

Diagramas de Decisão Binários (DDBs)

Luiz Carlos Vieira

24 de Setembro de 2015

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

conteúdo

- Representação de Funções Booleanas
 - fórmulas proposicionais e tabelas-verdade
 - diagramas de decisão binários (DDBs)
 - diagramas de decisão binários ordenados (DDBOs)
- Algoritmos para DDBOs Reduzidos
 - algoritmo reduzir
 - algoritmo aplicar
 - algoritmo restringir
 - algoritmo existe

Representação de Funções Booleanas

funções booleanas

- Parte do formalismo descritivo de sistemas de *hardware* e *software*
- Que precisa ser representado computacionalmente de forma eficiente

definição: variáveis booleanas

Definição 6.1(a)

Uma variável booleana x é uma variável que só pode assumir os valores 0 e 1. Denotamos variáveis booleanas por x_1, x_2, \dots , e x, y e z, \dots

definição: funções booleanas

Definição 6.1(b)

As seguintes funções são definidas no conjunto $\{0, 1\}$:

- $\overline{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ e $\overline{1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se x e y têm valor 1; caso contrário, $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} 0$;
- $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 0$ se x e y têm valor 0; caso contrário, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 1$ se exatamente um entre x e y é igual a 1; caso contrário, $x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

funções e variáveis booleanas

- Uma função booleana f com n variáveis é uma função de $\{0, 1\}^n$ para $\{0, 1\}$.
- Escreve-se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $f(\mathcal{V})$ para indicar que uma representação sintática de f só depende das variáveis booleanas em \mathcal{V} .

alguns exemplos de funções booleanas

$$1. f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (y + \overline{x})$$

$$2. g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y + (1 \oplus \overline{x})$$

$$3. h(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y \cdot (x \oplus \overline{y})$$

$$4. k() \stackrel{\text{def}}{=} 1 \oplus (0 \cdot \overline{1})$$

wffs e tabelas-verdade

As fórmulas proposicionais bem-formadas (*wffs*) e as tabelas-verdade são duas formas de se representar funções booleanas

- **fórmulas proposicionais:**

- \wedge denota \cdot
- \vee denota $+$
- \neg denota $-$
- e \top e \perp denotam, respectivamente, 1 e 0

- **tabelas-verdade:** representam funções booleanas de maneira óbvia

tabelas-verdade de funções booleanas

Tabela-verdade da função booleana

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$$

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tabela-verdade da fórmula proposicional

$$\phi \equiv \neg(p \vee q)$$

p	q	ϕ
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

vantagens e desvantagens

Há vantagens e desvantagens no uso de tabelas-verdade e fórmulas proposicionais para representar funções booleanas

	Tabelas-Verdade	Fórmulas Proposicionais
Vantagens	<ul style="list-style-type: none">• operações¹ simples	<ul style="list-style-type: none">• representação compacta
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none">• ineficientes em espaço• computacionalmente intratável	<ul style="list-style-type: none">• operações¹ difíceis• computacionalmente intratável

¹verificação de satisfação e validade, e comparação de duas funções booleanas

operações sobre funções booleanas

As operações \cdot , $+$, \oplus e $-$ sobre duas funções f e g são realizadas de forma simples:

- Com tabelas-verdade
 - operação diretamente aplicada a cada linha, adicionando variáveis se necessário
 - mas computacionalmente intratável (2^n linhas)
- Com fórmulas proposicionais
 - manipulação sintática da Lógica Proposicional
 - por exemplo: $f \cdot g$ e $f \oplus g$ são respectivamente $\phi \wedge \psi$ e $(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$

utilizando formas normais

- As formas normais facilitam em alguns aspectos
 - e dificultam em outros
- Podem ser mais longas do que as fórmulas originais equivalentes não-normalizadas

forma normal conjuntiva (CNF)

- Facilita o teste de validade
 - busca de cláusula disjuntiva sem preposições complementares
 - teste de satisfação não é igualmente fácil
- Facilita a operação de conjunção (\cdot)
 - se f e g são CNFs, o resultado de $f \cdot g$ é CNF
- Dificulta as demais operações ($+$, \oplus e \neg)
 - distributividade recursiva para manter CNF

