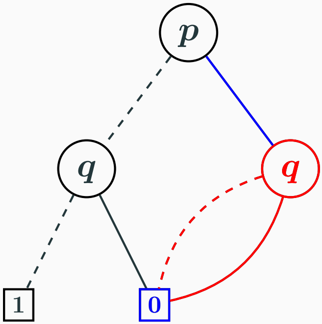
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

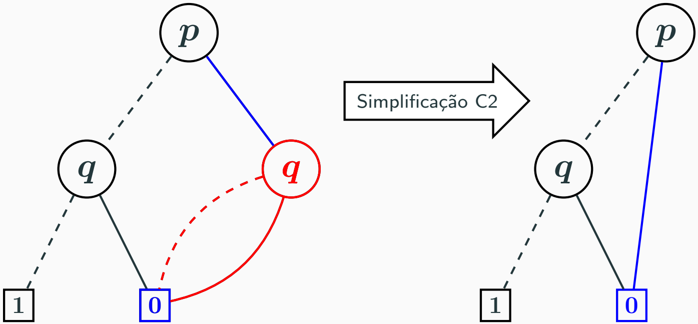
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

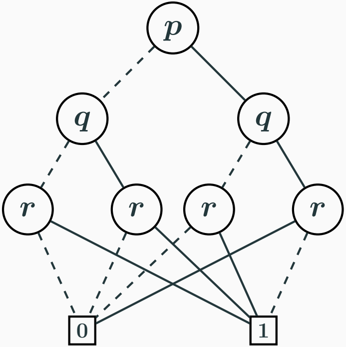
segunda simplificação



C2. Remoção de testes redundantes

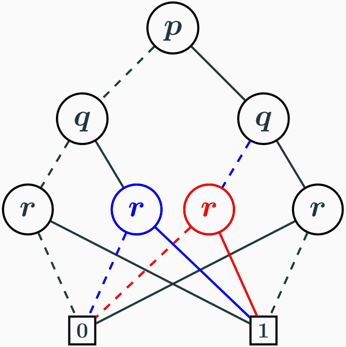
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, o nó n é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas diretamente para o nó m.

terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados
Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

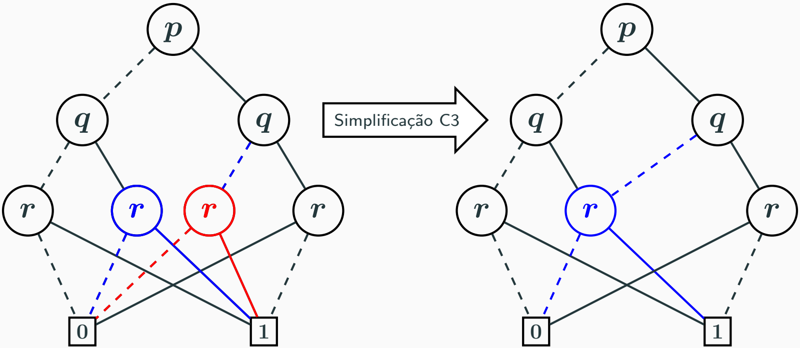
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

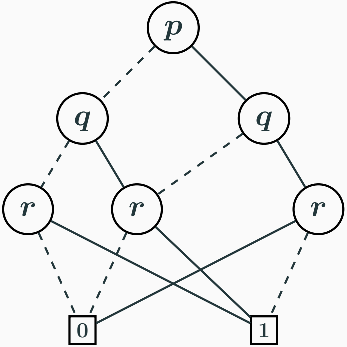
terceira simplificação



C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

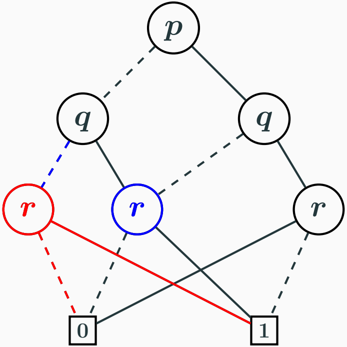
Se dois nós distintos n e m são raízes de subárvores idênticas, um dos nós é eliminado e todas as arestas que nele chegavam são redirecionadas para o outro

