DIAGRAMAS DE DECISÃO BINÁRIOS (DDB'S)

Luiz Carlos Vieira

22 de Setembro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES BOOLEANAS

funções booleanas

- Formalismo descritivo importante para sistemas de *hardware* e de *software*
    - tais como circuitos síncronos e assíncronos
    - sistemas reativos
    - e programas de estados finitos
- Representação computacional eficiente
    - e que auxilia na verificação de sistemas

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, $\cdots$, e x, y e z, $\cdots$

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

variáveis e funções booleanas

Ou seja:

Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0,1\}^n$ para $\{0,1\}$. Escrevemos $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em $\mathcal{V}$.

Note que $\cdot$, $+$ e $\oplus$ são funções booleanas com duas variáveis, enquanto que $\bar{\ }$ é uma função booleana com uma única variável. As funções binárias $\cdot$, $+$ e $\oplus$ são escritas em notação infixa, isto é, escrevemos $x + y$ em vez de $+(x, y)$, etc.

alguns exemplos de funções booleanas

1. $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$

2. $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$

3. $h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$

4. $k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$

representação de funções booleanas

O que já se estudou até então são duas formas de se representar funções booleanas.

- **fórmulas proposicionais**:
  - $\wedge$ denota $\cdot$
  - $\vee$ denota $+$
  - $\neg$ denota $\bar{\ }$
  - e $\top$ e $\perp$ denotam, respectivamente, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$
- **tabelas-verdade**: representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela 1: Tabela-verdade da função booleana $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tabela 2: Tabela-verdade da fórmula proposicional $\phi : \neg(p \vee q)$

p	q	ϕ
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

vantagens e desvantagens

Tabela 3: Vantagens e desvantagens das tabelas-verdade e das fórmulas proposicionais ao representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	**Fórmulas Proposicionais**
Vantagens	• operações[1] simples	• representação compacta
Desvantagens	• ineficientes em espaço • computacionalmente intratável	• operações[1] difíceis • computacionalmente custoso

[1] verificação de satisfação e validade, e comparação de duas funções booleanas

comparação geral

Tabela 4: Comparação geral das formas de representação de funções booleanas

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de satisfação	teste de validade	operações booleanas $\cdot$	operações booleanas $+$	operações booleanas $\overline{\ }$
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas FND	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
fórmulas FNC	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
DDBO's reduzidos	muitas vezes	fácil	fácil	+/-	+/-	fácil

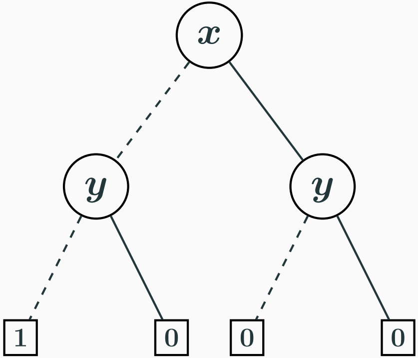
definição: árvore de decisão binária finita

Definição 6.3

Seja T uma árvore de decisão binária finita. Então T determina *uma única* função booleana das variáveis nos nós não-terminais da seguinte maneira:

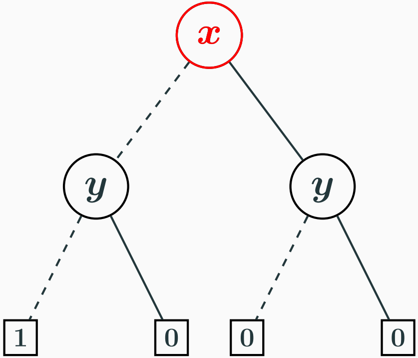
> *Dada uma atribuição de $\mathbf{0}$'s e $\mathbf{1}$'s às variáveis booleanas que ocorrem em T, começamos pela raiz de T e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é $\mathbf{0}$; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.*

por exemplo



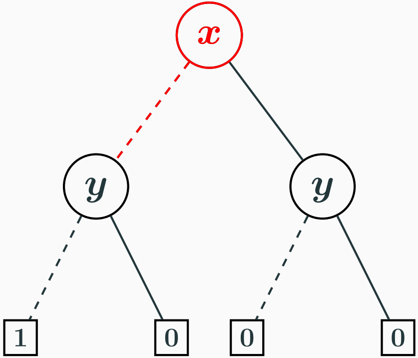
- Árvore da função: $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:

por exemplo



- Árvore da função: $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz

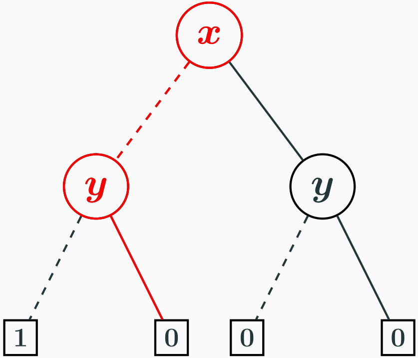
por exemplo



- Árvore da função:
  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

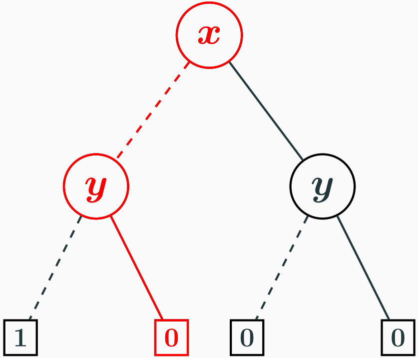
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é $\mathbf{0}$, segue-se pela linha pontilhada

por exemplo



- Árvore da função: $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida

por exemplo



- Árvore da função: $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
  1. inicia-se pela raiz
  2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
  3. como y é 1, segue-se pela linha sólida
  4. chega-se à folha 0; logo $f(0, 1) = 0$