A forma normal disjuntiva (DNF) – disjunção de conjunções – é dual com a CNF em relação a essas propriedades

resumo da eficiência das representações

Representação de funções booleanas	compacta?	teste de		operações booleanas		
		satisfação	validade	.	+	-
fórmulas proposicionais	muitas vezes	difícil	difícil	fácil	fácil	fácil
fórmulas CNF	algumas vezes	difícil	fácil	fácil	difícil	difícil
fórmulas NDF	algumas vezes	fácil	difícil	difícil	fácil	difícil
tabelas-verdade ordenadas	nunca	difícil	difícil	difícil	difícil	difícil
DDBOs reduzidos ²	muitas vezes	fácil	fácil	mais ou menos	mais ou menos	fácil

²que ainda serão explorados nessa aula

definição: árvore de decisão binária finita

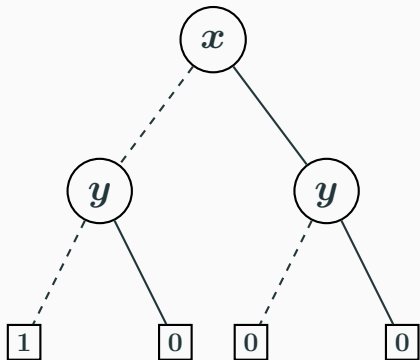
Definição 6.3

Seja T uma árvore de decisão binária finita. Então T determina *uma única* função booleana das variáveis nos nós não-terminais da seguinte maneira:

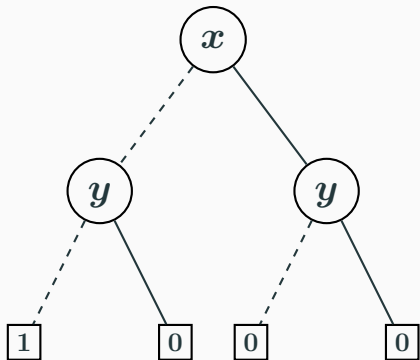
Dada uma atribuição de 0's e 1's às variáveis booleanas que ocorrem em T , começamos pela raiz de T e pegamos a linha tracejada sempre que o valor da variável no nó atual é 0; caso contrário, percorremos a linha sólida. O valor da função é o valor do nó terminal atingido.

por exemplo

- Árvore da função:
 $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$

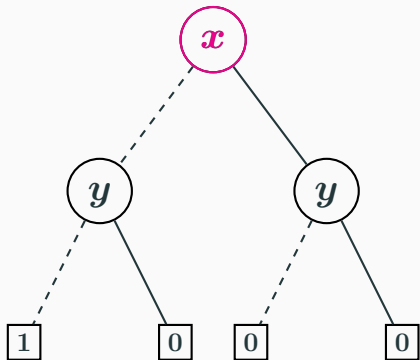


por exemplo



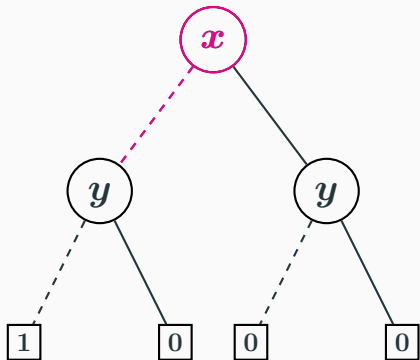
- Árvore da função:
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$$
- Para encontrar $f(0, 1)$:

por exemplo



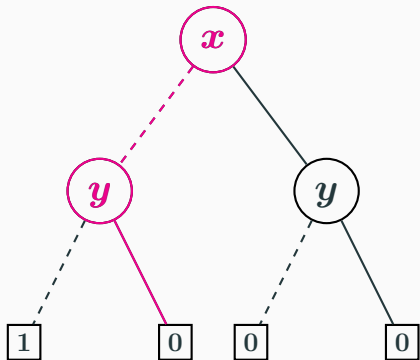
- Árvore da função:
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
 1. inicia-se pela raiz

por exemplo



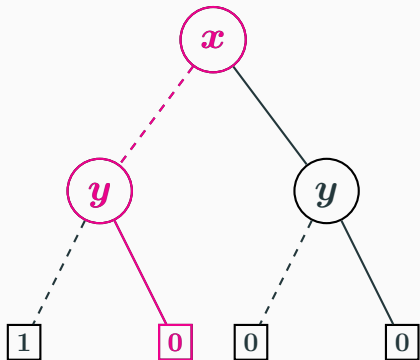
- Árvore da função:
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
 1. inicia-se pela raiz
 2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada

por exemplo



- Árvore da função:
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
 1. inicia-se pela raiz
 2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
 3. como y é 1, segue-se pela linha sólida

