EJERCICIOS DERIVABILIDAD

① Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = \sqrt{3x + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$

b) $f(x,y) = y e^{x + \log(y)}$ en $(x_0, y_0) = (0,1)$

c) $f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ en $(x_0, y_0) = (1,3)$

② Dada

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcular las derivadas parciales para cualquier punto $\neq$ de $(0,0)$.

b) Calcular, mediante el límite, la existencia de derivadas direccionales, y derivabilidad en el origen $(0,0)$ de f.

③ Igual que ② con $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

④ Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = |y| \log(1+x)$ ~~$(x_0, y_0) = (0,0)$~~ ¿Qué pasa en $(0,0)$?

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = |x| \operatorname{sen}(x^2+y^2)$ ¿Qué pasa en los puntos del tipo $(0,y)$?

(4) Determinar el gradiente y la matriz hessiana asociada a las siguientes funciones. Dada f dos veces derivable se dice que verifica la ecuación de Laplace, si se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Comprobar también si las funciones satisfacen la ecuación de Laplace:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$ b) $f(x,y) = x^3+3xy^2$

c) $f(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ d) $f(x,y) = e^{-x}\cos(y) - e^{-y}\cos(x)$

(5) Calcular el plano tangente de $f(x,y)$ en el punto indicado:

a) $f(x,y) = 3x^2-y^2+3y$ en $P_0 = (-1,2,f(-1,2))$

b) $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$ en $P_0 = (-1,1,f(-1,1))$

c) $f(x,y) = x\log(y)$ en $P_0 = (4,1,f(4,1))$

(6) Calcular la matriz hessiana de las funciones del primer y quinto ejercicio.

(7) Estudiar la existencia de extremos, y en caso afirmativo clasificarlos, para las funciones del primer y quinto ejercicio.

(8) Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} + \log(1+\operatorname{tg}(2x+y^2)) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Estudiar continuidad, existencia de derivadas parciales, derivabilidad y diferenciabilidad. Calcular el plano tangente al punto $(3,2,f(3,2))$.