Convolución de señales en frecuencia usando MATLAB

Convolution of signals in frequency using MATLAB

Luis Ramiro Aliendre Santiváñez [(1)]*, Ramiro Franz Aliendre García [(2)]

[(1)] Facultad Nacional de Ingeniería– UTO

[(2)] Facultad Nacional de Ingeniería, Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica – UTO

Información del Artículo

Recibido/Received:

16/05/2022

Aceptado/Accepted:

18/06/2022

Palabras clave:

Convolución, MATLAB, modulación, señal, sistema, transformada de Fourier de tiempo discreto.

Keywords:

Convolution, discrete time Fourier transform, modulation, MATLAB, signal, system.

Citar como:

Aliendre Santiváñez, L.R., *Aliendre García*, R.F., (2022), Convolución de señales en frecuencia usando MATLAB. *Revista Ingeniería*, 15(1), 51-58.

RESUMEN

Este artículo muestra un programa desarrollado en MATLAB para graficar la convolución de dos señales de tiempo discreto en el dominio de la frecuencia y su modulación. Se establecen dos señales, cuya gráfica aparece en la parte superior del programa, se opera la integral de convolución generando un área en verde que representa la intersección de ambas señales y finalmente se muestra su modulación de forma gráfica en la parte inferior del programa. Las dos señales con las cuales se realiza la convolución representan las entradas de un sistema y la señal resultante (modulada), representa la salida del mismo. Para comprender el análisis en el dominio de la frecuencia, se incluye la herramienta matemática que permite esto, la transformada de Fourier de tiempo discreto.

ABSTRACT

This article describes a MATLAB program that graphs the frequency domain convolution of two signals as well as their modulation. Two signals are established, which graphic appears in the top part of the program, the integral convolution operates, generating a green area representing the intersection of both signals, and finally, the modulation is shown in a graphic in the lower portion of the program. The two signals used in the convolution represent the system's inputs, while the resulting signal (modulated) represents the system's output. In order to comprehend the analysis in the frequency domain, the mathematical tool that allows this is included, the discrete time Fourier transform.

E-mail | luis.aliendre@fni.uto.edu.bo
E-mail | r.aliendre@doc.uto.edu.bo
* Autores de correspondencia

1. Introducción

La operación de convolución de dos señales, la transformada discreta de Fourier y sus propiedades, son conceptos fundamentales al momento de trabajar en procesamiento digital de señales .Las aplicaciones de estas herramientas matemáticas son variadas en el área de telecomunicaciones, procesamiento de audio o procesamiento de imágenes, es por este motivo que el desarrollo de un programa en MATLAB que muestre en forma gráfica la integral de convolución en el dominio de la frecuencia de dos señales de tiempo discreto (propiedad de modulación) ayuda a entender de mejor manera estas operaciones matemáticas y los conceptos detrás de las mismas.

El programa corresponde a un análisis en el dominio de la frecuencia de dos señales de tiempo discreto. Es posible encontrar aplicaciones desarrolladas en Java, C++ y otros lenguajes de programación que muestran el resultado de la convolución de dos señales de tiempo continuo, quedándose en esa operación simple. Un programa que muestre en forma gráfica, como si se tratara de un video, la integral de convolución dos señales en frecuencia usando un software más difundido en ingeniería como es MATLAB, representa un aporte en la utilización de herramientas tecnológicas con fines explicativos para estudiantes o investigadores interesados en el tema

2. Marco teórico

2.1. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Para comprender que es un sistema lineal e invariante en el tiempo, se deben establecer sus propiedades.

Un sistema lineal en tiempo discreto (o continuo), debe poseer la propiedad de superposición.

La propiedad de superposición se descompone a su vez en la propiedad de aditividad y la propiedad de escalamiento, de manera que:

Si $x_1[\mathrm{n}]$, $x_2[\mathrm{n}]$ son dos entradas arbitrarias a un sistema y $y_1[\mathrm{n}]$, $y_2[\mathrm{n}]$ son sus respectivas salidas la respuesta de la suma de las entradas será:

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n] \tag{1}$$

Que muestra la aditividad.

Y también:

$$\alpha x_1[n] \rightarrow \alpha y_1[n] \tag{2}$$

Que muestra la escalabilidad.