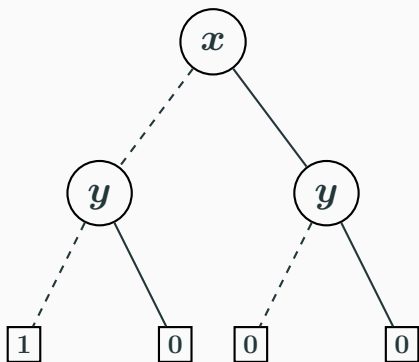
por exemplo



- Árvore da função:
$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$$
- Para encontrar $f(0, 1)$:
 1. inicia-se pela raiz
 2. como x é 0, segue-se pela linha pontilhada
 3. como y é 1, segue-se pela linha sólida
 4. chega-se à folha 0; logo $f(0, 1) = 0$

junto com a tabela-verdade

Para a função booleana $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x + y}$:

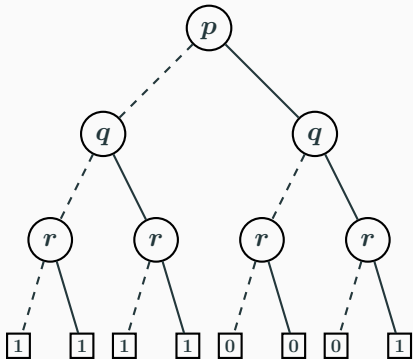


x	y	$f(x, y)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

outro exemplo

Para a função booleana $f(p, q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p} + (q \cdot r)$:

equivalente à fórmula proposicional $\phi \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$



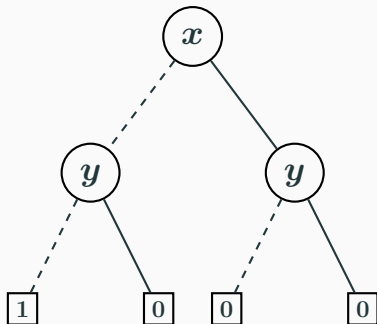
p	q	r	$f(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

semelhanças com tabelas-verdade

- Árvores de Decisão Binárias são semelhantes às tabelas-verdade em relação ao tamanho
 - se f depender de n variáveis booleanas, a árvore correspondente terá pelo menos $2^{n+1} - 1$ nós (contra as 2^n linhas da tabela verdade)
- Mas muitas vezes elas contêm redundâncias que podem ser exploradas

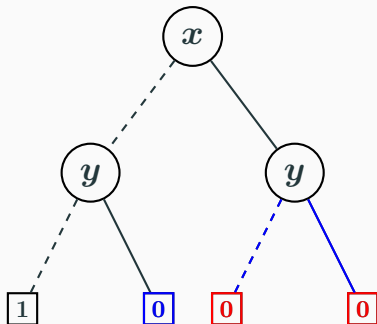
A exploração de redundâncias em Árvores de Decisão Binárias faz com que deixem de ser árvores e se tornem grafos. Assim, passam a ser chamados de Diagramas de Decisão Binários (BDDs).

