Academia Medina Lauxa

Material de trabajo de Cálculo de nivel universitario

2013-2014

Contents

Part I

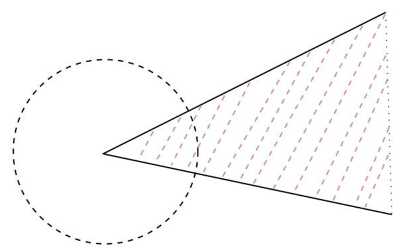
Preliminares

Tema 0

Trigonometría

0.1 Ángulos y triángulos

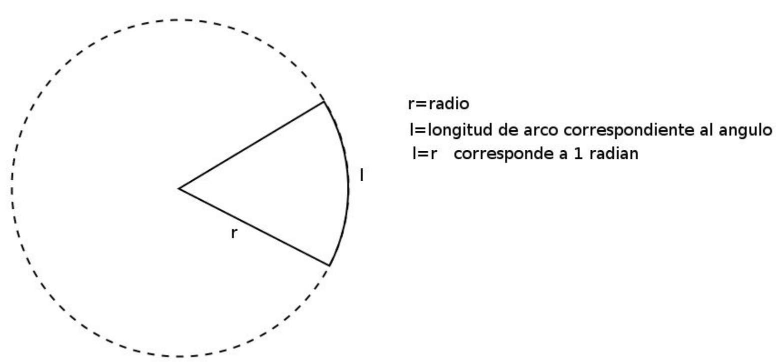
Definición 0.1.1 (Ángulo)**.** *Porción de espacio entre dos semirrectas con origen común.*



Se definen dos tipos de medidas tomadas en proporción con una circunferencia, pero no dependen del radio de la misma (ya que es una proporción).

1. **Grados sexagesimales:** divido la circunferencia en 360 partes iguales, y cada una de ellas es un grado sexagesimal.

2. **Medida en radianes:** un radián es el ángulo que hace que la longitud de arco que determina sea igual al radio de la circunferencia.



Toda la circunferencia corresponde con 2π radianes (ya que **la longitud de una circunferencia es** $2\pi r$).

Cambio de grados a radianes y viceversa: una simple regla de 3:
De radianes a grados

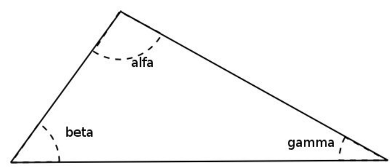
$$\left.\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & \longrightarrow & 360 \\ x \text{ rad} & \longrightarrow & y \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{y} = \frac{\mathbf{360 \times (x\ rad)}}{\mathbf{2\pi\ rad}} = \frac{\mathbf{360\ x}}{\mathbf{2\pi}}\ \textbf{grados}}$$

De grados a radianes

$$\left.\begin{array}{lcl} 360 & \longrightarrow & 2\pi \text{ rad} \\ x & \longrightarrow & y \text{ rad} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{y} = \frac{\mathbf{(2\pi\ rad) \times x}}{\mathbf{360}} = \frac{\mathbf{2\pi\ x}}{\mathbf{360}}\ \textbf{radianes}}$$

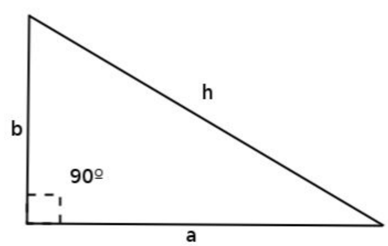
Definición 0.1.2 (Triángulo)**.** *Región del plano delimitada por 3 ángulos.*

Propiedades 0.1.1. *1. La suma de los ángulos de todo triángulo es igual a 180º.*



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180}}$$

2. ***Teorema de Pitágoras:*** *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

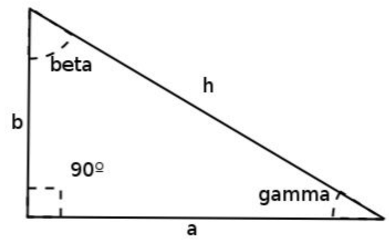


Si a,b son las longitudes de los respectivos catetos, y h la longitud de la hipotenusa, entonces es

$$\boxed{\mathbf{h^2 = a^2 + b^2}}$$

0.2 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Se introducen las razones trigonométricas de triángulos rectángulos:



Seno de un ángulo: $\boxed{\mathbf{sen}(\measuredangle) = \frac{\text{cateto opuesto a } \measuredangle}{\text{hipotenusa}}}$

Cosecante de un ángulo: $\boxed{\mathbf{cosec}(\measuredangle) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}(\measuredangle)}}$

Coseno de un ángulo: $\boxed{\mathbf{cos}(\measuredangle) = \frac{\text{cateto contiguo a } \measuredangle}{\text{hipotenusa}}}$

Secante de un ángulo: $\boxed{\mathbf{sec}(\measuredangle) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\measuredangle)}}$

Tangente de un ángulo: $\boxed{\mathbf{tg}(\measuredangle) = \frac{\text{cateto opuesto a } \measuredangle}{\text{cateto contiguo a } \measuredangle} = \frac{\mathbf{sen}(\measuredangle)}{\mathbf{cos}(\measuredangle)}}$

Cotangente de un ángulo: $\boxed{\mathbf{cotg}(\measuredangle) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}(\measuredangle)}}$

En la figura, para el ángulo β sería a el cateto opuesto, y b el cateto contiguo de donde:

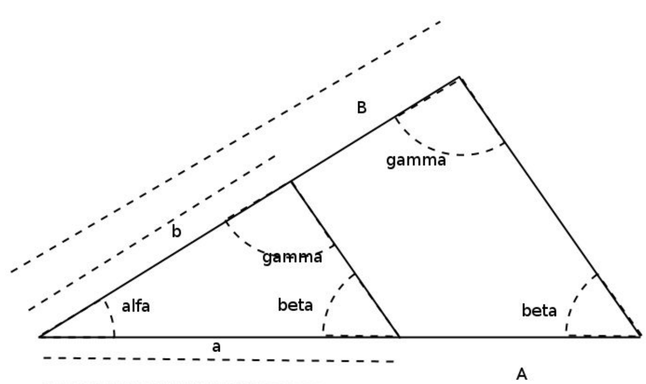
$$\text{sen}(\beta) = \frac{a}{h} \qquad \text{cosec}(\beta) = \frac{h}{a}$$

$$\cos(\beta) = \frac{b}{h} \qquad \sec(\beta) = \frac{h}{b}$$

$$\text{tg}(\beta) = \frac{a}{b} \qquad \text{cotan}(\beta) = \frac{b}{a}$$

Se observa que como la hipotenusa es mayor que los catetos, $sen(\measuredangle) \leq 1$ y $\cos(\measuredangle) \leq 1$ en vista de la expresión que tienen estos.

Definición 0.2.1 (Triángulos semejantes)**.** *Tráingulos cuyos ángulos coinciden.*



Teorema 0.2.1 (Teorema de Thales). *Dados dos triángulos semejantes, las divisiones de las longitudes de sus lados dos a dos coinciden:*

$$\boxed{\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{b}}}$$

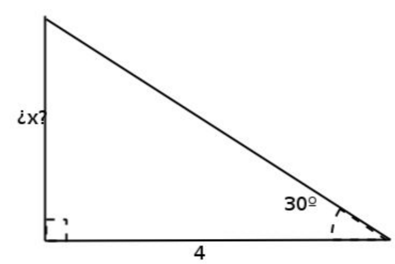
Algunos de los ángulos más usados son: 0 ($\pi/6$ rad), 30 ($\pi/6$) rad, 45 ($\pi/4$ rad), 60 ($\pi/3$ rad), 90 ($\pi/2$ rad):

$\operatorname{sen}(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\operatorname{tg}(0) = 0$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no existe

0.3 Determinación de los elementos de un triángulo

Se ven dos ejemplos. Dado un triángulo rectángulo:

1. Supongamos que conocemos el cateto contiguo, y uno de los ángulos que no es el recto y desconocemos el cateto opuesto. Por ejemplo si el ángulo es de 30º, y la longitud del cateto conocido es 4 tendríamos una situación como la siguiente:

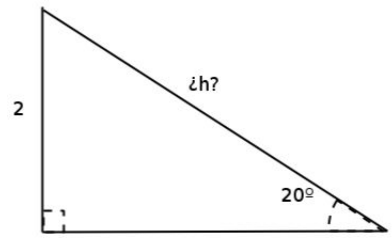
   La razón trigonométrica que involucra al ángulo conocido es la tangente:

   $$\operatorname{tg}(30) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{x}{4}$$

   Sabiendo que $\operatorname{tg}(30) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces es $\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ de donde

   $$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{4}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}}$$

2. Supongamos que conocemos el cateto opuesto, y uno de los ángulos que no es el recto, y desconocemos la hipotenusa. Por ejemplo si el ángulo es 20º:



La razón trigonométrica que involucra al ángulo conocido es el seno:

$$\operatorname{sen}(20) = \frac{2}{h} = 0.34 \Rightarrow h = \frac{2}{0.34} = 5.88$$

siendo la hipotenusa

$$\boxed{\mathbf{h = 5.88}}$$

0.4 Primeras fórmulas de trigonometría

Estas primeras fórmulas se obtienen como consecuencia del Teorema de Pitágoras. Si α ángulo de un triángulo rectángulo con catetos contiguo y opuesto a y b respectivamente, e hipotenusa h; sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{h} \qquad \cos(\alpha) = \frac{a}{h} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras es

$$h^2 = b^2 + a^2$$

y si divido esta igualdad por h^2 a ambos lados es:

$$\frac{h^2}{h^2} = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)^2$$

obteniéndose la **igualdad fundamental de la trigonometría:**

$$\boxed{\mathbf{sen^2}(\alpha) + \mathbf{cos^2}(\alpha) = \mathbf{1}}$$

Si ahora se vuelve a dividir la igualdad fundamental de la trigonometría por $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ y $\cos^2(\alpha)$ respectivamente, se obtienen otras igualdades trigonométricas:

1. **Divido por sen**$^2(\alpha)$**:**

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} + \frac{\cos^2(\alpha)}{{}^2(\alpha)} = \frac{1}{{}^2(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \left(\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right)^2$$

y como $\left(\frac{\cos(\alpha)}{(\alpha)}\right)^2 = \operatorname{cotg}(\alpha)^2)$ y $\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right)^2 = \operatorname{cosec}(\alpha^2)$finalmente se tiene que

$$\boxed{\mathbf{1} + \mathbf{cotg}(\alpha)^{\mathbf{2}} = \mathbf{cosec^2}(\alpha)}$$

2. **Divido por $\cos^2(\alpha)$:**

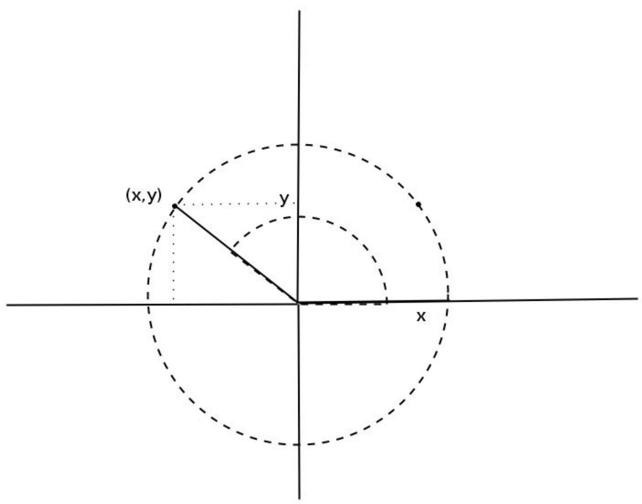
$$\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2+1=\left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2$$

y como $\left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2=\text{tg}(\alpha)^2)$ y $\left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2=\sec(\alpha^2)$finalmente se tiene que

$$\boxed{\mathbf{1+tg(\alpha)^2=sec^2(\alpha)}}$$

0.5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Se trata de generalizar a ángulos de más de 90º, introduciendo un procedimiento que siga siendo válido para los casos anteriores. Lo que hago es considerar una circunferencia de $\mathbb{R}^2$ que es el conjunto de pares (x,y) donde x e y son números reales. Si supongo que el centro de la circunferencia es $(0,0)$ y su radio es 1, dado un punto de la circunferencia de coordenadas (x,y) como se indica en la figura



Se pueden definir las razones trigonométricas a partir de estas coordenadas:

$$\text{sen}(\alpha)=y \qquad \text{cosec}(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}=\frac{1}{y}$$

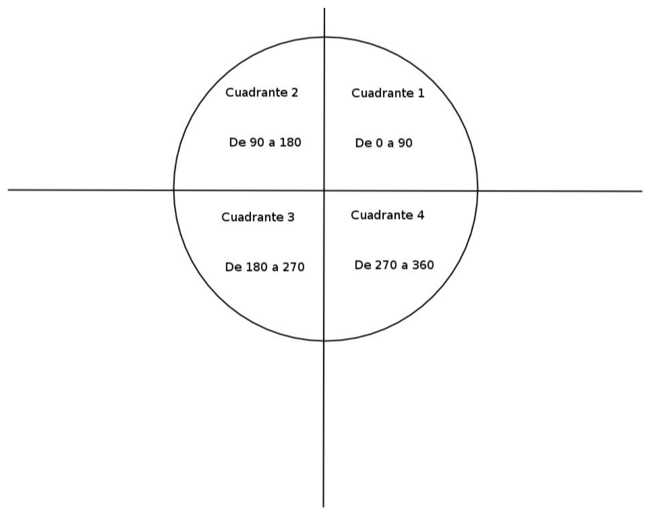
$$\cos(\alpha)=x \qquad \sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{1}{x}$$

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{x}{y} \quad \text{cosec}(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}=\frac{1}{y}$$

Así obtengo razones trigonométricas con signo.

0.6 Cuadrantes y signos de las razones trigonométricas

Los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante van a ser constantes. Se determinan dichos signos, definiendo en la figura cada cuadrante:



En radianes, los ángulos que abarcan cada cuadrante son:

Dado α ángulo en el cuadrante 1: $\longrightarrow \quad 0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

Dado α ángulo en el cuadrante 2: $\longrightarrow \quad \dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

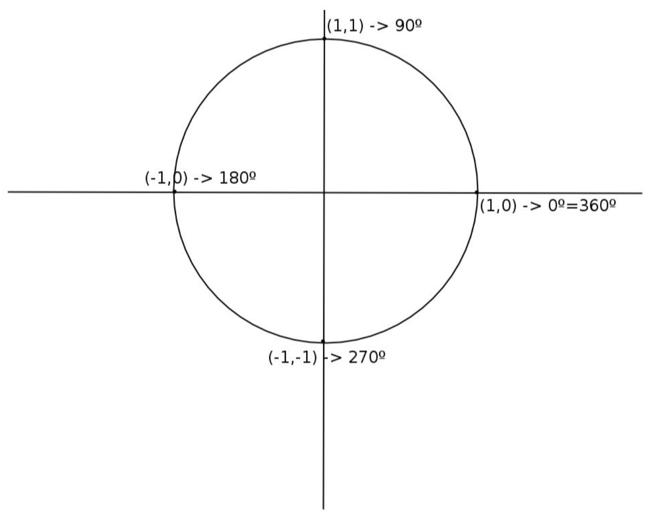
Dado α ángulo en el cuadrante 3: $\longrightarrow \quad \pi \leq \alpha \leq \dfrac{3\pi}{2}$

Dado α ángulo en el cuadrante 4: $\longrightarrow \quad \dfrac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

Cuadrante	$\text{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
1	$+$	$+$	$+$
2	$+$	$-$	$-$
3	$-$	$-$	$+$
4	$-$	$+$	$-$

$$\boxed{1} \to (x,y) \text{ con } \begin{cases} y = \text{sen}(\alpha) > 0 \\ x = \cos(\alpha) > 0 \end{cases} \qquad \boxed{3} \to (x,y) \text{ con } \begin{cases} y = \text{sen}(\alpha) < 0 \\ x = \cos(\alpha) < 0 \end{cases}$$
$$\boxed{2} \to (x,y) \text{ con } \begin{cases} y = \text{sen}(\alpha) > 0 \\ x = \cos(\alpha) < 0 \end{cases} \qquad \boxed{4} \to (x,y) \text{ con } \begin{cases} y = \text{sen}(\alpha) < 0 \\ x = \cos(\alpha) > 0 \end{cases}$$

Se calculan las **razones trigonométricas de ángulos notables** mayores que las del primer cuadrante:



Radianes	Grados	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\text{tg}(\alpha)$
0	0	0	1	0
$\pi/6$	30	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	40	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90	1	0	no existe
π	180	0	-1	0
$3\pi/2$	270	-1	0	no existe
2π	360	0	1	0

0.7 Cálculo de las restantes razones trigonométricas

Se ven algunos ejemplos:

1. *Suponiendo α entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, si sabemos que cosec$(\alpha) = -2$, entonces:*

$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

y haciendo uso de la igualdad fundamental de la trigonometría

$$1 = \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{1}{4} + \cos^2(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

y como estoy en el cuarto cuadrante, el signo del coseno es positivo, luego se tiene que

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

y de aquí es

$$\boxed{\sec(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

y así se han calculado todas las razones trigonométricas, pero se desconoce el valor del ángulo.

2. *Suponiendo α entre $\frac{\pi}{2}$ y π radianes, y sabiendo que cotg$(\alpha) = -3$:* se está en el segundo cuadrante, luego es el signo del seno positivo, y el signo del coseno negativo, y como

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{cotg}(\alpha)} = -\frac{1}{3}$$

a partir de la identidad

$$1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha)$$

conocida tenemos que

$$1 + (-3)^2 = 10 = \operatorname{cosec}^2(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}$$

siendo

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

y como el signo del seno es positivo entonces es $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}}$, y por otro lado es

$$1 = \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \iff \cos^2(\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

luego $\cos(\alpha) = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$y como el signo del coseno es negativo en el segundo cuadrante, es

$$\boxed{\cos(\alpha) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

El resto de razones trigonométricas se calcula fácilmente a partir de lo obtenido.

0.8 Reducción al primer cuadrante

Aunque sumemeos vueltas completas, el ángulo es equivalente al resto de *lo que sobra*:

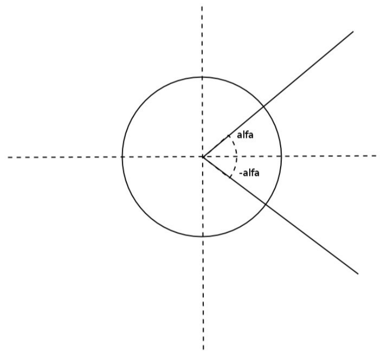
$$\alpha > 360 \text{ (o } 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \text{me quedo con el resto de dividir por } 360 \text{ (o } 2\pi)$$

Por ejemplo:

1. Si $\alpha = 527$ entonces es $\alpha = 360 + \beta$ con $\beta = 167$, luego el ángulo de 527 es equivalente al de 167.

2. Si $\alpha = \frac{15}{2}\pi$ es $\alpha = \frac{14+1}{2}\pi = \frac{14}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = 6\pi + \frac{3}{2}\pi$ luego es equivalente a $\frac{3}{2}\pi$.