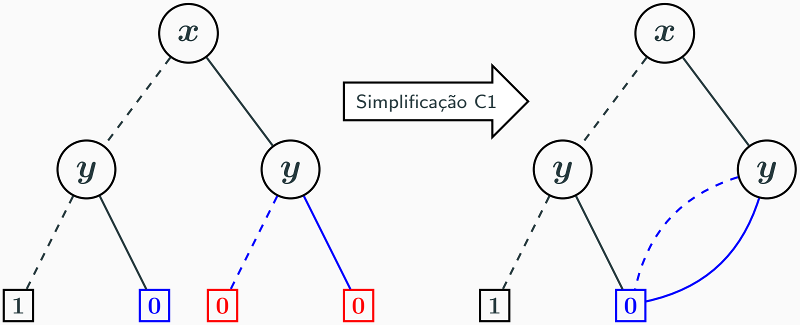
semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
  - se f depender de n variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $2^{n+1} - 1$ nós (contra as 2^n linhas da tabela verdade)

- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

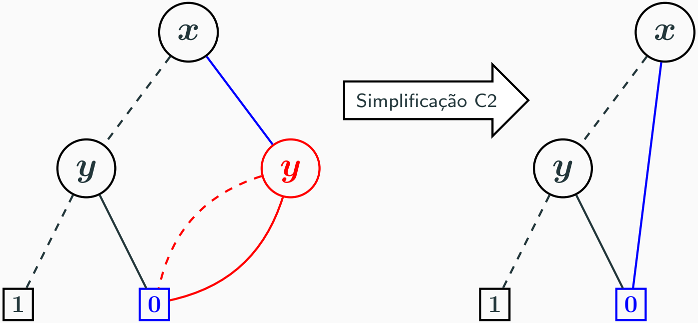
A exploração de redundâncias em Árvores de Decisão Binárias faz com que deixem de ser árvores e se tornem grafos. Assim, passam a ser chamados de Diagramas de Decisão Binários (BDDs).

remoção de nós terminais duplicados



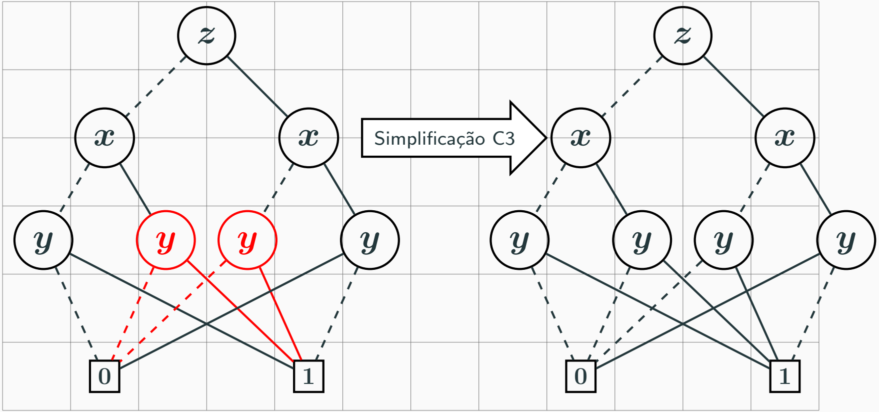
Se um DDB contém mais de um nó terminal $\mathbf{0}$*, redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com* $\mathbf{1}$

remoção de testes redundantes

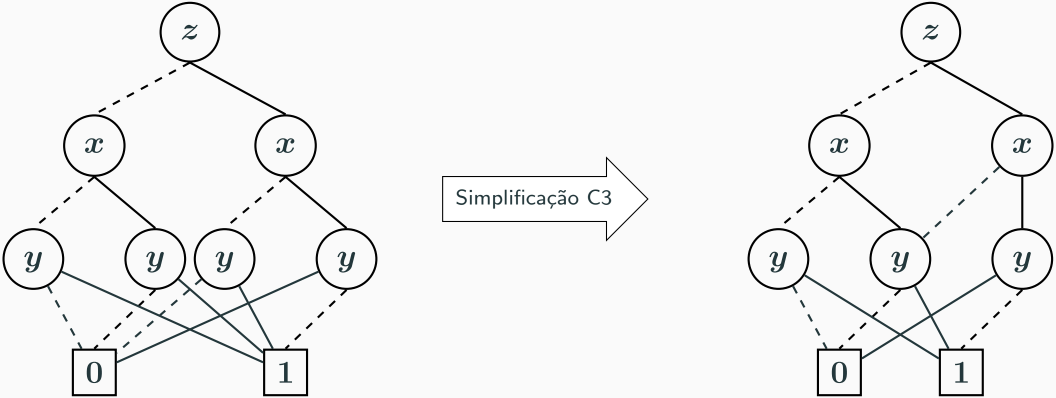


Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m, elimina-se o nó n, enviando todas as arestas que nele chegavam para m.

teste



remoção de nós não-terminais duplicados



Se dois nós distintos n e m são raizes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

mais simplificações