processo de redução



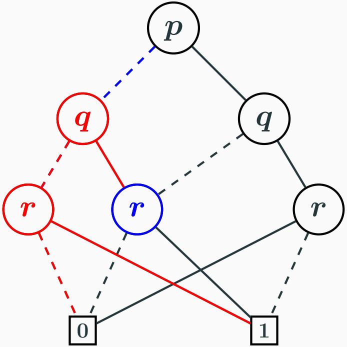
As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós $\boldsymbol{r}$ duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão $\boldsymbol{q}$ redundante (C2)

processo de redução



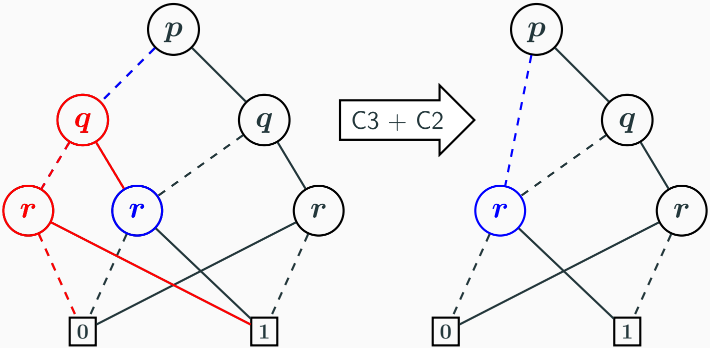
As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós $\boldsymbol{r}$ *duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão* $\boldsymbol{q}$ *redundante (C2)*

processo de redução



As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós $\boldsymbol{r}$ *duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão* $\boldsymbol{q}$ *redundante (C2)*

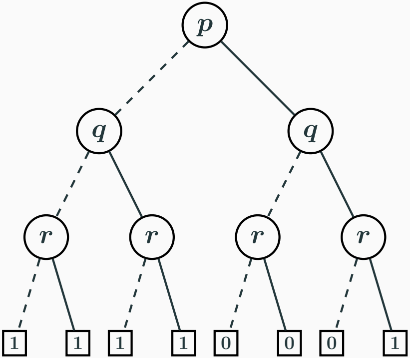
processo de redução



As simplificações são encadeadas até não mais ser possível. O exemplo anterior é completamente reduzido após a eliminação de um dos nós r duplicados (C3) seguida da eliminação de um ponto de decisão q redundante (C2)

exercício 1

Reduza a árvore de decisão binária da função $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ apresentada anteriormente:



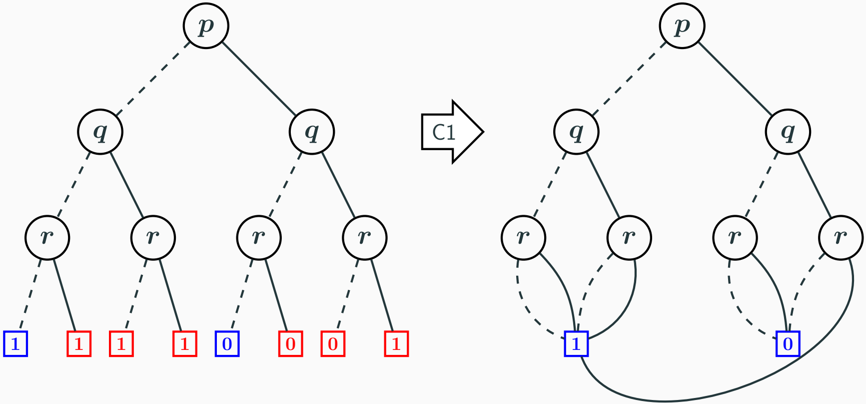
Resumo das simplificações:

C1. Remoção de nós terminais duplicados

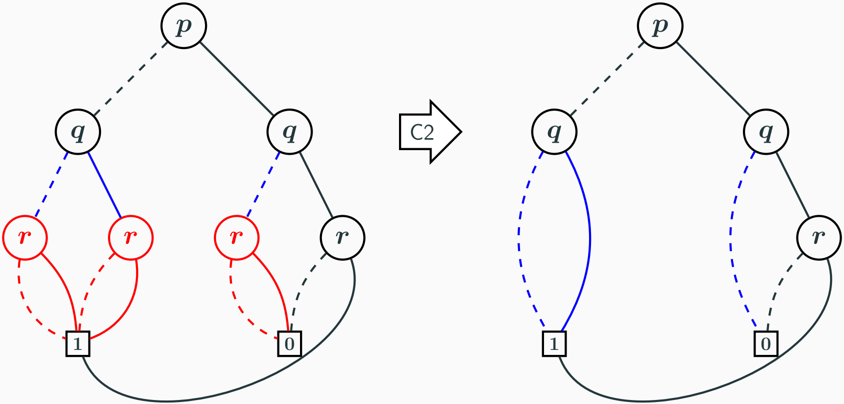
C2. Remoção de testes redundantes

C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

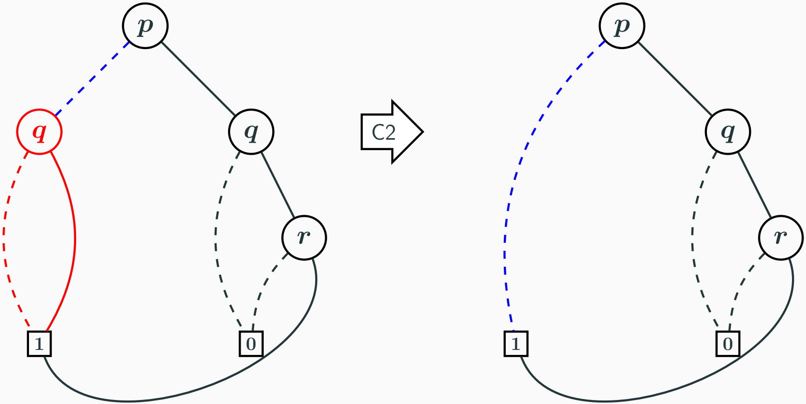
solução – 1º passo



solução – 2º passo

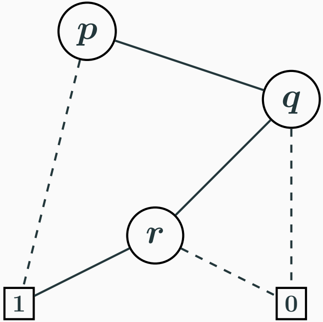


solução – 3º passo



comparando com a tabela-verdade

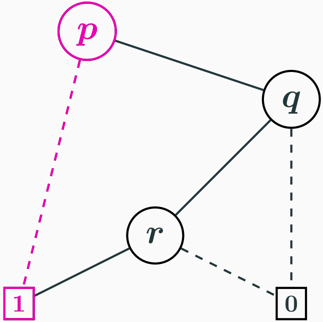
Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

comparando com a tabela-verdade

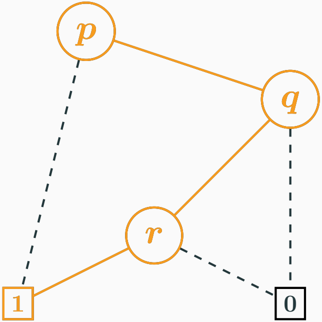
Função booleana: $\psi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

comparando com a tabela-verdade

Função booleana: $\psi \equiv p \to (q \wedge r)$:



p	q	r	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

BDDs

A redução faz com que as árvores se tornem grafos. Por isso, passam a ser chamados de **Diagramas de Decisão Binária (BDDs)**.