Cuando el ángulo tiene signo opuesto, lo que hace es recorrerse en sentido contrario:



Se tiene que el ángulo α de la gráfica verifica que

$$\mathbf{cos}(-\alpha) = \mathbf{cos}(\alpha)$$
$$\mathbf{sen}(-\alpha) = -\mathbf{sen}(\alpha)$$
$$\mathbf{tg}(-\alpha) = -\mathbf{tg}(\alpha)$$

Con esto ya pueden calcularse razones trigonométricas de todos los ángulos opuestos.
Para el resto de cuadrantes, se tiene que:

2º cuadrante: $|\text{Razones trigonométricas } (\alpha)| = |\text{Razones trigonométricas } (180-\alpha)|$

3º cuadrante: $|\text{Razones trigonométricas } (\alpha)| = |\text{Razones trigonométricas } (\alpha-180)|$

4º cuadrante: $|\text{Razones trigonométricas } (\alpha)| = |\text{Razones trigonométricas } (360-\alpha)|$

Ejercicio. *Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 840º.*

0.9 Fórmulas de trigonometría

Para acabar se da una lista con algunas de las fórmulas trigonométricas más importantes, y se recuerdan las 3 conocidas. Se relacionarán con la suma y diferencia de ángulos, ángulo doble y ángulo mitad:

Identidad fundamental de la trigonometría $\boxed{\mathbf{sen}^2(\alpha)+\mathbf{cos}^2(\alpha)=1}$

$\boxed{1+\mathbf{cotg}^2(\alpha)=\mathbf{cosec}^2(\alpha)}$

$\boxed{1+\mathbf{tg}^2(\alpha)=\mathbf{sec}^2(\alpha)}$

Seno de la suma $\boxed{\mathbf{sen}(\alpha+\beta)=\mathbf{sen}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta)+\mathbf{sen}(\beta)\mathbf{cos}(\alpha)}$

Coseno de la suma $\boxed{\mathbf{sen}(\alpha+\beta)=\mathbf{cos}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta)-\mathbf{sen}(\alpha)\mathbf{sen}(\beta)}$

Tangente de la suma $\boxed{\mathbf{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathbf{tg}(\alpha)+\mathbf{tg}(\beta)}{1-\mathbf{tg}(\alpha)\mathbf{tg}(\beta)}}$

Seno de la resta $\boxed{\mathbf{sen}(\alpha-\beta)=\mathbf{sen}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta)-\mathbf{sen}(\beta)\mathbf{cos}(\alpha)}$

Coseno de la resta $\boxed{\mathbf{sen}(\alpha-\beta)=\mathbf{cos}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta)+\mathbf{sen}(\alpha)\mathbf{sen}(\beta)}$

Tangente de la resta $\boxed{\mathbf{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathbf{tg}(\alpha)+\mathbf{tg}(\beta)}{1+\mathbf{tg}(\alpha)\mathbf{tg}(\beta)}}$

Para terminar este tema se dan expresiones de las razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad:

$$\textbf{Ángulo doble}\begin{cases}\boxed{\mathbf{sen}(2\alpha)=2\mathbf{sen}(\alpha)\mathbf{cos}(\alpha)}\\ \boxed{\mathbf{cos}(2\alpha)=\mathbf{cos}^2(\alpha)-\mathbf{sen}^2(\alpha)}\\ \boxed{\mathbf{tg}(2\alpha)=\dfrac{2\mathbf{tg}(\alpha)}{1-\mathbf{tg}^2(\alpha)}}\end{cases}\qquad \textbf{Ángulo mitad}\begin{cases}\boxed{\mathbf{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\mathbf{cos}(\alpha)}{2}}}\\ \boxed{\mathbf{cos}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\mathbf{cos}(\alpha)}{2}}}\\ \boxed{\mathbf{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\mathbf{cos}(\alpha)}{1+\mathbf{cos}(\alpha)}}}\end{cases}$$

Tema 1

Funciones elementales

Se hace aquí un resumen muy breve de las funciones elementales siempre siguiendo el mismo esquema: definición (si se da), dominio, propiedades básicas, dónde es continua, dónde es derivable, y su expresión en serie de potencias.

Los conceptos previos a la definición de función elemental se han de consultar en el tema **Funciones reales de variable real. Continuidad**.

1.1 Polinomios y racionales

Definición 1.1.1 (Funciones polinómicas). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida de la forma*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

mediante un polinomio.

1. **Dominio:** Todo $\mathbb{R}$.
2. **Propiedades básicas:** Las funciones polinómicas son no acotadas, en particular *todo polinomio de grado impar tiene como imagen a* $\mathbb{R}$. Respecto al número de ceros se tiene que todo polinomio tiene tantas raíces complejas como grado tenga su denominador, y en caso de polinomios de grado impar tienen al menos una raíz real.
3. **Continuidad y derivabiliad:** En todo $\mathbb{R}$.
4. **Expresión en serie de potencias:** coincide con su expresión original.

Definición 1.1.2 (Funciones racionales). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida mediante el cociente de dos polinomios, de la forma*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. **Dominio:** son los ceros donde se anula el denominador, esto puede escribirse como

$$\mathrm{Dom}(R(x)) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ Q(x) = 0\}$$

luego será continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en un número finito de puntos (a lo sumo tantos como el grado del denominador).

2. **Continuidad y derivabiliad:** En todo su dominio.

3. **Expresión en serie de potencias:** no hay expresión genérica. Depende del caso particular.

1.2 Funciones potencia

Se trata de funciones de la forma

$$f(x) = x^{\alpha}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Como caso particular, cuando α es un número natural, tenemos monomios, que se incluyen dentro de los polinomios, y α es racional se escribe:

$$\alpha = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; f(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

y se dice que es la raíz n-esima de x, y si $n = 2$ es $f(x) = \sqrt{x}$ la raíz cuadrada de x, que se define como el *número que multiplicado por sí mismo da como resultado* x.

En el caso general de α racional:

$$\alpha = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; f(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Estas funciones están definidas en los números reales no negativos, y su imagen son los números reales no negativos. Son continuas en todo su dominio, y derivables en todo su dominio salvo en cero.

Al igual que las racionales no tienen una expresión genérica como serie de potencias.

1.3 Función exponencial

Definición 1.3.1 (Función exponencial)**.** *Se trata de* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *función definida mediante su serie de potencias asociada a partir de la expresión*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

que se denota por

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

siendo e *número real.*

En general puede tomarse $f(x) = a^x$ con $a > 0$ cualquiera.

1. **Dominio:** Todo $\mathbb{R}$.
2. **Propeidades:** se dan algunas de las propiedades que verifican las funciones exponenciales:
   (a) $\mathrm{e}^0 = 1$.
   (b) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$, y en general $\mathrm{e}^{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\ldots\mathrm{e}^{x_n}$.
   (c) $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}$.
   (d) Su imagen es $\mathbb{R}^+$ números reales positivos.
   (e) Es una función inyectiva, luego tiene inversa, y ésta es el logaritmo.
3. **Continuidad y derivabilidad:** en todo $\mathbb{R}$.

1.4 Función logarítmica

Definición 1.4.1 (Función logarítmica)**.** *Dado $a \in \mathbb{R}$, se dice que el logaritmo en base a de un número $b \in \mathbb{R}$, es el valor $z \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a^z = b$$

y a este valor se le denota por

$$\log_a(b)$$

Se define la función logarítmica en base a como $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número positivo x le hace corresponder su logaritmo en dicha base. Se denota por

$$f(x) = \log_a(x)$$

y en particular, cuando la base del logaritmo es e *se denota por*

$$f(x) = \log(x)$$

es decir, se omite el subíndice.

1. **Dominio:** Los números reales positivos.

2. **Propiedades:**

   (a) Sea cual sea a, $\log_a(1) = 0$, es $\log_a$ es creciente, no definida en los negativos, con $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, luego su imagen es todo $\mathbb{R}$.

   (b) Todo logaritmo en una base determinada puede expresarse mediante el logaritmo neperiano a partir de la siguiente relación:
   $$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$
   y así se puede pensar que *'sólamente hay un logaritmo'*.

   (c) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, y en general $\log_a(x_1x_2\dots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \dots + \log_a(x_n)$.

   (d) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

   (e) La función logaritmo es la inversa de la exponencial. Esto es
   $$\log(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\log(x)} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. **Continuidad y derivabilidad:** en todo su dominio.

4. **Expresión en serie de potencias:** en este caso el radio de convergencia no es todo $\mathbb{R}$. Para el logaritmo neperiano, si $a, x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < a$ se tiene que
$$\log(x) = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n}(x-a)^n$$

1.5 Funciones trigonométricas

Ya se han definido las razones trigonométricas de un ángulo. Ahora se pasa a definir las funciones trigonométricas:

Definición 1.5.1 (Seno). *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Definición 1.5.2 (Coseno). *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \cos(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

1. **Dominio:** Todo $\mathbb{R}$ en ambos casos.
2. **Propiedades:**
   (a) Las funciones seno y coseno son acotadas entre $[-1, 1]$ y 2π-periódicas,
   (b) Respecto a otras propiedades ver capítulo anterior.
   (c) No son inyectivas, luego no tienen inversa global.
   (d) La relación que hay entre ellas es que
   $$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
3. **Continuidad y derivabilidad:** en todo $\mathbb{R}$.
4. **Expresión en serie de potencias:**
   (a) **Seno:** el radio de convergencia es todo $\mathbb{R}$ y su expresión, centrada en $a \in \mathbb{R}$ es
   $$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   en particular, si $a = 0$ es
   $$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   (b) **Coseno:** el radio de convergencia es todo $\mathbb{R}$ y su expresión, centrada en $a \in \mathbb{R}$ es
   $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   en particular, si $a = 0$ es
   $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Definición 1.5.3 (Tangente)**.** *Se trata de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1. **Dominio:** El dominio D viene dado por

$$D = \mathrm{Dom}(\mathrm{tg}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$$

2. **Propiedades:** pueden verse en el tema de Trigonometría, además se tiene que es una función no acotada, 2π-periódica y no inyectiva, por lo que no tiene inversa global. Su imagen es todo $\mathbb{R}$, ya que

$$\lim_{x \to \frac{k\pi}{2}^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{k\pi}{2}^+} = +\infty$$

3. **Continuidad y derivabilidad:** en los puntos no incluidos en el dominio se presentan asíntotas verticales, donde hay discontinuidad.

Ejemplo 1.5.1. *Calcular el dominio de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \dfrac{x^5 - 3x^3 + 2}{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}$
2. $f(x) = \log(1 + x^2)$
3. $f(x) = \log(\mathit{sen}(x))$
4. $f(x) = \mathit{tg}(\cos(x))$

Ejemplo 1.5.2. *Si* $\log_3(A) = 3.2$ *y* $\log_3(B) = 5.4$*, calcular las siguientes cantidades haciendo uso de las propiedades del logartimo:*

1. $\log_3\left(\dfrac{27A^{\frac{1}{3}}}{B^{-10}}\right)$.
2. $\log_3\left(\dfrac{A^{\log(81B)}}{729B^5}\right)$.

