Universidad de San Andrés

Práctica 6: Primitivas

1. En cada uno de los siguientes casos, verificar que F es una primitva de f.

   (a) $F(x) = \sin(x^3)$ $\qquad f(x) = \cos(x^3)3x^2$

   (b) $F(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

   (c) $F(x) = \ln(x)x + 1$ $\qquad f(x) = \ln(x) + 1$

2. Encontrar una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para cada una de las siguientes funciones. ¿Es única la F hallada en cada caso?

   (i) $f(x) = 1$,

   (ii) $f(x) = -x^2 + 2x^3$,

   (iii) $f(x) = 8/x$,

   (iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

   (v) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$,

   (vi) $f(x) = e^{2x-8}$,

   (vii) $f(x) = 4\sin(3x)$,

   (a) Para los items (i) y (ii) hallar una función F que cumpla, además, $F(0) = 3$.

   (b) Para los items (iii) a (vii) hallar una función F que cumpla, además, $F(4) = -1$.

3. Hallar, si es posible, una función f con las condiciones pedidas y decidir, en cada caso, si la respuesta es única.

   (a) $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$.

   (b) $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)}{x-4} = \dfrac{1}{4}$. ¿Qué pasa si se pide $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)}{x-4} = 0$?

4. Encontrar, sin utilizar métodos, una primitiva de cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = (x-1)(x+2)$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

   (c) $f(x) = \sqrt{x}(5x^2 + \sqrt{x})$.

   (d) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

5. Hallar la función beneficio de una compañía que produce x artículos con un beneficio marginal de $\$100 - 2x$ por unidad de venta, sabiendo que el beneficio es de $\$800$ cuando se producen 10 unidades.

6. Un móvil se desplaza por un camino con velocidad, en el instante t, dada por

$$v(t) = t(t-100)\text{km/h}.$$

   Si en el instante inicial $t = 0$ el móvil se encuentra a 30 km del punto de medición, ¿cuál es la posición $p(t)$ para $0 \le t \le 1000$?

7. Un cohete está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = \sqrt{t} + 1$ para todo $t \geq 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en $\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$. ¿Qué velocidad tiene en el instante $t = 64$? ¿A qué distancia está del punto de partida en ese instante?

8. (a) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, comprobar que para $a \neq 0$ vale que $\dfrac{F(ax+b)}{a}$ es una primitiva de $f(ax+b)$.

   (b) Usar el item anterior para calcular en forma directa las siguientes integrales:

   (i) $\displaystyle\int (2x+5)^{99}\, dx$, (ii) $\displaystyle\int \sqrt{6x+4}\, dx$, (iii) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+7}\, dx$, (iv) $\displaystyle\int \sin(4x-5)\, dx$, (v) $\displaystyle\int e^{1-3x}\, dx$.

9. Aplicando el método de integración por partes, calcular:

   (a) $\displaystyle\int x\sin(2x-1)\, dx$,
   (b) $\displaystyle\int (4x-1)^2\cos(x)\, dx$,
   (c) $\displaystyle\int x^2(x-7)^{-1/2}\, dx$,
   (d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^5}\, dx$,
   (e) $\displaystyle\int 2x\ln(3x)\, dx$,
   (f) $\displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\, dx$,
   (g) $\displaystyle\int x\ln(x^{-1})\, dx$,
   (h) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\, dx$,
   (i) $\displaystyle\int (2x+3)xe^{2x}\, dx$,
   (j) $\displaystyle\int x^2e^{-x+4}\, dx$,
   (k) $\displaystyle\int (x^2+2)e^{-x+4}\, dx$,
   (l) $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{arctg}(x)\, dx$,

10. Aplicando el método de sustitución, calcular:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$,
   (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$,
   (c) $\displaystyle\int x\sin(4x^2)\, dx$,
   (d) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^{-2}(x)\, dx$,
   (e) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(2x+3)}{2x+3}\, dx$,
   (f) $\displaystyle\int x^{-1}\cos(\ln(x))\, dx$,
   (g) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(1+\cos(2x))^2}\, dx$,
   (h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5+6\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$,
   (i) $\displaystyle\int \frac{(3-2\ln(x))^2}{x}\, dx$,
   (j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$,
   (k) $\displaystyle\int (1+5x^2)^{-1}\, dx$,
   (l) $\displaystyle\int \frac{7}{x^2+4x+13}\, dx$,
   (m) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+1}\, dx$,
   (n) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$,

11. Una medicación se saca de un congelador a -20° centígrados hacia un habitáculo que se encuentra a 15° centígrados. Si la temperatura del medicamento cambia, para t medido en minutos, a razón de $10.5e^{-0.3t}$, ¿cuántos minutos hay que esperar para que la temperatura de la medicación llegue a 0°?

12. Brasil consume carbón a razón de $(4t-10)e^{0.2t^2-t}$ toneladas métricas anuales en tiempo t donde $t=0$ corresponde a 1990. Encontrar la fórmula que describe el consumo total de este mineral si se sabe que en 1990 fue de 3000 toneladas métricas.

13. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int x\ln(\sqrt{x+7})\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x+6})\,dx$,

(d) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+2}}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+2\cos(x)}\,dx$,

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)\cos(\ln(x))}{x}\,dx$,

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\,dx$,

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$,

(j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

(k) $\displaystyle\int (x^3+x)\sqrt{x^2+1}\,dx$.