definição: DAG

Definição 6.4

Um grafo direcionado é um conjunto G e uma relação binária $\rightarrow$ em $G : \rightarrow \subseteq G \times G$. Um ciclo em um grafo direcionado é um caminho finito no grafo que começa e termina no mesmo nó, isto é, um caminho da forma $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$. Um grafo direcionado acíclico (DAG) é um grafo direcionado que não contém nenhum ciclo. Um nó em um DAG é dito inicial se não há arestas apontando para ele. Um nó é dito terminal se não há arestas saindo dele.

definição: BDDs

Definição 6.5

Um diagrama de decisão binário (BDD) é um DAG finito com um único nó inicial, onde todos os nós terminais são marcados com $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$ e todos os nós não-terminais são marcados com uma variável booleana. Cada nó não-terminal tem exatamente duas arestas saindo dele, uma marcada com $\mathbf{0}$ e outra com $\mathbf{1}$ (representadas como uma linha pontilhada e uma linha sólida, respectivamente).

BDD como DAG

- Por convenção, as linhas sólidas ou pontilhadas de um BDD são sempre consideradas como indo para baixo
  - por isso eles são grafos direcionados
- Os BDDs são acíclicos (DAG) e têm um único nó inicial
- As simplificações C1–C3 preservam essas propriedades
  - BDDs totalmente reduzidos têm 1 ou 2 nós terminais

BDDs elementares

- O BDD B_0 representa a função booleana constante $\mathbf{0}$
- O BDD B_1 representa a função booleana constante $\mathbf{1}$
- O BDD B_p representa a variável booleana p

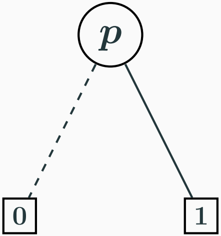
B_0
($\phi \equiv \bot$)

$\boxed{0}$

B_1
($\phi \equiv \top$)

$\boxed{1}$

B_p
($\phi \equiv p$)



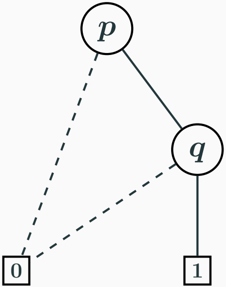
verificações sobre BDDs

- **Satisfação**. Um BDD representa uma função que pode ser satisfeita se um nó terminal $\mathbf{1}$ pode ser acessado da raiz por meio de um caminho consistente
- **Validade**. Um BDD representa uma função válida se nenhum ponto terminal $\mathbf{0}$ é acessível por um caminho consistente

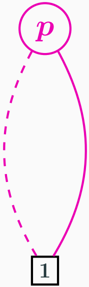
Um caminho consistente é aquele que, iniciado no nó raiz, segue apenas por uma valoração possível para cada variável booleana e atinge um único nó-terminal com valor $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$

exemplos óbvios

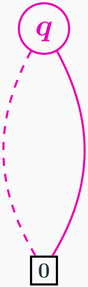
$\phi \equiv p \wedge q$



$\psi \equiv p \vee \neg p$



$\omega \equiv q \wedge \neg q$



comparação das representações

Considere a função de paridade par $\boldsymbol{f_{par}(p_1, p_2, ..., p_n)}$ que é definida como $\mathbf{1}$ se existe um número par de variáveis $\boldsymbol{p_i}$ com valor $\mathbf{1}$, e como $\mathbf{0}$ caso contrário.