Ambas propiedades pueden escribirse en una sola ecuación así:

$$\alpha x_1[\mathrm{n}] + \beta x_2[\mathrm{n}] \rightarrow \alpha y_1[\mathrm{n}] + \beta y_2[\mathrm{n}] \tag{3}$$

Por último, un sistema lineal debe cumplir además con la propiedad de entrada cero, salida cero. Es decir que ante una señal de entrada cero, la salida debe ser también cero, así:

$$0 = 0 \cdot x_1[\mathrm{n}] \rightarrow 0 \cdot y_1[\mathrm{n}] = 0 \tag{4}$$

Un sistema invariante en el tiempo es aquel donde un desplazamiento de tiempo en la entrada, generará también un desplazamiento de tiempo en la salida, de manera que:

$$\mathrm{x}[\mathrm{n} - n_0] \rightarrow \mathrm{y}[\mathrm{n} - n_0] \tag{5}$$

Cuando un sistema cumple con todas estas propiedades, se dice que es un sistema lineal e invariante en el tiempo.

2.2. Convolución

La convolución es una operación matemática, que para el caso de tiempo discreto está definida para dos señales $x[n]$ y $h[n]$ que producirá una tercera señal $y[n]$, producto de la convolucion de ambas.

Es términos prácticos, la convolución es útil para saber la respuesta ($y[n]$) de un sistema ante cualquier entrada ($x[n]$), conociendo su respuesta a la señal de impulso unitario ($h[n]$), descrita por la ecuación:

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{6}$$

Toda señal de tiempo discreto puede descomponerse como una combinación lineal de impulsos desplazados con una cierta amplitud, esto da lugar a la sumatoria de convolución en tiempo discreto.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{7}$$

De manera análoga, para el caso de tiempo continuo, se obtiene la integral de convolución.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{8}$$

2.3. Transformada de Fourier de tiempo discreto

Existen 4 categorías de señales, de las cuales se desprenden 4 tipos de transformada de Fourier.

- Señal aperiódica continua, para la cual se puede determinar la transformada de Fourier.
- Señal periódica continua, para la cual se puede determinar las series de Fourier.
- Señal aperiódica discreta, para la cual se puede determinar la transformada de Fourier de tiempo discreto.
- Señal periódica discreta, para la cual se puede determinar la transformada discreta de Fourier.

Se introduce la transformada discreta de Fourier cuyos conceptos servirán para comprender la transformada de Fourier de tiempo discreto.

La transformada discreta de Fourier transforma una señal de entrada de N muestras en dos señales de salida de $\frac{N}{2}+1$ muestras, generalmente la señal de entrada está en el dominio del tiempo y las dos señales de salida en el dominio de la frecuencia (corresponden a los valores de las amplitudes de las componentes senoidales y cosenoidales), la señal de entrada suele denotarse con una letra minúscula y las señales de salida con letras mayúsculas.

La ecuación de síntesis de la transformada discreta de Fourier, es:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} Re\,\{\overline{X}[k]\}\cos\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2} Im\,\{\overline{X}[k]\}\sin\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) \tag{9}$$

La transformada de Fourier de tiempo discreto, corresponde a señales aperiódicas discretas, esto quiere decir que el número de muestras N tiende a infinito. Donde:

$$X[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cos(\omega n) + i\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\sin(\omega n) \tag{10}$$

Expresando esta ecuación en una exponencial compleja:

$$X[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} \tag{10}$$

Es necesario aclarar que el dominio del tiempo de $x[n]$ sigue siendo discreto, pero el dominio de la frecuencia de $X[\omega]$ es continuo, por eso que la transformada de Fourier de tiempo discreto se expresa en una integral en vez de una sumatoria, haciendo que la ecuación de síntesis sea:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{11}$$

Esto quiere decir que la transformada de Fourier de tiempo discreto cambia una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, expresado así:

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{i\omega}) \tag{12}$$

3. Métodos.

3.1. Desarrollo del programa en MATLAB.

La convolución de dos señales de tiempo discreto implica la multiplicación de sus correspondientes transformadas, así:

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{13}$$

$$Y(e^{i\omega}) = X(e^{i\omega})H(e^{i\omega}) \tag{14}$$

Debido a la dualidad entre los dominios del tiempo y la frecuencia, la multiplicación de dos señales en tiempo discreto corresponden a la convolución en el dominio de la frecuencia y usando la propiedad de modulación es posible generalizar esa ecuación a dos señales de tiempo discreto arbitrarias y hallar la respuesta de un sistema en frecuencia conociendo la convolución periódica (periodo de 2π) de esas dos señales de tiempo discreto, donde:

$$y[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{15}$$

Por la propiedad de modulación será:

$$Y(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{X_1}(e^{i(\omega-\theta)})X_2(e^{i\theta})\,d\theta \tag{16}$$