Part II

Cálculo en una varible

Tema 2

Funciones reales de variable real. Límite y continuidad

2.1 Conceptos previos sobre funciones

Definición 2.1.1 (Función real de variable real). *Una f.r.v.r. es una aplicación de la forma $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Esto es una correspondencia que vendrá dada mediante alguna regla.*

*Se define la **gráfica de** f como el conjunto*

$$Graf(f) = \{(x, f(x) \ : \ x \in A\}$$

que puede representarse gráficamente. También se dice que el conjunto

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$$

*es la **imagen** de f.*

$\boxed{Operaciones:}$ Dadas $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se definen:

1. **Suma:** $(f+g) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall\, x \in A$.
2. **Resta:** $(f-g) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad \forall\, x \in A$.
3. **Opuesto:** $(-f) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = f(x) \quad \forall\, x \in A$.
4. **Cociente:** si $f(x) \neq 0\ \forall x \in A$ puede definirse $\left(\dfrac{1}{f}\right) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ y análogamente $\left(\dfrac{f}{g}\right) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \forall\, x \in A$.

Definición 2.1.2 (Composición de funciones). *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset B$ (la imagen de f está contenida en B), entonces se define la composición de f y g como*

$$(g \circ f) : A \longrightarrow \mathbb{R} \ \ \textit{mediante} \ \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ejemplo 2.1.1. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ y $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log(x)$, es*

$$(g \circ f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{definida por} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x^2) = \log(1+x^2)$$

Definición 2.1.3 (Función identidad y función inversa)**.** *La función identidad en A viene dada por*

$$id : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{definida mediante} \quad id(x) = x \quad \forall x \in A$$

y verifica que para toda función f definida en $B \supset A$ es $(id \circ f) = (f \circ id) = f$.

Se define la función inversa de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, si existe, como aquella $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$$

es decir, aquella tal que

$$(g \circ f) = (f \circ g) = id.$$

Definición 2.1.4 (Restricción y extensión de funciones)**.** *Dada $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $B \subset A$, se dice que $f_{|B} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f_{|B}(x) = f(x) \quad \forall x \in B$$

es la restricción de f en B.

Dicho de otra forma, si $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = f(x) \quad \forall x \in B$, se dice que f es una extensión de g, y puede escribirse $g = f_{|B}$.

La idea es que si tengo una función definida en todo su posible dominio, puedo limitar ese dominio a un subintervalo más pequeño. Una utilidad de la restricción de funciones puede ser para trabajar con funciones inyectivas (aquellas que verifican que si dos puntos tienen la misma imagen, dichos puntos han de ser necesariamente el mismo). Por ejemplo, la función definida por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sin(x)$$

no es inyectiva ya que por ser 2π periódica verifica que $\sin(x) = \sin(2\pi + x)$, sin embargo si considero la restricción

$$f_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

en este caso esta restricción sí que es inyectiva ya que en $[0,\pi]$ no pueden encontrarse x, y distintos tal que $\sin(x) = \sin(y)$.

2.2 Definición y primeras propiedades de continuidad

La idea de continuidad es que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si

puedo representarla gráficamente sin levantar el lápiz del papel.

Se trata en realidad de un concepto local, ya que la continuidad en principio está asociada a un punto del dominio. Hay una excepción a la anterior idea: cuando una función está definida en un dominio con un punto aislado.

Punto aislado: Si $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ se dice punto aislado si $\exists \delta > 0$ tal que

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A = \{x_0\}$$

Por ejemplo, si $A = [0,1] \cup \{2\}$ es $x_0 = 2$ un punto aislado ya que cualquier δ tal que $0 < \delta < 1$ verifica que $[2-\delta, 2+\delta] \cap A = \{2\}$.

En estos puntos aislados siempre hay continuidad, se cual sea la función definida.

Definición 2.2.1 (Continuidad)**.** *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y $a \in A$. Se dice que f es continua en a si, y sólo si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ |x - x_0| < \delta \ \ , \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tema 3

Derivabilidad

Tema 4

Integrales

Part III

Cálculo en varias variables

Tema 5

Continuidad

Tema 6

Derivabilidad

Part IV

Ecuaciones diferenciales

Tema 7

Introducción

Una **ecuación diferencial** es una relación que ha de satisfacer una *función incógnita* junto con cierto número de sus derivadas. Por ejemplo:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \cos x \frac{dy}{dx} + y - x^3 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - x^2y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

Las dos primeras son llamadas *ecuaciones diferenciales ordinarias* y la ecuación incógnita sólo tienen como variable independiente a t, mientras que la última ecuación es llamada *ecuación en derivadas parciales*, y la función u tiene como incógnita más de una variable independiente (4 en este caso que son x, y, z, t).

7.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

La **forma general** de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es

$$F(x, y, y') = 0$$

donde F es una función de tres argumentos definida en una cierta región de $\mathbb{R}^3$. Una función derivable $y(x)$ se dice que es **solución** de la anterior ecuación en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si

1. $(x, y(x), y'(x))$ está en el dominio de definición de F para todo $x \in I$, y
2. $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, para todo $x \in I$.

Se supondrá, de manera general, que la ecuación está en **forma normal**:

$$\boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

Cuando está escrita en forma normal, se tiene que f es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, y una **solución** en este caso ha de verificar

1. $(x, y(x)) \in D$, para todo $x \in I$.
2. $y'(x) = f(x, y(x))$, para todo $x \in I$.

Asociada a una ecuación diferencial, puede definirse un **problema de valores iniciales**, que es una ecuación diferencial junto a una condición inicial dada para algún valor del intervalo de definición, esto es

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo 7.1.1. *Se ven algunos ejemplos sencillos de ecuaciones diferenciales:*

1. *Dada la ecuación*
$$y' = 0$$
tenemos una función y dependiente de x, cuya derivada es nula en todo su dominio (todo $\mathbb{R}$ en este caso). Sabemos que las soluciones de esta ecuación son cualquier función constante en dicho dominio, luego será
$$y(x) = c \qquad \text{con } \ c \in \mathbb{R}$$

2. *Dada la ecuación del tipo*
$$y' = a$$
con $a \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera, simplemente integrando en ambos miembros respecto de x se tiene que
$$\int y'(x)\mathrm{d}x = \int a\mathrm{d}x$$
que conduce a la igualdad
$$y(x) = ax + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
donde $c \in \mathbb{R}$ son las soluciones de la ecuación.

3. *En general, si tengo una ecuación de la forma*
$$y' = f(x)$$
para resolverla lo único que se ha de hacer es integrar el miembro de la derecha de la igualdad respecto de x, y se llegará así a que
$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$
la solución general de este tipo de ecuaciones.
Por ejemplo si se tiene la ecuación
$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x+10}$$
se sabe ha de integrar el miembro de la derecha, luego será
$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+10}\mathrm{d}x = \log(|x^2-x+10|) + c$$
siendo la solución general
$$y(x) = \log(|x^2-x+10|) + c = \log(c|x^2-x+10|)$$

4. *Dada la ecuación*

$$y' = y$$

se tiene que se trata de una función cuya derivada coincide consigo mismo, luego por las reglas básicas de derivación sabemos que

$$y(x) = k\mathrm{e}^x$$

Otra forma de verlo sería pasar y *dividiendo a la izquierda e integrar respecto de* x*:*

$$y' = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x$$

y mediante el cambio de variable

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = y \\ y'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right]$$

se tiene que la integral de la izquierda es

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \log(y)$$

de donde se llega a que

$$\log(y) = x + c$$

y tomando exponenciales se tiene que las soluciones son de la forma

$$y(x) = c\mathrm{e}^x$$

como se dijo anteriormente.

Tema 8

Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales

En general, salvo ecuaciones lineales y algunos tipos muy concretos de ecuaciones, de entre los cuales aquí se estudian algunos, casi ninguna ecuación difernecial puede resolverse de forma exacta, si no que la teoría va encaminada a deducir propiedades de las soluciones sin necesidad de conocer explícitamente éstas, y hay que recurrir a técnicas de aproximación numérica para obtener valores cercanos a los de la solución.

Se ven aquí los métodos elementales de integración: el primero es el de variables separadas que es el más básico, luego está el caso de ecuaciones homogéneneas y reducibles a homogéneas donde se traslada el problema a variables separadas, y finalmente las ecuaciones conocidas como exactas, y los factores integrantes.

8.1 Ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

que se resuelven separando las variables e integrando cada miembro respecto de x, esto es:

$$y' = f(x)g(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{g(y)} = f(x) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$

y mediante el cambio de variable

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} y(x) = y \\ y'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$$

se llega a la igualdad

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathbf{g}(\mathbf{y})} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}}$$

de donde basta resolver las integrales de cada miembro y despejar para obtener la solución.

Ejemplo 8.1.1. *El último ejemplo del tema anterior era de variables separadas.*

2. *Si se tiene el problema de valores iniciales*

$$\left\{\begin{array}{l} 2x(1+y^2) - (1+y^2)^2 y' = 0 \\ y(0) = 3 \end{array}\right.$$

lo primero que hacemos es escribir en forma normal la ecuación:

$$-(1+y^2)^2y' = -2x(1+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{2x(1+y^2)}{(1+y^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{2x}{1+y^2}$$

y una vez escrita en forma normal podemos separar variables e integrar. Esto es, separando variables

$$(1+y^2)y' = 2x$$

y ahora integrando como la fórmula recuadrada

$$\int (1+y^2)\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2+c$$

La integral de la izquierda es $\int (1+y^2)\mathrm{d}y = y + \frac{y^3}{3}$*, luego la solución general viene dada por*

$$y(x) + \frac{y^3(x)}{3} = x^2+c$$

e imponiendo la condición inicial ha de ser $y(0)=3$*, y según la ecuación es*

$$y(0) + \frac{y^3(0)}{3} = c$$

de donde si sustituyo por $y(0)=3$ *es*

$$3 + \frac{3^3}{3} = c$$

siendo $c = 3+\frac{27}{3} = 12$ *luego la solución viene dada implícitamente por*

$$\boxed{y(x) + \frac{y^3(x)}{3} = x^2+12}$$

8.2 Ecuaciones homogéneas

Se trata de ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

que se resuelven realizando el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$. Si se deriva se tiene que

$$u' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{F\left(\frac{x}{y}\right)x - y}{x^2} = \frac{F\left(\frac{x}{y}\right)}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{F(u)}{x} - \frac{u}{x} = \frac{1}{x}\left(F(u)-u\right)$$

de donde se llega a

$$\boxed{\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\right)}$$

que es una ecuación de variables separadas, y tras resolver, basta con deshacer el cambio de variable para obtener la solución y.