Bit de paridade (par ou ímpar) é uma das formas mais simples de detecção de erros na comunicação de dados

- Ela tem representação exponencial em outros sistemas (wffs ou tabelas-verdade, por exemplo)

- Enquanto que um BDD precisa de apenas $\boldsymbol{2n+1}$ nós para representá-la

ilustração da tabela-verdade para $n = 4$

p_1	p_2	p_3	p_4	ϕ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

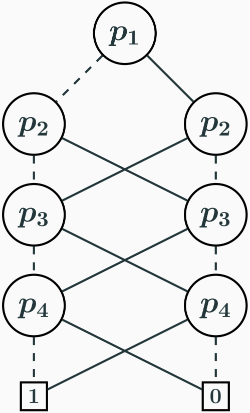
- Total de linhas: $2^n = 2^4 = 16$

ilustração da wff para $n = 4$

$$\phi \equiv \neg(((p_1 \oplus p_2) \oplus p_3) \oplus p_4)$$

- Lembrando do ou-exclusivo:
  - $(p \oplus q) \equiv ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$
- Número de símbolos: $14(n-1)+1 = 43$

ilustração do OBDD para $n = 4$



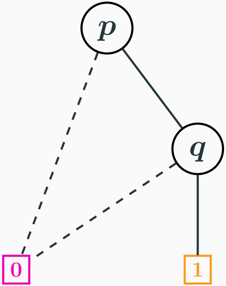
- Total de nós: $2n + 1 = 9$

operações sobre BDDs

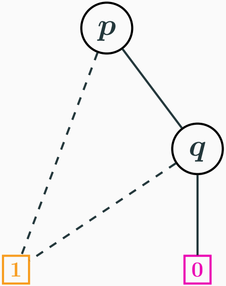
- **Operação de negação ($\neg$).** Obtem-se um BDD que representa $\neg\phi$ substituindo todos os terminais $\mathbf{0}$ em $\boldsymbol{B_\phi}$ por terminais $\mathbf{1}$ e vice-versa
- **Operação de conjunção ($\wedge$).** Obtem-se um BDD que representa $\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ substituindo todos os nós terminais $\mathbf{1}$ em $\boldsymbol{B_\phi}$ diretamente por $\boldsymbol{B_\psi}$
- **Operação de disjunção ($\vee$).** Obtem-se um BDD que representa $\boldsymbol{\phi} \vee \boldsymbol{\psi}$ substituindo todos os nós terminais $\mathbf{0}$ em $\boldsymbol{B_\phi}$ diretamente por $\boldsymbol{B_\psi}$

exemplo da negação

$$\phi \equiv p \land q$$

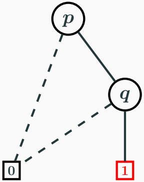


$$\neg\phi \equiv \neg(p \land q)$$

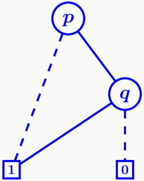


exemplo da conjunção

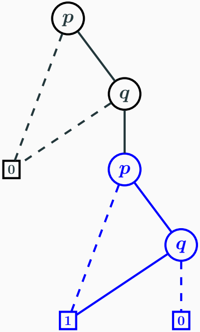
$$\phi \equiv p \wedge q$$



$$\psi \equiv \neg p \vee q$$

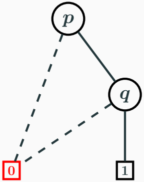


$$\phi \wedge \psi \equiv (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$$

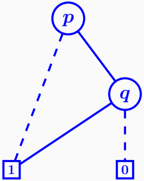


exemplo da disjunção

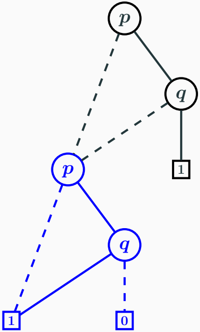
$$\phi \equiv p \wedge q$$



$$\psi \equiv \neg p \vee q$$



$$\phi \vee \psi \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$



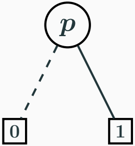
forma “inocente” de construir BDDs

1. Para cada variável booleana em uma função, um BDD de variável ($\boldsymbol{B_{p_i}}$) é criado
2. Tais BDDs são então unidos conforme as operações booleanas na função
3. Por fim, o BDD resultante é reduzido com as simplificações C1-C3

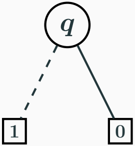
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 1: criação de B_{p_i}