Es decir:

$$Y(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi}(X_1(e^{i\omega}) \otimes X_2(e^{i\omega})) \tag{17}$$

En la aplicación es necesario especificar las dos señales arbitrarias a ser utilizadas, invocadas en el script de MATLAB del programa principal.

```
for i=2:np+1
    hc=x2TF(-t+t(i));            % Señal X1_tilde(omega-theta)
    tp=t(i);
    subplot(3,1,1)               % Gráficos de las señales X1_tilde, X2
    plot(t,xc,'b',t,hc,'r',tp,0,'ro','LineWidth',1)
    axis([tip tfp -0.2 1.2])
    title(['$\widehat{X}_1 \left( e^{\jmath \left(\omega - \theta \right)}' ...
        '\right) \qquad X_2 \left(e^{\jmath \theta}\right)$'], ...
        'Interpreter','latex','FontSize',20)
    xlabel('$\theta$','Interpreter','latex','FontSize',12)
    ylabel('','Interpreter','latex','FontSize',12)
    legend ('$\widehat{X}_1 \left( e^{\jmath \left(\omega - \theta \right)} \right)$', ...
        '$ X_2 \left(e^{\jmath \theta}\right)$', '$\omega$', ...
        'Interpreter','latex','FontSize',16)
    grid
    grid minor
```

Fig. 1. Parte 1 Grafico de las señales $\widehat{X_1}$ y X_2.

Fuente: elaboración propia.

```
    prc=xc.*hc;                  % Producto X1_tilde(omega-theta)*X2(omega)
    prc1=[0 prc 0];
    t1=[ti-dt t tf+dt];
    subplot(3,1,2)
    plot(t1,prc1,'b','LineWidth',1)
    hold on
    fill(t1,prc1,'g')
    plot(tp,0,'ro','LineWidth',1)
    hold off
    axis([tip tfp -0.2 1.2])
    title(['$\widehat{X}_1 \left( e^{\jmath \left(\omega - \theta \right)} ' ...
        '\right) X_2 \left(e^{\jmath \theta}\right)$'],'Interpreter', ...
        'latex','FontSize',20)
    xlabel('$\theta$','Interpreter','latex','FontSize',12)
    ylabel('','Interpreter','latex','FontSize',12)
    grid
    grid minor
```

Fig. 2. Producto de las señales y coloreado en verde de la intersección de ambas.

Fuente: elaboración propia.

```
y(i)=trapz(t,prc)/(2*pi);  % Cálculo de la convolución
subplot(3,1,3)
plot(t,y,'k',tp,0,'ro','LineWidth',1)
axis([tip tfp -0.2 0.7])
title('$ X(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi} X_1 (e^{j\omega}) \otimes X_2 (e^{j\omega})$', ...
    'Interpreter','latex','FontSize',20)
xlabel('$\omega$','Interpreter','latex','FontSize',12)
ylabel('','Interpreter','latex','FontSize',12)
grid
grid minor
```

Fig. 3. Modulación de las señales

Fuente: elaboración propia.

Las funciones a ser invocadas son x1TF y x2TF.

```
function y = x1TF(t)
% Cálculo de la variación funcional para cada rango de tiempo t, señal x(t)
% Connvolución continua
y1 = 0;
y2 = 1;
y3 = 0;
y4 = 1;
y5 = 0;
y6 = 1;
y7 = 0;
% Poniendo juntos las diferentes variaciones funcionales en
% sus respectivos rangos de validez
y = y1.*(t<-2*pi-3*pi/4)+y2.*(t>-2*pi-3*pi/4 & t<-2*pi+3*pi/4)+y3.*
(t>=-2*pi+3*pi/4 & t<-3*pi/4)+y4.*(t>=-3*pi/4 & t<3*pi/4)+y5.*
(t>=3*pi/4 & t<2*pi-3*pi/4)+y6.*(t>=2*pi-3*pi/4 & t<2*pi+3*pi/4)+y7.*
(t>=2*pi+3*pi/4);
```

Fig. 4. Función en MATLAB para obtener $\widehat{X_1}$.