Ejemplo 8.2.1. *Se resuelve el p.v.i.*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-t}{x+t} \\ \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Se observa que $F(x,t) = \dfrac{x-t}{x+t} = \dfrac{\frac{x}{t}-1}{\frac{x}{t}+1} = F\left(\dfrac{x}{t}\right)$, *que es ecuación homogénea, luego si hago el cambio de variable* $u = \frac{x}{t}$ *y derivo, llego a*

$$u' = \frac{1}{t}(F(u)-u) = \frac{1}{t}\left(\frac{u-1}{u+1} - u\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{u-1-u^2-u}{u+1}\right) = -\frac{1}{t}\frac{u^2+1}{u+1}$$

llegando a la ecuación en variables separadas

$$u' = -\frac{1}{t}\frac{u^2+1}{u+1}$$

que se resuelve como siempre. Primero separo las variables quedando la ecuación

$$\frac{u+1}{1+u^2}u' = -\frac{1}{t}$$

integro respecto de t *en ambos miembros, y en el miembro de la izquierda hago el cambio de variable* $u = u(t)$, $u'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ *llegando a la igualdad*

$$\int \frac{u+1}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\log(t) + c$$

Se calcula la integral de la izquierda:

$$\int \frac{u+1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\log(1+u^2) + \arctan(u)$$

y de aquí, igualando con la parte derecha se llega a

$$\log(1+u^2) + \arctan(u) = -\log(t) + c$$

que deshaciendo el cambio de variable da lugar a la solución dada implícitamente por la expresión

$$\boxed{\log\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{t^2}}\right) + \arctan(\mathbf{u}) + \log(\mathbf{t}) - \mathbf{c} = \mathbf{0}}$$

Ejercicio. *Resolver las siguientes ecuaciones o p.v.i. (problemas de valores iniciales) de variables separadas u homogéneas (habrá que identificarlas en cada caso):*

1. $y' = \mathrm{e}^{x-y}$.
2. $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{-x+y} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$
4. $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + \sqrt{x^2+y^2}$

8.3 Ecuaciones reducibles a homogéneas:

Ecuaciones del tipo

$$\boxed{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)}$$

donde en función de la posición relativa de las rectas $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases}$ se van a dar tres casos:

1. *Las rectas se cortan en el origen de coordenadas:* entonces es

$$x' = f\left(\frac{ax+by}{mx+ny}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{m+n\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ecuación homogénea, que ya se sabe resolver , y tras resolverla se deshace el cambio de variable.

2. *Las rectas se cortan en* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$*:* se toma el cambio de variable

$$X = x-\alpha \qquad Y = y-\beta$$

y se tiene que

$$Y' = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right) = f\left(\frac{aX+bY+a\alpha+b\beta+c}{mX+nY+m\alpha+n\beta+p}\right) = f\left(\frac{aX+bY}{mX+nY}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{Y}{X}}{m+n\frac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

ecuación hommogénea, que ya se sabe resolver, y tras resolverla se deshace el cambio de variable.

Se ha tenido en cuenta que, para escribir la igualdad en función de X e Y, se ha de sumar $a\alpha$ y $b\beta$en el numerador, y $m\alpha$, $n\beta$ en el denominador, y por otro lado también se ha tendio en cuenta que $a\alpha+b\beta+c=0$ y $m\alpha+n\beta+p=0$.

3. *Las rectas son paralelas:* para ello han de ser (a,b) y (m,n) proporcionales, esto es, ha de existir λ número real tal que $(a,b)=\lambda(m,n)$. Realizando el cambio de variable $u(t)=mt+nx(t)$ se tiene que

$$u' = m+nx' = m+nf\left(\frac{\lambda u+c}{u+p}\right)$$

que es una ecuación de variables separadas que se sabe resolver, y tras resolverla se deshace el cambio de variable.

Ejemplo 8.3.1. *Se ven dos ejemplos de ecuaciones reducibles a homogéneas de los dos últimos casos:*

1. *Se considera la ecuación*
$$y' = \frac{x+y-3}{1-x+y}$$
que tiene la forma de una reducible a homogénea. Se calcula la interscción de las rectas correspondientes a numerador y denominador, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \\ 1-x+y=0 \end{cases}$$
obteniendo como resultado $y=1$, $x=2$; luego ha de hacerse el cambio de variable
$$X = x-2 \qquad Y = y-1$$
que da lugar a la ecuación
$$Y = \frac{X+Y}{-X+Y}$$
que sí es homogénea, y está propuesta como ejercicio (ejercicio 2).

2. *Se considera la ecuación diferencial*
$$(4y+2x+3)y' - 2y - x - 1 = 0$$
que escrita en forma normal queda
$$y' = \frac{2y+x+1}{4y+2x+3}$$
que se corresponde a una ecuación reducible a homogénea del tercer caso descrito, es decir, las rectas son paralelas y si se identifican los coeficientes con la notación usada se tiene que
$$(m,n) = (2,4) \qquad (a,b) = \lambda(m,n) = (1,2)$$
siendo $\lambda = \frac{1}{2}$ de donde se hace el cambio de variable
$$u = mx + ny = 2x + 4y$$
y derivando queda
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 + 4\frac{\frac{1}{2}u+1}{u+3} = 2 + \frac{2u+4}{u+3} = \frac{4u+10}{u+3}$$
llegando a la ecuación en variables separadas
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{4u+10}{u+3}$$
que se resuelve como siempre:
$$\frac{u+3}{4u+10}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

e integrando en cada miembro:

$$\int \frac{u+3}{4u+10}\mathrm{d}u = x+c$$

y basta integrar la parte izquierda de la ecuación. **AQUÍ ACABA LO RELACIONADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES, Y LO QUE QUEDA ES CÁLCULO INTEGRAL.**

$$\int \frac{u+3}{4u+10}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int \frac{4u+12}{4u+10}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int \frac{4u+10}{4u+10}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int \frac{2}{4u+10}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\int \frac{4}{4u+10}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\log(4u+10)$$

y de aquí se llega a la igualdad

$$\frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\log(4u+10) = x+c$$

de donde

$$u + \frac{1}{2}\log(4u+10) = 4(x+c)$$

igualdad que da la solución implícita de la ecuación. Si se deshace el cambio de variable es

$$\boxed{2x+4y+\frac{1}{2}\log(8x+16y+10) = 4(x+c)}$$

8.4 Ecuaciones diferenciales exactas

Si se tiene una igualdad del tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t,x(t))\right) = 0$$

de aquí será

$$F(t,x(t)) = k$$

con k un número real cualquiera, que define implícitamente la solución de la ecuación. Por otro lado, por la regla de la cadena para las derivadas, la forma que ha de tener la primera igualdad es

$$\boxed{P(t,x(t)) + Q(t,x(t))x'(t) = 0}$$

para ciertas funciones $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, donde serán

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial F}{\partial t} \\[2ex] Q = \dfrac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

En general, para que una igualdad de la forma $P + Qx' = 0$ se corresponda con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t,x(t))\right)$ ha de verificarse que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

y así se llega a:

Definición 8.4.1 (Ecuación diferencial exacta)**.** *Una ecuación del tipo*

$$\boxed{\mathbf{P(t,x)+Q(t,x)x'=0}}$$

se dice exacta cuando

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}}$$

Ejemplo 8.4.1. *Si se tiene la ecuación*

$$t^2+x^2+2t+(2tx+3x^2)x'=0$$

se comprueba que se trata de una ecuación diferencial exacta calculando las derivadas parciales y viendo que se cumple la condición recuadrada en la definición:

$$P(t,x)=t^2+x^2+2t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x}(t,x)=2x$$

$$Q(t,x)=2tx+3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=2x$$

de donde

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial t}$$

luego sí es exacta. A partir de aquí lo único que ha de hacerse es calcular $F(t,x(t))$ con lo que se tiene:

Como $P(x,t)=\dfrac{\partial F}{\partial t}$ si integro respecto t tengo que

$$F(x,t)=\int P(x,t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+tx^2+t^2+\phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es una función que resulta del cálculo de la primitiva de P respecto de t. Por otro lado como sabemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=Q(x,t)=2tx+3x^2$$

por ser ecuación exacta, y también se sabe por el paso anterior que $F(x,t)=\frac{t^3}{3}+tx^2+t^2+\phi(x)$, luego si derivo esta última expresión respecto de x e igualo se tiene que

$$2tx+3x^2=2tx+\phi'(x)$$

siendo $\phi'(x)=3x^2$, luego será

$$\phi(x)=3\frac{x^3}{3}=x^3$$

y de aquí es

$$F(x,t)=\frac{t^3}{3}+tx^2+t^2+x^3+c$$

y la solución de la ecuación viene dada implícitamente por

$$\boxed{\mathbf{\frac{t^3}{3}+tx^2+t^2+x^3+c=0}}$$

8.4.1 Factores integrantes

Puede que una ecuación de la forma

$$P(t,x)+Q(t,x)x'=0$$

no sea exacta por no cumplir la condición $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial t}$, pero puede que exista cierta función $\mu(t,x)$ diferenciable tal que

$$P^*(t,x)+Q^*(t,x)x'=0$$

donde

$$\begin{cases} P^*(t,x)=\mu(t,x)P(t,x) \\ \\ Q^*(t,x)=\mu(t,x)Q(t,x) \end{cases}$$

sí sea exacta, luego será

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial \mathbf{Q}^*}{\partial \mathbf{t}}}$$

condición que equivale a que

$$\boxed{\mu\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}}-\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}\right)=\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{t}}\mathbf{Q}-\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{P}}$$

Los factores integrantes más empleados son de la forma $\mu(t)$, $\mu(x)$, $\mu(t+x)$, $\mu(tx)$ ó $\mu(t^2+x^2)$.