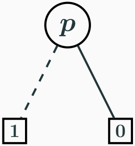
B_p



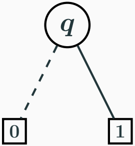
$B_{\neg q}$



$B_{\neg p}$



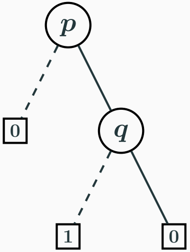
B_q



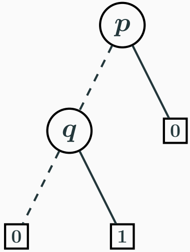
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 2a: união dos BDDs conforme as operações

$B_p \wedge B_{\neg q}$



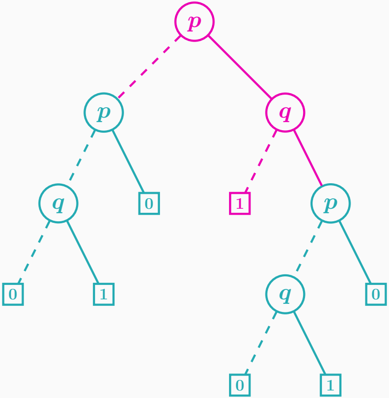
$B_{\neg p} \wedge B_q$



exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

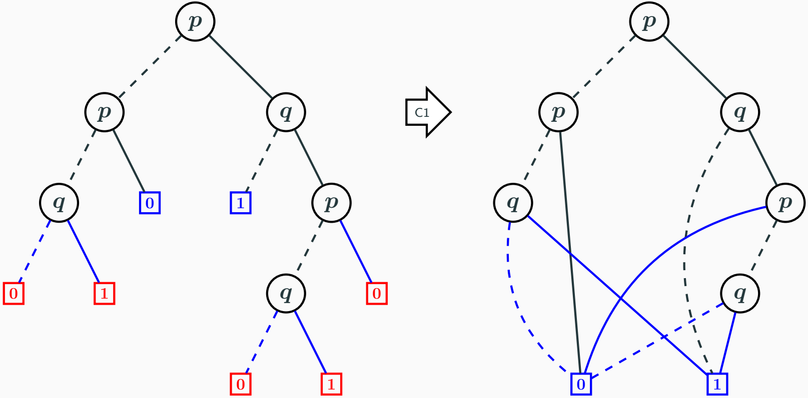
Passo 2b: união dos BDDs conforme as operações

$$(B_p \wedge B_{\neg q}) \vee (B_{\neg p} \wedge B_q)$$



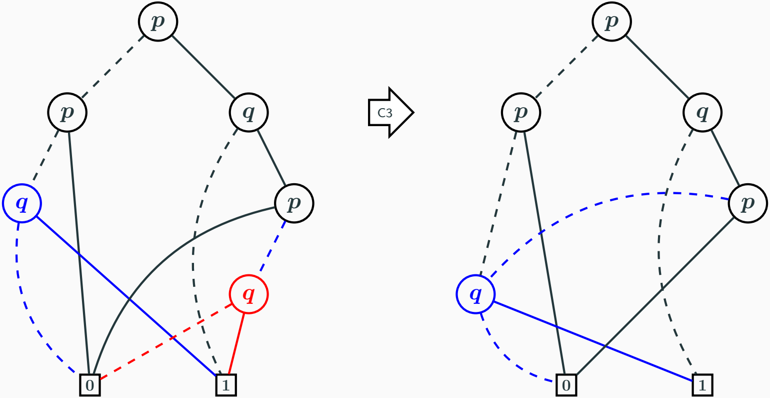
exemplo: $(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$