Fuente: elaboración propia

```
function y = x2TF(t)
% Cálculo de la variación funcional para cada rango de tiempo t, señal h(t)
% Connvolución continua
y1 = 0;
y2 = 1;
y3 = 0;
%y4 = 0;
%y5 = 1;
% Poniendo juntos las diferentes variaciones funcionales en
% sus respectivos rangos de validez
y = y1.*(t<-pi/2)+y2.*(t>=-pi/2 & t<=pi/2)+y3.*(t>pi/2);
```

Fig. 5. Función en MATLAB para obtener X_2.

Fuente: elaboración propia

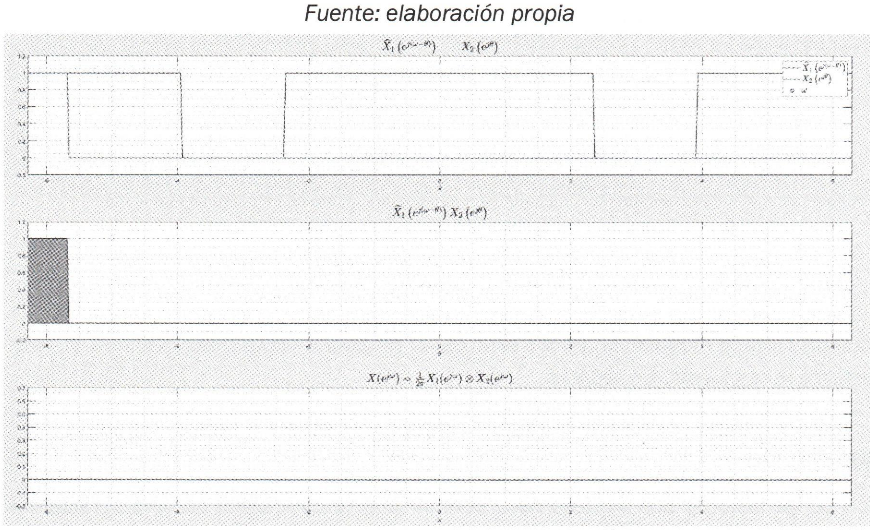

Fig. 6. Captura del programa mientras realiza la modulación en forma gráfica.

Fuente: elaboración propia.

La parte superior del programa muestra a ambas funciones $\widehat{X_1}$ (en línea azul), reflexionada y desplazada en función de ω y X_2 (en línea roja) en función en θ.

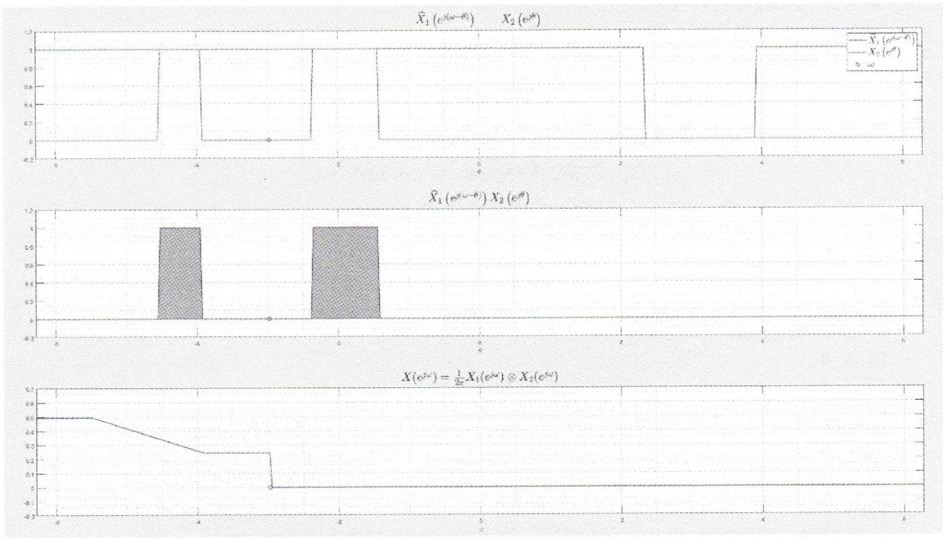

Fig. 7. Captura del programa mientras realiza la modulación en forma gráfica, parte 2.
Fuente: elaboración propia.

El grafico muestra el producto de las dos señales y se colorea en verde el área de intersección de ambas, que representa el valor de la integral.