remoção de nós terminais duplicados



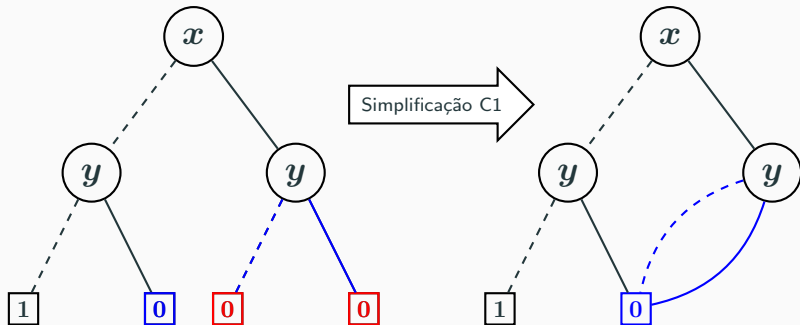
Se um DDB contém mais de um nó terminal 0 , redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com 1

remoção de nós terminais duplicados



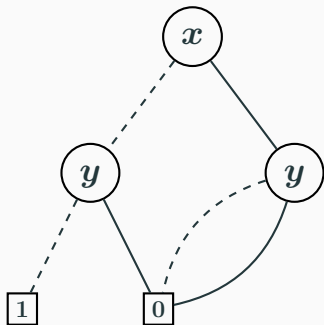
Se um DDB contém mais de um nó terminal 0 , redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com 1

remoção de nós terminais duplicados



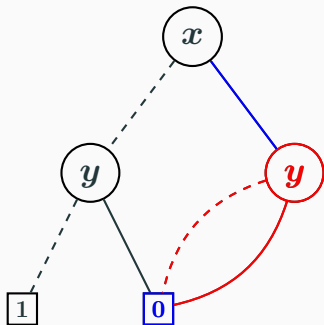
Se um DDB contém mais de um nó terminal 0, redirecionam-se todas as arestas que apontam para tais nós para apenas um deles. Repete-se o mesmo processo para os nós terminais com 1

remoção de testes redundantes



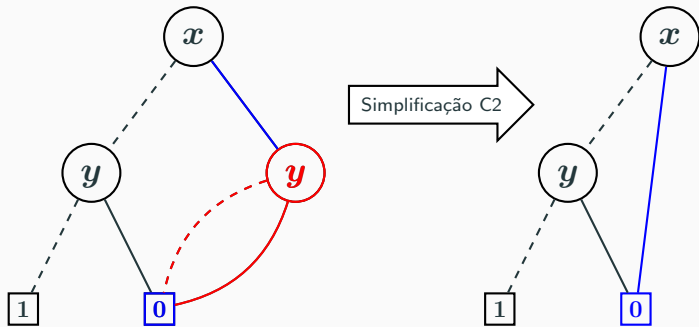
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , elimina-se o nó n , enviando todas as arestas que nele chegavam para m .

remoção de testes redundantes



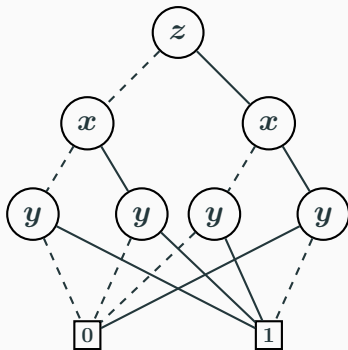
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , elimina-se o nó n , enviando todas as arestas que nele chegavam para m .

remoção de testes redundantes



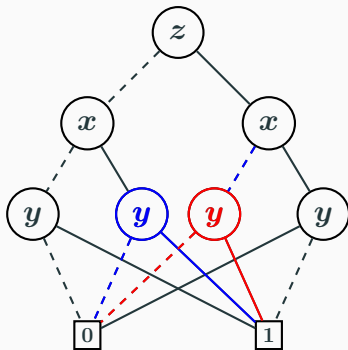
Se ambas as arestas de um nó n apontam para o mesmo nó m , elimina-se o nó n , enviando todas as arestas que nele chegavam para m .