Passo 3a: redução do BDD gerado



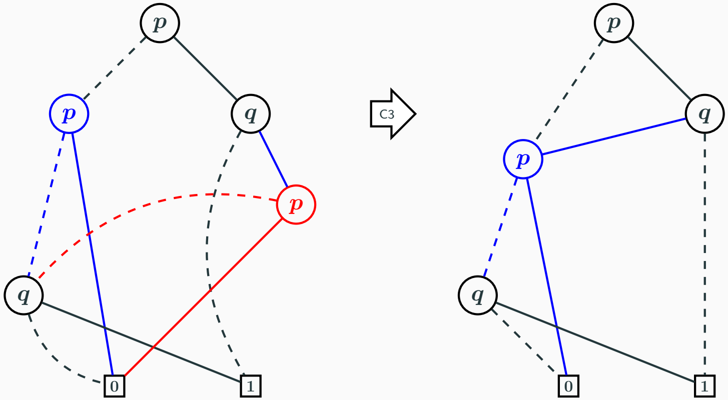
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 3b: redução do BDD gerado



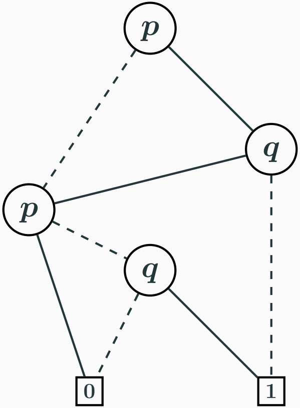
exemplo: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Passo 3c: redução do BDD gerado



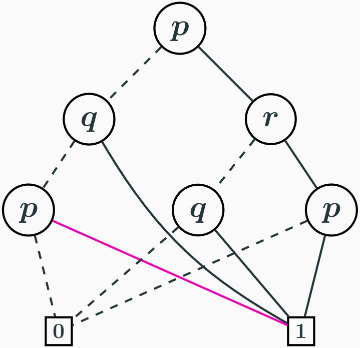
comparação com a tabela-verdade

$$\phi \equiv (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$$



p	q	ϕ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

múltiplas ocorrências de mesma variável



- A definição não impede uma variável de ocorrer mais de uma vez em um caminho

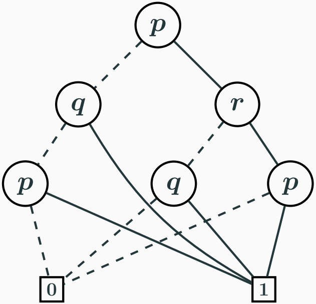
- Mas tal representação pode incorrer em desperdícios
  - linha sólida do p à esquerda (colorida) jamais será percorrida

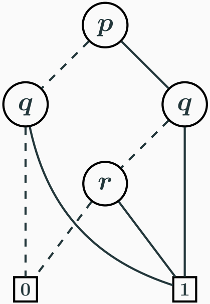
Esse é um resultado comum após as operações discutidas anteriormente – algoritmos melhores serão apresentados posteriormente

comparação de BDDs

Além de tornar um BDD menos eficiente, ocorrências múltiplas de uma variável também dificultam a comparação de BDDs

Exercício: Os BDDs abaixo são equivalentes?





ordenação de BDDs

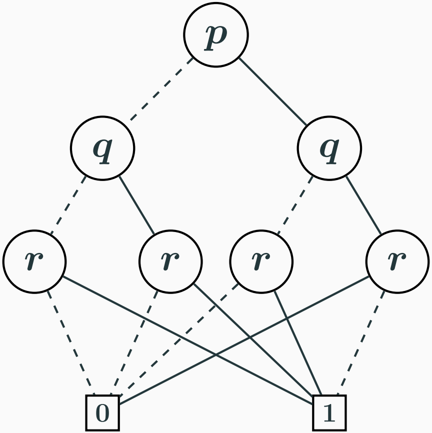
- Se a ordem das variáveis de teste nos caminhos que levam da raiz até as folhas fosse a mesma, a comparação seria trivial
    - bastaria verificar se os BDDs têm a mesma estrutura
- Quando a ordem das variáveis de teste é sempre a mesma, o BDD é dito *ordenado*
    - e passa a ser chamado Diagrama de Busca Binária Ordenado (OBDD)

Definição 6.6

Seja $[p_1, p_2, ..., p_n]$ uma lista ordenada de variáveis sem duplicação e seja B um BDD tal que todas as suas variáveis aparecem em algum lugar da lista. Dizemos que B tem a ordem $[p_1, p_2, ..., p_n]$ se todos os nós de variáveis de B ocorrem na lista, e, para toda ocorrência de p_i seguido de p_j ao longo de qualquer caminho em B temos $i < j$.