Ejemplo 8.4.2. *Las dos variables p =presión, y V =volumen de un cierto gas verifican la ecuación diferencial*

$$C_p p\mathrm{d}V+C_V V\mathrm{d}p=0$$

donde C_p, C_V constantes distintas que representan los calores específicos del gas a presión y volumen constante, respectivamente. Se pide:

1. *Comprobar que la ecuación no es diferencial exacta, pero que $\mu=\frac{1}{pV}$ es un factor integrante de la misma.*
2. *Resolverla.*

1. *Esta ecuación viene escrita con la notación de diferencial total, luego habrá que identificar la variable dependiente y la independiente. En este caso es p la variable dependiente (siempre es la que está al lado del =).*

   Si fuese una ecuación exacta, se verificaría que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}F(V,p)=0$ siendo

$$P(V,p)=\frac{\partial F}{\partial V}=C_p p$$

$$Q(V,p)=\frac{\partial F}{\partial p}=C_V V$$

   y se comprueba si se verifica la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial p}=C_p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial V}=C_V$$

y como por el enunciado del ejercicio es $C_p \neq C_V$, será

$$\frac{\partial P}{\partial p} \neq \frac{\partial Q}{\partial V}$$

luego la ecuación no es exacta.
Si se multiplica por $\mu = \dfrac{1}{pV}$, se tiene que

$$P^*(V,p) = \mu P(V,p) = \frac{1}{pV} C_p p = \frac{C_p}{V}$$

$$Q^*(V,p) = \mu Q(V,p) = \frac{1}{pV} C_V V = \frac{C_V}{p}$$

y de aquí es

$$\frac{\partial P^*}{\partial p} = 0 = \frac{\partial Q^*}{\partial V}$$

ya que P^* no depende de p, y Q^* no depende de V, luego sí se da la condición de exactitud, esto es, μ sí es factor integrante.

2. *Se resuelve la ecuación con lo que se sabe del apartado anterior:*
Como $\dfrac{\partial F}{\partial V} = P^* = \dfrac{C_p}{V}$, si integro respecto de V la igualdad se tiene que

$$F(V,p) = C_p \int \frac{\mathrm{d}V}{V} = C_p \log(V) + \phi(p)$$

Por otro lado tengo

(a) *Por ser ecuación diferencial exacta es $\dfrac{\partial F}{\partial V} = Q^* = \dfrac{C_V}{p}$*

(b) *De la igualdad $F(V,p) = C_p \log(V) + \phi(p)$,obtenida en el paso anterior, si se deriva respecto de p queda*

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \phi'(p)$$

Igualando ambas partes queda que $\phi'(p) = \frac{C_V}{p}$, esto es

$$\phi(p) = C_V \log(p)$$

de donde es

$$F(V,p) = C_p \log(V) + C_V \log(p) + c$$

la función buscada, luego la solución viene dada implícitamente por la igualdad

$$C_p \log(V) + C_v \log(p) = K$$

que en este caso puede despejarse la solución explícitamente y se tiene que es de la forma

$$\boxed{\mathbf{p(V) = \frac{K}{V^{C_V + C_p}}}}$$

con K un número real cualquiera no negativo.

Tema 9

Ecuaciones lineales

9.1 Ecuaciones lineales de primer orden

La forma general de estas ecuaciones es
$$x' = a(t)x + b(t)$$
con $a(t)$ y $b(t)$ funciones continuas definidas en un intervalo $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Cuando $b(t) = 0$ para todo t, la ecuación queda
$$x' = a(t)x$$
y se dice que es **homogénea**. La solución de una ecuación homogénea puede calcularse mediante variables separadas, y responde a la expresión
$$\boxed{\mathbf{x(t) = k\ \exp\left(\int a(t)dt\right)}}$$

Para la ecuación general, planteando el problema de valores iniciales haciendo uso de factores integrantes puede obtenerse el siguiente resultado de **existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales lineales de** 1^{er} **orden:**

Teorema 9.1.1. *Si $a(t)$, $b(t)$ funciones continuas en $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Entonces el problema de valores iniciales*
$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
con $t \in (\alpha, \omega)$ y $t_0 \in (\alpha, \omega)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ dados tiene una única solución dada por la expresión
$$\boxed{\mathbf{x(t) = \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\right]\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(u)du\right)ds\right]}}$$

Otra forma de ver esto es a través de la estructura algebraica del espacio de soluciones: **el conjunto de solciones de una ecuación lineal homogénea constituye un espacio vectorial de dimensión 1.**

También se tiene la siguiente propiedad muy importante:

La solución general de la ecuación lineal completa:

$$x' = a(t)x + b(t)$$

viene dada por la expresión

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $x_p(t)$ es una solución particular cualquiera.

Ejercicios. 1. *Hallar las soluciones de*

(a) $\begin{cases} x' + 5x = t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = \tan(t)x + \cos(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' + 2tx = t^3 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

2. **Ecuación de Ricatti:**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$$

con el cambio de variable $x = x_1(t) + \dfrac{1}{v}$ *donde* $x_1(t)$ *es solución particular, transforma la ecuación en una lineal.*

Aplicar esto para resolver:

(a) $x' = \dfrac{t+1}{2t^2}x^2 + \dfrac{1}{2t}x - \dfrac{t}{2}$ *con solución particular* $x_1(t) = t$.

(b) $x' = x^2 - \mathrm{e}^t x + \mathrm{e}^t$ *con solución particular* $x_1(t) = \mathrm{e}^t$.

(c) $x' = x^2 - 2x + 1$.

3. **Ecuación de Bernouilli:** $x' = a(t)x + b(t)x^n$ *pasa a lineal mediante el cambio de variable* $v = x^{1-n}$.

9.2 Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. Teoría general

En general, un **sistema de ecuaciones diferenciales** tiene la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

y un **sistema lineal de ecuaciones diferenciales** tiene la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1(t)}x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

que en forma matricial quedaría

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} definidas y continuas en $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Si llamo $\mathbf{A}(\mathbf{t}) = (a_{ij}(t))$ la matriz anterior, y $\mathbf{b}(\mathbf{t}) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))^t$ entonces el anterior sistema puede escribirse de forma más sintética mediante la expresión

$$\boxed{\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}(\mathbf{t})}$$

y el **problema de valor inicial** (ó de Cauchy) asociado consiste en hallar la función (vectorial) $x(t)$ en (α, ω) tal que

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{t}) \\ \\ \mathbf{x}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x_0} \end{cases}$$

con $t_0 \in (\alpha, \omega)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dados.

Se puede demostrar, con las condiciones dadas, la **existencia y unicidad de solución para este tipo de sistemas**, pero no habrá manera, en general, de hallar explícitamente la solución, salvo para el caso de coeficientes constantes.

El anterior problema es equivalente al problema integral

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x_0} + \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{A}(\mathbf{s})\mathbf{x}(\mathbf{s}) + \mathbf{b}(\mathbf{s})]\mathbf{ds}$$

Una forma de aproximar la solución es el **Método de las iterantes de Picard...** (para profundizar).

Teorema 9.2.1. *Si $A(t)$, $b(t)$ continuas en $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$, entonces el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{t}) \\ \\ \mathbf{x}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x_0} \end{cases}$$

con $t_0 \in (\alpha, \omega)$, y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dados tiene solución única en (α, ω).

Teorema 9.2.2. *El conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$$

forma un espacio vectorial de dimensión n.

Con esto, se tiene que la solución general del caso homogéneo será totalmente conocida cuando se encuentren n soluciones linealmente independientes (recordar concepto de espacio vectorial y base de un espacio vectorial n-dimensional).

El objetivo fundamental será, por tanto, encontrar una **base de soluciones**.

9.2.1 Matrices fundamentales

Definición 9.2.1 (Matriz fundamental)**.** $\Phi(t)$ *se dice matriz fundamental de la ecuación*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$$

si sus n columnas son n soluciones linealmente independientes de dicha ecuación.

Así, $\Phi(t)c$, con c vector n-dimensional arbitrario constante, es el conjunto de soluciones general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$: resolver esta ecuación se reduce, pues, a encontrar una matriz fundamental.

Propiedades 9.2.1. *Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental cuyas columnas sean soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$. Una condición necesaria y suficiente para que $\Phi(t)$ sea matriz fundamental es que exista $t_0 \in (\alpha, \omega)$ tal que $det(\Phi(t_0)) \neq 0$.*
Como consecuencia,

$$\boxed{det(\Phi(t)) \neq 0 \ \ \forall t \in (\alpha, \omega) \ \Leftrightarrow \ det(\Phi(t_0)) \neq \textit{para algún } t_0 \in (\alpha, \omega) \textit{ concreto}.}$$

Además también se tiene:

1. *Si $\Phi(t)$ es matriz fundamental, y C matriz constante no singular, entonces $\Phi(t)C$ matriz fundamental. Y si $\Phi_1(t)$ otra matriz fundamental, entonces existe C_1 matriz constante no singular, tal que $\Phi_1(t) = \Phi(t)C_1$.*
2. *Las soluciones de la ecuación diferencial matricial $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{X}$ están dadas por*
$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \Phi(t)\mathbf{C}$$
donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$ y $\mathbf{C}$ es una matriz de constantes.
3. ***Fórmula de Liouville:*** *sea $\Phi(t)$ cuyas columnas son soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$. Entonces, para todo $t \in (\alpha, \omega)$ y $t_0 \in (\alpha, \omega)$ fijo se tiene*
$$det(\Phi(t)) = det(\Phi(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} traza(A(s))\mathrm{d}s\right)$$
(la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal).

9.2.2 Sistemas lineales con coeficientes constantes

Se trata de $x' = Ax$ tal que A es una matriz real de orden n (n filas y n columnas). Las soluciones van a estar definidas en $\mathbb{R}$, y sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = Ax$ tal que $\Phi(0) = I$:

Proposición 9.2.1. *1. La solución del p.v.i.* $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ *es* $x(t) = \Phi(t)x_0$.

2. $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$, *cualesquiera que sean* $t, s \in \mathbb{R}$.

3. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

En estos problemas, se verá un método de cálculo de matrices fundamentales.

Se puede observar una fuerte analogía entre las propiedades de estas matrices fundamentales y la función exponencial, y se observa que si $x' = ax$ es $\phi(t) = \mathrm{e}^{at}$ solución, y de forma natural puede extenderse $\Phi(t) = \mathrm{e}^{At}$ como solución de $x' = Ax$.

9.2.3 Sistemas lineales no homogéneos. La fórmula de variación de las constantes

De $x' = A(t)x + b(t)$, la solución general viene dada por

$$x(t) = \Phi(t)C + x_p(t)$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental e la ecuación $x' = Ax$, C es un vector de $\mathbb{R}^n$ constante y $x_p(t)$ cierta solución particular de la ecuación completa.

El siguiente resultado proporciona una tal solución particular:

Teorema 9.2.3 (Variación de las constantes)**.** *Si* $\Phi(t)$ *es una matriz fundamental de* $x' = A(t)x$, *entonces*

$$x_p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s \quad ; \quad t, t_0 \in (\alpha, \omega)$$

es la solución particular de $x' = A(t)x + b(t)$ *que satisface la condición inicial* $x(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Como **consecuencia** la solución del p.v.i. $\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ con $t_0 \in (\alpha, \omega)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s}$$

Si en particular, $A(t) = A$ matriz constante, $t_0 = 0$ y $\Phi(t)$ es tal que $\Phi(0) = I$ entonces la anterior solución toma la forma

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s)b(s)\mathrm{d}s$$

9.2.4 Ecuación diferencial de orden n

Ecuación diferencial de la forma

$$a_n(t)x^{n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

con $a_i(t)$ funciones continuas en $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}$.

La ecuación se dice **homogénea** si $b \equiv 0$, y haciendo el cambio de variables

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x \\ x_1 = x' \\ \vdots \\ x^{n-1)} = x_{n-1} \end{array}\right\} \quad x_n' = -a_{n-1}(t)x_{n-1} - \ldots - a_1(t)x_1 - a_0(t)x_0$$

Puede verse como un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1, que viene dado por

$$x' = A(t)x \quad \text{con} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & -a_{n-3}(t) & \ldots & -a_0(t) \end{pmatrix}$$

El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial de dimensión n, y una **base del espacio de soluciones** está dado por las funciones $\varphi_k^{j)}(t)$ con $j = 1, \ldots, n-1$ y $k = 1, \ldots, n$ que satisfacen las condiciones iniciales

$$\varphi_j(t_0) = 0 \quad , \quad \varphi_j'(t_0) = 0 \quad \ldots \quad \boxed{\varphi_j^{j-1)}(t_0) = 1} \quad \ldots \quad \varphi_j^{n-1)}(t_0) = 0$$

con $t_0 \in (\alpha, \omega)$.

Si $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación de orden n, la correspondiente matriz fundamental estará dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1)} & \varphi_2^{n-1)} & \ldots & \varphi_n^{n-1)} \end{pmatrix}$$

y **el determinante de** $\Phi(t)$ **se denomina wronskiano de las funciones** $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ denotado por $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. La **fórmula de Liouville** toma aquí la forma

$$\boxed{\mathbf{det}(\Phi(\mathbf{t})) = \mathbf{det}(\Phi(\mathbf{t_0}))\exp\left(-\int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{a_1(s)ds}\right)}$$

Si $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ linealmente dependientes en (α, ω), su wronskiano será nulo en (α, ω), pero el recíproco no es cierto: puede ser nulo el wronskiano siendo $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ linealmente independientes.

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

la fórmula de Liouville puede usarse para construir una base de soluciones **supuesto que se conozca una solución** $x(t) = \varphi_1(t)$**.** Por la Fórmula de Liouville:

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = c_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)$$

donde c_0 es el valor del wronskiano en $t = t_0$, y desarrollando la igualdad anterior

$$\varphi_2'(t) - \frac{\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{c_0}{\varphi_1(t)} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)$$

ecuación diferencial lineal de primer orden en $\varphi_2(t)$; $c_0 = (\varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_1'(t_0)\varphi_2(t_0))$ se determina mediante los valores iniciales $\{\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0)\}$, conocidos, y valores iniciales $\{\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0)\}$ prefijados de modo que constituyan un vector en $\mathbb{R}^2$ linealmente independiente de $\{\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0)\}$, que dan lugar a soluciones linealmente independientes.

9.2.5 Ecuación no homogénea

Una vez visto todo lo relacionado con la ecuación homogénea, lo que se hace es pasar al sistema equivalente

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + \mathbf{b}(t)$$

con $A(t)$ matriz del sistema, y

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

La solución general de la ecuación no homogénea se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la no homogénea.

Se ha de aplicar, en el caso general, **variación de las constantes**.

9.3 Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Sistemas del tipo

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

con $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, y $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matriz con coeficientes reales.

Todo se basa en el cálculo de los valores propios de la matriz. Para matrices de orden 2 y orden 3 los únicos casos que pueden darse son:

$$\textbf{Orden 2} \begin{cases} \text{- Los dos valores propios distintos} \\ \text{- Los dos valores propios complejos} \\ \text{- Los dos valores propios iguales} \end{cases}$$

Orden 3
- Los tres valores propios distintos, ó algunos iguales pero la matriz es diagonalizable (si λ de orden de multiplicidad 2 $rango(A-\lambda I)=1$)
- Dos valores propios complejos, y uno real
- Valores propios iguales, y matriz no diagonalizable (si λ de orden de multiplicidad 2 $rango(A-\lambda I)=2$)

Se detalla el caso de orden 3, siendo análogo el de orden 2. El primer paso, común a todos los casos es resolver la ecuación característica, esto es resolver

$$p(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

que es una ecuación polinómica de grado 3

1. **Matriz diagonalizable:** cuando los 3 valores propios son distintos, ó $rango(A-\lambda I)=1$ si λ raíz de orden de multiplicidad 2. Una vez conocidos los valores propios $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$; tenemos que

$$\mathbf{PAP^{-1}}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y una matriz fundamental viene dada por

$$\mathbf{M(t)}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

de donde, por teoría general de sistemas lineales, la solución general del sistema viene dada por

$$\mathbf{X(t)}=\mathbf{M(t)C}$$

donde $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ vector de constantes arbitrarias.

Así, lo único que queda es calcular una matriz de paso $\mathbf{P}$ (no es única). Para hacerlo se han de resolver sistemas de ecuaciones lineales:

(a) Si los tres valores propios son distintos, he de resolver 3 sistemas lineales. Cada sistema tendrá infinitas soluciones, y una solución cualquiera de ellas será válida como columna de la matriz de paso. Los sistemas a resolver serán:

$$\begin{cases} (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0} & \text{de aquí saco } \mathbf{v_1} \text{ primera columna} \\ (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0} & \text{de aquí saco } \mathbf{v_2} \text{ segunda columna} \\ (\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0} & \text{de aquí saco } \mathbf{v_3} \text{ tercera columna} \end{cases}$$

Una vez que he sacado v_1, v_2, v_3 se tiene que

$$P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$$

es la matriz por columnas buscada, y una matriz fundamental se se construye mediante la expresión

$$\mathbf{M(t)} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

siendo

(b) Si sólo hay dos valores propios λ_1, λ_2 con λ_2 raíz de orden 2, para que la matriz sea diagonalizablea ha de ser $\mathbf{rg}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \mathbf{1}$, ya que si no estaríamos en el caso no diagonalizable que se verá después. Suponiendo el caso diagonalizable, es decir, $\mathbf{rg}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \mathbf{1}$, la matriz P se obtiene resolviendo los siguientes sistemas

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{de aquí saco } \mathbf{v_1} \text{ primera columna} \\ \\ (\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{de aquí saco } \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \text{ linealmente independientes para segunda y tercera columna} \end{cases}$$

Una vez que he sacado v_1, v_2 se tiene que

$$\mathbf{P} = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$$

es la matriz por columnas buscada, y una matriz fundamental se construye mediante la expresión

$$\mathbf{M(t)} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

siendo

(c) El caso de un valor propio triple y diagonalizable es trivial, ya que si λ es la única raíz triple, ha de ser $\mathbf{rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, esto es, $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ luego la única posibilidad es que sea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sistema con solución $x_i(t) = c_i e$ con $i = 1, 2, 3$

En el caso de que se de una condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$, será $\mathbf{C} = \mathbf{P^{-1}X(0)}$, es decir, la única solución del p.v.i. asociado viene dada por la expresión

$$\mathbf{X(t)} = \mathbf{M(t)P^{-1}X(0)}$$

y esto ocurre así en todos los casos.

2. **Matriz no diagonalizable:** este caso se divide en varios subcasos:

9.4 Ecuaciones lineales de orden superior:

Si se tiene una ecuación del tipo

$$a_n(t)y^{n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) = 0$$

ecuacioón lineal de orden n, siempre puedo escribirla como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas mediante el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_2 \\ y'' = y_3 \\ \vdots \\ y^{n-1)} = y_n \\ \\ y_n' = -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y_n - \dfrac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)}y_{n-1} - \ldots - \dfrac{a_1(t)}{a_n(t)}y_2 - \dfrac{a_0(t)}{a_n(t)}y_1 - \dfrac{b(t)}{a_n(t)} \end{cases}$$

que en forma matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_1(t)}{a_n(t)} & \ldots & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.4.1. *Si se tiene la ecuación*

$$y''' + \cos(5t^2)y'' + \frac{1}{\log(\sqrt{t^2+2})}y' + e^t y + \tan(t)$$

ecuación de orden 3 equivalente a:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^t & -\dfrac{1}{\log(\sqrt{t^2+2})} & -\cos(5t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tan(t) \end{pmatrix}$$

La resolución de este tipo de ecuaciones, por tanto es la misma que para sistemas de ecuaciones (aplicación del método de variación de las constantes,...). Pero hay un caso particular cuya resolución es más sencillas:

9.4.1 Ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes

Para la **ecuación homogénea**, se trata de

$$a_n y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

con $a_0,\dots,a_n$ número reales; que equivale al siguiente sistema (escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \dots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Si se aplica el método general para sistemas de ecuaciones homogéneas (cálculo de valores propios,...), puede verse que este problema se reduce al cálculo de las raíces de la **ecuación característica**, que es la ecuación polinómica dada por

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Lo que hacemos es calcular las n raíces reales ó complejas, y a cada una se le asocia una solución de la ecuación diferencial homogénea linealmente independiente con las asociadas al resto de raíces, con lo que se obtiene una base del espacio de soluciones de la ecuación (que por la teoría general para sistemas de ecuciones lineales, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n), por lo que de aquí obtenemos la solución general de la ecuación.