remoção de nós não-terminais duplicados



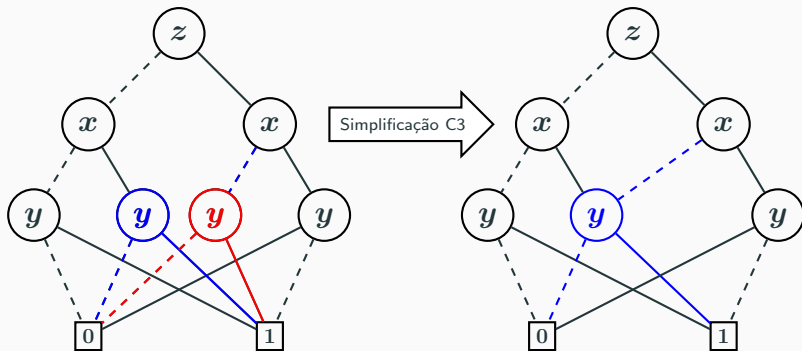
Se dois nós distintos n e m são raízes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

remoção de nós não-terminais duplicados



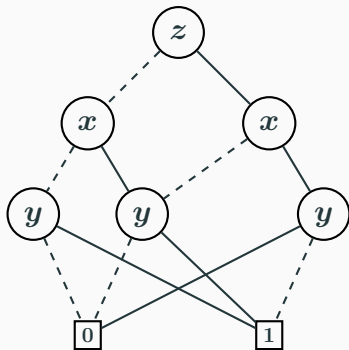
Se dois nós distintos n e m são raízes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

remoção de nós não-terminais duplicados



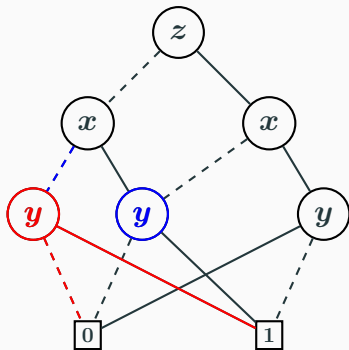
Se dois nós distintos n e m são raízes de sub-DDBs idênticos, pode-se eliminar um deles redirecionando todas as arestas que chegam nele para o outro

simplificações encadeadas



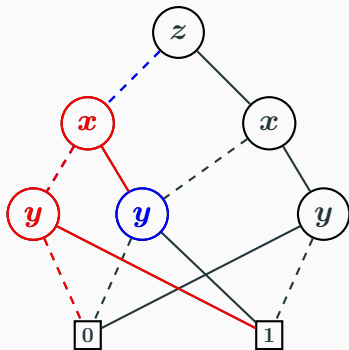
As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão x redundante (C2)

simplificações encadeadas



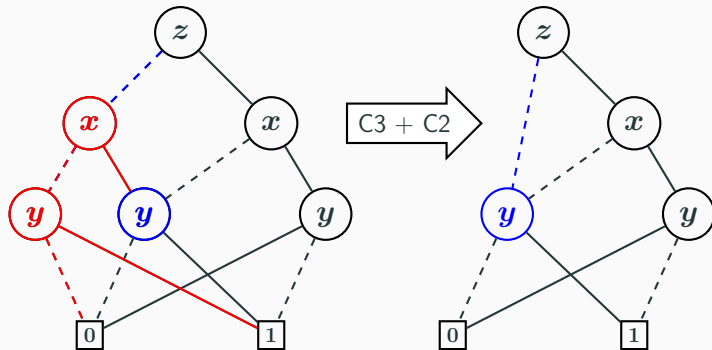
As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão x redundante (C2)

simplificações encadeadas



As simplificações C1, C2 e C3 podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados (C3) e a remoção de um ponto de decisão x redundante (C2)

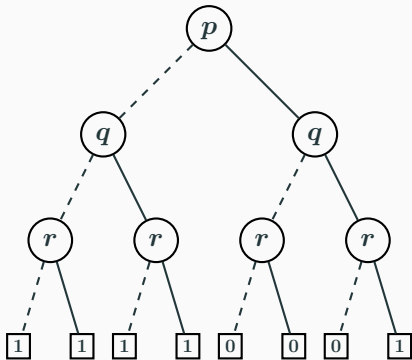
simplificações encadeadas



As simplificações $C1$, $C2$ e $C3$ podem ser encadeadas. Por exemplo, o DDB anterior ainda pode ser simplificado com a remoção de um dos nós y duplicados ($C3$) e a remoção de um ponto de decisão x redundante ($C2$)