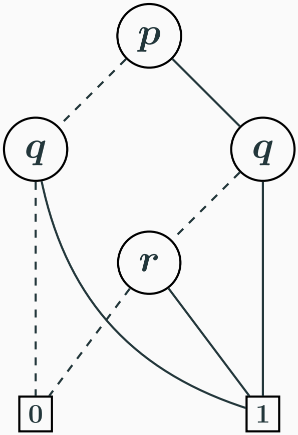
exemplo de BDD ordenado

Ordem: $[p, q, r]$



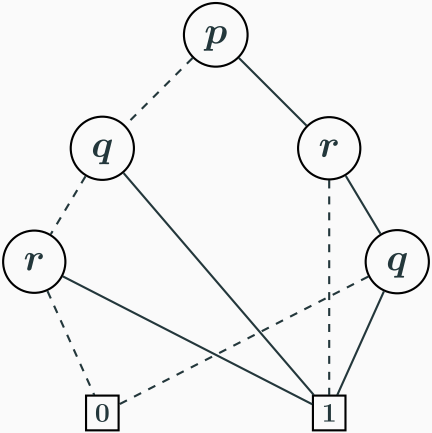
outro exemplo de BDD ordenado

Ordem: $[p, q, r]$



exemplo de BDD não ordenado

Sem ordem definida ($[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}]$ à esquerda e $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}]$ à direita)



vantagens da ordenação de BDDs

- A comparação de dois BDDs de ordens compatíveis é imediata

- Aplicações das reduções C1-C3 em um OBDD garantidamente mantêm sua ordem original

- Esse compromisso com a ordem produz uma representação única de funções booleanas com OBDDs reduzidos
    - chamada de *forma canônica*

teorema: OBDDs reduzidos são únicos

Teorema 6.7

A representação em OBDD reduzido de uma função dada ϕ é unica. Isto é, sejam B e B' dois OBDDs reduzidos com ordens compatíveis. Se B e B' representam a mesma função booleana, então eles têm estruturas idênticas.

características de OBDDs

- As simplificações C1-C3 em um OBDD produzem sempre o mesmo OBDD reduzido
  - chamado então de *forma canônica*
- ODDBs permitem representações compactas de certas classes de funções booleanas
  - que seriam exponenciais em outros formatos/representações
- Por outro lado, as operações $\wedge$ e $\vee$ apresentadas anteriormente não funcionam
  - pois podem introduzir ocorrências múltiplas de uma mesma variável

impacto da escolha da ordenação

importância da representação canônica

- **Ausência de variáveis redundantes**. Se o valor de uma função booleana não depende de uma variável, então nenhum OBDD reduzido que a represente contém tal variável;
- **Teste de equivalência semântica**. Se duas funções são representadas por OBDD com ordem compatível, é possível decidir eficientemente se são equivalentes reduzindo seus OBDD e comparando sua estrutura;
- **Teste de validade**. Se uma função booleana é válida, seu OBDD reduzido é igual a $\boldsymbol{B_1}$;
- **Teste de implicação**. Pode-se testar se uma função $\boldsymbol{\phi}$ implica em outra $\boldsymbol{\psi}$ calculando o OBDD para $\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ e verificando que ele é igual a $\boldsymbol{B_0}$;
- **Teste de satisfação**. Se uma função booleana é satisfeita, então seu OBDD reduzido não é igual a $\boldsymbol{B_0}$.