Se tienen 4 casos:

1. Si λ raíz simple de la ecuación característica, tenemos que una solución de la ecuación asociada a la raíz viene dada por:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

2. Si λ raíz real de multiplicidad α, es decir si

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = (z-\lambda)^{\alpha} q(z)$$

con $q(z)$ polinomio, asociada a la raíz λ encontramos α soluciones linealmente independientes que vienen dadas por:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

3. Si $\lambda = a + b\mathrm{i}$ raíz compleja simple, se tiene que $\bar{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ también va a ser raíz simple de donde tenemos dos soluciones linealmente independientes. Lo que hay que tener encuenta es la definición de exponencial compleja, que viene dada por

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{a}(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b))$$

y las dos soluciones linealmente independientes son

$$\boxed{\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)}$$

4. Si $\lambda = a + b\mathrm{i}$ raíz compleja de orden de multiplicidad α, se tiene que $\bar{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ también va a ser raíz de orden de multiplicidad α, de donde tenemos 2α soluciones linealmente independientes que son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx), x\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \ldots, x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) \\ \\ \mathrm{e}^{ax}\sin(bx), x\mathrm{e}^{ax}\sin(bx), \ldots, x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) \end{array}}$$

En la práctica se han de calcular las raíces, y una a una se ve en cuál de los anteriores 4 casos se está obteniendo las distintas soluciones linealmente independientes. Una vez hecho esto se habrá construido una base de soluciones, lo que da lugar a la solución general de la ecuación, que no es más que una combinación lineal arbitraria las soluciones obtenidas.

Para el caso de la ecuación completa, es decir, para la ecuación

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

lo que se ha de hacer es hallar una solución particular $y_p(x)$, y la solución general vendrá dada por la suma de la solución general de la homogénea $y_h(x)$, más la solución particular hallada, esto es,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

El cálculo de una solución particular de la completa, en general, no es posible, pero sí hay algunos casos especiales donde se pueden encontrar:

1. **El término independiente** $b(t)$ **es un polinomio:** en este caso se tiene la ecuación de la forma

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = A_s x^s + + A_1 x + A_0$$

y la solución particular escogida (supuesto que $a_0 \neq 0$) también será un polinomio, luego será de la forma

$$y_p(x) = B_s x^s + \ldots + B_1 x + B_0$$

y basta sustituir en la ecuación, y determinar los coeficientes B_i teniendo en cuenta que a la derecha se obtendrá un polinomio en coeficientes B_i, y dos polinomios son iguales cuando tienen el mismo grado y sus coeficientes coinciden (**método de los coeficientes indeterminados**).

Ejemplo 9.4.2. *Dada la ecuación*

$$y'' + y = x^2 + x$$

lo primero que se hace es calcular la solución general de la homogénea, para ello obtenemos las raíces de la ecuación característica

$$z^2 + 1 = 0$$

que son $z = \pm i$ *luego una base de soluciones viene dada por*

$$\mathscr{B} = \{\cos(x), \sin(x)\}$$

siendo la solución general

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Ahora calculo una solución particular de la completa aplicando el método de coeficientes indeterminados:

$$y_p(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$$

y sustituyo

$$\left.\begin{array}{l} y_p'(x) = 2B_2x + B_1 \\ \\ y_p''(x) = 2B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; y_p''(x) + y_p(x) = \underbrace{2B_2}_{y_p''(x)} + \underbrace{(B_2x^2 + B_1x + B_0)}_{y_p(x)} = B_2x^2 + B_1x + (2B_2 + B_0) = x^2 + x$$

de donde coeficiente a coeficiente es

$$\left.\begin{array}{l} B_2 = 1 \\ B_1 = 1 \\ 2B_2 + B_0 = 0 \;\Rightarrow\; B_0 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = x^2 + x - 2}$$

es solución particular de la ecuación, luego la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x^2 + x - 2}$$

2. Otra forma de hallar soluciones particulares de la completa es a través del **método operacional**. Usando la notación

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = D^k$$

puede escribirse la ecuación original

$$a_n y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

como

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \ldots + a_1Dy + a_0y = b(x)$$

ó bien

$$\underbrace{(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0)}_{P(D)}y = b(x)$$

que finalmente puede verse como

$$\boxed{\mathbf{P(D)y = b(x)}}$$

Propiedades del operdador $P(D)$: dado el operador $P(D)$, se verifica que:

(a) $P(D)\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}P(k)$.

(b) $P(D^2)\sin(ax) = \sin(ax)P(-a^2)$.

(c) $P(D^2)\cos(ax) = \cos(ax)P(-a^2)$.

(d) $P(D)\mathrm{e}^{kx}v(x) = e^{kx}P(D+k)v(x)$.

ÁLGEBRA DE OPERADORES: dados $P_1(D)$ y $P_2(D)$ se tiene que

(a) *Suma de operadores:* viene definido por

$$[P_1(D) + P_2(D)]f(x) = P_1(D)f(x) + P_2(D)f(x)$$

(b) *Producto de operadores:* viene definido por

$$[P_1(D)P_2(D)]f(x) = P_1(D)[P_2(D)f(x)]$$

y verifica la *propiedad distributiva*:

$$P(D)[P_1(D)+P_2(D)] = P(D)P_1(D)+P(D)P_2(D)$$

(c) *Operador inverso:* el resultado de aplicar $\frac{1}{P(D)}$ a $f(x)$ función continua es solución de la ecuación

$$P(D)y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(D)}}\mathbf{f(x)}}$$

luego $P(D)\left[\frac{1}{P(D)}f(x)\right] = f(x)$.

En particular se tiene que $\frac{1}{D^p}f(x) = \int\int\ldots\int f(x)\mathrm{d}x^p$.

Propiedades del operdador $\frac{1}{P(D)}$: dado el operador $\frac{1}{P(D)}$, tenemos que

(a) $\frac{1}{P(D)}kf(x) = k\frac{1}{P(D)}f(x)$.

(b) $\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{kx} = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{P(k)}$, si $P(k)\neq 0$.

(c) $\frac{1}{P(D^2)}\sin(ax) = \frac{\sin(ax)}{P(-a^2)}$.

(d) $\frac{1}{P(D^2)}\cos(ax) = \frac{\cos(ax)}{P(-a^2)}$.

(e) $\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{kx}v(x) = \mathrm{e}^{kx}\frac{1}{P(D+k)}v(x)$.

(f) **Principio de superposición:** $\frac{1}{P(D)}[f_1(x)+f_2(x)] = \frac{1}{P(D)}f_1(x)+\frac{1}{P(D)}f_2(x)$.

(g) $\frac{1}{P_1(D)P_2(D)}f(x) = \frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_2(D)}f_1(x)$.

Ejemplo 9.4.3. *Se ven algunos ejemplos de ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes. Sólo se calculará una solución particular de la ecuación en cada caso, aplicando las propiedades del operador* $\frac{1}{P(D)}$ *vistas.*

(a) $y''+4y=\mathrm{e}^x$ *siendo* $P(D)y=\mathrm{e}^x$ *con* $P(D)=D^2+4$*, y aplicando la segunda propiedad se calcula*

una solución particular

$$y_p(x) = \frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{P(1)} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1)^2+4} = \frac{\mathrm{e}^x}{5}$$

(b) $y^{iv)} + y = 2\cos(3x)$ *de donde*

$$y_p(x) = \frac{1}{P(D^2)} 2\cos(3x) = 2\frac{\cos(3x)}{(-3^2)^2+1}\cos(3x) = \frac{\cos(3x)}{41}$$

(c) $y'' + 9y = 5\sin(x)$ *de donde*

$$y_p(x) = \frac{1}{P(D^2)} 5\sin(x) = 5\frac{\sin(x)}{-1^2+9} = 5\frac{\sin(x)}{8}$$

(d) $y'' - 4y' + 4y = x^2\mathrm{e}^{2x}$ *de donde* $(D^2-4D+4)y = x^2\mathrm{e}^{2x}$.

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2-4D+4}x^2\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{(D-2)^2}x^2\mathrm{e}^{2x} = (*)$$

y aplicando la quinta propiedad es

$$(*) = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{P(D+2)}x^2 = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{(D-2+2)^2}x^2 = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D^2}x^2 = \mathrm{e}^{2x}\int\int x^2 \mathrm{d}x^2 = \mathrm{e}^{2x}\frac{x^4}{12}$$

siendo $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}\frac{x^4}{12}$ *una solución particular.*

(e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^x$ *de donde* $(D-1)^3 y = \mathrm{e}^x$ *siendo una solución particular*

$$y_p(x) = \frac{1}{(D-1)^3}\mathrm{e}^x$$

En este caso no puedo aplicar que $\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{P(1)}$ *ya que* $P(1) = 0$*, pero sí puedo aplicar la quinta propiedad, esto es,* $\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{kx}v(x) = \mathrm{e}^x\frac{1}{P(D+1)}v(x)$ *con* $v(x) = 1$*, y haciendo esto se tiene:*

$$y_p(x) = \frac{1}{(D-1)^3}\mathrm{e}^x = \frac{1}{(D-1)^3}\mathrm{e}^x\,1 = \mathrm{e}^x\frac{1}{P(D+1)}\,1 = \mathrm{e}^x\frac{1}{(D-1+1)^3}\,1 = \mathrm{e}^x\frac{1}{D^3}\,1 = \mathrm{e}^x\int\int\int 1\mathrm{d}x^3 = \mathrm{e}^x\frac{x^3}{6}$$

siendo $y_p(x) = \mathrm{e}^x\frac{x^3}{6}$ *una solución particular de la ecuación.*

Tema 10

Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de orden superior

Index