exercício 1

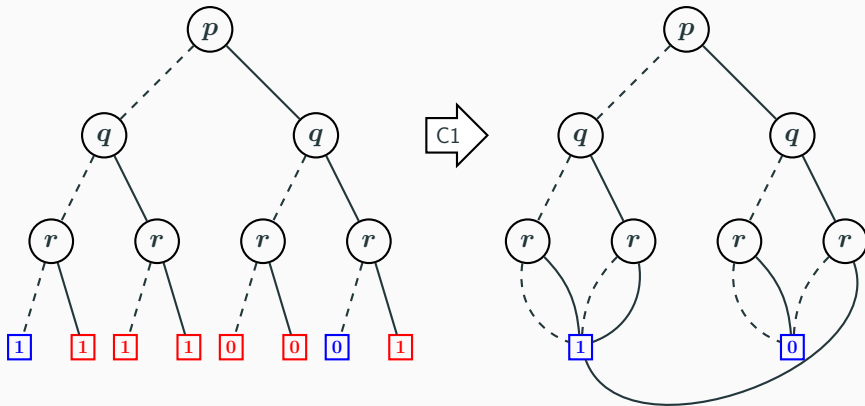
Reduza a árvore de decisão binária da função $f(p, q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p} + (q \cdot r)$ apresentada anteriormente:



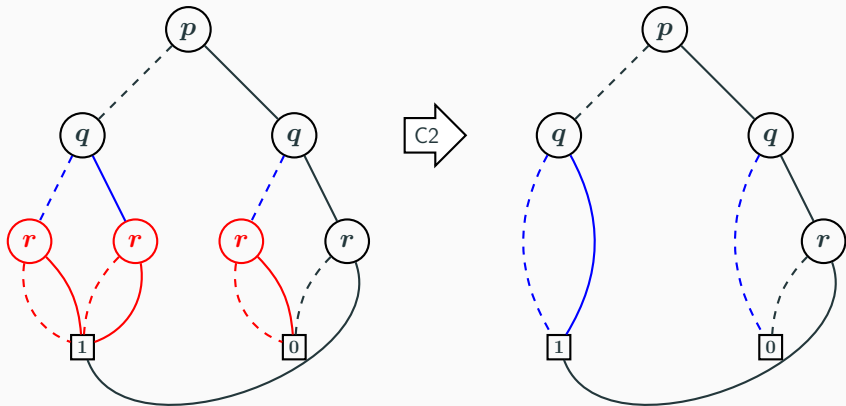
Simplificações:

- C1. Remoção de nós terminais duplicados
- C2. Remoção de testes redundantes
- C3. Remoção de nós não-terminais duplicados

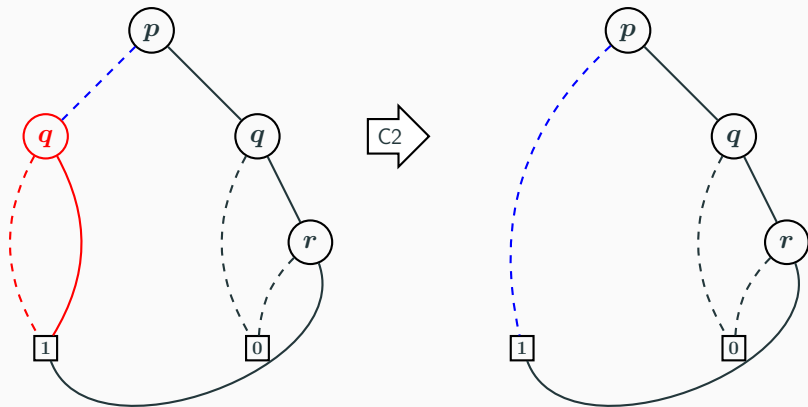
solução – 1º passo



solução – 2º passo

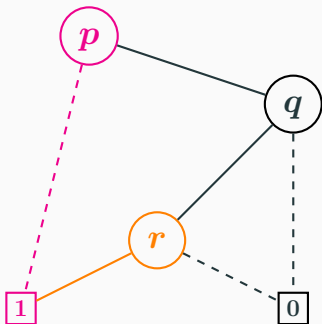


solução – 3º passo



DDB reduzido \times tabela-verdade

Função booleana: $f(p, q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p} + (q \cdot r)$:



p	q	r	$f(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1