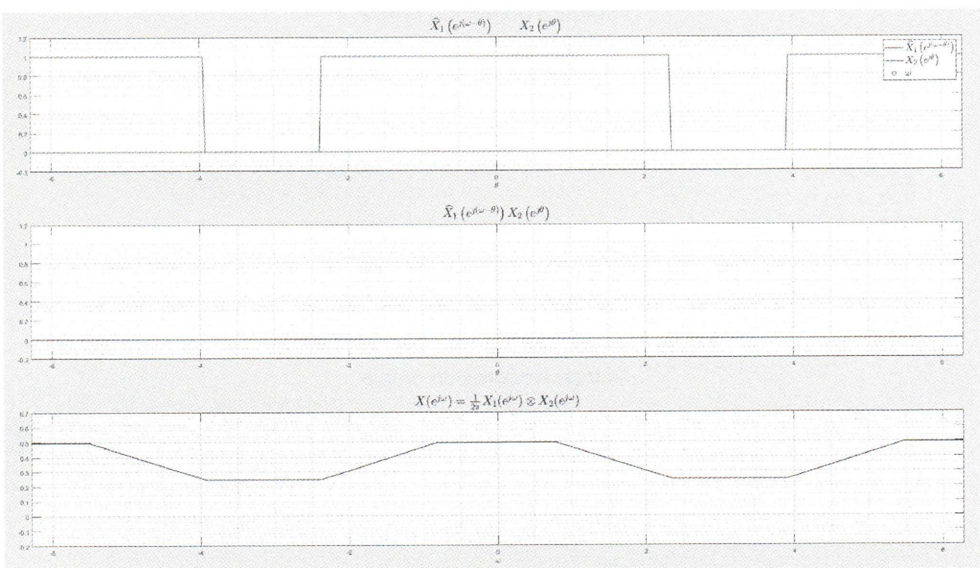

Fig. 8. Captura del programa con la modulación concluida, parte 3.
Fuente: elaboración propia.

La parte inferior del gráfico muestra la modulación de las señales. El programa desarrollado captura el valor del área en verde, que multiplicado por $\frac{1}{2\pi}$, representa la respuesta del sistema.

3.2. Propiedad de modulación

La modulación es el proceso de fusionar dos señales para obtener una tercera señal con las características de las dos señales moduladas, por ejemplo, la modulación en amplitud está compuesta de una señal de banda base de audio que es multiplicada por una señal portadora para así obtener una señal modulada y como la multiplicación en el dominio del tiempo, corresponde a la convolución en dominio de la frecuencia, el espectro de la señal modulada es el espectro de la señal de audio desplazada a la frecuencia de la señal portadora. Esto facilita que una señal de audio que podría escucharse dentro una habitación, llegue hasta otra habitación, otra cuadra o incluso otra ciudad, etc.

4. Discusiones

Experiencias previas de otros autores, indicaron que codificar este tipo de aplicaciones en lenguajes de programación más generales (como JAVA o C++) suelen representar una dificultad al momento de lidiar con transformada de Fourier de tiempo discreto ya que es necesario generar código para herramientas básicas, tales como aritmética de números complejos o el cálculo del área de intersección de dos curvas, mientras MATLAB tiene librerías ya desarrolladas. Esto hace que sea una herramienta ampliamente utilizada en ingeniería.

Conclusiones

Este programa fue utilizado para explicar de forma visual la convolución y modulación de dos señales de tiempo discreto en frecuencia. Con este tipo de herramientas se facilita la comprensión de los conceptos matemáticos necesarios para su aplicación en el tratamiento digital de señales.

Fue previsto, que este artículo sirva a los estudiantes de ingeniería como una guía para comprender las operaciones matemáticas de la convolución y modulación de señales.

Referencias

Bourdin, J. J., Shesh, A., Anderson, E. F., Duchowski, A., Liarokapis, F., y Redford,A. (2017) The new CGEMS-preparing the computer graphics educational materials source to meet the needs of educators.

Crutchfield, S. G. and Rugh, W. J. (1998). Interactive learning for signals, systems, and control. IEEE Control Systems, 18:88–91.

Hanisch, F. (2007). Signal Convolution. En: CGEMS-Computer Graphics Educational Materials. The Eurographics Association, 9-7 July.

Oppenheim, A. V. y Schafer, R. W. (2014). Discrete-time signal processing. Pearson.

Smith, S. W. (2000). The discrete Fourier transform. En: Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists. Newnes, pp. 141-159.

Smith, S. W. (2000). Fourier Transform Properties. En: Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists. Newnes, pp. 187-208.